ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Uğur SADULLAH

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Uğur SADULLAH tarafından hazırlanan **“ *M* -Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri”** adlı tez çalışması 28/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ

Eş Danışman : Arş. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN

Jüri Üyeleri :

Başkan **:** Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Anabilim Dalı
Kırıkkale Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "***M*-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (28/02/2022).

Uğur SADULLAH

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

M-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Uğur SADULLAH

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Eş Danışman: Arş. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN

Bu yüksek lisans tez çalışmasında matematiğin yanı sıra çeşitli bilim dallarında önemli uygulama alanına sahip Banach büzülme ilkesi literatürde yer alan küme değerli dönüşümler için elde edilen sabit nokta sonuçlarını içerecek şekilde genişletilmiştir. Bunun için öncelikle metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için elde edilen sabit nokta çalışmaları hatırlatılmıştır. Ardından M-metrik uzayların tanımı ve topolojik yapısı ile ilgili bazı özellikler ifade edilerek bu uzaylarda küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tipinde elde edilen sabit nokta sonucu ispatsız olarak verilmiştir. Son olarak M-metrik uzaylarda Klim-Wardowski tipinde karma küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu bölümde elde edilen sonuç önemli bir örnekle desteklenmiştir.

2022, 33 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, Küme değerli dönüşüm, M-metrik uzaylar

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FIXED POINT THEOREMS IN M-METRIC SPACES

Uğur SADULLAH

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa ASLANTAŞ
Co-Advisor: Dr. Hakan ŞAHİN

In this master of science thesis, the Banach contraction principle, which has a significant application area in various sciences as well as mathematics, has been extended to include fixed point results for multivalued mappings existing in the literature. Hence, first, the fixed point studies obtained for multivalued mappings in metric spaces have been reminded. Then, recalling the definition and some properties of M-metric spaces, the Feng-Liu type fixed point result obtained for multivalued mappings in these spaces has been given without proof. Finally, some Klim-Wardowski type fixed point results for mixed multivalued mappings in M-metric spaces have been expressed and proved. Also, the result obtained in this section has been supported by an important example.

2022, 33 pages

Keywords: Fixed point, Multivalued mappings, M-metric spaces

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ'a sabrı, yardımları, iyi niyeti, rehberliği ve anlayışı için teşekkür ederim. Yine eş danışmanım Arş. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN'e sabrı, yardımları, rehberliği, teşvik edici yapısı ve anlayışı için teşekkür ederim.

Uğur SADULLAH
Çankırı, Şubat 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER **3**
2.1 Metrik Uzaylar ve Topolojisi **3**
2.2 Sabit Nokta Teori **6**
3. LİTERATÜR ÖZETİ **8**
3.1 Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Sonuçları **8**
3.2 M-Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Sonuçları **12**
4. KARMA KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLER **16**
4.1 KW-Tipi m-Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri **16**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **29**
KAYNAKLAR **30**
ÖZGEÇMİŞ **33**

SİMGELER DİZİNİ

$\overline{A^m}$	τ_m topolojisine göre $A \subseteq X$'nin kapanışı
$C(X)$	X'in kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X'in kapalı ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi
$C_m(X)$	τ_m'e göre X'in bütün kapalı alt kümelerinin ailesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$P(X)$	X'in bütün alt kümelerinin ailesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
τ_m	M-metriğin ürettiği topoloji

KISALTMALAR DİZİNİ

$\limsup_{n\to\infty} \zeta_n$	$(\zeta_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin üst limiti
$\liminf_{n\to\infty} \zeta_n$	$(\zeta_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisinin alt limiti

1. GİRİŞ

Matematik ve mühendislik uygulamalarında sıklıkla $Tx = x$ şeklindeki denklemlerle karşılaşırız. Sabit nokta teori bu denklemleri çözmek kullanılan en önemli yöntemlerden biridir. Metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Banach (1922) tarafından ifade ve ispat edilen literatürde Banach büzülme ilkesi olarak bilinen bir sonuç ile başlamıştır. Bu sonuç tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktasının var olduğunu ve hatta bu sabit noktanın nasıl bulunabileceğini ifade eder. Banach büzülme ilkesi integral denklemler teorisi ve diferansiyel denklemler teorisi gibi matematiğin birçok dalında olduğu gibi ekonomi, mühendislik ve istatistik gibi çeşitli bilim dallarında da çok önemli uygulama alanlarına sahiptir. Bu nedenle Banach büzülme ilkesinin birçok yazar tarafından tek değerli dönüşümler için genelleştirmeleri elde edilmiştir (Magadevan vd. 2022; Kesahorm and Sintunavarat 2022; Sahin 2022; Altun vd. 2021 a; Aslantas 2021 a; Aslantas 2021 b; Sahin 2021).

Küme değerli dönüşümler için ilk kez sabit noktanın varlığı ve aynı zamanda Banach büzülme ilkesinin önemli bir genellemesi Nadler (1969) tarafından elde edilmiştir. Ardından Reich (1972) Nadler'in sonucunu lineer olmayan bir büzülme yardımıyla genişletmeye çalışmış ancak bunu ancak kompakt değerli dönüşümler için yapabilmiştir. Reich tarafından ifade edilen sonucun kapalı ve sınırlı küme değerli dönüşümler için geçerli olup olmadığı sorusuna Mizoguchi ve Takahashi (1989) yeni bir hipotez altında olumlu cevap vermiştir. Son zamanlarda Nadler'in sonucunun çok önemli ve ilginç bir genellemesi Reich ve Mizoguchi-Takahashi den farklı bir doğrultuda Feng ve Liu (2006) tarafından kapalı küme değerli dönüşümler için Hausdorff metriği kullanmadan elde edilmiştir. Daha sonra Klim ve Wardowski (2007) ilk olarak Mizoguchi-Takahashi ve Feng-Liu' nun düşüncelerinden ilham alarak küme değerli dönüşümler için yeni bir büzülme dönüşümü tanımlamışlardır. Ardından bu yeni büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir. Üstelik bu sonuçların literatürdeki iyi bilinen sonuçları genelleştirdiğine dair karşılaştırmalı örnekler vermişlerdir.

Diğer taraftan bilgisayar bilimlerindeki deneyimlerinden ilham alan Matthews (1994) tarafından bir (X, d) metrik uzayındaki $\zeta = \eta \Rightarrow d(\zeta, \eta) = 0$ koşulunu zayıflatmak için

ifade edilen kısmi metrik kavramı tanımlanmıştır. Yakın zamanda Asadi vd. (2014) M-metrik uzay kavramı yardımıyla kısmi metrik uzay kavramını genelleştirdiler ve M-metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir. Çok yakın zamanda ise Altun vd. (2018) M-metrik uzaylar üzerinde farklı topolojik yapıları ve bu topolojilere göre bütün kapalılar ailesini dikkate alarak M-metrik uzaylar üzerinde üzerinde küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tipinde bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında öncelikle literatürde yer alan çalışmalar ile birlikte kendi sonuçlarımızı ifade ve ispat ederken kullanacağımız bazı önemli tanım ve teoremleri vererek başlayacağız. Ardından daha önce ifade ettiğimiz yazarlar tarafından küme değerli dönüşümler için elde edilen sabit nokta sonuçları ve bunlar arasındaki ilişiler üçüncü bölümde hatırlatılacaktır. Son bölümde ise M-metrik uzaylar üzerinde küme değerli dönüşümler için Klim-Wardowski tipinde bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tez çalışması boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler yer almaktadır.

2.1 Metrik Uzaylar ve Topolojisi

Tanım 2.1. Kabul edelim ki $d: X\ x\ X \to \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $\zeta, \eta, \theta \in X$ için d dönüşümü

$d_1)\ d(\zeta, \eta) = 0 \Leftrightarrow \zeta = \eta,$
$d_2)\ d(\zeta, \eta) = d(\eta, \zeta),$
$d_3)\ d(\zeta, \theta) \leq d(\zeta, \eta) + d(\eta, \theta),$

koşullarını sağlıyorsa o zaman X üzerinde bir metriktir denir. Ayrıca, (X, d)' ye bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2. Kabul edelim ki $T: X \to Y$, (X, d) ve (Y, d') metrik uzayları arasında bir dönüşüm ve $\zeta_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\zeta \in B_d(\zeta_0, \delta)$ iken $T\zeta \in B_{d'}(T\zeta_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa T dönüşümüne ζ_0 noktasında süreklidir denir. Yani,

$T, \zeta_0 \in X$ de sürekli$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var öyle ki $T\big(B_d(\zeta_0, \delta)\big) \subset B_{d'}(T\zeta_0, \varepsilon)$.

Tanım 2.4. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Bu durumda her n doğal sayısı için $T(n) = \zeta_n \in X$ olacak şekildeki $T: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X' de bir dizi denir ve $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ veya kısaca $\{\zeta_n\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. Kabul edelim ki $\{\zeta_n\}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi ve $\zeta_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ iken $d(\zeta_n, \zeta_0) < r$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir

$n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ_0 noktasına yakınsıyor denir ve $\zeta_n \to \zeta_0$ veya $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0$ şeklinde yazılır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ var öyle ki } \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow d(\zeta_n, \zeta_0) < \varepsilon.$$

Tanım 2.6. Kabul edelim ki $\{\zeta_n\}$, (X, d) metrik uzayında bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için$m, n \geq n_0$ iken $d(\zeta_n, \zeta_m) < \varepsilon$ koşuluna sahip bir $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $\{\zeta_n\}$ bir Cauchy dizisidir denir.

Tanım 2.7. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise (X, d) tam metrik uzaydır denir.

Tanım 2.8. (X, d) ve (Y, d′) metrik uzaylar ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $\zeta \in X$ noktası ve $\zeta_n \to \zeta$ koşuluna sahip $\{\zeta_n\} \subseteq X$ dizisi için $T\zeta_n \to T\zeta$ ise T fonksiyonuna ζ noktasında dizisel süreklidir denir.

Tanım 2.9. X bir topolojik uzay, $T: X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm ve $\zeta_0 \in X$ olsun. Bu durumda eğer,

$$T\zeta_0 \leq \liminf_{\zeta\to\zeta_0} T\zeta$$

oluyorsa f fonksiyonuna ζ_0 noktasında alt yarı sürekli bir fonksiyon ve eğer,

$$\limsup_{\zeta\to\zeta_0} T\zeta \leq T\zeta_0$$

oluyorsa T fonksiyonuna ζ_0 noktasında üst yarı sürekli bir fonksiyon denir. T dönüşümü her $\zeta \in X$ noktasında alt yarı sürekli (üst yarı sürekli) ise bu durumda T fonksiyonuna alt yarı süreklidir (üst yarı süreklidir) denir.

Tanım 2.10. X, Y boştan farklı kümeler olsun. Bu durumda X'in her elemanını Y'nin bir tek elemanına eşleyen T dönüşümüne tek değerli dönüşüm denir ve $T: X \to$ Y şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. X, Y boştan farklı kümeler olsun. Bu durumda X'in her elemanını Y'nin bir alt kümesine eşleyen T dönüşümüne küme değerli dönüşüm denir ve $T: X \to$ P(Y) şeklinde gösterilir. Burada $P(Y)$, Y nin bütün alt kümelerinin ailesidir.

Tanım 2.12. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda her $A, B \in CB(X)$ için

$$H(A,B) = max\left\{\sup_{\zeta \in A} d(\zeta, B), \sup_{\eta \in B} d(A, \eta)\right\}$$

şeklinde tanımlı $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}$ dönüşümüne Pompeiu-Hausdorff metrik denir. Burada $CB(X)$, X' in boştan farklı bütün kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesidir.

Tanım 2.13. X boştan farklı bir küme, $T: X \to$ X bir dönüşüm ve $\zeta_0 \in X$ olsun. Bu durumda

$$O_T(\zeta_0) = \{\zeta_0, T\zeta_0, T^2\zeta_0, \dots\}$$

şeklinde tanımlı kümeye ζ_0 noktasının orbiti denir.

Tanım 2.14. (Ciric 1974) (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to$ X bir dönüşüm olsun. Eğer her $\zeta \in X$ için $\zeta_n \to \zeta^*$ koşuluna sahip her $\{\zeta_n\} \subseteq O_T(\zeta)$ dizisi için $T\zeta_n \to T\zeta^*$ ise T dönüşümüne $\zeta^* \in X$ noktasında yörüngesel süreklidir denir. Eğer T dönüşümü her $\zeta \in X$ noktasında yörüngesel sürekli ise T, X üzerinde yörüngesel süreklidir denir.

2.2 Sabit Nokta Teori

Tanım 2.15. X boştan faklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\zeta = T\zeta$ olacak şekildeki $\zeta \in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

Tanım 2.16. X boştan faklı bir küme ve $T: X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda eğer bir $\zeta \in X$ noktası içi $\zeta \in T\zeta$ oluyorsa ζ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

Örnek 2.1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(\zeta) = \zeta^3$ dönüşümün sabit noktası $\zeta = 1$ ve $\zeta = 0$ noktasıdır.

Örnek 2.2. $X = (0, \infty)$, $T : X \to X$, $T(\zeta) = \frac{\zeta}{4}$ olması durumunda T dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Tanım 2.14. $T: X \to X$, (X, d) metrik uzayı üzerinde bir dönüşüm olsun. Her $\zeta, \eta \in X$ için;

$$d(T\zeta, T\eta) \leq cd(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde $c \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına T nin Lipschitz sabiti denir.

Bir T Lipschitz dönüşümü için, $c < 1$ ise T ye bir büzülme dönüşümü, $c \leq 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Ayrıca eğer $\zeta \neq \eta$ olacak şekildeki her $\zeta, \eta \in X$ için;

$$d(T\zeta, T\eta) < d(\zeta, \eta)$$

oluyorsa T ye bir büzülebilir dönüşüm denir.

Uyarı 2.1. Bu tanımlardan her büzülme dönüşümünün büzülebilir, büzülebilir dönüşümün de genişlemeyen dönüşüm olduğu açıktır.

3. LİTERATÜR ÖZETİ

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi Banach (1922) tarafından Banach büzülme ilkesi olarak bilinen aşağıdaki sonuç ile başlamıştır:

Teorem 3.1. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T bir büzülme dönüşümü ise yani, her $\zeta, \eta \in X$ için

$$d(T\zeta, T\eta) \leq cd(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde bir $c \in [0,1)$ varsa T dönüşümü X uzayında birtek sabit noktaya sahiptir. Üstelik her $\zeta_0 \in X$ için $\{T^n\zeta_0\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

3.1 Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Sonuçları

Banach büzülme ilkesinin matematik ve diğer bilim dallarındaki uygulamaları ve önemi sebebiyle birçok yazar tarafından tek değerli dönüşümler için genelleştirmeleri elde edilmiştir (Magadevan vd. 2022; Kesahorm and Sintunavarat 2022; Sahin 2022; Altun vd. 2021 a; Aslantas 2021 a; Aslantas 2021 b; Sahin 2021). Küme değerli dönüşümler için sabit noktanın varlığı ve aynı zamanda Banach büzülme ilkesinin ilginç ve önemli bir genellemesi Nadler (1969) tarafından aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 3.2. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\zeta, \eta \in X$ için

$$H(T\zeta, T\eta) \leq cd(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde bir $c \in [0,1)$ var ise bu durumda T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

Birçok yazar Nadler' in sonucunu kimi zaman uzayı genişleterek kimi zaman da büzülmeyi zayıflatarak genişletmeye çalışmıştır (Chandok vd. 2021; Altun vd. 2021; Nashine vd. 2021; Alamgir vd. 2021; Dag vd. 2017; Durmaz ve Altun 2016; Altun vd.

2021 b). Bu bağlamda Reich (1972) Nadler'in sonucunu lineer olmayan bir büzülme yardımıyla genişletmeye çalışmış ancak aşağıdaki sonuçta da görülebileceği gibi bunu ancak kompakt değerli dönüşümler için başarmıştır:

Teorem 3.3. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to K(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $t \in (0, \infty)$ için $\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1$ ve $\zeta \neq \eta$ olacak şekildeki her $\zeta, \eta \in X$ için

$$H(T\zeta, T\eta) \leq \varphi(d(\zeta, \eta))d(\zeta, \eta)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varphi: (0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu varsa T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

Reich tarafından Teorem 3.3'ün kapalı ve sınırlı değerli dönüşümler için geçerli olup olmadığı sorusuna Mizoguchi ve Takahashi (1989) $t \in [0, \infty)$ için $\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1$ hipotezi altında aşağıdaki şekilde olumlu cevap vermiştir:

Teorem 3.4. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $t \in [0, \infty)$ için $\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1$ ve $\zeta \neq \eta$ olacak şekildeki her $\zeta, \eta \in X$ için

$$H(T\zeta, T\eta) \leq \varphi(d(\zeta, \eta))d(\zeta, \eta)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varphi: (0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu varsa T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

Son zamanlarda Nadler'in sonucunun çok önemli ve ilginç bir genellemesi Reich ve Mizoguchi-Takahashi den farklı bir doğrultuda Feng ve Liu (2006) tarafından $C(X)$ değerli dönüşümler için Hausdorff metriği kullanmadan aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 3.5. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to C(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $\zeta \in X$ için

$$d(\eta, T\eta) \leq cd(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde $0 < c < b < 1$ ve $\eta \in I_b^{\zeta} = \{\theta \in T\zeta : bd(\zeta, \theta) \leq d(\zeta, T\zeta)\}$ var olsun. Eğer $g(\zeta) = d(\zeta, T\zeta)$ fonksiyonu X üzerinde alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Daha sonra Klim ve Wardowski (2007) ilk olarak Mizoguchi-Takahashi ve Feng-Liu' nun düşüncelerinden ilham alarak küme değerli dönüşümler için yeni bir büzülme dönüşümü tanımlamışlardır. Ardından bu yeni büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir. Üstelik bu sonuçların literatürdeki iyi bilinen sonuçları genelleştirdiğine dair karşılaştırmalı örnekler vermişlerdir. Şimdi Klim ve Wardowski tarafından ispatlanan sonucu ifade edelim.

Teorem 3.6. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to C(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $t \in [0. \infty)$ için

$$\lim_{r \to t^+} \sup \varphi(r) < b$$

olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, b)$ fonksiyonu var olsun. Eğer her $\zeta \in X$ için

$$d(\eta, T\eta) \leq \varphi\big(d(\zeta, \eta)\big) d(\zeta, \eta)$$

olacak şekilde bir $\eta \in I_b^{\zeta}$ var ve $g(\zeta) = d(\zeta, T\zeta)$ fonksiyonu X üzerinde alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Eğer her $t \in [0. \infty)$ için $\varphi(t) = c, c \in (0, b)$ olarak seçilirse o zaman Teorem 3.5 yardımıyla Teorem 3.6'nın bütün koşullarının sağlandığını görebiliriz. Aşağıdaki örnek ise Teorem 3.6' nın Teorem 3.5'in gerçek bir genellemesi olduğunu göstermektedir (Klim ve Wardovski 2007).

Örnek 3.1. $X = [0,1]$ ve bu küme üzerinde alışılmış d metriğini alalım. Eğer $T: X \to C(X)$ ve $\varphi: [0, \infty) \to \left[0, \frac{3}{4}\right)$ dönüşümleri

$$T\zeta = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2}\zeta^2\right\} & , \quad \zeta \in \left[0, \frac{15}{32}\right) \cup \left(\frac{15}{32}, 1\right] \\ \left\{\frac{17}{96}, \frac{1}{4}\right\} & , \quad \zeta = \frac{15}{32} \end{cases}$$

ve

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & , \quad t \in \left[0, \frac{7}{24}\right) \cup \left(\frac{7}{24}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{425}{768} & , \quad t = \frac{7}{24} \\ \frac{1}{2} & , \quad \mathrm{t} \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa Teorem 3.6' nın bütün koşullarının sağlandığı görülebilir. Ancak $\zeta = 1$ ve $\eta = \frac{1}{2}$ için $b \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$ alınırsa $c < b$ olacak şekildeki her $c \in (0,1)$ için

$$d(\eta, T\eta) = \frac{3}{8} > c.\frac{1}{2} = cd(\zeta, \eta)$$

olur. Eğer $\zeta = \frac{15}{32}$ ve $\eta \in \left\{\frac{17}{96}, \frac{1}{4}\right\}$ için $b \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ alınırsa $c < b$ olacak şekildeki her $c \in (0,1)$ için ya

$$bd(\zeta, \eta) > d(\zeta, T\zeta)$$

ya da

$$d(\eta, T\eta) = \frac{7}{32} > c.\frac{7}{32} = c.d(\zeta, \eta)$$

olacağı için Teorem 3.5'in büzülme koşulu sağlanmaz. O halde bu örneğe Teorem 3.6 uygulanabilirken Teorem 3.5 uygulanamaz.

3.2 M-Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Sonuçları

Bu bölüme bilgisayar bilimlerindeki deneyimlerinden ilham alan Matthews (1994) tarafından bir (X, d) metrik uzayındaki $\zeta = \eta \Rightarrow d(\zeta, \eta) = 0$ koşulunu zayıflatmak için ifade edilen kısmi metrik kavramını hatırlatarak başlayalım:

Tanım 3.1. X $\neq \emptyset$ bir küme ve $p: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $\zeta, \eta, \theta \in X$ için p dönüşümü,

(p_1) $p(\zeta, \eta) = p(\zeta, \zeta) = p(\eta, \eta) \Leftrightarrow \zeta = \eta$,

(p_2) $p(\zeta, \zeta) \leq p(\zeta, \eta)$,

(p_3) $p(\zeta, \eta) = p(\eta, \zeta)$,

(p_4) $p(\zeta, \theta) \leq p(\zeta, \eta) + p(\eta, \theta) - p(\eta, \eta)$.

şartlarını sağlasın. Bu durumda p dönüşümüne X üzerinde bir kısmi metrik ve (X, p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir.

Her metrik uzayın bir kısmi metrik uzay olduğu açıktır, ancak tersi her zaman doğru değildir. Gerçekten, eğer $X = [0, \infty)$ ve $p : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $\zeta, \eta \in X$ için $p(\zeta, \eta) = max\{\zeta, \eta\}$ şeklinde tanımlanırsa (X, p) bir kısmi metrik uzaydır ancak bir metrik uzay değildir. Daha sonra kısmi metrik uzaylarda birçok yazar hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için çeşitli sabit nokta sonuçları elde etmiştir (Javed 2021; Mlaiki 2021; Radenovic 2021).

Yakın zamanda Asadi vd. (2014) kısmi metrik uzay kavramını M-metrik uzay kavramı yardımıyla genelleştirdiler ve bu uzaylar üzerinde tanımlı tek değerli dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir. Ardından birçok yazar M-metrik uzaylarda hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir (Van An vd. 2015; Altun vd. 2020; Karapınar vd. 2020). Şimdi M-metrik uzay kavramını ve bu uzayla ilgili bazı temel tanımları hatırlayalım:

Tanım 3.2. X $\neq \emptyset$ bir küme ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $\zeta, \eta, \theta \in X$ için m dönüşümü,

(m_1) $m(\zeta, \eta) = m(\zeta, \zeta) = m(\eta, \eta) \Leftrightarrow \zeta = \eta$,

(m_2) $m_{\zeta\eta} = \min\{m(\zeta, \zeta), m(\eta, \eta)\} \leq m(\zeta, \eta)$,

(m_3) $m(\zeta, \eta) = m(\eta, \zeta)$,

(m_4) $m(\zeta, \theta) - m_{\zeta\theta} \leq \left(m(\zeta, \eta) - m_{\zeta\eta}\right) + \left(m(\eta, \theta) - m_{\eta\theta}\right)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda m dönüşümüne X üzerinde bir M-metrik ve (X, m) ikilisine de M-metrik uzay denir.

Her metrik uzay ve kısmi metrik uzayın bir M-metrik uzay olduğu açıktır, ancak tersi her zaman doğru değildir. Gerçekten, eğer $X = [0, \infty)$ ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $\zeta, \eta \in X$ için $m(\zeta, \eta) = \frac{\zeta+\eta}{2}$ şeklinde tanımlanırsa (X, m) bir kısmi metrik uzaydır ancak ne bir metrik uzay ne de kısmi metrik uzaydır. Kabul edelim ki (X, m) bir M-metrik uzay olsun. Bu durumda m dönüşümü $\{B(\zeta, r): \zeta \in X, r > 0\}$ ailesini taban kabul eden X üzerinde bir τ_m topolojisi üretir. Burada

$$B(\zeta, r) = \{\eta \in X: m(\zeta, \eta) < m_{\zeta\eta} + r\}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilmelidir ki boştan farklı bir X kümesi üzerinde tanımlı kısmi metrik bu küme üzerinde bir T_0-topolojisi tanımlamasına rağmen bir M-metrik tarafından üretilen topoloji olan τ_m, T_0-topolojisi olmayabilir. Gerçekten, eğer $X = [0,1]$ ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $\zeta, \eta \in X$ için $m(\zeta, \eta) = \min\{\zeta, \eta\}$ şeklinde tanımlanırsa (X, m) bir M-metrik uzay olur. Kabul edelim ki $\zeta \in X$ ve $r > 0$ keyfi olsun. O halde

$$B(\zeta, r) = \{\eta \in X: m(\zeta, \eta) < m_{\zeta\eta} + r\}$$

$$= \{\eta \in X: 0 < r\}$$

$$= X$$

olduğundan $\tau_m = \{\emptyset, X\}$ olup T_0-topolojisi değildir.

Şimdi kabul edelim ki $\{\zeta_n\} \subseteq X$ ve $\zeta \in X$ olarak kabul edelim. Bu durumda $\{\zeta_n\}$ dizisi ζ noktasına τ_m topolojisine göre yakınsaktır gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty}\left(m(\zeta_n, \zeta) - m_{\zeta_n\zeta}\right) = 0$ olmasıdır. Bu yakınsaklığı M -yakınsaklık olarak adlandıracağız. Eğer $\lim_{n,k\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_k)$ var ve sonlu ise $\{\zeta_n\}$ dizisine M-Cauchy dizisi denir. (X, m) M-metrik uzayındaki her M -Cauchy dizisi $\{\zeta_n\}$ bir $\zeta \in X$ noktasına M -yakınsak ve $\lim_{n,k\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_k) = m(\zeta, \zeta)$ eşitsizliği sağlanıyor ise (X, m)' ye M-tam metrik uzay denir.

Çok yakın zamanda Altun vd. (2018) M-metrik uzaylar üzerinde farklı topolojik yapıları ve bu topolojilere göre bütün kapalılar ailesini dikkate alarak M-metrik uzaylar üzerinde üzerinde küme değerli dönüşümler için Feng-Liu tipinde bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir. Bu sonucu ifade etmeden önce Altun vd. (2018) tarafından ifade edilen ve ana sonuçlarında çok kullanışlı olan bazı önermeleri ve notasyonları hatırlayalım:

(X, m) bir M-metrik uzay, $C_m(X)$ ise X in τ_m topolojisine göre bütün kapalılar ailesi ve $T: X \to C_m(X)$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda bir $b \in (0,1)$ ve $\zeta \in X$ için, $m(\zeta, T\zeta) = \inf\{m(\zeta, \eta): \eta \in T\zeta\}$ olmak üzere

$$T_b^{\zeta}(m) = \{\eta \in T\zeta: bm(\zeta, \eta) \leq m(\zeta, T\zeta)\}$$

şeklinde bir küme tanımlayalım. Açıktır ki $m(\zeta, T\zeta) > 0$ ise her $b \in (0,1)$ için $T_b^{\zeta}(m)$ boştan farklıdır. Ancak metrik uzaylardakinin aksine eğer $m(\zeta, T\zeta) = 0$ ise bazı $b \in (0,1)$ için $T_b^{\zeta}(m)$ boş küme olabilir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir:

Örnek 3.2. $X = \left\{-1, -1 + \frac{1}{n}: n > 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$m(\zeta, \eta) = \begin{cases} 1 & , \quad \zeta = \eta = -1 \\ |\zeta - \eta| & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman (X, m) bir M-metrik uzaydır. Aynı zamanda eğer $T: X \to C_m(X)$ dönüşümünü her $\zeta \in X$ için $T\zeta = X$ olarak alırsak $\zeta = -1$ için $m(\zeta, T\zeta) = 0$ olmasına rağmen her $\eta \in T\zeta$ için $m(\zeta, \eta) > 0$ olur. Bu nedenle her $b \in (0,1)$ için $T_b^{\zeta}(m)$ kümesi boş küme olur.

Önerme 3.1. (X, m) bir M-metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $\zeta \in X$ olsun. Eğer $m(\zeta, A) = 0$ ise $\zeta \in \bar{A}^m$ dir.

Ancak Önerme 3.1'in tersi doğru değildir. Yani, $\zeta \in \bar{A}^m$ olacak şekildeki bir $\zeta \in X$ için $m(\zeta, A) = 0$ olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu gerçeği göstermektedir:

Örnek 3.3. $X = \{0\} \cup [1, \infty)$ ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$m(\zeta, \eta) = \frac{\zeta + \eta}{2}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman (X, m) bir M-metrik uzaydır. Bu durumda $A = [1,2)$ ve $\zeta = 1$ için $\zeta \in \bar{A}^m = [1,2]$ olmasına rağmen $m(\zeta, A) = 1 > 0$ dır.

Şimdi Altun vd. (2018) tarafından ispat edilen sonucu ifade edebiliriz:

Teorem 3.7. (X, m) M-tam M-metrik uzay ve $T: X \to C_m(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $m(\zeta, T\zeta) > 0$ olacak şekildeki her $\zeta \in X$ için

$$m(\eta, T\eta) \leq cm(\zeta, \eta)$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < c < b < 1$ ve $\eta \in T_b^{\zeta}(m)$ var olsun. Eğer $g(\zeta) = m(\zeta, T\zeta)$ fonksiyonu X üzerinde τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

4. KARMA KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLER

Bir (X,d) metrik uzayı üzerinde tanımlı $T:X\to C(X)$ küme değerli dönüşümünü düşünelim. Feng ve Liu (2006) tarafından ifade ve ispat edilen Teorem 3.5'i dikkate alarak her $\zeta\in X$ için $T\zeta$ tek nokta kümesi metrik uzaylarda kapalı olacağından T dönüşümü için elde edilen sonuçlar yardımıyla tek değerli dönüşümler için bir sabit nokta sonucu elde edebiliriz. Ancak bir önceki bölümde ifade ettiğimiz üzere bir M-metrik tarafından üretilen topoloji τ_m, T_0-topolojisi dolayısıyla T_1-topolojisi olmayabilir. Yani bir M-metrik uzayda her tek nokta kümesi kapalı olmak zorunda değildir. Bu durumda metrik uzaylardaki düşünceye benzer şekilde küme değerli dönüşümler için elde edilen sonuçlar yardımıyla tek değerli dönüşümler için sabit nokta sonuçları elde edemeyiz. Bu sorunun üstesinden gelmek için Romaguera (2013) tarafından ortaya konan karma küme değerli dönüşüm tanımından esinlenerek bir (X,m) M-metrik uzayı üzerinde tanımlı $T:X\to X\cup C_m(X)$ dönüşümleri için bazı sabit nokta sonuçları elde edeceğiz. Burada $T:X\to X\cup C_m(X)$ karna küme değerli dönüşümü için her $\zeta\in X$ için $T\zeta$ tek nokta kümesi veya $T\zeta\in C_m(X)$ dir.

4.1 KW-Tipi m-Büzülme Dönüşümleri İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölüme temel sonucumuzda çok kullanışlı olan ve Romaguera (2013) tarafından kısmi metrik uzaylarda karma küme değerli dönüşümler için ifade edilen $T|_X$-yörüngesel süreklilik tanımı ile başlayalım.

Tanım 4.1. (X,p) bir kısmi metrik uzay, $T:X\to X\cup CB^p(X)$ karma küme değerli bir dönüşüm ve $\zeta\in X$ olsun. Eğer $|T\zeta|=1$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_{n+1}\in T\zeta_n$ özelliğine sahip $\lim_{n\to\infty}p(\zeta_n,\zeta)=p(\zeta,\zeta)$ olacak şekildeki her $\{\zeta_n\}$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}p(\zeta_n,T\zeta)=p(T\zeta,T\zeta)$$

ise T dönüşümüne $T|_X$-yörüngesel süreklidir denir.

Ardından Sahin vd. (2019) M_b-metrik uzaylarda Tanım 4.1' i içeren yeni ve hoş bir tanım ortaya atmışlardır. Şimdi bu tanımın M-metrik uzaylardaki versiyonunu ifade edelim.

Tanım 4.2. (X, m) bir M -metrik uzayı, $T : X \to X \cup C_m(X)$ karma küme değerli bir dönüşüm ve $\zeta \in X$ olsun. Eğer $|T\zeta| = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{n+1} \in T\zeta_n$ özelliğine sahip ζ noktasına τ_m topolojisine göre M-yakınsak olacak şekildeki her $\{\zeta_n\}$ dizisi için,

$$m(T\zeta, T\zeta) \leq \lim_{n\to\infty} \inf m(\zeta_n, T\zeta)$$

ise T dönüşümüne ζ-alt yörüngesel süreklidir denir.

Şimdi biz öncelikle KW -tipi m -büzülme dönüşümü adında yeni bir kavram tanımlayacağız. Daha sonra bu dönüşümler için M-metrik uzaylarda bazı sabit nokta sonucu elde edeceğiz.

Tanım 4.3. (X, m) bir M -metrik uzayı ve $T : X \to X \cup C_m(X)$ karma küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $t \in [0. \infty)$ için

$$\lim_{r\to t^+} \sup \varphi(r) < b$$

olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, b)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $|T\zeta| > 1$ ise $m(\zeta, T\zeta) > 0$ veya $|T\zeta| = 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in X$ için

$$m(\eta, T\eta) \leq \varphi(m(\zeta, \eta))m(\zeta, \eta)$$

ve

$$am(\eta, \eta) \leq m(\zeta, \eta)$$

koşullarını sağlayan bir $\eta \in T_b^{\zeta}(m)$ ve $\alpha \in (0,1)$ var ise bu durumda T dönüşümüne KW-tipi m-büzülme dönüşümü denir.

Şimdi bu bölümün temel sonucunu ifade edebiliriz:

Teorem 4.1. (X, m) bir M-complete M-metrik uzayı ve $T : X \to X \cup C_m(X)$ KW-tipi m-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki her $t \in [0.\infty)$ için

$$\lim_{r \to t^+} \sup \varphi(r) < b$$

olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ ve $\varphi: [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $g(\zeta) = m(\zeta, T\zeta)$ fonksiyonu X üzerinde τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise $m(\zeta^*, T\zeta^*) = 0$ olacak şekilde bir $\zeta^* \in X$ vardır. Eğer $|T\zeta^*| > 1$ ise ζ^* noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Eğer $|T\zeta^*| = 1$ ve T dönüşümü ζ^*-alt yörüngesel sürekli ise ζ^* noktasıT dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\zeta_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda aşağıdaki gibi iki durum vardır:

Durum 1. $|T\zeta_0| = 1$ olsun. Bu durumda T dönüşümü KW-tipi m-büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_1, T\zeta_1) \leq \varphi\,(m(\zeta_0, \zeta_1))\; m(\zeta_0, \zeta_1)$$

ve

$$am(\zeta_1, \zeta_1) \leq m(\zeta_0, \zeta_1)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $\zeta_1 = T\zeta_0$ vardır.

Şimdi, $|T\zeta_1| = 1$ ise T dönüşümü KW-tipi m-büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_2, T\zeta_2) \leq \varphi\,(m(\zeta_1, \zeta_2))\, m(\zeta_1, \zeta_2)$$

ve

$$am(\zeta_2, \zeta_2) \leq m(\zeta_1, \zeta_2)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_2 = T\zeta_1$ vardır.

Eğer $|T\zeta_1| > 1$ ise $m(\zeta_1, T\zeta_1) = 0$ olması durumunda $\zeta_1 \in \overline{T\zeta_1}^{m} = T\zeta_1$ olup ζ_1, T dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde kabul edelim ki $m(\zeta_1, T\zeta_1) > 0$ olsun. Bu durumda T dönüşümü KW-tipi m-büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_2, T\zeta_2) \leq \varphi\,(m(\zeta_1, \zeta_2))\, m(\zeta_1, \zeta_2)$$

ve

$$am(\zeta_2, \zeta_2) \leq m(\zeta_1, \zeta_2)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_2 \in T_b^{\zeta_1}(m)$ vardır.

Durum 2. $|T\zeta_0| > 1$ olsun. Eğer $m(\zeta_0, T\zeta_0) = 0$ ise $\zeta_0 \in \overline{T\zeta_0}^{m} = T\zeta_0$ olup ζ_0, T dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde kabul edelim ki $m(\zeta_0, T\zeta_0) > 0$ olsun. Bu durumda T dönüşümü KW-tipi m-büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_1, T\zeta_1) \leq \varphi\,(m(\zeta_0, \zeta_1))\, m(\zeta_0, \zeta_1)$$

ve

$$am(\zeta_1, \zeta_1) \leq m(\zeta_0, \zeta_1)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_1 \in T_b^{\zeta_0}(m)$ vardır.

Şimdi, $|T\zeta_1| = 1$ ise T dönüşümü KW-tipi m büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_2, T\zeta_2) \leq \varphi\,(m(\zeta_1, \zeta_2))\, m(\zeta_1, \zeta_2)$$

ve

$$am(\zeta_2, \zeta_2) \leq m(\zeta_1, \zeta_2)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_2 = T\zeta_1$ vardır.

$|T\zeta_1| > 1$ ise $m(\zeta_1, T\zeta_1) = 0$ olması durumunda $\zeta_1 \in \overline{T\zeta_1}^m = T\zeta_1$ olup ζ_1, T dönüşümünün sabit noktasıdır. O halde kabul edelim ki $m(\zeta_1, T\zeta_1) > 0$ olsun. Bu durumda T dönüşümü KW-tipi m-büzülme dönüşümü olduğundan

$$m(\zeta_2, T\zeta_2) \leq \varphi\,(m(\zeta_1, \zeta_2))\, m(\zeta_1, \zeta_2)$$

ve

$$am(\zeta_2, \zeta_2) \leq m(\zeta_1, \zeta_2)$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_2 \in T_b^{\zeta_1}(m)$ vardır.

Bu işlemi tekrarlayarak,

$$m(\zeta_{n+1}, T\zeta_{n+1}) \leq \varphi\,(m(\zeta_n, \zeta_{n+1}))\, m(\zeta_n, \zeta_{n+1})$$

ve

$$am(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+1}) \leq m(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \tag{4.1}$$

eşitsizliklerini sağlayan $\zeta_{n+1} \in T_b^{\zeta_n}(m)$ olacak şekilde bir $\{\zeta_n\}$ oluşturabiliriz. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$bm(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \leq m(\zeta_n, T_{\zeta_n}) \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} m(\zeta_n, \zeta_{n+1}) &\leq \frac{m(\zeta_n, T_{\zeta_n})}{b} \\ &\leq \frac{\varphi(m(\zeta_{n-1}, \zeta_n))\, m(\zeta_{n-1}, \zeta_n)}{b} \\ &\leq m(\zeta_{n-1}, \zeta_n) \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} m(\zeta_n, T\zeta_n) - m(\zeta_{n+1}, T\zeta_{n+1}) &\geq bm(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \\ &\quad - \varphi(m(\zeta_n, \zeta_{n+1}))\, m(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \\ &= (b - \varphi(m(\zeta_n, \zeta_{n+1}))m(\zeta_n, \zeta_{n+1}) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. (4.3) ve (4.4) den, $\{m(\zeta_n, \zeta_{n+1})\}$ ve $\{m(\zeta_n, T_{\zeta_n})\}$ negatif olmayan reel sayıların artmayan bir dizisi olduğundan yakınsaktır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}(m(\zeta_n\,,\zeta_{n+1}))\;=t$$

olacak şekilde bir $t \geq 0$ reel sayısı vardır. Buna göre

$$\lim_{r\to t^+} sup\varphi(r) < b$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} sup\varphi\big(m(\zeta_n\,,\zeta_{n+1})\big)\;=q$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $q \in [0,b)$ vardır. Bu durumda her $b_0 \in [q,b)$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\varphi\big(m(\zeta_n\,,\zeta_{n+1})\big) < b_0$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (2.4) ten her $n \geq n_0$ için

$$m(\zeta_n\,,T\zeta_n) - m(\zeta_{n+1}\,,T\zeta_{n+1})\;\geq (b-\varphi(m(\zeta_n\,,\;\zeta_{n+1})))\;m(\zeta_n\,,\;\zeta_{n+1})$$

$$\geq\;(b-b_0)(m(\zeta_n\,,\;\zeta_{n+1}) \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden her $n \geq n_0$ için

$$m(\zeta_n\,,T\zeta_n) \quad\leq\quad \varphi(m(\zeta_{n-1}\,,\zeta_n))\;m(\zeta_{n-1}\,,\zeta_n)$$

$$\leq\quad \frac{\varphi(m(\zeta_{n-1}\,,\;\zeta_n))}{b}\;m(\zeta_{n-1}\,,T\zeta_{n-1})$$

$$\leq\quad \frac{\varphi(m(\zeta_{n-1}\,,\;\zeta_n))\;\varphi(m(\zeta_{n-2}\,,\zeta_{n-1}))}{b}m(\zeta_{n-2}\,,\zeta_{n-1})$$

$$\leq \frac{\varphi(m(\zeta_{n-1},\ \zeta_n))\ \varphi(m(\zeta_{n-2},\zeta_{n-1}))}{b^2} m(\zeta_{n-2},T\zeta_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\leq \frac{\varphi(m(\zeta_{n-1},\zeta_n))\dots\varphi\big(m(\zeta_0,\zeta_1)\big)}{b^n} m(\zeta_0,T\zeta_0)$$

$$= \frac{\varphi\big(m(\zeta_{n-1},\ \zeta_n)\big)\dots\varphi(m\big(\zeta_{n_0},\zeta_{n_0+1}\big))}{b^{n-n_0}}$$

$$\times \frac{\varphi\left(m\big(\zeta_{n_0-1},\ \zeta_{n_0}\big)\right)\dots\varphi\big(m(\zeta_0,\zeta_1)\big)}{b^{n_0}} m(\zeta_0,T\zeta_0)$$

$$< \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} \frac{\varphi\left(m\big(\zeta_{n_0-1},\ \zeta_{n_0}\big)\right)\dots\ \varphi\big(m(\zeta_0,\zeta_1)\big)}{b^{n_0}} m(\zeta_0,T\zeta_0)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} = 0$ oduğundan

$$\lim_{n\to\infty} m(\zeta_n,T\zeta_n) = 0 \tag{4.6}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece her $k > n \geq n_0$ için (4.5) ten

$$m(\zeta_n,\zeta_k) - m_{\zeta_n\zeta_k} \leq (\ m(\zeta_n,\zeta_{n+1}) - m_{\zeta_n\zeta_{n+1}}\ ) + (m(\zeta_{n+1},\zeta_{n+2}) - m_{\zeta_{n+1}\zeta_{n+2}}\ )$$

$$+\cdots+(\ m(\zeta_{k-1},\zeta_k) - m_{\zeta_{k-1}\zeta_k}\ )$$

$$\leq m(\zeta_n,\zeta_{n+1})+\ldots+m(\zeta_{k-1},\zeta_k)$$

$$= \sum_{j=n}^{k-1} m(\zeta_j, \zeta_{j+1})$$

$$\leq \frac{1}{b-b_0} \sum_{j=n}^{k-1} (m(\zeta_j, T\zeta_j) - m(\zeta_{j+1}, T\zeta_{j+1}))$$

$$= \frac{1}{b-b_0} (m(\zeta_n, T\zeta_n) - m(\zeta_k, T\zeta_k))$$

olup (2.6) dan yararlanarak ζ, η, θ

$$\lim_{n,k\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_k) - m_{\zeta_n\zeta_k}) = 0$$

Aynı zamanda (4.1), (4.2), (4.6) eşitsizlikleri yardımıyla $\lim_{n\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_n) = 0$ ve dolayısıyla

$$\lim_{n,k\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_k) = 0$$

elde ederiz ki bu $\{\zeta_n\}$ dizisinin bir M-Cauchy dizisi olması anlamına gelir. (X, m) M-tam M-metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} m(\zeta_n, \zeta^*) - m_{\zeta_n\zeta^*}) = 0$$

ve

$$\lim_{n,k\to\infty} m(\zeta_n, \zeta_k) = \mathrm{m}(\zeta^*, \zeta^*) = 0$$

olacak şekilde bir $\zeta^* \in M$ vardır. Şimdi $g(\zeta) = m(\zeta, T\zeta)$ alt yarı sürekli fonksiyon ve $\lim_{n\to\infty} m(\zeta_n, T\zeta_n) = 0$ olduğundan

$$0 \leq m(\zeta^*, T\zeta^*) = g(\zeta^*) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ g(\zeta_n) = \lim_{n\to\infty} inf\ m(\zeta_n, T\zeta_n) = 0$$

olarak elde edilir. O halde $m(\zeta^*, T\zeta^*) = 0$ dir. Eğer $|T\zeta^*| > 1$ ise $\zeta^* \in \overline{T\zeta^*}^m = T\zeta^*$ olur. Eğer $|T\zeta^*| = 1$ ise T dönüşümü ζ^*-alt yörüngesel sürekli olduğundan

$$m(T\zeta^*, T\zeta^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf m(\zeta_n, T\zeta^*)$$

olur. Şimdi

$$m(\zeta_n, T\zeta^*) - m_{\zeta_n T\zeta^*} \leq \left(m(\zeta_n, \zeta^*) - m_{\zeta_n \zeta^*}\right) + \left(m(\zeta^*, T\zeta^*) - m_{\zeta^* T\zeta^*}\right)$$

olup $n \to \infty$ için limit durumunda

$$0 \leq m(T\zeta^*, T\zeta^*) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ m(\zeta_n, T\zeta^*) = 0$$

olur. O halde $m(\zeta^*, \zeta^*) = 0$ ve $m(T\zeta^*, T\zeta^*) = 0$ olduğundan $\zeta^* = T\zeta^*$ sonucuna ulaşırız ki her iki durumda da ζ^* noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Aşağıdaki örnek sonucumuzun etkinliğini göstermesi açısından önemlidir.

Örnek 4.1. $X = [0,4]$ ve $m: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$m(\zeta, \eta) = \frac{\zeta + \eta}{2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, (X, m) bir M-tam M-metrik uzaydır. Eğer $T: X \to X \cup C_m(X)$ dönüşümünü ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \frac{3}{4})$ dönüşümünü

$$T\zeta = \left[0, \frac{\zeta^2}{16}\right],$$

ve

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{3}{4}u & , \quad u < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad u \geq 1 \end{cases},$$

şeklinde tanımlarsak bu durumda her $\zeta \in X$ için

$$g(\zeta) = m(\zeta, T\zeta) = \frac{\zeta}{2}$$

şeklinde elde ederiz. Buradan görülebilir ki g fonksiyonu τ_m topolojisine göre alt yarı süreklidir. O halde T dönüşümünün KW -tipi m büzülme dönüşümü olduğunu göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki $\zeta \ \ m(\zeta, T\zeta) > 0$ olacak şekilde X de keyfi bir nokta olsun. Bu durumda

$$T_{\frac{3}{4}}^{\zeta} = \left\{\eta \in T\zeta : \frac{3}{4}m(\zeta, \eta) \leq m(\zeta, T\zeta)\right\}$$

$$= \left\{\eta \in T\zeta : \eta \leq \frac{\zeta}{3}\right\}$$

eşitliğine sahip oluruz. Eğer $a = \frac{1}{2}$ seçersek her $\eta \in T_{\frac{3}{4}}^{\zeta}$ için

$$m(\eta, T\eta) = \frac{\eta}{2} \leq \frac{\zeta}{6}$$

$$\leq \frac{3}{8}(\zeta+\eta)^2$$

$$= \varphi(m(\zeta,\eta))m(\zeta,\eta)\,,$$

ve

$$\frac{1}{2}m(\eta,\eta) \leq m(\zeta,\eta).$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 4.1 in bütün koşulları sağlandığından, T dönüşümü X üzerinde bir sabit noktaya sahiptir.

Eğer Teorem 4.1 de her $u \in [0,\infty)$ için $\varphi(u) = c \in (0,b)$ olarak alınırsa M-metrik uzaylarda Feng-Liu tipi küme değerli dönüşümler için aşağıdaki şekilde bir sabit nokta sonucu elde edilir:

Teorem 4.2. (X,m) bir M-complete M-metrik uzayı ve $T : X \to X \cup C_m(X)$ karma küme değerli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $|T\zeta| > 1$ ise $m(\zeta,T\zeta) > 0$ veya $|T\zeta| = 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in X$ için

$$m(\eta,T\eta) \leq cm(\zeta,\eta)$$

ve

$$am(\eta,\eta) \leq m(\zeta,\eta)$$

koşullarını sağlayan bir $\eta \in T_b^{\zeta}(m)$ ve $0 \leq \gamma < b$ olmak üzere $\alpha, b \in (0,1)$ var olsun. Eğer $g(\zeta) = m(\zeta,T\zeta)$ fonksiyonu X üzerinde τ_m topolojisine göre alt yarı sürekli ise $m(\zeta^*,T\zeta^*) = 0$ olacak şekilde bir $\zeta^* \in X$ vardır. Eğer $|T\zeta^*| > 1$ ise ζ^* noktası T

dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Eğer $|T\zeta^*| = 1$ ve T dönüşümü ζ^*-alt yörüngesel sürekli ise ζ^* noktasıT dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk bölümde küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori uygulama alanlarıyla tanıtılarak önemine değinilmiş ve gelişiminin tarihsel süreci hakkında temel bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde yer alacak sonuçlarımıza hazırlık yapmak amacıyla temel tanım ve teoremlerimize yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde literatürde yer alan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir. Aynı zamanda M-metrik uzaylarının tanımı ve topolojik yapısı hakkında bazı önemli bilgilere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde M-metrik uzaylar üzerinde Klim-Wardowski tipindeki küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bunu yapmak için M-metrik uzayların topolojik yapısı göz önünde bulundurularak elde edilen sonuçların tek değerli sabit nokta sonuçlarını içerecek şekilde karma küme değerli dönüşümler göz önüne alınmıştır.

Biz bu tez çalışmasında güncel kavramları literatürde var olan çalışmaları genişletecek şekilde ele aldık. Bu çalışmanın devamı olarak Ciric tarafından tanımlanan büzülme yardımıyla M-metrik uzaylar üzerinde küme değerli dönüşümler için daha kapsamlı sabit nokta sonuçları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alamgir, N., Kiran, Q., Aydi, H. and Gaba, Y. U. 2021. Fuzzy fixed point results of generalized almost F -contractions in controlled metric spaces. Advances in Difference Equations, 2021: 1-14.

Altun, I., Sahin, H. and Turkoglu, D. 2018. Fixed point results for multivalued mappings of Feng-Liu type on M-metric spaces. Journal of Nonlinear Functional Analysis, 7.

Altun, I., Sahin, H. and Turkoglu, D. 2020. Caristi-type fixed point theorems and some generalizations on M-metric space. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43: 2647-2657.

Altun, I., Sahin, H. and Aslantas, M. 2021 a. A new approach to fractals via best proximity point, Chaos, Solitons & Fractals, 146: 110850.

Altun, I., Aslantas, M. and Sahin, H. 2021 b. KW-type nonlinear contractions and their best proximity points. Numerical Functional Analysis and Optimization, 42: 935-954.

Asadi, M., Karapınar, E. and Salimi, P. 2014. New extension of p-metric spaces with some fixed point results on M-metric spaces. J. Inequal. Appl., 2014: 18.

Aslantas, M. 2021 a. Some best proximity point results via a new family of F-contraction and an application to homotopy theory. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 23: 1-20.

Aslantaş, M. 2021 b. Best proximity point theorems for proximal b-cyclic contractions on b-metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70: 483-496.

Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. Fund. Math., 3: 133–181.

Chandok, S., Sharma, R. K. and Radenović, S. 2021. Multivalued problems via orthogonal contraction mappings with application to fractional differential equation. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 23: 1-14.

Ciric, L. B. 1971. On contraction type mappings. Math. Balkanica, 1: 52-57.

Dag, H., Mınak, G. and Altun, I. 2017. Some fixed point results for multivalued F-contractions on quasi metric spaces. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 111(1): 177-187.

Durmaz, G. and Altun, I. 2016. Fixed point results for α-admissible multivalued F-contractions. Miskole Mathematical Notes, 17: 187-199.

Javed, K., Aydi, H., Uddin, F. and Arshad, M. 2021. On orthogonal partial-metric spaces with an application. Journal of Mathematics, 2021.

Karapinar, E., Fulga, A. and Aydi, H. 2020. Study on Pata E-contractions. Advances in Difference Equations, 2020: 1-15.

Kesahorm, T. and Sintunavarat, W. 2022. On numerical approximation of common fixed points for enriched Kannan semigroups and its experiment. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 25: 15-43.

Magadevan, P., Karpagam, S. and Karapınar, E. 2022. Existence of fixed point and best proximity point of p-cyclic orbital phi-contraction map. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 27: 91-101.

Matthews, S. G. 1994. Partial metric topology, Annals of the New York Academy of Sciences-Paper Edition, pp. 183‑197, New York.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. 1989. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 141: 177–188.

Mlaiki, N., Souayah, N., Abdeljawad, T. and Aydi, H. 2021. A new extension to the controlled metric type spaces endowed with a graph. Advances in Difference Equations, 2021: 1-13.

Nadler, S. B. 1969. Multi-valued contraction mappings. Pacific J. Math., 30: 475–488.

Nashine, H. K., Ibrahim, R. W., Rhoades, B. E. and Pant, R. 2021. Unified Feng-Liu type fixed point theorems solving control problems. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 115: 1-17.

Radenović, S., Mirkov, N. and Paunović, L. R. 2021. Some new results on F-contractions in 0-complete partial metric spaces and 0-complete metric-like spaces. Fractal and Fractional, 5: 34.

Reich, S. 1972. Fixed points of contractive functions. Boll. Unione Mat. Ital., 5: 26–42.

Romaguera, S. 2013. On Nadler's fixed point theorem for partial metric spaces. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 1: 1-8.

Sahin, H., Altun, I. and Türkoğlu, D. 2019. Fixed Point Results for Mixed Multivalued Mappings of Feng-Liu Type on M_b-Metric Spaces. In Mathematical Methods in Engineering, Springer, pp. 67-80, Cham.

Sahin, H. 2021. Best proximity point theory on vector metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70: 130-142.

Sahin, H. 2022. Existence and uniqueness results for nonlinear fractional differential equations via new Q-function. Advances in Operator Theory, 7: 1-21.

Van An, T., Van Dung, N., Kadelburg, Z. and Radenović, S. 2015. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas, 109: 175-198.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Uğur SADULLAH

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2018-Halen
Lisans	Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2009-2015

Akademik Aktiviteler

1. Aslantas, M., Sahin, H. and Sadullah, U. Some generalizations for mixed multivalued mappings. Applied General Topology, Accepted.