İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAKVİYELİ PLAKLARDA DİNAMİK ANALİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Murat GÜL
(501011084)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ocak 2003

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Nihal ERATLI

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. A. Yalçın AKÖZ (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Gülay ALTAY (B.Ü.)

OCAK 2003

ÖNSÖZ

Bu çalışmada öncelikle değişken kesitli çubuklar geliştirilen sonlu eleman formülasyonu kullanılarak elde edilen dinamik ve statik analiz sonuçlarına yer verilmiştir. Daha sonra takviyeli plaklar için elde edilen fonksiyoneller kullanılarak yazılan bilgisayar programı yardımıyla statik analiz ve serbest titreşim analizi yapılmıştır.

Tez çalışmamın başından sonuna kadar, zaman ve mekan farkı gözetmeden yardımlarını hep yanımda bulduğum danışmanım, Sn. Yrd.Doç.Dr. Nihal ERATLI ‘ya şükranlarımı sunarım.

Bu çalışmanın üretilebilmesi için gerekli bilimsel alt yapının oluşturulmasında büyük katkıları olan Sn. Prof.Dr. A.Yalçın AKÖZ hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca emeği geçen tüm İnşaat Fakültesi öğretim üyelerine teşekkür ederim.

OCAK 2003 MURAT GÜL

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ **v**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
SEMBOL LİSTESİ **ix**
ÖZET **x**
SUMMARY **xi**

1. GİRİŞ **1**

2. DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLAR **5**

2.1 Doğru Eksenli Çubuklar İçin Fonksiyonel Üretimi **5**

2.2 Sabit Kesitli Çubuk İçin Sonlu Eleman Formülasyonu **9**

2.2.1 Statik analiz 9
2.2.2 Dinamik analiz 11

2.3 Değişken Kesitli Çubuk İçin Sonlu Eleman Formülasyonu **12**

2.3.1 Statik analiz 12
2.3.2 Dinamik analiz 14

2.4 Doğru Eksenli Çubuklara Ait Uygulamalar **14**

2.4.1 Sabit kesitli düzgün yayılı yüklü basit kiriş 14
2.4.2 Sabit kesitli düzgün yayılı yüklü konsol kiriş 16
2.4.3 Değişken kesitli düzgün yayılı yüklü konsol kiriş 18
2.4.4 Değişken kesitli düzgün yayılı yüklü basit kiriş 20

2.5 Reddy Hata Analizi **21**

3. PLAK FONKSİYONELİNİN ÜRETİLMESİ **23**

3.1 Reissner Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi **24**

3.2 Reissner Plak Fonksiyonelinin Elde Edilmesi **29**

4. KİRİŞ-PLAK FONKSİYONELİNİN ÜRETİLMESİ **32**

4.1 Kiriş-Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi **32**
4.2 Kiriş-Plak Fonksiyonelinin Elde Edilmesi **34**

5. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU **36**

5.1 Sonlu Eleman ve Şekil Fonksiyonları **36**

5.2 Plak İçin Eleman ve Yük Matrisinin Elde Edilmesi **37**

5.3 Kiriş-Plak İçin Eleman ve Yük Matrisinin Elde Edilmesi **39**

5.4 Dinamik Analiz **40**

6. UYGULAMALAR **42**

6.1 Statik Analiz Uygulamaları **42**

6.1.1 Dikdörtgen plak için örnekler 42
6.1.1 Takviyeli plak için örnekler 44

6.2 Dinamik Analiz Uygulamaları **47**

6.2.1 Dikdörtgen plak için örnekler 47
6.2.2 Takviyeli plak için örnekler 50

7. PROGRAMLAMA **55**

7.1 Giris Alt Programı **55**

7.2 Eleman Alt Programı **56**

7.3 Kodlama Alt Programı **57**

7.4 EM1 ve EM2 Alt Programları **58**

7.5 Global Alt Programı **58**

7.6 Les Alt Programı **59**

7.7 Dinamik Alt Programı **60**

7.8 Ozdeger Alt Programı **61**

8. SONUÇLAR **63**

KAYNAKLAR **66**

ÖZGEÇMİŞ **68**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1. Basit kiriş için elde edilen α, β değerleri 15
Tablo 2.2. Basit kiriş için frekans parametreleri..... 16
Tablo 2.3. Konsol kiriş için elde edilen α, β değerleri 17
Tablo 2.4. Konsol kirişe ait frekans parametreleri..... 17
Tablo 2.5. Değişken kesitli konsola ait çökme değerleri..... 19
Tablo 2.6. Değişken kesitli konsol için α değerleri..... 19
Tablo 2.7. Değişken kesitli konsola ait frekans parametreleri 19
Tablo 2.8. Değişken kesitli basit kirişe ait α, ϖ değerleri..... 21
Tablo 2.9. Reddy hata analizi..... 22
Tablo 6.1. Dikdörtgen plak için bulunan maksimum çökme değerleri 43
Tablo 6.2. Dikdörtgen plak için bulunan maksimum moment değerleri..... 43
Tablo 6.3. Ortadan takviyeli plakta maksimum moment ve çökme değerleri 44
Tablo 6.4. Karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları boşta olan plak için elde edilen değerler (b / a=1) 46
Tablo 6.5. Kenarlarından takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için değerler (b / a=1)..... 46
Tablo 6.6. Kenarlarından sabit mesnetli plak için frekans parametreleri 48
Tablo 6.7. Ankastre mesnetli plakta farklı b / a oranları için frekans parametreleri 48
Tablo 6.8. (CSCS) mesnetli plakta farklı b / a oranları için frekans parametreleri 49
Tablo 6.9. Ortadan takviyeli ankastre mesnetli plağın doğal frekansları (Hz)..... 50
Tablo 6.10. Ankastre mesnetli ortadan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar (Hz)..... 51
Tablo 6.11. Ortadan iki takviyeli ankastre mesnetli plakta doğal frekanslar (Hz)..... 52
Tablo 6.12. Kenarlarından takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar..... 53
Tablo 6.13. Kenarlarından takviyeli ankastre mesnetli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar..... 54
Tablo 7.1. PB ve PKB matrislerini gösteren program çıktısı 57
Tablo 7.2. NODE ve NCODE matrislerini gösteren program çıktısı 58
Tablo 7.3. Statik analiz sonuçlarını gösteren program çıktısı 59
Tablo 7.4. Statik analiz sonuçlarını gösteren program çıktısı 60
Tablo 7.5. Dinamik analiz sonuçlarını gösteren program çıktısı 62

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Doğru eksenli çubuk için eksen takımı……...… 5
Şekil 2.2 : Sabit kesitli çubuk için koordinat sistemi ve sonlu eleman.……... 10
Şekil 2.3 : Değişken kesitli çubuk için koordinat sistemi ve sonlu eleman … 12
Şekil 2.4 : Düzgün yayılı yüklü sabit kesitli basit kiriş..……... 15
Şekil 2.5 : Sabit kesitli basit kirişte farklı kalınlıklar için çökme grafiği …… 15
Şekil 2.6 : Basit kirişe ait mod şekilleri.. …….. 16
Şekil 2.7 : Sabit kesitli uniform yüklü konsol kiriş …… 16
Şekil 2.8 : Konsol kirişe ait çökme grafiği ……..…….…… 17
Şekil 2.9 : Konsol kirişe ait mod şekilleri ……..……. 18
Şekil 2.10 : Değişken kesitli konsol kiriş ..……. 18
Şekil 2.11 : Değişken kesitli konsol kirişte 1. moda ait grafik...…….…… 20
Şekil 2.12 : Değişken kesitli konsol kirişte 2. moda ait grafik…… 20
Şekil 2.13 : Değişken kesitli konsol kirişte 3. moda ait grafik…… 20
Şekil 2.14 : Değişken kesitli basit kiriş ..…… 21
Şekil 2.15 : Reddy hata analizi ……..……. 22
Şekil 3.1 : Plak elemanı ve gerilme bileşenleri …….…….. 24
Şekil 3.2 : Plak elemanı ve kesit tesirleri ..…….…….. 26
Şekil 4.1 : Kiriş-Plak elemanı ve gerilme bileşenleri ..…… 32
Şekil 4.2 : Kiriş-Plak elemanı ve kesit tesirleri ……..… 32
Şekil 5.1 : Dikdörtgen sonlu eleman ve koordinat takımı ..…….…. 36
Şekil 6.1 : Dikdörtgen plak ..……..… 43
Şekil 6.2 : Ortadan takviyeli plak ve kullanılan eleman ağı ..……... 44
Şekil 6.3 : Ortadan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için moment grafiği……..…….. 45
Şekil 6.4 : Ortadan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için çökme grafiği ……..……..…….... 45
Şekil 6.5 : Farklı kiriş yükseklikleri için kiriş içinde oluşan burulma momentleri…….…….. 46
Şekil 6.6 : İki kenardan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için çökme grafiği …… 47
Şekil 6.7 : İki kenardan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için moment grafiği …… 47
Şekil 6.8 : Ankastre mesnetli plakta $\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21},\omega_{22}$ ‘ ye ait mod şekilleri …. 49
Şekil 6.9 : (SCSC) Kare plakta $\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21},\omega_{22}$ ‘ ye ait mod şekilleri (b/a=1) 50
Şekil 6.10 : Ankastre mesnetli takviyeli plakta $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ için mod şekilleri … …… 51
Şekil 6.11 : Ortadan iki takviyeli ve dört tarafından ankastre mesnetli plak 52
Şekil 6.12 : Ankastre mesnetli iki takviyeli plakta $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ için mod şekilleri …….…… 52
Şekil 6.13 : İki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları boşta olan plakta

(h , h_k=0.15 m) $\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21}$ için mod şekilleri…….. 53
Şekil 6.14 : İki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları kirişe oturan plakta $\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21}$ için mod şekilleri (h_k=1.54 m) …. …….. 53
Şekil 6.15 : İki kenarı ankastre mesnetli diğer kenarları kirişe oturan plakta $\omega_{11},\omega_{12},\omega_{21}$ için mod şekilleri (bk= 1 m, h_k=1.54 m) ..…….. 54
Şekil 7.1 : Programa ait akış diyagramı …… 56
Şekil 7.2 : Programda ekrandan yapılan giriş bölümü ..…….. 57

SEMBOL LİSTESİ

M, M_x, M_y	:Eğilme momentleri
M_{xy}, M_b	:Burulma momentleri
Q, Q_x, Q_y	:Kesme kuvvetleri
$\Omega, \Omega_x, \Omega_y$	:Dönmeler
w	:Çökme
I	:Fonksiyonel, Atalet momenti
A	:Alan
μ	:Poisson oranı
E	:Elastisite Modülü
G	:Kayma Modülü
EI	:Eğilme rijitliği
GA	:Kayma rijitliği
D	:Plak rijitliği
q	:Yayılı yük
ρ	:Malzeme yoğunluğu
ω	:Doğal frekans
ϕ_i, ϕ_j	:Şekil fonksiyonları
ϕ	:Mod şekilleri
L	:Çubuk uzunluğu
a,b	:Plak kenar uzunlukları
h	:Plak kalınlığı
h_k	:Kiriş kalınlığı
b_k	:Kiriş genişliği

TAKVİYELİ PLAKLARDA DİNAMİK ANALİZ

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle doğru eksenli sabit ve değişken kesitli çubuklar için sonlu eleman formülasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu formülasyonda kesme kuvvetleri de dikkate alınmıştır. Yapılan bilgisayar programıyla statik bilinmeyenlere ve çubuğun doğal frekanslarına ulaşılmıştır. İkinci bölümde farklı örneklerin çözümüne yer verilmiştir.

Daha sonraki bölümlerde, [7] çalışmasında, plak ve plak-kiriş elemanı için Gàteaux diferansiyeline göre elde edilen fonksiyoneller, kullanılarak takviyeli plaklar incelenmiştir. Fonksiyoneller elde edilirken Reissner plak yaklaşımı kullanılmıştır. Plak ve kiriş elemanları birbirinden bağımsız elemanlar olarak düşünülmüş ve bunlar arasında dönme ve çökme eşitliği sağlanmıştır. Sonlu eleman formülasyonu elde edildikten sonra "Fortran Power Station" ortamında bilgisayar programı hazırlanmıştır. [7] çalışmasından farklı olarak programda plağın mesnetlenme türüne göre sınır koşulları otomatik olarak tanımlanmıştır ve bulunan momentler, burulma momentleri, kesme kuvvetleri, dönmeler ile çökmeler nodların plaktaki yerlerine göre sunulmuştur. Bu çalışmanın adı geçen çalışmadan farkı dinamik analizin yapılmış olmasıdır. Program icra edilirken oluşturulan global rijitlik matrisi, kütle matrisinin boyutuna indirgenerek ulaşılan özdeğer problemi çözülerek takviyeli plağa ait serbest titreşim frekansları ve bunlara ait özvektörler elde edilmiştir. Uygulama bölümünde hem statik hem de dinamik analiz örneklerine yer verilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla paralellik göstermektedir. Statik çözümlerdeki gerçekçi yaklaşım sayesinde dinamik çözümler için de uygun sonuçlar elde edilmiştir. Dinamik ve statik analizin bir arada yapılması bu çalışmayı diğer çalışmalardan farklı kılmaktadır.

DYNAMIC ANAYSIS IN STIFFENED PLATES

SUMMARY

In this study, at first the dynamic and static analysis of a beam that has constant cross-section height, and a tapered beam have been studied. At the end of second section, different numerical applications have been done by using prepared computer program. In the finite element formulation of beam, shear forces have been taken in to consideration.

Secondly, the functionals, developed in [7] study have been used and a mixed finite element formulation have been obtained. In this study, Reissner plate theory has been used to obtain the formulation. The formulations for both parts (i.e. plate and beam) have been developed for stiffened plates. The functionals have been obtained by using Gàteaux differential, for plates and beam elements with geometric and dynamic boundary conditions. In this approach, beam torsional moment that is yielded from the lateral bending moments have been taken into consideration in the phase of obtaining functional. Thus, element stiffness matrices and load matrices have been determined for plate and plate-beam elements. The computer program that has been used all through this study was prepared in "Fortran Power Station". In the program , boundary conditions have been determined automatically. Obtained bending moments, twisting moments, shear forces, rotations and displacement have been presented in order of x-y coordinates. While making dynamic analysis, system stiffness matrix has been reduced to dimension of the mass matrix by using the conventional assemblage technique. Hence, the standard eigenvalue problem has been acquired and vibration analysis has been done.

In sixth section, different numerical problems have been solved. Obtained solutions have been compared with in those available the literature .The biggest advantages of this study are to make static analysis and vibration analysis together and to obtain torsional moments along the beam element.

1. GİRİŞ

Takviyeli plaklar mühendislikte birçok uygulama alanı bulunan yapı elemanlarıdır. Uçak ve gemi yapılarında, bina kaset döşemelerinde, köprü tabliyelerinde plak farklı doğrultularda kirişler ile güçlendirilerek yük taşıma kapasiteleri artırılır. Takviyeli plaklar, tek cins malzemeden oluşturulduğu gibi kompozit malzemelerin kullanıldığı uygulamalarda mevcuttur.

Takviyeli plak sistemlerinin çözümü ileri derecede mukavemet ve matematik bilgisi gerektirir. Teorik açıdan problemin çözüm zorluğu basitleştirici kabuller yapılmasını zorunlu kılar.

Plak ve kirişin birlikte monolitik davranışının en kolay ve gerçekçi analizi, gelişen analitik teknikler ve yaklaşımlar sayesinde bulunabilir. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda farklı eleman tiplemeleri ve farklı çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

Plak ve kiriş ayrı elemanlar olarak düşünüldüğü [10] çalışmasında, plak ve kirişler için ayrı fonksiyoneller elde edilmiş, kiriş ve plak elemanları arasında kayma olmadığı, kirişle plak arasında burulma momenti aktarımının olmadığı kabulü ile sadece kuvvet etkileşimi olduğu varsayılarak fonksiyoneller birleştirilmiş ve statik çözüme ulaşılmıştır.

Takviyeli plakların statik analizinin yapıldığı, [20-21] çalışmalarında takviyeler ile plak birlikte düşünülerek bu sistem, ortogonal yönlerde farklı özelliğe sahip eşdeğer rijitlikte homojen ortotropik bir plak sistemine dönüştürülmüştür. Eşdeğer plak yönteminde takviye tipine, plaktaki yerleşim aralığına ve kullanılan malzeme cinsine göre malzeme sabitlerinin belirlenmesi problemin çözümünde güçlük yaratır.

[6] çalışmasında fonksiyonel analiz kullanılmış olup momentler ve çökme kullanılarak elde edilen fonksiyonel klasik potansiyel enerji ifadesine dönüştürülerek Ritz yöntemi ile moment ve çökme değerlerine ulaşılmıştır.

Fonksiyonel analiz yöntemine dayanan [7] çalışmasında Gáteaux diferansiyeli yardımıyla elde edilen fonksiyoneller kullanılarak sonlu eleman formülasyonu ile statik analiz yapılmıştır.

Plakların dinamik analizi yapılırken kullanılan yöntemlerden biri olan Grillage yöntemi [11] kirişlerle kesişen düzlem yapının ayrıklaştırması esasına dayanır. Ayrıklaştırmada ağ sayısı artıkça büyük modlara ulaşmak mümkün olur. Bu çalışmada, ilk modların bulunması yeterli olduğu düşünülerek plak için 8 x 8 lik bir eleman ağı kullanılarak ayrık kütle formülasyonu elde edilmiştir. Böylece plak ve plak-kiriş Grillage elemanları için eleman ve kütle matrisleri elde edilerek özdeğer problemi çözülerek sonuca ulaşılmıştır.

Başka bir çalışmada [12] eksantrik desteklenmiş plakların dinamik analizinde birleştirilmiş şeritler yöntemi uygulanmıştır. Plağın bir doğrultuda şeritlere ayrılması esasına dayanan bu yöntem sonlu elemanlar yönteminin özel bir hali olarak düşünülebilir. Şeritler için sınır şekil fonksiyonları yazılarak Rayleigh-Ritz yöntemi ile yer değiştirme fonksiyonu elde edilmiştir. Şekil değiştirme enerjisinin ve kinetik enerjinin minimizasyonu sonucunda kütle ve eleman matrisleri elde edilerek özdeğer problemi çözülmüştür.

Bedair tarafından yapılan çalışmada [13] ortotropik eşdeğer plak yöntemi uygulanmış, şekil değiştirme ve enerji bağıntıları yazılırken takviyeli kısımlarda dönüştürme katsayıları kullanılarak toplam potansiyel enerji denklemi yazılmıştır. Bu denklemdeki yer değiştirme fonksiyonları için kinematik sınır koşulları, geometrik koşullar ve uygulanan yük göz önüne alınarak elde edilen problem iterasyonla çözülerek sonuca ulaşılmıştır. Bu çalışmada toplam enerji bağıntısında malzeme katsayılarının ifade edilmesi açısından uygulanma zorluğu vardır.

Harık & Guo [14] nun yaptığı çalışmada serbest titreşim analizi için yeni bir sonlu eleman formülasyonu gerçekleştirilmiştir. Formülasyonda plak orta düzlemiyle ve kiriş tarafsız ekseninin, sistem tarafsız ekseni arasındaki eksantrisite dikkate alınmıştır. Ortotropik plak teorisine benzer şekilde eksantrisiteler plak-kiriş kompozit elemanı için tespit edilmiş etkili plak genişliği takviyeler arasındaki net açıklık olarak alınmıştır. Takviye rijitliklerinin global rijitlik matrisinde direkt olarak yer alması bu teoriden bariz farklılığıdır.

Mukhopadhyay tarafından yapılan [15] ve [16] çalışmalarında, takviyeli plakların titreşim analizi ve stabilite analizi için takviye sayısı, yeri ve yönü dikkate alınarak elde edilen diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemi ile çözülmüştür. Çalışmanın birinci bölümünde [15] sadece eğilme yer değiştirmeleri dikkate alınmış, ikinci bölümünde [16] eğilmenin yanı sıra eksenel yer değiştirmelerin etkisi diferansiyel denklemlerde yer almıştır. Sonlu farklar yöntemi uygulanırken, karşılıklı iki kenar için sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme fonksiyonları kullanılmış ve uygun dönüşümler yapılarak diferansiyel denklem, sabit katsayılı matris sistemine dönüştürülmüştür.

Mukherjee & Mukhopadhyay tarafından yapılan sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı çalışmada [17], eksantrik takviyeli plakların serbest titreşim analizi için takviyeli plak elemanı geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda plak ve takviyenin kayma deformasyonları dikkate alındığından geliştirilen formülasyon ince ve kalın plaklar için uygulanılabilmektedir.

Holopainen' nin çalışmasında [18] sonlu elemanlar yöntemi kullanılırken 8 nodlu eleman kullanılmış ve bu elemanın kayma kilitlenmesinden bağımsız olması sağlanmıştır. [19] çalışmasında da tabakalı (laminated) kabuk elemanı ve bunu çevreleyen kiriş elemanı için kayma deformasyonları da dikkate alınarak sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilmiş serbest titreşimler elde edilmiştir.

Bu çalışmada öncelikle doğru eksenli sabit ve değişken kesitli çubukların statik ve dinamik analizi için kayma etkisi de göz önüne alınarak bir fonksiyonel elde edilmiş ve yapılan sonlu elemanlar formülasyonu sonunda yazılan bilgisayar programı ile çubuk statik bilinmeyenlerine ve serbest titreşim frekanslarına ulaşılmıştır. Sonuçlar irdelenirken öncelikle kayma etkisi dikkate alınmış, sonra bu etki ihmal edilmiştir. Böylece sonuçlarda kaymanın etkisi karşılaştırılmıştır. Kayma etkisi eleman matrisindeki kayma rijitliğinin çok büyük bir değer alınması ile göz ardı edilmiştir.

Bu çalışmanın esas inceleme konusu olan takviyeli plaklar için [7] çalışmasında geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Gáteaux diferansiyeli kullanılarak plak ve plak-kiriş elemanları için farklı fonksiyoneller elde edilmiştir. Plak ve kiriş elemanları birbirinden bağımsız elemanlar olarak düşünülmüş ve bunlar arasında dönme ve çökme eşitliği sağlanmıştır. Sonlu eleman formülasyonunda 4

nodlu dikdörtgen eleman kullanılmış olup her eleman için 36 bilinmeyen tanımlanmıştır. Bu veriler doğrultusunda yeni bir bilgisayar programı yazılmıştır. Programlama sonucunda elde edilen global rijitlik matrisi ve yük matrisinin oluşturduğu lineer denklem takımının çözülmesi ile statik çözüme ulaşılır. Yapılan statik analiz sonucunda plak ve kiriş elemanları için moment ve çökme değerleri yanı sıra kesme kuvvetleri, burulma momentleri ve dönmeler elde edilmiştir, programın sonuçları nod numarasına ve plaktaki yerine göre yazdırması sonuçları kolay irdeleme fırsatı sunmuştur. [7] çalışmasından farklı olarak bilgisayar programı, takviyeli plağın serbest titreşim analizinin yapılabilmesi imkanı verir. Programın dinamik analiz bölümünde global matrisin, kütle matrisinin boyutuna indirgenmesi ile elde edilen özdeğer problemi çözülmüştür. Bulunan doğal frekanslar ve bunlara bağlı olarak bulunan özvektörler sayesinde mod şekillerinin grafik hale dönüştürülmesi sağlanmıştır. Bu çalışmanın başka çalışmalardan diğer bir farkı da statik ve dinamik analizi aynı anda yapma olanağını sunmasıdır.

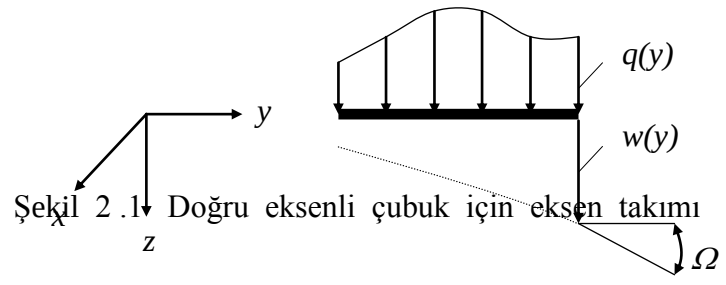
2 . DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLAR

Şekil değiştiren cisimler mekaniğinde problemler sınır koşulları belli bir diferansiyel denklem takımının çözümü olan fonksiyonun bulunmasına veya bir fonksiyoneli stasyoner yapan fonksiyonun bulunmasına indirgenebilir. Diferansiyel denklem ve sınır koşulları verildiğinde çözümü bulmak her zaman mümkün olmayabilir ancak fonksiyonel analiz kullanarak sonuca ulaşmak kolaylaşır.

Bu bölümde doğru eksenli çubuklar için fonksiyonel analiz yöntemi kullanılarak enerji fonksiyoneli bulunmuştur. Elde edilen bu fonksiyonelle çubuktaki moment, kesme kuvveti, dönme ve çökme değerleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bulunmuştur.

2 . 1 Doğru Eksenli Çubuklar İçin Fonksiyonel Üretimi

Doğru eksenli çubuklar için eksen takımı Şekil (2 .1) deki gibi kabul edilip, w çubuktaki çökmeyi, M momenti, Q kesme kuvvetini, Ω kesitin dönmesini, EI eğilme rijitliğini, GA kayma rijitliğini, q yayılı yükleri göstermek üzere çubuğa ait denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir. [1]



Şekil 2 .1 Doğru eksenli çubuk için eksen takımı

$$-\frac{dQ}{dy} - q = 0 \qquad \text{Denge denklemi} \qquad (2.1)$$

$$-\frac{dM}{dy} + Q = 0 \qquad \text{Denge denklemi} \qquad (2.2)$$

$$-\frac{d\Omega}{dy} + \frac{M}{EI} = 0 \qquad \text{Kinematik denklem} \qquad (2.3)$$

$$-\frac{dw}{dy} - \Omega + \frac{Q}{GA} = 0 \qquad \text{Kinematik denklem} \qquad (2.4)$$

$$Q_0 = \hat{Q}_0 \qquad \text{Dinamik sınır koşulu} \qquad (2.5)$$

$$M_0 = \hat{M}_0 \qquad \text{Dinamik sınır koşulu} \qquad (2.6)$$

$$-\Omega_0 = -\hat{\Omega}_0 \qquad \text{Geometrik sınır koşulu} \qquad (2.7)$$

$$-w_0 = -\hat{w}_0 \qquad \text{Geometrik sınır koşulu} \qquad (2.8)$$

Şapkalı terimler bilinen değerlere karşılık gelmektedir. Denklemlerin tamamı aşağıdaki gibi operatör formunda yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\,\mathbf{u} - \mathbf{f} \qquad (2.9)$$

Q operatörü lineer denklem takımı halinde gösterilirse

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dy} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} & -\frac{1}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{dy} & 1 & 0 & -\frac{1}{GA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} w \\ \Omega \\ M \\ Q \\ \hdashline w_0 \\ \Omega_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline -\hat{Q}_0 \\ -\hat{M}_0 \\ \hat{\Omega}_0 \\ \hat{w}_0 \end{array}\right] \qquad (2.10)$$

Q operatörüne ait fonksiyonelin bulunabilmesi için, Q nun potansiyel operatör olması gerekir. Bunun için de aşağıdaki koşul sağlanmalıdır, [2].

$$< d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}})\,,\mathbf{u}^{*} > \;=\; < d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\mathbf{u}^{*}),\;\bar{\mathbf{u}}\; > \tag{2.11}$$

Buradaki tırnak parantez içindeki ifadelerin iç çarpımını gösterip $\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^{*}$ vektörleri **u'** nun içinde bulunduğu uzayın elemanlarıdır. $d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}})$ ve $d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\mathbf{u}^{*})$ ise Q operatörünün Gâteaux türevleri olup, aşağıdaki gibi gösterilebilir, [2].

$$d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}}) \;=\; \left.\frac{\partial\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u}+\tau\,\bar{\mathbf{u}})}{\partial\,\tau}\right|_{\tau\,=\,0} \tag{2.12}$$

Bu tanım gereği (2.11) ifadesi açık şekilde yazılırsa

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{d\bar{Q}}{dy} \\ -\dfrac{d\bar{M}}{dy} + \bar{Q} \\ -\dfrac{d\bar{\Omega}}{dy} + \dfrac{\bar{M}}{EI} \\ -\dfrac{d\bar{w}}{dy} - \bar{\Omega} + \dfrac{\bar{Q}}{GA} \\ \bar{Q} \\ \bar{M} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \qquad d\mathbf{Q}(\mathbf{u};\mathbf{u}^{*}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{dQ^{*}}{dy} \\ -\dfrac{dM^{*}}{dy} + Q^{*} \\ -\dfrac{d\Omega^{*}}{dy} + \dfrac{M^{*}}{EI} \\ -\dfrac{dw^{*}}{dy} - \Omega^{*} + \dfrac{Q^{*}}{GA} \\ Q^{*} \\ M^{*} \\ \Omega^{*} \\ w^{*} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} < d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}})\,,\mathbf{u}^{*} > \;=\; & -\left[\bar{Q}',w^{*}\right]-\left[\bar{M}',\Omega^{*}\right]+\left[\bar{Q},\Omega^{*}\right]+\left[\bar{\Omega}',M^{*}\right]-\left[\frac{\bar{M}}{EI},M^{*}\right] \\ & +\left[\bar{w}',Q^{*}\right]+\left[\bar{\Omega},Q^{*}\right]-\left[\frac{\bar{Q}}{GA},Q^{*}\right]+\left[\bar{Q},w_{0}^{*}\right]_{\sigma}+\left[\bar{M},\Omega_{0}^{*}\right]_{\sigma} \\ & +\left[\bar{\Omega},M_{0}^{*}\right]_{\varepsilon}-\left[\bar{w},Q_{0}^{*}\right]_{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$< d\,\mathbf{Q}\ (\mathbf{u};\mathbf{u}^*)\ ,\bar{\mathbf{u}} > = -\left[Q^{*}{}',\bar{w}\right]-\left[M^{*}{}',\bar{\Omega}\right]+\left[Q^{*},\bar{\Omega}\right]+\left[\Omega^{*}{}',\bar{M}\right]-\left[\frac{M^{*}}{EI},\bar{M}\right]$$

$$+\left[w^{*}{}',\bar{Q}\right]+\left[\Omega^{*},\bar{Q}\right]-\left[\frac{Q^{*}}{GA},\bar{Q}\right]+\left[Q^{*},\bar{w}_0\right]_{\sigma}+\left[M^{*},\bar{\Omega}_0\right]_{\sigma}$$

$$+\left[\Omega^{*},\bar{M}_0\right]_{\varepsilon}-\left[w^{*},\bar{Q}_0\right]_{\varepsilon} \qquad (2.15)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada köşeli parantezler bölgedeki iç çarpımı göstermektedir. $f = f(y)$ ve $g = g(y)$ bölgede tanımlı iki fonksiyon olarak kabul edilirse bunların iç çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanabilir,[2].

$$[f,g]=\int_0^L f\ g\ \ dz \qquad (2.16)$$

$[f,g]_0 = f\,.\,g$ Dinamik ve geometrik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli (2.17)

$[f,g]_{\sigma} = f\,.\,g$ Dinamik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli (2.18)

$[f,g]_{\varepsilon} = f\,.\,g$ Geometrik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli (2.19)

gerekli işlemler yapıldığında (2.11) eşitliğinin sağlandığı, böylece **Q** operatörünün potansiyel operatör olduğu görülür. Buna ait potansiyel aşağıdaki ifadeye göre elde edilir,[2].

$$I(\mathbf{u})=\int_0^1 < \mathbf{Q}\ (s\,\mathbf{u})\ ,\mathbf{u}\ > \ ds \qquad (2.20)$$

denklemdeki ‘s’ skaler bir büyüklüktür.

$$I(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}[Q',w]-[q,w]-\frac{1}{2}[(M'-Q),\Omega]+\frac{1}{2}\left[(\Omega'-\frac{M}{EI}),M\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[(w'+\Omega-\frac{Q}{GA}),Q\right]+\frac{1}{2}[Q,w]_{\sigma}-\left[\overset{)}{Q},w\right]_{\sigma}+\frac{1}{2}[M,\Omega]_{\sigma}$$

$$-\left[\hat{M},\Omega\right]_{\sigma}-\frac{1}{2}[\Omega,M]_{\varepsilon}+\left[\overset{)}{\Omega},M\right]_{\varepsilon}-\frac{1}{2}[w,Q]_{\varepsilon}+[\overset{)}{w},Q]_{\varepsilon} \qquad (2.21)$$

Yukarıdaki potansiyel bağıntısındaki iki terim aşağıdaki gibi ifade edilirse

$$-\frac{1}{2}[Q', w\,] = -\frac{1}{2}[\,Q, w]_0 + \frac{1}{2}[Q\,, w\,']$$

$$-\frac{1}{2}[M\,', \Omega\,] = -\frac{1}{2}[M\,, \Omega\,]_0 + \frac{1}{2}[M\,, \Omega\,'] \qquad (2.22)$$

Bu ifadeler (2.21) bağıntısında yerine konursa fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I(\mathbf{u}) = [Q, w'] - [q, w] + [M\,, \Omega\,'] + [\Omega\,, Q\,] - \frac{1}{2}\left[\frac{M}{EI}, M\,\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{GA}, Q\,\right]$$

$$- \left[\overset{)}{Q}, w\right]_\sigma - \left[\hat{M}\,, \Omega\,\right]_\sigma - \left[(\Omega\, - \overset{)}{\Omega}), M\,\right]_\varepsilon + [(w - \overset{)}{w}), Q\,]_\varepsilon \qquad (2.23)$$

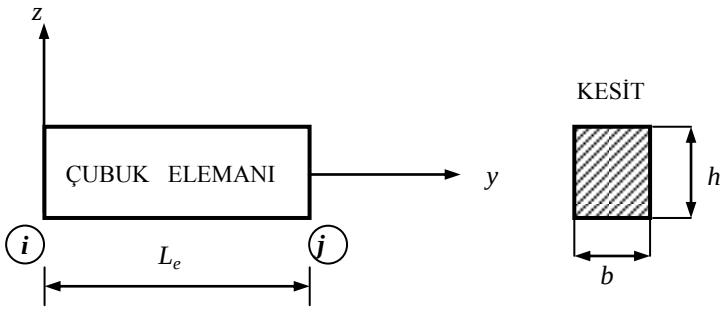
2.2. Sabit Kesitli Çubuk İçin Sonlu Eleman Formülasyonu

2.2.1 Statik analiz

Önceki bölümde elde edilen fonksiyoneli ekstremum yapan değişkenlerin bulunabilmesi için fonksiyonelin bu değişkenlerin interpolasyon fonksiyonlarının bilinmeyenlerine göre türevinin sıfır olması gerekir, [2].

$$\frac{\partial I}{\partial X_i} = 0 \qquad \text{i = 1,2,3.....n} \qquad (2.24)$$

Bu koşul her değişken için uygulanırsa değişken sayısı kadar doğrusal denklem bulunur. Fonksiyoneldeki değişkenler içinde en fazla birinci dereceden türev sözkonusu olduğu için tamlık ve süreklilik açısından doğrusal şekil fonksiyonları seçilebilir.



Şekil 2.2 Sabit kesitli çubuk için koordinat sistemi ve sonlu eleman

$$\phi_i = 1 - \frac{y}{L} \quad , \quad \phi_j = \frac{y}{L} \tag{2.25}$$

seçilmek üzere şekil fonksiyonları

$$M = M_i \phi_i + M_j \phi_j$$

$$Q = Q_i \phi_i + Q_j \phi_j$$

$$\Omega = \Omega_i \phi_i + \Omega_j \phi_j$$

$$w = w_i \phi_i + w_j \phi_j$$

$$q = q_i \phi_i + q_j \phi_j \tag{2.26}$$

olarak kabul edilip (2.24) bağıntısında yerine konulur. Elde edilen alt matrisler;

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{L_e}{3} & \frac{L_e}{6} \\ \frac{L_e}{6} & \frac{L_e}{3} \end{bmatrix} \quad , \quad [k_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

şeklinde gösterilirse bilinmeyen matrisi, eleman rijitlik matrisi ve yük matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\{u\}^T = \{M_i \quad M_j \quad Q_i \quad Q_j \quad \Omega_i \quad \Omega_j \quad w_i \quad w_j\} \tag{2.28}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{EI}[k_1] & [0] & [k_2] & [0] \\ & -\frac{1}{GA}[k_1] & [k_1] & [k_2] \\ & & [0] & [0] \\ & \text{simetrik} & & [0] \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} [0] \\ \\ [0] \\ \\ [0] \\ \\ [k_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \\ q_j \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

2.2.2 Dinamik analiz

Yapı sistemlerinin doğal frekanslarının bulunurken problem standart özdeğer problemine dönüştürülür, [3].

$$[K_e] - \omega^2 [M_e] = \{0\} \tag{2.31}$$

Eleman rijitlik matrisi $[K]$ önceki bölümde bulunmuştu. Eleman kütle matrisi $[M]$ bulunurken fonksiyoneldeki yük terimi aşağıdaki gibi alınır, [9].

$$[q, w] = \frac{1}{2} \bar{\rho} \omega^2 [w, w] \tag{2.32}$$

(2.24) teki bağıntısı uygulandığında eleman kütle matrisi

$$[M] = \rho h [k_1] \tag{2.33}$$

olarak bulunur. Global sistem matrisi oluşturulduğunda (2.31) denklemi

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{2.34}$$

haline dönüşür.Buradaki $\{f\}$ global matrisin moment, kesme kuvveti ve dönme bilinmeyenleri, $\{w\}$ çökme bilinmeyenlerini göstermektedir. (2.34) denklemi geleneksel birleştirme tekniği uygulanarak, [9]

$$[K^*] = [K_{22}] - [K_{12}]^T [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \tag{2.35}$$

$[K^*]$ bulunur. (2.36) deki özdeğer problemi elde edilir.

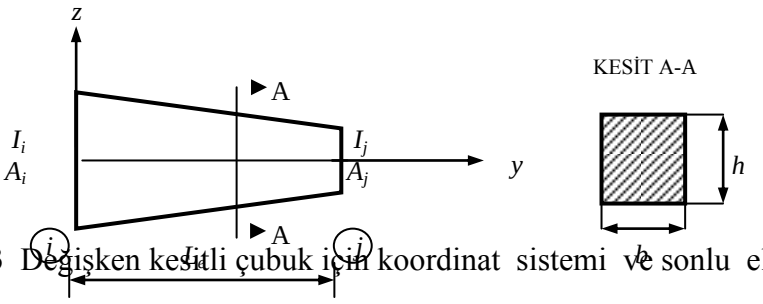
$$\left([K^*] - \omega^2 [M] \right) \{ w \} = \{ 0 \} \tag{2.36}$$

Bu özdeğer problemi çözülerek doğal frekanslar ve bunlara ait mod şekilleri bulunur.

2.3 Değişken Kesitli Çubuk İçin Sonlu Eleman Formülasyonu

2.3.1 Statik analiz

Doğru eksenli değişken kesitli çubuğun analizinde eleman matrisi, (2.23) fonksiyonelindeki Eğilme Rijitliği ve Kayma Rijitliğinin içinde bulunduğu terimler çubuk kesitine bağlı olarak değişeceğinden, her sonlu eleman için ayrı ayrı hesaplanmalıdır.



Şekil 2.3 Değişken kesitli çubuk için koordinat sistemi ve sonlu eleman

(2.26) de elde edilen interpolasyon fonksiyonlarına ek olarak aşağıdaki kabuller yapılarak D ve F fonksiyonları yazılırsa;

$$D = \frac{1}{I} \quad , \quad F = \frac{1}{A} \tag{2.37}$$

$$D = D_i \phi_i + D_j \phi_j$$

$$F = F_i \phi_i + F_j \phi_j \tag{2.38}$$

Böylece (2.23) fonksiyonelindeki, bu terimler

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{MD}{E}, M \right] = -\frac{1}{2E} \int_0^L M^2 D \, dx$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{Q\,F}{G}\,,Q\right]=-\frac{1}{2G}\int_0^L Q^2\;F\;dx \tag{2.39}$$

olarak bulunur ve (2.24) bağıntısında yerine konulursa yeni alt matrisler $[k_3]$ ve $[k_4]$ aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$[k_3]=\begin{bmatrix} L_e\left(\frac{D_i}{4}+\frac{D_j}{12}\right) & L_e\left(\frac{D_i+D_j}{12}\right) \\ L_e\left(\frac{D_i+D_j}{12}\right) & L_e\left(\frac{D_i}{12}+\frac{D_j}{4}\right) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$[k_4]=\begin{bmatrix} L_e\left(\frac{F_i}{4}+\frac{F_j}{12}\right) & L_e\left(\frac{F_i+F_j}{12}\right) \\ L_e\left(\frac{F_i+F_j}{12}\right) & L_e\left(\frac{F_i}{12}+\frac{F_j}{4}\right) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Böylece eleman rijitlik matrisi

$$[K]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{E}[k_3] & [0] & [k_2] & [0] \\ & -\frac{1}{G}[k_4] & [k_1] & [k_2] \\ & & [0] & [0] \\ & \text{simetrik} & & [0] \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

olarak bulunur. Yük matrisi ve bilinmeyen matrisi (2.29) ve (2.30) deki gibidir.

2. 3. 2 Dinamik analiz

Değişken kesitli çubuğun dinamik analizi yapılırken (2.31)‘ deki özdeğer probleminde (2.42)’de hesaplanan eleman rijitlik matrisi kullanılır. Kütle matrisi ise

$$[M]=\rho\left(\frac{h_i+h_j}{2}\right)[k_1] \tag{2.43}$$

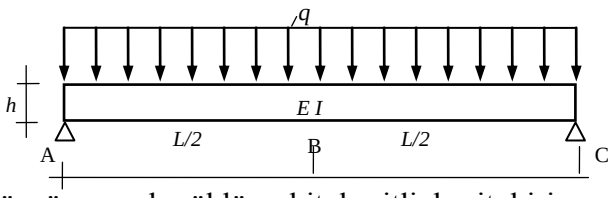
olarak elde edilir. $[K]$ ve $[M]$ sonlu eleman programı içinde her terim için ayrı ayrı otomatik olarak hesap edilip global sistem matrisi ve global kütle matrisi oluşturulur. Bunlar (2.36) 'deki özdeğer problemine dönüştürülüp çubuk kesit kuvvetleri, doğal frekansları ve mod şekilleri bulunur.

2.4 Doğru Eksenli Çubuklara Ait Uygulamalar

Bu bölümde sabit kesitli ve değişken kesitli çubukların statik ve dinamik analizini içeren sayısal uygulamalar yapılmıştır.

2.4.1 Sabit kesitli düzgün yayılı yüklü basit kiriş

Şekil 2.4 deki sabit kirişin orta noktasındaki moment ve çökme değerleri bilgisayar programı ile elde edilmiştir. Öncelikle kayma etkisi göz önünde bulundurularak değişik h kalınlıkları için çökme değerleri, sonraki aşamada kayma etkisi ihmal edilerek çökme ve moment değerleri bulunmuştur. Moment ve çökme (2.44) deki gibi ifade edilirse, β ve α değerleri tablo 2.1 deki gibi elde edilir. Problem çözülürken $\mu = 0.3$ alınmıştır.



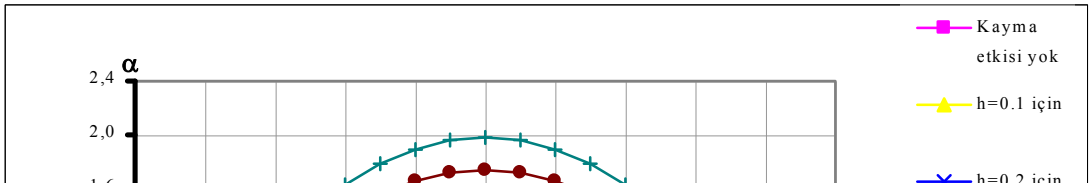
Şekil 2.4 Düzgün yayılı yüklü sabit kesitli basit kiriş

$$M = \beta q L^2 \qquad w = \alpha \frac{qL^4}{EI} \qquad (2.44)$$

Tablo 2.1 Basit kiriş için elde edilen α, β değerleri

Eleman Sayısı	Kayma Etkisi Göz Önüne Alındığında $\alpha_B \times 10^2$					$\alpha_B \times 10^2$	$\beta_B \times 10$
	h = 0.5 m	h = 0.4 m	h = 0.3 m	h = 0.2 m	h = 0.1 m	Her h için	Her h için
8	1,994	1,750	1,560	1,425	1,344	1,317	1,250
10	2,000	1,753	1,561	1,424	1,342	1,314	1,267
20	1,981	1,738	1,548	1,413	1,331	1,304	1,250
Kesin Çözüm	**1,979**	**1,735**	**1,546**	**1,410**	**1,329**	**1,302**	**1,250**
Kayma Etkisi %	34,2	25,0	15,8	7,7	2,0		

Programın 20 eleman için verdiği sonuçlar yeterli kesinliktedir. Elde edilen çökme sonuçları grafik halinde şekil 2.5 deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.5 Sabit kesitli basit kirişte farklı kalınlıklar için çökme grafiği

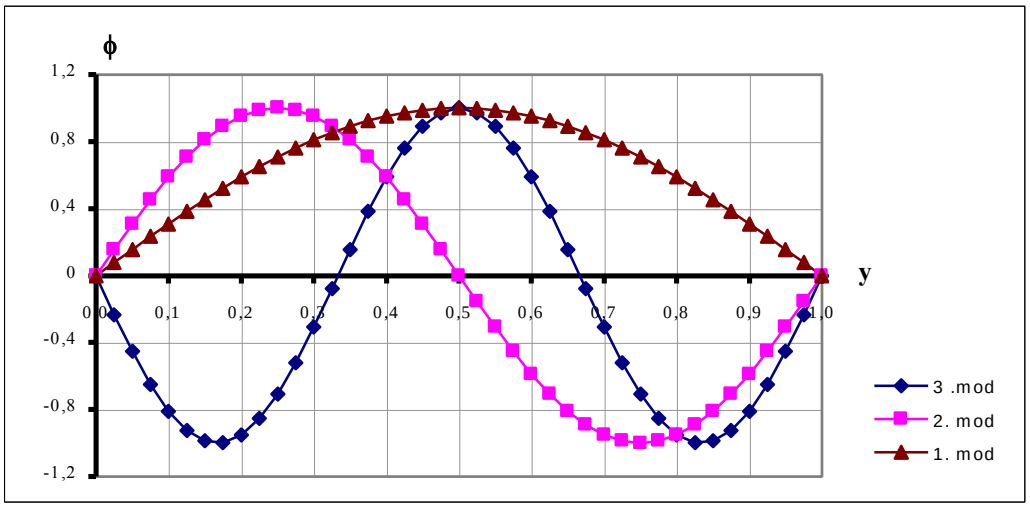
Çubuğun dinamik analizi yapılıp doğal frekanslar aşağıdaki gibi gösterilirse

$$\omega = \overline{\omega}\sqrt{EI / \overline{\rho} l^4} \tag{2.45}$$

Tablo 2.2 Basit kiriş için frekans parametreleri

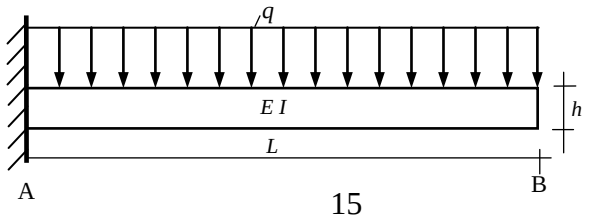
	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$
Kesin sonuç	9,870	39.478	88,826
Kayma etkisi yok	9,870	39.478	88,824
Kayma etkisi var	7,967	22.284	36,846

olarak bulunur ve mod şekilleri ise grafikteki gibidir.



Şekil 2.6 Basit kirişe ait mod şekilleri

2.4.2 Sabit kesitli düzgün yayılı yüklü konsol kiriş

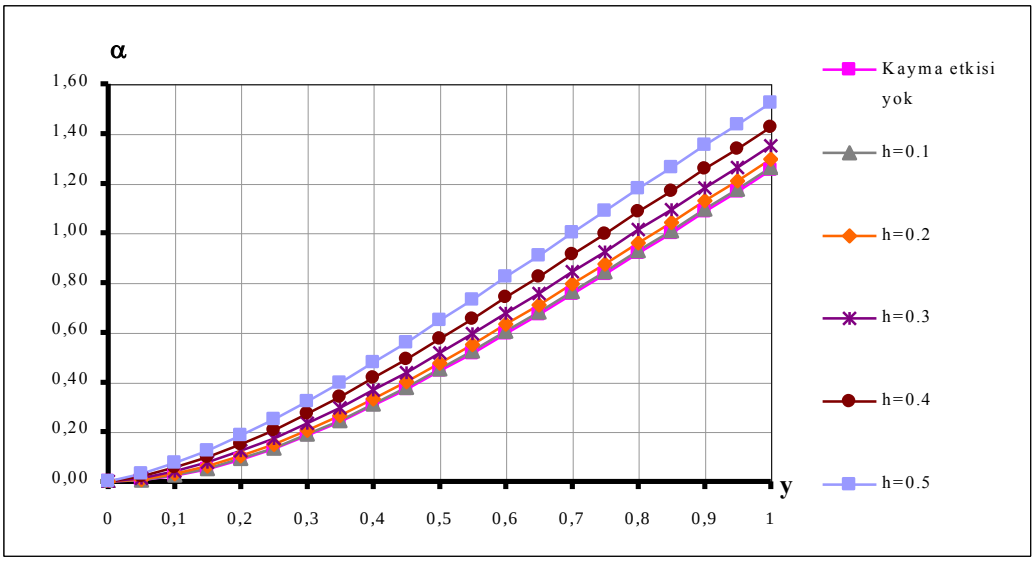


Şekil 2.7 Sabit kesitli üniform yüklü konsol kiriş

Şekil 2.7 deki konsol kiriş için program sonucunda elde edilen değerler aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 2.3 Konsol kiriş için göre elde edilen α, β değerleri

Eleman Sayısı	Kayma Etkisi Göz Önüne Alındığında α_B x 10					α_B x 10	β_A
	h = 0.5 m	h = 0.4 m	h = 0.3 m	h = 0.2 m	h = 0.1 m	Her h için	Her h için
4	1,567	1,470	1,394	1,340	1,307	1,296	-5,000
8	1,532	1,435	1,359	1,305	1,272	1,262	-5,000
10	1,528	1,431	1,355	1,301	1,268	1,257	-5,000
20	1,523	1,425	1,349	1,295	1,263	1,252	-5,000
Kesin Çözüm	**1,521**	**1,423**	**1,348**	**1,293**	**1,261**	**1,250**	**-5,000**
Kayma Etkisi %	17,8	12,2	7,2	3,3	0,9		



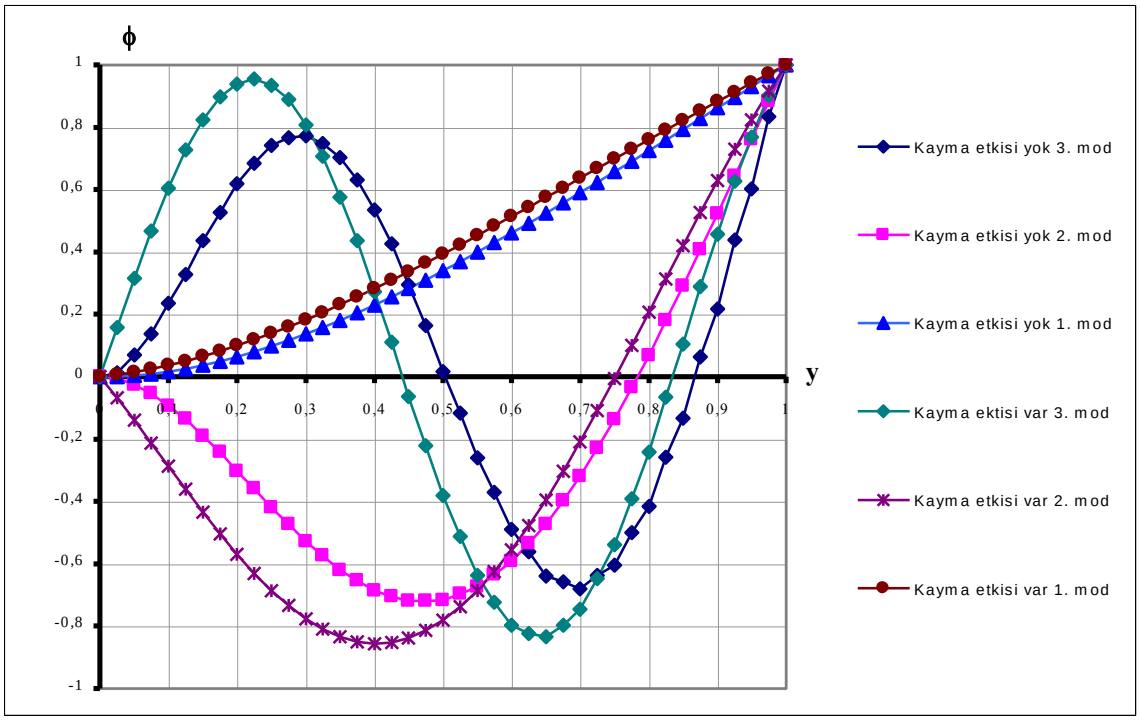
Şekil 2.8 Konsol kirişte çökme grafiği

Konsol kiriş için dinamik analiz yapıldığında aşağıdaki değerler bulunur. Kayma etkisi dikkate alınan kesit için $h = 0.5m$ arak kabul edilmiştir.

Tablo 2.4 Konsol kirişe ait frekans parametreleri

	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$
Kesin sonuç	3,516	22.034	61.701

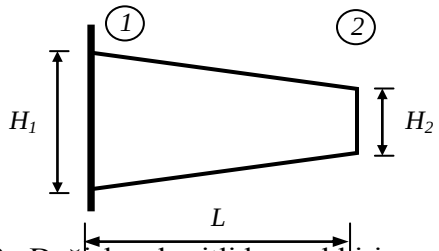
Kayma etkisi yok	3,515	22.034	61,722
Kayma etkisi var	3,138	13.357	28,129



Şekil 2.9 Konsol kirişe ait mod şekilleri

2.4.3 Değişken kesitli düzgün yayılı yüklü konsol kiriş

Bu bölümde öncelikle, ankastre ucundaki yüksekliği $h_1 = 0.6m$, diğer ucundaki yüksekliği $h_2 = 0.2m$ olan konsol kirişin ucundaki çökme değeri bulunmaktadır.



Şekil 2.10 Değişken kesitli konsol kiriş

Konsol kirişin ucundaki kesin çökme değeri aşağıdaki denklemin çözümü ile elde edilebilir.

$$w'' = \frac{q}{2EI_2}\int_L \frac{z^2}{(z + 2z/L)^3}\,dz \qquad (2.46)$$

Program sonucunda bulunan değerler $\alpha = w\, EI_2 / qL^4$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Tablo 2. 5 Değişken kesitli konsola ait çökme değerleri

α x100 kesin (m)	α x100 kayma etkisi yok (m)	α x100 kayma etkisi var (m)
0.81067	0.81214	1.00750

Programın değişken kesitli çubuk için bulduğu çökme değerinin kesin sonuca yakınlığı yukarıda tabloda gözlenebilmektedir. Bu tabloda programın elde ettiği sonuçların doğruluğu görülmektedir.

Programın farklı kiriş yükseklikleri için elde ettiği çökme sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir. Sonuçlar boyutsuz hale dönüştürülürken 1 nolu kesitteki değerler kullanılmıştır.

Tablo 2. 6 Değişken kesitli konsolda farklı için α değerleri

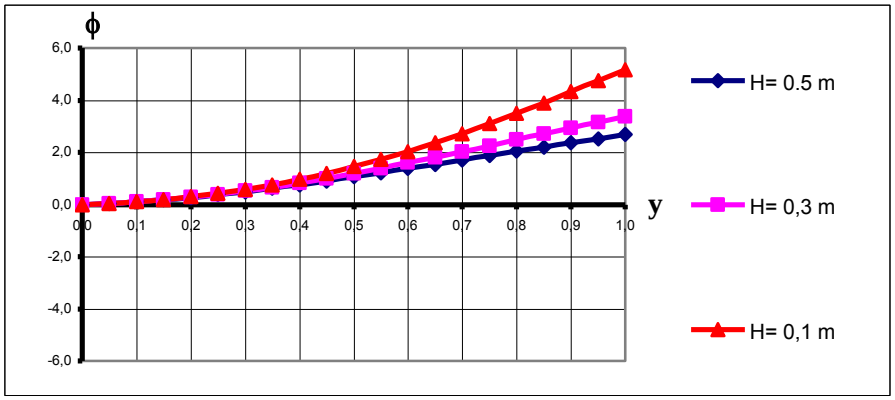
h_1(m)	h_2(m)	$\alpha_2 x10$ kayma etkisi var	$\alpha_2 x10$ kayma etkisi yok
0,5	0,5	1,522	1,252
0,5	0,3	1,982	1,667
0,5	0,1	3,080	2,677

Konsol kiri

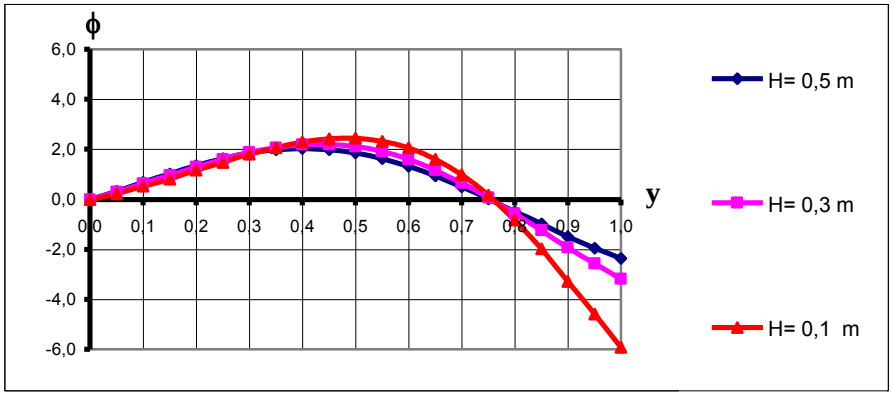
Tablo 2. 7 Değişken kesitli konsol kirişe ait frekans parametreleri

h_1(m)	h_2(m)	Kayma etkisi var			Kayma etkisi yok		
		$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$
0,5	0,5	3,138	13,357	28,126	3,515	22,035	61,720
0,5	0,3	3,363	12,777	26,351	3,700	19,104	50,343
0,5	0,1	3,891	11,848	23,180	4,289	15,660	36,480

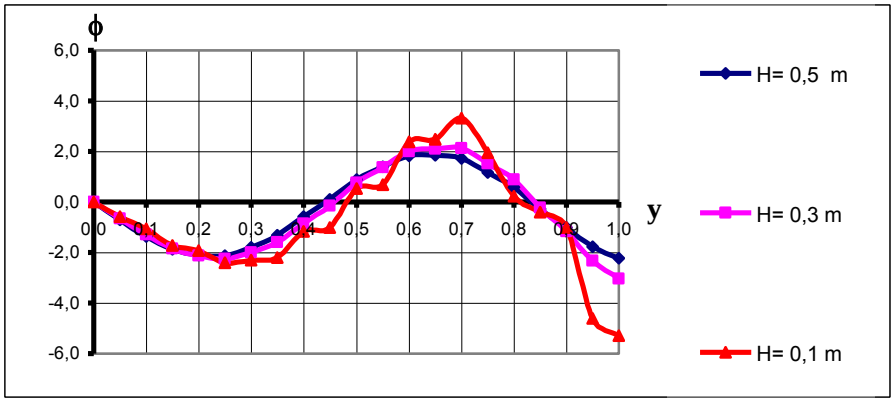
F elde edilen özvektörler kullanılarak mod şekilleri aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.11 Değişken kesitli konsol kirişte 1. moda ait grafik



Şekil 2.12 Değişken kesitli konsol kirişte 2. moda ait grafik

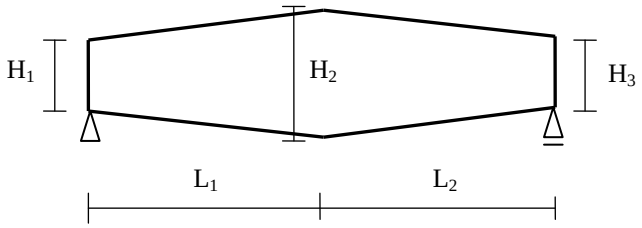


Şekil 2.13 Değişken kesitli konsol kirişte 3. moda ait grafik

2.4.4 Değişken kesitli düzgün yayılı yüklü basit kiriş

Aşağıdaki şekilde görülen değişken kesitli çubuk için yapılan analizde $L_1 = L_2$, $h_1 = h_3$ alınmıştır. Problem çözülürken $h_2 = 1\ m$, $L = 1\ m$, , $\rho = 1000\ N/m^3$, $E = 2\ 100\ 000\ N/m^2$, $\mu = 0.3$ kabul edilmiş, farklı k oranları için bulunan boyutsuz çökme değerleri ve doğal frekans parametreleri tabloda özetlenmiştir.

$$\alpha = w\, EI_2 / qL^4 \quad , \quad \overline{\omega} = \omega\sqrt{\overline{\rho}\; l^4 / EI_2} \quad , \quad k = \frac{(h_2 - h_1)}{h_2} \qquad (2.47)$$



Şekil 2.14 Değişken kesitli basit kiriş

Tablo 2. 8 Değişken kesitli basit kirişe ait α, ϖ değerleri

	k	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$	$\overline{\omega}_3$	α_2
Kayma etkisi yok	0,0	9,873	39,478	88,781	0,0130
	0,2	9,230	35,370	80,135	0,0157
	0,4	8,459	30,875	71,090	0,0197
	0,6	7,478	25,748	61,260	0,0269
Kayma etkisi var	0,0	-	12,771	26,587	0,0401
	0,2	5,286	12,580	19,540	0,0470
	0,4	4,934	12,222	19,282	0,0572
	0,6	4,470	11,546	18,902	0,0744

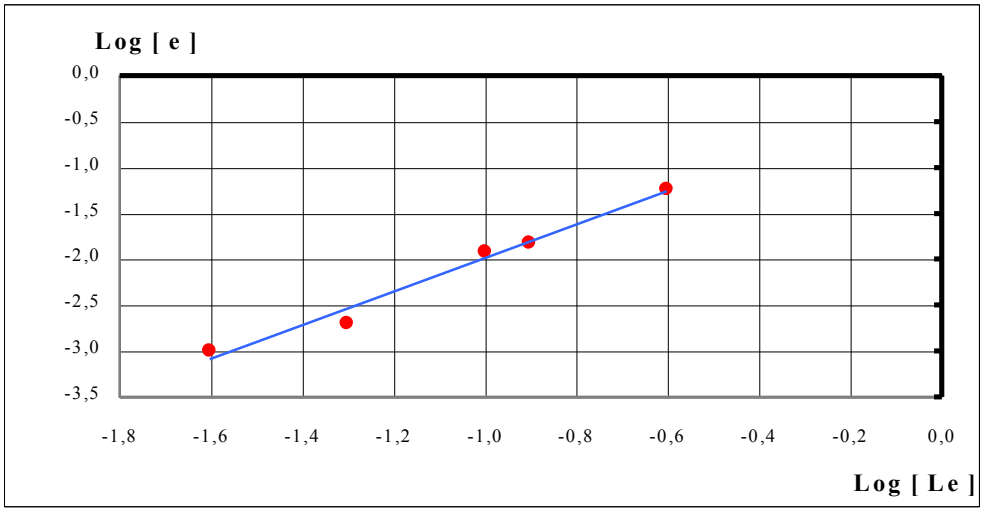
2.5 Reddy Hata Analizi

Çubuk çözümünde yeteri derecede yaklaşıklık elde etmek için kullanılacak eleman sayısı Reddy hata analizi yapılarak bulunabilir. Sabit kesitli düzgün yayılı yüklü çubuk için kesin sonuçla yaklaşık sonuçlar arasındaki fark [[ε]] ile gösterilirse, hata analizi tablosu aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

Tablo 2.9 Reddy hata analizi

ELEMAN SAYISI	ELEMAN BOYU (Le)	$\alpha_{kesin}\, 10^2$	α x 10^2	$[[\varepsilon]]_0$	$\log [[\varepsilon]]_0$	$\log_{10}$ le
4	0.250	1.302	1.360	0.058	–1.237	–0.602
8	0.125	1.302	1.317	0.015	–1.824	–0.903
10	0.100	1.302	1.314	0.012	–1.921	–1.000
20	0.050	1.302	1.304	0.002	–2.699	–1.301
40	0.025	1.302	1.303	0.001	–3.000	–1.602

Şekil 2.15 de görülebileceği gibi parça sayısı artıkça kesin sonuca daha fazla yaklaşılmaktadır. Bu çalışmada kullanılan çubuk analizi programında 20 eleman kullanılması yaklaşım açısından uygun bulunmuştur.



Şekil 2.15 Reddy hata analizi

3. PLAK FONKSİYONELİNİN ÜRETİLMESİ

Plaklar bir boyutu (kalınlık), taşıyıcı yöndeki boyutları (dikdörtgen plakta uzunluk ve genişlik, dairesel plakta çap) karşısında daha küçük olan yapı elemanlarıdır. Plak kalınlığının yarısında bulunan noktaların oluşturduğu düzleme '*Plak orta düzlemi*' denir.

Elastik plakların gerilme ve şekil değiştirme durumlarının tanımlanabilmesi yüksek matematik ve mukavemet bilgisi gerektirir. Bu zorluğu aşmak için klasik plak teorisinde (3.1) deki basitleştirici kabuller yapılarak [4],

$$\sigma_z = 0\,, \quad \varepsilon_z = 0\,, \quad \gamma_{xz} = 0\,, \quad \gamma_{yz} = 0 \tag{3.1}$$

matematik elastisite denklemleri elde edilmiştir. Bu teori üzerine yeni yaklaşımlarda bulunarak farklı plak teorileri geliştirilmiştir.

Günümüzde kullanılan belli başlı plak yaklaşımından biri olan Kirchhoff Plağında çökmelerin kalınlık mertebesini aşmaz ve kesme kuvveti etkisi gözardı edilir. Çökmelerin büyük olduğu durumlar için Kàrmann Plağı yaklaşımı kullanılır. Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkileri hesaba katan Mindlin Plak Teorisinde, Bernoulli-Navier hipotezi geçerli olmayıp ve plağın ince olma zorunluluğu yoktur. Reissner Plak Teorisinde ise kesme kuvveti etkisi hesaba katılır. Bu teoride klasik plak teorisinden farklı olarak lateral gerilmeler $(\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ dikkate alınır.

Bu çalışmada Reissner Plak Yaklaşımı kullanılacaktır.

3.1. Reissner Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi

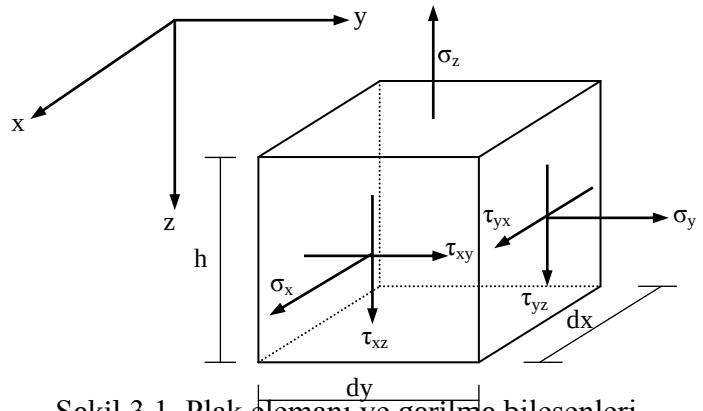
Reissner plak denklemlerinin elde edilmesi önce yapılan kabuller aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. Malzeme lineer elastiktir.

2. İç kuvvet denge denklemlerinde hacim kuvvetleri ihmal edilir.

3. Bernaulli-Navier Hipotezi geçerlidir. Şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan ve düzlem olan kesitler şekil değiştirmeden sonrada düzlem kalırlar ve orta düzleme diktirler.

Plak orta düzlemin x-y düzlemi içinde olması ve gerilme bileşenlerinin Şekil 3.1 deki gibi gösterilmesi koşuluyla,



Şekil 3.1 Plak elemanı ve gerilme bileşenleri

Reissner plak elemanında kalınlık boyunca gerilme bileşenlerinin dağılımı, klasik teorideki gerilme ifadelerinde bulunan nonlineer terimler ihmal edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir, [5]. $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ gerilme bileşenleri $z = \pm\ h/2$ için extremum değerleri alır.

$$\sigma_x = \frac{12 M_x}{h^3} z, \qquad \sigma_y = \frac{12 M_y}{h^3} z, \qquad \tau_{xy} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} z \tag{3.2}$$

τ_{xz}, τ_{yz} kayma gerilmelerinin $z = \pm\ h/2$ için sıfır olmasından faydalanılarak ,

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2h} Q_x \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \qquad \tau_{yz} = \frac{3}{2h} Q_y \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilebilir. (3.2) ve (3.3) ifadeleri aşağıdaki denge denkleminde yerine konursa σ_z in kalınlık boyunca değişimi,

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \tag{3.4}$$

$$\sigma_z = -\frac{q}{4}\left[2 - 3\left(\frac{2z}{h}\right) + \left(\frac{2z}{h}\right)^3\right] \tag{3.5}$$

şeklinde bulunur.

Reissner plak elemanı için düşey yer değiştirme bileşeni $\overline{w} = \overline{w}(x, y, z)$, yatay yer değiştirme bileşenleri $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ ile gösterilmek üzere gerilme şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir, [4].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right]$$

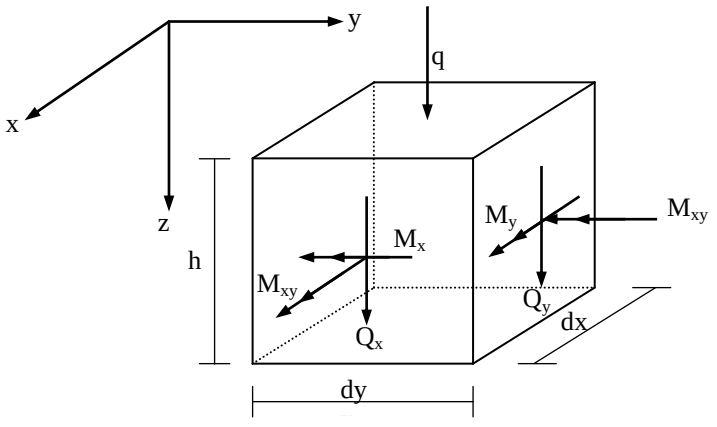
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \tag{3.6}$$

Plak kesit tesirleri ve eksen takımı Şekil (3.2) deki gibi gösterilmek üzere



Şekil 3.2 Plak elemanı ve kesit tesirleri

Plak gerilme bağıntılarından plak moment ve kesme kuvvetleri

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\, dz\,, \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z\, dz\,, \qquad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\, dz$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z\, dz\,, \qquad Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} z\, dz\,, \qquad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} z\, dz \tag{3.7}$$

şeklinde elde edilir. Şekil 3.2 ye göre denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \tag{3.8}$$

Plağın orta düzlemin çökmesi $w(x,y)$, orta düzleme dik kesitlerin ortalama dönmeleri Ω_x, Ω_y olarak gösterilmek üzere, iç kuvvetlerin yaptıkları işler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$M_x \Omega_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x u\, dz\,, \qquad M_y \Omega_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y v\, dz\,, \qquad M_{xy} \Omega_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} u\, dz$$

$$M_{xy} \Omega_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} v\, dz\,, \qquad Q_x w = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \overline{w}\, dz\,, \qquad Q_y w = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \overline{w}\, dz \tag{3.9}$$

(3.2), (3.3) te elde edilen gerilme bileşenleri, (3.9) daki ifadelerde yerine konulursa

$$\Omega_x = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} uz\ dz$$

$$\Omega_y = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} vz\ dz$$

$$w = \frac{3}{2h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{w}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] dz \qquad (3.10)$$

(3.10) daki ilk iki denklemin diferansiyelini alıp, (3.6) daki ifadeleri yerine konursa

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} z\ dz = \frac{12}{Eh^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right] z\ dz$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} z\ dz = \frac{12}{Eh^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z\right] z\ dz \qquad (3.11)$$

(3.5) denklemi (3.12) de integre edilirse,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z z\ dz = -\frac{q}{4}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(2-3\left(\frac{2z}{h}\right)+\left(\frac{2z}{h}\right)^3\right) dz = \frac{1}{10} qh^2 \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} = \frac{12}{Eh^3}\left[M_x - \mu M_y - \mu q\frac{h^2}{10}\right]$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} = \frac{12}{Eh^3}\left[M_y - \mu M_x - \mu q\frac{h^2}{10}\right] \qquad (3.13)$$

bulunur, parantez içindeki üçüncü terim mertebe açısından küçük olduğu için ihmal edilebilir. (3.10) daki ilk iki denklemin diferansiyelini alıp (3.6) ve (3.9) kullanılırsa

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) z\ dz =$$

$$\frac{24(1+\mu)}{Eh^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\ dz = \frac{24(1+\mu)}{Eh^3} M_{xy} \qquad (3.14)$$

bulunur. (3.10) daki üçüncü denklem integre edilirse

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial u}{\partial z}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] z\, dz = \frac{2h}{3}\Omega_x$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial v}{\partial z}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] z\, dz = \frac{2h}{3}\Omega_y \qquad (3.15)$$

ve (3.6) , (3.10) kullanılarak

$$\Omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6Q_x}{5Gh}$$

$$\Omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6Q_y}{5Gh} \qquad (3.16)$$

denklemlerine ulaşılır. (3.17) deki kısaltmalar yapılırsa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{Laplace operatörü}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)} \qquad \text{Plak rijitliği}$$

$$G = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)} \qquad \text{Kayma modülü} \qquad (3.17)$$

Reissner plak elemanı için kesit tesirleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{h^2}{10}\frac{\mu}{(1-\mu)}q \qquad (3.17.a)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{h^2}{10}\frac{\mu}{(1-\mu)}q \qquad (3.17.b)$$

$$M_{xy} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)(1-\mu) + \frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}\right) \qquad (3.17.c)$$

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \frac{h^2}{10}\Delta Q_x - \frac{h^2}{10(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial x}q \qquad (3.18.a)$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + \frac{h^2}{10}\Delta Q_y - \frac{h^2}{10(1-\mu)}\frac{\partial}{\partial y}q \qquad (3.18.b)$$

$$D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10}\frac{(2-\mu)}{(1-\mu)}\Delta q \qquad (3.19)$$

3.2. Reissner Plak Fonksiyonelinin Elde Edilmesi

[7] çalışmasında elde edilen fonksiyonel bulunurken kullanılacak denklemler aşağıda özetlenmiştir.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} = \frac{12}{Eh^3}\left[M_x - \mu M_y - \frac{h^2}{10}\mu q \right]$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} = \frac{12}{Eh^3}\left[M_y - \mu M_x - \frac{h^2}{10}\mu q \right]$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} = \frac{24(1+\mu)}{Eh^3} M_{xy}$$

$$\Omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6Q_x}{5Gh}$$

$$\Omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6Q_y}{5Gh} \qquad (3.20)$$

(2.5) – (2.8) de belirtilen dinamik ve geometrik sınır koşulları

$$\begin{aligned} Q_0 &= \hat{Q}_0 \\ M_0 &= \hat{M}_0 \\ -\Omega_0 &= -\hat{\Omega}_0 \\ -w_0 &= -\hat{w}_0 \end{aligned} \qquad (3.21)$$

şeklinde gösterilir. Denklemlerin tamamı operatör formunda gösterilse

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\,\mathbf{u} - \mathbf{f} \qquad (3.22)$$

Q operatörü aşağıdaki gibi lineer denklem takımı halinde sunulabilir.

$$\left[\begin{array}{cccccccc:cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{17} & L_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & L_{24} & 0 & L_{26} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L_{35} & L_{36} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_{42} & 0 & L_{44} & L_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L_{53} & L_{54} & L_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_{62} & L_{63} & 0 & 0 & L_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L_{71} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L_{81} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} w \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ \hdashline w_0 \\ \Omega_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} q \\ 0 \\ 0 \\ A \\ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \hat{Q}_0 \\ \hat{M}_0 \\ -\Omega_0 \\ -\hat{w}_0 \end{array}\right] \qquad (3.23)$$

L katsayılar matrisindeki terimler aşağıda gösterilmiştir.

$$L_{42} = L_{63} = L_{71} = \frac{\partial}{\partial x} \qquad L_{17} = L_{24} = L_{36} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{53} = L_{62} = L_{81} = \frac{\partial}{\partial y} \qquad L_{18} = L_{26} = L_{35} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{45} = L_{54} = \mu \frac{12}{Eh^3}, \qquad L_{44} = L_{55} = -\frac{12}{Eh^3}$$

$$L_{77} = L_{88} = -\frac{6}{5Gh}, \qquad L_{66} = -\frac{12}{Gh^3}, \qquad A = -\frac{12\,\mu q}{10\,Eh} \qquad (3.24)$$

Q operatörünün potansiyel olabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir.

$$< d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}})\,,\mathbf{u}^* > = < d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\mathbf{u}^*),\,\bar{\mathbf{u}} > \qquad (3.25)$$

(2.12) deki Gâteaux türev tanımı kullanılarak (3.25) deki iç çarpımlar yazıldığında Q operatötünün potansiyel olduğu görülür.

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^1 < \mathbf{Q}\,(s\,\mathbf{u})\,,\mathbf{u} > ds \qquad (3.26)$$

ifadesi kullanılarak plak fonksiyoneli aşağıdaki gibi elde edilir.

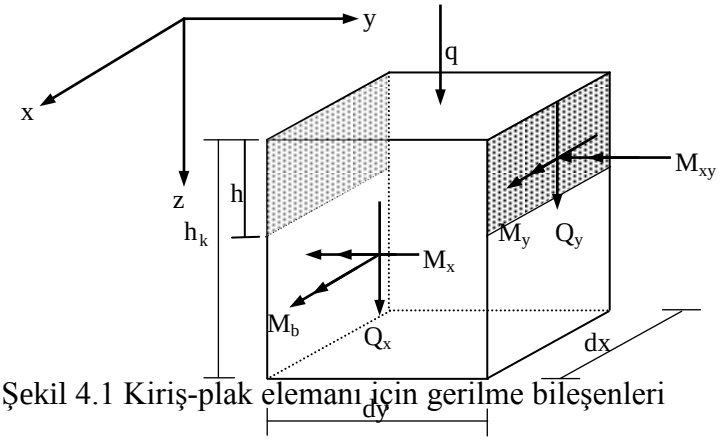
$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u}) = &-\left[\left(Q_{x,x} + Q_{y,y}\right), w\right] - \left[\left(M_{x,x} + M_{xy,y}\right) - \Omega_x\right] - \left[\left(M_{y,y} + M_{xy,x}\right) - \Omega_y\right] \\
&- \frac{6}{Eh^3}\left\{\left[M_x, M_x\right] + \left[M_y, M_y\right] + 2(1+\mu)\left[M_{xy}, M_{xy}\right] - 2\mu\left[M_x, M_y\right]\right\} \\
&+ \left[Q_y, \Omega_y\right] + \left[Q_x, \Omega_x\right] - \frac{3}{5Gh}\left\{\left[Q_x, Q_x\right] + \left[Q_y, Q_y\right]\right\} - \left[q, w\right] \\
&+ \frac{6\mu}{5Eh}\left\{\left[q, M_x\right] + \left[q, M_y\right]\right\} + \left[\left(Q, \hat{Q}\right), w\right]_\sigma + \left[\left(M, \hat{M}\right), \Omega\right]_\sigma \\
&+ \left[\hat{\Omega}, M\right]_\varepsilon + \left[\hat{w}, Q\right]_\varepsilon
\end{aligned}
\qquad (3.27)
$$

4. KİRİŞ-PLAK FONKSİYONELİNİN ÜRETİLMESİ

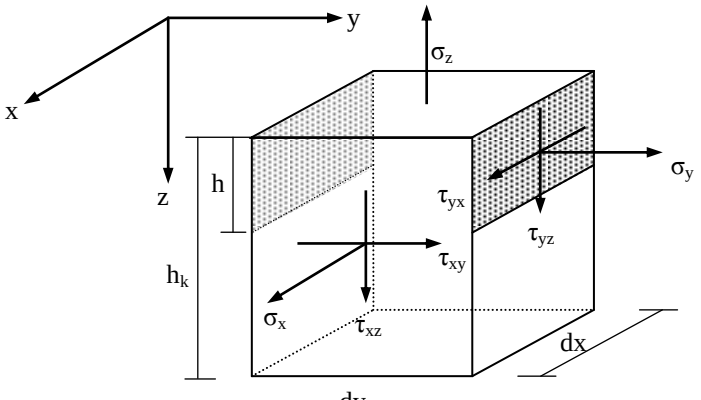
Bu bölümde takviyeli plakların analizi için plak ve kiriş birbirinden bağımsız olarak düşünülmüş bunun içinde kiriş-plak elemanı için [7] çalışmasında elde edilen fonksiyonel kullanılmıştır. Bu fonksiyonel aşağıdaki yol izlenerek elde edilmiştir.

4.1 Kiriş-Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi

Kiriş-plak denklemleri elde edilirken Reissner plağı için yapılan kabuller geçerli olup, kiriş-plak elemanı için gerilme bileşenleri ve kesit tesirleri aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 4.1 Kiriş-plak elemanı için gerilme bileşenleri



Şekil 4.2 Kiriş-plak elemanı için kesit tesirleri

Kiriş-plak elemanına dik etkiyen eğilme momentinin oluşturduğu burulma momenti de dikkate alınmıştır. Bunun sonucu olarak bilinmeyen sayısı dokuza çıkmıştır.

Kiriş-plak elemanının plaktan bağımsız olduğu ve y ekseni doğrultusunda tek bir eleman olduğu düşünülürse farklı doğrultudaki eğilme momentlerinin birbirine etkisi olmayacağından $\mu = 0$ olarak alınır.

Bu kabuller ve üçüncü bölümde bulunan denklemler göz önünde bulundurularak Şekil 4.2 için kiriş-plak denklemleri

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{12}{Eh_k^3} M_x = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} - \frac{12}{Eh^3} M_y = 0$$

$$\Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6Q_x}{5Gh_k} = 0$$

$$\Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{6Q_y}{5Gh} = 0 \qquad (4.1)$$

şeklinde özetlenebilir. Kirişteki burulma momenti M_b ' nin ayrı olarak bulunabilmesi için plak elemanındaki (3.14) ifadesi M_b ve M_{xy} burulma momentleri olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{12(1+\mu)}{Eh^3} M_{xy} = 0 \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{12(1+\mu)}{Eh_k^3} M_b = 0 \qquad (4.3)$$

(4.3) denkleminde en elverişsiz burulma momentinin bulunması için atalet momentinin küçük olması gerekir. Bu yüzden paydada, kiriş yüksekliği h_k ile kiriş genişliği b nin hangisi küçükse o yer alır, [7].

4.2 Kiriş-Plak Fonksiyonelinin Elde Edilmesi

Önceki bölümde elde edilen kiriş-plak denklemlerine (3.21) deki dinamik ve geometrik sınır koşulları eklenirse **Q** operatörü açık şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc:cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{18} & L_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & L_{24} & 0 & 0 & L_{27} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L_{35} & L_{36} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_{42} & 0 & L_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L_{53} & 0 & L_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & L_{63} & 0 & 0 & L_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & L_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L_{81} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L_{91} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} w \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ M_x \\ M_y \\ M_b \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ \hdashline w_0 \\ \hat{M}_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \hat{Q}_0 \\ \hat{M}_0 \\ -\hat{\Omega}_0 \\ -\hat{w}_0 \end{array}\right] \qquad (4.4)$$

L katsayılar matrisindeki terimler aşağıda gösterilmiştir.

$$L_{18} = L_{36} = L_{24} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_{42} = L_{63} = L_{81} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{19} = L_{27} = L_{35} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad L_{53} = L_{72} = L_{91} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_{44} = -\frac{12}{Eh_k^{\,3}}, \qquad L_{55} = -\frac{12}{Eh^3}$$

$$L_{66} = -\frac{12}{Gh_k^{\,3}}, \qquad L_{77} = -\frac{12}{Gh^3}$$

$$L_{88} = -\frac{6}{5Gh_k}, \qquad L_{99} = -\frac{6}{5Gh} \qquad (4.5)$$

(2.11) deki bağıntı yazılırsa

$$< d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\bar{\mathbf{u}})\,,\mathbf{u}^{*} > = < d\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{u};\mathbf{u}^{*}),\,\bar{\mathbf{u}}\, > \qquad (4.6)$$

Q nun potansiyel operatör olduğu görülür. (2.21) ifadesi kullanılarak

$$I(\mathbf{u}) = \int_{0}^{1} < \mathbf{Q}\,(s\,\mathbf{u})\,,\mathbf{u}\, > \, ds \qquad (4.7)$$

aşağıdaki kiriş-plak fonksiyoneli elde edilir.

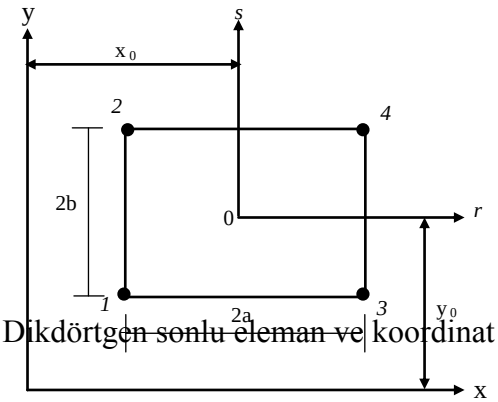
$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}) = &-\left[\left(Q_{x,x} + Q_{y,y}\right),w\right] - \left[\left(M_{x,x} + M_{xy,y}\right) - \Omega_{x}\right] - \left[\left(M_{y,y} + M_{b,x}\right) - \Omega_{y}\right] \\ &+ \left[Q_{y},\Omega_{y}\right] + \left[Q_{x},\Omega_{x}\right] - \frac{6}{Eh^{3}_{k}}\left\{\left[M_{x},M_{x}\right] + \left(1+\mu\right)\left[M_{b},M_{b}\right]\right\} \\ &- \frac{6}{Eh^{3}}\left\{\left[M_{y},M_{y}\right] + \left(1+\mu\right)\left[M_{xy},M_{xy}\right]\right\} - \frac{3}{5Gh_{k}}\left[Q_{x},\,Q_{x}\right] \\ &- \frac{3}{5Gh}\left[Q_{y},\,Q_{y}\right] - \left[q\,,w\right] + \left[\left(Q,\,\hat{Q}\right),\,w\right]_{\sigma} + \left[\left(M,\,\hat{M}\right),\,\Omega\right]_{\sigma} \\ &+ \left[\hat{\Omega}\quad,M\right]_{\varepsilon} + \left[\hat{w}\;,\;\;Q\right]_{\varepsilon} \end{aligned} \qquad (4.8)$$

5. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Sonlu eleman formülasyonu yapılırken değişik sonlu eleman tiplemeleri yapılabilir. İki boyutlu sonlu eleman dikdörtgen veya üçgen olarak seçilebildiği gibi bu tipler için lineer, quadratik ve kübik düzende nokta tanımlaması yapılabilir.Bunun için sonlu eleman fonksiyonelinin içinde bulunan en büyük türev derecesine bakılır ve buna göre şekil fonksiyonu belirlenir.

5.1 Sonlu Eleman ve Şekil Fonksiyonları

Bu çalışmada sonlu eleman tipi olarak Şekil 5.1 deki dört nodlu dikdörtgen sonlu elemanı ' *serendipity elemanı* ' seçilmiştir. Önceki bölümlerde elde edilen fonksiyoneller içindeki terimlerde birinci mertebeden daha büyük türev bulunmadığı için tamlık ve süreklilik açısından lineer interpolasyon fonksiyonları kullanılması yeterlidir.



Şekil 5.1 Dikdörtgen sonlu eleman ve koordinat takımı

$$s = \frac{y - y_0}{a}, \qquad r = \frac{x - x_0}{b} \tag{5.1}$$

olmak üzere interpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir,[5].

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s), \qquad \phi_2 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)$$
$$\phi_3 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s), \qquad \phi_4 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s) \tag{5.2}$$

Şekil fonksiyonları kullanılarak eleman matrisindeki alt matrisler aşağıdaki gibi elde edilir, [8].

$$\left[k_1\right] = \int_A \phi_i \phi_j \, dA = \frac{4ab}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.3.a)$$

$$\left[k_2\right] = \int_A \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j \, dA = \frac{b}{6} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5.3.b)$$

$$\left[k_3\right] = \int_A \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_j \, dA = \frac{a}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5.3.c)$$

5.2 Plak İçin Eleman ve Yük Matrisinin Elde Edilmesi

Fonksiyoneldeki bilinmeyenler aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi interpolasyon fonksiyonlarına bağlı olarak yazılırsa

$$w = \sum_{i=1}^{4} w_i \phi_i \qquad (5.4)$$

Bir fonksiyoneli ekstremum yapan değişkenlerin bulunabilmesi için fonksiyonelin, bu değişkenlerin interpolasyon fonksiyonlarının bilinmeyenlerine göre türevinin sıfır olması gerekir, [2]. Buna göre (2.24) deki bağıntı uygulanırsa

$$\frac{\partial I}{\partial X_i} = 0 \qquad \text{i = 1,2,3.....n} \qquad (5.5)$$

alt matrisler (5.3) teki gibi gösterilirse plak için eleman matrisi aşağıdaki kısaltmalar yapılarak

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{12}{Eh^3}, \qquad \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{6}{Gh^3}$$

$$\gamma_5 = \gamma_6 = \frac{6}{Gh^3}, \qquad \gamma_7 = \mu\frac{12}{Eh^3} \tag{5.6}$$

eleman matrisi aşağıdaki gibi elde edilir. Reissner plak elemanında sekiz bilinmeyen bulunmasına karşın kiriş-plak elemanında dokuz bilinmeyen vardır. Sonlu eleman formülasyonunda uyum sağlamak amacıyla M_{xy} burulma momenti iki yön için ayrı ayrı yazılır.

$$\begin{matrix} & M_x & M_y & M_{xy} & M_{xy} & Q_x & Q_y & \Omega_x & \Omega_y & w \end{matrix}$$

$$[K]_p = \begin{bmatrix} -\gamma_1\left[k_1\right] & -\gamma_7\left[k_1\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left[k_2\right] & 0 & 0 \\ & -\gamma_2\left[k_1\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left[k_3\right] & 0 \\ & & -\gamma_3\left[k_1\right] & 0 & 0 & 0 & -\left[k_3\right] & 0 & 0 \\ & & & -\gamma_4\left[k_1\right] & 0 & 0 & 0 & -\left[k_2\right] & 0 \\ & & & & -\gamma_5\left[k_1\right] & 0 & \left[k_1\right] & 0 & -\left[k_2\right] \\ & & & & & -\gamma_6\left[k_1\right] & 0 & \left[k_1\right] & -\left[k_3\right] \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & \textit{simetrik} & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

aynı şekilde yük matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[q]=\begin{bmatrix} -\frac{6\mu q}{5Eh}[k_1] \\ -\frac{6\mu q}{5Eh}[k_1] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q[k_1] \end{bmatrix} \qquad (5.8)$$

5.3 Kiriş-Plak İçin Eleman ve Yük Matrisinin Elde Edilmesi

Bölüm 5.1 de elde edilen alt matrisler ile (5.5) ifadesi kullanılır ve kiriş-plak için eleman matrisi aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa,

$$\gamma_1=\frac{12}{Eh_k^{\,3}}, \qquad \gamma_2=\frac{12}{Eh^3}$$
$$\gamma_3=\frac{6}{Gh_k^{\,3}}, \qquad \gamma_4=\frac{6}{Gh^3}$$
$$\gamma_5=\frac{6}{Gh_k^{\,3}}, \qquad \gamma_6=\frac{6}{Gh^3} \qquad (5.9)$$

gibi eleman matrisi aşağıdaki gibi gösterilebilir

$$
\begin{array}{c}
\\
\left[K\right]_{pk} = \\
\\
\\
\

$$[q, w] = \frac{1}{2}\bar{\rho}\omega^2 [w, w] \tag{5.13}$$

(5.13) teki bağıntısı uygulandığında eleman kütle matrisi

$$[M] = \rho h [k_1] \tag{5.14}$$

olarak bulunur. Global sistem matrisi oluşturulduğunda eleman matrisi aşağıdaki parçalara bölünürse (5.14) denklemi

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{5.15}$$

haline dönüşür.Buradaki $\{f\}$ global matrisin moment, burulma momenti,kesme kuvveti ve dönme bilinmeyenleri, $\{w\}$ çökme bilinmeyenlerini göstermektedir. (5.15) denklemi geleneksel birleştirme tekniği uygulanarak,

$$[K*] = [K_{22}] - [K_{12}]^T [K_{11}]^{-1} [K_{12}] \tag{5.16}$$

bulunan $[K*]$ aşağıdaki özdeğer problemine yerleştirilir.

$$\left([K*] - \omega^2 [M] \right) \{w\} = \{0\} \tag{5.17}$$

Bu özdeğer problemi çözülerek takviyeli plağa ait doğal frekanslar ve bunlara ait mod şekilleri bulunur.

6. UYGULAMALAR

Bu bölümde takviyeli plakların statik ve dinamik açıdan inceleyen sayısal örneklere yer verilmiştir. Öncelikle değişik sınır koşullarına sahip takviyeli plaklarda plak ve kiriş için moment, burulma momenti, kesme kuvveti, çökme değerleri bulunmuş daha önce bu konuda yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır. Bu çalışmadaki statik analizin [7] çalışmasından farklığı bilgisayar programında sınır koşulları mesnet tiplerine bağlı olarak otomatik olarak tanımlanması, sonuçların isteğe bağlı olarak boyutlu veya boyutsuz formatta sunulması ve ekstremum değerlerin ve yerlerinin belirlenmesidir. Programlama sonucunda kiriş ve plak için bulunan değerler ayrı ayrı yazdırılmıştır.

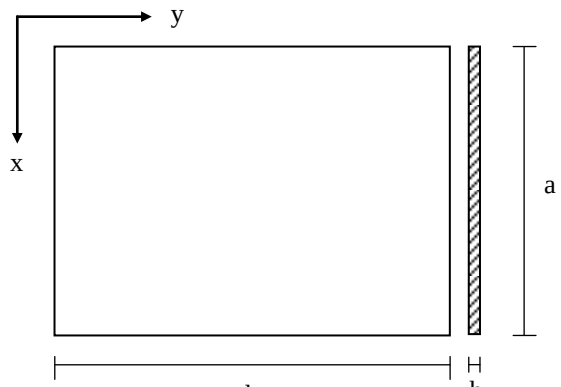
Çalışmanın asıl amacı olan dinamik inceleme ikinci kısımda ele alınmış, çözülen problemlerde doğal frekanslar ve bunlara bağlı özvektörler bulunmuştur. Bilgisayar programının sonuçlarında sadece ilk 12 frekansın ve bunlara ait vektörlerin sunulması yeterli görülmüştür. Aşağıdaki örneklerde takviyeli ve takviyesiz plaklara ait çeşitli uygulamalara yer verilmiştir.

6.1. Statik Analiz Uygulamaları

Bu kısımda önce dikdörtgen plak için statik çözüm yapılmış, daha sonra takviyeli plağa ait örneklere yer verilmiştir.

6.1.1 Dikdörtgen plak için örnekler

Aşağıdaki şekilde görülen dört tarafından sabit mesnetli plakta (SSSS), farklı döşeme kalınlıkları ve farklı b / a oranları için elde edilen maksimum çökme ve moment değerleri boyutsuz olarak tablolarda sunulmuştur. Plak kısa kenar uzunluğu $a = 10\ m$, Poisson oranı $\mu = 0.30$ olarak alınmış, çözümde 10 x 10 luk eleman ağı kullanılmıştır.



Şekil 6.1 Dikdörtgen plak

Tablo 6.1 Dikdörtgen plak için bulunan maksimum çökme değerleri

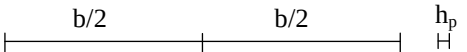
$w_{max}\,Eh^3/qa^4$								
b/a	1				1,5			
h/a	Bu çalışma	[23]	REC32 [8]	Kesin [24]	Bu çalışma	[23]	REC32 [8]	Kesin [24]
0,05	0,0458	0,0450	0,0462	0,0443	0,0870	0,0850	0,0867	0,0843
0,20	0,0534	0,0520	0,0588	0,0443	0,0975	0,0950	0,1040	0,0843
0,40	0,0777	0,0740	0,0848	0,0443	0,1308	0,1250	0,1413	0,0843
0,60	0,1182	0,1110	0,1224	0,0443	0,1862	0,1760	0,1943	0,0843

Tablo 6.2 Dikdörtgen plak için bulunan maksimum moment değerleri

Mx_{max}/qa^2								
b/a	1				1,5			
h/a	Bu çalışma	[23]	REC32 [8]	Kesin [24]	Bu çalışma	[23]	REC32 [8]	Kesin [24]
0,05	0,0495	0,0480	0,0484	0,0479	0,0838	0,0820	0,0817	0,0812
0,20	0,0503	0,0510	0,0535	0,0479	0,0842	0,0830	0,0877	0,0812
0,40	0,0523	0,0570	0,0579	0,0479	0,0854	0,0880	0,0928	0,0812
0,60	0,0555	0,0690	0,0597	0,0479	0,0872	0,0970	0,0944	0,0812

6.1.2 Takviyeli plak için örnekler

a) Şekil 6.2 de görülen ortasından takviyeli plağın statik analizi yapılırken programda simetriklik özelliğinden yararlanılmış olup, 4 x 19 luk eleman ağı kullanılmıştır. Bütün kenarları basit mesnetli olan takviyeli plakta, farklı plak



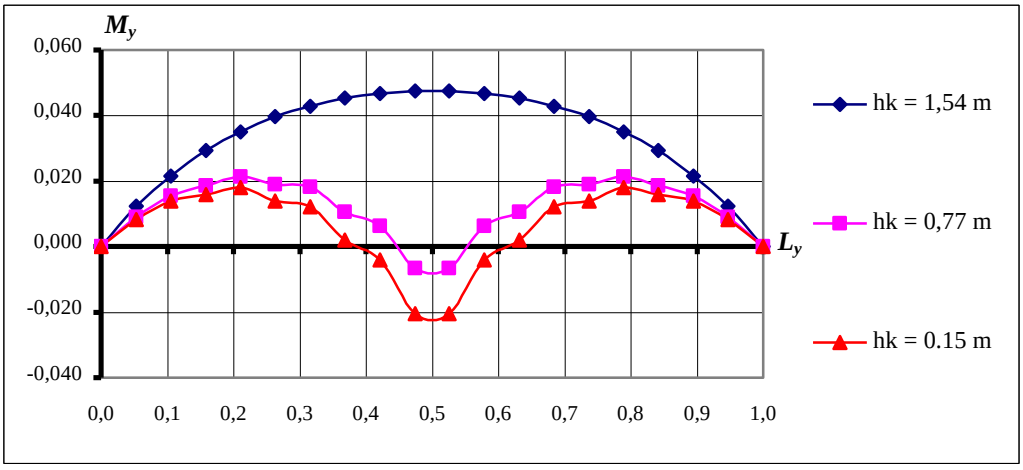
kalınlıkları için çözüm yapılmıştır. b / a oranı 1, kiriş genişliği b_k = *0.30 m* alınmıştır.

Şekil 6.2 Ortadan takviyeli plak ve kullanılan eleman ağı

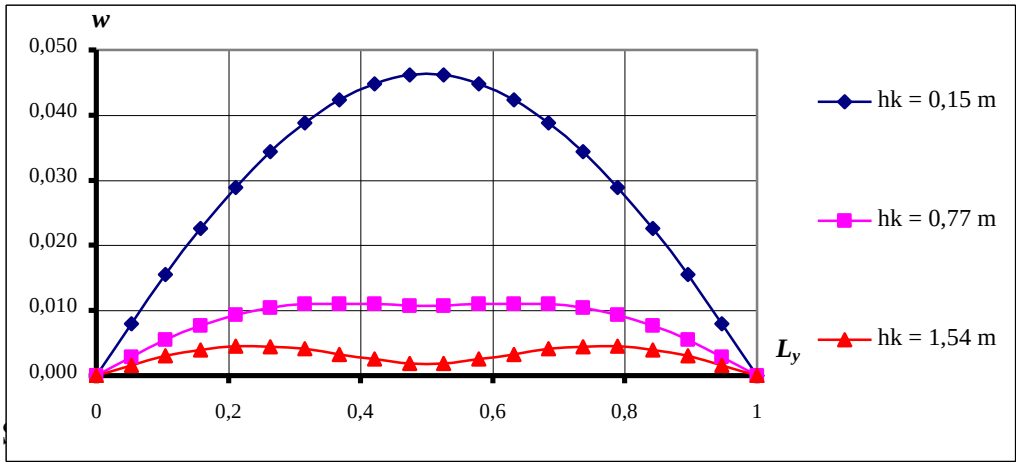
Tablo 6.3 Ortadan takviyeli plakta maksimum moment ve çökme değerleri (b / a=1)

Rijitlik $(Dh/EI_k)x10^3$	h_k	$w_{max}\ Eh^3/qa^4$				My_{max}/qa^2			
		x	y	Bu çalışma	[7]	x	y	Bu çalışma	[7]
0,509	1,54	0,5	0,211	0,0045	0,0045	0,5	0,211	0,0179	0,0179
0,884	1,28	0,5	0,263	0,0052	0,0052	0,5	0,211	0,0184	0,0183
1,697	1,03	0,5	0,316	0,0068	0,0068	0,5	0,211	0,0192	0,0192
4,062	0,77	0,5	0,368	0,0011	0,0011	0,5	0,211	0,0213	0,0213
13,98	0,51	0,5	0,474	0,0235	0,0233	0,5	0,316	0,0271	0,0270
105,5	0,26	0,5	0,474	0,0418	0,0420	0,5	0,421	0,0421	0,0421
h_k=h	0,15	0,5	0,474	0,0462	0,0462	0,5	0,474	0,0475	0,0475

Elde edilen bu veriler doğrultusunda çökme ve moment grafikleri çizdirilirse artan kiriş yüksekliğinin, çökme ve moment üzerindeki etkisi görülebilir.



Şekil 6.3 Ortadan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için moment grafiği



b) Karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer kenarlarında kiriş bulunan sistemin (SFSF) incelendiği bu örnekte, ilk önce kiriş kalınlığı plak kalınlığına eşit alınmıştır. Dolayısıyla karşılıklı iki kenar serbest olmaktadır. $h = 0.2\ a$ ve $b / a = 1$ için bulunan sonuçlar Tablo 6.4 te özetlenmiştir. Programda 8 x 10 luk eleman ağı kullanılmıştır.

Daha sonra b / a oranı 1 olan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için moment, çökme ve burulma momentleri elde edilmiştir.

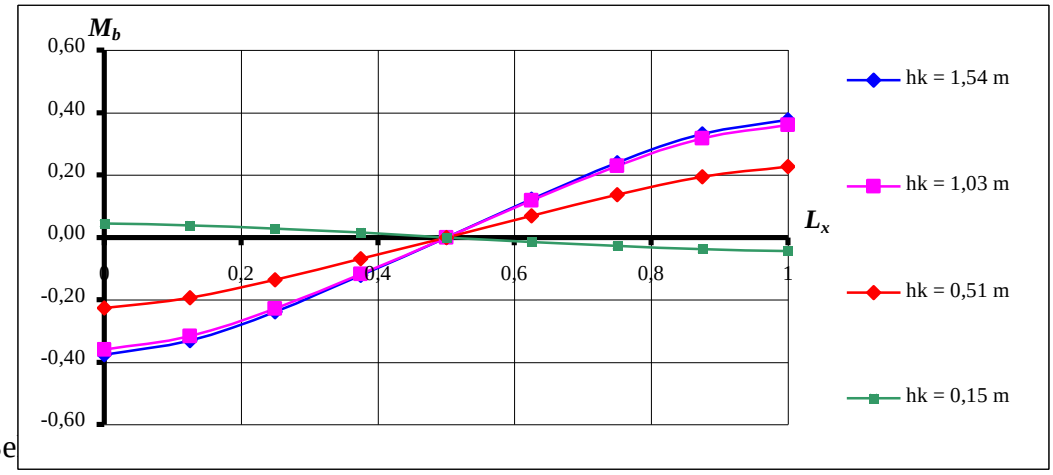
Tablo 6.4 Karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları boşta olan plak için elde edilen değerler ($b/a=1$)

h = 0.2 a için	wEh^3/qa^4	Mx/qa^2	My/qa^2	Qy/qa
(x , y)	(0.5 , 0)	(0.5 ,0.5)	(0.5 , 0)	(0 , 0.5)
REC32 [8]	0,1650	0,1310	0,0288	0,4690
[23]	0,1640	0,1300	0,0268	0,4630
Bu çalışma	0,1666	0,1313	0,0264	0,4677

Tablo 6.5 Kenarından takviyeli plakta farklı kiriş yükseklileri için değerler ($b/a=1$)

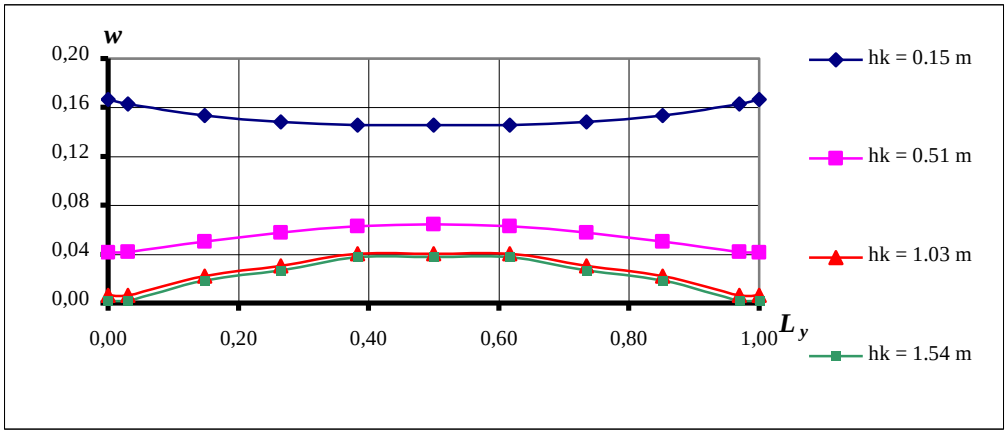
Rijitlik $(Dh/EI_k)x10^3$	h_k	$w_{max}\,Eh^3/qa^4$ (0.5 , 0.5)	Mx_{max}/qa^2 (0.5 , 0.5)	Mb_{max}/qa^2 (0 , 0)
0,509	1,54	0,0367	0,0417	-0,3772
1,697	1,03	0,0398	0,0414	-0,3062
13,98	0,51	0,0643	0,0386	-0,2260

Bulunan kiriş burulma momenti değerlerine göre aşağıdaki grafik elde edilir.

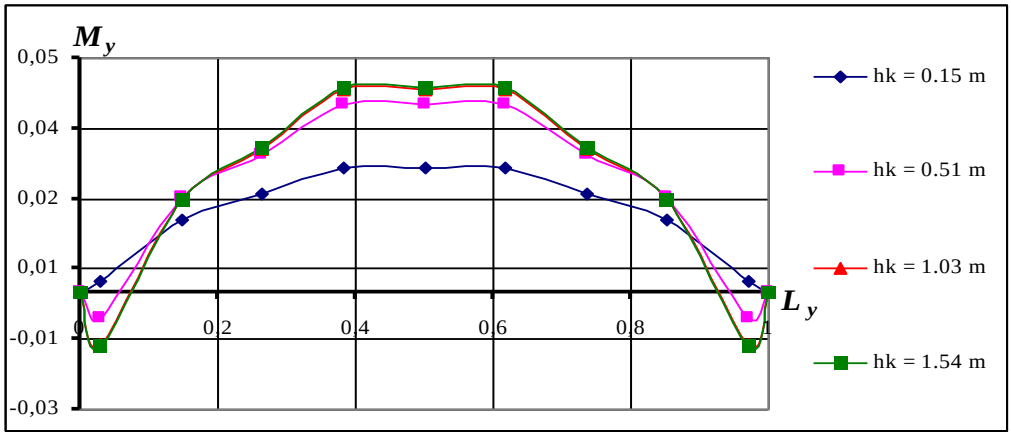


Şe

Değişen kiriş yüksekliklerine göre elde edilen eğilme momenti ve çökme grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.6 İki kenardan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklileri için çökme grafiği



Şekil 6.7 İki kenardan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklileri için moment grafiği

6.2. Dinamik Analiz Uygulamaları

Bu kısımda önce dikdörtgen plak için uygulamalar yapılmış, daha sonra tek yönde takviyelenmiş plaklara ait örneklere yer verilmiştir.

6.2.1 Dikdörtgen plak için örnekler

Aşağıda dikdörtgen plağa ait farklı sınır koşulları ve *b/a* oranları için çözülen örneklere yer verilmiştir.

a) Plak için kalınlık $h = 0.15\ m$, $L=a=b= 10\ m$, $\mu = 0.15$, Elastisite Modülü $E = 25\ GPa$, *yoğunluk* $\rho = 2400\ kg/m^3$ alınmıştır. Dört tarafından sabit mesnetli plak (SSSS) için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Sonlu eleman çözümünde 9x9 luk eleman ağı kullanılmış sonuçlar aşağıdaki ifade ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\varpi = \omega\sqrt{\rho L^4 / D} \tag{6.1}$$

Tablo 6.6 Kenarlarından sabit mesnetli plak için frekans parametreleri

ϖ	Leissa [22]	Bardell [22]	REC32 [22]	Bu çalışma
ϖ_{11}	19,738	19,911	19,703	19,726
ϖ_{12}	49,349	50,112	49,069	49,172
ϖ_{21}	49,349	50,112	49,069	49,172
ϖ_{22}	78,958	80,090	78,354	78,573

b) Bu örnekte kalınlığı $h = 1.37x10^{-3}\ m$, Elastisite Modülü $E = 71\ GPa$, yoğunluğu $\rho = 2700\ kg/m^3$, $a = 0.203\ m$ ve $\mu = 0.27$ olan dört tarafından ankastre mesnetli

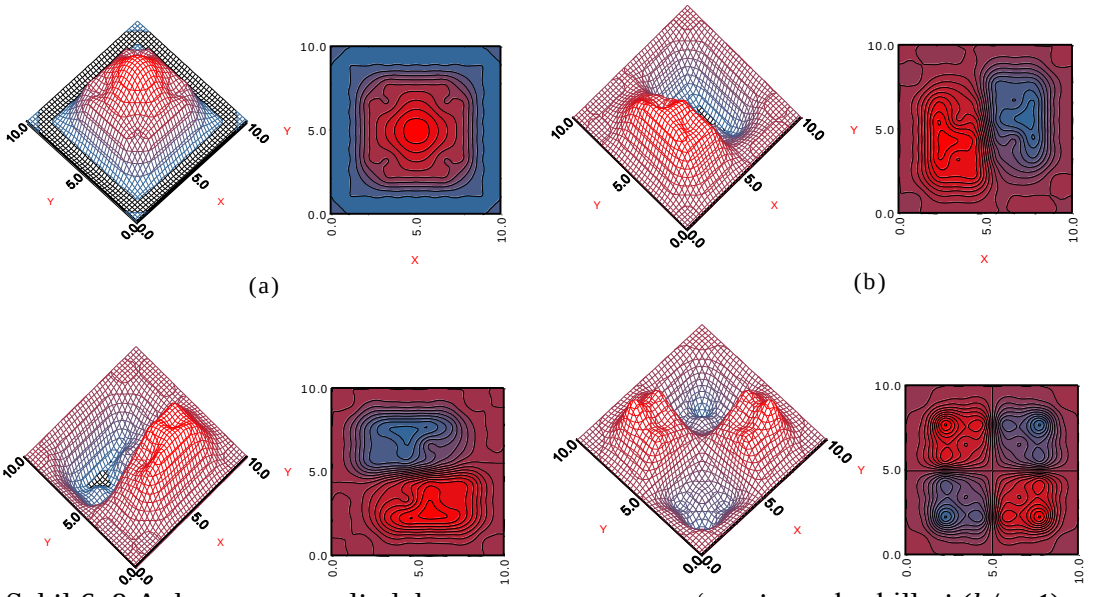
plak (CCCC) için farklı b/a oranlarına göre çözüm elde edilmiştir. [11] çalışmasında bulunan değerler aşağıdaki ifadeyle boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\varpi = 2\pi\,\omega\sqrt{\rho L^4 / D} \tag{6.2}$$

Tablo 6.7 Ankastre mesnetli plakta farklı b/a oranları için frekans parametreleri

b/a	ϖ	Leissa [22]	Bardell [22]	REC32 [22]	Grillage [11]	Kesin çözüm [11]	Bu çalışma	Hata (Kesin çözüm / Bu çalışma)
1	ϖ_{11}	35,999	36,018	35,931	35,677	35,988	36,307	0,99
	ϖ_{12}	73,405	74,497	73,823	72,354	73,410	72,737	1,01
	ϖ_{21}	73,405	74,497	73,823	72,359	73,410	72,737	1,01
	ϖ_{22}	108,237	108,949	110,140	104,603	108,300	106,569	1,02
1,5	ϖ_{11}	-	-	-	26,809	27,009	27,274	0,99
	ϖ_{12}	-	-	-	40,914	41,715	41,656	1,00
	ϖ_{21}	-	-	-	64,680	66,133	65,512	1,01
	ϖ_{22}	-	-	-	65,444	66,550	65,976	1,01
2,0	ϖ_{11}	-	-	-	27,217	26,071	24,801	1,05
	ϖ_{12}	-	-	-	38,837	33,470	31,905	1,05
	ϖ_{21}	-	-	-	59,944	46,288	44,712	1,04
	ϖ_{22}	-	-	-	65,142	55,205	62,961	0,88

b /a = 1 için elde edilen frekanslara ait vektörler kullanılarak mod şekilleri aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 6. 8 Ankastre mesnetli plakta ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}, ω_{22} 'ye ait mod şekilleri (*b/a=1*)

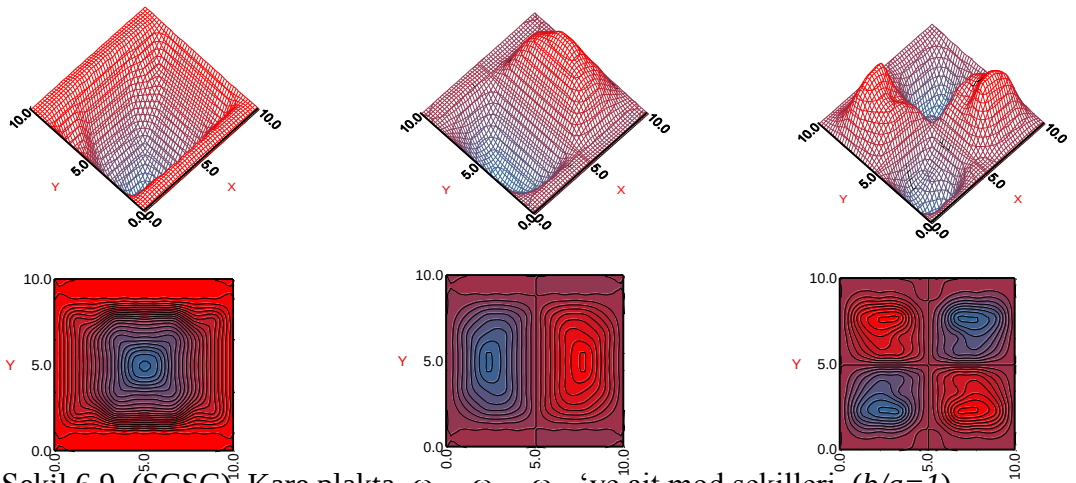
c) Karşılıklı iki kenar ankastre mesnetli, diğer iki kenarı sabit mesnetli kare plak (CSCS) için b örneğindeki büyüklükler kullanılmıştır. Bu örnek içinde 9x9 luk

eleman ağı kullanılmış olup elde edilen boyutsuz sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 6.8 (CSCS) mesnetli plakta farklı b/a oranları için frekans parametreleri

b/a	ϖ	Leissa [22]	Bardell [22]	REC32 [22]	Grillage [11]	Kesin çözüm [11]	Bu çalışma	Hata (Kesin çözüm / Bu çalışma)
1	ϖ_{11}	28,946	28,950	28,893	28,769	28,950	29,119	0,99
	ϖ_{12}	54,743	54,740	54,531	53,937	54,739	54,860	1,00
	ϖ_{21}	69,320	69,330	69,658	68,581	69,320	68,381	1,01
	ϖ_{22}	94,584	94,590	95,222	91,748	94,590	93,496	1,01
1,5	ϖ_{11}	-	-	-	24,934	25,045	25,218	0,99
	ϖ_{12}	-	-	-	34,538	35,101	35,303	0,99
	ϖ_{21}	-	-	-	53,427	54,755	54,492	1,00
	ϖ_{22}	-	-	-	64,487	66,252	64,215	1,03
2,0	ϖ_{11}	-	-	-	26,441	25,232	23,978	1,05
	ϖ_{12}	-	-	-	36,606	30,460	29,136	1,05
	ϖ_{21}	-	-	-	50,386	40,675	39,054	1,04
	ϖ_{22}	-	-	-	64,925	50,924	53,122	0,96

b / a = 1 için elde edilen frekanslara ait vektörler kullanılarak mod şekilleri aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 6.9 (SCSC) Kare plakta ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} 'ye ait mod şekilleri ($b/a=1$)

(a) (b) (c)

6.2.2 Takviyeli plak için örnekler

Bu bölümde x ekseni doğrultusunda değişik sayıda takviyelerle güçlendirilmiş plak için uygulamalar yapılmıştır.

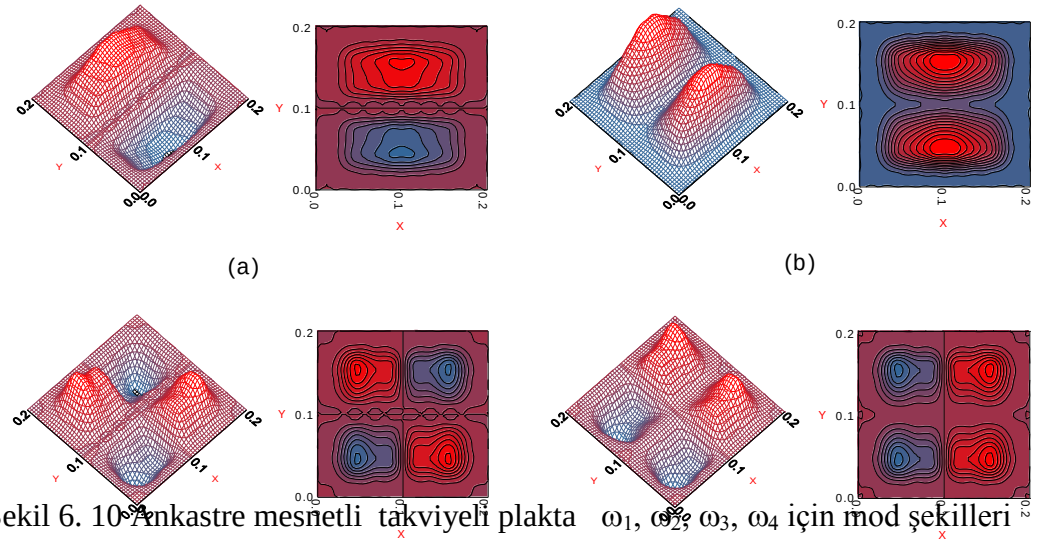
a) Dört tarafından ankastre mesnetli ortadan tek takviyeli plak için $a, b = 0.203\ m$, kiriş kalınlığı $h_p = 1.37x10^{-3}\ m$, kiriş yüksekliği $h_k = 14.07x10^{-3}\ m$, kiriş genişliği

b_k= *6.35x10*$^{-3}$ *m*, Elastisite Modülü $E = 71\ GPa$, $\mu = 0.27$ ve yoğunluk $\rho = 2700\ kg/m^3$ alınmıştır. Kullanılan eleman ağı 9 x 9 luktur.

Tablo 6.9 Ortadan takviyeli ankastre mesnetli plağın doğal frekansları (Hz)

ω (Hz)	Teori [11]	Deneysel sonuçlar [11]	Girllage [11]	Harık&Guo [14]	Bhimaraddi, Carr & Moss [19]	Mukherjee & Mukhopadhyay [17]	Bu çalışma
1	718	689	737	697	700	712	703
2	751	725	760	730	737	768	749
3	997	961	1060	928	967	1017	1010
4	1007	986	1074	-	978	1032	1029
5	1419	1376	1473	1303	1380	1465	1363
6	1424	1413	1559	-	1385	1477	1459

Bu frekanslara ait mod şekilleri aşağıdaki gibidir.



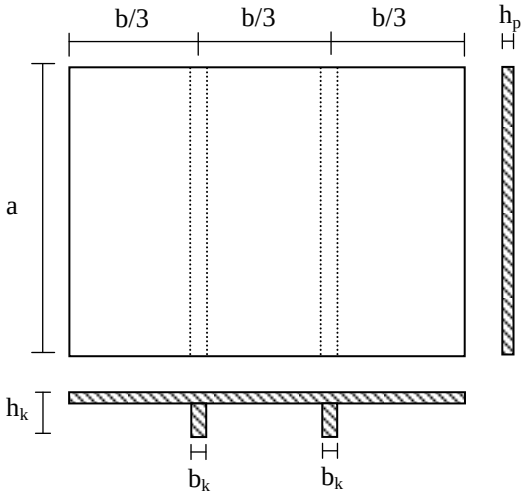
Şekil 6. 10 Ankastre mesnetli takviyeli plakta ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 için mod şekilleri

Yukarıdaki örnek için kiriş yükseklikleri değiştirilerek elde edilen sonuçlar aşağıdaki tablolarda *Hz* cinsinden sunulmuştur. Tablonun son sütununda programın düz plak için ulaştığı sonuçlar bulunmaktadır.

Tablo 6.10 Ankastre mesnetli ortadan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar (*Hz*)

ω (Hz)	h_k = 14.07 mm için	h_k = 10.0 mm için	h_k = 5.0 mm için	h_k= 2.5 mm için	h_k=1.37 mm için	Kirişsiz plak için h=1.37 mm
1	702,9	667,0	404,4	306,9	296,3	295,8
2	748,8	700,8	661,3	606,6	591,4	593,3
3	1010,3	1009,8	866,8	640,3	597,6	593,3
4	1029,7	1015,5	977,7	896,3	875,3	870,0

b) Şekil 6.11 de görülen ortasından iki takviyeli plak için $a, b = 0.203\ m$, $\mu = 0.3$, plak kalınlığı $h_p = 1.27x10^{-3}\ m$, kiriş yüksekliği $h_k = 17.8x10^{-3}\ m$, kiriş genişliği $b_k = 2.29x10^{-3}\ m$, Elastisite Modülü $E = 68.9\ GPa$ ve yoğunluk $\rho = 2722\ kg/m^3$ alınmıştır. Plak dört tarafından ankastre (CCCC) mesnetlenmiştir. Problem çözülürken 6 x14 lük eleman ağı kullanılmıştır.

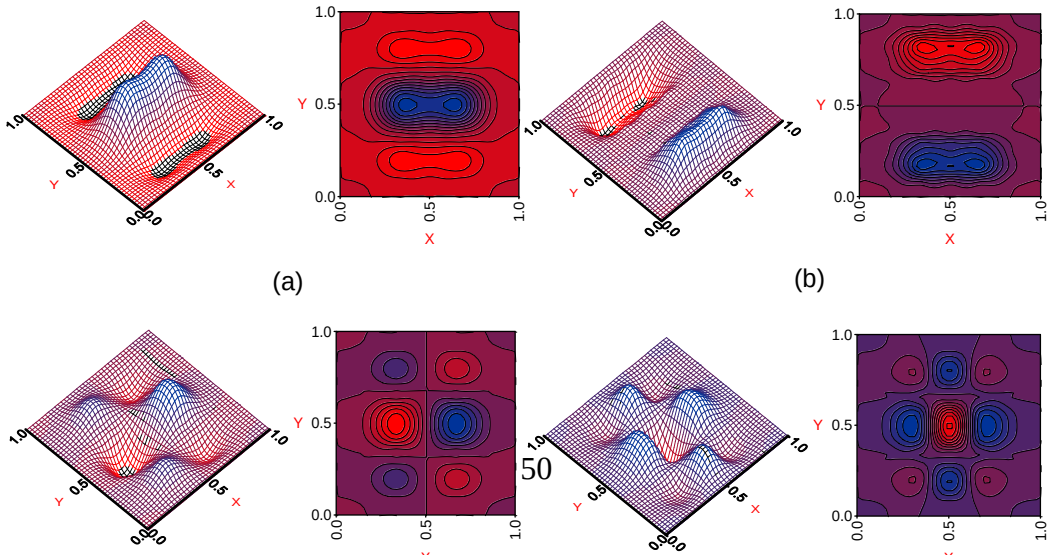


Şekil 6.11 Ortadan iki takviyeli ve dört tarafından ankastre mesnetli plak

Tablo 6.11 Ortadan iki takviyeli ankastre mesnetli plakta doğal frekanslar (*Hz*)

ω (*Hz*)	Mukherjee & Mukhopadhyay [17]	Teori [25]	Harık & Guo [14]	Holopainen [18]	Deneysel sonuçlar [25]	Mukhopadhyay [16]	Bhimaraddi Carr & Moss [19]	Bu çalışma
1	966	965	965	944	909	909	911	889
2	1248	1272	1250	1238	1204	1223	1198	1169
3	1394	1364	1329	1331	1319	1354	1293	1226
4	1481	1418	-	1361	1506	-	1400	1401
5	1630	1602	1507	1562	1580	-	1512	1547

Bulunan frekanslara göre mod şekilleri aşağıdaki gibi elde edilir.



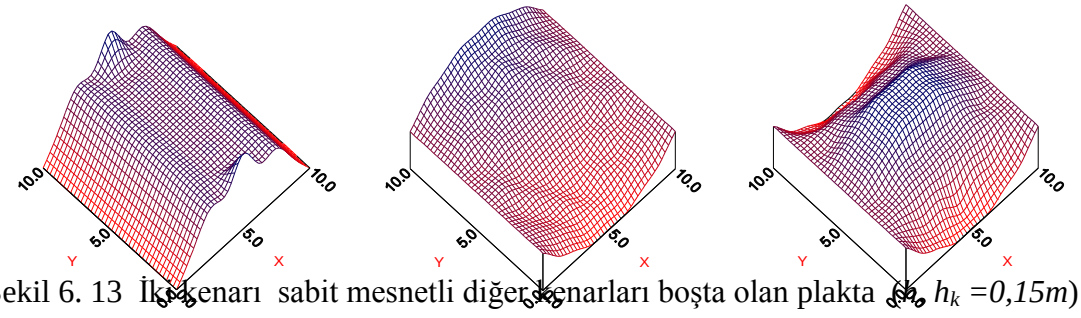
Şekil 6. 12 Ankastre mesnetli iki takviyeli plakta ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 için mod şekilleri

c) Bu örnekte karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer kenarlarında kiriş bulunan takviyeli plak için dinamik analiz yapılmıştır. Döşeme kalınlığı $h = 0.15\ m$, $L=a=b= 10\ m$, $\mu = 0.15$, Elastisite Modülü $E = 25\ GPa$, yoğunluk $\rho = 2400\ kg/m^3$ alınmıştır. Sonlu eleman çözümünde 8 x10 luk eleman ağı kullanılmıştır.

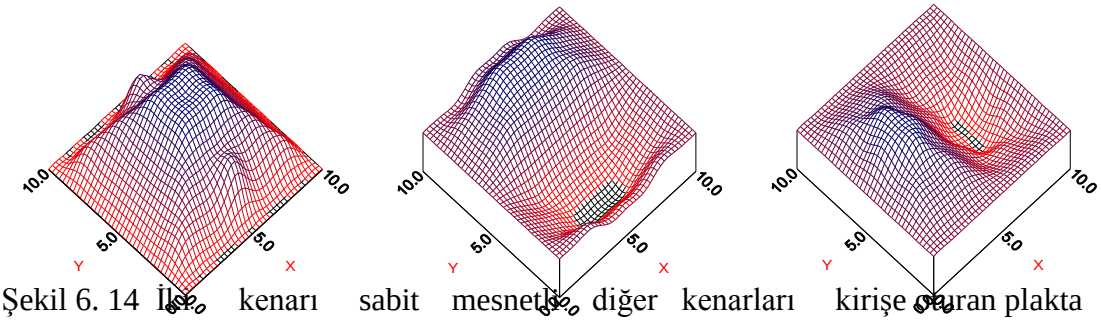
Tablo 6.12 Kenarlardan takviyeli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar

h_k	ϖ_{11}	ϖ_{12}	ϖ_{21}
0,15	9,809	17,043	37,522
0,51	15,308	24,725	39,934
1,03	20,699	43,162	51,552
1,54	21,605	50,591	51,776

Kiriş kalınlığına göre elde edilen mod şekillerin grafiği aşağıdaki gibi çizilir



Şekil 6. 13 İki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları boşta olan plakta (h_k =0,15m) ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} için mod şekilleri



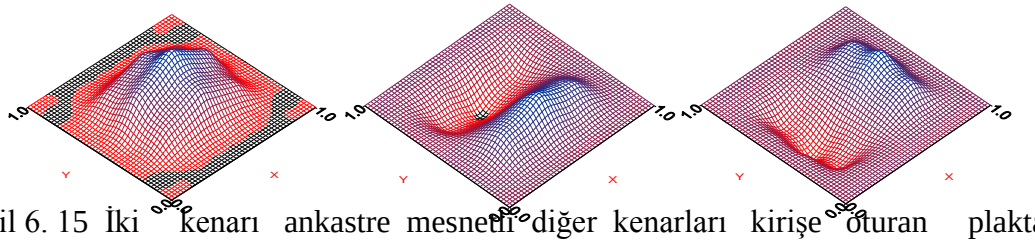
Şekil 6. 14 İki kenarı sabit mesnetli diğer kenarları kirişe oturan plakta ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} için mod şekilleri (h_k=1,54 m)

d) İki kenarından kirişe oturan diğer kenarları ankastre mesnetli olan plakta kiriş rijitlikleri artırılarak elde edilen sonuçlarla, dört tarafından ankastre mesnetli plak

için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır. Kiriş genişlikleri b_k *=1 m,* Elastisite Modülü *E = 25 GPa* , μ *=0.15, a= 10 m,* ve yoğunluk ρ *= 2400 kg/m*^{3} olarak alınmıştır. Plağın y doğrultusundaki uzunluğu *b / a =1* için *b=12 m, b / a =1,5* için *b=17 m* , *b / a =2* için *b=22 m* kabul edilmiştir. Tablonun son satırında dört tarafından ankastre mesnetli plağa ait frekans parametreleri gösterilmiştir.

Tablo 6.13 Kenarlardan takviyeli ankastre mesnetli plakta farklı kiriş yükseklikleri için frekanslar

b / a	1			1,5			2		
h_k	ϖ_{11}	ϖ_{12}	ϖ_{21}	ϖ_{11}	ϖ_{12}	ϖ_{21}	ϖ_{11}	ϖ_{12}	ϖ_{21}
0,15	22,242	25,609	37,641	22,261	23,979	29,910	23,299	26,800	29,578
0,50	31,364	51,392	65,699	25,933	36,840	51,747	24,176	30,158	39,900
1,00	34,021	67,223	72,840	26,548	40,521	66,229	24,401	31,523	39,653
1,50	34,148	68,478	72,879	26,571	40,694	66,238	24,409	31,572	39,885
CCCC	36,307	72,737	72,737	27,274	41,656	65,512	24,801	31,905	44,712

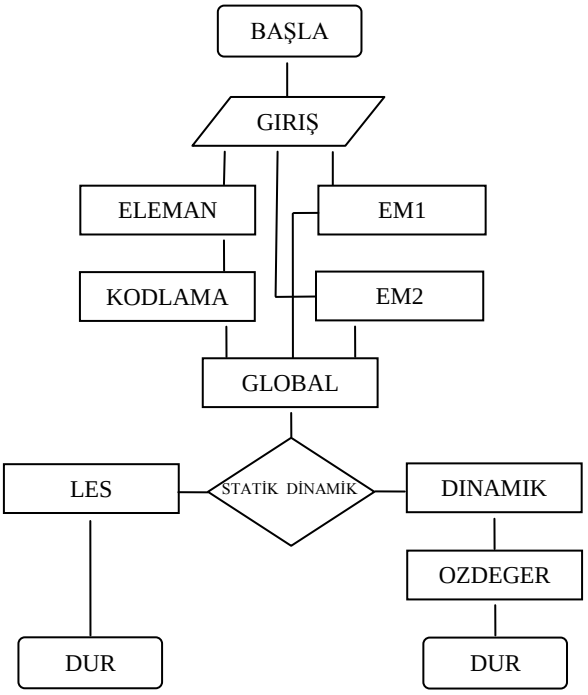


Şekil 6. 15 İki kenarı ankastre mesnetli diğer kenarları kirişe oturan plakta ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} için 1. mod şekilleri (*bk= 1 m* ,h_k*=1,50 m*)

7 . PROGRAMLAMA

Takviyeli plaklara ait sonlu eleman formülasyonu sonucunda elde edilen veriler doğrultusunda hazırlanan bilgisayar programı *" Fortran Power Station "* ortamında yazılmıştır. Program sekiz ana alt program ve dört yardımcı alt programdan oluşmuştur.

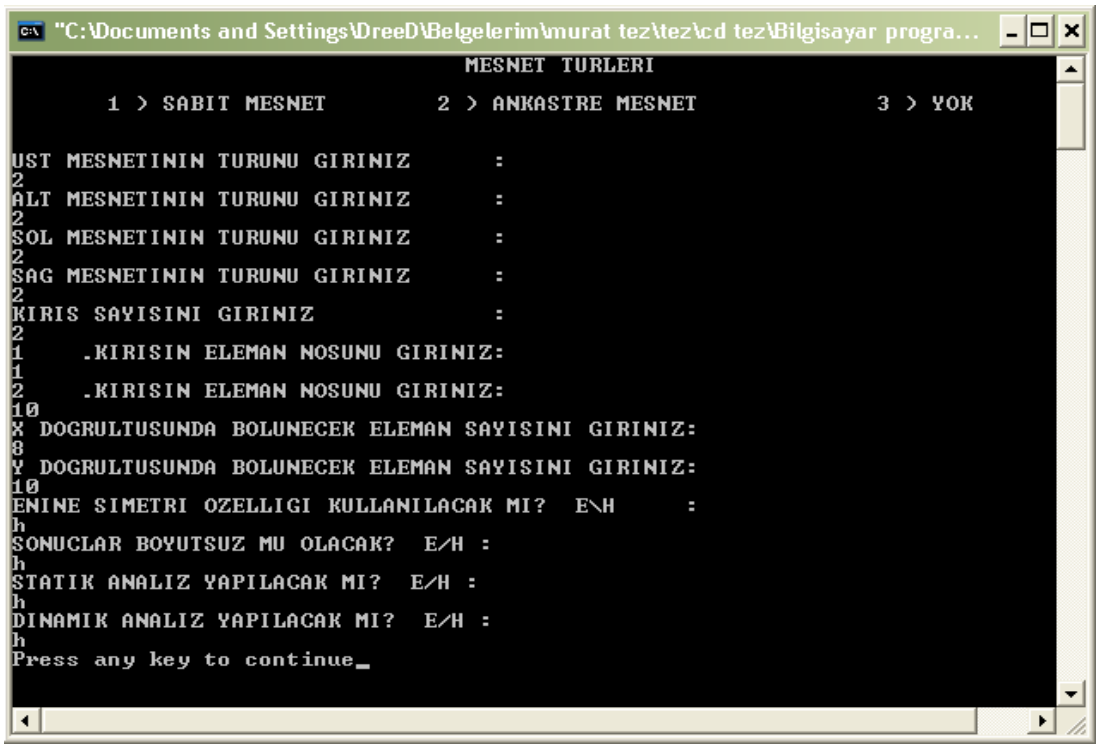
Aşağıda programın genel algoritması verilmiş olup alt programlar hakkında ayrıntılı açıklamalara yer verilmiştir.



Şekil 7.1 Programa ait akış diyagramı

7 . 1 Giris Alt Programı

Bu alt programda takviyeli verilerin girişi yapılmaktadır. Malzemeye ait bilgiler, plağın boyutları ve yükleme durumu alt program içinden, plağın mesnetlenme durumu, takviye sayısı ile plaktaki yeri, x ve y doğrultusunda plağın kaç parçaya bölüneceği , simetri özelliğinin kullanıp kullanılmayacağı ve sonuçların hangi formatta sunulacağı ekrandan girilmektedir.



Şekil 7.2 Programda ekrandan yapılan giriş bölümü

7 . 2 Eleman Alt Programı

Bu alt programda, giriş bölümünde belirlenen sayıda bölünen plak elemanlarına ait bilinmeyen tanımlaması ve numaralandırılması yapılmaktadır. PB plağa ait bilinmeyenleri, PKB plak-kiriş elemanına ait bilinmeyenleri, TIP eleman tipini ifade etmektedir. Bu kısımda öncelikle plak ve plak-kiriş elemanına ait bağımsız bilinmeyenler 1, ortak bilinmeyenler 2, bilinenler ise 0 olarak alınmıştır. Eleman tipi plak elemanı için 1, plak-kiriş elemanı için 2 ile gösterilmektedir. Alt program, giriş bölümündeki veriler doğrultusunda tip tanımlamalarını ve mesnetlenme çeşidine göre bilinmeyen tanımlamalarını her nod için otomatik olarak elde etmektedir. Bu tanımlamalar sonucunda ortak bilinmeyenlerin numarası aynı, ortak olmayan bilinmeyenlerin numarası farklı olmak üzere, sırayla her nod için M_x, M_y, M_{xy}, M_b, Q_x, Q_y, Ω_x, Ω_y, w bilinmeyen numaralandırılması program tarafından yapılmaktadır.

Aşağıda dört tarafından ankastre mesnetli ortadan 9x9 parçaya bölünmüş takviyeli plağa ait PKB ve PB matrisleri görülmektedir.

Tablo 7.1 PB ve PKB matrislerini gösteren program çıktısı

kiris- plak elemanı için pkb matrisi

el.no									
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	6	125	225	326	446	565	0	744	0
6	7	126	226	327	447	566	0	745	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	18	135	235	338	458	575	665	752	824
16	19	136	236	339	459	576	666	753	825
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
94	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	114	215	315	434	554	655	0	816	0
96	115	216	316	435	555	656	0	817	0
97	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0

plak elemanı için pkb matrisi

el.no									
1	1	121	221	321	441	561	0	0	0
2	2	122	222	322	442	562	0	741	0
3	3	123	223	323	443	563	0	742	0
4	4	124	224	324	444	564	0	743	0
5	5	125	225	325	445	565	0	744	0
6	8	126	226	328	448	566	0	745	0
7	9	127	227	329	449	567	0	746	0
8	10	128	228	330	450	568	0	747	0
9	11	129	229	331	451	569	0	748	0
10	12	130	230	332	452	570	0	0	0
11	13	131	231	333	453	571	661	0	0
12	14	132	232	334	454	572	662	749	821
13	15	133	233	335	455	573	663	750	822
14	16	134	234	336	456	574	664	751	823
15	17	135	235	337	457	575	665	752	824
16	20	136	236	340	460	576	666	753	825
17	21	137	237	341	461	577	667	754	826
18	22	138	238	342	462	578	668	755	827
19	23	139	239	343	463	579	669	756	828
20	24	140	240	344	464	580	670	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	108	210	310	428	548	650	740	0	0
91	109	211	311	429	549	651	0	0	0
92	110	212	312	430	550	652	0	813	0
93	111	213	313	431	551	653	0	814	0
94	112	214	314	432	552	654	0	815	0
95	113	215	315	433	553	655	0	816	0
96	116	216	316	436	556	656	0	817	0
97	117	217	317	437	557	657	0	818	0
98	118	218	318	438	558	658	0	819	0
99	119	219	319	439	559	659	0	820	0
100	120	220	320	440	560	660	0	0	0

7 . 3 Kodlama Alt Programı

Bir önceki bölümde elde edilen PB ve PKB matrisleri her noda ait bilinmeyenleri gösterilmişti. Bu alt programda ise sahip olduğu nod numarasına göre her elemana ait bilinmeyen sınıflandırılması yapılmıştır. Bu alt programda kullanılan NODE, her elemana ait 4 nodun numaralarını, NCODE ise bu elemanlara ait 36'şar adet bilinmeyenin numaralarını içeren matrisleri ifade etmektedir. Bu bölümde ayrıca dinamik analizin yapılırken kullanılan geleneksel birleştirme tekniğini uygulayabilmek için ayrım sayısının tespiti yapılmaktadır.

Tablo 7.2 NODE ve NCODE matrislerini gösteren program çıktısı

```
eleman numarasına göre elemana ait nod matrisi

     1.ELEMAN ICIN     1     2    11    12
     2.ELEMAN ICIN     2     3    12    13
     3.ELEMAN ICIN     3     4    13    14
     4.ELEMAN ICIN     4     5    14    15
     5.ELEMAN ICIN     5     6    15    16
     . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
    77.ELEMAN ICIN    85    86    95    96
    78.ELEMAN ICIN    86    87    96    97
    79.ELEMAN ICIN    87    88    97    98
    80.ELEMAN ICIN    88    89    98    99
    81.ELEMAN ICIN    89    90    99   100

elemana numarasına gore bilinmeyenler

ELEMAN                      ELEMANA AIT  KODLAR
_______    ____________________________________________________________
E.NO                                        NCODE
  1   1   2  13  14 121 122 131 132 221 222 231 232 321 322 333 334 441 442
     453 454 561 562 571 572   0   0 661 662   0 741   0 749   0   0   0 821
  2   2   3  14  15 122 123 132 133 222 223 232 233 322 323 334 335 442 443
     454 455 562 563 572 573   0   0 662 663 741 742 749 750   0   0 821 822
  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
 80 106 107 118 119 208 209 218 219 308 309 318 319 426 427 438 439 546 547
     558 559 648 649 658 659 738 739   0   0 811 812 819 820 883 884   0   0
 81 107 108 119 120 209 210 219 220 309 310 319 320 427 428 439 440 547 548
     559 560 649 650 659 660 739 740   0   0 812   0 820   0 884   0   0   0
```

7 . 4 EM1 ve EM2 Alt Programları

Sonlu eleman formülasyonu bölümünde bulunan eleman matrisleri, giris alt programında belirlenen eleman sayısına göre tespit edilen sonlu eleman boyutları dikkate alınarak bu alt programlarda hesap edilir. EM1 alt programında plak elemanlarına ait rijitlik matrisi SE1, kütle matrisi SED1, yük matrisi YMP1, EM2 alt programında plak-kiriş elemanına ait rijitlik matrisi SE2, kütle matrisi SED2, yük matrisi YMP2 olarak ifade edilmiştir

7 . 5 Global Alt Programı

Bu alt programda sistem rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulmaktadır. Programın icrası sırasında TIP matrisi sayesinde elaman tipine göre EM1 ve EM2 altprogramları çağırılır ve NCODE matrisiyle eleman matrisleri kullanılarak global matris teşkil edilir. Oluşturulan global matris GM, GKM ve GMD alt matrislerine ayrılır. Bu alt matrisler dinamik analizde kullanılır.

7 . 6 Les Alt Programı

Lineer denklem sisteminin çözüldüğü bu alt programda sonuçlar boyutlu veya boyutsuz olarak sunumu yapılmıştır. Denklem çözümünden elde edilen sonuçların M_x, M_y, M_{xy}, M_b, Q_x, Q_y, Ω_x, Ω_y, w bilinmeyenlerine atanması bu bölümde yapılmıştır. Sonuçlar ait olduğu noda ve plaktaki yeri dikkate alınarak sonuc.dat

dosyasına yazdırılmış olup ayrıca plak ve plak-kirişe ait ekstremum değerlerde bulunmuştur.

Tablo 7.3 Statik analiz sonuçlarını gösteren program çıktısı

MURAT GÜL'ÜN SONLU ELEMAN PROGRAMI

E =	21000000.000 N/m^2	Lx =	2.8500 m	Ly =	8.5500 m
ro =	.000 N/m^3	Mu =	.3000	h =	.1500 m
q =	1.000 N/m^2	bk =	.3000 m	hk =	1.5400 m

nod numaralarına gore plak için bulunan değerler

ME	x (m)	y (m)	Mx (Nm)	My (Nm)	Mxy (Nm)	Mb (Nm)
1	.000	.000	.0000E+00	.0000E+00	-.6142E+00	-.6132E+00
2	.000	.458	.0000E+00	.5238E-04	-.5540E+00	-.5514E+00
3	.000	.917	.0000E+00	-.2331E-04	-.3907E+00	-.3902E+00
4	.000	1.375	.0000E+00	.1252E-03	-.2274E+00	-.2263E+00
5	.000	1.833	.0000E+00	.8488E-04	-.2744E-01	-.2839E-01
6	.000	2.292	.0000E+00	.3840E-03	.1374E+00	.1396E+00
7	.000	2.750	.0000E+00	-.3061E-03	.2912E+00	.2844E+00
8	.000	3.208	.0000E+00	.1229E-02	.3719E+00	.3844E+00
9	.000	3.667	.0000E+00	-.1349E-02	.3692E+00	.3481E+00
10	.000	4.125	.0000E+00	.3949E-02	.2480E+00	.1896E+00
11	.000	4.425	.0000E+00	.3949E-02	-.2480E+00	-.1896E+00
12	.000	4.883	.0000E+00	-.1349E-02	-.3692E+00	-.3481E+00
13	.000	5.342	.0000E+00	.1229E-02	-.3719E+00	-.3844E+00
14	.000	5.800	.0000E+00	-.3061E-03	-.2912E+00	-.2844E+00
15	.000	6.258	.0000E+00	.3840E-03	-.1374E+00	-.1396E+00
.	.	.	.	.	.	.
62	2.137	.458	.2908E+00	.5115E+00	-.1401E+00	-.1402E+00
63	2.137	.917	.5032E+00	.8225E+00	-.1048E+00	-.1050E+00
64	2.137	1.375	.6160E+00	.9442E+00	-.6147E-01	-.6143E-01
65	2.137	1.833	.6773E+00	.1026E+01	-.7463E-02	-.7742E-02
66	2.137	2.292	.5973E+00	.8259E+00	.4102E-01	.4175E-01
67	2.137	2.750	.5047E+00	.6947E+00	.7825E-01	.7660E-01
68	2.137	3.208	.2428E+00	.1177E+00	.9141E-01	.9543E-01
69	2.137	3.667	.2242E-01	-.3402E+00	.7891E-01	.7326E-01
70	2.137	4.125	-.3853E+00	-.1472E+01	.4810E-01	.3340E-01
71	2.137	4.425	-.3853E+00	-.1472E+01	-.4810E-01	-.3340E-01
72	2.137	4.883	.2242E-01	-.3402E+00	-.7891E-01	-.7326E-01
73	2.137	5.342	.2428E+00	.1177E+00	-.9141E-01	-.9543E-01
74	2.137	5.800	.5047E+00	.6947E+00	-.7825E-01	-.7660E-01
75	2.137	6.258	.5973E+00	.8259E+00	-.4102E-01	-.4175E-01
76	2.137	6.717	.6773E+00	.1026E+01	.7463E-02	.7742E-02
77	2.137	7.175	.6160E+00	.9442E+00	.6147E-01	.6143E-01
78	2.137	7.633	.5032E+00	.8225E+00	.1048E+00	.1050E+00
79	2.137	8.092	.2908E+00	.5115E+00	.1401E+00	.1402E+00
80	2.137	8.550	.6985E-03	.0000E+00	.1483E+00	.1486E+00
81	2.850	.000	.6284E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
82	2.850	.458	.2682E+00	.5107E+00	.0000E+00	.0000E+00
83	2.850	.917	.4634E+00	.8352E+00	.0000E+00	.0000E+00
84	2.850	1.375	.5656E+00	.9625E+00	.0000E+00	.0000E+00
85	2.850	1.833	.6210E+00	.1049E+01	.0000E+00	.0000E+00
86	2.850	2.292	.5411E+00	.8385E+00	.0000E+00	.0000E+00
87	2.850	2.750	.4521E+00	.6920E+00	.0000E+00	.0000E+00
88	2.850	3.208	.2025E+00	.9421E-01	.0000E+00	.0000E+00
89	2.850	3.667	-.1562E-02	-.3780E+00	.0000E+00	.0000E+00
90	2.850	4.125	-.3879E+00	-.1491E+01	.0000E+00	.0000E+00
91	2.850	4.425	-.3879E+00	-.1491E+01	.0000E+00	.0000E+00
92	2.850	4.883	-.1562E-02	-.3780E+00	.0000E+00	.0000E+00
93	2.850	5.342	.2025E+00	.9421E-01	.0000E+00	.0000E+00
94	2.850	5.800	.4521E+00	.6920E+00	.0000E+00	.0000E+00
95	2.850	6.258	.5411E+00	.8385E+00	.0000E+00	.0000E+00
96	2.850	6.717	.6210E+00	.1049E+01	.0000E+00	.0000E+00

ME	x (m)	y (m)	Qx (N)	Qy (N)	Rx (rad)	Ry (rad)	w (m)
1	.000	.000	.6981E-01	.1985E+00	.6914E-07	.1966E-06	.0000E+00
2	.000	.458	.6734E+00	.1591E+00	-.6000E-04	.1576E-06	.0000E+00
3	.000	.917	.1029E+01	.9757E-01	-.1082E-03	.9664E-07	.0000E+00
4	.000	1.375	.1199E+01	.5558E-01	-.1388E-03	.5505E-07	.0000E+00
5	.000	1.833	.1263E+01	.6494E-02	-.1529E-03	.6432E-08	.0000E+00
6	.000	2.292	.1170E+01	-.2802E-01	-.1456E-03	-.2775E-07	.0000E+00
7	.000	2.750	.9117E+00	-.6493E-01	-.1255E-03	-.6432E-07	.0000E+00
8	.000	3.208	.8385E+00	-.1236E+00	-.8926E-04	-.1225E-06	.0000E+00
9	.000	3.667	-.1016E+01	-.8553E-01	-.5330E-04	-.8472E-07	.0000E+00
10	.000	4.125	.3365E+01	-.2351E+00	-.1875E-04	-.2329E-06	.0000E+00
.	.	.	.	.	.	.	.
90	2.850	4.125	.0000E+00	-.2191E+01	.0000E+00	.5210E-04	.3894E-04
91	2.850	4.425	.0000E+00	.2191E+01	.0000E+00	-.5210E-04	.3894E-04
92	2.850	4.883	.0000E+00	.1880E+01	.0000E+00	-.1046E-03	.7722E-04
93	2.850	5.342	.0000E+00	.1212E+01	.0000E+00	-.1260E-03	.1317E-03
94	2.850	5.800	.0000E+00	.9674E+00	.0000E+00	-.9661E-04	.1861E-03
95	2.850	6.258	.0000E+00	.3747E+00	.0000E+00	-.5015E-04	.2185E-03
96	2.850	6.717	.0000E+00	.1866E+00	.0000E+00	.9968E-05	.2304E-03
97	2.850	7.175	.0000E+00	-.3746E+00	.0000E+00	.7704E-04	.2084E-03
98	2.850	7.633	.0000E+00	-.5646E+00	.0000E+00	.1322E-03	.1613E-03
99	2.850	8.092	.0000E+00	-.1149E+01	.0000E+00	.1806E-03	.8766E-04
100	2.850	8.550	.0000E+00	-.1389E+01	.0000E+00	.1946E-03	.0000E+00

nod numaralarına gore kiris için bulunan değerler

ME	x (m)	y (m)	Mxk (Nm)	Myk (Nm)	Mxyk (Nm)	Mbk (Nm)
10	.000	4.125	.0000E+00	.3949E-02	.2480E+00	.1517E+01
11	.000	4.425	.0000E+00	.3949E-02	-.2480E+00	-.1517E+01
30	.712	4.125	.2674E+02	-.7474E+00	.1725E+00	.1044E+01
31	.712	4.425	.2674E+02	-.7474E+00	-.1725E+00	-.1044E+01
50	1.425	4.125	.4659E+02	-.1165E+01	.1090E+00	.6230E+00

7 . 7 Dinamik Alt Programı

Bu bölümde global alt programında bulunan GKM ve GMD nin özdeğer programında kullanılabilmesi için GKM matrisinin GMD, matrisinin boyutlarına indirgenmesi yapılmıştır. Kodlama bölümünde bulunan ayrım sayısı vasıtası ile bu işlem gerçekleştirilmiştir. Böylece program sonucunda bulunan indirgenmiş rijitlik matrisi KM ve kütle matrisi MM özdeğer alt programına gönderilmiştir.

7 . 8 Ozdeger Alt Programı

Mühendislikte ve matematikteki önemi gereği, özdeğer probleminin çözümü için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Günümüzde en yaygın olarak kullanılan yöntemler Polinom yöntemi, İterasyon yöntemi, Hotelling yöntemi, Jacobi yöntemi, Hauseholder yöntemidir. Bu yötemler çözülen matris boyutu(n), sonuçların yaklaşımı, özdeğer ve özvektörlerin eşzamanlı olarak bulunabilmesine göre birbirlerine üstünlükleri vardır.

Polinom yönteminde karakteristik denklemin elde edilmesi matris boyutu büyüdükçe zorlaşır. Bilgisayar uygulaması yapılırken Faddeev-Leverrier yöntemi

kullanılarak n=10'a kadar karakteristik denklem kolayca elde edilir. Bu denklemin çözümü ile sonuçlara ulaşılır.

İterasyon yöntemi genellikle en büyük ve en küçük özdeğerlerin bulunmasında kullanılır. İterasyon aşamasında özdeğer ve özvektörler aynı anda bulunabilir ancak n büyüdükçe işlem zorlaşır.

Hotelling yönteminde n<10 için uygun sonuçlar elde edilebilir.

Hauseholder yöntemi n>20 için kullanılabilecek en iyi yöntem olup ortogonal dönüşüm esasına dayanır.

Jacobi yöntemi n<20 için en yaklaşık ve doğru sonucu veren yöntemlerden biridir. n>20 için bazı özdeğerler yanlış bulunabilmektedir. Bilgisayar programında çözülen problemde bu yöntem kullanılacaktır.

Ozdeger alt programının sonunda, bulunan özdeğer ve özvektörlerden 12 tanesinin sunulması yeterli bulunmuştur.

Tablo 7.5 Dinamik analiz sonuçlarını gösteren program çıktısı

MURAT GÜL'ÜN SONLU ELEMAN PROGRAMI

E =	70999998464.000 N/m^2	Lx =	.2030 m	Ly =	.2030 m
ro =	2700.000 N/m^3	Mu =	.2700	h =	.0014 m
q =	1.000 N/m^2	bk =	.0063 m	hk =	.0141 m

OMEGA 1= 702.931 Hz	OMEGA 2= 748.807 Hz	OMEGA 3= 1010.296 Hz
OMEGA 4= 1029.027 Hz	OMEGA 5= 1293.939 Hz	OMEGA 6= 1363.372 Hz
OMEGA 7= 1459.750 Hz	OMEGA 8= 1464.626 Hz	OMEGA 9= 1582.651 Hz
OMEGA10= 1587.021 Hz	OMEGA11= 2069.648 Hz	OMEGA12= 2070.634 Hz

NOD	X	Y	VEKTÖR(1)	VEKTÖR(2)	VEKTÖR(3)	VEKTÖR(4)
1	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.000	.025	.000	.000	.000	.000
3	.000	.049	.000	.000	.000	.000
4	.000	.074	.000	.000	.000	.000
5	.000	.098	.000	.000	.000	.000
6	.000	.105	.000	.000	.000	.000
7	.000	.129	.000	.000	.000	.000
8	.000	.154	.000	.000	.000	.000
9	.000	.178	.000	.000	.000	.000
10	.000	.203	.000	.000	.000	.000
11	.023	.000	.000	.000	.000	.000
12	.023	.025	.177	.185	-.475	.494
13	.023	.049	.782	.786	-2.000	2.039
14	.023	.074	.499	.382	-.879	.755
15	.023	.098	.047	.111	-.020	.048
16	.023	.105	-.047	.111	.020	.048
17	.023	.129	-.499	.382	.879	.755
18	.023	.154	-.782	.786	2.000	2.039
19	.023	.178	-.177	.185	.475	.494
20	.023	.203	.000	.000	.000	.000
21	.045	.000	.000	.000	.000	.000
22	.045	.025	.922	.962	-2.042	2.122
23	.045	.049	4.062	4.072	-8.557	8.724
24	.045	.074	2.470	1.992	-3.693	3.227
25	.045	.098	.191	.545	-.067	.197
.	.	.	.	.	.	.
99	.203	.178	.000	.000	.000	.000
100	.203	.203	.000	.000	.000	.000

8 . SONUÇLAR

1. İkinci bölümde elde edilen fonksiyonel sayesinde sabit ve değişken kesitli çubukların statik ve dinamik analizinde daha gerçekçi sonuçlara ulaşma imkanı doğmuştur.

2. Sabit ve değişken kesitli çubuklar için eğilmenin yanı sıra kayma etkisi hesaba katılarak elde edilen statik analiz sonuçlarıyla kesin sonuçlar karşılaştırılmış, aralarında büyük yakınlık gözlenmiştir.

3. Çubuk yüksekliği artıkça çökmelerdeki kaymanın etkisi artmaktadır. Buna bağlı olarak doğal frekanslarda kaymanın olmadığı kabulüne göre bir azalma söz konusudur.

4. Değişken kesitli çubuklarda kesit daraldıkça doğal frekanslar küçülmektedir. Buna göre elde edilen mod şekillerinde kesit daraldıkça çubuğun daha büyük serbest titreşim yaptığı gözlenmiştir.

5. Bu çalışmanın takviyeli plaklar için yapılan kısmında daha önce [7] çalışmasında elde edilen fonksiyoneller kullanılmıştır. Plak ve plak-kiriş elemanları için Reissner plak teorisini esas alan iki ayrı fonksiyonel Gàteaux diferansiyeli kullanılarak üretilmiştir. Plak-kiriş fonksiyonelinde, kiriş elemanında eğilme momentinin sonucunda oluşan burulma momenti de dikkate alınmıştır.

6. Elde edilen fonksiyoneller, çökme ve her iki yöndeki moment, burulma momenti, kesme kuvvetleri , dönmeler olmak üzere toplam 9 bilinmeyeni içerir.

7. Sonlu eleman formülasyonunda 4 nodlu dikdörtgen eleman kullanılmıştır. Her eleman için 36 bilinmeyen tanımlanmıştır. Statik analiz için elde edilen eleman matrisleri ve yük matrislerinin yanı sıra dinamik analizde kullanılan kütle matrisleri üretilmiştir.

8. Sonlu eleman formülasyonu yapıldıktan sonra yeni bir bilgisayar programı yazılmıştır. ‘Fortran Power Station’ ortamında yazılan program statik ve dinamik analizi aynı anda yapabilme imkanına sahiptir. Bilgisayar programındaki otomatik

sınır koşulu tanımlamasındaki kolaylıklar ve sonuç çıktılarındaki düzenleme kullanıcıya kolaylık sağlar.

9. Yeni yazılan bilgisayar programı kullanılarak sayısal örnekler çözülmüştür. Öncelikle farklı mesnetlenme türüne sahip plak için statik uygulamaları yapılmış ve elde edilen sonuçlar, daha önce yapılan çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçların uyumlu olduğu gözlenmiştir. Reissner plak yaklaşımı kullanılması nedeniyle kaymanın etkisi dikkate alındığından kalınlıktaki artışın sonuçlara yansıdığı göze çarpmaktadır.

10. Takviyeli plakların statik analizinin yapıldığı örneklerde elde edilen sonuçlarla [7] çalışmasında bulunan sonuçlar arasında paralellik vardır. Kiriş yüksekliği artırıldığında kirişin bulunduğu bölgenin giderek rijitleştiği ankastre mesnet gibi davrandığı görülmüştür. Kiriş yüksekliği plak yüksekliğine eşit alındığında plak için elde edilen değerlere ulaşılmıştır.

11. Dinamik analiz yapılırken öncelikle farklı mesnetlenme türüne sahip plak için değişik örnekler çözülmüştür. Elde edilen sonuçlarla literatürdeki çalışmaların sonuçları arasında uyum gözlenmiştir. Kaymanın etkisi dikkate alındığından [11] çalışmasında sunulan kesin çözüme göre doğal frekanslarda bir azalma söz konusudur.

12. Takviyeli plakların dinamik çözümünde elde edilen sonuçlarla literatürdeki çalışmaların sonuçları karşılaştırılmış , doğal frekanslardaki kayma etkisinden kaynaklanan azalma burada da gözlemlenmiştir.

13. Takviye kiriş yüksekliği artırıldığında doğal frekanslar büyümektedir.

14. Daha önce yapılan çalışmalarda da gözlenebildiği gibi takviye sayısı arttıkça sistemin rijitliği artmakta ve doğal frekanslarda artış söz konusu olmaktadır.

15. Karşılıklı kenarlarından ankastre mesnetli diğer kenarlarından kirişe oturan sistem çözüldüğünde kiriş rijitliği arttıkça ankastre mesnet davranışı dinamik çözümde de gözlemlenmektedir. Kiriş rijitliği artırıldığında bulunan frekanslar, dört tarafından ankastre mesnetli plak için bulunan frekanslarla paralellik göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Bakioğlu, H. , Engin, H. Ve Kadıoğlu, N.** ,1992. Mukavemet Problemleri II Beta Basım Yayım Dağıtım AŞ.,İstanbul

[2] **Ertepınar, A. , Demiray, H. , İnan, E., Aksoğan, O., Aköz, A.Y.** 1987. Şekil Değiştirebilen Cisimlerin Mekaniği, *KTÜ yayınları*, Trabzon

[4] **Clough W. and Penzien J** .,1975 . Dynamic of Structures, McGraw Hill, Inc.

[5] **Panch, W.** 1975, Theories of elastic plates, Noordhoff Int. Publication

[6] **Uzcan, N.** 1987, Kiriş-plak sistemlerinin çözümlerinde varyasyonel yöntem, *Yüksek Lisans Tezi* , İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[7] **Sarı, M.S.**,1998, Takviyeli plakların karışık sonlu elemanlar metodu ile çözümü, *Yüksek Lisans Tezi* , İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[8] **Eratlı ,N., Aköz , A.Y.,** 1996, The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Computers and Structures* ,65, 515-519

[9] **Omurtag, M.H., Özüdok , A.and Aköz , A.Y.,Özçelikörs. Y.**, 1997, Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40,295-317

[10] **Aköz , A.Y.,Özçelikörs. Y.**, 1993, A mixed finite element formulation of eccentrically stiffened plates , *Bulletin Tech. Univ.İstanbul*, 46, 257-277

[11] **Ballendra, T., Shanmugam, N.E**.,1985 ,Free vibration of plated structures by Grillage method, *Journal of Sound and Vibration*, 99(3), 333-350

[12] **Chen, C.J., Liu, W., Chern, S.M**.,1994,Vibration analysis of Stiffened Plates, *Computers and Structures*, 50(4), 471-480

[13] **Bedair, K.O.**, 1997, Stability, free vibration and bending behavior of multistiffened plates, *Journal of Engineering Mechanics*, April 1997, 328-337

[14] **Harık, I.E., Guo, M.,** 1993, Finite element analysis of eccentrically stiffened plates in free vibration, *Computers and Structures*, 49(6), 1007-1015

[15] **Mukhopadhyay, M.,** 1989, Vibration and stability analysis of stiffened plates by semi-analytic finite difference method, part 1: consideration of bending displacement only, *Journal of Sound and Vibration,* 130(1), 27-39

[16] **Mukhopadhyay, M.,** 1989, Vibration and stability analysis of stiffened plates by semi-analytic finite difference method, part 2: consideration of bending and axial displacement , *Journal of Sound and Vibration*, 130(1), 41-53

[17] **Mukhopadhyay, M., Mukherjee, A.,** 1988, Finite element free vibration of eccentrically stiffened plates, *Computers and Structures*, 30(6), 1303-1317

[18] **Holopainen, T.P.,** 1995, Finite element free vibration analysis of eccentrically stiffened plates, *Computers and Structures*, 56(6), 993-1007

[19] **Bhimaraddi, A., Carr, A.J., Moss, P.J.,** 1989, Finite element analysis of laminated shells of revolution with laminated stiffeners, *Computers and Structures*, 33(1), 295-305

[20] **Clifton ,R.J.,Change J.C.L and Au,T.,**1963 ,Analysis of Orthotropic Plate Bridges, Proc. ASCE. Journal of Structural Division. 39 ,133-171

[21] **İz, S,** 1990, Ortotropik plaklar için yeni bir sonlu eleman metodu, *Doktora tezi*, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[22] **Eratlı ,N., Aköz , A.Y.,** 2002, Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structural Engineering and Mechanics Computers* , 13, No.3, 277-298,

[23] **Aköz , A.Y., Uzcan (Eratlı) ,N.,** 1992, The new functional for Reissner plates and its application, *Computers and Structures*, 44(5), 1139-1144

[24] **Timoshenko, S., Woinowsky-Kriger, S.,** 1959, Theory of plates and shells, McGraw-Hill Book Company Inc., Newyork , Toronto, London

[25] **Olson, M.D. , Hazell, C.R.,** 1977, Vibration studies on some integral rib stiffened plates ,*J. Sound and Vibration* ,50, 41-61

ÖZGEÇMİŞ

Murat GÜL 1974 yılında Sivas'ta doğdu. İlk öğrenimini İstiklal İlkokulu'nda orta öğrenimini Behrampaşa Ortaokulu' nda ve Sivas Lisesi'nde tamamladı.1992 yılında başladığı Selçuk Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 1996 yılında mezun oldu. Yüksek lisans eğitimi süresince İSKİ 'de kontrol mühendisi olarak çalıştı. Halen DSİ XIX. Bölge Müdürlüğünde İnşaat Mühendisi olarak çalışmaktadır.