



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ EŞİKSEL OTOREGRESİF MODELLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Ümran Münire KAHRAMAN

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ EŞİKSEL OTOREGRESİF MODELLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Ümran Münire KAHRAMAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aşır GENÇ

2012, 102 Sayfa

Bu çalışmada, eşiksel otoregresif (TAR) modeller sınıfından kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modelin yapısı üzerinde durulmuştur. Model parametrelerini belirlemek için Tsay (1989)'in önerdiği yöntem kullanılmıştır. Kendinden uyarımlı eşiksel değişen varyanslı otoregresif (SETARCH) model oluşturularak, farklı rejimlerde ortalamanın yanı sıra varyansta da eşiksellik yapısı ele alınmış ve varyansın modellenmesine çalışılmıştır. SETARCH modeli için uygulama verisi olarak 03.01.2005-30.12.2011 dönemini kapsayan serbest piyasadaki günlük altın fiyatları serisi TL cinsinden alınarak bir model oluşturulmuştur. Daha sonra yine Tsay (1998)'in önerdiği yöntemle çok değişkenli SETAR model hazırlanmış ve aynı dönem için TL cinsinden günlük altın fiyatları ve Dolar (USD) kuru verisi kullanılmıştır. Bu uygulama için de çok değişkenli ve üç rejimli bir model ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Çok değişkenli SETAR model, eşiksel ARCH (SETARCH) model, kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) model, lineer olmama testi

ABSTRACT

Ph.D THESIS

A STUDY ON MULTIVARIATE THRESHOLD AUTOREGRESSIVE MODELS

Ümran Münire KAHRAMAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN STATISTICS

Advisor: Prof. Dr. Aşır GENÇ

2012, 102 Pages

In this study, structure of a self-exciting threshold autoregressive model which belongs to threshold model class and choosing its parameters are emphasized. To determine parameters of model, method which was offered by Tsay (1989), was used. Besides mean in different regime, it was considered variance has threshold. A model which was based on daily gold prices which were taken as Turkish lira and in period 03.01.2005-30.12.2011 were applied for numerical example was created. After that, by Tsay (1998)'s method, a multivariate SETAR model was prepared and the same period of gold prices and exchange rates of USD data was handled. For this data, a multivariate model with three regimes was produced.

Keywords: Multivariate SETAR model, nonlinearity test, self-exciting threshold autoregressive (SETAR) model, threshold ARCH (SETARCH) model

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam boyunca bilgi ve yardımlarını sunan değerli hocam Prof. Dr. Aşır Genç'e teşekkür ederim. Tez izleme komitemde olup desteğini esirgemeyen Prof. Dr. Nezir Köse ve Yrd. Doç. Dr. İsmail Kınacı'ya da şükran borçluyum.

Doktora programı boyunca verdiği maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a ve yardımlarından dolayı Fen Bilimleri Enstitüsü personeline de teşekkür ediyorum.

Anlayış ve desteğiyle her zaman yanımda olan aileme ve eşime de teşekkürü bir borç bilirim.

Ümran Münire KAHRAMAN
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI ..... **v**

TEZ BİLDİRİMİ ..... **vi**

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Kaynak araştırması 2

2. TEMEL KAVRAMLAR **5**

2.1. Durağanlık 5
2.2. Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonu 6
2.3. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu 6
2.4. Beyaz Gürültü Serisi 7

3. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ MODELLERİ **8**

3.1. Genel Durağan Modeller 8
3.1.1. Hareketli ortalama (MA) modeli 8
3.1.2. Otoregresif (AR) model 11
3.1.3. Otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modeli 14
3.2. Durağan Olmayan Doğrusal Modeller 15
3.3. Durağanlık Analizi 16
3.3.1. Birim kök testleri 17
3.3.1.1. Doğrusal zaman serilerinde birim kök testleri 17
3.3.2. Durağanlık dönüşümleri 18
3.4. Model Seçimi: Korelogram İncelemesi 18
3.5. Model Seçim Kriterleri 19
3.6. Model Geçerliliğinin Araştırılması 20
3.6.1. Artıkların otokorelasyon fonksiyonu grafiği 20
3.6.2. Breusch-Godfrey testi 20
3.6.3. White testi 21
3.6.4. Jarque-Bera normalik testi 22
3.7. Modelleme Süreci 23

4. KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANSLI MODELLER **24**

4.1. Koşullu Değişen Varyanslı Otoregresif (ARCH) Modeller 24

4.1.1. ARCH etkisinin incelenmesi 28
4.1.2. ARCH modelinin eksik yanları 28
4.2. GARCH Modeli 29
4.3. ARCH/ GARCH Uyarlamaları 32
4.3.1. ARCH-M modeli 32
4.3.2. EGARCH modeli 33
4.3.3. TARCH modeli 33
4.4. ARCH Modelleri için Artıkların İncelenmesi 34
4.4.1. Ljung-Box Q testi 34
4.4.2. McLeod testi 35

5. EŞİKSEL OTOREGRESİF (TAR) VE KENDİNDEN UYARIMLI EŞİKSEL OTOREGRESİF (SETAR) MODELLER 36

5.1. Eşiksel Otoregresif Model 36
5.2. Eşiksel Doğrusal Olmama Testi 37
5.3. Yapısal Parametrelerin Belirlenmesi 40
5.4. Parametre Tahmini 42
5.4.1. En küçük kareler tahminlerinin tutarlılığı 43
5.5. Modelleme Süreci 43
5.6. Model Yeterliliği 44
5.7. Öngörü 45

6. DEĞİŞEN VARYANSLI KENDİNDEN UYARIMLI EŞİKSEL OTOREGRESİF MODEL (SETARCH) 46

6.1. SETARCH Modeli ve Model Varsayımları 46
6.2. Model Belirleme 47
6.3. Model Yeterliliği 48

7. ÇOK DEĞİŞKENLİ EŞİKSEL OTOREGRESİF MODEL 49

7.1. Çok Değişkenli Doğrusal Olmama Testi 49
7.2. Model Parametrelerinin Belirlenmesi 54
7.3. Tahmin 55
7.4. Model Yeterliliği 56

8. ARAŞTIRMA SONUÇLARI 57

8.1. Uygulama I 57
8.2. Uygulama II 68

9. SONUÇLAR 77

KAYNAKLAR 79

EKLER ..... Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

ÖZGEÇMİŞ ..... Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

KISALTMALAR

ARMA : Otoregresif hareketli ortalama
a.d. : Asimptotik durağan
ACF : Otokorelasyon fonksiyonu
ADF : Genişletilmiş Dickey-Fuller
AIC : Akaike bilgi kriteri
AR : Otoregresif (Autoregressive)
ARCH : Koşullu değişen varyanslı otoregresif
ARIMA : Bütünleşik otoregresif hareketli ortalama
GARCH : Genelleştirilmiş koşullu değişen varyanslı otoregresif
LR : Olabilirlik oranı
MA : Hareketli ortalama
PACF : Kısmî otokorelasyon fonksiyonu
PAM :Kısmî otoregresyon matrisi
SIC : Schwartz Bayesian kriteri
SETAR : Kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif
USD : Amerikan doları
SETARCH : Kendinden uyarımlı eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif
SSE : Artık kareler toplamı
TAR : Eşiksel otoregresif

1. GİRİŞ

Eşiksel otoregresif model (TAR), doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden biridir. Eşiksel otoregresif modeller ilk olarak Tong (1978) ve Tong ve Lim (1980) tarafından ele alınmıştır. Daha sonra Tong (1990), kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modeli geniş bir biçimde açıklamıştır. Modelin ilk ortaya çıkış kaynağı sınırlı döngüler ve döngüsel yapıdaki zaman serileri olmuştur ve model asimetrik sınırlı döngüler oluşturabilmektedir (Tong, 1990).

Bu tez çalışmasında, eşiksel otoregresif modeller için model belirleme sürecini kolay uygulanabilir hale getiren Tsay (1989, 1998)'in yöntemi kullanılarak SETAR modelin yapısal parametrelerinin seçiminin yapılması amaçlanmaktadır. Yapısal parametrelerden eşik değişkenini belirlemek için öncelikle bir kısım öngörü artıklarına dayanan bir test istatistiği ile eşiksel doğrusallık testi yapılmaktadır. Muhtemel eşik sayısı ve değerleri için ise grafiksel araçlar kullanılmaktadır. Sonuçta bu istatistikler kullanılarak SETAR model kurulacaktır. Çalışmanın özgün yanı, gerçek bir veri setinde SETAR modelin yapısal parametrelerinin belirlenmesi ve bunun için gerekli bilgisayar programlarının oluşturulmasıdır.

Çalışmada, SETAR modelin yanı sıra kendinden uyarımlı eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif (SETARCH) model ve çok değişkenli SETAR model hakkında da bilgi verilmektedir. Teorik kısmı açıklayabilmek amacıyla ekonomik verilere dayalı uygulamalar da yer almaktadır. Böylece, 03.01.2005-30.12.2011 dönemini kapsayan serbest piyasadaki günlük altın fiyatlarının TL değerleri için bir SETARCH modeli ve yine aynı döneme ait TL cinsinden günlük altın fiyatları ve Dolar (USD) kuru verisi için çok değişkenli bir SETAR modeli elde edilmiştir. Sayısal hesaplamalar için MATLAB 7.7.0(R2008b) programında kodlar oluşturulmuştur, hazırlanan bu kodlar çalışmanın EKLER kısmında yer almaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümü doğrusal zaman serilerine ilişkin temel kavramları içermektedir.

Üçüncü bölümde doğrusal zaman serisi modelleri yer almaktadır. Doğrusal zaman serisi modellerinde model belirleme süreci hakkında bilgi verilmektedir.

Dördüncü bölüm, doğrusal olmayan modellerden varyansta değişime izin veren koşullu değişen varyanslı otoregresif (ARCH) modeli açıklamaktadır. ARCH modele uygunluğun araştırılması ve model için artık testleri bu bölümün içeriğini oluşturmaktadır.

Beşinci bölüm, doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden eşiksel otoregresif (TAR) model ve kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modeli kapsamaktadır. Eşiksel modelin yapısal parametrelerinin belirlenmesi ve modelin uygunluğunun araştırılması konuları verilmektedir.

Altıncı bölümde, hem ortalamada hem de varyansta rejim değişikliğine izin veren kendinden uyarımlı eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif (SETARCH) model hakkında bilgi verilmektedir.

Yedinci bölümde, çok değişkenli kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model için SETAR modelin çok değişkenli yapısı hazırlanmıştır.

Sekizinci bölümde, SETARCH ve çok değişkenli SETAR modelleri için ekonomik verilere dayalı birer uygulama verilmiştir.

1.1. Kaynak araştırması

Tong (1978) tarafından geliştirilen kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modeller oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur.

Tong ve Yeung (1991), Petruccelli-Davies testini genişleterek Tsay (1989)'in yöntemi ile karşılaştırmıştır. Üç farklı finansal veri üzerinde uygulama yapılmıştır. Bunlar IBM günlük borsa kapanış fiyatları (birinci kısım ve ikinci kısım) ile Hang Seng endeks verisidir.

Yadav ve ark. (1994), TAR modellerin kullanımı, istatistiksel tahmini ve testi Future piyasalarda fiyat farklarının modellenmesinde kullanılmıştır.

Watier ve Richardson (1999), epidemiyolojik bir zaman serisinde, Tsay'in yöntemiyle kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modeli uygulamıştır. Daha sonra bu modeli Thanoon'ın 'sınırlandırılmış' modeliyle karşılaştırmışlardır.

Lewis ve Ray (1997), Kaliforniya'da 20 yıl boyunca ölçülen günlük deniz yüzeyi sıcaklığı verisine uyarlanabilir spline eşiksel otoregresif (ASTAR) model uygulamıştır. Model yüksek otoregresif derecesi ile uzun süreli bir doğrusal olmayan hafızaya sahiptir ve tek değişkenli diğer modellere göre daha iyi öngörüler vermektedir.

Montgomery ve ark. (1998), çalışmalarında US işsizlik oranlarının örneklem dışı tahminlerini elde etmeye çalışmıştır. Çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan modeller uygulanarak performansları karşılaştırılmıştır.

Clements ve Smith (2001), borsa oranlarını kullanarak kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model ile çok periyodlu öngörü sonuçları elde edilmiştir. Öngörü performansları doğrusal modellerle karşılaştırılmıştır.

Baragona ve ark. (2004) eşiksel otoregresif hareketli ortalama modellerine giriş yapılmıştır. Genetik algoritma kullanılarak eşik parametreleri ve rejim yapıları belirlenmiştir.

Feng ve Liu (2003), 1965-2000 yılları arasındaki Kanada GDP verisinde SETAR model uygulayarak öngörü performansını incelemiştir.

Kajitani ve ark. (2005), Kanada vaşak verisi için SETAR modelde ileri beslemeli yapay sinir ağlarını (FFNN) kullanarak öngörü elde etmişlerdir. Sonuçta serinin doğrusal ve normal olmayan karakteristikler içermesine rağmen oldukça FFNN algoritmasının iyi performans gösterdiği görülmüştür.

Khadaroo (2005), Hindistan, Singapur ve Güney Afrika'daki Ocak 1976-Kasım-2002 dönemi için aylık enflasyon verisini kullanarak iki rejimli bir kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model hazırlamıştır.

Huang ve ark. (2005), petrol fiyatları verisinin ülke ekonomisi üzerindeki volatilitesini incelemek için çok değişkenli bir eşiksel model oluşturmuştur. Bunun için, US, Kanada ve Japonya'da 1970-2002 yılları arasındaki aylık fiyatları kullanmıştır.

Hutchison ve ark. (2010), zaman içinde Hindistan'da sermaye kontrollerinin etkinliğini araştırmak için kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modeli kullanmıştır. Modelden işlem maliyetleri ve sermaye kontrolleri etkinliği ile belirlenen arbitrajsız bantlar elde edilmiştir.

Pinson ve ark. (2008), dakika ölçeğinde kıyı rüzgarı gücünün farklı olduğunu göz önüne alarak eşiksel modeli kullanmıştır. Rejim değişimine izin veren modellerden kendinden uyarımlı eşiksel (SETAR) model, yumuşak geçişli otoregresif (STAR) model ve Markov geçişli otoregresif (MSAR) model karşılaştırılmıştır.

Campenhout (2006), Tanzanya'da yedi farklı mısır piyasasında haftalık fiyatları kullanarak eşiksel otoregresif modelin arbitraj sürecinin dinamiklerini kapsadığını göstermiştir.

Chen (2012), Çin'de 2003-2010 arasında uygulanan sermaye kontrollerinin etkinliğini incelemek için 2007 yazında ortaya çıkan finansal dalgalanma dikkate alınarak iki rejimli bir eşiksel model oluşturulmuştur.

Yang ve Li (2012), DNA optimizasyonu için kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model (DNAOTARPM) oluşturmuştur. Geliştirilmiş genetik algoritma

eşiksel otoregresif öngörü modeli (IGATARPM) ve standart genetik algoritma eşiksel otoregresif öngörü modeli (SGATARPM) ile karşılaştırıldığında DNAOTARPM daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

SETAR modelin istatistiksel özellikleri konusunda yapılan çalışmalar ise şöyledir: Tsay (1989, 1998, 2010), tek değişkenli ve çok değişkenli kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modelde doğrusal olmamanın tespiti ve yapısal parametrelerin belirlenmesi için çalışmalar yapmıştır. Li ve Li (1996), kendinden uyarımlı eşiksel modelin artık terimlerinin varyansını ARCH modeller ile modelleyerek çift eşiksel SETAR (DTARCH) model oluşturmuştur. Mak ve ark. (1997), DTARCH modelin parametrelerini tahmin etmek için iteratif en küçük kareler (IWLS) algoritması vermiştir. Hansen (1996, 1999, 2000), eşiksel otoregresif modelde sonuç çıkarımı ve eşiksel otoregresif seri için birim kök testi sürecini açıklamıştır. Kapetanios (2000), küçük örneklemler için eşiksel model uygulaması ve koşullu en küçük kareler tahmin edicisini açıklamıştır. De Gooijer (2001), gecikme ve eşik parametrelerinin bilinmediği durumda SETAR model için AR derecesinin seçimini göstermiştir. Gonzalo ve Wolf (2005), eşiksel otoregresif modelde sonuç çıkarımı hakkında bilgi vermiştir. Dufrenot ve ark. (2008), iki rejimli ve farklı AR derecesine sahip SETAR modelde hafıza özelliklerini ve tahmin yöntemini göstermiştir. Kapetanios ve Shin (2006), üç rejimli bir SETAR modelde birim kök testleri hakkında bilgi vermiştir. Strikholm ve Teräsvirta (2006), rejim sayısını belirlemek için bir yöntem önermiştir. Galeano ve Pena (2007), otoregresif modellerde model seçim kriteri geliştirmiş ve bu kriteri kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif model için geliştirmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Zaman serileri, zamana bağlı olarak gözlenen verilerden elde edilen gözlem kümeleridir. Zaman serisi verileri ile yapılan analizler gözlemlerin ait olduğu stokastik sürecin modelini belirleme ve buradan ileriye yönelik tahmin yapmadan oluşmaktadır. Bu bölümde, zaman serileri ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

X_t, t zamanında gözlenen reel değerli rasgele değişkeni göstersin. Gözlemler düzenli zaman aralıklarında alınmaktadır. Bir zaman serisi X_t, $t \in \mathbb{Z}$ ile sıralanan reel değerli rasgele değişkenlerin bir dizisidir ve burada $\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesini gösterir.

2.1. Durağanlık

Zaman serilerinde en önemli kavramlardan biri durağanlıktır. Durağanlık, süreçte hâkim olan olasılık kanunlarının zaman ile değişmemesi fikrine dayalı istatistiksel bir dengeyi ifade eder. $\{X_t\}$ zaman serisi, $n = 1,2,\ldots$ olmak üzere, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ ve herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$F_{X_{t_1}}, F_{X_{t_2}}, \ldots, F_{X_{t_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_{X_{t_1+k}}, F_{X_{t_2+k}}, \ldots, F_{X_{t_n+k}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa durağandır. F, rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonunu gösterir. Burada "≡" ile dağılım fonksiyonunun aynı olduğu kastedilmektedir. Bu durum, güçlü (kesin) durağanlık olarak adlandırılır. Zayıf durağanlık, kovaryans durağanlık gibi isimler alan diğer durağanlık tipi ise,

$$E(X_{t_1}) = E(X_{t_1+k})$$

ve

$$Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = Cov(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}) = \gamma(k) \quad (2.2)$$

ile ifade edilir. Burada $t_1, t_2, k \in \mathbb{Z}$'dir. Kısaca güçlü durağanlık birinci, ikinci ve daha yüksek dereceli momentlerin zamana göre sabit olması iken, zayıf durağanlık yalnızca birinci ve ikinci momentlerin zaman içinde sabit kalmasıdır (Tong, 1990).

2.2. Otokovaryans ve Otokorelasyon Fonksiyonu

Sonlu varyanslı durağan bir $\{X_t\}$ zaman serisi göz önüne alınsın. Eşitlik (2.2)'den $Cov(X_{t_1}, X_{t_2})$, $|t_1 - t_2|$'nin bir fonksiyonu olacaktır. Bu fonksiyon, $\{X_t\}$'nin $(t_2 - t_1)$ gecikmesindeki otokovaryans fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\gamma(t_2 - t_1)$ ile gösterilir. Otokovaryans fonksiyonunun özelikleri şöyle sıralanabilir.

(1) $\gamma(0) = Var(X_t)$
(2) $|\gamma(k)| \leq \gamma(0), \forall k \in \mathbb{Z}$
(3) $\gamma(-k) = \gamma(k), \forall k \in \mathbb{Z}$
(4) $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\forall\, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ için,
$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \gamma_{t_r - t_s} z_r z_s \geq 0$

biçiminde sıralanabilir. $\gamma(k)/\gamma(0)$, $k \in \mathbb{Z}$ oranı, $\{X_t\}$'nin k gecikmesindeki otokorelasyon fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\rho(k)$ ile gösterilir. γ yerine ρ yazılırsa, otokovaryans fonksiyonunun özelliklerinden (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanır. Açıkça görüldüğü gibi $\rho(k), X_t$ ve $X_{t\pm k}$ arasındaki lineerliğin bir ölçüsüdür (Tong, 1990, Franses ve Dijk, 2000).

2.3. Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

X_t ve X_{t-k} arasındaki kısmi otokorelasyon, $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$ değişkenlerinin etkisi arındırıldıktan sonra bu iki değişken arasındaki korelasyon olarak tanımlanır. Yani,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (2.3)$$

regresyon modeli göz önüne alındığında k. kısmi otokorelasyon katsayısı ϕ_k olacaktır. Kısmi otokorelasyon katsayılarını hesaplamanın kolay bir şekli otokorelasyon katsayılarını kullanarak elde etmektir. P_k matrisi,

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılsın. P_k matrisinin son sütun vektörü $(\rho_{k-1} \quad \rho_{k-2} \quad \ldots \quad \rho_1 \quad 1)$'nün $(\rho_1 \quad \rho_2 \quad \ldots \quad \rho_{k-1} \quad \rho_k)$ vektörü ile değiştirilmesinden elde edilen P_k^* matrisi,

$$P_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

olmak üzere kısmi otokorelasyon katsayıları

$$\phi(k) = \frac{\det(P_k^*)}{\det(P_k)} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir (Akdi, 2003).

2.4. Beyaz Gürültü Serisi

Ortalaması sıfır olan herhangi bir ε_t zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde ise ε_t serisine beyaz gürültü serisi denir ve $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir (Akdi, 2003).

3. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Doğrusal zaman serisi modelleri, otoregresif (AR), hareketli ortalama (MA) ve bu iki modelin birleşimi şeklinde ifade edilen otoregresif hareketli ortalama modelleri olarak incelenebilir. Modeller durağan yapıya sahip olup olmamaları açısından da değerlendirilmektedir. Bu bölümde modeller ayrıntılı biçimde tanıtılacaktır.

3.1. Genel Durağan Modeller

Otoregresif (AR), hareketli ortalama (MA) ve otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modelleri doğrusal durağan modeller olarak adlandırılır. Bu bölümde modellere ilişkin tanım ve bazı özellikler verilmektedir.

3.1.1. Hareketli ortalama (MA) modeli

Hareketli ortalama modellerinde bir seri, başka bir serinin doğrusal birleşimi olarak ifade edilmektedir. Zaman serisi, aynı dönemin artık terimi ile belirli sayıda geçmiş dönemin artık terimlerinden oluşur. Genel olarak q. dereceden bir hareketli ortalama serisi,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \theta_0 = 1 \tag{3.1}$$

biçiminde veya gerileme operatörü L yardımıyla

$$(X_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilir ve $MA(q)$ ile gösterilir. Burada $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ şeklindedir. Eşitlik (3.1) ile ifade edilen bir X_t zaman serisi için serinin beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X_t) = E\left(\mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\right) = \mu \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var\left(\mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 Var(\varepsilon_{t-j}) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilmektedir. Aynı zamanda $MA(q)$ serisi için otokovaryans fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) \\ &= Cov\left(\mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},\ \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+k-j}\right) \\ &= Cov\left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},\ \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+k-j}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad k > q \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & , \quad k = 0,1,\ldots,q \\ \gamma(-k) & , \quad k < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir ve bu otokovaryans fonksiyonundan yararlanarak seri için otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}}{\sum_{j=0}^{q} \theta_j^2} & , \quad k = 1,2,\ldots,q \\ 0 & , \quad k > q \\ \rho(-k) & , \quad k < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilmektedir. $MA(q)$ serisi için otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonlarından, k değerinin model derecesi olan q'dan daha büyük olması

durumunda otokovaryans ve otokorelasyonların sıfıra eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu sebeple hareketli ortalama serileri için model derecesinin belirlenmesinde otokorelasyon fonksiyonu bir araç olarak kullanılmaktadır. Hareketli ortalama serilerinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise (2.4) eşitliği ile verildiği gibi hesaplanmaktadır ve kısmi otokorelasyon katsayıları k değeri arttıkça otoregresif modellerin otokorelasyon katsayılarına benzer olarak ya üstel olarak azalan ya da azalan sinüs dalgalanmaları biçiminde bir eğilim göstermektedir (Kınacı, 2005).

Eşitlik (3.3) ve (3.4)'den görüldüğü gibi, Eşitlik (3.1)'de verilen $MA(q)$ serisinin beklenen değeri sabit, varyansı sonlu ve otokovaryans (aynı zamanda otokorelasyon) fonksiyonu $\gamma(k)$ t'den bağımsızdır. Bu da sonlu her q değeri için $MA(q)$ serisinin durağan olduğu anlamına gelmektedir.

Ancak q'nun sonlu olmaması durumunda yani X_t zaman serisinin,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad , \quad \theta_0 = 1 \tag{3.7}$$

şeklinde $MA(\infty)$ serisi olması durumunda bu serinin durağan olabilmesi için,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\theta_j\right| < \infty$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

Eşitlik (3.7) ile verilen $MA(\infty)$ serisinde $\left|\rho\right| < 1$ olmak üzere $\theta_j = \rho^j$ olarak tanımlandığında,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\theta_j\right| = \sum_{j=0}^{\infty} \left|\rho\right|^j = \frac{1}{1-\left|\rho\right|} < \infty$$

olacağından bu şekilde verilen $MA(\infty)$ serisi durağan olacaktır. Ayrıca,

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \tag{3.8}$$

ve

$$X_{t-1} = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-1-j} \tag{3.9}$$

olduğu dikkate alındığında,

$$X_t - \rho X_{t-1} = \varepsilon_t$$

veya

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.10}$$

eşitliklerine ulaşılır. Eşitlik (3.10) ile ifade edilen seri birinci dereceden otoregresif süreç olarak adlandırılır ve $AR(1)$ ile gösterilir. Bu durumda Eşitlik (3.10) ile verilen $AR(1)$ serisinin durağanlığı (3.7) eşitliği ile verilen $MA(\infty)$ serisinin durağanlığına yani $|\rho| < 1$ olmasına bağlıdır (Kınacı, 2005). Burada $|\rho| < 1$ şartı çevrilebilirlik koşulu olarak adlandırılır.

3.1.2. Otoregresif (AR) model

Otoregresif zaman serilerinde, serinin şimdiki değerleri kendi geçmişindeki değerlere ve beyaz gürültüye bağlı olarak değişmektedir. Birçok ekonomik veri otoregresif zaman serisi olarak modellenebilmektedir. Genel olarak p. dereceden bir otoregresif zaman serisi,

$$(X_t - \mu) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (X_{t-i} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilmekte ve kısaca $AR(p)$ ile gösterilmektedir. Burada $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ olan beyaz gürültü serisi, μ, X_t serisinin ortalaması ve ϕ_i'ler ise modelin bilinmeyen

parametreleridir. Burada kolaylık olması için $\mu = 0$ olduğu varsayılacaktır ve aynı zamanda $Y_t = X_t - \mu$ dönüşümü de kullanılabilmektedir. $\mu = 0$ varsayımı altında Eşitlik (3.11) ile verilen $AR(p)$ serisi,

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.12}$$

şeklinde veya gerileme operatörü L kullanılarak

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) X_t = \varepsilon_t \tag{3.13}$$

$$X_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)^{-1} \varepsilon_t$$
$$X_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots) \varepsilon_t \tag{3.14}$$

şeklinde $MA(\infty)$ serisi olarak yazılabilir. Eşitlik (3.12) ile verilen X_t zaman serisinin (3.14) şeklinde $MA(\infty)$ serisi olarak gösterimi yardımıyla $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$ yakınsak olduğunda,

$$E(X_t) = E((1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots) \varepsilon_t) = 0$$

ve

$$Var(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$$

sonlu olacaktır ve bu Eşitlik (3.14) ile verilen X_t serisinin durağanlığı için gerekli bir koşuldur (Kınacı, 2005).

Eşitlik (3.12) ile verilen X_t zaman serisi için otokovaryans fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) \\ &= Cov(X_t, \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t+k-i} + \varepsilon_{t+k}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i Cov(X_t, X_{t+k-i}) \\ &= \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2) + \cdots + \phi_p\gamma(k-p) \ , \ k > 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Otokovaryans fonksiyonuna bağlı olarak $AR(p)$ serisinin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \cdots + \phi_p\rho(k-p) \ , \ k > 0$$

olarak elde edilmektedir.

p. dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli $AR(p)$ 'nin durağan olabilmesi

$$m^p - \sum_{i=1}^{p} \phi_i m^{p-i} = 0 \qquad (3.15)$$

karakteristik denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olmasına ya da buna eşdeğer olarak Eşitlik (3.13)'de verilen,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) = 0$$

denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den büyük olmasına bağlıdır. $AR(p)$ modeli için k 'inci kısmi otokorelasyon katsayısı olan $\phi(k)$ ise Eşitlik (2.4) yardımıyla hesaplanabilir.

Durağan otoregresif zaman serisi modelleri için serinin otokorelasyonları k değeri arttıkça ya üstel olarak azalan ya da azalan sinüs dalgalanmaları biçiminde bir eğilim göstermektedir. Burada azalma oranının yavaş olması durumunda serinin durağanlığı konusunda şüpheye düşülmektedir. Durağan otoregresif zaman serisi modellerinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise model derecesinden büyük k değerleri için 0 değerini almaktadır. Bu yüzden otoregresif süreçler için model derecesinin

belirlenmesinde kısmi otokorelasyon katsayıları bir araç olarak kullanılmaktadır (Kınacı, 2005).

3.1.3. Otoregresif hareketli ortalama (ARMA) modeli

Tek başına $AR(p)$ veya $MA(q)$ süreçleri tarafından ifade edilemeyen serilerde bu iki sürecin birlikte kullanıldığı bir model oluşturulur. Bu modellerde bir zaman serisinin herhangi bir dönemine ait gözlem, ondan önceki belirli sayıdaki gözlemin ve artık terimlerinin doğrusal bir birleşimi olan $ARMA$ modeli şeklinde ifade edilmeye çalışılır. Genel olarak p. ve q. dereceden bir $ARMA(p,q)$ modeli,

$$\phi_p(L)X_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \tag{3.16}$$

biçiminde veya açık olarak,

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \tag{3.17}$$

biçiminde ifade edilir. Bu modelin durağan olması için otoregresif kesime ait olan $\phi_p(L) = 0$ denkleminin tüm köklerinin mutlak değerce 1'den büyük olması gerekmektedir. AR ya da MA modelini kullanarak çok sayıda parametreyi gerektiren veriler, bir $ARMA$ modeli kullanılarak sadece birkaç parametre ile modellenebilmektedir. Genelde, modelde çok sayıda parametrenin bulunması tahminde etkinliği azaltır.

$ARMA(p,q)$ zaman serisi modelinin otokovaryansları,

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \cdots + \phi_p\gamma(k-p) \quad , \quad k \geq q+1 \tag{3.18}$$

şeklinde veya buna bağlı olarak otokorelasyonları,

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \cdots + \phi_p\rho(k-p) \quad , \quad k \geq q+1 \tag{3.19}$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. $ARMA(p,q)$ modelinin otokorelasyonları $k > q$ değerleri için $AR(p)$ modelinin otokorelasyonları ile aynı olmaktadır (Akdi, 2003). $ARMA(p,q)$ modelinin kısmi otokorelasyon katsayıları ise (2.4) eşitliği ile verildiği gibi hesaplanmaktadır (Kınacı, 2005).

3.2. Durağan Olmayan Doğrusal Modeller

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok seri durağan olmayan yapıya sahiptir. Böyle serilerde durağan bir model kullanabilmek için serideki durağan olmayan yapının arındırılması gerekmektedir. Eğer incelenen zaman serisi ortalamaya göre durağan olmayan bir yapı sergiliyorsa o zaman serinin farkı alınarak durağanlık sağlanabilir ve bu yaklaşım ekonometride sıklıkla kullanılmaktadır. Yani Eşitlik (3.16) ile verilen eşitlikte X_t yerine $\nabla^d X_t$ alınarak ortalamasına göre durağan olmayan seri AR ve MA modelleri ile modellenebilir. Böyle bir model bütünleşik model ARIMA olarak adlandırılmaktadır. Buradaki d, X_t serisinin durağanlığının sağlanabilmesi amacıyla uygulanması gereken fark işlemi sayısını göstermektedir ve uygulamada genellikle $d = 1$ durumu ile karşılaşılmaktadır (Kızılsu, 2000).

Durağan olmayan X_t zaman serisi için,

$$W_t = \nabla^d X_t = (1-L)^d X_t$$

yazılarak genel bütünleşik otoregresif hareketli ortalama ($ARIMA$) serisi,

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

daha kısa olarak,

$$\phi_p(L) W_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \qquad (3.20)$$

veya

$$\phi_p(L)(1-L)^d X_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \tag{3.21}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.21) ile verilen model kısaca $ARIMA(p,d,q)$ ile gösterilmektedir. X_t zaman serisi için oluşturulan (3.21) modeli açık bir şekilde durağan olmayan bir modeldir. Çünkü modelin sol tarafındaki otoregresif kısma ait $\phi_p(L)(1-L)^d$ ifadesinin d tane kökü 1'e eşit çıkacaktır (Kınacı, 2005).

3.3. Durağanlık Analizi

Zayıf durağanlık, zaman serisi verilerinin sabit bir ortalama etrafında dalgalanması ve dalgalanmanın varyansının zaman boyunca sabit kalması olarak ifade edilebilir. Zaman serisinde durağanlık kavramı farklı şekillerde ortaya çıkabilir.

Bir zaman serisi, zamana göre grafiği içerisinde belirli bir noktada ortalamayı sıkça keserek ortalama etrafında saçılım gösteriyorsa, yani, zaman boyunca ortalamada bir değişme söz konusu değilse seri, ortalama durağan olarak adlandırılır. Zaman serisinin zamana göre grafiğinde varyansta bir değişme olmazsa seri, varyans durağandır (Sevüktekin ve Nargeleçekenler, 2010).

Bir zaman serisinin istatistiksel olarak değerlendirilmesinde istatistiksel testlerin geçerli olabilmesi için durağanlık koşulunun sağlanması gereklidir. Durağanlık araştırılırken çeşitli yöntemler kullanılır (Kınacı, 2005).

Serinin otokorelasyon katsayılarının gecikmelere karşı çizimi ortalamaya göre durağan olup olmamayı kolayca saptamaya yardımcı olmaktadır. Durağan verilerin otokorelasyon katsayıları nispeten hızlı bir şekilde sıfıra yaklaşırken, durağan olmayan bir zaman serisinde otokorelasyonlar anlamlı şekilde sıfırdan farklı olacaktır. Ancak grafiklerin incelenmesi her zaman doğru ve kesin bilgi vermeyebilir. Bu nedenle durağanlığı tespit etmek için çeşitli testler kullanılır. Bu testler birim kök testleridir (Kınacı, 2005).

3.3.1. Birim kök testleri

Burada doğrusal zaman serilerinde birim kök testi için geleneksel yaklaşım olan Dickey-Fuller (DF) ve genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) testleri verilecektir. Literatürde seride yapısal kırılmayı test eden birim kök testleri de bulunmaktadır.

3.3.1.1. Doğrusal zaman serilerinde birim kök testleri

Dickey-Fuller testinde incelenen serinin özelliğine göre seçilecek farklı üç regresyondan biri tahmin edilerek, zaman serisinin durağan olmadığını savunan temel hipotez test edilir. Bu regresyonlardan ilki,

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.22}$$

modelinden

$$\Delta X_t = (\phi - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.23}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.22)'deki regresyon katsayısı için,

$$H_0 : (\phi - 1) = 0$$

hipotezi kurulur. Bu hipotezin testi için hesaplanan istatistik *t* istatistiğinin hesaplanma şekliyle aynıdır. Karşılaştırma için ise Dickey ve Fuller (1979)'ın hazırladığı τ tablosundan yararlanılır. Dickey-Fuller testi AR(1) modelinin durağanlığını araştırmak için kullanılır (Yılancı, 2007).

Diğer regresyon modelleri ise kesme terimi ile hem kesme terimi hem de deterministik trendin yer aldığı modellerdir ve

$$\Delta X_t = \phi_0 + (\phi - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta X_t = \phi_0 + (\phi - 1) X_{t-1} + \vartheta t + \varepsilon_t$$

olarak verilir. Kurulacak hipotez ve testi ilk regresyon modelinde olduğu gibidir.

Genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) testi ise, ARMA(p, q) modeli için durağanlığı araştırır. ARMA modelinin otoregresif kısmına X_t'nin gecikmeli değerleri eklenerek,

$$\Delta X_t = (\phi_1 - 1)X_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}(\phi_i - 1)\Delta X_{t-i+1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta X_t = \phi_0 + (\phi_1 - 1)X_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}(\phi_i - 1)\Delta X_{t-i+1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta X_t = \phi_0 + (\phi_1 - 1)X_{t-1} + \sum_{i=2}^{p}(\phi_i - 1)\Delta X_{t-i+1} + \vartheta t + \varepsilon_t$$

regresyon modelleri elde edilir. ADF testinde sınanacak hipotezler ve hesaplanan test istatistiğini karşılaştırmak için kullanılan değerler DF istatistiği ile aynıdır. Ele alınan her denklem ve gecikme sayısı için hipotez kurulur. ADF testinde modele dâhil edilecek gecikme sayısını belirlemek için AIC veya SIC gibi bilgi kriterleri kullanılabilir.

3.3.2. Durağanlık dönüşümleri

Eldeki zaman serisi fark alma işlemleri ile durağan hale getirilemiyorsa, bu durumda varyans sabitleştirme dönüşümleri (güç dönüşümleri) yapılır. Varyansı düzgünleştirmek için güç fonksiyonu Eşitlik (3.24)'deki gibi tanımlanır.

$$X_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X_t^{\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log(X_t), & \lambda = 0 \end{cases} \qquad (3.24)$$

Bu dönüşüme Box-Cox dönüşümü de denir. Burada, λ, dönüştürme parametresi ve $X_t^{(\lambda)}$ ise dönüştürülmüş dizidir. Gereken dönüşüm uygulanarak varyansta durağanlık sağlanabilir (Kadılar, 2005). Varyansta durağanlık sağlandıktan sonra gerektiğinde ortalamada durağanlık için fark alma işlemleri yapılır.

3.4. Model Seçimi: Korelogram İncelemesi

Durağan hale getirilen zaman serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarına bakılarak sezgisel olarak serinin $AR(p)$ veya $MA(q)$ sürecinden hangisine uyduğu belirlenebilir. Eğer otokorelasyon fonksiyonu herhangi q. dereceden

sonra birden sıfırlanıyor ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu azalarak sıfırlanıyorsa modelin $MA(q)$ şeklinde bir hareketli ortalama modeli olduğu söylenebilir veya kısmi otokorelasyon fonksiyonu herhangi p. dereceden sonra birden sıfırlanıyor ve otokorelasyon fonksiyonu azalarak sıfırlanıyorsa modelin bir $AR(p)$ tipi olduğu söylenebilir. Fonksiyonlarla ilgili bilgiler Çizelge 3.1'deki gibi sınıflandırılabilir.

Çizelge 3.1. Durağan modellerde otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonunun bazı özellikleri

Model	Otokorelasyon Fonksiyonu	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu
AR (p)	Üstel olarak veya sinüs dalgaları şeklinde sürekli azalır.	p gecikmesinden sonra katsayı aniden düşerek istatistiksel olarak anlamsız olur.
MA (q)	q gecikmesinden sonra katsayı aniden düşerek istatistiksel olarak anlamsız olur.	Üstel olarak veya sinüs dalgaları şeklinde sürekli azalır.
ARMA (p ,q)	(q-p) gecikmesinden sonra üstel veya azalan sinüs dalgalarının bir karışımı görünümündedir.	(p-q) gecikmesinden sonra üstel veya azalan sinüs dalgalarının bir karışımı görünümündedir.

Model belirlendikten sonra parametre tahmini yapılır ve tahminden sonra da modelin seri için uygunluğunun araştırılması gerekmektedir. Teşhis kontrolü iki aşamada gerçekleşir. Bu aşamalardan ilkinde model tarafından üretilen serinin otokorelasyon fonksiyonu orijinal serinin otokorelasyon fonksiyonu ile karşılaştırılır. Eğer her iki otokorelasyon fonksiyonu birbirinden oldukça farklı ise, oluşturulan modeli tekrar gözden geçirmek gerekir. Eğer otokorelasyonlar arasında önemli bir fark yok ise modelin hata terimleri analiz edilir.

3.5. Model Seçim Kriterleri

Model seçilirken gecikme değerleri p ve q, ne kadar artırılırsa artık kareleri toplamı (SSE) o kadar küçük olacaktır. Diğer taraftan modele fazla dışsal değişkenin ilave edilmesi serbestlik derecesini azaltmaktadır. Bir zaman serisi verisine en uygun modelin seçimi için geliştirilen bazı kriterler vardır. Bunlardan en çok kullanılanları Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Schwartz Bayesian kriteri (SIC) dir. Bu iki kriter,

$$AIC = n\ln(SSE) + 2m$$
$$SIC = n\ln(SSE) + m\ln(n) \qquad (3.25)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, n, kullanılabilir gözlem sayısı, m, tahmin edilen parametre sayısı ($p+q+$sabit terim), SSE, artık kareler toplamıdır. AIC ve SIC için istenilen ideal değer, mümkün en küçük değerleri almasıdır (Kınacı, 2005).

3.6. Model Geçerliliğinin Araştırılması

Tahmin edilen doğrusal zaman serisi modelinin geçerli olabilmesi için modelin artıklarının korelasyonsuz olması ve beyaz gürültü sürecine sahip olması gerekmektedir. Bu bölümde bu koşulların sağlanıp sağlanmadığını görmek amacıyla uygulanacak yöntemler verilecektir.

3.6.1. Artıkların otokorelasyon fonksiyonu grafiği

Artıkların örnek ardışık bağımlılık değerleri,

$$r_k(\hat{\varepsilon}) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+k}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}, \; k = 1,2,3, \ldots \qquad (3.26)$$

olarak elde edilebilir. Burada n gözlem sayısı, k, gecikme sayısıdır. Buradan elde edilen ACF ($r_k(\hat{\varepsilon})$) değerlerine bakılarak artıkların ardışık bağımlı olup olmadığına karar verilebilir. Box ve Jenkins (1976) örnek ardışık bağımlılıklarının birbirinden bağımsız ve $1/n$ varyansına sahip olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla normallik varsayımı altında %5 anlamlılık düzeyinde (-1.96/$\sqrt{n}$; 1.96/$\sqrt{n}$) güven aralığı dışında ise artık ardışık bağımlılıkları sıfırdan farklıdır (Franses ve Dijk, 2000).

3.6.2. Breusch-Godfrey testi

k değişkenli bir regresyon denklemi,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (3.27)$$

ele alınsın. Burada ε_t bir AR(p) otoregresif sürece sahiptir.

$$\varepsilon_t = \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi_p\varepsilon_{t-p} + v_t \qquad (3.28)$$

İlk olarak klasik en küçük kareler yöntemiyle ε_t elde edilir ve,

$$\hat{\varepsilon}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \phi_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \phi_2\hat{\varepsilon}_{t-2} + \cdots + \phi_p\hat{\varepsilon}_{t-p} + v_t$$

regresyonu yapılarak modelin R^2 değeri elde edilir. Test istatistiği $(n-p)R^2$, $\phi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ yani serisel korelasyon yoktur şeklinde kurulan yokluk hipotezi altında χ_p^2 dağılımına sahiptir. Burada n, gözlem sayısıdır. Test istatistiği, χ_p^2 tablo değerinden büyükse yokluk hipotezi reddedilecektir.

3.6.3. White testi

White testi, sabit varyans varsayımının geçerli olup olmamasının belirlenmesinde yaygın olarak kullanılan testlerden biridir. Testin uygulanması için kurulan model tahmin edilerek artıklar belirlenir. Belirlenen artıkların karelerinin bağımlı değişken olduğu, bağımsız değişkenlerin ise, modelin bağımsız değişkenleri, bağımsız değişkenlerin kareleri ve bağımsız değişkenlerin birbirleri ile çarpımlarının olduğu yardımcı regresyon modeli tahmin edilir. İncelenecek model,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \cdots + \beta_k X_{tk} + \varepsilon_t \;,\; t = 1,2,\ldots,n$$

biçiminde ise yardımcı regresyon modeli,

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_t^2 = {} & \alpha_0 + \alpha_1 X_{t1} + \alpha_2 X_{t2} + \cdots + \alpha_k X_{tk} + \gamma_1 X_{t1}^2 + \cdots + \gamma_k X_{tk}^2 \\ & + \delta_1 X_1 X_2 + \cdots + \delta_{k-1} X_1 X_k + \theta_1 X_2 X_3 + \cdots + \nu_t \;,\; t = 1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

olacaktır. Bu durumda yokluk hipotezi $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ (sabit varyans varsayımı geçerlidir) şeklinde kurulur. White testi için test istatistiği, yardımcı regresyon modelinin belirlilik katsayısı ile nR^2 olarak hesaplanır. nR^2, serbestlik

derecesi yardımcı regresyon modelinin bağımsız değişken sayısı olan χ^2 dağılımlıdır. Test istatistiği, χ^2 tablo değerinden daha büyükse H_0 hipotezi reddedilecektir

3.6.4. Jarque-Bera normalik testi

Artıklar üzerine yapılan en büyük varsayım, artıkların birbirinden bağımsız ve ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip olmasıdır. Bu varsayım ile kullanılacak t istatistikleri geçerli olmaktadır. Tahmin edilen artıkların j. momenti,

$$\widehat{m}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^j \tag{3.29}$$

olarak tanımlanırsa $\hat{\varepsilon}_t$'nin çarpıklık ve basıklığı sırasıyla,

$$\hat{S}K_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\widehat{m}_3}{\sqrt{\widehat{m}_3^2}} \tag{3.30}$$

ve

$$\widehat{K}_{\hat{\varepsilon}} = \frac{\widehat{m}_4}{\widehat{m}_2^2} \tag{3.31}$$

ile hesaplanır. Normal dağılımda çarpıklık 0, basıklık 3'e eşittir. $\hat{\varepsilon}_t$'lerin normal ve otokorelasyonsuz olduğu yokluk hipotezi altında standartlaştırılmış basıklık $\sqrt{n/6}\hat{S}K_{\hat{\varepsilon}}$ ve çarpıklık $\sqrt{\frac{n}{24}}(\widehat{K}_{\hat{\varepsilon}} - 3)$ tır. Jarque-Bera testinde yokluk hipotezi verilerin normal dağılım gösterdiğini söylemektedir. Normalliği sınamak için

$$JB = \frac{n}{6}\hat{S}K_{\hat{\varepsilon}}^2 + \frac{n}{24}(\widehat{K}_{\hat{\varepsilon}} - 3)^{\,2} \tag{3.32}$$

test istatistiği önerilmiştir ve bu değer $\chi^2_{(2)}$ dağılımına sahiptir. Normallik reddedildiğinde, artıklar sabit varyanslı değildir ve doğrusal olmayan modeller ile modellenmelidir (Yalçın, 2008).

3.7. Modelleme Süreci

Doğrusal zaman serilerinde modelleme süreci Box ve Jenkins (1976)'in önerdiği şekliyle yapılmaktadır. Box-Jenkins yaklaşımına göre ilk olarak veride durağanlık analizi yapılarak veri hazırlanır, daha sonra otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları yardımıyla model seçimi yapılır. Muhtemel modellerin parametre tahminleri yapılarak model seçim kriterleri ile en uygun modele karar verilir ve artıkların kontrolü yapılır.

4. KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANSLI MODELLER

Bu bölümde, serinin varyansının modellenmesi ile değişen varyansa izin veren koşullu değişen varyanslı otoregresif (ARCH) modelden bahsedilecektir.

4.1. Koşullu Değişen Varyanslı Otoregresif (ARCH) Modeller

Bir X_t zaman serisi, öngörülebilir ve öngörülemez iki parçanın toplamından oluşur. Yani,

$$X_t = E[X_t|\Omega_{t-1}] + \varepsilon_t \tag{4.1}$$

dır. Burada, Ω_{t-1}, $t-1$ zamanına kadar olan ilgili tüm bilgiyi içeren bilgi kümesidir. Öngörülemeyen kısım ε_t'nin beyaz gürültü özelliklerini sağladığı varsayımı altında, öngörülebilir kısım veya koşullu ortalama $E[X_t|\Omega_{t-1}]$ üzerinde doğrusal zaman serisi modelleri bölümünde durulmuştu. Beyaz gürültü sürecinin özellikleri,

$$E[\varepsilon_t] = 0 \tag{4.2}$$

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 \tag{4.3}$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0, \ \forall s \neq t \tag{4.4}$$

şeklinde verilebilir. Beyaz gürültü sürecinde ε_t'nin hem koşulsuz hem de koşullu olarak değişmeyen varyanslı olduğu varsayıldı. Dolayısıyla,

$$E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_t^2 \,|\, \Omega_{t-1}] = \sigma^2 \ , \ \forall t \text{ için} \tag{4.5}$$

olarak yazılabilir. Burada, varsayımların bu kısmı biraz gevşetilecek ve ε_t'nin koşullu varyansının zamanla değiştiği kabul edilecektir, yani

$$E[\varepsilon_t^2 \,|\, \Omega_{t-1}] = h_t \tag{4.6}$$

dır. Böylece ε_t, koşullu değişen varyanslı olur. Bu ifadenin alışılmış gösterimi,

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t} \tag{4.7}$$

şeklindedir. Burada v_t, bağımsız ve aynı dağılıma sahip sıfır ortalamalı ve birim varyanslı rasgele değişkeni göstermektedir. Kolaylık olması için, v_t'nin standart normal dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır. Eşitlik (4.7)'den ve v_t'nin özelliklerinden ε_t'nin Ω_{t-1} koşuluna göre dağılımı sıfır ortalamalı ve h_t varyanslıdır. ε_t'nin koşullu olmayan varyansının hala sabit olduğu varsayılmaktadır. Beklenen değeri kullanarak,

$$\sigma^2 \equiv E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_t^2 \mid \Omega_{t-1}] = E[h_t] \tag{4.8}$$

ile h_t'nin koşullu olmayan beklenen değerinin sabit olduğu varsayılabilir (Franses ve Dijk, 2000).

Engle (1982), finansal zaman serilerinin volatilite kümelenmelerini içermesi için değişen varyanslı koşullu otoregresif (ARCH) modeller sınıfını ortaya koymuştur. Temel ARCH modelinde, t zamanında meydana gelen şokun koşullu varyansı, geçmiş şokların karelerinin doğrusal bir fonksiyonudur. Mesela, birinci sıra ARCH modelinde,

$$h_t = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 \tag{4.9}$$

şeklindedir. Açıktır ki, h_t (koşullu) varyansının negatif olmaması gerekir. Bunu garanti etmek için, ARCH(1) modelinin Eşitlik (4.9)'da verilen parametreleri $\omega > 0$ ve $\alpha_1 \geq 0$ durumlarını sağlamalıdır. $\alpha_1 = 0$ olması, koşullu varyansın sabit olduğunu gösterir, yani ε_t, koşullu değişmeyen varyanslıdır.

ARCH modelinin volatilite kümelenmelerini nasıl tanımladığını anlamak için Eşitlik (4.7)'deki model (4.9) eşitliği ile birlikte incelenebilir. ε_t'nin koşullu varyansı bir önceki zaman periyodunda meydana gelen şokun karesinin artan bir fonksiyonudur. Buna göre, ε_{t-1} büyükse (mutlak değerce), ε_t'nin de büyük olması (mutlak değerce) beklenir. Başka bir ifadeyle de, büyük (küçük) şoklar, büyük (küçük) şokları izleme eğilimindedir (Kızılsu, 2000).

Bunu göstermenin bir diğer yolu, ARCH(1) modelini ε_t^2 için AR(1) modeli olarak yazmaktır. (4.9) eşitliğinde her iki tarafa ε_t^2 eklenir ve her iki taraftan h_t çıkarılırsa,

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada, $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - h_t = h_t(v_t^2 - 1)$'dir. $E[v_t|\Omega_{t-1}] = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Eşitlik (4.10) ile verilen model $\alpha_1 < 1$ ise kovaryans durağandır. Bu durumda, ε_t'nin veya ε_t^2'nin koşullu olmayan varyansı,

$$\sigma^2 \equiv E[\varepsilon_t^2] = \frac{\omega}{1-\alpha_1} \tag{4.11}$$

ile verilir. Ayrıca, (4.10) eşitliği,

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= (1-\alpha_1)\frac{\omega}{1-\alpha_1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \\ &= (1-\alpha_1)\sigma^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \\ &= \sigma^2 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + v_t \end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. $0 \leq \alpha_1 < 1$ olduğu varsayılırsa, (4.12) eşitliği, ε_{t-1}^2 kendi koşullu olmayan beklenen değeri σ^2'den büyükse (küçükse), ε_t^2, σ^2'den büyük (küçük) olacaktır (Li ve Li, 1996).

ARCH modeli, finansal verilerin volatilite kümelenmesini içermekle kalmaz, basıklıktaki fazlalığı da ele alır. Eşitlik (4.13)'den ε_t'nin basıklığının her zaman v_t'nin basıklığından fazla olduğu Jensen eşitsizliği ile görülebilir.

$$E[\varepsilon_t^4] = E[v_t^4]E[h_t^2] \geq E[v_t^4]E\left[h_t\right]^2 = E[v_t^4]E[\varepsilon_t^2]^2 \tag{4.13}$$

Engle (1982)'in gösterdiği gibi, ARCH(1) modelinde v_t normal dağılıma sahip olduğunda ε_t'nin basıklığı,

$$K_{\varepsilon} = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} \tag{4.14}$$

şeklindedir ve $3\alpha_1^2 < 1$ ise sonludur. Buradan görülebileceği gibi, K_{ε}, her zaman normal değer olan 3'ten büyüktür (Engle, 1982).

ARCH(1) modelinin bir diğer karakteristiği, ε_t^2 şokları ile ilgili otokorelasyon fonksiyonudur. Eşitlik (4.10)'daki AR(1) gösteriminde, ε_t^2'nin $k.$ sıra otokorelasyonu α_1^k'dır. ARCH(1) modelinde birinci-sıra otokorelasyon α_1'in küçük bir değer alması anlamına gelecektir. Fakat bu, dönüşte otokorelasyonların oldukça hızlı bir biçimde sıfıra yaklaşmasına yol açacaktır. Böylece, denilebilir ki, ARCH(1) modeli getiri serilerinin ampirik otokorelasyonlarının iki karakteristik özelliğini eşzamanlı olarak yansıtamamaktadır.

Ampirik otokorelasyon fonksiyonunda devamlılığı sağlamak için ARCH(1) modelinin genellenmesi ele alınabilir. Bunun bir yolu, koşullu varyans fonksiyonuna daha fazla gecikmeli karesel şoklar eklemektir. Yani,

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-q}^2 + \cdots + \alpha_1 \varepsilon_{t-q}^2 \tag{4.15}$$

dır. Koşullu varyansın negatif olmamasını sağlamak için, $\omega > 0$ ve $\alpha_i \geq 0\,, i = 1, \ldots, q$ olması gerekir. Ayrıca varyansın sonlu olması için $\sum \alpha_i < 1$ koşulunun da sağlanması gerekir. ARCH(q) modeli, ε_t^2'ler için AR(q) modeli olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-q}^2 + \cdots + \alpha_1 \varepsilon_{t-q}^2 + \nu_t \tag{4.16}$$

olur. Böylece, ε_t'nin koşullu varyansı,

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \tag{4.17}$$

olarak yazılır. Burada ARCH(q) modeli, $1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_q L^q$ gecikme polinomunun tüm kökleri birim çemberin dışında olduğunda kovaryans durağandır (Franses ve Dijk, 2000).

4.1.1. ARCH etkisinin incelenmesi

Zaman içinde değişen varyansın modellenebilmesi için öncelikle seride koşullu değişen varyansın başka bir ifadeyle ARCH etkisinin olup olmadığının sınanması gerekmektedir. Burada sadece Engle (1982) tarafından önerilen ARCH-LM testine yer verilecektir.

ARCH-LM yöntemine göre artıkların karesi için otoregresif model,

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + v_t \qquad (4.18)$$

ele alınsın. Burada q, otoregresif modelin gecikme uzunluğunu göstermektedir. Uygun gecikme uzunluğu AIC ya da SIC gibi model belirleme kriterleri ile belirlenebilir. ARCH etkisinin testinde kullanılacak "ARCH etkisi yoktur" biçimindeki yokluk hipotezi,

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$$

şeklinde tanımlanır. Yokluk hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında nR^2 değeri asimptotik olarak serbestlik derecesi q olan ki-kare dağılımına sahiptir ($nR^2 \sim \chi_q^2$) (Engle, 1982). Burada n, gözlem sayısı, q, kısıt sayısıdır ve ARCH etkisinin araştırıldığı gecikme sayısıdır. Elde edilen ki-kare değeri tablo değerinden büyük ise yokluk hipotezi reddedilir. Başka bir ifadeyle seride varyans zamanla değişmektedir ve bu varyansın uygun bir model ile modellenmesi gerekmektedir (Yalçın, 2008).

4.1.2. ARCH modelinin eksik yanları

ARCH modeli oynaklığın modellenmesinde kullanılan modellerin en basit halidir ve diğer oynaklık modellerinin temelini oluşturmaktadır. Ancak, uygun gecikme uzunluğu q'nun belirlenmesinde olabilirlik oranı ve buna benzer yöntemler kullanılsa da gecikme uzunluğunun belirlenmesinde hala iyi bir yöntem mevcut değildir. Belirlenen gecikme uzunluğu q, koşullu varyanstaki bağımlılığın hepsini karşılamalıdır. Bu durumda q çok büyük olabilir. Bu da çok geniş bir koşullu varyans modeline neden olacaktır.

Koşullu varyans modelinde ne kadar çok parametre olursa, bir veya birden fazla negatif parametre tahmin etme şansı o kadar çok olur. ARCH modellemesinde parametre tahminlerinin negatif olmama kısıtlaması bozulabilir. Bu problemin de üstesinden gelebilmek için GARCH modellemesine geçilmiştir.

ARCH modeli özellikle finansal serilerdeki oynaklığı her zaman tam anlamıyla modelleyememektedir. Gecikme uzunluğunun artması ya da gerekli kısıtların sağlanamaması ARCH modelinin genişletilmesi fikrini doğurmuştur.

4.2. GARCH Modeli

Bir ARCH(q) modelinin koşullu varyansı yeterince kapsayabilmesi için, genellikle q çok büyük alınır. Böyle bir modelde parametre tahmini yapmak iyi sonuç vermeyebilir, çünkü negatif olmama ve durağanlık koşulları etkilenebilir. Sorunları azaltmak için alternatif bir yöntem de Bollerslev (1986) tarafından önerilmiştir. Buna göre, ARCH modeline koşullu varyansın gecikmeleri eklenir. Yani, Eşitlik (4.9)'daki ARCH(1) modeline h_{t-1} eklenerek (1,1) sıralı genelleştirilmiş ARCH (GARCH) modeli elde edilir.

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{4.19}$$

Bu modelde, $h_t \geq 0$ durumunu garanti etmek için, $\omega > 0$, $\alpha_1 > 0$ ve $\beta_1 \geq 0$ durumları sağlanmalıdır. β_1'in tanımlı olması için α_1 kesinlikle pozitif olmalıdır.

Modele neden koşullu varyansın gecikmelerinin eklenmesinden kaçınılarak artık karelerinin daha fazla sayıda gecikmesinin eklendiğini anlamak için (4.19) eşitliği yeniden yazılsın.

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) \tag{4.20}$$

Toplam sembolü kullanılarak,

$$h_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^i \omega + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 \tag{4.21}$$

yazılır. Görüldüğü gibi GARCH(1,1) modeli özellikle ε_t^2'nin gecikme terimlerinin parametreleri için ARCH(∞) modeline karşılık gelmektedir.

Ayrıca alternatif olarak, Eşitlik (4.19)'da her iki tarafa ε_t^2 ekleyerek ve sağ taraftan h_t'yi çıkararak GARCH(1,1) modeli ε_t^2 için ARMA(1,1) olarak yazılabilir.

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \tag{4.22}$$

Burada yine $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$'dir. Bu GARCH(1,1) modeli, ancak ve ancak $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ olduğunda kovaryans durağandır. Böylece, ε_t^2'nin koşullu olmayan varyansı (veya ε_t 'nin koşullu olmayan varyansı),

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha_1-\beta_1} \tag{4.23}$$

olur. Eşitlik (4.22)'deki ARMA(1,1) gösterimi ile neden β_1'in tanımlı olması için α_1'in kesinlikle pozitif olması gerektiği açıklanmış olur. Eğer $\alpha_1 = 0$ olursa, AR ve MA polinomlarının ikisi de $1 - \beta_1 L$'ye eşit olur. ARMA(1,1) modeli ε_t^2 için bir MA(∞) modeli olarak yeniden düzenlenirse bu polinomlar birbirini götürür,

$$\varepsilon_t^2 = \frac{1-\beta_1 L}{1-\beta_1 L} v_t = v_t \tag{4.24}$$

ve β_1 tanımsız olur.

Bollerslev (1986)'in gösterdiği gibi, ε_t'nin dördüncü momenti yalnızca $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$ olması durumunda sonlu olur. Ayrıca v_t'nin normal dağıldığı varsayılırsa, ε_t'nin basıklığı,

$$K_\varepsilon = \frac{3[1-(\alpha_1+\beta_1)^2]}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2} \tag{4.25}$$

ile verilir. Bu da yine, normal değer 3'ten büyüktür. Eğer $\beta_1 = 0$ ise, (4.25) eşitliği (4.14)'deki haline indirgenir.

ε_t^2'nin otokorelasyonları,

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2\beta_1}{1-2\alpha_1\beta_1-\beta_1^2} \tag{4.26}$$

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\rho_1\,, \quad k = 2,3,\dots \tag{4.27}$$

ile hesaplanır. Otokorelasyonlar üstel azalan olmasına rağmen, bu durumun bozulmasına yol açan faktör $\alpha_1 + \beta_1$'dir. Bu toplam 1'e yaklaştıkça, otokorelasyonlar gittikçe azalacaktır. ε_t'nin dördüncü momenti sonlu değilse, ε_t^2'nin otokorelasyonları zamana bağlı olarak değişir. Bu durumda, örneklem otokorelasyonları hesaplanabilir. $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ ve $(\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 \geq 1$ olursa GARCH(1,1) modeli kovaryans durağan olur. Dördüncü moment sonlu ise, ε_t^2'nin otokorelasyonları yaklaşık olarak,

$$\rho_1 \approx \alpha_1 + \beta_1/3 \tag{4.28}$$

$$\rho_k \approx (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\rho_1\,, \quad k = 2,3,\dots \tag{4.29}$$

şeklindedir. Parametre kısıtı, Eşitlik (4.26)'ya denk olan Eşitlik (4.28)'den $(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 = 1$, $1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2 = 3\alpha_1^2$ şeklindedir. Böylece, α_1 ve β_1 dördüncü momentin artık sağlanmadığı durumdaki değerleri aldığında davranışlarının ani değişim göstermemesi açısından ε_t^2'nin otokorelasyonları α_1 ve β_1'in sürekli fonksiyonları olarak düşünülebilir.

Genel GARCH(p,q) modeli,

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \textstyle\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \\ &= \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t \end{aligned} \tag{4.30}$$

olarak verilir. Burada $\alpha(L) = \alpha_1 L + \cdots + \alpha_q L^q$ ve $\beta(L) = \beta_1 L + \cdots + \beta_p L^p$ şeklindedir. $1 - \beta(L)$'nin tüm köklerinin birim çemberin dışında olduğu varsayılırsa, model sonlu sıralı bir ARCH model olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} h_t &= \frac{\omega}{1-\beta(1)} + \frac{\alpha(L)}{1-\beta(L)}\varepsilon_t^2 \\ &= \frac{\omega}{1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i} + \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Koşullu varyansın negatif olmaması için Eşitlik (4.31)'deki tüm δ_i'ler pozitif olmalıdır.

Alternatif olarak, GARCH(p,q) verilen ε_t^2 için bir ARMA(m,p) olarak gösterilebilir.

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p}\beta_i v_{t-i} + v_t \qquad (4.32)$$

Burada $m = \max(p,q)$, $\alpha_i \equiv 0, i > q$ ve $\beta_i \equiv 0, i > p$'dir. GARCH(p,q) modeli, eğer tüm $1 - \alpha(L) - \beta(L)$ kökleri için birim çemberin dışındaysa, kovaryans durağandır.

GARCH(p,q) modelindeki uygun p ve q sıralarını belirlemek için, büyük değerli p ve q alınarak klasik süreç uygulanır ve AIC ve SIC gibi kriterler kullanılarak p ve q'nun değerleri belirlenebilir (Franses ve Dijk, 2000).

4.3. ARCH/ GARCH Uyarlamaları

Bu bölümde ARCH ve GARCH modellerinin uyarlamalarından olan ARCH-M, EGARCH ve TARCH modelleri hakkında bilgi verilecektir.

4.3.1. ARCH-M modeli

ARCH modelinde ortalama varyanstan etkilenmemektedir. Ancak beklenen getiri (ortalama) ile beklenen varyans arasında bir ilişki vardır. Bu durumu göstermek için Engle ve ark. (1987) ortalama denklemine ortalamanın kendi koşullu varyansını da eklemişlerdir. Buna göre ARCH-M modeli,

$$X_t = E[X_t|\Omega_{t-1}] + \theta h_t + \varepsilon_t$$
$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \qquad (4.33)$$

şeklinde verilir. Burada $E[X_t|\Omega_{t-1}] + \theta h_t$ risk primini göstermektedir ve $\theta > 0$ ise getiriler pozitiftir ve geçmiş oynaklıktan etkilenmektedir. Eşitlik (4.33)'deki model ARCH(q) olarak verilmiştir. Eğer,

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}$$

olarak verilirse o zaman model GARCH-M haline gelir. Eşitlik (4.33)'deki ortalama denklemi de iki farklı biçimde ele alınabilmektedir. Bunların ilkinde ortalama denklemine koşullu varyans yerine koşullu standart sapma diğerinde ise koşullu varyansın logaritması açıklayıcı değişken olarak eklenmektedir.

4.3.2. EGARCH modeli

Finansal piyasalarda beklenen getiri koşullu varyans ile ilişkilidir. Beklenen getiri ile koşullu varyans arasındaki ilişki bazen pozitif bazen de negatif olduğundan aralarında asimetrik bir ilişki söz konusudur. Finansal serilerde kalın kuyruk ve oynaklık kümelenmesi özelliği GARCH model tarafından başarılı bir şekilde modellenmektedir. Ancak, koşullu varyans yapısı hata terimlerinin işaretlerini dikkate almayıp yalnızca büyüklüğünden etkilenmektedir. Bu nedenle GARCH süreci finansal serilerin asimetrik yapısını modellemede yetersiz kalmaktadır. Nelson (1991), bu asimetriyi hesaba katacak şekilde koşullu varyansı modelleyen üssel GARCH (EGARCH) modelini ortaya atmıştır. Model, hata terimlerinin hem işaretini hem büyüklüğünü dikkate almaktadır. Birinci derece EGARCH modelinde koşullu varyans denklemi,

$$\log(h_t^2) = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \delta_1 \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}}\right| + \delta_2 \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \tag{4.34}$$

şeklindedir.

4.3.3. TARCH modeli

Asimetrik etkileri dikkate alan bir başka model de eşik ARCH (TARCH) modelidir. Bu modelde birinci dereceden koşullu varyans denklemi,

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} \tag{4.35}$$

şeklinde kurulmaktadır (Nargeleçekenler, 2004). Burada $d_t = \begin{cases} 1\,, & \varepsilon_t < 0 \\ 0\,, & \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$ olarak verilir. TARCH modelinde iyi ve kötü haberler koşullu varyans üzerinde farklı etkilere sahiptir.

4.4. ARCH Modelleri için Artıkların İncelenmesi

Tahmin edilen parametreler hakkında istatistiksel çıkarımların yapılabilmesi için modelden elde edilen artıkların beyaz gürültü sürecine uyması gerekir. Başka bir ifadeyle artıkların sıfır ortalama ve sabit varyanslı birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip olması gerekir. Artıkların bu özellikleri sağlayıp sağlamadığının araştırılmasında kullanılan testler literatürde güçlülük testleri olarak geçmektedir. Artıklar ve standartlaştırılmış artıklar için kullanılan bazı testler Kesim 3.6 'da verilmişti. Burada ise ARCH modellerde artıkların ardışık bağımlılığını test etmede kullanılan Ljung-Box testi ve değişen varyanslılığı test eden McLeod testi verilecektir.

4.4.1. Ljung-Box Q testi

Artıkların ardışık bağımlılık testinde kullanılan bir diğer yöntem ilk m artık ardışık bağımlılığının ortak testine dayanan Ljung-Box Q testidir. Ljung ve Box (1978) tarafından Q istatistiği

$$Q(m) = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}(n-k)^{-1}r_k^2\,(\hat{\varepsilon}) \tag{4.36}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $r_k(\hat{\varepsilon})$, örnek ardışık bağımlılık değeridir. ARMA(p,q) modelinden elde edilen artıkların 1'den m'ye kadarki gecikmelerinde ardışık bağımlılığın olmadığını söyleyen yokluk hipotezi altında Q istatistiği asimptotik olarak $(m-p-q)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir. Burada p, ARMA modelinin AR kısmının gecikme uzunluğu, q ise MA kısmının gecikme uzunluğudur (Franses ve Dijk, 2000).

4.4.2. McLeod testi

Varyansın sabitliği testinde kullanılan test istatistiği McLeod ve Li (1983) tarafından geliştirilmiştir ve temelde Ljung-Box Q istatistiğine dayanmaktadır. Bu test istatistiği artıkların karelerinin ardışık bağımlılık değerleri üzerine kurulmuştur ve

$$Q = n(n+2)\sum_{i=1}^{m}(n-k)^{-1}r_k^2(\widehat{\varepsilon})^2 \tag{4.37}$$

ile verilmektedir. ARMA(p,q) modelinden elde edilen artıklara uygulandığında ve bu artıkların kareleri birbiriyle ilişkisiz ise Q değeri asimptotik olarak $(m-p-q)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir (Yalçın, 2008).

5. EŞİKSEL OTOREGRESİF (TAR) VE KENDİNDEN UYARIMLI EŞİKSEL OTOREGRESİF (SETAR) MODELLER

Bu bölümde, bir zaman serisi için rejim değişimine imkân veren modeller ele alınacaktır. Eşiksel model serinin ortalamasında veya varyansında (veya her ikisinde) farklı parametrelere izin verebilmektedir. Zaman içinde bilinen bir noktada rejimini değiştiren süreçler için deterministik süreç ifadesi kullanılmaktadır. Rejim değişimi olan fakat yeri kestirilemeyen süreçler ise stokastik rejim gösteren süreçlerdir. Deterministik süreçler için önceki bölümlerde ele alınan doğrusal zaman serisi modelleri kullanılmaktadır. Stokastik rejim gösteren süreçler için ise farklı modeller bulunmaktadır. Bunlardan her rejiminde doğrusal bir AR modeli ile modellenebilen zaman serilerinin dinamik davranışı bu bölümün konusunu oluşturmaktadır. Yani, otoregresif parametreleri rejime bağlı olarak değişen AR modelleri ile modellenebilen zaman serileri ele alınacaktır.

5.1. Eşiksel Otoregresif Model

Bir X_t zaman serisi,

$$X_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)}, \quad r_{j-1} \leq c < r_j \tag{5.1}$$

modeline sahipse eşiksel otoregresif model olarak adlandırılmaktadır. Burada, $j = 1,2,\dots,k$ ve d pozitif bir tamsayıdır. c rejim değişkenidir. Eşik değerleri $-\infty = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = \infty$ ve her j için, $\{\varepsilon_t^{(j)}\}$, martingale farklarının bir dizisidir. Yani,

$$E\left(\varepsilon_t^{(j)} \middle| \Omega_{t-1}\right) = 0$$
$$\sup_t \left(|\varepsilon_t^{(j)}|^{\delta} \middle| \Omega_{t-1}\right) < \infty \text{ , } \delta > 2 \text{, a.d.}^{a} \tag{5.2}$$

[a] Dinamik sistemleri tanımlayan diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için çeşitli durağanlık tipleri vardır. Bunlardan en önemli olanı bir denge noktasına yaklaşmadır. Bu durağanlık tipi Lyapunov teorisi olarak bilinir. Basitçe, bir dinamik sistemin tüm çözümleri bir x_e denge noktası yakınlarındaysa ve hep orada kalıyorsa, x_e'e Lyapunov durağan denir. Daha güçlü olarak, x_e Lyapunov durağansa ve x_e'den başlayan tüm çözümler x_e'ye yaklaşıyorsa x_e asimptotik durağandır (http://en.wikipedia.org).

ifadesini sağlar. Burada, Ω_{t-1}, $\{\varepsilon_{t-i}^{(j)} | i = 1,2,\dots;\ j = 1,\dots,k\}$ ile üretilmiş bir σ alanıdır. Böylece bir süreç, tek boyutlu Öklid uzayından k tane rejime parçalanır ve her bir rejim doğrusal AR sürecine sahip olur. X_t süreci, farklı doğrusal modellere sahip en az iki rejime sahip olduğundan doğrusal olmayan bir süreç olur (Tsay, 1989).

Eşitlik (5.1) ile verilen modelde rejim değişkeni c, X_t'nin kendi gecikmelerinden biri olarak tanımlanırsa süreç kendinden uyarımlı eşiksel (SETAR) model haline gelir. Yani model,

$$X_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)}\ ,\ \ r_{j-1} \le X_{t-d} < r_j \qquad (5.3)$$

şeklinde verilir. Burada d, $\{1,2,\dots,p\}$ kümesine ait bir tamsayıdır. Her bir j. rejimdeki AR sırasının aynı olması durumunda model SETAR$(k; p,\dots,p)$ ile gösterilir. Ancak p her rejimde aynı olmak zorunda değildir. Bu durumda SETAR$(k; p_1, p_2, \dots, p_k)$ halini alır.

SETAR sürecinde üç önemli durum göze çarpar.

a) AR modelin derecesi p, rejimler arasında farklılık gösterebilir.

b) Rejimler arasında sadece gürültü terimlerinin varyansı $\sigma_j^2 = Var(\varepsilon_t^{(j)})$ farklılık gösteriyorsa SETAR modeli homojen olmayan doğrusal bir AR modeli haline gelir.

c) Farklı j'ler için yalnızca sabit terim $\phi_0^{(j)}$ farklılık gösteriyorsa bu kez de model, düzeyin rasgele değiştiği bir modele indirgenir.

Son iki özellik daha çok doğrusal zaman serisinde aykırı gözlemlerle model değişimi ile ilgilidir (Tsay, 1989). Doğrusal olmayan eşiksel bir durumun varlığını test etmek için Tsay (1989) çalışmasında, sıralı otoregresyon sürecine dayalı bir test geliştirmiştir.

5.2. Eşiksel Doğrusal Olmama Testi

n gözlemli bir AR(p) modeli,

$$X_t = \left(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\right)\underline{\phi} + \varepsilon_t \, , t = p+1, \dots, n$$

şeklinde bir regresyon modeli olarak yazılsın. Burada $\underline{\phi}$, $(p+1) \times 1$ boyutlu katsayılar vektörü ve ε_t gürültü terimidir. $\left(X_t, 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\right)$ vektörüne AR(p) modeli için bir durum denilirse, sıralı otoregresyon, belirli bir regresör değerine bağlı olarak durumların yeniden sıralanmasıyla oluşan otoregresyondur. Eşitlik (5.3) ile verilen SETAR modeli eşik değişkenine göre yeniden sıralanarak kullanışlı olabilir. $k = 2$ durumu göz önüne alındığında bir tane eşik değeri r_1 olacaktır.

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)}, & X_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)}, & X_{t-d} > r_1 \end{cases} \tag{5.4}$$

Böyle bir modelde eşik değişkeni X_{t-d}, $\{X_h, \dots, X_{n-d}\}$ gözlemlerinden biri olur. Burada $h = \max\{1, p+1-d\}$'dir. π_i, $\{X_h, \dots, X_{n-d}\}$'nin i'inci en küçük gözlemini göstersin. Model yeniden düzenlenirse,

$$X_{\pi_i+d} = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{v=1}^{p} \phi_v^{(1)} X_{\pi_i+d-v} + \varepsilon_{\pi_i+d}^{(1)}, & i \leq s \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{v=1}^{p} \phi_v^{(2)} X_{\pi_i+d-v} + \varepsilon_{\pi_i+d}^{(2)}, & i > s \end{cases} \tag{5.5}$$

olur. Burada s, $X_{\pi_s} < r_1 \leq X_{\pi_{s+1}}$ durumunu sağlamaktadır. Böylece ilk rejimde ilk s tane durum için sıralı otoregresyon belirlenmiş olur ve kalanlar da ikinci rejime gönderilir. Bu yöntem gözlemleri etkin bir şekilde iki gruba ayırır. Sıralanmış otoregresyon aynı doğrusal AR modeline sahip tüm gözlemleri bir grupta topladığı için de faydalıdır. Ayrıca bölünme, kesin bir r_1 değerinin bilinmesine gerek duymaz, yalnızca bir gruptaki gözlem sayısını bulmak r_1'e bağlıdır (Tsay, 1989).

(5.4) ile verilen model göz önüne alınsın. r_1 eşik değeri bilindiğinde, parametrelerle tutarlı tahminler kolayca elde edilebilmektedir. Ancak eşik değeri bilinmediğinden adım adım ilerlemek gerekir. Eşitlik (5.5)'de ilk rejimde yeterli sayıda çok gözlem olduğunda, yani çoğu $i \leq s$ olması durumunda en küçük kareler tahminleri $\hat{\phi}_v^{(1)}$, tutarlı olacaktır. Bu durumda tahmin edilen artıklar asimptotik olarak beyaz gürültü süreci olacak ve bağımsız değişkenler $\{X_{\pi_i+d-v} | v = 1, \dots, p\}$ ile ortogonal

olacaktır. Diğer taraftan, i, s'ye yaklaştığında ve onu geçtiğinde $\pi_{s+1} + d$ gözlemine ait öngörü hatası yanlı olur, çünkü $\pi_{s+1} + d$ zamanında model değişir. Buradan hareketle denilebilir ki, öngörü hataları ile regresörler arasındaki ortogonallik, yinelemeli otoregresyon gözlemleri eşik değeri r_1'i geçtikçe bozulur. Dikkat edilirse, burada r_1'in gerçek değerine ihtiyaç yoktur. Yalnızca önemli bir eşiğe ihtiyaç duyulmaktadır. Bu duruma göre, eşiksel doğrusal olmamayı test etmenin bir yolu, (5.5)'deki sıralı regresyonun öngörü hatalarının regresörler üzerine regresyonu ve sonuç regresyonunun F istatistiğini kullanmaktır (Tsay, 1989).

Eşitlik (5.5)'deki sıralı otoregresyon için $\hat{\phi}_b$, ilk b durumun en küçük kareler tahminlerinin vektörü olsun. P_b, ilgili $X'X$ matrisinin ters matrisi, x_{b+1}, otoregresyona dahil olacak bir sonraki gözlemin regresörlerinin vektörüdür. Bu gözlem, $X_{\pi_{b+1}+d}$'dir. Bu durumda yinelemeli en küçük kareler tahminleri,

$$\hat{\phi}_{b+1} = \hat{\phi}_b + K_{b+1}[X_{\pi_{b+1}+d} - x'_{\pi_{b+1}+d}\,\hat{\phi}_b]$$

$$D_{b+1} = 1 + x'_{b+1}P_b x_{b+1}$$

$$K_{b+1} = P_b x_{b+1}/D_{b+1}$$

ile yeterli olarak tahmin edilebilir. Sonraki gözlem için,

$$P_{b+1} = (I - P_b \frac{x'_{b+1}x_{b+1}}{D_{b+1}})P_b$$

dır. Öngörü artıkları ve standardize öngörü artıkları ise sırasıyla,

$$\hat{\varepsilon}_{\pi_{b+1}+d} = X_{\pi_{b+1}+d} - x'_{\pi_{b+1}+d}\,\hat{\phi}_b \qquad (5.6)$$

$$\hat{e}_{\pi_{b+1}+d} = \hat{\varepsilon}_{\pi_{b+1}+d}\,/\sqrt{D_{b+1}} \qquad (5.7)$$

olarak bulunur.

p ve d değerleri bilindiğinde, sıralı otoregresyondaki etkin gözlem sayısı $n - d - h + 1$ olmaktadır. Yinelemeli otoregresyonun b gözlemle başladığı

varsayılırsa, $(n-d-b-h+1)$ tane öngörü artığı elde edilir. b başlangıç gözlem sayısı, $b \approx (n/10)+p$ şeklinde alınabilir. $i = b+1, \dots, n-d-h+1$ için,

$$\hat{e}_{\pi_i+d} = \omega_0 + \sum_{v=1}^{p} \omega_v X_{\pi_i+d-v} + \eta_{\pi_i+d} \tag{5.8}$$

en küçük kareler regresyonu yapılarak F istatistiği,

$$\hat{F}(p,d) = \frac{(\sum \hat{e}_t^2 - \sum \hat{\eta}_t^2)/(p+1)}{\sum \hat{\eta}_t^2/(n-d-b-p-h)} \tag{5.9}$$

hesaplanır. Burada toplamlar Eşitlik (5.8)'deki tüm gözlemleri içermektedir. $\hat{\eta}_t$, (5.8)'den elde edilen en küçük kareler artıklarıdır. $\hat{F}$'nin (p,d) ile birlikte gösterimi, F oranının p ve d'ye bağlı serbestliğini göstermektedir (Tsay, 1989).

Teorem 5.1. (Tsay, 1989) X_t, Eşitlik (5.3)'deki modele sahip olsun. O zaman, n'nin büyük değerleri için (5.9) ile tanımlanan $\hat{F}(p,d)$ istatistiği, $p+1$ ve $n-d-b-p-h$ serbestlik dereceli bir F dağılımına çok yakın bir dağılım izler. Ayrıca, $(p+1)\hat{F}(p,d)$, asimptotik olarak $p+1$ dereceli bir ki-kare rasgele değişkenidir.

5.3. Yapısal Parametrelerin Belirlenmesi

SETAR modelde eşik değerlerinin belirlenmesi zorluk teşkil etmektedir, çünkü eşik değerleri modelin doğrusal olmayan yapısında anahtar rol oynamaktadır. Eşik değerlerinin belirlenmesi d gecikme parametresinin seçimiyle yakından ilgilidir. d parametresinin seçimi, (5.9) eşitliğinde verilen F istatistiği ile yapılacaktır. Bunun için öncelikle AR derecesi p, kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF) yardımıyla belirlendikten sonra gecikme parametresi,

$$\hat{F}(p,d_p) = \max_{d \in S} \{\hat{F}(p,d)\} \tag{5.10}$$

ile seçilir. Burada altsimge olan p, d'nin p'ye bağlı tahminini gösterir. $S = \{1, \dots, p\}$ şeklindedir. Kolaylık olması açısından, $\hat{F}(p,d)$ istatistiklerinin tümünün aynı serbestlik derecesine sahip olduğu varsayılır.

p ve d belirlendikten sonra r_j eşiklerinin tahminine ihtiyaç duyulur. $k = 2$ olarak varsayıldığında, r_1 değeri $X_{\pi_s} < r_1 \leq X_{\pi_{s+1}}$ ifadesini sağlar. Böylece, $[X_{\pi_s}, X_{\pi_{s+1}}]$ aralığındaki herhangi bir değer, r_1 için bir tahmin verebilir.

Eşik değerlerinin yerini belirlemek için hazırlanan yöntemler, çeşitli istatistiklerin eşik değişkenine göre saçılım grafikleridir. Grafikler test edilemese de eşik yerlerinin belirlenmesinde faydalı bilgiler vermektedir. Kullanılacak grafikler şöyle verilebilir:

- (5.7)'deki standardize öngörü artıklarının veya (5.6)'daki klasik öngörü artıklarının rejim değişkeni X_{t-d}'ye karşı saçılım grafiği

- Modeldeki bir AR katsayısının yinelemeli t oranları tahminlerinin X_{t-d}'ye karşı saçılım grafiği

Sıralı otoregresyon çerçevesinde SETAR modeli, her r_j eşik değerinde çeşitli model değişiklikleri gösterir. Bu nedenle, öngörü artıkları eşik değerlerinde farklılık arzeder. Böylece, standardize öngörü artıklarının eşik değişkenine karşı saçılım grafiği SETAR modelinde eşik yerlerini belirlemeye yardımcı olur. Doğrusal bir zaman serisinde yinelemeli otoregresyonun başlangıcı dışında bu saçılım rasgeledir. Bu grafik, SETAR modelinde özellikle rejimler arasında yalnızca σ_j^2 varyansının farklılık göstermesi durumunda faydalıdır.

Bir AR katsayısının eşik değişkenine karşı t oranlarının saçılım grafiğini anlamak için öncelikle doğrusal bir zaman serisinden örnek verilebilir. Doğrusal zaman serisinde t oranları iki fonksiyona sahiptir; a) kısmî AR katsayısı için önemliliği gösterir, b) katsayı anlamlı olduğunda yinelemeli otoregresyon devam ederken yumuşak geçişlerle belirli bir değere yaklaşır. Basit SETAR modeli

$$X_t = \begin{cases} \phi_1^{(1)} X_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)}, & X_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \varepsilon_t^{(2)}, & X_{t-d} > r_1 \end{cases} \tag{5.11}$$

ele alınsın. Burada, $\phi_1^{(1)}$ ve $\phi_1^{(2)}$ birbirinden farklıdır. $\hat{\phi}_1^{(1)}$, (5.5) eşitliğindeki gibi sıralanmış otoregresyonun bir gecikmeli AR katsayısının yinelemeli tahmini olsun. $\hat{\phi}_1$ 'in t oranları, yineleme r_1 eşiğine ulaşana kadar doğrusal bir zaman serisindeki gibi davranış gösterir (Teorem 5.2). r_1'e ulaşınca, $\hat{\phi}_1$ değişmeye ve t oranı da değişmeye

başlar. t oranlarının düzenli bir şekilde izlediği yol bozulur. Aslında, t oranları eşik değerinde dönmeye ve muhtemelen yön değiştirmeye başlar (Tsay, 1989).

5.4. Parametre Tahmini

Eşitlik (5.3)'deki otoregresyon matrisi, Eşitlik (5.5)'deki gibi sıralanarak $(d, k, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_{k-1})$ değerleri belirlendiğinde k rejime bölünmüş olur. Verinin j'inci ($j = 1, \dots, k$) rejimi için,

$$\underline{X}_j = \underline{A}_j \underline{\phi}^{(j)} + \underline{\varepsilon}_j \tag{5.12}$$

doğrusal modeli elde edilir. Burada $\underline{X}_j$ ve $\underline{A}_j$, sırasıyla, gözlemlerin vektörü ve sıralı otoregresyonun j'inci rejimindeki veri matrisidir.

$$\underline{\phi}^{(j)} = (\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{p_j}^{(j)})' \tag{5.13}$$

ve

$$\underline{\varepsilon}_j = \left(\varepsilon_{(\pi_{j-1}+1)+d}^{(j)}, \varepsilon_{(\pi_{j-1}+2)+d}^{(j)}, \dots, \varepsilon_{(\pi_j)+d}^{(j)}\right)' \tag{5.14}$$

şeklindedir.

En küçük kareler tahminleri $\underline{\phi}^{(j)}$, $j = 1,2,...,k$ için klasik en küçük kareler yöntemi ile,

$$\hat{\underline{\phi}}^{(j)} = (\underline{A}_j' \underline{A}_j)^{-1} (\underline{A}_j' \underline{Y}_j) \tag{5.15}$$

biçiminde elde edilebilir.

5.4.1. En küçük kareler tahminlerinin tutarlılığı

SETAR modeli, bölgesel olarak doğrusal bir model olduğu için süreci çalışırken klasik en küçük kareler yöntemi kullanışlı olmaktadır. Verilen bir SETAR modeli için, n_j, j'inci rejimdeki X_t gözlemlerinin sayısını göstersin. Olasılık olarak,

$$n_j/n \to c_j, \text{ tüm } j = 1, \dots, k \text{ için} \tag{5.16}$$

varsayılsın. Burada n, toplam örneklem hacmi ve c_j, $\sum_{j=1}^{k} c_j = 1$ olan pozitif bir bölünmedir. Daha sonra, her bir j rejimi için, derecesi p olan klasik en küçük kareler otoregresyonu biçiminde oluşturulsun. $\hat{\phi}_i^{(j)}$, $\phi_i^{(j)}$ için ve $X'X^{(j)}$ de ilgili $X'X$ matrisi için tahmin olmak üzere, her bir j rejimi için $n \to \infty$ iken,

$$\begin{aligned} &\lambda_{j,min} \to \infty \text{ a.d.} \\ &ln\lambda_{j,max} \to o(\lambda_{j,min}) \text{ a.d.} \end{aligned} \tag{5.17}$$

burada, $\lambda_{j,min}$ ve $\lambda_{j,max}$, örneklem hacmi n'ye bağlı olarak $X'X^{(j)}$'nin en küçük ve en büyük özdeğerleridir.

Teorem 5.2. (Tsay, 1989) X_t, (5.3) eşitliği ile verilen SETAR modeline sahipken ve $\varepsilon_t^{(j)}$, n_j ve $X'X^{(j)}$ sırasıyla Eşitlik (5.2), (5.16) ve (5.17)'deki koşulları sağladığında verilen k, d ve r_j eşik değerleri için klasik en küçük kareler tahminleri $\hat{\phi}_i^{(j)}$, hemen hemen kesinlikle $\phi_i^{(j)}$'ye yakınsar.

5.5. Modelleme Süreci

SETAR modeli için modelleme süreci aşağıdaki gibi verilebilir.

Adım 1 Veriye uygun AR sırası p seçilir ve muhtemel eşik gecikmeleri kümesi S belirlenir.

p genellikle, PACF veya AIC ile seçilir. Ancak daha çok PACF tercih edilir. Çünkü, a) PACF uygun bir p için yol göstericidir, b) Bilgi kriteri, süreç gerçekte doğrusal olmayan bir yapıda olduğunda yanıltıcı bilgi verebilir, c) AR sırası gerekli görüldüğünde ileride düzeltilebilir (Adım 4). Ayrıca yüksek bir AR derecesine sahip model doğrusal olmayan modele daha çok yaklaşma sağlayacaktır. PACF yüksek dereceli modele izin vermek konusunda daha iyidir; çünkü bilgi kriteri bir zaman serisi için en iyi doğrusal modeli bulmak için tasarlanmıştır ve yüksek dereceli terimleri cezalandırmak eğilimindedir. Verilen bir p için mümkün eşik gecikmeleri $S = \{1, \dots, p\}$'dir. Bu durum, süreçte bir mevsimsellik olması durumunda onu da kapsayacaktır.

Adım 2 Seçilen p ve mümkün tüm d değerleri için sıralı otoregresyonlar oluşturularak $\hat{F}(p, d)$ istatistikleri hesaplanır. Süreçte bir doğrusal olmama durumu tespit edilirse d_p seçilir.

Adım 3 Belirlenen p ve d_p için grafikler kullanılarak eşik değerleri belirlenir.

Burada, AR katsayıları eğer anlamlıysa t oranları incelenebilir, katsayı anlamlı değilse t oranları bilgi verici olmaz.

Adım 4 Her rejimdeki AR sırası ve eşik değerleri doğrusal otoregresyon teknikleri kullanılarak güncellenir.

Model iyileştirme için bilgi kriterlerinden AIC kullanılabilir.

5.6. Model Yeterliliği

Model tahmin edildikten sonra artıklara ilişkin normallik varsayımı ve otokorelasyonlar incelenerek modelin yeterliliğine karar verilebilir (Chan ve ark. 2004). Artıkların incelenmesi Kesim 3.6'da verildiği gibi yapılmaktadır.

5.7. Öngörü

Doğrusal zaman serisi modellerinin aksine elde edilen modelden öngörü yapmak için doğrusal olmayan modellerde öngörü uzunluğunun 1'den büyük olması durumunda çoğunlukla bir formül yoktur (Tsay, 2010). Bu nedenle SETAR modelde öngörü yapmak için parametrik bootstrap yönteminden yararlanılacaktır.

n, öngörü orijini ve l $(l > 0)$ de öngörü uzunluğu olsun. Buna göre, n, bulunduğumuz zamanı gösterir ve elde edilecek öngörü de X_{n+l}'dir. Parametrik bootstrap yöntemi $X_{n+1}, \dots, X_{n+l}$ dizisini oluşturmak için birkaç adımlı bir yöntem izler. Bu adımlar şöyle verilebilir:

(1) Modelden elde edilen artıkların dağılımından yeni bir dizi artık terimi elde edilir.

(2) X_{n+i} model, veri ve artık terimleri kullanılarak tahmin edilir.

(3) Bu işlemler B defa tekrar edilerek X_{n+l} için B tane gerçekleşme elde edilir. Böylece X_{n+l}'nin tahmini B tane örneklemin ortalamasından elde edilebilir.

6. DEĞİŞEN VARYANSLI KENDİNDEN UYARIMLI EŞİKSEL OTOREGRESİF MODEL (SETARCH)

SETAR model, bir zaman serisinin ortalamasında farklı rejimlere izin vermektedir. Her bir rejimdeki süreç doğrusal AR süreci olarak ifade edilmektedir. Bu bölümde her rejimde değişen varyanslı bir sürece izin veren SETARCH model ele alınacaktır. Böylece finansal serilerin asimetrik yapısının modellenmesi amaçlanmaktadır.

6.1. SETARCH Modeli ve Model Varsayımları

Ω_{t-1}, $\{\varepsilon_{t-i}|i = 1,2, \dots\}$ rasgele değişkenleri ile üretilmiş bir σ-alanı olsun. Ω_{t-1} verildiğinde, her t için, ε_t sıfır ortalamalı ve $E(\varepsilon_t^2|\Omega_{t-1}) = h_t$ koşullu varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişkendir. Bir $\{X_t\}$ zaman serisi,

$$X_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)},\ \mathrm{r_{j-1}} \le \mathrm{X_{t-d}} \le \mathrm{r_j} \qquad (6.1)$$
$$h_t = \omega^{(\mathrm{j})} + \sum_{m=1}^{q_j} \alpha_r^{(j)} \varepsilon_{t-\mathrm{m}}^2,\ \mathrm{r_{j-1}} \le \mathrm{X_{t-d}} \le \mathrm{r_j}$$

koşullarını sağlıyorsa eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif süreçtir denilir. Burada, $j = 1, 2, \dots, k$ ve d gecikme parametresidir. Eşik değerleri, $-\infty \le r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = \infty$ koşulunu sağlar. Eşitlik (6.1)'de varyans denklemi için farklı gecikme ve eşik parametreleri yer alabilir. Ayrıca, eşiksellik etkisi ortalama ve varyansta aynı anda ortaya çıkmayabilir (Li ve Li, 1996).

SETARCH model, Tong (1978)'un eşiksel modelinin bir genişletilmesidir. SETARCH model de eşiksel modele özgü koşullu ortalama yapısına sahip olduğundan aynı lineer olmama karakteristikleri geçerlidir. (6.1) modeli SETARCH $(d; p_1, p_2, \dots, p_k; q_1, q_2, \dots, q_k)$ ile gösterilir. Burada $p_1, p_2, \dots, p_k$ parametreleri her bir rejimdeki AR sırasını göstermektedir. $q_1, q_2, \dots, q_k$ ise aynı rejimdeki ARCH sırasını göstermektedir. Eğer bir rejimdeki ARCH sırası sıfır ise, bu rejimin koşullu varyansı sabittir. Eşitlik (6.1)'de X_{t-d} yerine h_{t-d} veya ε_{t-d}^2 ifadesi de gelebilir.

ARCH modelin varsayımları Weiss (1986) tarafından altı koşul halinde özetlenmektedir.

(1) $\{X_t\}$ zaman serisi durağan ve ergodiktir.

(2) $E(X_t^2) < \infty$

(3) Koşullu varyansın tüm parametreleri sıfır veya sıfırdan büyüktür ve toplamları da 1'den küçüktür.

(4) $(1,\ \varepsilon_{t-1}^2,\ \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q_k}^2)$ doğrusal olarak bağımsızdır.

(5) h_t, her rejimde sabitse (6.1) modeli durağandır.

(6) $\alpha^{(j)} = (\alpha_0^{(j)},\ \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{\mathrm{j}}^{(j)})'$ olsun. $j \neq j'$ ise $\alpha^{(j)} \neq \alpha^{(j')}$'dir. Aynı durum $\phi^{(j)} = (\phi_0^{(j)},\ \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{p_j}^{(j)})'$ için de geçerlidir.

Koşullardan (1), (2), (3) ve (5) durağan bir koşullu değişen varyanslı ve eşiksel lineer olmayan zaman serisi süreci için verilen varsayımlardır (Tong, 1990). (4) koşulu $\alpha^{(j)}$ parametrelerinin tanımlı olmasını sağlar. (6) koşulu ise tam bir SETARCH modelin tanımlı olması için gereklidir.

6.2. Model Belirleme

Doğrusal AR modeli için, ACF ve PACF model belirleme sürecinin temel araçlarıdır. Ancak SETARCH modelin seçimi söz konusu olduğunda bu araçlar kabaca AR sırasını belirlemek dışında çok işe yaramamaktadır. Otokorelasyonlar modelin asimetrisini belirlemede yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle önceki bölümde açıklanan Tsay (1989)'in hazırladığı sıralı otoregresyon yöntemi kullanılacaktır.

Bir AR-ARCH(p,q) süreci $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$ şeklinde verilir. Burada koşullu varyans $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-q}^2$ şeklindedir. $\eta_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ olsun. O zaman,

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-q}^2 + \eta_t \qquad (6.2)$$

elde edilir. $E(\eta_t|\Omega_{t-1}) = 0$ ve $E(\eta_t \eta_{t-k}) = 0,\ k > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Böylece, koşullu varyans eşitliği de bir lineer regresyon eşitliği şeklinde yazılabilir ve Tsay'in yöntemi SETARCH model için genişletilebilir (Li ve Li, 1996).

İlk olarak modelin koşullu ortalama yapısında gecikme, eşik parametreleri ve AR sırası belirlenir. Eğer bir eşiksellik yapısı saptanırsa ikinci kısımda (6.1) eşitliği ile

verilen koşullu varyans ARCH yapısı belirlenir. Her bir rejim için, en uygun SETAR süreçten elde edilen artık kareleri (6.2)'deki ε_t^2'nin yerini alır. Eşiksellik saptanamazsa, en uygun AR modelden elde edilen artık karelere Tsay'in yöntemi uygulanarak eşiksellik yapısı ve ARCH sırası belirlenir. Bir eşiksellik yapısı belirlenirse tam bir SETARCH modeli düşünülür. Burada ikinci kısım Tsay'in yöntemini koşullu varyansa genişletir.

Koşullu varysansın modellenmesinde koşullu varyans yapısına karar verilerek ARCH modelin yanı sıra 4. bölümde ele alınan GARCH model ve ARCH ve GARCH model uyarlamaları kullanılabilir.

Modelleme süreci şöyle özetlenebilir:

Adım 1 Önceki bölümde ele alınan SETAR modelleme süreci uygulanarak bir koşullu ortalama eşitliği oluşturulur.

Adım 2 Adım 1'de oluşturulan geçici modelden $\hat{\varepsilon}_t^2$ artık kareleri hesaplanır.

Adım 3 Artık kareleri kullanılarak her bir rejimdeki koşullu varyans yapısı belirlenir.

Adım 4 Eşitlik (6.1)'deki koşullu ortalama ve koşullu varyans eşitlikleri belirlendikten sonra SETARCH modelin parametreleri en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilir.

Adım 5 Her rejimdeki AR ve koşullu varyans sırası AIC ile düzenlenir.

Adım 6 Adım 5 ile elde edilen en son modele model yeterliliği kriterleri uygulanır ve gerekiyorsa (1)-(5) adımları yeniden uygulanır.

6.3. Model Yeterliliği

Koşullu ortalama modelinin yeterliliğini test etmek için artık otokorelasyonları hesaplanır. Ardışık bağımlılık testleri, artık varyansının sabitliğine ilişkin testler ve artıkların normallik incelemesi yapılarak model yeterliliği ile ilgili karar verilir (Chan ve ark., 2004). Artık incelemesi doğrusal zaman serisi sürecinde ve ARCH modellerde olduğu gibi yapılır.

7. ÇOK DEĞİŞKENLİ EŞİKSEL OTOREGRESİF MODEL

Tsay (1998), çalışmasında tek değişkenli eşiksel otoregresif süreci çok değişkenli yapı için genişletmiştir. s boyutlu bir zaman serisi $\boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{st})'$ ele alınsın. $\boldsymbol{X}_t$ bir vektör otoregresif süreç olarak düşünülmektedir. k rejimli çok değişkenli SETAR modeli,

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{cases} \boldsymbol{C}_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{p_1} \boldsymbol{\phi}_j^{(1)} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(1)}, & Z_{t-d} \le r_1 \\ \boldsymbol{C}_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{p_2} \boldsymbol{\phi}_j^{(2)} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(2)}, & r_1 < Z_{t-d} \le r_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \boldsymbol{\phi}_j^{(k)} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(k)}, & r_k < Z_{t-d} \end{cases} \tag{7.1}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\boldsymbol{C}_0^{(i)}$, $(s \times 1)$-boyutlu sabit vektörleri ve $\boldsymbol{\phi}_j^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$ için $(s \times s)$ boyutlu parametre matrisidir. i'inci rejimdeki $\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(i)}$ vektörleri $\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(i)} = \sum_i^{1/2} \boldsymbol{a}_t$ eşitliğini sağlar. $\boldsymbol{\Sigma}_i^{1/2}$'ler pozitif tanımlı simetrik matrisler ve $\{\boldsymbol{a}_t\}$, $\boldsymbol{0}$ ortalamalı ve $\boldsymbol{I}$, $(s \times s)$ boyutlu birim kovaryans matrisli serisel ilişkisiz normal rasgele vektörlerin bir dizisidir. Z_{t-d} eşik değişkeninin durağan olduğu varsayılır ve bu değişken $\boldsymbol{X}_{t-d}$'nin geçmiş gözlemlerine bağlıdır. Örneğin,

$$Z_{t-d} = \kappa' \boldsymbol{X}_{t-d} \tag{7.2}$$

şeklinde bir düzenleme yapılabilir. κ, $(s \times 1)$ boyutlu bir vektördür. Eğer, $\kappa = (1,0, \dots, 0)'$ olarak alınırsa, eşik değişkeni $Z_{t-d} = X_{1,t-d}$ haline gelir. $\kappa = (\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s})'$ alınırsa, $\boldsymbol{X}_{t-d}$'nin tüm elemanlarının ortalaması olacaktır (Chan ve ark., 2004).

7.1. Çok Değişkenli Doğrusal Olmama Testi

Çok değişkenli SETAR modellemesinde amaç, verilen $\{\boldsymbol{X}_t, Z_{t-d}\}$, $t = 1, \dots, n$ gözlemleri için p ve d değerlerinin bilindiği varsayımı altında $\boldsymbol{X}_t$'nin eşiksel doğrusal olmama durumunu test etmektir. Sıfır hipotezi $\boldsymbol{X}_t$'nin doğrusal olduğu şeklinde kurulur. Alternatif hipotez ise $\boldsymbol{X}_t$'nin eşiksel ve doğrusal olmadığı durumdur. Bunun için, en küçük kareler yöntemi kullanılarak bir regresyon uygulaması oluşturulur. Yani,

$$\boldsymbol{X}'_t = \widetilde{\boldsymbol{X}}'_t\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\varepsilon}'_t\,, \quad t = h+1, \dots, n \tag{7.3}$$

dır. Burada $h = \max(p, d)$'dir ve $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = (1, X'_{t-1}, \dots, X'_{t-p})'$, $(ps+1)$ boyutlu regresörlerdir. $\boldsymbol{\Phi}$, parametre matrisini gösterir. Eğer sıfır hipotezi doğru ise Eşitlik (7.3)'deki en küçük kareler tahminleri kullanışlı olacaktır. Fakat alternatif hipotez geçerliyse tahminler yanlı olacaktır. Bu durumda da Eşitlik (7.3)'ün sıralı olarak yeniden düzenlenmesiyle elde edilen artıklar bilgi verici olacaktır. (7.3) için, Z_{t-d} eşik değişkeni, $S = \{Z_{h+1-d}, \dots, Z_{n-d}\}$ değerleri arasındadır. S'nin i'inci en küçük elemanı $Z_{(i)}$ olsun. $t(i)$, $Z_{(i)}$'nin zaman indeksini göstermek üzere, Z_{t-d} eşik değişkeninin artan sıralı olduğu sıralı regresyon,

$$\boldsymbol{X}'_{t(i)+d} = \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(i)+d}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\varepsilon}'_{\mathrm{t(i)+d}}\,, \quad i = 1, \dots, n-h \tag{7.4}$$

olarak yazılır. (7.4) eşitliğinden görüldüğü gibi $\boldsymbol{X}_t$ serisinin dinamik yapısı değişmemektedir. Çünkü her bir t için $\boldsymbol{X}_t$'ye karşılık gelen $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$ regresörü değişmemektedir. Değişen yalnızca regresyona giren verinin sırasıdır.

Eşitlik (7.4)'deki model değişimini belirlemek için Tsay (1998), yinelemeli en küçük kareler yönteminin öngörü artıklarına dayalı bir yöntem geliştirmiştir. $\boldsymbol{X}_t$ serisi doğrusal bir yapıya sahipse Eşitlik (7.4)'deki sıralı otoregresyonun yinelemeli en küçük kareler tahminleri tutarlı olur ve öngörü artıkları da beyaz gürültüdür. Bu durumda, öngörü artıklarının $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(i)+d}$ regresörleri ile ilişkisiz olması beklenir. Ancak, $\boldsymbol{X}_t$ serisi eşiksel bir modele sahipse, öngörü artıkları beyaz gürültü olmaz çünkü en küçük kareler tahminleri yanlıdır. Bu durumda, öngörü artıkları $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(i)+d}$ regresörleri ile ilişkilidir.

$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_b$, $i = 1, \dots, b$ olmak üzere Eşitlik (7.4)'deki $\boldsymbol{\Phi}$'nin en küçük kareler tahmini olsun. Yani, Z_{t-d}'nin en küçük b gözlemli veri noktası ile elde edilen sıralı regresyon tahminidir. O halde,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t(b+1)+d} = \boldsymbol{X}_{t(b+1)+d} - \widehat{\boldsymbol{\Phi}}'_{\mathrm{b}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(b+1)+d} \tag{7.5}$$

ve

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{t(b+1)+d} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t(b+1)+d}/[1 + \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(b+1)+d}\boldsymbol{V}_b\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(b+1)+d}]^{1/2} \tag{7.6}$$

olsun. Burada, $\boldsymbol{V}_b = [\sum_{i=1}^{b} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(i)+d} \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(i)+d}]^{-1}$ olmak üzere, (7.5) ve (7.6) sırasıyla (7.4)'deki regresyonun öngörü artıklarını ve standardize öngörü artıklarını göstermektedir. Bu değerler yinelemeli en küçük kareler algoritması ile elde edilebilir. Daha sonra,

$$\hat{\boldsymbol{e}}'_{t(l)+d} = \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(l)+d} \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{w}'_{\mathrm{t(l)+d}}\,,\ l = b_0 + 1, \dots, n-h \qquad (7.7)$$

regresyonu ele alınsın. Burada b_0, yinelemeli regresyonun başlangıç gözlem sayısını gösterir. b_0'nin $3\sqrt{n}$ ile $5\sqrt{n}$ arasında olması önerilmiştir (Chan ve ark., 2004). Eşitlik (7.7)'deki regresyonda problem H_0: $\boldsymbol{\Psi} = 0$ hipotezini H_1: $\boldsymbol{\Psi} \neq 0$ alternatif hipotezine karşı test etmek şeklindedir. Tsay (1998)'in bu hipotezi test etmek için hazırladığı test istatistiği,

$$C(d) = [n - h - b_0 - (sp + 1)] \times \{\ln[\det(\boldsymbol{S}_0)] - \ln[\det(\boldsymbol{S}_1)]\} \quad (7.8)$$

şeklindedir. Burada d , Z_{t-d} eşik değişkeninin gecikmesini göstermektedir ve,

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{1}{n-h-b_0} \sum_{l=b_0+1}^{n-h} \hat{\boldsymbol{e}}'_{t(l)+d} \hat{\boldsymbol{e}}_{t(l)+d}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{n-h-b_0} \sum_{l=b_0+1}^{n-h} \widehat{\boldsymbol{w}}'_{t(l)+d} \widehat{\boldsymbol{w}}_{t(l)+d}$$

olarak verilir. $\widehat{\boldsymbol{w}}'_{\boldsymbol{t}}$, Eşitlik (7.7)'deki regresyondan en küçük kareler ile elde edilen artıklardır. Sıfır hipotezi altında $\boldsymbol{X}_t$ lineerdir. $C(d)$ ise $s(ps + 1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahiptir (Tsay, 1998).

$\boldsymbol{\Psi} = 0$ şeklindeki sıfır hipotezi tüm öngörü artıkları için sıfır sabit terimi varsaymaktadır. Sıfır olmayan bir sabit terim yinelemeli regresyon tahminlerinde sistematik yanlılık bulunduğunu gösterir ve muhtemel bir model değişimine işaret eder. Sonlu örneklemlerdeki yanlılıktan kurtulmak için Eşitlik (7.8)'deki doğrusal olmama testindeki sabit terim çıkarılabilir. Bu durumda $\boldsymbol{S}_0$'da bir ortalama düzeltmesi gerekmektedir ve test istatistiği $s(ps)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip olur.

$\boldsymbol{X}_t$ doğrusal iken model,

$$\boldsymbol{X}_t = \mathbf{c} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}} \boldsymbol{X}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (7.9)$$

olarak yazılır. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{st})'$ şeklindedir. $[I - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p]$ matrisinin determinantının sıfır olduğu ve dolayısıyla $\boldsymbol{c} = 0$ varsayılsın. $\boldsymbol{V}_n$ de (7.9)'daki modelin $t = 1, \dots, n$ için $X'X$ matrisi olsun. $\boldsymbol{V}_n$'nin en küçük ve en büyük özdeğerleri sırasıyla λ_{min} ve λ_{max}'dır. Bu durumda en küçük kareler tahminlerinin tutarlılığı için Lai ve Wei (1982)'nin çalışmasında yer alan Teorem 1 verilebilir (Tsay, 1998).

Teorem 7.1. (Tsay, 1998) $\boldsymbol{X}_t$'nin birim kök içermemesi durumunda $\boldsymbol{c} = 0$ olan (7.9) modeli ele alınsın. $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$, σ-alanları $\{\Omega_t\}$'nin artan bir dizilişiyle ilgili olarak martingale farklarının bir dizisi olsun, öyle ki,

$$\sup_{i,t} E(|\varepsilon_{it}|^{\alpha} | F_{t-1}) < \infty \text{ , a.d. } \alpha > 2 \text{ için} \qquad (7.10)$$

dir. Ayrıca, $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ ve Ω_{t-1}'in ölçülebilir[b] olduğu varsayılır, öyle ki,

$$\lambda_{min}(n) \to \infty \text{ , a.d.}$$

ve

$$\ln[\lambda_{max}(n)] = o(\lambda_{min}(n)) \text{ , a.d.}$$

dir. O halde, (7.9)'un en küçük kareler tahminleri asimptotik durağan olarak $\boldsymbol{c}$ ve $\boldsymbol{\phi}_i$'ye yakınsar.

Teorem 7.2. (Tsay, 1998) Eşitlik (7.9)'daki $\boldsymbol{X}_t$'nin doğrusal bir modele sahip olduğu ve Teorem 7.1'deki koşulları sağladığı varsayılsın. Ayrıca,

---

[b] (X, Σ) ve (Y, T) ölçülebilir uzaylar olsun. Yani, X ve Y sırasıyla Σ ve T sigma cebirlerine sahip kümelerdir. Bir f fonksiyonu,

$$f: X \to Y$$

eğer, $\forall E \in T$ için $f^{-1}(E) \in \Sigma$ oluyorsa ölçülebilirdir. Ölçülebilirlik, Σ ve T sigma cebirlerine bağlıdır (http://mathworld.wolfram.com).

$$cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t|\Omega_{t-1}) = \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{a.d.} \tag{7.11}$$

ve $b_0 \to \infty$ ile $n \to \infty$ iken $n^{-1}b_0 \to 0$ varsayımı yapılır. O zaman (7.8) eşitliğindeki $C(d)$ istatistiği, belirli bir pozitif tamsayı d için asimptotik olarak $s(ps+1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahiptir. Burada s, $\boldsymbol{X}_t$'nin boyutudur.

İspat: Teorem 7.1 ve b_0 koşuluyla, $\hat{\boldsymbol{e}}_t$ standardize artıkları asimptotik durağan olarak (7.11) varsayımının homojen olması koşulu altında martingale farklarının bir dizisine yakınsar. Helland (1982, Teo .3)'ın çalışmasındaki fonksiyonel merkezi limit teoremi[c] ile (7.8)'deki $(n-h-b_0)\boldsymbol{S}_0$ ve $(n-h-b_0)\boldsymbol{S}_1$ asimptotik olarak Wishart dağılımına uyar. Dolayısıyla bu sonuç, çok değişkenli çoklu regresyon analizine de uyar (Tsay, 1998).

Eşitlik (7.9) ile ilgili bir diğer önemli durum $\boldsymbol{\varepsilon}_t$'nin homojenliğinin, yinelemeli en küçük kareler öngörü artıklarının standardize edilmesiyle ilgili olmasıdır. Eğer $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ koşullu değişen varyanslı ise (7.6) eşitliği artık geçerli olmaz. $\hat{\boldsymbol{e}}_{t(b+1)+d}$'nın j'inci elemanının,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{j,t(b+1)+d} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,t(b+1)+d} / [\hat{\sigma}_j^2 + \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(b+1)+d} \boldsymbol{V}_b^* \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(b+1)+d}]^{1/2}$$

ile hesaplanması gerekir. Burada $\hat{\sigma}_j^2 = \sum_{i=1}^{b} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,t(b+1)+d}^2 / (b - sp - 1)$ şeklinde $\boldsymbol{X}_t$'nin j. elemanın hata kareler ortalamasıdır. $\boldsymbol{V}_b^*$ ise,

$$\boldsymbol{V}_b^* = \boldsymbol{V}_b \left(\sum_{i=1}^{b} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,t(b+1)+d}^2 \widetilde{\boldsymbol{X}}'_{t(i)+d} \widetilde{\boldsymbol{X}}_{t(i)+d} \right) \boldsymbol{V}_b$$

---

[c] Olasılık teorisinde Donsker's teoremi diye bilinen teorem, deneysel bir sürecin limiti olarak kesin bir stokastik süreç tanımlar. Bu da, fonksiyonel merkezi limit teoremi olarak bilinir. Deneysel bir dağılım fonksiyonu F_n, $x \in R$ olmak üzere,

$$G_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$$

deneysel süreci ile tanımlanır. $G_n(x)$ dizisi, $D(-\infty, \infty)$ Skorokhod uzayının rasgele elemanlarıdır ve sıfır ortalamalı ve kovaryansı aşağıda verilen G Gaussian sürecine dağılımda yakınsar. Kovaryans,

$$cov[G(s), G(t)] = E[G(s)G(t)] = F(\min\{s,t\}) - F(s)F(t)$$

ile verilir (http://en.wikipedia.org).

dir. Koşullu değişen varyanslı modellerde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,t}^2$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}'_t\widetilde{\boldsymbol{X}}_t$'nin elemanları ile ilişkilidir ve en küçük kareler tahminlerinin düzeltilmesi gerekir (Tsay, 1998).

7.2. Model Parametrelerinin Belirlenmesi

Eşitlik (7.8)'deki $C(d)$ istatistiğinin oluşturulabilmesi için p ve d değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. d'nin seçimi p'ye bağlı olduğundan ilk olarak p'nin belirlenmesi problemi üzerinde durulacaktır. Tek değişkenli zaman serilerinde otoregresiflik derecesini belirlemek için kısmi otokorelasyon değerlerinden yararlanılmıştı. Çok değişkenli durumda da yine kısmi otoregresyon matrisi (PAM) kullanılarak p değeri seçilecektir. Tiao ve Box (1981), veri l sıralı bir vektör otoregresif sürece uyuyorsa l gecikmesindeki PAM yapısının en son katsayı matrisi olduğunu söyler. Bir vektör AR(p) sürecinin kısmi otoregresyon matrisi $l > p$ için sıfır olur. Kısmi otoregresyon matrisinin elemanları ve standart hataları otoregresif modele $l = 1,2, \ldots$ için klasik çok değişkenli en küçük kareler yönteminin uygulanmasıyla elde edilebilir (Tiao ve Box, 1981).

Durağan bir AR(p) modelinde $\phi'_1, \ldots, \phi'_p$ tahminleri asimptotik olarak ortak normal dağılımlıdır. Kısmi otoregresyon matrisi elemanları kullanışlı bir şekilde özetlenmesi amacıyla + ve – işaretleriyle gösterilebilir. Şöyle ki, eğer bir katsayı kendi standart hatasından 2 kat büyükse ve -2 kat küçükse + ve – işaretleriyle matriste yer alır. Arada bir değer alanlar nokta ile gösterilir.

Ayrıca, otoregresif modelin sırasını belirlemek için olabilirlik oran istatistiğinden de faydalanılabilir. $\boldsymbol{\phi}_l = \mathbf{0}$ sıfır hipotezine karşılık $\boldsymbol{\phi}_l \neq \mathbf{0}$ alternatif hipotezi

$$\boldsymbol{S}(l) = \sum_{t=l+1}^{n}(\boldsymbol{X}_t - \hat{\boldsymbol{\phi}}_1\boldsymbol{X}_{t-1} - \cdots - \hat{\boldsymbol{\phi}}_p\boldsymbol{X}_{t-p}) \times (\boldsymbol{X}_t - \hat{\boldsymbol{\phi}}_1\boldsymbol{X}_{t-1} - \cdots - \hat{\boldsymbol{\phi}}_p\boldsymbol{X}_{t-p})' \qquad (7.12)$$

yardımıyla test edilir.

AR(l) sürecinin hata kareler toplamı ve çapraz çarpımlarından oluşan matris olsun. Olabilirlik oran istatistiği,

$$U = |\boldsymbol{S}(l)|/|\boldsymbol{S}(l-1)| \qquad (7.13)$$

şeklinde tanımlanır. U istatistiği $M(l) = -(N - \frac{1}{2} - ls)\ln(U)$ şeklinde tanımlandığında s^2 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uyar (Bartlett, 1938). Burada $N = n - p - 1$ şeklinde modelde sabit terimin de varlığı halinde etkin gözlem sayısıdır (Tiao ve Box, 1981).

p sırası belirlendikten sonra $d \leq p$ olacak şekilde en büyük $C(d)$ istatistiğini verecek şekilde gecikme parametresi de belirlenir.

7.3. Tahmin

p, d, k ve $\mathcal{R}_k = \{r_1, \dots, r_{k-1}\}$ bilindiğinde (7.4) eşitliğindeki çok değişkenli otoregresyon rejimlere ayrılabilir. Verinin j. rejimi için,

$$\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{\phi}^{(j)} - \boldsymbol{\varepsilon}_j \tag{7.14}$$

genel lineer modeli yazılabilir. Burada,

$$\boldsymbol{X}_j = \left(\boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+1)+d}, \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+2)+d}, \dots, \boldsymbol{X}'_{(\pi_j)+d}\right)' \tag{7.15}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(j)} = (\boldsymbol{c}'_0, \boldsymbol{\phi}'^{(j)}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}'^{(j)}_p) \tag{7.16}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \left(\boldsymbol{\varepsilon}'_{(\pi_{j-1}+1)+d}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{(\pi_{j-1}+2)+d}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}'_{(\pi_j)+d}\right)' \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+1)+d-1} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+1)} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+1)+d-p} \\ 1 & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+2)+d-1} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+2)} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_{j-1}+2)+d-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \boldsymbol{X}'_{(\pi_j)+d-1} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_j)} & \cdots & \boldsymbol{X}'_{(\pi_j)+d-p} \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

olarak verilir. Burada π_j, j'nin en büyük değeridir, öyle ki, $j = 1, \dots, k-1$ için $\{r_{j-1} < Z_{(j)} \leq r_j\}$'dir. $\pi_0 = 0$ ve $\pi_k = n - p$ olarak tanımlanır. j'inci rejimdeki gözlem sayısı $n_j = \pi_j - \pi_{j-1}$'dir. $\boldsymbol{\phi}^{(j)}$'nin en küçük kareler tahmini klasik çok değişkenli en küçük kareler yöntemiyle elde edilebilir. Yani,

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}^{(j)} = \left(\boldsymbol{A}'_j \boldsymbol{A}_j\right)^{-1} (\boldsymbol{A}'_j \boldsymbol{X}_j) \tag{7.19}$$

dır ve artıkların varyans-kovaryans matrisi j. rejim için,

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(\pi_{j-1}+t)+d}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_{(\pi_{j-1}+t)+d}\} \quad (7.20)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (7.1)'deki model için AIC,

$$\text{AIC}(p, d, k, \mathcal{R}_k)=\sum_{j=1}^{k}\{n_j \ln\left|\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_j\right| + 2s(sp+1)\} \quad (7.21)$$

şeklinde tanımlanır (Tsay, 1998).

Çok değişkenli SETAR modelde, Z_t eşik değişkeninin yanı sıra rejim sayısını (k) belirlemek en önemli problemdir. p ve d bilindiğinde k ve $\mathcal{R}_k$ parametreleri AIC'yi minimize etmek suretiyle aranabilir. Tsay (1998) hesaplama kolaylığı açısından rejim sayısını 2 veya 3 olarak seçmeyi uygun görmektedir. Ayrıca, Z_{t-d}'nin çeşitli yüzdelik dilimlerine göre veriyi alt gruplara ayırmayı önermektedir. Bu alt gruplara Eşitlik (7.8)'deki test istatistiği uygulanarak alt grup içinde model değişimi olup olmadığı incelenebilir. Son olarak her bir rejimdeki AR sırasını ($p_k \leq p$) düzeltmek için de AIC kullanılabilir (Chan ve ark., 2004).

7.4. Model Yeterliliği

Tiao ve Box (1981), çok değişkenli SETAR modelde artıkların incelenmesi için kısmi otoregresyon matrislerini ve olabilirlik oran istatistiğini kullanmayı önermektedir. Buna göre, artıkların herhangi bir model içerip içermediği belirlenebilir.

8. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Bu bölümde finansal serilerde SETARCH ve çok değişkenli SETAR modelin kurulması ve yapısal parametrelerinin belirlenmesi ile ilgili uygulamalar yapılmıştır. Sayısal hesaplamalar ve grafikler MATLAB 7.7.0(R2008b) ortamında hazırlanmıştır. Oluşturulan algoritmalara verilen isimler ve bunların açıklamaları şu şekildedir:

pacf.m : y serisinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyonlarını hesaplamaktadır. pacf.mat veri dosyasında y serisi yer alır.

siralama.m : Gözlem değerlerinden sıralı otoregresyonu oluşturmak için kullanıldı. sira.mat veri dosyasında y gözlem değerleri bulunmaktadır. p, otoregresyonun derecesini ve d de eşik değişkeninin gecikmesini göstermektedir.

rls.m : Sıralı otoregresyona yinelemeli en küçük kareler uygular. Yinelemeli regresyon katsayılarını ve katsayıların t oranlarını vermektedir. rls.mat veri dosyasında sıralı otoregresyon sonucu elde edilen x ve y bulunur.

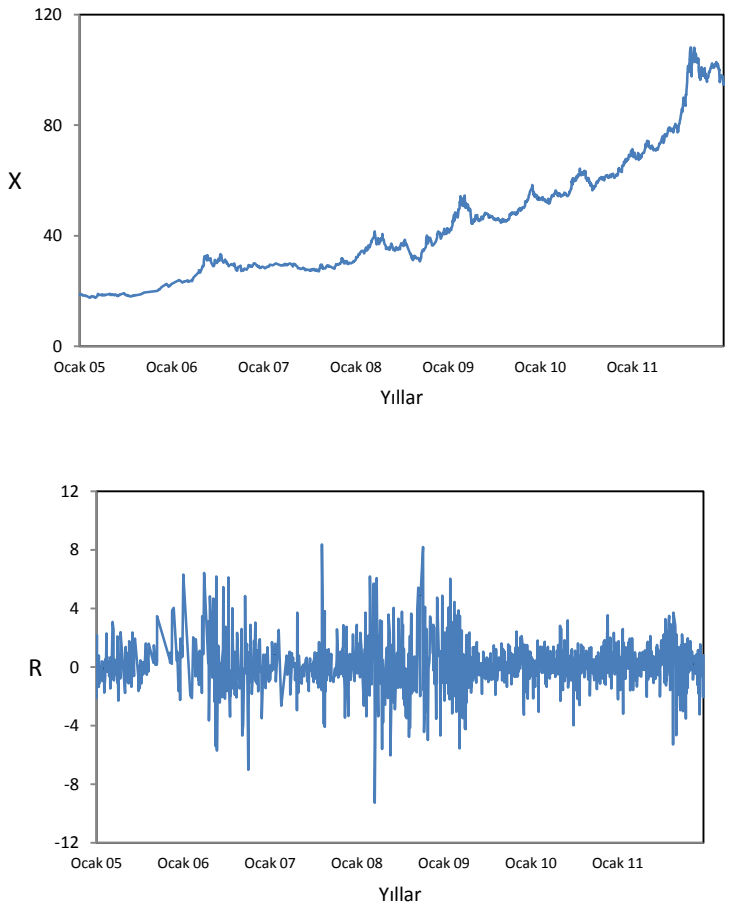
aicsecim.m : AIC değerine göre eşik değeri seçimi yapılır. aicsecim.mat veri dosyasında x ve y değişkenleri ile r_1 ve r_2 eşik değişkenlerinin seçildiği aralıklar yer almaktadır.

varest.m : Vektör otoregresif zaman serilerinde farklı model dereceleri için model katsayılarını, varyans-kovaryans matrislerini ve olabilirlik oranlarını vermektedir. varest.mat veri dosyasında çok değişkenli Y serisi bulunur.

Hazırlanan kodlar EKLER bölümünde yer almaktadır.

8.1. Uygulama I

Uygulama, altın fiyatları verisini kullanarak SETAR modelleme yöntemini göstermektedir. Veri, 03.01.2005-30.12.2011 dönemini kapsayan $n = 1311$ gözlemli serbest piyasadaki günlük altın fiyatlarının TL cinsinden değeridir ve veriye ($\times 10^{-3}$) işlemi uygulanmıştır. Veri (X_t), web üzerinden http://www.iab.gov.tr/ay_veri.asp adresinden derlenmiştir. Tüm istatistiksel değerlendirmelerde anlam düzeyi 0.05 olarak alınmıştır.



Şekil 8.1. Altın fiyatları serisi ve getiri serisinin zamana göre değişim grafiği

Bir zaman serisinde Tsay (1989)'in yöntemiyle eşiksel doğrusal olmama testi yapmak için ilk olarak serinin durağan zaman serilerindeki gibi AR sırası belirlenir (Hansen, 1997). X_t serisi için birim kök araştırması yapılmış ve genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) test istatistiği sonuçları üç model için, Çizelge 8.1'deki gibi elde edilmiştir. Modele dahil edilen gecikme sayısı SIC ile seçilmiştir.

Çizelge 8.1. Altın fiyatları serisi için ADF testi sonuçları

ADF	p
Kesmeli ve trendli	0.5807
Kesmeli ve trendsiz	0.3155
Kesmesiz ve trendsiz	0.9978

Çizelge 8.1' göre her üç model için de serinin birim kök içerdiği görülmektedir. Altın fiyatları verisi birim kök içerdiğinden getiri serisi hesaplanarak işlem yapılacaktır.

$$R_t = [\ln(X_t) - \ln(X_{t-1})] \times 100$$

Bu dönüşüm finans ve ekonomi literatüründe standart bir dönüşümdür (Franses ve Dijk, 2000). Altın fiyatları serisi ve R_t getiri serisinin zamana göre değişimini gösteren grafik Şekil 8.1 ile verilmiştir. R_t serisi için de ADF testi ile birim kök incelemesi yapılmış ve serinin birim kök içermediği görülmüştür (Çizelge 8.2).

Çizelge 8.2. R_t serisi için ADF testi sonuçları

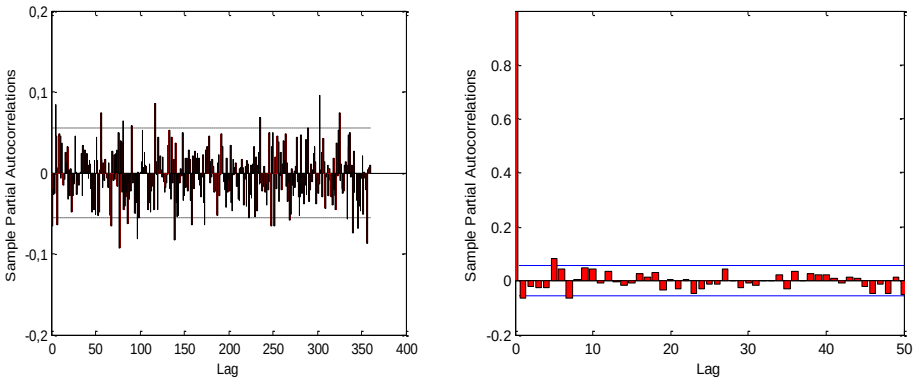
ADF	p
Kesmeli ve trendli	0.0001
Kesmeli ve trendsiz	0.0001
Kesmesiz ve trendsiz	0.0001

Daha sonra R_t serisinin AR sırasını belirlemek için kısmi otokorelasyonlar incelenir. PACF değerleri ve grafikleri sırasıyla Çizelge 8.3'de ve Şekil 8.2'de verilmiştir. Kısmi otokorelasyon değerleri incelendiğinde AR sırası p'nin 7 olarak alınmasının yeterli olduğu görülmektedir.

Çizelge 8.3. R_t serisinin kısmi otokorelasyonları*

Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF
1	-0.0653	11	-0.0058	21	-0.0278	31	-0.0145	41	0.0099
2	-0.0191	12	0.0368	22	0.0053	32	-0.0003	42	-0.007
3	-0.0262	13	-0.0027	23	-0.0487	33	0.0008	43	0.0151
4	-0.0251	14	-0.0144	24	-0.0281	34	0.024	44	0.0104
5	0.0839	15	-0.0077	25	-0.0133	35	-0.0282	45	-0.0191
6	0.0456	16	0.0253	26	-0.0126	36	0.0332	46	-0.0483
7	-0.0647	17	0.012	27	0.046	37	-0.0012	47	-0.0118
8	0.0061	18	0.0326	28	0.0011	38	0.0277	48	-0.0455
9	0.0483	19	-0.0329	29	-0.0263	39	0.0211	49	0.0146
10	0.0447	20	0.0037	30	-0.01	40	0.0244	50	-0.0515

*Sınırlar -0.0553 ve 0.0553'tür.



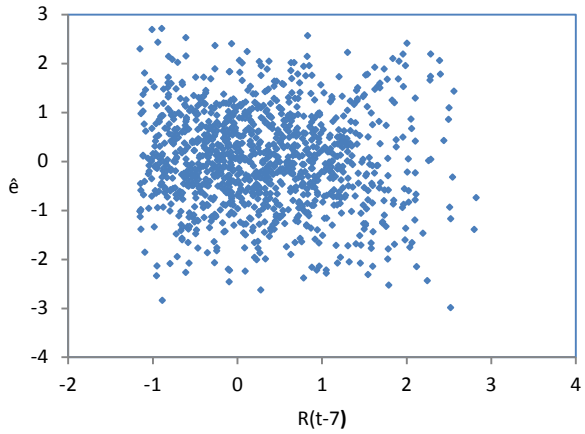
Şekil 8.2. R_t serisinin PACF grafiği

Şekil 8.2'de ilk olarak $n/4 \approx 327$ kısmi otokorelasyon fonsiyonuna ait grafik görülmektedir. Bu grafik çok açıklayıcı olmadığından ilk 50 kısmi otokorelasyonun yer aldığı ikinci grafik verilmiştir. İkinci grafiğe göre de AR sırası için $p = 7$ almak uygun olacaktır.

Çizelge 8.4. F istatistiği değerleri

p	d	F
7	1	2.8302
7	2	2.7565
7	3	2.6323
7	4	1.3444
7	5	2.2743
7	6	2.1289
7	7	3.3249

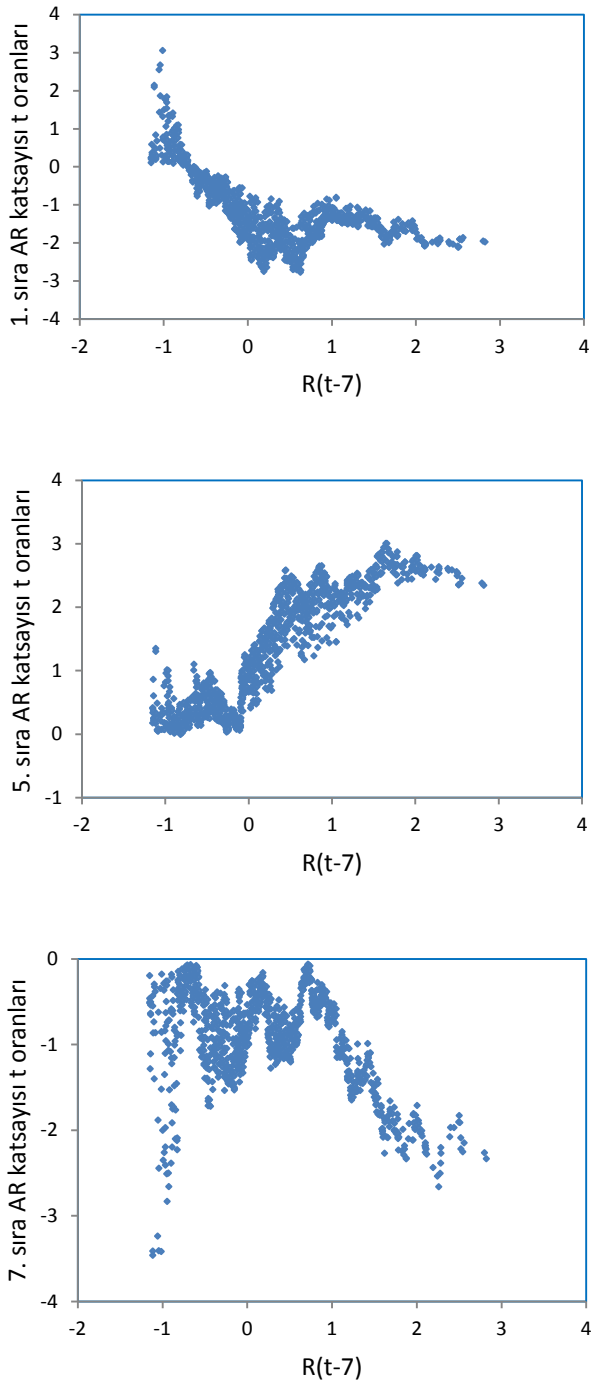
AR sırası belirlendikten sonra $d = 1,2,\ldots,7$ kümesi için F istatistikleri Çizelge 8.4'deki gibi hesaplanmıştır. F tablo değeri $F_{8,1158;0.05} = 1.94$ olduğundan bir doğrusal olmama durumunun varlığından söz edilir. d için en yüksek F istatistiğini veren $d = 7$ değeri eşik değeri belirlemede kullanılacaktır. Öncelikle $d = 7$ için yinelemeli regresyon artıklarının ve anlamlı çıkan katsayılar için t oranlarının R_{t-7} rejim değişkenine karşı grafikleri elde edilmiştir (Şekil 8.3 ve 8.4).



Şekil 8.3. R_{t-7} rejim değişkenine karşı ê saçılım grafiği

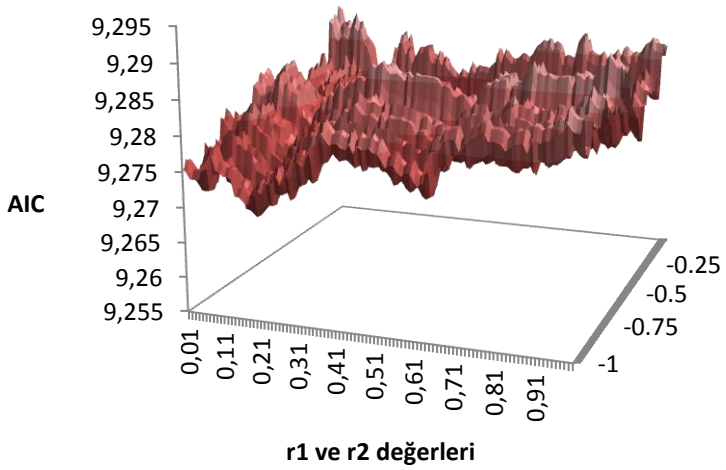
Rejim değişkeni R_{t-7}'ye karşı ê artıklarının saçılım grafiği eşik değeri yeri konusunda açık bir bilgi vermemektedir (Şekil 8.3).

Şekil 8.4'deki anlamlı çıkan 1, 5 ve 7. gecikmelerin AR katsayılarının t oranlarının R_{t-7}'ye karşı grafikleri incelenerek eşik değeri tespiti yapılacaktır. 1. sıra katsayısının t oranları saçılımı başlangıçtan itibaren 0 ile 1 arasındaki bir noktaya kadar yumuşak geçişlerle hareket etmektedir. [0,1] aralığında t oranları kademeli bir geçiş yerine dalgalı bir görünüm arz etmektedir. Bu nedenle 1. sıra AR katsayısının [0,1] aralığında bir eşik önerdiği söylenebilir. 5. sıra AR katsayısının t oranları incelendiğinde saçılımın 0 değerinden hemen önce yön değiştirdiği açıkça görülmektedir. 7. sıra AR katsayısının t oranları için oluşturulan grafikte ise ilk olarak [-1,0] aralığında bir yön değiştirmenin olduğu görülmektedir. Daha sonra t oranları [0,1] aralığında iki farklı şekilde yön değiştirmiş bu aralığın üst sınırından sonra kademeli geçişlere sahip olmuştur.



Şekil 8.4. Yinelemeli regresyon AR katsayıları t oranlarının R_{t-7} rejim değişkenine karşı saçılım grafiği

Anlamlı çıkan AR katsayılarının t oranları grafikleri ışığında modelin en az iki eşik değeri ile üç rejimde açıklanabileceği söylenebilir. İlk eşik değeri r_1 için [-1,0] aralığından ve ikinci eşik değeri r_2 için [0,1] aralığından modelin AIC değerini en küçük hale getirecek şekilde seçim yapılmıştır. Eşik değerlerine göre AIC değerini gösteren grafik Şekil 8.5 ile verilmiştir. Buna göre, $r_1 = -0.92$ ve $r_2 = 0.18$ olarak belirlenmiştir.



Şekil 8.5. Eşik değerlerine göre modelin AIC değerleri

Eşik değerleri belirlendikten sonra $d = 7$ olmak üzere SETAR(3,7,7,7) modelinin değerlendirilmesine geçilmiştir. $(d, k, r_1, r_2) = (2, 3, -0.92, 0.18)$ parametrelerine göre AIC değerini en küçük hale getirecek şekilde rejimlerde AR sıraları güncellenmiştir. Modelin artıklarına ve artık karelerine ilişkin otokorelasyon fonksiyonu değerleri Çizelge 8.5'de verilmiştir. Artıkların otokorelasyon değerleri sınır değerlerin altında kalırken artık kareleri için 7. sıra ve daha üstünde bazı değerlerin otokorelasyonunun anlamlı olduğu görülmektedir.

Çizelge 8.5. Artıkların ve artık karelerinin otokorelasyon fonksiyonu değerleri*

Sıra	ACF(â)	ACF(â^2)	Sıra	ACF(â)	ACF(â^2)
1	0.040	0.037	11	-0.005	0.037
2	-0.010	0.024	12	-0.028	0.029
3	-0.049	0.053	13	0.014	0.051
4	-0.039	-0.006	14	-0.018	0.057
5	-0.015	0.016	15	-0.041	0.080
6	-0.014	-0.007	16	-0.033	0.047
7	0.002	0.075	17	0.004	0.074
8	-0.015	0.049	18	0.040	0.081
9	0.004	-0.013	19	-0.003	0.004
10	-0.025	0.017	20	-0.037	0.001

* Sınırlar -0.0555 ve 0.0555'dür.

Artıklar için Breusch-Godfrey serisel korelasyon testi faklı gecikmeler için hesaplanmış ve tüm gecikmelerde otokorelasyon olmadığını gösteren boş hipotez kabul

edilmiştir (Çizelge 8.6). Daha sonra artıklardaki değişen varyans için White testi uygulanmıştır. Test istatistiği $nR^2 = 69.701$ olarak hesaplanmıştır. χ^2 istatistiğinin tablo değeri ise 15.51 olduğundan değişen varyanslılığın olmadığını savunan boş hipotez reddedilir. Buna göre artıklarda ardışık bağımlılık gözlenmezken güçlü bir değişen varyans durumu söz konusudur.

Çizelge 8.6. Breusch-Godfrey serisel korelasyon testi sonuçları

Gecikme	nR^2	χ_q^{2*}	p
1	3.195	11.07	0.074
5	6.065	16.92	0.299
10	7.052	23.68	0.721
20	14.763	30.14	0.789
40	32.931	36.42	0.778

* q, modele eklenen gecikme sayısıdır.

Bir koşullu varyans durumundan söz edebilmek için artıklara ARCH-LM testi uygulanır. ARCH-LM testi için sonuçlar Çizelge 8.7'de yer almaktadır. Buna göre büyük gecikmeler için bir ARCH etkisinin varlığından söz edilir. Dolayısıyla model farklı ARCH modelleri olarak tahmin edilmelidir.

Çizelge 8.7. ARCH-LM testi sonuçları

Sıra	nR^2	χ_q^{2*}	p
1	3.391	3.84	0.066
5	8.214	11.07	0.145
10	17.198	18.31	0.070
20	48.666	31.41	0.0001
40	60.911	55.76	0.018

* q, modele eklenen gecikme sayısıdır.

Farklı ARCH ve GARCH türevleri için yapılan tahminlere ait sonuçlar Çizelge 8.8'de görüldüğü gibidir. Tahmin sonuçları incelendiğinde yalnızca GARCH(1,1) modeli için katsayıların anlamlı olduğu ve en küçük SIC değerinin de yine bu modele ait olduğu görülür.

Çizelge 8.8. Koşullu değişen varyans modelleri

Model	**ARCH**	**GARCH**	**ARCH-M**	**GARCH-M**	**EGARCH**	**TARCH**
Parametre	**p=1, q=0**	**p=1, q=1**	**p=1, q=1**	**p=1, q=1**	**p=1, q=1**	**p=1, q=1**
$\boldsymbol{\omega}$	0.885181	0.0045	0.882978*	0.00473	-0.02743	0.003827
$\boldsymbol{\alpha_1}$	0.067207	0.015292*	0.069282	0.01634*	-	0.007048
$\boldsymbol{\beta_1}$	-	0.980142*	-	0.978948*	0.993032*	0.983958*
$\boldsymbol{\theta}$	-	-	0.561686	-0.32461	-	-
$\boldsymbol{\delta_1}$	-	-	-	-	0.033668	-
$\boldsymbol{\delta_2}$	-	-	-	-	-0.00691	-
$\boldsymbol{\gamma_1}$	-	-	-	-	-	0.010218
Log. Olabilirlik	-1812.39	-1801.5	-1812.07	-1801.562	-1800.32	-1800.96
SIC	2.820407	2.809187	2.825423	2.814793	2.812883	2.813866

*: 0.05 düzeyinde anlamlı çıkan katsayıları göstermektedir.

Koşullu değişen varyans modeli belirlendikten sonra SETARCH modelinin ortalama denklemi,

$$R_t = \begin{cases} 0.088(0.027) - 0.231(0.067)R_{t-2} - 0.157(0.060)R_{t-3} + \varepsilon_t, & R_{t-7} \leq -0.92 \\ 0.088(0.027) - 0.59(0.039)R_{t-1} + \varepsilon_t\,, & -0.92 < R_{t-7} \leq 0.18 \\ 0.088(0.027) + 0.119(0.033)R_{t-6} + \varepsilon_t\,, & R_{t-7} > 0.18 \end{cases}$$

ve koşullu varyans denklemi

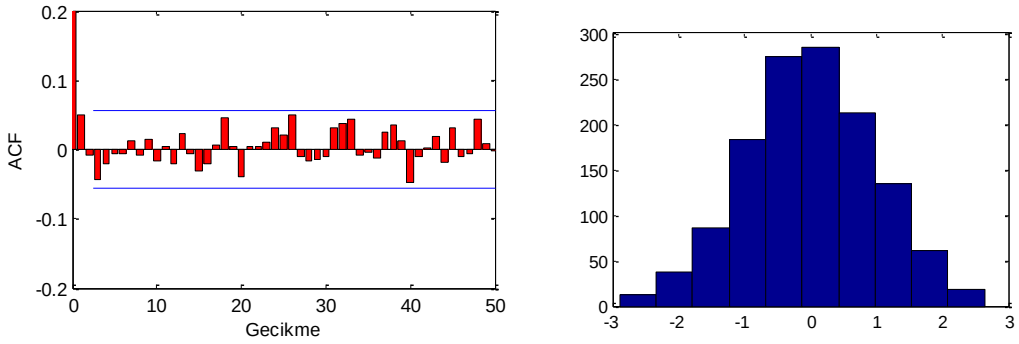
$$h_t = 0.0045(0.0059) + 0.0153(0.007)\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9801(0.011)h_{t-1}$$

olarak elde edilmiştir. Parantez içindeki sayılar parametre tahminlerinin standart sapmalarını göstermektedir. Her rejim için gözlem sayıları $n_1 = 196$, $n_2 = 513$ ve $n_3 = 594$'dir. Modelin hata kareler ortalaması 0.948'dir.

Modelin geçerliliğini araştırmak için uygunluk testlerinin sonuçlarına bakmak gerekmektedir. SETARCH modelin artıklarını incelerken ilk olarak artıkların tanımlayıcı istatistikleri incelenebilir. Çizelge 8.9'dan görüleceği gibi artıkların çarpıklık ve basıklık değerleri normal dağılıma yakın görünmektedir. Otokorelasyon fonksiyonu ve histogram grafikleri Şekil 8.6 ile verilmiştir.

Çizelge 8.9. Artıkların tanımlayıcı istatistikleri

n	En küçük	En büyük	Ortalama	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık
1303	-2.751	3.027	-0.004	1.004	-0.021	2.750



Şekil 8.6. SETARCH modelinin artıklara ait otokorelasyon fonksiyonu grafiği ve histogram

Tahmin edilen koşullu değişen varyanslı kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modelin artıklarına Ljung-Box Q ve ARCH-LM testleri farklı gecikmeler için uygulanarak bulunan sonuçlar Çizelge 8.10 ve Çizelge 8.11'de özetlenmiştir.

Çizelge 8.10. Ljung-Box Q testi sonuçları

m	$Q(m)$	χ^2_{m-p-q}
5	6.334	7.81
10	7.212	15.5
20	15.118	28.8
30	21.430	41.3
40	33.313	53.75

Artıkların ardışık bağımlılığını incelemek için otokorelasyon fonksiyonları ve Ljung-Box Q test istatistiği kullanılmıştır. Çizelge 8.10 incelendiğinde tüm gecikmeler için ardışık bağımlılığın olmadığını söyleyen yokluk hipotezi kabul edilir.

Çizelge 8.11. ARCH-LM testi sonuçları

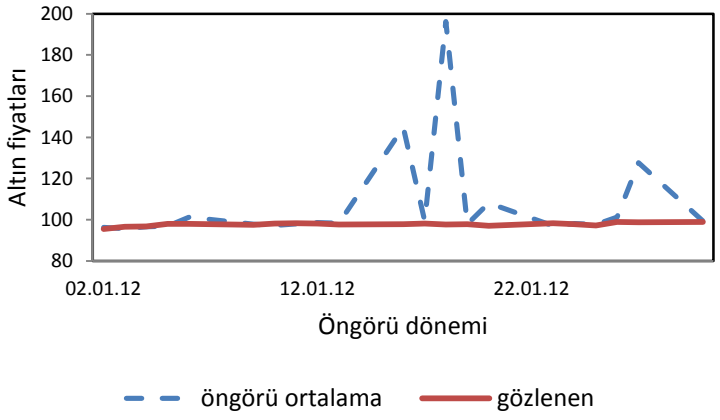
Sıra	nR^2	χ_q^{2*}	p
1	0.0923	3.84	0.761
5	4.0312	11.07	0.545
10	11.4027	18.31	0.327
20	24.9582	31.41	0.203
40	31.1840	55.76	0.840

* q, modele eklenen gecikme sayısıdır.

Çizelge 8.11'den görüldüğü gibi çeşitli uzunluktaki gecikme değerleri için ARCH etkisi ortadan kalkmıştır.

Artıkların normalliğini sınamak için de Jarque-Bera test istatistiği kullanılmış ve $JB = 3.476$ olarak elde edilmiştir. $\chi^2(2)$=5.99 $(p = 0.176)$ olduğundan artıkların normal dağılıma uygun olduğu söylenebilir.

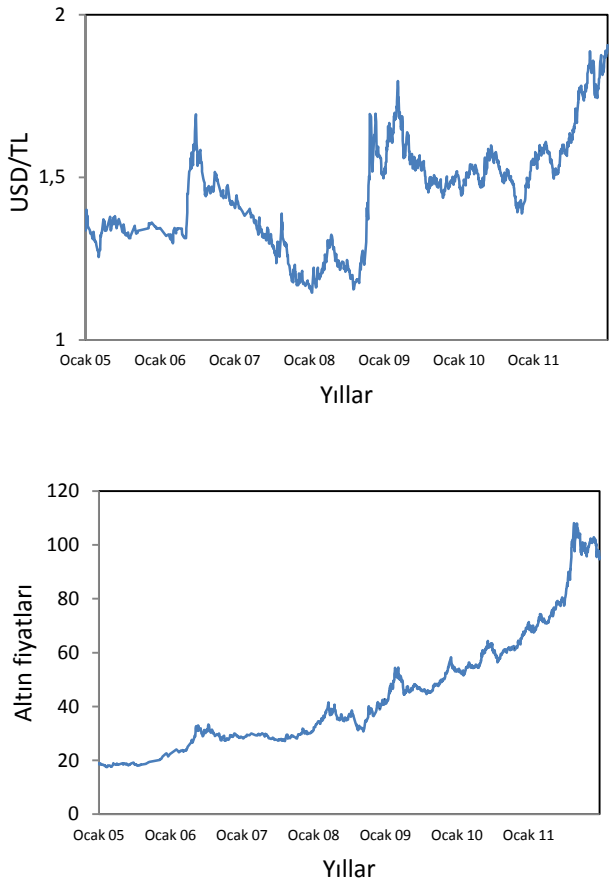
Finansal bir veride modelleme yapmanın temel amaçlarından biri gelecek gözlemler için öngörü yapmaktır. Elde edilen SETARCH modelinden parametrik bootstrap yöntemiyle 02.01.2012-30.01.2012 dönemini kapsayan 21 gözlem için öngörü yapılmıştır. B, tekrar sayısı 1000'dir. Öngörü dönemine ait gözlemler ve tahmin değerleri Şekil 8.7'de yer almaktadır. Grafiğe göre birkaç gözlem dışında tahmin değerlerinin gözlem değerleri ile yakın bir seyir izlediği söylenebilir.



Şekil 8.7. Öngörü dönemi altın fiyatları

8.2. Uygulama II

Çok değişkenli eşiksel otoregresif model uygulaması için TL cinsinden günlük Dolar (USD) kuru (X_{1t}) ve altın fiyatları (X_{2t}) verisi kullanılmıştır. Altın fiyatları serisi Uygulama I'de tek değişkenli SETAR modelleme sürecini göstermek için kullanılmıştı. Zaman serileri 03.05.2005-30.12.2011 tarihleri arasındaki 1311 günlük gözlemden oluşmaktadır. Döviz kuru http://evds.tcmb.gov.tr/ adresinden alınmıştır. Serilerin zamana göre değişimini gösteren grafikler Şekil 8.8'de görülmektedir.



Şekil 8.8. USD ve altının TL fiyatlarının zamana göre eğilimi

Altın fiyatları serisinin birim kök içerdiği Uygulama II'de gösterilmişti. USD serisi için de birim kök araştırması yapılmış ve ADF test istatistiği için sonuçlar Çizelge 8.12 ile verilmiştir. Buna göre seri birim kök içermektedir. Her iki seri için de getiri serileri $\boldsymbol{R}_{\mathrm{t}} = (R_{1t}, R_{2t})'$ hesaplanarak işlem yapılacaktır.

Çizelge 8.12. USD serisi için birim kök testi sonuçları

ADF	p
Kesmeli ve trendli	0.4589
Kesmeli ve trendsiz	0.6123
Kesmesiz ve trendsiz	0.8378

Burada R_{1t}, USD serisine ait getiri değerlerini, R_{2t}, altın fiyatları serisinin getiri değerlerini göstermektedir.

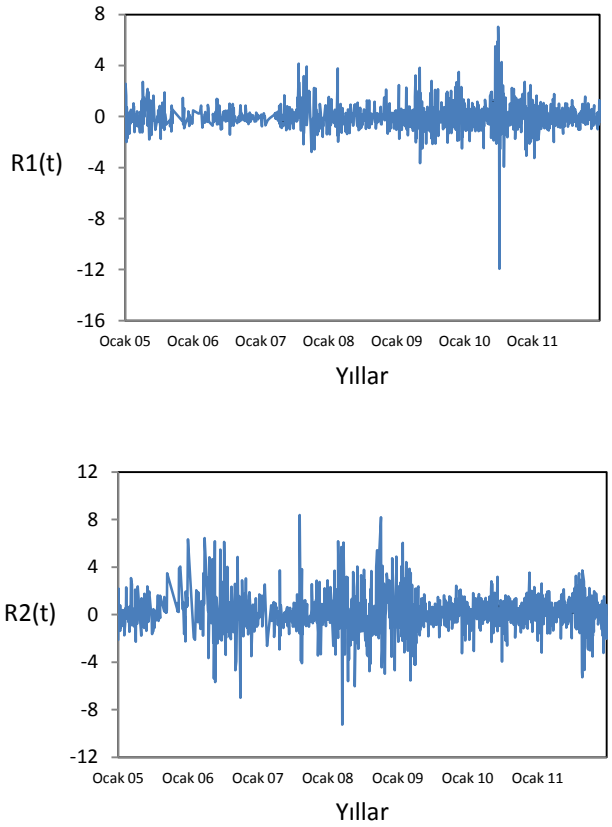
$$R_{1t} = 100 * [\ln(X_{1t}) - \ln(X_{1(t-1)})$$
$$R_{2t} = 100 * [\ln(X_{2t}) - \ln(X_{2(t-1)})]$$

Seriler dönüştürüldükten sonra birim kök yapısı giderilmiştir (Çizelge 8.13).

Çizelge 8.13. USD serisinden hesaplanan getiri serisi için ADF birim kök testi sonuçları

ADF	p
Kesmeli ve trendli	0.0001
Kesmeli ve trendsiz	0.0001
Kesmesiz ve trendsiz	0.0001

Getiri serilerinin grafikleri de Şekil 8.9 ile verilmiştir. Çalışmada R_{2t} serisi çok değişkenli SETAR model için eşik gösterge değişkeni olarak alınmıştır. Yani, $R_{2t} = Z_t$'dir.



Şekil 8.9. Getiri serilerinin yıllara göre değişimi

İlk olarak, vektör zaman serilerinin otoregresiflik derecesini belirlemek için kısmî otoregresyon matrisleri (PAM) oluşturulmuştur. PAM yapıları ve olabilirlik oran istatistikleri Çizelge 8.14'de görülmektedir. Ayrıca vektör otoregresif zaman serilerinde model derecesini belirlemek için AIC, SIC ve olabilirlik oran istatistikleri ilk 50 gecikme için hesaplanmıştır. Bunlardan yalnızca olabilirlik oran istatistiği otoregresif sırasını belirleyici sonuç vermiş diğer iki kriter ise herhangi bir sıra belirlememiştir. AIC, SIC ve olabilirlik oran istatistiği değerleri Çizelge 8.15'de yer almaktadır.

Çizelge 8.14. $\boldsymbol{R}_t$ vektör otoregresif serisine ilişkin PAM yapıları ve LR istatistikleri

Gecikme 1-6	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)
	6.696	4.472	1.544	1.627	11.360	5.109
Gecikme 7-12	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)	(. .)
	8.902	4.235	5.198	6.019	2.269	3.134

Çizelge 8.15. Vektör zaman serisinin AIC, SIC ve olabilirlik oran istatistiği değerleri

Gecikme	LR	AIC	SC	Gecikme	LR	AIC	SC
1	6.2629	6.7017	6.7262	26	0.2737	6.7719	7.2042
2	5.0529	6.7040	6.7448	27	3.7581	6.7751	7.2237
3	1.2872	6.7093	6.7664	28	1.9951	6.7798	7.2447
4	1.2729	6.7147	6.7881	29	2.2359	6.7843	7.2655
5	11.5321	6.7118	6.8015	30	2.2306	6.7888	7.2863
6	4.8488	6.7143	6.8203	31	1.0223	6.7943	7.3082
7	8.1614	6.7141	6.8364	32	3.3366	6.7978	7.3280
8	3.7799	6.7174	6.8560	33	4.2403	6.8006	7.3471
9	5.4669	6.7193	6.8743	34	4.9215	6.8028	7.3657
10	6.0320	6.7208	6.8921	35	1.3698	6.8080	7.3872
11	1.8717	6.7256	6.9132	36	2.4508	6.8123	7.4078
12	3.1364	6.7294	6.9334	37	1.7347	6.8172	7.4290
13	8.7154	6.7287	6.9489	38	3.1987	6.8209	7.4489
14	2.7331	6.7328	6.9694	39	1.6559	6.8258	7.4702
15	7.8556	6.7328	6.9857	40	3.6198	6.8291	7.4898
16	4.4116	6.7356	7.0047	41	1.1401	6.8345	7.5115
17	3.3968	6.7391	7.0246	42	1.4600	6.8396	7.5329
18	8.3994	6.7386	7.0404	43	2.5122	6.8438	7.5534
19	5.0241	6.7408	7.0590	44	1.7939	6.8486	7.5746
20	0.6547	6.7467	7.0811	45	1.0025	6.8541	7.5964
21	0.7458	6.7524	7.1031	46	4.8455	6.8563	7.6149
22	1.9903	6.7571	7.1242	47	1.5726	6.8613	7.6362
23	8.1776	6.7567	7.1401	48	3.9629	6.8642	7.6554
24	2.6994	6.7608	7.1605	49	3.7748	6.8673	7.6749
25	1.7237	6.7658	7.1818	50	5.3581	6.8690	7.6929

Olabilirlik oran istatistiğinin karşılaştırılacağı tablo değeri $\chi_4^2 = 9.49$'dur. Çizelge 8.14'den görüldüğü gibi $p = 5$ alınarak $C(d)$ istatistiği hesaplanacaktır. Burada d'nin alabileceği değerler $d = 1,2,\dots,5$'tir. $C(d)$ istatistiği hesaplanırken farklı d değerleri ile farklı başlangıç gözlem sayısı değeri m kullanılarak istatistiğin performansı karşılaştırılır. Çizelge 8.16'da $C(d)$ istatistiğinin aldığı değerler görülmektedir.

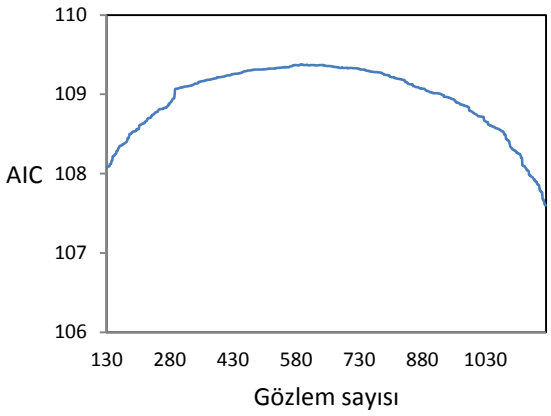
$C(d)$ istatistiği $\chi_{22}^2 = 33.92$ tablo değeri ile karşılaştırılır ve en yüksek $C(d)$ istatistiğini veren $m = 100$ başlangıç gözlemine sahip (p, d)=(5,2) değeri eşik değerinin araştırılmasında kullanılır.

Rejim sayısı ve eşik değerlerini belirlemek için AIC kriterinden faydalanılacaktır. İlk olarak $k = 2$ olacak şekilde iki rejimli ve tek eşik değerli model

için araştırma yapılmıştır. Burada eşik değeri $r \in [Q_{10}(Z_{t-d}), Q_{90}(Z_{t-d})]$ aralığında değişmektedir. AIC değerleri Şekil 8.10'daki gibi elde edilmiştir.

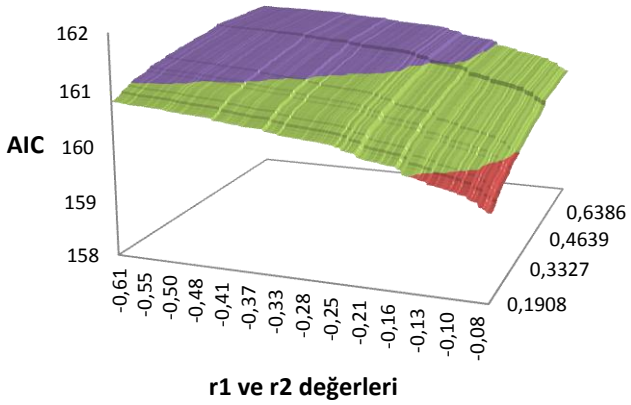
Çizelge 8.16. $C(d)$ istatistiği değerleri

m	p	d	$C(d)$
100	5	1	54.4518
		2	96.9948
		3	60.3639
		4	76.6433
		5	77.9754
125	5	1	34.3138
		2	38.1897
		3	39.0557
		4	29.9877
		5	47.7874
150	5	1	7.1343
		2	4.0483
		3	9.7988
		4	6.7465
		5	9.5608
175	5	1	7.2559
		2	3.6887
		3	10.6245
		4	7.2878
		5	9.1101



Şekil 8.10. İki rejimli durum için AIC değerinin değişimi

İki rejimli model ele alındığında AIC değerinin gözlem sayısı arttıkça azaldığı Şekil 8.11'den görülmektedir. Daha sonra üç rejimli ve iki eşik değişkeni için AIC değerleri hesaplanmıştır. Eşik değerleri $r_1 \in [Q_{10}(Z_{t-d}), Q_{45}(Z_{t-d})]$ ve $r_2 \in [Q_{55}(Z_{t-d}), Q_{90}(Z_{t-d})]$ aralığında değişmektedir.



Şekil 8.11. İki eşik değerine göre AIC değişimi

Şekil 8.11 incelendiğinde eşik değerlerine AIC değişimine göre karar verilebilir. Verinin iki rejimli olması durumunda ilk rejimde gözlem sayısı olarak bir yığılma olduğundan üç rejime bölünmesi uygun görülmüştür. Buna göre $r_1 = -0.0722$ ve $r_2 = 0.1908$ olarak seçilmiştir. Çok değişkenli SETAR modeli,

$$\boldsymbol{R}_t = \begin{cases} \boldsymbol{C}_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(1)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(1)}, & Z_{t-2} \leq -0.0722 \\ \boldsymbol{C}_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(2)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(2)}, & -0.0722 < Z_{t-2} \leq 0.1908 \\ \boldsymbol{C}_0^{(3)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(3)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(3)}, & Z_{t-2} > 0.1908 \end{cases}$$

şeklinde oluşturulur. Her bir rejim içindeki en uygun gecikme sayısı AIC kriterine göre belirlenerek parametrelerin en küçük kareler tahminleri Çizelge 8.17'de verilmiştir. Parantez içindeki sayılar katsayıların standart sapmalarını göstermektedir.

Çizelge 8.17. Üç rejimli model için en küçük kareler tahminleri

$\widehat{\boldsymbol{c}}_0$	$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_1$	$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_2$	$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_3$	$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_4$	$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_5$
1. rejim					
$\begin{pmatrix}-0.075\\(0.061)\\0.196\\(0.092)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.107 & 0.011\\(0.046) & (0.029)\\-0.055 & -0.092\\(0.070) & (0.043)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.023 & 0.030\\(0.047) & (0.070)\\-0.069 & 0.039\\(0.040) & (0.060)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.089 & -0.001\\(0.047) & (0.028)\\0.031 & -0.032\\(0.070) & (0.043)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.090 & -0.018\\(0.045) & (0.028)\\-0.004 & 0.006\\(0.067) & (0.042)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.028 & -0.009\\(0.039) & (0.027)\\0.058 & 0.130\\(0.059) & (0.040)\end{pmatrix}$
2. rejim					
$\begin{pmatrix}0.019\\(0.120)\\0.293\\(0.128)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.030 & -0.053\\(0.077) & (0.095)\\-0.013 & -0.370\\(0.082) & (0.101)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.019 & 0.940\\(0.107) & (1.290)\\-0.100 & -0.017\\0.114 & (1.375)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.063 & -0.070\\(0.070) & (0.094)\\0.070 & -0.279\\(0.075) & (0.100)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.307 & 0.051\\(0.101) & (0.083)\\-0.207 & 0.069\\(0.108) & 0.089\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.100 & -0.128\\(0.097) & (0.098)\\0.097 & 0.035\\(0.103) & (0.105)\end{pmatrix}$
3. rejim					
$\begin{pmatrix}0.049\\(0.056)\\0.076\\(0.100)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.025 & 0.021\\(0.039) & (0.022)\\-0.034 & -0.011\\(0.070) & (0.039)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.059 & -0.047\\(0.034) & (0.031)\\-0.032 & -0.012\\(0.061) & (0.055)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.010 & 0.008\\(0.040) & (0.022)\\-0.116 & -0.001\\(0.071) & (0.004)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.014 & 0.018\\(0.036) & (0.023)\\0.101 & -0.053\\(0.064) & (0.040)\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0.111 & 0.004\\(0.042) & (0.023)\\0.002 & 0.040\\(0.076) & (0.041)\end{pmatrix}$

Her bir rejim için varyans-kovaryans matrisleri ise Çizelge 8.18'de görülmektedir. Modelin AIC değeri 159.972 olarak elde edilmiştir.

Çizelge 8.18. Rejimlerin varyans-kovaryans matrisleri ve gözlem sayıları

n	$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$
585	$\begin{pmatrix}1.142 & \\0.003 & 2.595\end{pmatrix}$
131	$\begin{pmatrix}1.362 & \\-0.002 & 1.547\end{pmatrix}$
589	$\begin{pmatrix}0.813 & \\-0.010 & 2.590\end{pmatrix}$

Modelin artıklarını incelemek için artıkların PAM yapıları ve olabilirlik oran testi sonuçları Çizelge 8.18 ile verilmiştir.

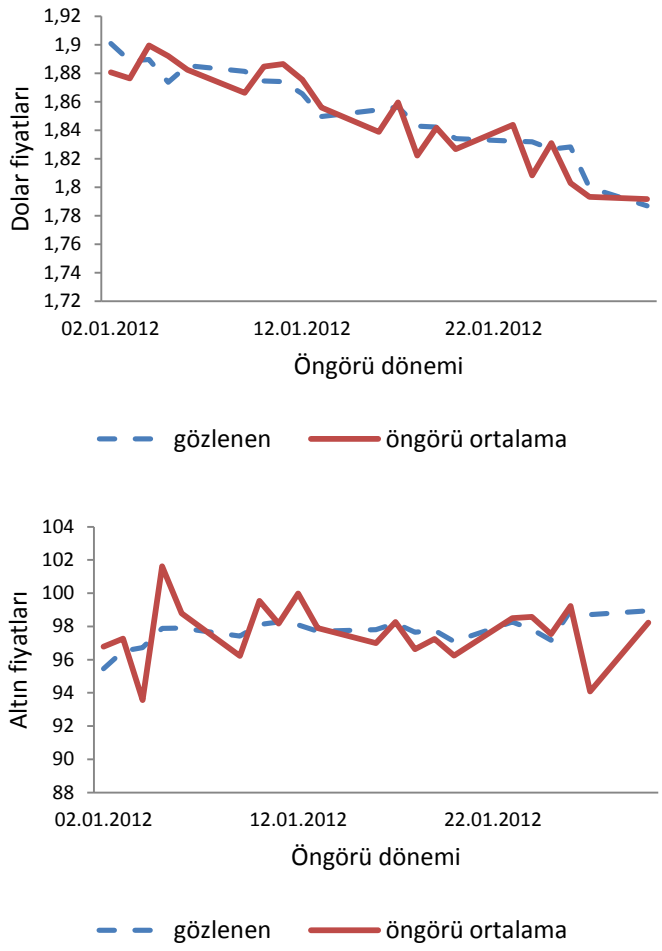
Çizelge 8.18. Artıklara ait PAM yapıları ve LR istatistikleri

Gecikme 1-6 $\begin{matrix}(\cdot\ \cdot)&(\cdot\ \cdot)&(\cdot\ \cdot)&\left(\cdot\ {}^{+}_{\cdot}\right)&(\cdot\ \cdot)&\left({}^{-}_{\cdot}\ \cdot\right)\\ 2.624 & 0.76 & 3.873 & 7.494 & 1.406 & 7.838\end{matrix}$

Gecikme 7-12 $\begin{matrix}(\cdot\ \cdot)&(\cdot\ {}_{-})&(\cdot\ \cdot)&({}_{-}\ \cdot)&(\cdot\ \cdot)&(\cdot\ \cdot)\\ 1.863 & 3.577 & 4.302 & 7.421 & 5.936 & 1.199\end{matrix}$

Artıkların herhangi bir model yapısı göstermediği söylenebilir ($\chi_4^2 = 9.49$).

Elde edilen çok değişkenli SETAR modelden öngörü yapmak için parametrik bootstrap yöntemi uygulanmıştır. $B = 1000$ alınarak modelin artık terimlerinden yeni diziler oluşturulmuş ve bunlar modelde yerine konularak iki seriye ait öngörüler elde edilmiştir. Daha sonra öngörülerin ortalaması alınarak öngörü dönemine ait nokta tahminleri yapılmıştır. Sonuçlar Çizelge 8.19'da yer almaktadır.



Şekil 8.19. Altın ve Dolar fiyatları için öngörü

Altın fiyatlarının gösterge değişken olarak alındığı çok değişkenli Dolar ve altın fiyatları modeline göre yapılan öngörüler serilerin gözlenen değerleri ile yakın bir seyir izlemektedir. Buna göre kurulan modelin öngörü yapmak için uygun olduğu söylenebilir. Elde edilen çok değişkenli SETAR modele göre, Türkiye piyasasında altın ve Dolar fiyatlarının birbirini etkilediği ve birlikte modellenebileceği sonucuna varılmıştır. Altın fiyatları getirisinin geçmiş gözlemlerinin sıfıra yakın olduğu

durumlarda ($-0.0722 < Z_{t-2} \leq 0.1908$) seriler çok değişkenli bir AR(5) sürecine tabi iken, getiri sıfırdan çok küçük ya da sıfırdan çok daha büyük olduğunda farklı çok değişkenli AR süreçleri ortaya çıkmaktadır.

9. SONUÇLAR

Parçalı doğrusal bir yapıya sahip olan eşiksel otoregresif modeller çok geniş uygulama alanları ile dikkat çekmektedir. Özellikle ekonomi ve finans alanındaki verilerin getiri serilerinin döngüsel veri yapısına sahip olması nedeniyle eşiksel otoregresif model kullanışlı olmaktadır. Eşiksellik yapısı nedeniyle serinin getiri serisi olmaması durumunda da faydalı bir modeldir. Bu çalışmada, kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modelin çeşitli biçimlerde uygulanışını göstermek amacı ile iki farklı uygulama yapılmıştır.

Uygulama I'de, tek değişkenli SETAR sürecinin artık terimlerinin değişen varyanslı olması durumunda bu artıkların da kolayca modellenebileceği görülmektedir. Eğer artıklarda bir değişen varyanslılık durumu varsa her rejim için farklı ARCH parametreleri ile modellenebilir. Modelin rejimlere izin vermesi daha esnek yapıda bir model oluşturulmasına imkan vermektedir.

Uygulama olarak günlük altın fiyatları verisi TL cinsinden alınmıştır. Serideki birim kök yapısını giderebilmek için getiri serisi hesaplanmış ve birim kök giderildikten sonra getiri serisinin doğrusal olmayan bir yapıda olduğu Tsay (1989)'in F testi ile gösterilmiştir. Daha sonra eşik değişkeni ve eşik değerleri tespit edilerek üç rejimli bir SETARCH modeli Eşitlik (9.1)'de görüldüğü gibi oluşturulmuştur.

$$R_t = \begin{cases} 0.088(0.027) - 0.231(0.067)R_{t-2} - 0.157(0.060)R_{t-3} + \varepsilon_t, & R_{t-7} \leq -0.92 \\ 0.088(0.027) - 0.59(0.039)R_{t-1} + \varepsilon_t, & -0.92 < R_{t-7} \leq 0.18 \\ 0.088(0.027) + 0.119(0.033)R_{t-6} + \varepsilon_t, & R_{t-7} > 0.18 \end{cases} \tag{9.1}$$

$$h_t = 0.0045(0.0059) + 0.0153(0.007)\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9801(0.011)h_{t-1}$$

Modelde getiri serisinin ortalama denklemi bir SETAR süreç olarak elde edilmiştir. Modelden elde edilen artıklar için ise tek koşullu varyans denklemi yeterli olmuştur. Artıklara ilişkin değerlendirmeler incelendiğinde modelin geçerli olduğu söylenebilir. Modelden elde edilen öngörü değerleri de Şekil 8.7'den görüldüğü gibi gözlem değerleri ile yakın bir gerçekleşme oluşturmuştur.

Uygulamada II'de, çok değişkenli SETAR modeli oluşturulmaya çalışılmıştır. Yine Tsay (1998)'in çalışması göz önünde bulundurularak SETAR model için çok değişkenli doğrusal olmamayı test eden istatistik hesaplanmış ve birbiriyle ilişkili

olduğu düşünülen günlük dolar ve altın fiyatları verisi için doğrusal olmama hipotezi reddedilememiştir. İki serinin de durağanlaşması için birinci dereceden farkının alınması gerekmiştir. Çok değişkenli SETAR modeli için altın fiyatları baz değişken olarak alınmış ve doğrusal olmama testine göre gerçekten de bu iki serinin ortak bir SETAR model ile modellenebileceği görülmüştür. Uygulamada dikkati çeken bir diğer nokta, doğrusal olmama testi uygulanırken başlangıç gözlem sayısının oldukça etkili olmasıdır. Buna göre bu iki seri için özellikle ilk birkaç aylık döneme bağlı olarak doğrusal olmama yapısının kuvvetli olduğu söylenebilir ($m = 100$). Çok değişkenli SETAR model Eşitlik (9.2)'deki gibi üç rejime ayrılmıştır.

$$\boldsymbol{R}_t = \begin{cases} \boldsymbol{C}_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(1)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(1)}, & Z_{t-2} \leq -0.0722 \\ \boldsymbol{C}_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(2)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(2)}, & -0.0722 < Z_{t-2} \leq 0.1908 \\ \boldsymbol{C}_0^{(3)} + \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\phi}_i^{(3)} \boldsymbol{R}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(3)}, & Z_{t-2} > 0.1908 \end{cases} \quad (9.2)$$

Altın getirisindeki iki gün önceki değerin (Z_{t-2}) sıfıra yakın olması durumunda seriler için bir rejim ortaya çıkarken getirinin sıfırdan uzaklaşması halinde farklı rejimler ortaya çıkmaktadır.

Modelin artık terimlerine ilişkin PAM yapıları ile olabilirlik oranı değerleri incelenerek modelin yeterliliğine karar verilmiştir. Şekil 8.19'dan görüldüğü gibi öngörü döneminde elde edilen değerler de gözlenen durumla yakın bir seyir izlediği söylenebilir.

SETAR modelinde modelleme süreci, model yapısının belirlenmesi, tahmin ve artıkların incelenmesi olarak klasik Box-Jenkins yaklaşımıyla örtüşmektedir. Sonuç olarak, SETAR modelin uygulama kolaylığı ve esnek model yapısı nedeniyle ekonomik verilerin analizinde kullanışlı olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

Akdi, Y., (2003), Zaman Serileri Analizi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Baragona, R., Battaglia, F., (2004), "Estimating threshold subset autoregressive moving-average models by generic algorithms", METRON- International Journal of Statistics, Vol. LXII, No:1, 39-46.

Bartlett, M.S., (1938), "Further Aspects of the Theory of Multiple Regression", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.34, 33-40.

Bollerslev, T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, Vol.31, 301-307.

Box, G.E.P, Jenkins, G.M, (1976), Time Series Analysis: Forecasting and Control, San Francisco: Holden-Day.

Campenhout B.V., (2006), "Modelling trends in food market integration: Method and an application to Tanzanian maize markets", Food Policy, Vol. 32, Issue 1.

Chan, W., Wong, A., Tong H., (2004), "Some Nonlinear Threshold Autoregressive Time Series Models for Actuarial Use", North American Actuarial Journal, Vol. 8, No:4, 37-61.

Chen, J., (2012), "Crisis, Capital Controls and Covered Interest Parity: Evidence from China in Transformation", Paris-Jourdan Sciences Economiques, CNRS : UMR8545.

Clements, M., Smith, J., (2001), "Evaluating Forecasts from SETAR Models of Exchange Rates", Journal of International Money and Finance, Vol.20, 133-148.

De Gooijer, J.G., (2001), "Cross-validation Criteria for SETAR Model Selection", Journal of Time Series Analysis, Vol.22, 267-281.

Dickey, D.A. and W.A. Fuller (1979), "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root," Journal of the American Statistical Association, 74, p. 427–431.

Dufrenot, G., Guegan, D., Peguin-Feissolle, A., (2008), "Changing-regime volatility: a fractionally integrated SETAR model" Applied Financial Economics, Taylor and Francis Journals, Vol.18, No:7, 519-526.

Engle, R.F., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, Vol. 50, No. 4, 987-1008.

Engle, R.F., Lilien, D.M., Robins, R.P., (1987), "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure", Econometrica, Vol.55, Issue 2, p. 391-407.

Feng, H., Liu, J., (2003), "A SETAR model for Canadian GDP: non-linearities and forecast comparisons", Applied Economics, Vol. 35, Issue 18.

Franses, P. H., Dijk, D., (2000), Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, Cambridge.

Galeano, P., Pena, D., (2007), "Improved model selection criteria for SETAR time series models", Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.137, Issue 9, 2802-2814.

Gonzalo, J., Wolf, M., (2005), "Subsampling inference in threshold autoregressive models", Journal of Econometrics, Vol. 127, 201–224.

Hansen, B.E., (1996), "Inference When a Nuisance Parameter Is not Identified under the Null Hypothesis" Econometrica, Vol.64, 413-430.

Hansen, B.E., (1997), "Inference in TAR Models", Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, Vol.2, Number 1, p. 1-14.

Hansen, B.E., (1999), "Testing for Linearity", Journal of Economic Surveys, Vol.13, 551-576.

Hansen, B.E., (2000), "Sample Splitting and Threshold Estimation", Econometrica, Vol.68, 575-603.

Huang, B.N., Hwang, M.J., Peng, H.P., (2005), "The asymmetry of the impact of oil price shocks on economic activities: An application of the multivariate threshold model", Energy Economics, Vol.27, Issue 3.

Hutchison, M., Kendall, J., Pasricha, G., Singh, N., (2010), "Indian Capital Control Liberalization: Evidence from NDF markets", Munich Personal RePEc Archive.

Kadılar, C., (2005), SPSS Uygulamalı Zaman Serileri Analizine Giriş, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Kajitani, Y., Keith, W.H., Mcleod, A.I., (2005), "Forecasting nonlinear time series with feed-forward meural networks: a case study of Canadian lynx data", Journal of Forecasting, Vol.24, Issue 2.

Kapetanios, G., (2000), "Small Sample Properties of the Conditional Least Squares Estimator in SETAR Models, Economics Letters, Vol.69, 267-276.

Kapetanios, G., Shin, Y., (2006), "Unit root tests in three-regime SETAR models", The Econometrics Journal, Vol. 9, Issue 2, 252-278.

Khadaroo, A.J., (2005), "A threshold in inflation dynamics: evidence from emerging countries", Applied Economics, Vol.37, Issue 6.

Kınacı, İ., (2005), Lineer Olmayan Zaman Serisi Modelleri, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Konya.

Kızılsu, S.S., (2000), Doğrusal Olmayan Zaman Dizilerinde ARCH ve GARCH Modelleri ve Uygulaması, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Lai, T.L., Wei, C.Z., (1982), "Least Square Estimates in Stochastic Regression Models with Applicaitons to Identification and Control of Dynamic Systems", The Annals of Statistics, Vol.10, 154-166.

Lewis, P.A.W., Ray, B., (1997), "Modelling Long-Range Dependence, Non-linearity and Periodic Phenomena in Sea Surface Temperatures Using TSMARS", Journal of the American Statistical Association, Vol.92, 881-893.

Li, C.W., Li, W.K., (1996) "On a Double Threshold Autoregressive Heteroscedastic Time Series Model", Journal of applied Econometrics, Vol.11, 253-274.

Ljung, G.M., Box, G.E.P., (1978), "On a Measure of a LAck of Fit in Time Series Models", Biometrika, Vol.65, 297-303.

Mak, T.K., Wong, H., Li, W.K., (1997), "Estimation of nonlinear time series with conditional heteroscedastic variances by iteratively weighted least squares", Computational Statistics & Data Analysis, Vol.24, 169-178.

McLeod, A.I., Li, W.K., (1983), "Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared Residual Autocorrelations", Journal of Time Series Analysis, Vol.4, 269-273.

Montgomery, A., Zarnowitz, V., Tsay, R.S., Tiao, G., (1998), "Forecasting the US Unemployment Rate", Journal of the American Statistical Assosication, Vol.93, 478-493.

Nargeleçekenler, M., (2004), "Euro Kuru Satış Değerindeki Volatilitenin ARCH ve GARCH Modelleri ile Tahmini", İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Mecmuası, Cilt 54, Sayı 2, s. 153-179.

Nelson, D.B., (1991). "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach", Econometrica, Vol. 59, p. 347-370.

Pinson, P., Christensen, L.E.A., Madsen, H., Sørensen, P.E., Donovan, M.H., Jensen, L.E., (2008), "Regime-switching modeling of the fluctuations of offshore wind generation", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.96, Issue 12.

Sevüktekin, M., Nargeleçekenler, M., (2010), Ekonometrik Zaman Serileri Analizi:EViews Uygulamalı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Strikholm, B., Teräsvirta, T., (2006), "A sequential procedure for determining the number of regimes in a threshold autoregressive model," Econometrics Journal, Vol.9, 472-491.

Tiao, G.C., Box, G.E.P., (1981), "Modeling Multiple Time Series with Applications", Journal of the American Statistical Assosication, Vol.76, 802-816.

Tong, H. and Lim, K.S., (1980), "Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclial Data", Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 42, 245-292.

Tong, H., (1978), "On a threshold model", In Pattern Recognition and Signal Processing (C. H. Chen, ed.), 101-141. Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam.

Tong, H., (1990), Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach, Oxford University Press, New York.

Tong, H., Yeung, I., (1991), "On tests for Self-exciting Threshold Autoregressive-Type Non-linearity in Partially Observed Time Series", Applied Statistics Vol.40, 43-62.

Tsay, R., (1989), "Testing and Modelling Threshold Autogressive Processes", Journal of the American Statistical Association, Vol.84, 231-240.

Tsay, R.S., (1998), "Testing and Modeling Multivariate Threshold Models", Journal of the American Statistical Association, Vol.93, No:443, 1188-1202.

Tsay, R.S., (2010), Analysis of Financial Time Series, Johns Wiley & Sons, Inc., Publication, Third Edition, Canada.

Watier, L., Richardson, S., (1999), "Modelling of an Epidemiological Time Series by a Threshold Autoregressive Model", The Statistician, Vol.44, No:3, 353-364.

Weiss, A.A., (1986), "Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing", Econometric Theory, Vol.2, No:1, 107-131.

Yadav, P.K., Pope, P.F., Paudyal, K., (1994), "Threshold Autoregressive Modelling in Finance: The Price Difference of Equivalent Assets", Mathematical Finance, Vol.4, 205-221.

Yalçın, Y., (2008), Türkiye'deki Finansal Serilerin Oynaklık Yapısı, Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Doktora Tezi, Ankara.

Yang, X.H., Li, Y.Q., (2012), "DNA Optimization Threshold Autoregressive Prediction Model and Its Application in Ice Condition Time Series", Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, Vol.2012, Article ID 191902, 10 pages, doi:10.1155/2012/191902.

Yılancı, V., (2007), Eşik Otoregresif Modellerde Birim Kök Testi ile Satın Alma Gücü Paritesinin Geçerliliğinin Sınanması, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

http://www.iab.gov.tr/ay_veri.asp

http://evds.tcmb.gov.tr

http://en.wikipedia.org

http://mathworld.wolfram.com