İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

X-IŞINLI BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİDE FİLTRELENMİŞ GERİ İZDÜŞÜM ALGORİTMALARININ PARALEL VE YELPAZE DEMET AÇILI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Fatih Enes ÖMEROĞLU

Anabilim Dalı: ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı: BİYOMEDİKAL MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2003

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

X-IŞINLI BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİDE FİLTRELENMİŞ GERİ İZDÜŞÜM ALGORİTMALARININ PARALEL VE YELPAZE DEMET AÇILI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Fatih Enes ÖMEROĞLU
(504991207)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Mayıs 2003

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Sedef KENT
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Tamer ÖLMEZ (İ.T.Ü.)
Yrd.Doç.Dr. Tanju YELKENCİ (M.Ü.)

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

"X ışınlı bilgisayarlı tomografide filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının paralel ve yelpaze demet açılı uygulamaları" konulu tez çalışmamı gerçekleştirmemde bilimsel desteği, değerli düşünceleri ve anlayışıyla bana her aşamada yardımcı olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Sedef Kent'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bugüne kadar çalışmalarım sırasında her türlü desteklerini benden esirgemeyen, sabır ve anlayış göstererek daima yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma da ayrıca teşekkür etmek isterim.

Mayıs, 2003 Fatih Enes ÖMEROĞLU

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **iv**
TABLO LİSTESİ **v**
ŞEKİL LİSTESİ **vi**
ÖZET **viii**
SUMMARY **x**

1.GİRİŞ **1**
1.1 X-Işınlarının Bulunması 3
1.2 X-Işınlı Bilgisayarlı Tomografinin Gelişimi 6
1.3 X-Işınlı Bilgisayarlı Tomografinin Mantıksal Temeli 7

2. KIRINIMSIZ KAYNAKLARLA GÖRÜNTÜLEME ALGORİTMALARI **11**
2.1 Doğru İntegralleri ve İzdüşümler 11
2.2 Fourier Dilim Teoremi 18
2.3 Paralel İzdüşümler için Görüntüleme Algoritmaları 23
2.3.1 Filtrelenmiş Geri-İzdüşüm Algoritmasının Mantıksal Temeli 23
2.3.2 Algoritmanın Paralel Uygulaması 25
2.4 Yelpaze İzdüşümlerinden Görüntüleme 36
2.4.1 Eş Açılı Işınlar 38
2.4.2 Eşit Aralıklarla Yerleştirilen Eş Doğrusal Detektörler 44
2.4.3 Bir Yeniden Sıralama Algoritması 52

3. KIRINIMSIZLIK İÇİN İZDÜŞÜM BİLGİLERİNİN ÖLÇÜMÜ **54**
3.1 X-Işını Tomografisi 55
3.1.1 Monokromatik X-Işını İzdüşümleri 56
3.1.2 Demet Kuvvetlendirme 58
3.1.3 Saçılım 59
3.1.4 Farklı Tarama Yöntemleri 60
3.1.5 Uygulamalar 67

4. SONUÇLAR **70**

KAYNAKLAR **84**

EK A **90**

EK B **91**

EK C **93**

ÖZGEÇMİŞ **96**

KISALTMALAR

AFD : Ayrık Fourier Dönüşümü
BT : Bilgisayarlı Tomografi
DSR : Dinamik Uzamsal Görüntüleyici
EKG : Elektrokardiyogram
HFD : Hızlı Fourier Dönüşümü
MRI : Manyetik Rezonans Görüntülemesi
NMR : Nükleer Manyetik Rezonans
PET : Pozitron Emisyon Tomografisi
SD : Sıfır Doldurma
SPECT : Tekli Foton Emisyonu Tomografisi
THFD : Ters Hızlı Fourier Dönüşümü

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1 **:** Tomografi simülasyonları için parametrelerin özetleri 17
Tablo 4.1 **:** 48'lik sıfır doldurma için ölçülen ortalama işlem süreleri 81
Tablo 4.2 **:** 768'lik sıfır doldurma için ölçülen ortalama işlem süreleri 82
Tablo A.1 **:** Dört farklı Fourier dönüşümü 91

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Bir cismin farklı açılardan alınan izdüşümleri 8
Şekil 2.1 : Bir θ açısı için doğru integralleri ve izdüşümler 12
Şekil 2.2 : Paralel izdüşümler 13
Şekil 2.3 : Yelpaze ışın demeti izdüşümü 14
Şekil 2.4 (a) : Shepp ve Logan "kafa modeli". 15
Şekil 2.4 (b) : Shepp ve Logan "kafa modeli"nin bilgisayar çözümleri için simüle edilmiş modeli 15
Şekil 2.5 : Bir elipsin izdüşümünün analitik gösterimi 16
Şekil 2.6 : Merkezi (x_1, y_1) 'e yerleştirilmiş ve büyük ekseni α kadar döndürülmüş bir elipsin izdüşümü 17
Şekil 2.7 : İzdüşümün uzay domeni ve frekans domeni gösterimi 20
Şekil 2.8 : Frekans Domeninde İzdüşümler 22
Şekil 2.9 : Bir izdüşümden elde edilen frekans domeni verisi 24
Şekil 2.10 : $Q_{\theta_i}(t)$ filtreli izdüşümü 28
Şekil 2.11 : Hamming penceresi örneği 29
Şekil 2.12 : İdeal geri-izdüşüm filtresi dürtü yanıtının yaklaşık değeri 31
Şekil 2.13 : Filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması için ideal filtre yanıtı 32
Şekil 2.14 : Şekil 2.13'teki filtrenin dürtü yanıtı 33
Şekil 2.15 : İdeal filtre ile (düzgün doğru) ve sınırlı bant filtresi'nin (kırık doğru) AFD'si 35
Şekil 2.16 : Eşit açılı, farklı detektör aralıklı yelpaze ışın demeti 37
Şekil 2.17 : Eşit açılı, eşit detektör aralıklı yelpaze ışın demeti 37
Şekil 2.18 : Farklı açılı, eşit detektör aralıklı yelpaze ışın demeti 38
Şekil 2.19 : Eşit açılı demetin kapsamlı gösterimi 39
Şekil 2.20 : Eşit açılı demetin kutup koordinatlarındaki gösterimi 41
Şekil 2.21 : Paralel geri-izdüşüm 45
Şekil 2.22 : Yelpaze geri-izdüşüm 45
Şekil 2.23 : $Q_{\beta_i}(\gamma)$ filtrelenmiş izdüşümünün (x,y)'ye katkısı 46
Şekil 2.24 : Eşit detektör aralıklı yelpaze izdüşümü 47
Şekil 2.25 : Eşit aralıklı detektörler için görüntü oluşumu algoritmasının türevinde kullanılan bütün parametrelerin temsili 47
Şekil 2.26 : Kutup koordinatlarındaki parametrelerin temsili 49
Şekil 3.1 : Bir x-ışını tüpünün, bir x-ışını demeti ile bir homojen materyali aydınlatması 55
Şekil 3.2 : Bir paralel x-ışını demetinin, insan vücudu kesiti içerisinde yayılması 57
Şekil 3.3 : İki farklı izdüşüm üzerindeki saçılma etkisi 60
Şekil 3.4 : Birinci-kuşak paralel izdüşüm alan bir tarayıcı 61
Şekil 3.5 : İkinci-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı 62
Şekil 3.6 : Üçüncü-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı 63
Şekil 3.7 : Bir ksenon gaz dedektörü 64

Şekil 3.8 : Dördüncü-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı 65
Şekil 3.9 : Tipik bir insan kafası tomografisi 68
Şekil 3.10 : Katı yakıtlı bir roket motorunun fotoğrafı 68
Şekil 3.11 : Roket motorunun x-ışını tomografisiyle alınmış bir kesiti 69
Şekil 4.1 : Uygulamalarda kullanılan 256x256'lık "Shepp ve Logan kafa modeli ... 70
Şekil 4.2 : 304 elemanlı ideal filtre yanıtı 71
Şekil 4.3 : 304 elemanlı Chris Henze rampa fonksiyonu yanıtı 71
Şekil 4.4 : İdeal filtre ile filtrelenmiş 64x64'lük görüntü 72
Şekil 4.5 : Chris Henze rampa fonksiyonu ile filtrelenmiş 64x64'lük görüntü 72
Şekil 4.6 : 768 eleman sıfır doldurma sonucunda yeniden oluşturulmuş görüntü 73
Şekil 4.7 : Hamming penceresi 74
Şekil 4.8 : Hamming penceresi kullanılmadan oluşturulan 1024x1024'lük görüntü..... 75
Şekil 4.9.a : 256 ışın ve 768 sıfır doldurma için izdüşümler 76
Şekil 4.9.b : 256 ışın ve 768 sıfır doldurma için filtrelenmiş izdüşümler 76
Şekil 4.9.c : 256 ışın ve 768 sıfır doldurma için yeniden oluşturulmuş görüntü 76
Şekil 4.10.a : 512 ışın ve 768 sıfır doldurma için izdüşümler 77
Şekil 4.10.b : 512 ışın ve 768 sıfır doldurma için filtrelenmiş izdüşümler 77
Şekil 4.10.c : 512 ışın ve 768 sıfır doldurma için yeniden oluşturulmuş görüntü 77
Şekil 4.11 : 200 ışın için yeniden oluşturulan görüntü..... 78
Şekil 4.12.a : 128 ışın ve 256 açı için yeniden oluşturulan görüntü 79
Şekil 4.12.b : 128 ışın ve 256 açı için filtreli izdüşümler..... 79
Şekil 4.13 : 64 açı, 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü 80
Şekil 4.14 : 16 açı, 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü 80
Şekil B.1.a : 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü (48'lik sıfır doldurmayla)..... 91
Şekil B.1.b : 256 ışın için izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla) 91
Şekil B.1.c : 256 ışın için filtrelenmiş izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)..... 91
Şekil B.2.a : 512 ışın için yeniden oluşturulan görüntü (48'lik sıfır doldurmayla)..... 92
Şekil B.2.b : 512 ışın için izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla) 92
Şekil B.2.c : 512 ışın için filtrelenmiş izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)..... 92

X-IŞINLI BİLGİSAYARLI TOMOGRAFİDE FİLTRELENMİŞ GERİ İZDÜŞÜM ALGORİTMALARININ PARALEL VE YELPAZE DEMET AÇILI UYGULAMALARI

ÖZET

Tomografi, bir cismin farklı açılardan alınan izdüşüm bilgilerinden, o cismin kesit görüntüsünün elde edilmesi işlemidir. Zira tomografi, kelime anlamı itibarı ile de "kesit resim" demektir. Tümüyle matematiksel bir yaklaşım ile, bir fonksiyonun izdüşümlerinden yeniden nasıl anlamlandırılabileceği probleminin çözümü, Radon'un 1917 yılında yaptığı çalışmalara kadar dayanmaktadır. X-ışınlarının Rontgen tarafından keşfi ise çok daha eskilere, 1895 yılına kadar uzanmaktadır. Öte yandan ilk tomografik tarayıcıların ortaya çıkması için 1972 yılına kadar beklenilmesi gerekmiştir. Zira Radon'un ortaya attığı matematiksel ilkeler paralelinde, x-ışınları ile izdüşümleri alınmış 2-boyutlu bir cismin görüntüsünün yeniden oluşturulabilmesi için çok büyük sayıda denklemin yüksek hızda çözülmesi gerekmektedir. Bu nedenle bilgisayarların hesap kapasiteleri yeterince artmadan 1970'li yıllara kadar ilk tarayıcıları üretmek mümkün olamamıştır.

İlk x-ışınlı bilgisayarlı tomografi makinesinin G. N. Hounsfield ve Alan Cormack tarafından 1972 yılında icat edilmesi klasik radyografiden bu yana tıbbi görüntüleme alanında devrim yaratan en önemli gelişmedir. Öyle ki yeni bir kavram olan görüntü işleme sonucunda elde edilen verilerin geliştirilebilme potansiyeli daha önceleri düşünülemeyecek kadar yüksekti. Bu sayede hekimlere tanıya yönelik daha fazla bilgi sağlanması temin edilebilmiş ve sonuç olarak da tedavi aşamasına geçiş klasik tıbbın sınırlarının çok ötesinde hızlandırılabilmiştir. Kısacası 1970'lerin ilk yıllarında başlayan tüm BT evriminin anahtar kelimesinin x-ışınlı bilgisayarlı tomografi olduğu rahatlıkla söylenebilir.

X-ışınlı BT ileri düzeyde bilgisayarlı işaret işleme ile x-ışını teknolojisinin bir ürünüdür. Vücuttan geçen x-ışını demeti farklı dokularda farklı miktarlarda zayıflamaya uğrar. Daha sonra zayıflamış olan bu x-ışınları, detektörler tarafından toplanır ve analog-sayısal çeviriciler ile sayısal verilere çevirilir. Bu sayısal veriler ise bilgisayarlı görüntüleme algoritmalarının giriş değişkenleri olarak kullanılır. Kısacası x-ışınlı BT, x-ışını üretimi, deteksiyon, kuantalama, işaret işleme ve yeniden görüntü oluşturma tekniklerinin sırasıyla uygulanmasını gerektiren karmaşık bir görüntüleme yöntemidir. Fakat BT'nin ana yapıtaşının, görüntüleme algoritmaları olduğu rahatlıkla söylenebilir. Bu açıdan x-ışınlı bilgisayarlı tomografinin anlaşılmasında bu algoritmaların incelenmesi büyük önem taşır.

X-ışınlı bilgisayarlı tomografide görüntü oluşturma işlemleri için dört farklı yöntem kullanılır. Bunlar, geri izdüşürme metodu, iterasyon metodu, Fourier dönüşümü metodu ve filtrelenmiş geri izdüşüm metodudur. Sözü edilen yöntemler içerisinde

görüntü oluşumunda en doğru sonucu, en hızlı şekilde veren metod ise filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasıdır. Günümüzde üretilen bütün ticari BT tarayıcıları bu algoritmaya dayalı olarak çalışmaktadır. Dünyadaki yaygın kabulün bir sonucu olarak bu tez çalışmasının ana konusu da filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasıdır. Bu algoritmaya göre Fourier Dilim Teoremine dayanarak bir izdüşümünün ölçülmesi işlemi, aslinda iki boyutlu bir filtreleme işleminin uygulanması olarak görülebilir. Elimizde bir tek izdüşüm ve onun Fourier dönüşümünün olduğunu varsayalım. Fourier Dilim Teoremi'ne göre bu izdüşümün bir boyutlu Fourier dönüşümü, ölçümün yapıldığı açı ile frekans uzayına yerleştirilmiş bir tek doğru üzerinde cismin iki-boyutlu Fourier dönüşümünün değerlerini göstermektedir. Bu izdüşümün Fourier dönüşüm değerleri, cismin iki-boyutlu Fourier uzayına yerleştirildiğinde, diğer izdüşümlerin sıfır olduğu farzedilerek ve iki-boyutlu ters Fourier dönüşümü bulunarak, kötü kalitede ancak basit bir görüntü oluşturulabilir. Kısacası bu şekilde oluşturulan bir görüntünün, asıl cismin basit bir filtre ile çarpılan kendi Fourier dönüşümüne eşit olduğu rahatlıkla söylenebilir.

X-ışınlı BT'de izdüşüm bilgisini toplamanın ise iki ana yolu vardır. Bunlardan ilki paralel izdüşüm, ikincisi ise yelpaze demet izdüşümü olarak bilinir. Şu anda üretilen son nesil tarayıcıların hepsi yelpaze demet izdüşümü metodunu kullanmaktadır. Sadece ilk kuşak tarayıcılar daha yavaş olan paralel izdüşüm tekniklerini kullansa da tez çalışmasında anahtar rolü bu yöntem oynamaktadır. Zira çalışmada derinlemesine açıklandığı üzere paralel izdüşümde kullanılan algoritmalar birtakım değişikliklerle aynı zamanda yelpaze demet izdüşümlerinde de kullanılabilmektedir.

Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının diğer metotlardan çok daha üstün olduğu ilk kez 1974 yılında Shepp ve Logan tarafından gösterilmiştir. Bu nedenle tez çalışmasında kullanılan algoritmaların ve yazılan programların doğruluğunun belirlenmesinde yine Shepp ve Logan'ın bu amaçla ortaya attığı meşhur "kafa modeli" kullanılmıştır. Yapılan uygulamalarda tomogramı elde edilecek kesit görüntü olarak bu kafa modeli seçilmiş ve filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının paralel yorumunu esas alınarak farklı sayıda açı ve ışın kombinasyonu için yeniden oluşturulan görüntüler analiz edilmiştir. Üretilen programda filtreleme adımı için ideal bir filtre seçilmiş, ayrıca aksi bir durum için de değerlendirmeler yapılmıştır. Yeniden oluşturulan görüntülerin kalitesini attırmak için ise özellikle sıfır doldurma ve düzleştirme filtrelerine başvurulmuştur. Düzleştirme filtresi olarak bu tip uygulamalarda genel bir kabul görmüş olan Hamming penceresi tercih edilmiştir. Bununla birlikte programların farklı ışın ve açı kombinasyonları için işlem süreleri de değerlendirmeye alınarak en etkin görüntü oluşumu belirlenmeye çalışılmıştır.

PARALLEL AND FAN BEAM IMPLEMENTATIONS OF FILTERED BACK PROJECTION ALGORITHMS IN COMPUTERIZED X-RAY TOMOGRAPHY

ABSTRACT

Tomography is the process of reconstructing a cross-sectional image of an object, using projection data taken from various points of that object. Because, by its terminological meaning, tomography means "cross-sectional image". With a totally mathematical approach, the solution of the problem of giving another meaning to a function by its projections is based on the studies which Radon made in year 1917. Discovery of x-rays by Röentgen is even older than that. Röentgen discovered x-rays in year 1895. On the other hand, mankind had to wait till year 1972. Because, parallel to the mathematical principles that Radon had brought up, to reconstruct an image of a two dimensional object of which projections are taken using x-rays, a very large number of equations require to be solved very quickly. Because of this, it had not been possible to build the first scanners before the calculation capacities of computers advanced to a satisfying level, until 1970's.

The discovery of the first computerized x-ray tomography machine by G. N. Hounsfield and Alan Cormack in year 1972 is the most important advance in medical imaging, since the classical radiography. So that, the potential of improvability of the data obtained as the result of image processing, which is a recent concept, was higher than it had been able to be imagined before. By means of this, it became possible to give doctors more data towards diagnosis, and as a result, transition to medical treatment stage was quickened far beyond the limits of classical medicine. Briefly, it can easily be said that, the keyword to computerized tomography evolution, which started in early 1970's, is computerized x-ray tomography.

Computerized x-ray tomography is a product of advanced level computerized signal processing and x-ray technology. The x-ray beam going through the body attenuates at various amounts in various tissues. Then, these attenuated x-rays are collected by detectors, and with analog-digital converters, they are converted into digital data. These digital data are used as entry variables of computerized image reconstruction algorithms. Shortly, computerized x-ray tomography is a complicated method in which x-ray generating, detection, quanting, signal processing and image reconstruction techniques are required to be applied respectively. However, it can easily be said that, the main building stone of computerized tomography is the image reconstruction algorithms. In this respect, for understanding computerized x-ray tomography, the study on these algorithms carries a great importance.

In computerized x-ray tomography, four different methods are used for image reconstruction processes. These are, back-projecting method, iteration method,

Fourier transform method and filtered back projection method. Among the mentioned methods, the method which gives the most accurate result at the least time is filtered back projection algorithm. All of the commercial computerized tomography devices currently in production all around the world use this method. As a result of the widespread acceptance it gained in the world, the main subject of this thesis study is the filtered back projection algorithm. In accordance with this algorithm, the process of measuring a projection can be considered as the application of a two dimensional filtering process, because of the existance of Fourier Slice Theorem. Let us consider that we have only one single projection and its Fourier transform. In accordance with Fourier Slice Theorem, one dimensional Fourier transform of this projection gives the values of two dimensional Fourier transform of the object along one single line that is placed on the frequency space with the angle measured. If the Fourier transform values of this projection are substituted in the two dimensional Fourier domain of the object, considering that the other projections are equal to zero, and finding the two dimensional Fourier transform, only a simple, low-quality image can be generated. Shortly, it can easily be said that, an image that was generated this way is equal to the original object's Fourier transform that is multiplied by a simple filter.

In x-ray computerized tomography, there are two main methods to collect projection data. The first one is called parallel projection, and the second one is called fan beam projection. All of the latest-generation scanners currently being produced use fan beam projection method. Even though only the first-generation scanners use parallel projection techniques that are slower, this method plays the key part in the introduction to this thesis study. Because, as explained extensively in the study, after some changes, the algorithms used in parallel projections can also be used in fan beam projections.

It was first indicated by Shepp and Logan in 1974 that filtered back-projection algorithms are much superior to the other methods. For this reason, in determination of the accuracy of the algortihms used and programs written in this thesis study, the famous "head phantom" which Shepp and Logan had brought up for this purpose is used. In the applications made, this head phantom was used as the cross-sectional image of which tomogram was to be obtained. Based on the parallel implementation of filtered back projection algorithms, images that were reconstructed at various numbers of angle and ray combinations were analyzed. In the program produced, an ideal filter was selected for the filtering stage, and also evaluations were made for in case of occurence of a hitch. To increase the quality of the reconstructed images, especially zero-padding and smoothing filters were used. As the smoothing filter, Hamming window, which has gained a general acceptance in this kind of applications, was preferred. In addition, the most effective image reconstruction was tried to be determined, evaluating also the durations of the programs in various angle and ray combinations.

1. GİRİŞ

Tıbbi görüntüleme bilimi her türde radyasyonun doku ile etkileşimi ve bu etkileşimden klinik açıdan yararlı verilerin elde edilmesini sağlayan teknolojik gelişmeler ile yakından ilgilidir. Bu veriler genelde bir görüntü formatı içindedir . Tıbbi görüntüler, ilk kez bundan 110 yıl kadar önce Röntgen tarafından bulunan ve günümüzde de basit göğüs röntgeninde kullanılan izdüşümde olduğu kadar basit, ya da x-ışınları kullanılarak gerçekleştirilen bilgisayarlı tomografi (BT), veya yoğun manyetik alanlar kullanılarak yapılan manyetik rezonans görüntülemesi (MRI) kadar karmaşık olabilir.

Aslında her ne kadar tıbbi görüntülemenin Röntgen'in 1895'te x-ışınlarını bulması ve bu sayede canlı bedenindeki kemik ve diğer yapıların görülmesini sağlamasıyla başladığı söylenirse de [1], çağdaş tıbbi görüntülemenin 1970'lerde bilgisayarlı tomografinin gelişi ile başladığı aşikardır [2,3]. Eski, ya da bizim klasik dediğimiz tıbbi görüntüleme yöntemi bazı radyasyon türlerinin dokularla etkileşimi sonucu elde edilen görüntüleri kullanır. Klasik görüntülemeden ne kastettiğimizi anlatmak için üç örnek verebiliriz. Birincisi geleneksel x-ışını yöntemidir ki bunda bir x-ışını huzmesi hastadan geçirilerek film üzerine yöneltilir. Banyo edilen film hastanın gölge görüntüsünü, yani x-ışınlarının hastanın bedeninden geçişinin görüntüsünü verir. Bu görüntüler x-ışınlarının doku içinde, sayısal olmasa bile, hangi ölçüde zayıfladığını gösterir. Böylece yumuşak bir doku kesiti x-ışınlarını daha fazla zayıflatan aynı kalınlıktaki kemiğin kesitinden daha koyu görünür. Ancak, yeni teknolojik gelişmelere rağmen geleneksel x-ışını ile görüntüleme yönteminin çoğu tıp kuruluşunda bugün de yaygın biçimde kullanıldığını gözden uzak tutmamak gerekir.

Klasik görüntüleme yöntemine ikinci örnek olarak geleneksel bir nükleer tıp prosedürünü ele alalım. Burada hastaya radyoaktif madde enjekte edilerek hastanın üzerinde belirlenen biçimde hareket eden bir detektör vasıtası ile radyoaktif maddenin ilerleyişi izlenir. Bu detektörün kaydettiği görüntünün uzamsal çözünürlüğü genelde zayıf olsa da, bu yöntemin en önemli avantajı radyoizotopu

algıladığı andan itibaren fizyolojik fonksiyonu saptayabilmesidir. Geleneksel nükleer tıp görüntüsünün, kullanılan radyoizotopun yerinin ve konsantrasyon derecesinin doğrudan ölçümünü sağlayan bir yöntem olduğu açıktır.

Klasik görüntüleme yöntemine son örnek olarak geleneksel tıbbi ultrasonu ele alalım. Burada hastaya bir ultrason enerji darbesi uygulanır ve geri dönen eko sinyali aynı iletim cihazı tarafından kaydedilir. İletim cihazını farklı açılarda oynatarak ya da hareket ettirerek (ya da bir iletim düzeneği kullanarak) her pozisyona ait eko sinyalleri kaydedilir ve incelenen alanın kesitsel bir görüntüsü doğrudan video monitörüne yansıtılır. Ultrason görüntüleri aslında eko yoğunluklarının bir haritası olup ultrason darbesinin doku ile etkileşiminin de direkt bir sonucudur.

Modern ya da geleneksel tıbbi görüntüleme işlemi iki aşamalı bir süreç olarak açıklanabilir. Bunlardan birincisi herhangi bir tür radyasyonun doku ile etkileşimine ait veri elde etmek, ikincisiyse belirli matematiksel yöntemler ve hesaplama araçları kullanarak bu verileri görüntüye (ya da görüntü dizisine) dönüştürmektir. Gerek klasik ve gerekse modern görüntüleme için yapılan tanımlamaların bu bölümün birinci paragrafında belirtilen genel tıbbi görüntüleme tanımına uygun olduğu dikkate alınmalıdır. Ayrıca modern görüntülemenin klasik görüntüleme yönteminin genelleştirilmesi olarak ele alınabileceğini ve klasik görüntülemenin, görüntünün doğrudan doğruya bu etkileşim sürecinin sonucu olarak meydana geldiği özel bir durumdan ibaret olduğunu da gözönünde tutulmalıdır. Klasik görüntüleme direkt ve sezgisel olduğu halde modern görüntüleme dolaylıdır ve çoğu durumda sezgiye yer bırakmaz. Modern görüntüler doku-radyasyon etkileşimi veri tabanı üzerinden işlem yapılarak, yeniden formüle edilerek ya da yeniden yapılandırılarak elde edildiğinden, bu süreç çoğu kez yeniden görüntü oluşturma diye adlandırılır.

Gerçek anlamda yeniden görüntü üretebilen ilk cihaz G.N. Hounsfield [2] tarafından 1972'de İngiltere'de EMI'de geliştirildi. Hounsfield'in x-ışınlı bilgisayarlı tomografi cihazı kısmen, ondan on yıl kadar önce A. M. Cormack'in [4] geliştirdiği matematiksel metotlara dayanıyordu. Hounsfield ve Cormack bu çalışmalarından dolayı 1979'da Nobel Tıp Ödülüne layık görüldüler. Daha basit ifade edersek, BT görüntüleme, eğer bir objeye farklı açılardan bakılırsa onun kesitsel görüntüsünün hesaplanabileceği (ya da yeniden yapılandırılabileceği) yolundaki matematiksel

formülasyona dayanır. Bu yüzden BT esas itibariyle x-ışını zayıflamasının ya da doku yoğunluğunun haritalanmasıdır diyebiliriz.

Modern görüntüleme yöntemi 1972'te x-ışınlı BT'nin kullanılmasıyla başladı ve görüntülemenin sadece resim çekmekten ibaret olduğu düşüncesini tamamen değiştirdi. Ayrıca 3 boyutlu görüntülemenin geliştirilmesine yol açtı ve sayısal görüntülemenin gerçekleştirilebilmesini sağladı. Yeniden görüntü oluşturmalı tomografinin geleneksel nükleer tıp görüntülemesine uygulanması ise iki yeni görüntüleme yönteminin gelişmesine yol açtı.Bunlardan ilki tekli foton emisyonu tomografisi (SPECT), ikincisi ise pozitron emisyon tomografisidir (PET). Benzer uygulamaların nükleer manyetik rezonans (NMR) laboratuvar tekniğine adapte edilmesi ise manyetik rezonans görüntülemesine (MRI) yol açtı. BT kavramı günümüzde 3-boyutlu magnetoansefalografi, elektrikli empedans tomografisi ve foton migrasyon tomografisinde de uygulanmaktadır.

1.1 X-Işınlarının Bulunması

Tıbbi görüntülemenin tarihi aslında Wilhelm Konrad Röntgen'in "yepyeni bir ışın türü" adını verdiği ve penetrasyon gücü daha önce tanımlanmış her şeyden daha yüksek bir enerji türü keşfettiğini 8 Kasım 1895'te bildirmesi ile başladı [1]. Röntgen bu deklarasyondan birkaç ay önce hiç beklenmedik şekilde keşfettiği bu olguya gizemli doğasını belirtmek amacıyla "x-ışınları" terimini uygun buldu. İlk bildirisi yayımlanıncaya kadar tam bir yıl kariyerinin bundan sonraki bölümünü odaklayacağı bu olgu üzerine yoğunlaştı. Yaptığı ilk gözlemlerinden birinde fotografçılıkta kullanılan x-ışınlarına duyarlı fotografik plakaları kullanarak el kemiklerinin gölgesini elde etti. Röntgen'in çektiği ilk radyograf artık bir hayli ünlenmiş olan eşi Bera'nın elinin görüntüsüydü.

Röntgen'in 1895 tarihli bildirisinin ilk İngilizce çevirisi "Nature" dergisinde 23 Ocak 1896'ta yayımlandı. Bunun ardından dergi bütün dünyadaki bilim adamlarınca bu olgu ile ilgili olarak yapılan çok sayıdaki deney sonuçlarının yayımlanacağı bir forum oluşturmak üzere "Röntgen Işınları" başlıklı özel bir bölüm yayımlamaya başladı. Böyle bir bilimsel coşku selinin bir göstergesi olarak Röntgen'in ilk makalesini izleyen 12 ay içinde "Röntgen ışınları" ile ilgili 1000'in üzerinde neşriyat yapıldı. Bunların belki de en önemlileri yine bilim tarihçileri tarafından zamanının en

büyük deneycilerinden biri olarak tanımlanan Röntgen'in daha sonra yayınladığı makalelerdir.

Bulduğu yeni ışının sadece insan bedenine nüfuz etmekle kalmayıp, farklı dokulara farklı derecelerde nüfuz ederek fotografik cam tabakalar ya da fosforlu ekranlar üzerinde kompleks görüntüler oluşturduğunu kaydeden Röntgen kuşkusuz bu buluşunun tıptaki öneminin farkındaydı. Bu yüzden x-ışını fotografı, Röntgen'in kendi gözlemlerinin doğrudan uzantısıdır. Günümüzde x-ışını enerjilerinin "tanı alanı" diye anılmakta olan dokusal absorbsiyon farklarını oluşturan fotoelektrik ve Compton etkilerinin nedenleri uzun yıllar anlaşılamamıştı. X-ışınlarının vücut dokuları ile etkileşiminin altında yatan mekanizmanın anlaşılamamış olmasına rağmen Röntgen'in çağdaşları onun bu buluşunun faydalarını ve uzun erimli potansiyelini açık seçik gördüler. Bunun fizik bilimine katkısı da farkedildi ve Röntgen 1901'de ilk Nobel fizik ödülünü aldı.

Sonuç olarak bu buluş tıpta kısa sürede uygulama buldu ve tanı için x-ışınlarının klinik kullanımı rutin hale geldi. X-ışınlarının ilk klinik uygulaması Amerika Birleşik Devletlerinde 3 şubat 1896'da gerçekleşti. Hasta, New Hampshire, Hanover'de iki hafta önce buz pateni yaparken düşerek el bileğini inciten Eddie McCarthy adında bir erkek çocuktu. Çocuğun Hanover'deki doktoru Dr. Gilman Frost, Dartmouth'da astronomi profesörü olan kardeşi Edwin Fost ile irtibata geçti. Eddie, Dartmouth Koleji fizik laboratuvarına getirildi ve burada Profesör Edwin Frost akü ile çalışan bir Crookes vakum tüpü ve bir fotografik cam tabakası kullanarak Amerikanın ilk Röntgen filmini çekti. Sonuçta bilekteki colles kırığı ortaya çıktı. İşlem "sadece" 20 dakika sürmüştü.

X-ışını fotografının dokuyu tanımlama yeteneğini ispat ederek izah etmek için yapılan ilk deneyin raporu Röntgen'in ilk bildirisini izleyen üç hafta içinde Nature dergisinde yayımlandı. Cormack ve Ingle, temelde birbirinin aynı iki insan parmak kemiğini kullanarak kemiğin röntgen filmindeki opak görüntüsünün kalsiyum konsantrasyonundan ileri geldiğini gösterdiler [5]. Bundan sonra görüntüler üzerindeki bazı "gölge" ve "kararmalar"ın nasıl meydana geldiğini göstermeyi amaçlayan bir dizi deney gerçekleştirildi.

Amerikalı mucit Thomas Alva Edison da yeni radyografi ve fluoroskopi teknolojilerine büyük ilgi gösterdi. Edison, 1896'da Randolph Hearst'in canlı insan

beyninin radyografisini çekip çekemeyeceği yolundaki iddiasını kabul etti. O günkü tekniğin farklı dokuların elektron yoğunluğundaki çok az farkları ayırt etmeye elverişli olmaması yüzünden Edison doğal olarak başarılı olamadı. Daha sonra W. Dandy'nin 1918'de beyinin normal olarak sıvıyla dolu olan bölümlerine intrakranial hava enjekte edilerek görüntülenmesine olanak veren kontrastı sağlayan bir teknik olan pnömoansefalografiyi geliştirmesi ile bu teknik yetersizlik kısmen giderilmiştir [6]. Ancak, Edison'un gerçek halefi sayılan Sir Godfrey Hounsfield'in BT tarayıcısını keşfedip uygulamaya geçirdiği 1972 yılına kadar beyinin x-ışınlarıyla görüntülenmesi tam olarak mümkün olamamıştır.

Birinci Dünya Savaşından önce radyografi alanında önemli ilerlemeler kaydedildi ve mideyi incelemek üzere hastaya içirilen bizmut gibi gastroentestinal kontrast maddeler kullanılmaya başlandı. Tabi teknik ilerlemeler de gerçekleşti. Bunların belki en önemlisi, akciğerler gibi bileşik hareket eden dokuların daha iyi değerlendirilmesine olanak veren daha kısa sürede (saniyeler içinde) görüntü alınmasını sağlayan cihazların geliştirilmesiydi. Serebral anjiografi ise tamamen rastlantı sonucu, 1927'de Fransız doktor Egaz Moniz'in beyini opaklaştırmak için tıpkı safrakesesinde olduğu gibi artere opak kontrast madde enjekte etmesiyle bulundu.

Radyoloji alanında ilk 75 yıl içinde yapılan araştırmalarda fizik ve cihazlar açısından çok az ilerleme kaydedildi. Tabi ki görüntünün teknik kalitesinde muazzam bir iyileşme oldu. X-ışını üretimi ve absorbsiyonuna ait fizik nedenler açıklığa kavuşarak mühendislikteki gelişmelerin teorik çerçevesini ve pratik temelini oluşturdu. Tıp alanında ise bu dönemde medikal görüntü yorumlama konusunda önemli deneysel bilgi birikimi oluştu. Bu bilgilere en başta x-ışınının farklı absorpsiyonunun en temel prensipleri (yani hava içeren yapıların Röntgen filminde yağ ya da sıvı içeren yapılardan daha az yoğunlukta görülmesi olgusu) ile, klasik anatomi ve görüntülerde belirlenen hastalıkların anatomik patolojisi konusunda elde edilen daha geniş bilgilerin bir araya getirilmesi sayesinde ulaşıldı.

Elde edilen bu geniş kapsamlı deneysel bilgilerden radyoloji adı verilen yeni bir tıp uzmanlık alanı doğdu. Akademik bölümler ve uzmanlık kurumları kuruldu. Radyoloji alanındaki araştırmalar giderek daha fazla kamu finans desteği sağlanmaya başladı. Yeni bilimsel disiplinin oluşmasıyla radyoloji bilimleri bütün dünyada

üniversitelerdeki haklı yerini aldı. Yine de görüntüleme iki alanda sınırlı kaldı. Birincisi "düz" radyografi ikincisi ise opak kontrast maddeler kullanılmadığında radyografide ayırt edilemeyen doku elemanlarının yeni opak kontrast madde uygulamaları ile yapılarının ve fizyolojik işlevlerinin belirlenmesiydi. Ancak 1950'lerin başlarında nükleer ve ultrasonik görüntülemede eşzamanlı bir gelişme elde edildikten sonradır ki, gerçekten yeni fiziksel metotlar geliştirilebilmiştir.

1.2 X-Işınlı Bilgisayarlı Tomografinin Gelişimi

X-ışınlı BT'nin 1972'de uygulanmaya başlaması, belki de Röntgen'den bu yana tıbbi görüntüleme alanında devrim yaratan en önemli gelişmedir. Öncelikle görüntü elde etmede bilgisayar ilk kez kullanılmıştır. Öte yandan dijital veri elde etme olayı başlıbaşına devrimci bir fikirdi ve beraberinde yepyeni bir kavram olan sayısal görüntülemeyi getirmiştir. Belki bundan da önemlisi, yeni bir kavram olan görüntü işleme teknikleri ile elde edilen veriyi geliştirerek potansiyel olarak tanıya yönelik daha fazla bilgi sağlanmasıdır. BT'nin bir başka avantajı da bu metodun potansiyel olarak üç-boyutlu olması ve böylece bu görüntüye bakan kimseye bedenin ayrı ayrı kesit dilimlerini analiz etme olanağı sağlamasıdır. Geliştirilen detektörler, bilgisayarlar, matematik ve yazılımlar gibi teknik ilerlemelere ilaveten mekanik düzenler ve sistem geometrisindeki değişiklikler görüntülerde çok daha yüksek uzamsal ve yoğunluk çözünürlüğü elde edilmesini de mümkün kılmıştır.

Bilgisayar tomografisi vücut dokularının x-ışınlarını gerçekte nasıl zayıflattığını klasik radyografinin sağladığından çok daha ayrıntılı bir biçimde gösterir. Bu tip cihazlar doku yoğunluklarının en iyi film-perdesi teknikleriyle mümkün olandan 1000 kat daha geniş bir alan içinde farkedilmesine olanak verir. Bu yeni olanak, araştırmacıları normal ve patolojik dokular arasında muhakeme yapabilmek için sayısal BT verilerinden yararlanmaya sevketti. Daha sonra "Hounsfield sayısı" olarak bilinen "EMI birimi"nin uygulanması ile BT yoğunluk verileri standartlaştırıldı. Hounsfield sayısı ya da EMI birimi, öznenin lineer zayıflatma katsayısının matematiksel tahminine dayanarak hesaplanan ve saf suyun zayıflatma katsayısı esas alınarak hesaplanan standart bir indekstir. Hounsfield cetveli dokunun x-ışınlarını zayıflatma kabiliyetinin türevlerini gösteren bir ölçüdür.

BT'nin uygulamaya girmesiyle temel ve klinik araştırmacılar Hounsfield sayısına dayanarak doku tanımlaması yapmak amacıyla bu yeni tekniği büyük bir hevesle uygulamaya başladılar. Ayrıca, iyotlu kontrast madde zerkettikten sonra incelenen dokulara ait Hounsfield sayısı ölçülerek doku tanımlaması yapılması ile ilgili pek çok makale yayımlandı. Hounsfield'ın ilk bildirisinin ardından üç yıl geçmemişti ki İngilizce görüntüleme literatüründe 1000'in üzerinde makale yayımlandı. 1980'e gelindiğinde tıpkı Röntgen'in ilk bildirisinin ardından yaşanan araştırma coşkusunu anımsatır biçimde yayımlanan kitap ve makale sayısında patlama yaşandı. Bu yeni teknoloji için beslenen büyük umutlar ve beklentilere rağmen, sınırlı sayıda birkaç örnek dışında, normal ve patolojik dokulara ait Hounsfield sayılarına göre sağlıklı bir ayırım yapma çalışmalarında başarı sağlanamadı.

Çok ilginçtir ki, bu gözlemler, çalışmalar sırasında x-ışını huzme enerjisi değiştirilerek yeni bir deney yöntemine başvurulmasına neden oldu ve (farklı x-ışını enerjileriyle elde edilen) iki görüntünün matematiksel çıkarma işlemiyle elde edilen yeni bir oluşum sağlandı. Bu metoda çift-enerjili BT görüntülemesi adı verildi ve özellikle kemiklerdeki kalsium ve patolojik dokulardaki demir birikimleri gibi yüksek atom sayılı doku elemanlarının ölçümü alanında bilgisayarlı tomografi tabanlı doku tanımlamalarına büyük ilgi gösterildi [7,8].

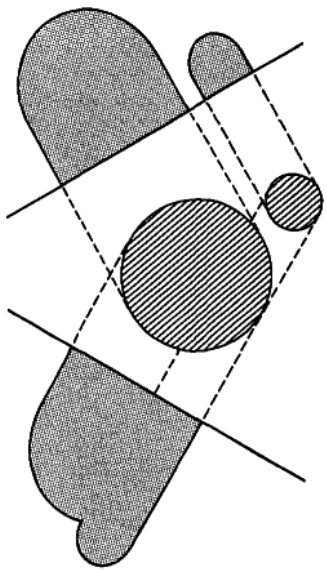
X-ışınının farklı enerjilerinden doğan kontrastının fiziği ve dokunun atomik kompozisyonu Cho ve arkadaşları [9] ve McCullough [10] tarafından incelendi. Onların çalışmaları ortalama zayıflama değerinin yanı sıra, yeni bir indeks olan Z_{eff} yani "efektif atom numarası"nı gündeme getirdi. Bir başka araştırma alanı da X-ışınlı BT'nin gelişmesiyle hız kazanan 2 boyutlu ve 3 boyutlu görüntü yeniden oluşum algoritmalarıdır. Öyle ki son otuz yıl içinde 3 boyutlu görüntü yeniden oluşumu matematiği modern tıbbi görüntülemenin belkemiğini oluşturdu ve bu büyük olasılıkla böyle devam edecektir.

1.3 X-Işınlı Bilgisayarlı Tomografinin Mantıksal Temeli

Temel olarak tomografik görüntüleme, bir görüntünün kendi yansıması yoluyla nasıl yeniden anlamlandırılabileceği problemi ile uğraşmaktadır. Kelimenin dar anlamıyla, belirli bir açıdan alınan izdüşüm, Şekil 1.1'de görüldüğü gibi, görüntünün o açıdaki integralidir. Daha geniş bir anlamda bakarsak izdüşüm için belirli bir açıdan

aydınlatılan cisimden iletilen enerjinin neden olduğu bilgiyi kapsamaktadır da diyebiliriz. "Kırınımlı izdüşüm" deyimi, enerji kaynaklarının kırınıma uğradığı durumlarda kullanılmaktadır. Fakat bu çalışma kırınımsız kaynaklar ile çalışıldığı varsayımını temel alarak şekillendirilmiştir.

Tümüyle matematiksel bir noktadan, bir fonksiyonun kendi yansımalarında nasıl yeniden anlamlandırıldığı probleminin çözümü, Radon'un 1917 yılında yaptığı çalışmaya kadar uzanmaktadır. Bilgisayarlı tomografiye ilişkin günümüzde yürütülen çalışmalar ise, Hounsfied'e Nobel ödülü de kazandıran tarayıcı ile birlikte başlamıştır. Hounsfield, bazı algoritmaları daha once bağımsız olarak bulan Allan Cormak ile birlikte bu ödüle layık gürüldü. Bu ikilinin koyduğu prensipler doğrultusunda tomografi tekniği, cismin içinden bir seri ışın geçirmekten (paralel, yelpaze ya da koni şeklinde) ve cismin alıcı tarafına bir seri dedektör dizisi konularak bu ışınların zayıflamalarının ölçülmesinden oluşur. Bu ölçümlere izdüşümler denir. Bu bilgiler 0° ile 360° arasında çeşitli açılarda toplanır. Daha sonra, mümkün 4 farklı algoritmadan herhangi birisi, cismin izdüşümlerinden 2 boyutlu kesit görüntülerini oluşturmak için kullanılabilir. Gerçekte ölçülen özellik, cismin kesitindeki çeşitli noktalarda, o cismin doğrusal zayıflama katsayısıdır. Eğer bu süreç farklı yükseklikler için cisim boyunca tekrar ettirilirse, 2-boyutlu kesitsel görüntüler elde ederiz, ki bu görüntüler , birbirleri üzerine oturtularak cismin 3-boyutlu hacimsel görüntüsü elde edilir. Bununla birlikte çalışmada sadece 2-boyutlu kesitsel görüntülerin oluşumu ele alınmıştır.



Şekil 1.1 Bir cismin farklı açılardan alınan izdüşümleri

İzdüşüm bilgisi toplamanın birçok yolu vardır. Bunlardan ilki "paralel izdüşüm" olarak bilinir. İzdüşüm bilgisini toplamanın, yelpaze demeti, koni demeti izdüşümleri gibi diğer yöntemleri de vardır. Fakat bu çalışmada özellikle 2-boyutlu kesitsel görüntü oluşturmada kullanılan paralel ve yelpaze demet açılı izdüşümlere değinilmiştir. Zira konunun anlaşılmasındaki anahtar uygulamalar bunlardır. Öte yandan paralel demet görüntülemesinde kullanılan algoritmalar küçük değişiklerle, aynı zamanda yelpaze demet izdüşümleri için de kullanılabilir.

Şu rahatlıkla söylenebilir ki; Hounsfield'ın buluşundan sonra, x-ışınlı bilgisayarlı tomografideki hızlı gelişim, yeniden anlamlandırma algoritmalarında gerçekleştirilen gelişmeler nedeniyle sağlanmıştır. Hounsfield, bunun için cebirsel teknikleri kullanmış ve 80x80'lik görüntülerin yeniden oluşturulmasını ancak yüzde birlik doğrulukla başarabilmiştir. Filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması ise, Bracewell ve Riddle [11] tarafından icat edilmiştir. Bu üstün algoritma sonraları, geri-izdüşürme algoritmalarının da geliştiricileri olan olan Ramanchandran ve Lakshminarayanan [12,13] tarafından bağımsız olarak incelendi. Bu algoritma, ticari BT tarayıcılarının [12] çoğunun kullandığı, en doğru sonucu en hızlı şekilde veren metotdur. Yelpaze demet bilgisi için filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması ise, Lakshminarayanan [14] tarafından geliştirilmiştir. Öte yandan bazı araştırmacılar da, görüntüleme için cebirsel teknikler (Gordon [15,16], Herman [17,18] ve Budinger [19]) önermişlerdir. Ayrıca Wernecke ve D'Addario [20], görüntüleme için bir maksimum entropi metodu geliştirdi. Filtrelenmiş geri izdüşüm yönteminin diğer yöntemlerden (özellikle cebirsel metodlardan) çok daha üstün olduğu ise, Shepp ve Logan [21] tarafından 1974'te başarı ile gösterilmiştir. Yeniden görüntü oluşumunda geliştirilen en etkili metod olan bu yöntem işlem süresini önemli ölçüde azaltarak, görüntü oluşumunun doğruluk oranını yükseltmiştir. Sonuç olarak da, x-ışınlı tomografik tarayıcıların ticari üreticileri, fotografik olarak neredeyse mükemmel sonuç veren 256x256 ve 512x512 görüntülerinin yeniden görüntü oluşumunu sağlayacak sistemler inşasına başladılar.

"X-ışınlı bilgisayarlı tomografide filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının paralel ve yelpaze demet açılı uygulamaları" isimli bu tez çalışması, üç ana başlığa ayrılabilir. Açıklamak gerekirse 2. bölümde konunun matematiksel temelleri ve teorisine ağırlık verilmiştir. Çalışmanın iskeletini oluşturan bu bölüme direk olarak doğru integralleri ve izdüşümlerin tanımları ile girilmiş, Fourier dönüşümlerinin

açıklanmasına ise gerek duyulmamıştır. 3. bölümde ise teorinin x-ışınlı bilgisayarlı tomografinin güncel problemlerine nasıl uyarlandığını ele alınmıştır. Kırınımsız ve monoenerjitik kaynakların kullanıldığı varsayımı altında, zayıflama sabitinin tanımından, mevcut tarayıcı tiplerine kadar önemli birçok konu açıklanmaya çalışılmıştır. Son olarak 4. bölümde ise matematiksel tanımlar paralelinde geliştirilen uygulamaların performans değerleri ortaya konmuştur. Kullanılan algoritmaların mukayeseleri, işlemlerin yapıldığı bilgisayarların hız testleri ve geleceğe dönük öneriler hep bu bölümde yer almaktadır. Öte yandan geliştirilen algoritmaların doğruluğunun anlaşılmasında ise "Shepp ve Logan"ın meşhur kafa modeli kullanılmıştır. Yapılan uygulamalarda tomogramı elde edilecek kesit görüntü olarak bu kafa modeli seçilmiş ve filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının paralel yorumunu esas alarak en başarılı görüntüye ulaşılmaya çalışılmıştır.

Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmasının oluşturulması esnasında Fourier dönüşümlerine sıklıkla başvurulmaktadır. Zira ayrık zamanlı işaret ve sistemlerin frekans uzayı analizini etkili bir şekilde yapabilmek için Fourier dönüşümlerine kati surette ihtiyaç vardır. Bu çalışmada konunun lisans kademesinde daha önce incelenmiş olduğu dikkate alınarak Fourier dönüşümü analizlerine girilmemiş sadece EK A'da 4 farklı Fourier dönüşümünü gösteren bir tabloya yer verilmiştir. Bu tablo içerisinde çalışmada sıkça atıfta bulunulan ve dijital işaret işlemeye köklü değişiklikler getiren hızlı Fourier dönüşümü (HFD) hesabı ise yer almamaktadır. Zira HFD, sonlu Fourier dönüşümü hesabını hızlı bir şekilde yapabilmek için geliştirilmiş özel bir metoddur. Bu dönüşüm hesaplanan işlem sayısının $N \log N$'e kadar azaltılabilmesine olanak sağlamaktadır. Bu durum 1024 işaret için yaklaşık 100 faktörlük bir iyileşme demektir. Konu hakkında ayrıntılı bilgi [22]'de bulunabilir.

Son olarak tomografik görüntülemeye ilişkin temel çalışma kitaplarının sıralanması gerekirse [23], [24] ve [25] ilk sırada yer alabilirler. Konuya ilişkin makaleler olarak [26], [27], [28] ya da IEEE tarafından yayınlanan iki özel sayı olan [29] ve [30]'da incelenebilir. Daha popüler algoritmalara ilişkin makaleler ise [31], [32], [33] ve [34]'de görülebilir.

2. KIRINIMSIZ KAYNAKLARLA GÖRÜNTÜLEME ALGORİTMALARI

Bu bölümde, kırınımsız kaynaklarla tomografinin matematiksel temeli üzerinde durulacaktır. İzdüşüm bilgisinden bir cismin kesit görüntüsünün nasıl alınabileceği incelenecektir. İdeal koşullarda izdüşümler, cismin bir parametresinin integrali alınmış değerlerinin ölçümleri kümesidir. Bu integrasyonlar, cismin içinden geçen doğrulardır ve doğru integralleri olarak adlandırılırlar. Tomografik görüntülemenin anahtarının, hesaplanan izdüşüm bilgisi ve cisim kesitinin iki-boyutlu Fourier dönüşümü arasında bağıntı kuran Fourier Dilim Teoremi olduğu görülecektir.

Bu bölüm, doğru integrallerinin tanımıyla ve bir cismin izdüşümlerini oluşturacak şekilde nasıl bir araya getirildiklerinin açıklamasıyla başlayacaktır. Paralel doğrular boyunca alınan bir izdüşümün Fourier dönüşümü bulunduktan sonra, buradan Fourier Dilim Teoremi çıkartılacaktır. Kullanılan görüntüleme algoritması, hesaplanan izdüşüm bilgisinin türüne bağlıdır. Paralel ışın demeti izdüşüm bilgisini ve iki çeşit yelpaze ışın demeti bilgisini temel alan algoritmalar tartışılacaktır.

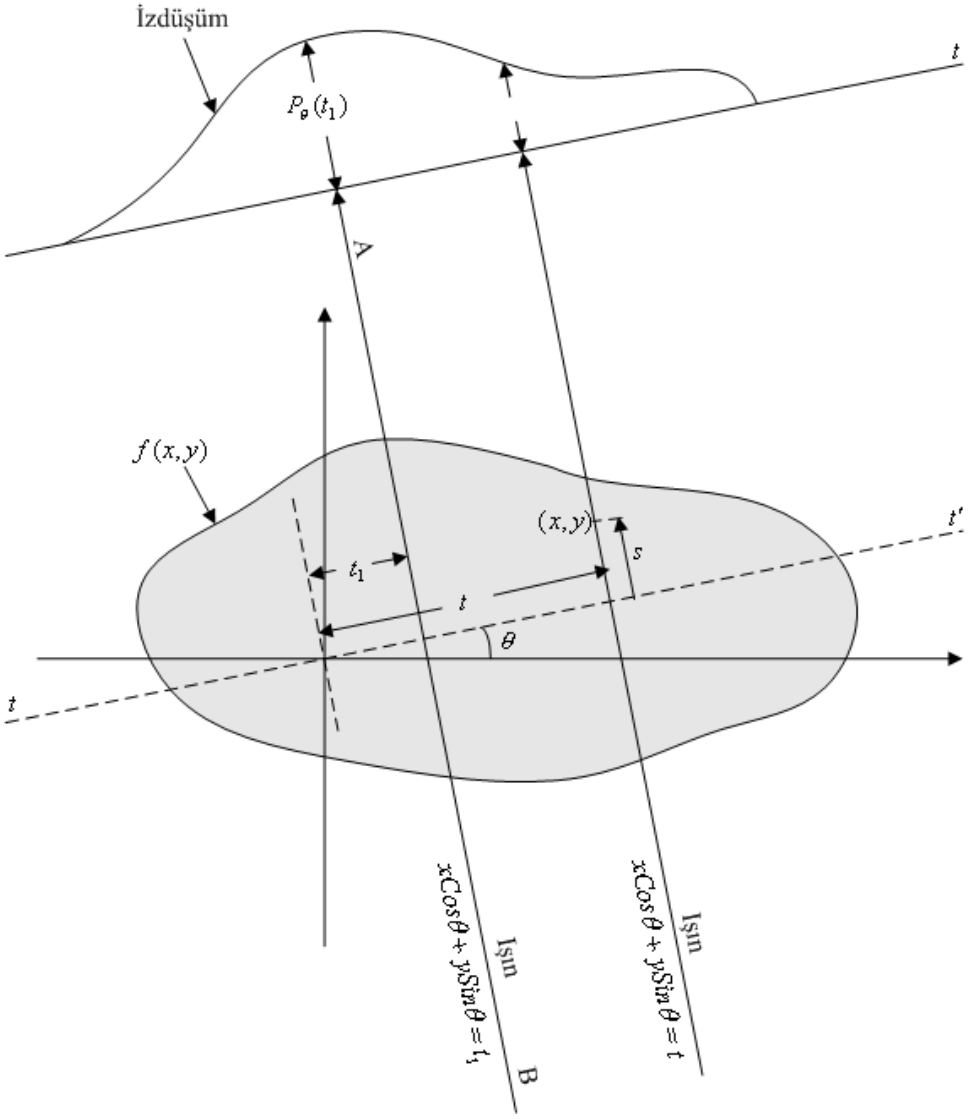
2.1 Doğru İntegralleri ve İzdüşümler

Doğru integrali, adından da anlaşılabileceği gibi bir doğru boyunca cismin bazı parametrelerinin integralidir. Bu bölümde doğru integralini ortaya çıkartan fiziksel fenomen açıklanmayacaktır ancak x-ışınlarının biyolojik dokularda ilerlerken uğradığı zayıflama, tipik bir örnektir. Bu durumda cisim, x-ışını zayıflama sabitinin iki-boyutlu (ya da üç-boyutlu) bir dağılımı olarak şekillenir. Doğru integrali de, cismin içinde bir doğru üzerinde hareket eden bir x-ışını demetindeki toplam zayıflamayı temsil eder.

Doğru integrallerini ve izdüşümleri tanımlamak için Şekil 2.1'de verilen koordinat sisteminden yararlanmak gerekir. Bu örnekte, cisim iki boyutlu bir *f(x,y)* fonksiyonu olarak verilmiştir ve her bir doğru integrali (θ, t) parametreleriyle tanımlanmıştır.

Şekil 2.1'deki doğrunun denklemi şöyledir:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = t \tag{2.1}$$



Şekil 2.1 Bir θ açısı için doğru integralleri ve izdüşümler [28].

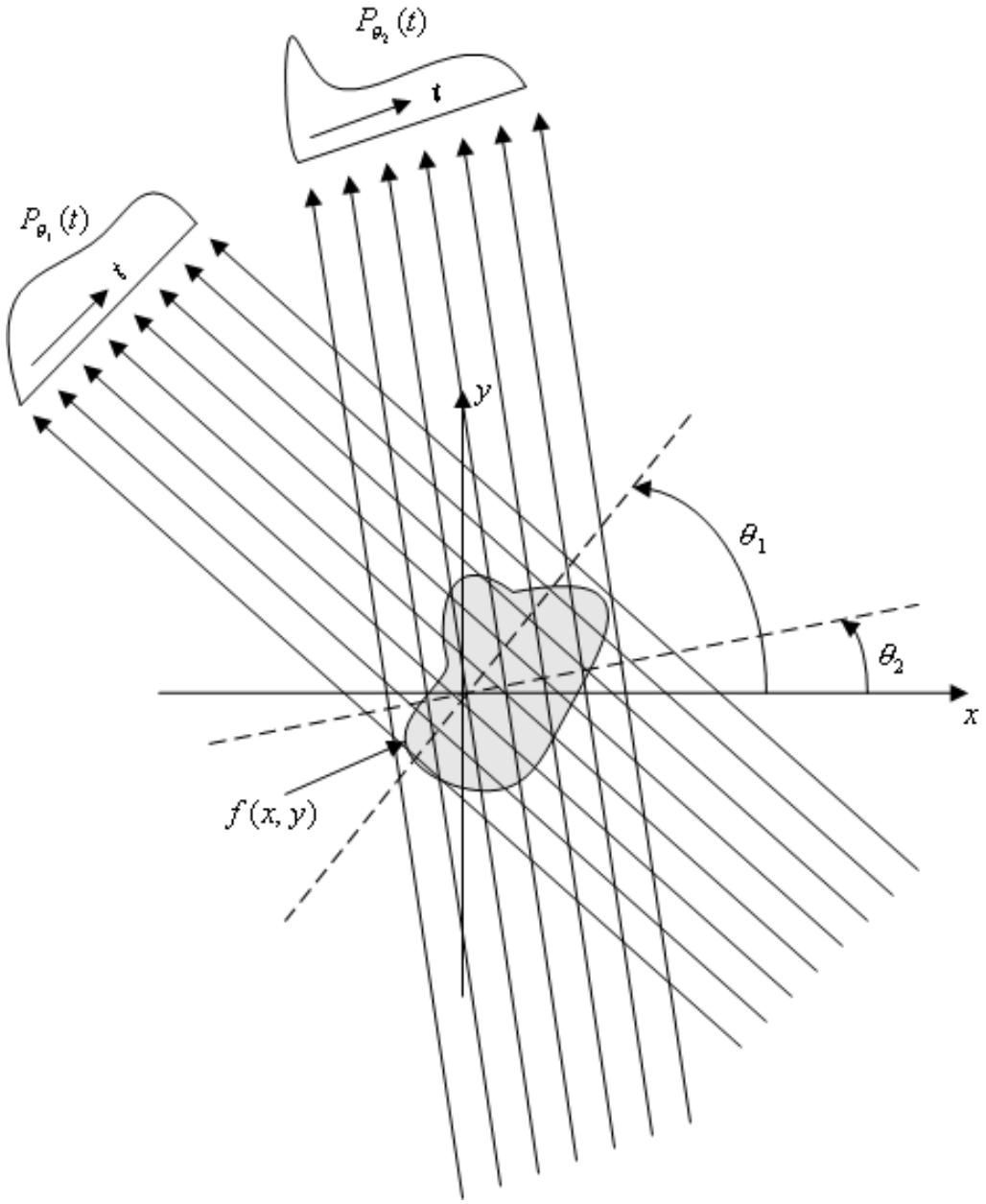
Ve bu bağıntı, $P_\theta(t)$ doğru integralini aşağıdaki gibi belirtmek için kullanılır:

$$P_\theta(t) = \int_{(\theta,t)} f(x,y)ds \tag{2.2}$$

Bu, bir delta fonksiyonu kullanılarak şöyle yazılabilir:

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,dx\,dy \tag{2.3}$$

$P_\theta(t)$ fonksiyonu, f(x,y) fonksiyonunun Radon dönüşümü olarak bilinmektedir.

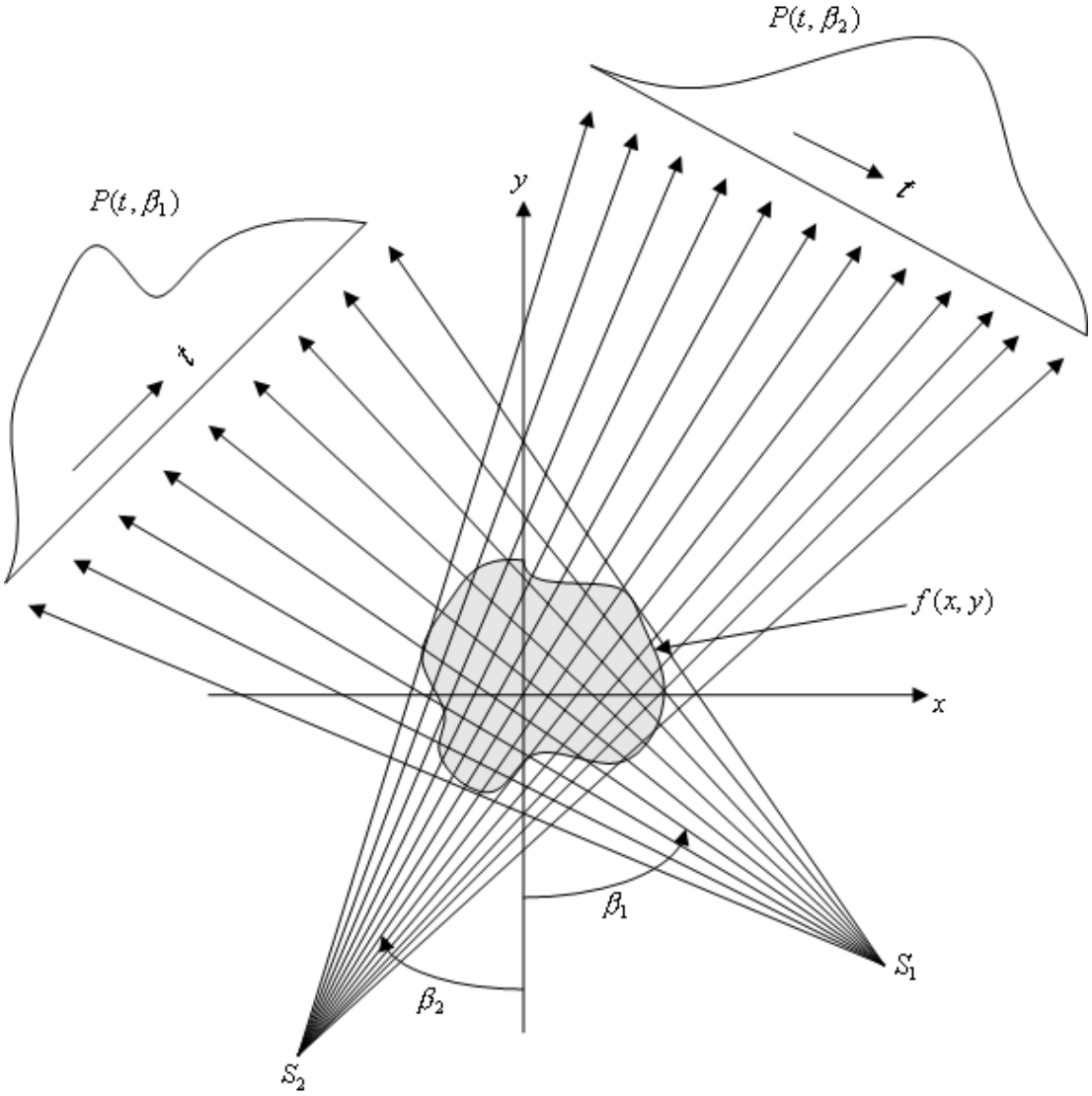


Şekil 2.2 Paralel izdüşümler

Bir izdüşüm, bir doğru integralleri kümesinin bileşiminden oluşur. En basit izdüşüm, sabit bir θ için $P_\theta(t)$ ile verildiği gibi paralel ışın integrallerinin toplamıdır. Bu paralel izdüşüm olarak bilinir ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Örneğin bir x-ışını kaynağını ve detektörünü bir cismin zıt tarafları üzerinde paralel doğrular boyunca hareket ettirmek yoluyla hesaplanabilir.

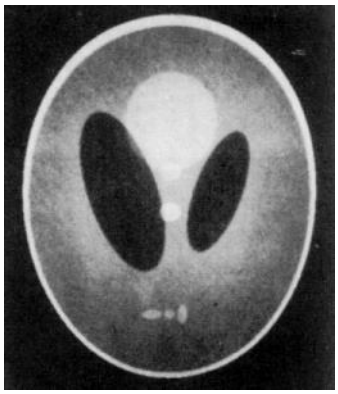
Eğer tek bir kaynak, sabit bir pozisyonda bir dedektörler hattına bağımlı olarak yerleştirilmişse, diğer bir izdüşüm türü de mümkündür. Bu, Şekil 2.3'te gösterilmiştir

ve doğru integralleri bir yelpaze üzerinden hesaplandığından, yelpaze ışın demeti izdüşümü olarak bilinir.

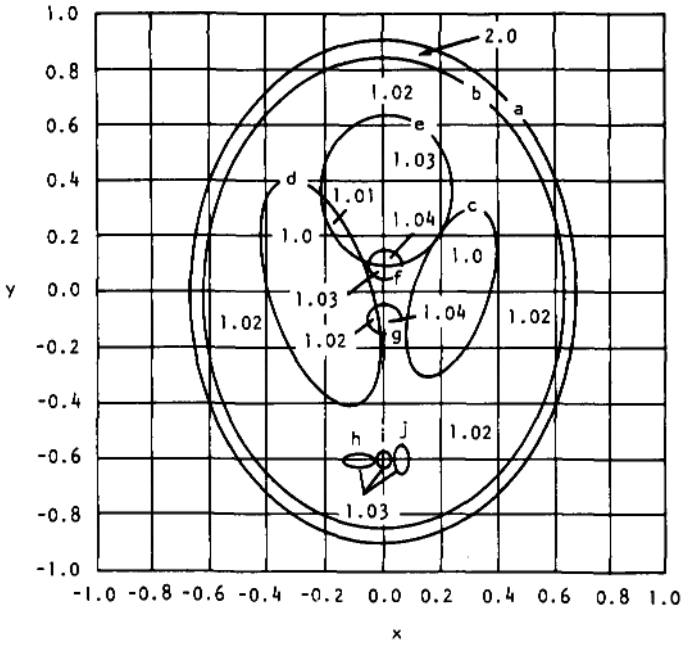


Şekil 2.3 Yelpaze ışın demeti izdüşümü

Bu tezdeki bilgisayar simülasyon sonuçlarının büyük bir bölümü Şekil 2.4'teki resim için gösterilecektir. Bu, meşhur Shepp ve Logan [21] "kafa modelidir". İnsan kafası kesitini x-ışını tomografisiyle görüntüleyebilme yetenekleri için algoritmanın isabetliliğini test etme yönünde kullanıldığından dolayı bu ismi almıştır. (İnsan kafasının, nümerik isabetliliğe ve gürültülerden bağımsız olunmasına en fazla ihtiyaç duyulan saha olduğuna inanılmaktadır.) Şekil 2.4(a)'daki resim, Şekil 2.4(b)'de temsil olunduğu üzere, 10 adet elipsten oluşmuştur. Bu elipslerin parametreleri Tablo 2.1'de verilmiştir.



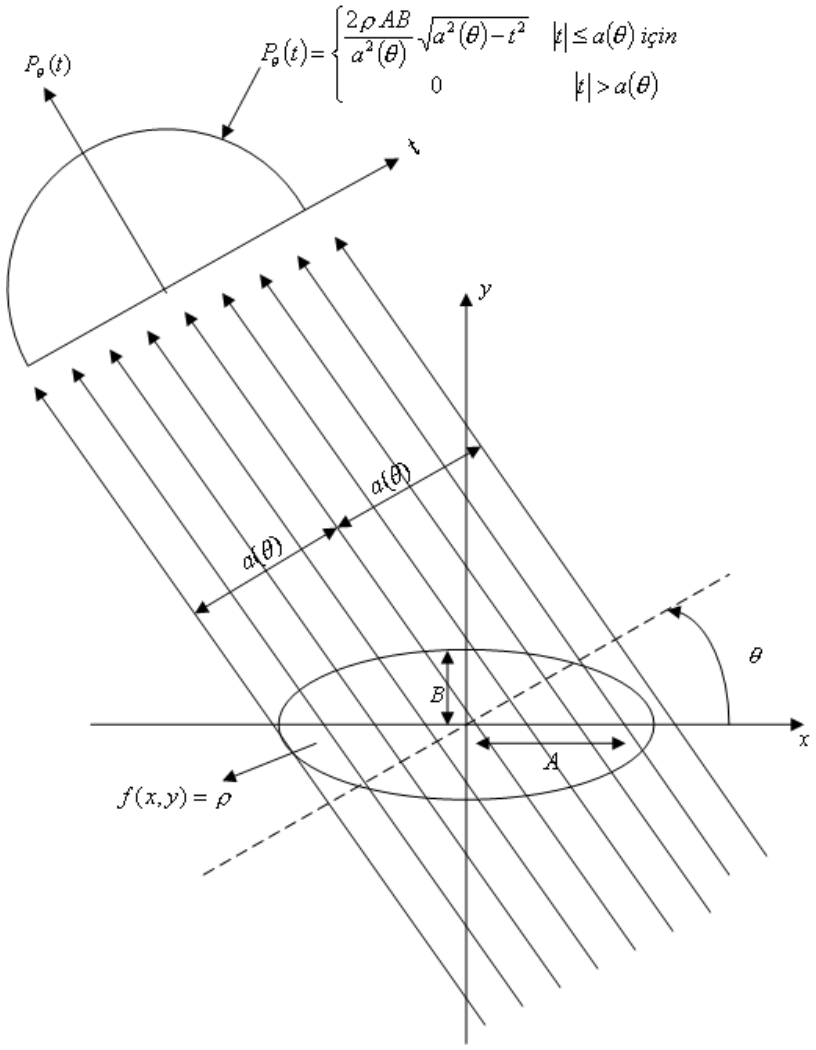
(a)



(b)

Şekil 2.4 (a) Shepp ve Logan "kafa modeli". (b) Shepp ve Logan "kafa modeli"nin bilgisayar çözümleri için simüle edilmiş modeli [31] .

Bilgisayar simülasyonu için Şekil 2.4(a)'daki gibi bir görüntü kullanmanın en büyük avantajı, izdüşümler için analitik ifadeler yazabilmemizdir. Birçok elipsten oluşmuş bir görüntünün izdüşümü, basit olarak her elipsin izdüşümlerinin toplamıdır. Bu, Radon dönüşümünün doğrusallığından ileri gelmektedir. Şimdi, tek bir elipsin izdüşümleri için ifadeleri görelim. Örneğin, *f(x,y)* Şekil 2.5'te gösterildiği gibi olsun.



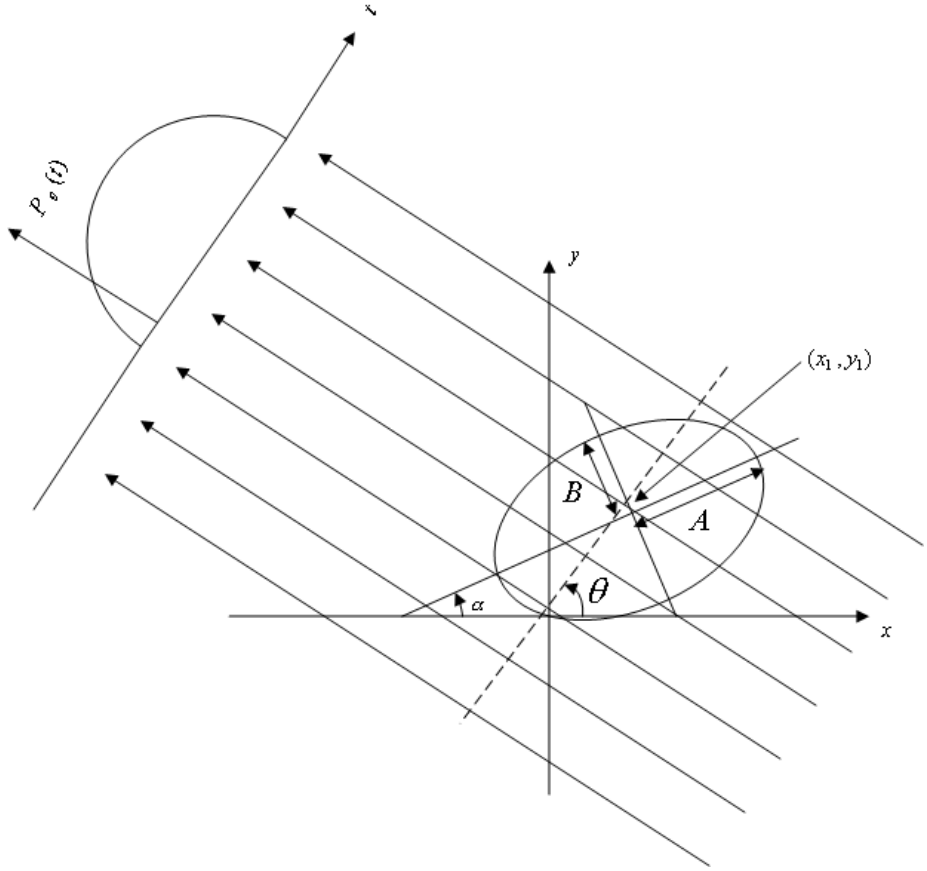
Şekil 2.5 Bir elipsin izdüşümünün analitik gösterimi [31]

$$f(x,y)=\begin{cases}\rho & \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}\le 1\ için \quad (elips\ içinde)\\ 0 & diğer\ durumda \quad (elips\ dışında)\end{cases} \tag{2.4}$$

Böyle bir fonksiyonun izdüşümlerinin aşağıdaki gibi verildiğini göstermek kolaydır.

$$P_\theta(t)=\begin{cases}\frac{2\rho AB}{a^2(\theta)}\sqrt{a^2(\theta)-t^2} & |t|\le a(\theta)\ için\\ 0 & |t|>a(\theta)\end{cases} \tag{2.5}$$

Burada $a^2(\theta)=A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta$'dir. $a(\theta)$'nın Şekil 2.5'de gösterilen izdüşüm yarı-genişliğine eşit olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 2.6 Merkezi (x_1, y_1) 'e yerleştirilmiş ve büyük ekseni α kadar döndürülmüş bir elipsin izdüşümü [31]

Tablo 2.1 Tomografi simülasyonları için parametrelerin özetleri

Merkez koordinatı	**Büyük eksen**	**Küçük eksen**	**Dönme açısı**	**Kırılma oranı**
(0, 0)	0.92	0.69	90	2.0
(0, -0.0184)	0.874	0.6624	90	-0.98
(0.22, 0)	0.31	0.11	72	-0.02
(-0.22, 0)	0.41	0.16	108	-0.02
(0, 0.35)	0.25	0.21	90	0.01
(0, 0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(0, -0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(0.08, -0.605)	0.046	0.023	0	0.01
(0, -0.605)	0.023	0.023	0	0.01
(0.06, -0.605)	0.046	0.023	90	0.01

Şimdi yukarıda tanımlanan elipsin (x_1, y_1) merkezli olduğu ve bir α açısıyla Şekil 2.6'da gösterildiği gibi döndürüldüğünü farzedilsin. *P'(θ, t)* sonuç izdüşümleri olsun. Denklem (2.5)'teki $P_\theta(t)$ ile aralarında şöyle bir bağıntı vardır.

$$P_\theta(t) = P_{\theta-\alpha}\left(t - s\cos\left(\gamma - \theta\right)\right) \tag{2.6}$$

Burada, $s = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$ ve $\gamma = \tan^{-1}\left(y_1 / x_1\right)$'dir.

2.2 Fourier Dilim Teoremi

Fourier Dilim Teoremi, bir paralel izdüşümün tek-boyutlu Fourier dönüşümünün, asıl cismin iki-boyutlu Fourier dönüşümünün bir dilimine eşit olduğu teoremidir. İzdüşüm bilgisine sahip olunduğunda, iki-boyutlu bir ters Fourier dönüşümü yapılarak cisim kolayca oluşturulabilmektedir.

İlk olarak, cisim fonksiyonunun iki-boyutlu Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \tag{2.7}$$

Aynı şekilde θ açısındaki $P_\theta(t)$ izdüşümü ve bunun Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t)e^{-j2\pi wt}dt \tag{2.8}$$

Fourier Dilim Teoremi'nin en temel örneği $\theta = 0$'daki bir izdüşüm için verilebilir. İlk olarak, doğru boyunca v = 0 olarak verilen frekans domeninde cismin Fourier dönüşümü ele alınsın. Fourier dönüşüm integrali, burada aşağıdaki gibi sadeleşecektir:

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi ux}\,dx\,dy \tag{2.9}$$

ama faz faktörü artık y'ye bağlı olmadığından, integral iki parçaya ayrılabilir:

$$F(u,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]e^{-j2\pi ux}\,dx \tag{2.10}$$

Paralel izdüşümün tanımından, parantez içindeki terimin, sabit bir x'e ait doğrular boyunca yapılan bir izdüşümün denklemi olduğuna dikkat etmek gerekir.

$$P_{\theta=0}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy \tag{2.11}$$

Denklem (2.11), (2.10)'da yerine konulursa şu elde edilir:

$$F(u,0)=\int_{-\infty}^{\infty}P_{\theta=0}(x)e^{-j2\pi ux}dx \tag{2.12}$$

Bu denklemin sağ tarafı, $P_{\theta=0}$ izdüşümünün tek boyutlu Fourier dönüşümünü temsil eder. Buradan, cisim fonksiyonunun düşey izdüşümü ve 2-boyutlu dönüşümü arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$F(u,0)=S_{\theta=0}(u) \tag{2.13}$$

Bu, Fourier Dilim Teoreminin en basit halidir. Bu sonuç cisim ve koordinat sisteminin uyumundan tamamen bağımsızdır. Örneğin, (t,s) koordinat sistemi Şekil 2.7'de gösterildiği gibi bir θ açısıyla döndürülse bile, (2.11)'de belirtilen Fourier dönüşümü, θ açısıyla döndürülmüş bir doğru boyunca yapılmış Fourier dönüşümüne eşittir [33] .

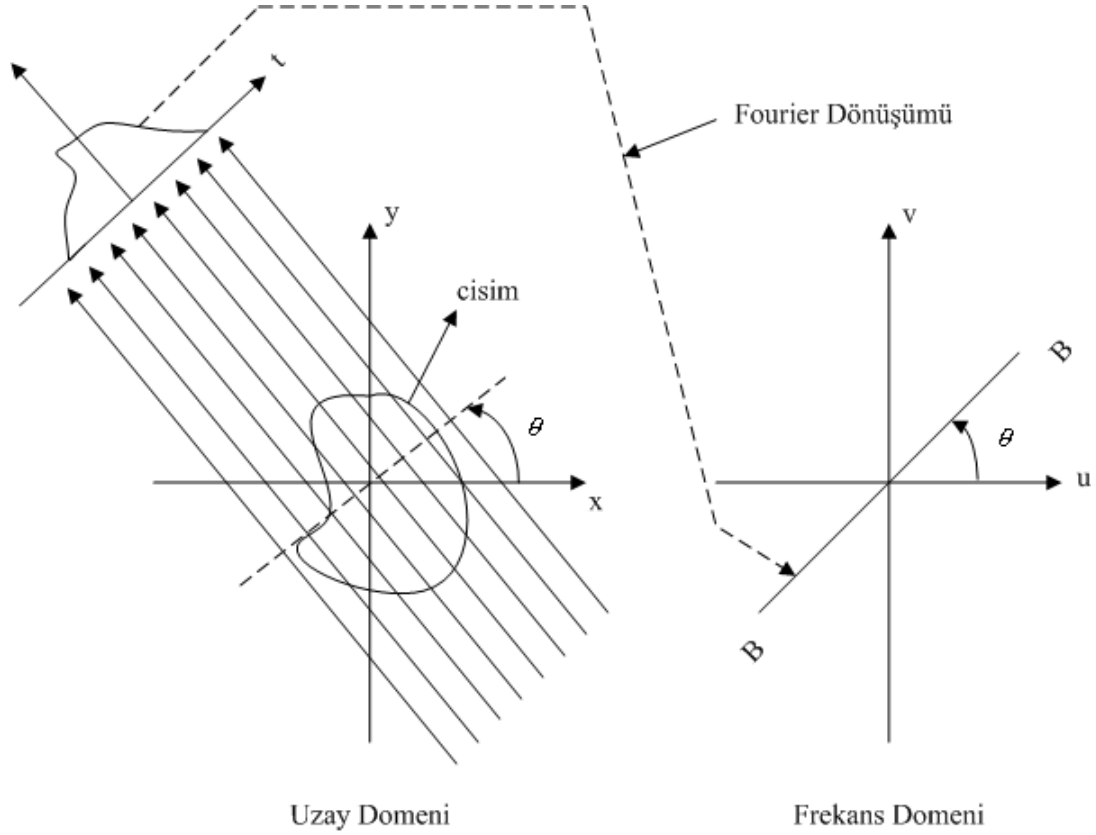
Bir f(x,y) görüntüsünün paralel izdüşümünün θ açısıyla alınan Fourier dönüşümü, iki boyutlu F(u,v) dönüşümünün bir dilimini verir ve u-eksenini bir θ açısıyla keser. Başka bir deyişle, $P_\theta(t)$'nin Fourier dönüşümü, Şekil 2.7'deki BB doğrusu boyunca F(u,v)'nin değerlerini verir.

Fourier Dilim Teoreminin türevi, (t,s) koordinat sisteminin asıl (x,y) sisteminin aşağıda açıklandığı gibi döndürülmüş versiyonu olduğunu kabul etmek suretiyle daha sağlam bir temele oturtulabilir.

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

(t,s) koordinat sisteminde sabit t doğruları boyunca izdüşüm şöyle yazılır:

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\, ds \tag{2.15}$$



Şekil 2.7 İzdüşümün uzay domeni ve frekans domeni gösterimi

Bir izdüşümün tanımı denklem (2.8)'de yerine konursa şu bulunur:

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int f(t,s) ds \right] e^{-j2\pi wt}\, dt \tag{2.16}$$

Bu sonuç, (2.14)'teki bağıntılar kullanılarak (x,y) koordinat sistemine dönüştürülebilir ve sonuç şöyle olur:

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy \tag{2.17}$$

Bu denklemin sağ tarafı artık ($u = w\cos\theta$, $v = w\sin\theta$) uzamsal frekanstaki iki boyutlu Fourier dönüşümünü temsil etmektedir, ya da:

$$S_\theta(w) = F(w,\theta) = F(w\cos\theta, w\sin\theta) \tag{2.18}$$

Bu denklem düz ışın tomografisinin temelidir ve Fourier Dilim Teoremini ispatlamaktadır.

Yukarıdaki sonuç, bir cismin θ_1, θ_2, ... θ_k açılarındaki cisim fonksiyonunun izdüşümlerinin alınmasıyla ve her birinin Fourier dönüşümlerinin yapılmasıyla, Şekil 2.7'de gösterildiği gibi radyal doğrular üzerindeki *F(u,v)* değerlerinin belirlenebileceğini kanıtlamaktadır. Eğer sonsuz sayıda izdüşüm alınırsa, *F(u,v)* uv-düzlemindeki tüm noktalarda tespit edilebilecektir. *F(u,v)* bilinirse, *f(x,y)* cisim fonksiyonu da ters Fourier dönüşümü kullanılarak çıkartılabilir:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)}\, du\, dv \tag{2.19}$$

Eğer f(x,y) fonksiyonu –A/2 < x < A/2 ve –A/2 < y < A/2 tanım aralıkları arasındaysa, (2.19), (2.21) için hesaplama amacıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x,y) = \frac{1}{A^2}\sum_m\sum_n F\left(\frac{m}{A},\frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x+(n/A)y)} \tag{2.20}$$

$$-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2} \;\; ve \;\; -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \tag{2.21}$$

Pratikte sadece sınırlı sayıda Fourier bileşeni tespit edilebileceğinden, (2.23) şartı için şu yazılabilir:

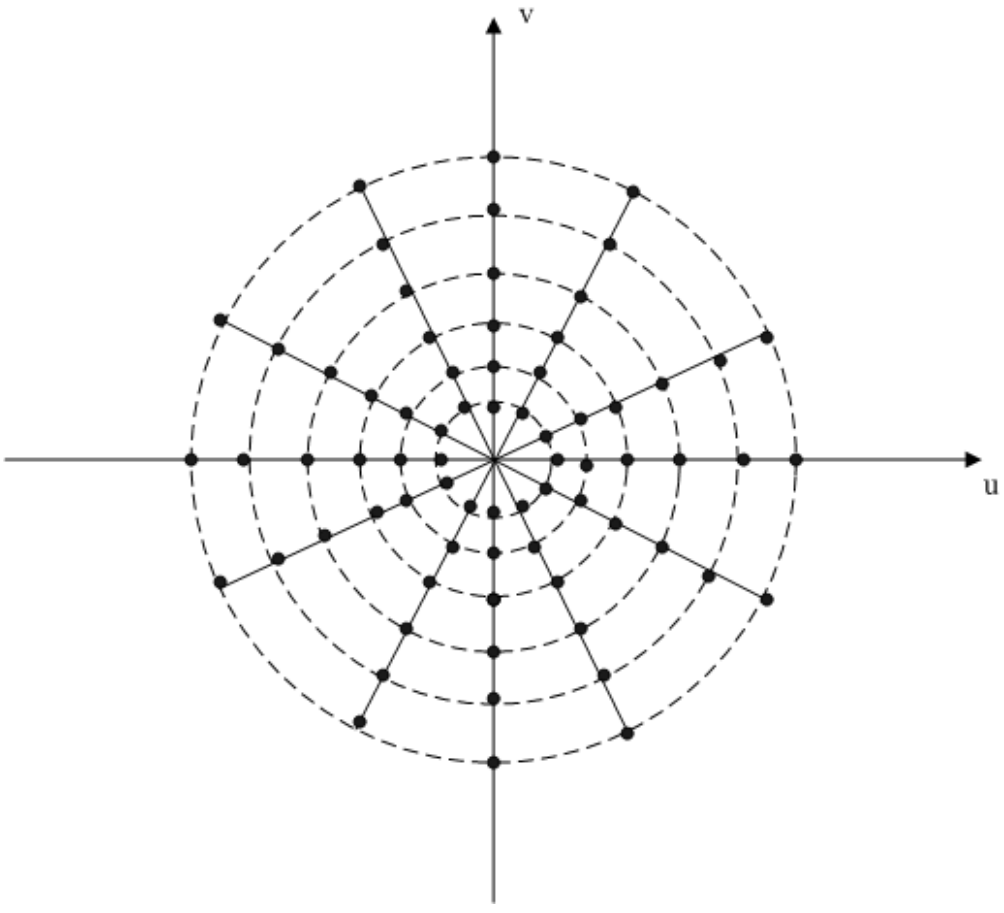
$$f(x,y) \approx \frac{1}{A^2}\sum_{m=-N/2}^{N/2}\sum_{n=-N/2}^{N/2} F\left(\frac{m}{A},\frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x+(n/A)y)} \tag{2.22}$$

$$-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2} \;\; ve \;\; -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \tag{2.23}$$

Burada N'nin bir çift sayı olduğu kabul edilmektedir. Görüntüsü alınmış resmin uzamsal çözünürlüğünün N ile belirtildiği açıkça görülmektedir. N^2 Fourier

katsayıları F(m/A, n/A) biliniyorsa, (2.22) denklemi, hızlı Fourier dönüşümü kullanılarak kolayca çözülebilir.

Pratikte, bir cismin ancak sınırlı sayıda izdüşümü alınabilir. Böyle bir durumda F(u,v) fonksiyonunun Şekil 2.8'deki gibi sadece sınırlı sayıda radyal çizgiler için bilinebileceği açıkça farkedilebilmektedir. (2.22) denklemini kullanabilmek için, bu radyal noktalar alınarak kare bir ızgara üzerine yerleştirilmelidir. Teorik olarak, (2.22) için gerekli olan N^2 katsayıları, *F(u,v)* fonksiyonunun yeterli sayıda değeri biliniyorsa bulunabilir [35] . Bu tür hesaplamalar, çoğu zaman belirsiz çözümlere yol açan geniş bir simultane denklem kümesinin çözümünü içerir. Kare ızgara üzerindeki değerleri ölçmenin daha basit bir yolu vardır. Bu yöntem, bazı yakın komşuları ya da radyal noktalardan alınan doğrusal interpolasyonu kullanmaktadır. Merkezden uzaklaştıkça radyal noktaların sıklığı azalacağından, interpolasyon hatası da büyümektedir. Bu da, bir görüntüdeki yüksek frekanslı kısımların hesaplanmasında, daha az frekanslı olanlara göre, daha büyük hatalar oluşacağını göstermektedir.



Şekil 2.8 Frekans Domeninde İzdüşümler [36]

2.3 Paralel İzdüşümler için Görüntüleme Algoritmaları

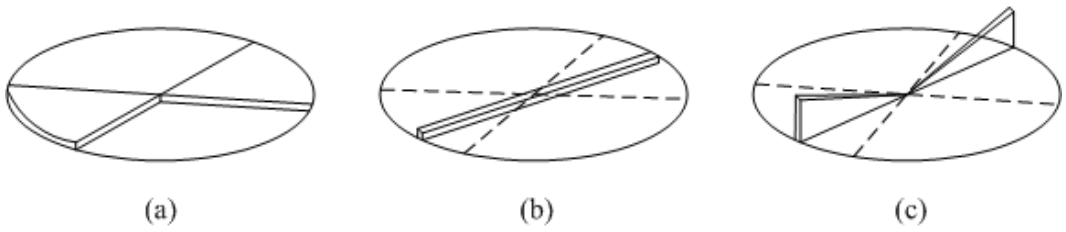
Fourier dilim teoremi, bir izdüşümün Fourier dönüşümü ile tek bir radyal boyunca cismin Fourier dönüşümü arasında bir bağıntı kurmaktadır. Böylece, bir izdüşümün Fourier dönüşümleri yeterli sayıda açı için verilirse, iki boyutlu dönüşümün tam bir kestirimi için uyarlanabilir ve cismin bir görüntüsüne varmak için kolayca dönüştürülebilir. Bu yöntem, tomografinin basit bir kavramsal modelini sunarken, pratik uygulamalar daha farklı bir yaklaşım gerektirmektedir.

Düz ışın tomografisinin hemen tüm uygulamalarında şu anda kullanılmakta olan algoritma, filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritmasıdır. Bu teorem, kutup koordinatlarında ters Fourier dönüşümü yeniden yazılarak ve buradaki integral limitleri yeniden düzenlenerek uygulamaya konmaktadır. Bu algoritmanın türevi, esas teori için temel açıklamaların basit bir şekilde yeniden yazılması ile, tümüyle farklı bir bilgisayar uygulamasını nasıl elde edebileceğimizi gösteren en belirgin örneklerden biridir.

2.3.1 Filtrelenmiş Geri-İzdüşüm Algoritmasının Mantıksal Temeli

Filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritmasına çok daha sezgisel bir mantık yüklenebilir. Zira her izdüşüm, cismin neredeyse bağımsız bir ölçümünü vermektedir. Bu, uzay domeninde göze çarpmaz, ancak izdüşümün Fourier dönüşümü her açı için bulunursa, Fourier Dilim Teoremi kolayca uygulanabilir. İzdüşümlerin neredeyse bağımsız olduğu söylenebilir, çünkü farklı açılarda iki izdüşümün Fourier dönüşümleri arasındaki tek ortak özellik dc terimidir.

Filtreli geri-izdüşüm algoritmasının ardındaki fikri geliştirmek için, şuna dikkat etmek gerekir. Fourier Dilim Teoremi'nin varlığı sebebiyle, bir izdüşümünün ölçülmesi işlemi, iki-boyutlu bir filtreleme işleminin uygulanması olarak görülebilir. Elimizde bir tek izdüşüm ve onun Fourier dönüşümü olduğunu farzedelim. Fourier Dilim Teoremi'ne göre bu izdüşüm, bir tek doğru boyunca cismin iki-boyutlu Fourier dönüşümü değerlerini sağlamaktadır. Bu izdüşümün Fourier dönüşüm değerleri, eğer cismin iki-boyutlu Fourier domeninde yerine konursa, diğer izdüşümlerin sıfır olduğu farzedilerek ve iki-boyutlu ters Fourier dönüşümü bulunarak, basit bir görüntü oluşturulabilir. Bu uygulamanın amacı, böyle oluşturulan bir görüntünün, asıl cismin Şekil 2.9(b)'de gösterilen basit filtre ile çarpılan Fourier dönüşümüne eşit olduğunu göstermektir.



Şekil 2.9 Bir izdüşümden elde edilen frekans domeni verisi

Basit bir görüntüleme işleminden elde etmek istediğimiz, Şekil 2.9(a)'da görüldüğü gibi pasta dilimi şeklinde filtrelenmiş cismin izdüşümleri toplamını bulmaktır. Ayrıca, bu toplam, Fourier dönüşümünün doğrusallık özelliğinden ötürü, Fourier domeninde de, uzay domeninde de elde edilebilir.

Adından da anlaşıldığı üzere, filtreli geri-izdüşüm algoritması iki adımdan oluşmaktadır. Filtreleme adımı, frekans domenindeki her bir izdüşümün ağırlığı olarak ele alınabilir. Geri-izdüşüm adımı ise, yukarıda sözü edilen her bir filtrelemeye karşılık gelen görüntüyü saptamak anlamına gelmektedir.

Yukarıda geçen birinci adım, şu unsurlardan oluşmaktadır. Frekans domenindeki ağırlaştırma işlemi her bir izdüşümün alınmasında ve cismin Fourier dönüşümüne ait pasta dilimi biçimli parçanın tahmin edilmesinde kullanılmaktadır. Belki de bunu yapmanın en kolay yolu, $S_\theta(w)$ izdüşümünün Fourier dönüşümü değerlerini almak ve onu frekanstaki dilimin genişliği ile çarpmaktır. Böylece, eğer 180^0 üzerinde K adet izdüşüm varsa, verilen *w* frekansında her bir parça, $2\pi|w|/K$ genişliğe sahip olacaktır. Daha sonra, teori daha da ileri şekilde türetilince, bu $|w|$ faktörünün, ters Fourier dönüşümü için gerekli olan dikdörtgen koordinatlar ve kutup koordinatları arasındaki değişken değişimi için Jacobian'ı temsil ettiği görülecektir.

$2\pi|w|/K$ ile ağırlaştırmanın etkisi Şekil 2.9(c)'de görülmektedir. Bunu, 2.9(a)'daki şekil ile karşılaştırınca, her bir uzamsal frekans, *w*, ve her bir ağırlaştırılmış izdüşüm, $(2\pi|w|/K)S_\theta(w)$, bir dilim için yaklaşık değeri taşımaktadır. Öte yandan hata, yeterli sayıda izdüşüm kullanılarak ulaşılmak istenen minimum hata seviyesi kadar az olmaktadır.

Son görüntüleme, her bir ağırlaştırılan izdüşümün iki-boyutlu ters Fourier dönüşümü bir araya getirilerek bulunmaktadır. Çünkü, izdüşüm sadece bir tekli doğru boyunca

Fourier dönüşüm değerlerini vermektedir. Ayrıca ters dönüşüm oldukça hızlı bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Bu adım, genel olarak geri-izdüşüm olarak anılır.

Böylece, tam filtreli geri-izdüşüm algoritması, şöyle yazılabilir:

0 ve 180^0 aralığındaki tüm K açıları toplamının alınması

İzdüşümün ölçümü, $P_\theta(t)$

Fourier dönüşümü, $S_\theta(w)$

Bunun, ağırlaştırılmış fonksiyon, $2\pi|w|/K$, ile çarpılması

Görüntü düzlemi üzerindeki filtreli izdüşümlerin ters Fourier dönüşümleri toplamı

Filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritmasının, frekans domeni interpolasyonuna göre iki avantajı vardır. En önemlisi, görüntüleme işleminin, birinci izdüşüm ölçülür ölçülmez başlatılabilmesi olarak sayılabilir. Bu durum, görüntüleme işlemini hızlandırır ve depolanması gereken bilgi büyüklüğünü azaltır. İkinci avantaj ise filtreli geri-izdüşüm algoritmasında, her bir filtreli izdüşümün, bir görüntü noktasına katkısını hesapladığımız için, interpolasyon çoğunlukla gerekli olmaktadır. Bu yüzden interpolasyonu, frekans domeninden çok uzay domeninde yürütmenin daha uygun olduğu ortaya çıkmaktadır. Fourier interpolasyonu için daha karmaşık yaklaşımlar gerekli olsa da; geri-izdüşüm algoritması için genellikle basit doğrusal interpolasyon yeterli olmaktadır.

2.3.2 Algoritmanın Paralel Uygulaması

Öncelikle, paralel ışın izdüşümleri için geri-izdüşüm algoritması açıklanmalıdır. Ters dönüşüm formülünü hatırlayacak olursak, *f(x,y)* cisim fonksiyonunun şu şekilde tanımlanabileceği görülür:

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}du\,dv \qquad (2.24)$$

Bir (w,θ) kutup koordinat sistemi için *(u,v)* frekans domenindeki dikdörtgen koordinat sistemini aşağıdaki dönüşümleri uygulayarak değiştirirsek,

$$u = w\cos\theta \qquad (2.25)$$

$$v = w\sin\theta \qquad (2.26)$$

sonra diferansiyeller, (2.27) denklemi kullanılarak değiştirildiğinde,

$$du\,dv = w\,dw\,d\theta \qquad (2.\ 27\ )$$

kutupsal bir fonksiyonun ters Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w,\theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w\,dw\,d\theta \qquad (\ 2.28\ )$$

Bu integral, θ'nın 0^0-180^0 ve 180^0-360^0 aralıkları için iki farklı biçimde incelenebilir.

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w,\theta) e^{j2\pi w(x\cos\theta + y\sin\theta)} w\,dw\,d\theta$$

$$+ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F\left(w,\theta+180^0\right) e^{j2\pi w\left(x\cos\left(\theta+180^0\right)+y\sin\left(\theta+180^0\right)\right)} w\,dw\,d\theta \qquad (2.29)$$

ve aşağıdaki özellik kullanılarak,

$$F\left(w,\theta+180^0\right) = F\left(-w,\theta\right) \qquad (2.30)$$

f (x,y) için verilen yukarıdaki denklem şu şekilde yazılabilir:

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(w,\theta)|w| e^{j2\pi wt} dw \right] d\theta \qquad (2.31)$$

Burada, denklem, (2.32) ile sadeleştirildi.

$$t = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad (2.32)$$

Eğer izdüşümün θ açısı için Fourier dönüşümü, $S_\theta(w)$, iki-boyutlu Fourier dönüşümü, $F(w,\theta)$, için kullanılırsa, denklem (2.33) elde edilir.

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w)|w| e^{j2\pi wt} dw \right] d\theta \qquad (2.33)$$

(2.33) denklemindeki bu integral şu şekilde de gösterilebilir:

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} Q_\theta(x\cos\theta + y\sin\theta)\,d\theta \qquad (2.34)$$

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w)|w| e^{j2\pi wt} dw \qquad (2.35)$$

Eğer izdüşüm bilgisi dönüşümü $S_\theta(w)$ verilmişse, *f(x,y)* basit bir hal alır. Denklem (2.35), filtrenin frekans yanıtının $|w|$ olarak verildiği bir filtreleme işlemini tanımlamaktadır. Bu nedenle $Q_\theta(w)$, "filtreli izdüşüm" olarak adlandırılır. Farklı θ açıları için elde edilen sonuç izdüşümleri, böylelikle *f(x,y)*'nın tahmini olarak belirlenmesinde kullanılmaktadır.

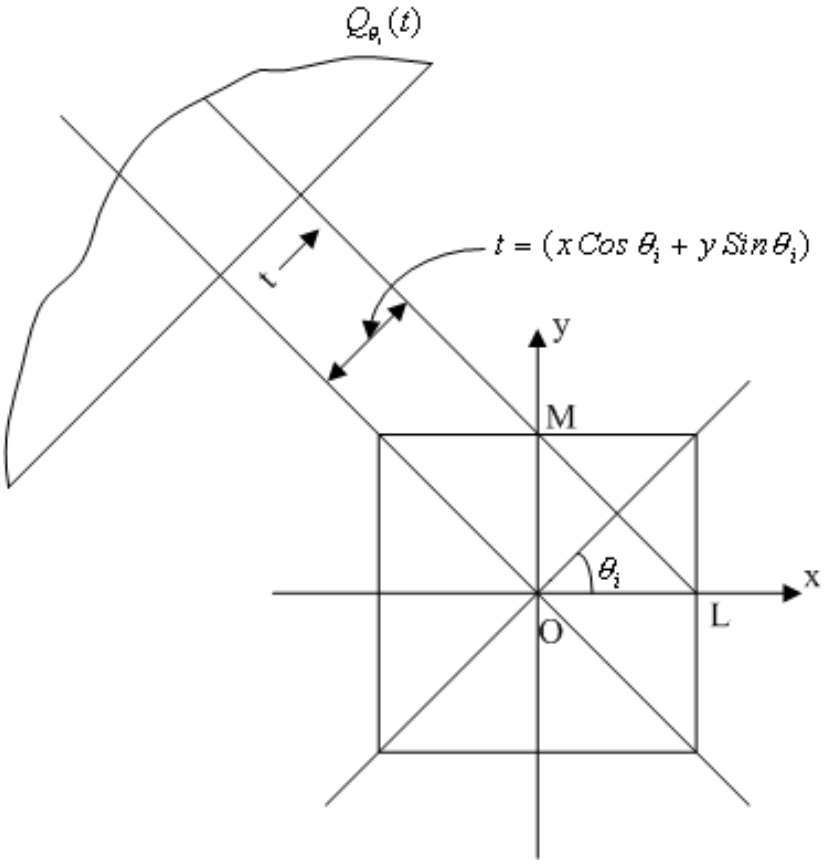
Denklem (2.34), geri-yansıtılacak her bir Q_θ filtreli izdüşüm için uygulanmaktadır. Bu durum şöyle açıklanabilir. Görüntü düzlemindeki her bir *(x,y)* noktası için, $t = x\cos\theta + y\sin\theta$ denkleminin değeri, verilen θ için bir karşılığa sahiptir. Q_θ filtreli izdüşümü, görüntüye *t*'deki değerine göre katkıda bulunur. Bu, Şekil 2.10'da daha ayrıntılı olarak görülebilmektedir. Belirli bir θ açısı için *t* değeri, LM doğru parçası üzerindeki tüm *(x,y)* noktaları için aynıdır. Bu yüzden, Q_θ filtreli izdüşümü, bütün bu noktalardaki görüntülemeye aynı katkıyı sağlamaktadır. Böylece görüntü oluşturma işleminde her bir Q_θ filtreli izdüşümü, görüntü düzleminde geri yansıtılmıştır.

w parametresi, uzamsal frekans boyutuna sahiptir. Denklem (2.35)'deki integral prensipte, tüm uzamsal frekanslar üzerinde uygulanmalıdır. Pratikte, belirli bir frekans üzerindeki Fourier dönüşüm parçaları içinde oluşan enerji ihmal edilebilir niteliktedir. Eğer W, her bir izdüşümdeki en yüksek frekans bileşeninden daha yüksek bir frekans ise; örnekleme teoremine göre, izdüşümler *T* aralığında örneklendirilebilirler.

$$T = \frac{1}{2W} \qquad (2.36)$$

Eğer, izdüşüm bilgisinin $|t|$'nin geniş değerleri için sıfıra eşit olduğunu varsayarsak, bir izdüşüm, geniş bir *N* değeri için şu şekilde ifade edilebilir:

$$P_\theta(mT), \quad m = \frac{-N}{2}, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots, \frac{N}{2} - 1 \qquad (2.37)$$



Şekil 2.10 $Q_{\theta_i}(t)$ filtreli izdüşümü [31]

Bu durumda, bir HFD algoritması, bir izdüşümün $S_\theta(w)$ Fourier dönüşümüne aşağıdaki formül ile ulaşılması için de kullanılabilir.

$$S_\theta(w) \approx S\left(m\frac{2W}{N}\right) = \frac{1}{2W}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} P_\theta\left(\frac{k}{2W}\right)e^{-j2\pi(mk/N)} \tag{2.38}$$

Bir izdüşümün örnekleri biliniyorsa, (2.38) denklemi, bu izdüşümün Fourier dönüşümünü verir. Bir sonraki adım, $Q_\theta(w)$ "modifiye edilmiş izdüşüm"ünü dijital olarak hesaplamaktır.

$$Q_\theta(t) = \int_{-W}^{W} S_\theta(w)|w|e^{j2\pi wt}dw \tag{2.39}$$

$$\approx \frac{2W}{N}\sum_{m=-N/2}^{N/2} S_\theta\left(m\frac{2W}{N}\right)\left|m\frac{2W}{N}\right|e^{j2\pi m(2W/N)t} \tag{2.40}$$

Eğer, sadece $P_\theta(t)$ izdüşümlerindeki *t* için $Q_\theta(t)$ izdüşümleri hesaplanmak istenirse, şu elde edilir:

$$Q_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) \approx \left(\frac{2W}{N}\right) \sum_{m=-N/2}^{N/2} S_\theta\left(m\frac{2W}{N}\right) \left|m\frac{2W}{N}\right| e^{j2\pi(mk/N)} \tag{2.41}$$

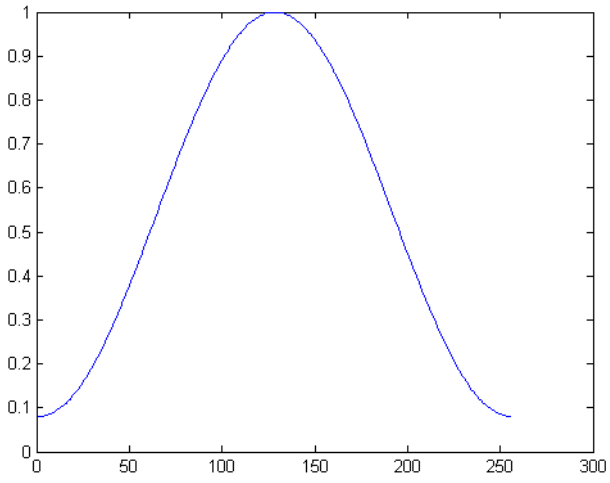
$$k = -N/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N/2 \tag{2.42}$$

Yukarıdaki denklem ile birlikte, izdüşüm fonksiyonlarının örnekleme noktalarındaki $Q_\theta(t)$ fonksiyonu, $S_\theta(m(2W/N))$ *ve* $|m(2W/N)|$ ürününe ait ters AFD ile yaklaşık olarak verilmektedir. Genellikle görüntüdeki daha üstün sonuçlar, filtreli izdüşümün Hamming penceresi gibi bir fonksiyon ile çarpılması ile elde edilmektedir [37] .

$$Q_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) \approx \left(\frac{2W}{N}\right) \sum_{n=-N/2}^{N/2} S_\theta\left(m\frac{2W}{N}\right) \left|m\frac{2W}{N}\right| H\left(m\frac{2W}{N}\right) e^{j2\pi(mk/N)} \tag{2.43}$$

Burada *H(m(2W/N)),* kullanılan pencere fonksiyonu temsil etmektedir. Pencere fonksiyonun amacı, çoğu durumda gürültüye neden olan yüksek frekans bileşenlerini bastırmaktır. (2.43) denklemi, ayrık dönüşümler için, konvolüsyon teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) \approx \left(\frac{2W}{N}\right) P_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) * \phi\left(\frac{k}{2W}\right) \tag{2.44}$$



Şekil 2.11 Hamming penceresi örneği [37]

Yıldız işareti (*), periyodik konvolüsyonu belirtmektedir. Denklemdeki $\phi(k/2W)$, $m=-N/2,...,-1,0,1,...,N/2$ için $|m(2W/N)|H\left(m(2W/2)\right)$ ayrık fonksiyonunun ters ayrık Fourier dönüşümüdür.

Bir izdüşümün örnekleme noktalarında $Q_\theta(t)$ fonksiyonu, Fourier domeninde denklem (2.40), uzay domeninde ise denklem (2.44) kullanılarak elde edilebilir. Böylece oluşturulan *f(x,y)* resmi, (2.34)'teki integrale küçük bir yaklaşıklık ile üretilebilir.

$$f(x,y)=\frac{\pi}{K}\sum_{i=1}^{K}Q_{\theta i}\left(x\cos\theta_i+y\sin\theta_i\right) \tag{2.45}$$

Denklem (2.45)'deki $x\cos\theta_i+y\sin\theta_i$ değeri, (2.43) veya (2.44)'te belirtilen Q_{θ_i} için *t* değerine karşılık gelmeyebilir. Ancak, böyle bir *t* için Q_{θ_i} değeri, uygun bir interpolasyon ile yaklaşık olarak bulunabilir; genellikle doğrusal interpolasyon yeterli olmaktadır.

(2.35)'deki filtreleme işlemi hakkında iki yorum yapılmalıdır: İlk olarak, (2.35), *t* domeninde aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$Q_\theta(t)=\int P_\theta(\alpha)p(t-\alpha)d\alpha \tag{2.46}$$

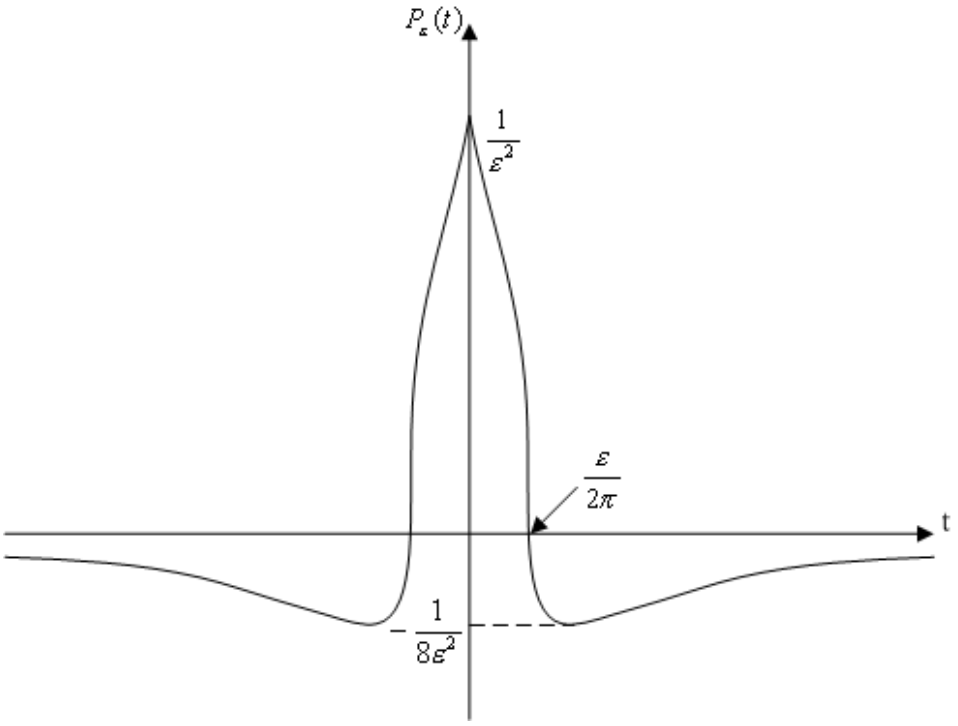
Burada *p(t),* frekans domenindeki $|w|$ fonksiyonunun nominal bağlamdaki ters Fourier dönüşümüdür. $|w|$ fonksiyonu, bir integral fonksiyon olmadığı için, ters dönüşümü de normal şartlar altında alınamaz. Bununla birlikte, (2.47) denkleminin ters Fourier dönüşümü $\in\rightarrow 0$ iken hesaplanabilir.

$$|w|e^{-\in|w|} \tag{2.47}$$

bu fonksiyonun ters Fourier dönüşümü, aşağıda $p_\in(t)$ ile gösterilmektedir.

$$p_\in(t)=\frac{\in^2-(2\pi t)^2}{\left(\in^2+(2\pi t)^2\right)^2} \tag{2.48}$$

Bu fonksiyon Şekil 2.12'de açıklanmaktadır. *t* değeri için $p_{\in}(t) \approx -1/(2\pi t)^2$ yaklaşık eşitliği elde edilmektedir.



Şekil 2.12 İdeal geri-izdüşüm filtresi dürtü yanıtının yaklaşık değeri [31]

İzdüşüm bilgisinin, τ cm örnekleme aralığı ile örneklendiği varsayılsın. Bu durumda, zamanda örtüşme oluşmaması, dönüşüm domenindeki izdüşümlerin, *(-W,W)* frekans aralığı dışında enerji içermediklerini göstermektedir.

$$W = \frac{1}{2\tau} \; çevrim/cm \tag{2.49}$$

Örneklenen izdüşümün *k*'nın tam sayı değerleri aldığı, $P_\theta(k\tau)$ fonksiyonu ile temsil edildiğini kabul edelim. Teori, örneklenen her $P_\theta(k\tau)$ izdüşümü için, (2.40) denklemi ile verilen periyodik konvolüsyon kullanılarak filtrelenmiş bir $Q_\theta(k\tau)$ oluşturulması gerektiğini belirtmektedir. Bununla birlikte, (2.40)'ın, izdüşümlerin sadece sınırlı bant genişliğinde oluştuğunda geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

Bir araya getirilen bu iki varsayım, hiçbir zaman tam olarak yeterli değildir. İşte bu sebeple (2.40)'a dayalı bilgisayar işlemi, periyodik olmayan konvolüsyon (2.35) ile gösterilen periyodik konvolüsyon gibi uygulandığında genellikle periyodlar arası parazite yol açmaktadır. Bu gürültüler, (2.42) ya da (2.43)'deki uygulama

kullanılmadan önce, izdüşüm verisinde yeterli miktarda sıfır doldurularak saf dışı bırakılabilir. Fakat bu bozucu etkiler tümüyle ortadan kaldırılamamaktadır.

Yukarıda sözü edilen gürültülerin, (2.40) ayrık gösteriminde kullanılan yaklaşıklığı gerektirmeyen, (2.35)'in aşağıdaki alternatif uygulaması ile elimine edilebileceği görülecektir. İzdüşümlerde en yüksek frekans, (2.49) denklemi ile verildiği gibi sonlu bir değerde olduğunda (2.35) şu şekilde yazılabilmektedir:

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w) H(w) e^{j2\pi wt} dw \tag{2.50}$$

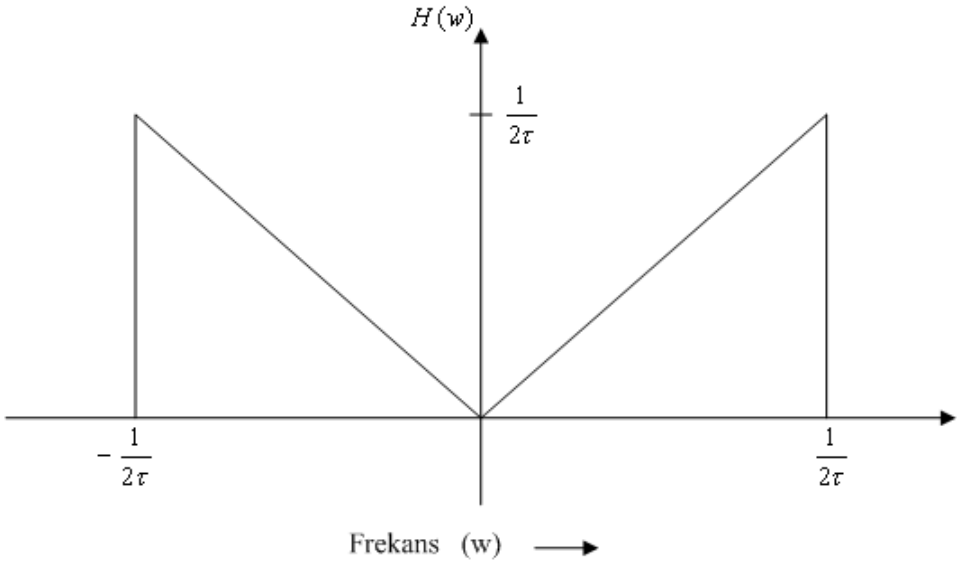
$$H(w) = |w| b_w(w) \tag{2.51}$$

$$b_w(w) = \begin{cases} 1 & |w| < W \\ 0 & diğer\ durumda \end{cases} \tag{2.52}$$

Şekil 2.13'de görülen *H(w)*, bir filtrenin transfer fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu filtrenin dürtü yanıtı *h(t)*, *H(w)*'nın ters Fourier dönüşümü ile verilmektedir.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(w) e^{+j2\pi wt} dw \tag{2.53}$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \frac{\sin 2\pi t/2\tau}{2\pi t/2\tau} - \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{\sin \pi t/2\tau}{\pi t/2\tau} \right)^2 \tag{2.54}$$



Şekil 2.13 Filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması için ideal filtre yanıtı [31]

İzdüşüm verisi bir örnekleme aralığı ile ölçüldüğünden, dijital işlem için dürtü yanıt gereksinimi yalnızca aynı örnekleme aralığı ile tanımlanmaktadır. Örnekler, (2.55) denklemi ile verilmektedir.

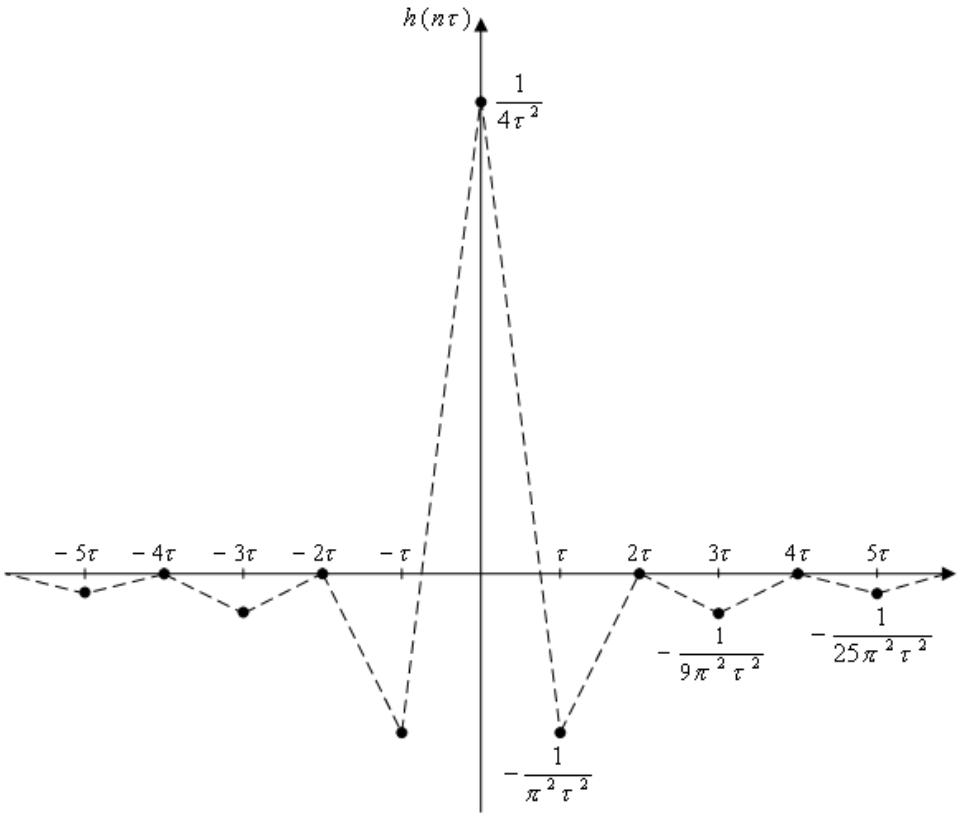
$$h(n\tau)=\begin{cases} 1/4\tau^2, & n=0 \\ 0, & n\ \text{çift} \\ -\dfrac{1}{n^2\pi^2\tau^2} & n\ \text{tek} \end{cases} \tag{2.55}$$

Bu fonksiyon Şekil 2.14'de gösterilmektedir.

$P_\theta(t)$ ve *h(t),* sınırlı bant fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$P_\theta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_\theta(k\tau)\frac{\sin 2\pi W(t-k\tau)}{2\pi\, W(t-k\,\tau)} \tag{2.56}$$

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\tau)\frac{\sin 2\pi W(t-k\tau)}{2\pi W(t-k\tau)} \tag{2.57}$$



Şekil 2.14 Şekil 2.13'teki filtrenin dürtü yanıtı [31]

Konvolüsyon teoremi yoluyla, filtrelenmiş izdüşüm (2.50) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t')h(t-t')dt' \tag{2.58}$$

Denklem (2.58) içine (2.56) ve (2.57) ilave edildiğinde, örnekleme noktalarındaki filtrelenmiş izdüşüm değerleri için aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n\tau - k\tau)P_\theta(k\tau) \tag{2.59}$$

Pratikte, her izdüşüm sadece sınırlı uzunluğa sahiptir. Her $P_\theta(k\tau)$'nin $k = 0,..., N-1$ aralığının dışında sıfır olduğu varsayılsın. Bu durumda, (2.59) denkleminin iki eşit formu yazılabilir.

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau)P_\theta(k\tau), \quad n = 0,1,2,....., N-1 \tag{2.60}$$

ya da

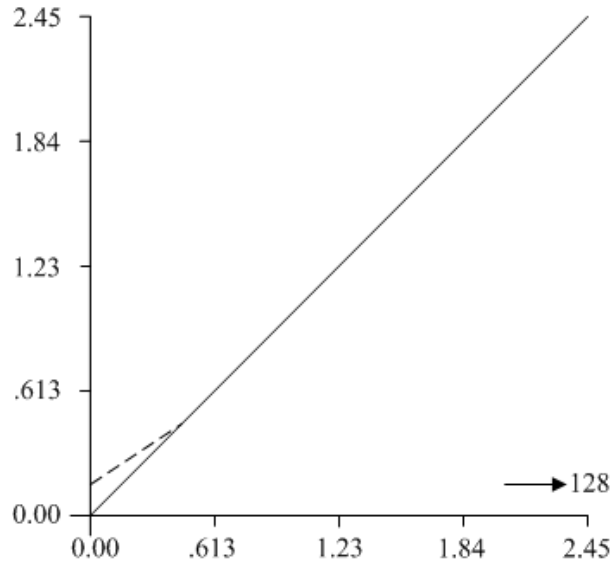
$$Q_\theta(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(k\tau)P_\theta(n\tau - k\tau), \quad n = 0,1,2,....., N-1 \tag{2.61}$$

Bu denklemler, $l = -(N-1)'den\ l = (N-1)'e$ kullanılacak olan $h(n\tau)$ serisinin $Q_\theta(n\tau)$ uzunluğunun belirlenmesi için gerekli hesaplamalardan oluşmaktadır. Buradaki önemli nokta, (2.60) ve (2.61) denklemleri aracılığıyla elde edilen sonuçların (2.42) denklemi ile elde edilen sonuçlarla örtüşmemesidir. Bunun sebebi, bir sonlu dizide $[-(N-1)\ ile\ (N-1)$ aralığında değişen bir *n* dizisi gibi] alınan *n* değerleri ile, $h(n\tau)$ serisinin ayrık Fourier dönüşümünün, $\left|k[(2W)/N\right]$ serisi olmamasıdır. *k*=0 iken, ikinci seri sıfır olduğunda, $-(N-1)\ ile\ (N-1)$ aralığında gezinen *n* ile *h(t)*'nin AFD'si, bu noktada sıfır değildir. Bu durum, Şekil 2.15'de gösterilmiştir.

(2.60) veya (2.61) denklemlerindeki ayrık konvolüsyon genel amaçlı bir bilgisayar üzerinde direkt olarak uygulamaya konabilir. Ancak, HFD algoritmaları kullanılarak frekans domeninde bu işlem daha hızlı uygulanabilmektedir. Frekans domeni uygulamasına ilişkin dikkat edilmesi gereken nokta şudur. (2.60) denkleminde

verilen konvolüsyon aperiyodik olmadığı halde, burada periyodik konvolüsyon uygulanabilmektedir. Periyodik konvolüsyonun doğal periyotlar arası parazit oluşumlarını yok etmek için, izdüşüm bilgisi yeterli sayıda sıfır ile doldurulur. $P_\theta(k\tau)$, (2N-1) eleman uzunluğuna ulaşması için sıfır ile doldurulursa, $Q_\theta(k\tau)$'nin N örnekleri üzerindeki periyotlar arası parazitlerinden korunmuş olunur. Eğer kullanılmak istenen 2 HFD algoritması ise, $P_\theta(k\tau)$ ve $h(k\tau)$ serilerinin $(2N-1)_2$ eleman uzunluğuna sahip olmaları için sıfır ile doldurulmaları gerekecektir. Buradan hareketle, frekans domeni uygulaması aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times THFD\{[SD\ ile\ \ FFT\ P_\theta(n\tau)] \times [SD\ ile\ HFD\, h(n\tau)]\} \quad (2.62)$$



Şekil 2.15 İdeal filtre ile (düzgün doğru) ve sınırlı bant filtresi'nin (kırık doğru) AFD'si [31]

Denklemde yer alan HFD ve THFD sırasıyla hızlı Fourier dönüşümü ve ters hızlı Fourier dönüşümünü temsil etmektedir. SF ise, sıfır doldurma'nın kısaltmasıdır. Bazı düzleştirmeler (2.62)'de birleştirilince, daha üstün görüntü oluşumları elde edilebilmektedir. Düzleştirme, iki HFD'ye ait bir ürünün bir Hamming penceresi ile çarpılması yoluyla uygulanabilmektedir. (2.62)'de birleştirilen benzer bir pencere şu şekilde yazılabilir.

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times THFD\{[SF\ ile\ \ HFD\, P_\theta(n\tau)] \times [SF\ ile\ HFD\ h(n\tau)] \times düzleştirme\ penceresi\} \quad (2.63)$$

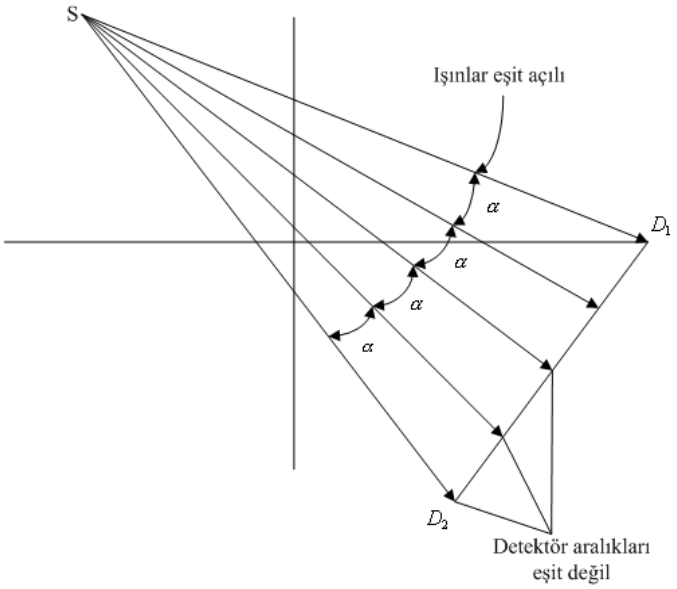
Burada gösterilen alternatif metot ile hesaplanan filtrelenmiş $Q_\theta(n\tau)$ izdüşümlerinden sonra, görüntünün yeniden oluşturulmasına ilişkin geri kalan uygulama, önceki alt başlıklarda ele alınan konu ile benzerlik taşımaktadır. Bu da, geri-izdüşümler ve onların toplamlarına ilişkin kullandığımız denklem (2.45)'de yer almaktadır. Verilen *(x,y)* ve θ_i için, $x\cos\theta_i + y\sin\theta_i$ argümanı, Q_{θ_i}'deki $k\tau$ dan birine karşılık gelmemektedir. Bu durum, interpolasyon ve sık sık da doğrusal interpolasyonu gerekli kılacaktır. Bazen interpolasyon için gerekli hesaplamaları elimine etmek amacıyla, $Q_\theta(t)$ fonksiyonunun ön interpolasyonu kullanılmaktadır. Öte yandan ön interpolasyon için uygulanabilecek bir çok teknik bulunmaktadır [38].

Bunu (2.63) denklemindeki işlemler ile birleştiren ön interpolasyon yöntemi, aşağıdaki unsurları içermektedir. (2.63)'da, ters HFD uygulanmadan önce, frekans domeni fonksiyonu çok sayıda sıfır ile genişletilmektedir. Bu serinin ters dönüşümü, Q_θ'nun ön interpolasyonunu sağlamaktadır. Son olarak [39]'da gösterildiği gibi, eğer bilgi serisi kesirli frekansları içeriyorsa, bu yaklaşım özellikle başlangıç ve bilgi serisinin sonunda büyük oranlarda hatalara yol açabilir. Ön interpolasyon ve uygun programlama ile, paralel izdüşüm verisi için geri-izdüşüm, gerçekte hiçbir çarpma işlemi olmadan gerçekleştirilebilir.

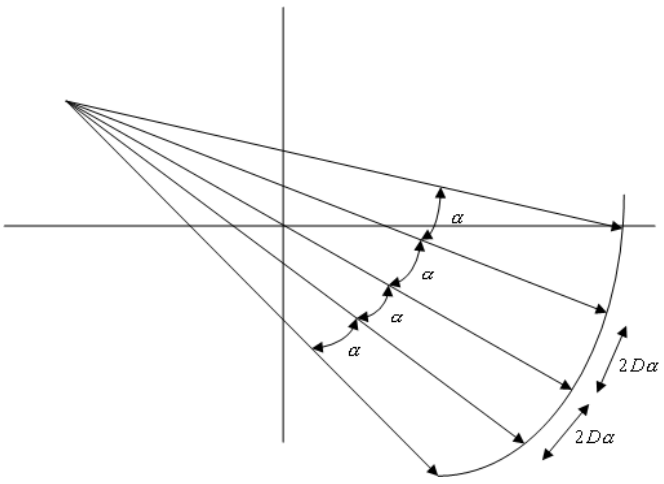
2.4 Yelpaze İzdüşümlerinden Görüntüleme

Önceki alt başlıkta yer alan teori, Şekil 2.1'de görüldüğü gibi, görüntülerin paralel izdüşümlerinden yeniden oluşturulması ile ilgilenmiştir. Bu verilerin oluşturulmasında, bir kaynak detektörü doğrusal olarak bir izdüşüm uzunluğu üzerinde tarama yapmak zorundadır. Ardından belirli bir açıdaki mesafe etrafında dönmek ve sonraki izdüşüm uzunluğu üzerinde doğrusal olarak tarama yapmak durumundadır. Bu genellikle, tüm verilerin toplanması için birkaç dakika alabilmektedir. Doğru integrallerini oluşturmanın daha hızlı yolu ise, Şekil 2.3'de görüldüğü gibi yelpaze ışınlarını kullanmaktır. Bu yöntem, yelpaze-biçimli ışın yayan, bir ışınım kaynağı kullanmaktadır. Cismin diğer tarafındaki bir dizi detektör, bir yelpaze içinde simültane olarak tüm ölçümleri yapmaktadır. Kaynak ve tüm detektör dizisi, istenilen sayıda yelpaze izdüşümü oluşturmak amacıyla rotasyon yapabilmektedir.

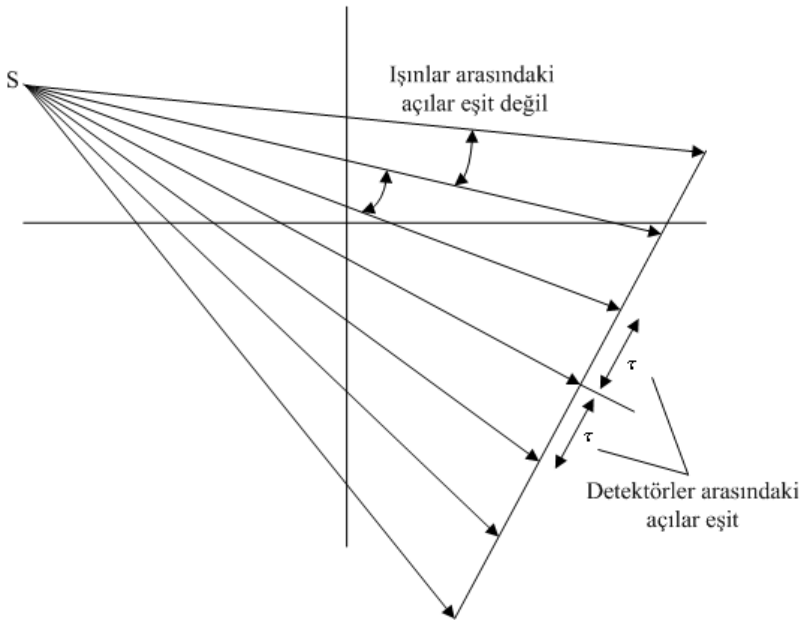
Bir izdüşümün eşit açı ya da eşit aralıklarda örneklenmesine dayalı olarak iki çeşit yelpaze izdüşümü bulunmaktadır. Bu farklılık Şekil 2.16'da görülmektedir. Şekil 2.16'da eşit açılı ışın kümesi görülmektedir. Eğer doğru integrallerinin ölçümü için detektörler D_1D_2 düz çizgisi üzerinde düzenlenir ise bu, aralarında eşit mesafe olmadığı anlamını taşır. Bununla birlikte eğer,detektörler merkezi S olan bir çember üzerinde düzenlenir ise, Şekil 2.17'deki gibi bu çember üzerinde eşit uzaklıklarda konumlandırılabilirler. İkinci tip yelpaze izdüşümü ışınların, Şekil 2.18'deki gibi bir çizgi üzerindeki detektör aralıklarının eşit olacağı şekilde düzenlendiğinde oluşmaktadır. Bu iki tip yelpaze izdüşümünden doğan görüntülere ait algoritmalar birbirinden farklıdır ve sonraki alt başlıkta ayrı ayrı türetileceklerdir.



Şekil 2.16 Eşit açılı, farklı detektör aralıklı yelpaze ışın demeti [31]



Şekil 2.17 Eşit açılı, eşit detektör aralıklı yelpaze ışın demeti [31]



Şekil 2.18 Farklı açılı, eşit detektör aralıklı yelpaze ışın demeti [31]

2.4.1 Eş Açılı Işınlar

$R_\beta(\gamma)$, Şekil 2.19'da gösterildiği gibi bir yelpaze izdüşümü belirtsin. Burada β, S'nin referans ekseniyle yaptığı açıdır ve γ bir yelpaze içindeki ışının konumunu vermektedir. SA ışını ele alınsın. Eğer izdüşüm verisi bir paralel ışın kümesi boyunca oluşturulursa, SA ışını, θ ve *t* için bir paralel izdüşüme, $P_\theta(t)$'ye ait olacaktır.

$$\theta = \beta + \gamma \quad ve \quad t = D\sin\gamma \tag{2.64}$$

Burada D, S kaynağının O orijininden uzaklığıdır. (2.64)'deki ilişki şu husus temel alınarak türetilmiştir. θ açısındaki paralel izdüşüme ait tüm ışınlar PQ çizgisine dikeydir ve OB gibi bir uzaklığa sahip çizgi, *t* değerine eşittir. Şimdi $P_\theta(t)$ paralel izdüşümlerinden bilinmektedir ki; aşağıdaki denklem kullanılarak *f(x,y)* yeniden oluşturulabilir.

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\, d\,t\, d\theta \tag{2.65}$$

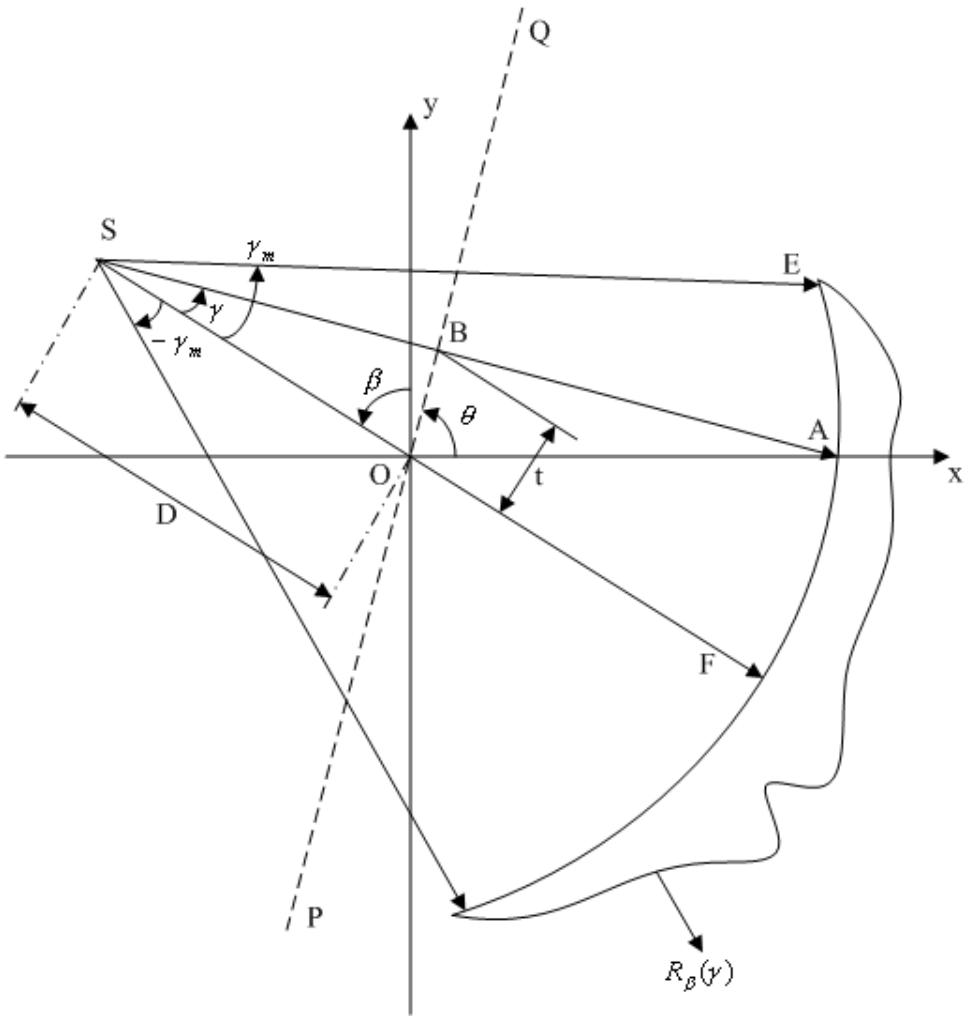
t_m tüm izdüşümlerden $|t| > t_m$ ile $P_\theta(t) = 0$ için elde edilen *t* değeridir. Bu denklem, yalnızca 180^0 üzerinden toplanan paralel izdüşümler için uygundur. Buna karşın

eğer 360^0 üzerinden oluşturulan izdüşümler için kullanılmak istenir ise, denklem şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t)h(x\cos\theta+y\sin\theta-t)\,dt\,d\theta \qquad (2.66)$$

(x,y) noktası (Şekil 2.20'de C ile gösterilen) (r,ϕ) kutup koordinatlarında tanımlanır ise, algoritmanın türevi daha kolay hale gelmektedir.

$$x=r\cos\phi \qquad y=r\sin\phi \qquad (2.67)$$



Şekil 2.19 Eşit açılı demetin kapsamlı gösterimi [31]

Denklem (2.66)'deki ifade şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t)h(r\cos(\theta-\phi)-t)\,dt\,d\theta \qquad (2.68)$$

Denklem (2.64)'deki ilişkiyi kullanarak, γ ve β terimlerinde çift integral uygulanabilmektedir.

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma}\int_{-\sin^{-1}(t_m/D)}^{\sin^{-1}(t_m/D)} P_{\beta+\gamma}(D\sin\gamma)h(\tau\cos(\beta+\gamma-\phi)-d\sin\gamma)$$

$$D\cos\gamma\, d\gamma\, d\beta \quad (2.69)$$

β için $-\gamma$'dan $2\pi-\gamma$'ya olan limit, 360^0'nin tümünü kapsamaktadır. Tüm β fonksiyonları, periyodik (2π periyodu ile) olduğundan bu limitler 0 ve 2π'nin yerini alabilirler. $Sin^{-1}(t_m/D)$, Şekil 2.19'da en uçtaki SE ışını için γ değerlerine eşittir. Böylece, γ için alt ve üst limitler γ_m ve $-\gamma_m$ olarak yazılabilir. $P_{\beta+\gamma}(D\sin\gamma)$ ifadesi, paralel izdüşüm verisi $P_\theta(t)$'deki SA boyunca ışın integraline karşılık gelmektedir. Yelpaze izdüşümündeki bu ışın integralinin tanımı, $R_\beta(\gamma)$'dir. Bu değişiklikleri (2.75)'e ilave ederek şu elde edilmektedir.

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\gamma m}^{\gamma m} R_\beta(\gamma)h(r\cos(\beta+\gamma-\phi)-D\sin\gamma)D\cos\gamma\, d\gamma\, d\beta \quad (2.70)$$

Denklem (2.70) ile verilen görüntü oluşum formülünü bir bilgisayarda kolaylıkla uygulanabilecek şekilde yazabilmek için, öncelikle *h* fonksiyon argümanı incelenmelidir. Bu argüman şu şekilde yeniden yazılabilir.

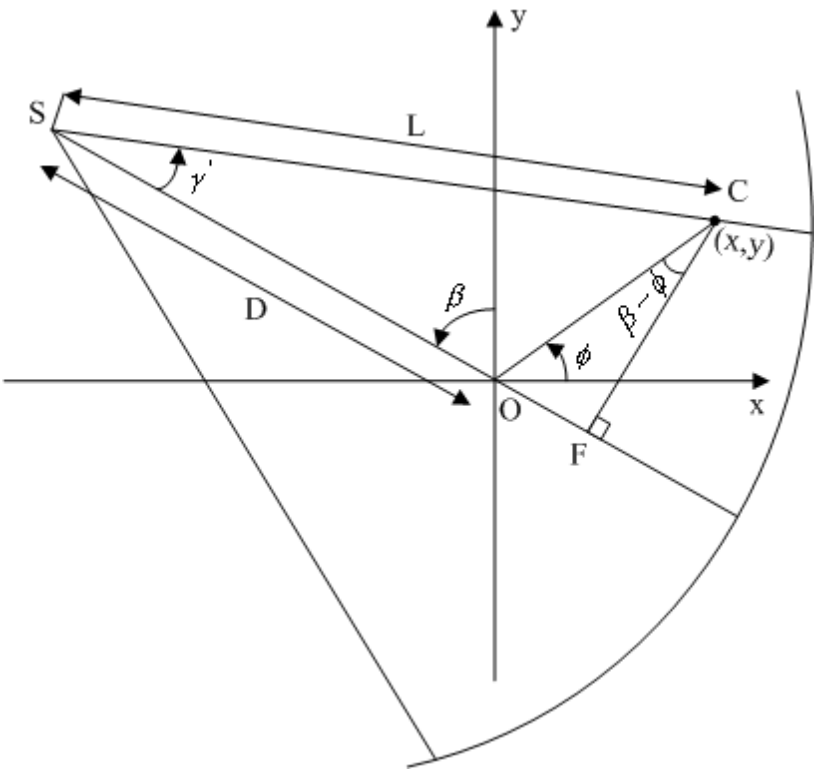
$$r\cos(\beta+\gamma-\phi)-D\sin\gamma$$

$$=r\cos(\beta-\phi)\cos\gamma-[r\sin(\beta-\phi)+D]\sin\gamma \quad (2.71)$$

L'nin *S* kaynağından Şekil 2.20'deki *C* gibi, bir *(x,y)* noktasına [ya da kutup koordinatlarında (r,ϕ)] olan uzaklık olduğunu düşünelim. Açık şekilde *L*, üç değişkene r,ϕ,β sahip bir fonksiyondur. Ayrıca, γ', bu (r,ϕ) noktasından geçen ışının açısı olsun. Böylece, şu kolaylıkla gösterilebilir.

$$L\cos\gamma' = D + r\sin(\beta-\phi)$$

$$L\sin\gamma' = r\cos(\beta-\phi) \quad (2.72)$$



Şekil 2.20 Eşit açılı demetin kutup koordinatlarındaki gösterimi

Şu noktaya edilmelidir. L ve γ''yi tümüyle belirleyen, (r,ϕ) noktası ve β izdüşüm açısıdır.

$$L(r,\phi,\beta)=\sqrt{[D+r\sin(\beta-\phi)]^2+[r\cos(\beta-\phi)]^2} \tag{2.73}$$

ve

$$\gamma'=\tan^{-1}\frac{r\cos(\beta-\phi)}{D+r\sin(\beta-\phi)} \tag{2.74}$$

(2.71) denkleminde, (2.72) denklemi kullanılarak *h* ifadesi için şu elde edilmektedir:

$$r\cos(\beta+\gamma-\phi)-D\sin\gamma=L\sin(\gamma'-\gamma) \tag{2.75}$$

ve bu denklem (2.70)'da yerine konulduğunda, (2.76) denklemi oluşmaktadır.

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\gamma m}^{\gamma m} R_\beta(\gamma)h(L\sin(\gamma'-\gamma))D\cos\gamma\ d\gamma\ d\beta \tag{2.76}$$

Şu durumda, $h(L\sin(\gamma'-\gamma))$ fonksiyonu *h(t)*'ye göre açıklanmalıdır. *h(t)*'nin frekans domeninde $|w|$'nun ters Fourier dönüşümü olduğuna dikkat edilmelidir.

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{j2\pi wt}dw \tag{2.77}$$

Buradan,

$$h(L\sin\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{j2\pi wL\sin\gamma}dw \tag{2.78}$$

aşağıdaki dönüşüm kullanılarak,

$$w'=\frac{wL\sin\gamma}{\gamma} \tag{2.79}$$

şunlar yazılabilir:

$$h(L\sin\gamma)=\left(\frac{\gamma}{L\sin\gamma}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}|w'|e^{j2\pi w'\gamma}dw' \tag{2.80}$$

$$=\left(\frac{\gamma}{L\sin\gamma}\right)^2 h(\gamma) \tag{2.81}$$

Böylece, (2.76) denklemi aşağıdaki hale gelir.

$$f(r,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{L^2}\int_{-\gamma m}^{\gamma m}R_\beta(\gamma)g(\gamma'-\gamma)D\cos\gamma\;d\gamma\;d\beta \tag{2.82}$$

$$g(\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 h(\gamma) \tag{2.83}$$

Bilgisayar uygulaması için, (2.82) ağırlıklı filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması olarak yorumlanabilir. Bunu göstermek amacıyla (2.82) şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$f(r,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{L^2}Q_\beta(\gamma')\,d\beta \tag{2.84}$$

$$Q_\beta(\gamma) = R'_\beta(\gamma) * g(\gamma) \tag{2.85}$$

$$R'_\beta(\gamma) = R_\beta(\gamma) \cdot D \cdot \cos\gamma \tag{2.86}$$

Sonuç olarak bir görüntünün yeniden oluşturulması aşağıdaki üç adımı gerekli kılmaktadır.

1) Her bir $R_\beta(\gamma)$ fonksiyonunun, α örnekleme aralığı ile örneklendiği varsayıldığında, tanımlı veri, *n*'in tam sayı değerler aldığı $R_{\beta_i}(n\alpha)$'dır. β_i, ele alınan izdüşümdeki açılardır. Birinci adım, her bir $R_{\beta_i}(n\alpha)$ yelpaze izdüşümü için, denklem (2.87) yoluyla $R'_{\beta_i}(n\alpha)$'nın karşılığını bulmaktır.

$$R'_{\beta_i}(n\alpha) = R_{\beta_i}(n\alpha) \cdot D \cdot \cos n\alpha \tag{2.87}$$

($n = 0$)'ın izdüşüm merkezinden geçen ışına karşılık geldiğine dikkat edelim.

2) Filtrelenmiş uygun izdüşümü oluşturmak için her bir dönüştürülen izdüşüm $R'_{\beta_i}(n\alpha)$'nın , $g(n\alpha)$ ile konvolüsyonu sağlanmalıdır.

$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha) \tag{2.88}$$

Bu ayrık konvolüsyonu bir HFD programı kullanarak işletmek için, $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ fonksiyonu, parazitlerin oluşumuna fırsat tanınmayacak ölçüde sıfır ile doldurulmalıdır. $g(n\alpha)$ serisi, (2.83) ile verilmektedir.

$$g(n\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{n\alpha}{\sin n\alpha}\right)^2 h(n\alpha) \tag{2.89}$$

$h(n\alpha)$'nın bu değerini (2.55) içinde kullanırsak, ayrık dürtü yanıtı için şu elde edilir:

$$g(n\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\alpha^2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ çift sayı} \\ \left(\dfrac{\alpha}{\pi\alpha \sin n\alpha}\right)^2, & n \text{ tek sayı} \end{cases} \tag{2.90}$$

Her ne kadar teorik olarak, (2.88) ile istenenden daha fazla izdüşümün filtrelenmesine gerek yok ise de, pratikte belirli sayıda düzleştirme gerekli filtreleme ile birleştirilirse üstün görüntüler elde edilmektedir.

$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha) * k(n\alpha) \tag{2.91}$$

$k(n\alpha)$, düzeltme filtresinin dürtü yanıtıdır. Frekans domeni uygulamasında bu düzeltme filtresi bir örnek cosinus fonksiyonu ya da Hamming penceresi olabilir.

3) Her bir filtrelenmiş izdüşümün, yelpaze boyunca, ağırlıklı bir geri-izdüşümü ele alınsın. Buradaki geri-izdüşüm, paralel durumdakinden oldukça farklı olduğundan, bazı ayrıntıları açıklanmalıdır. Paralel durumda, paralel izdüşüm, Şekil 2.21'de gösterildiği gibi bir paralel doğru kümesi boyunca geri yansıtılmaktadır. Yelpaze-ışını durumunda ise, geri yansıtma Şekil 2.22'de görüldüğü gibi yelpaze boyunca yapılmaktadır. Bu durum, (2.84) ile ortaya konmaktadır.

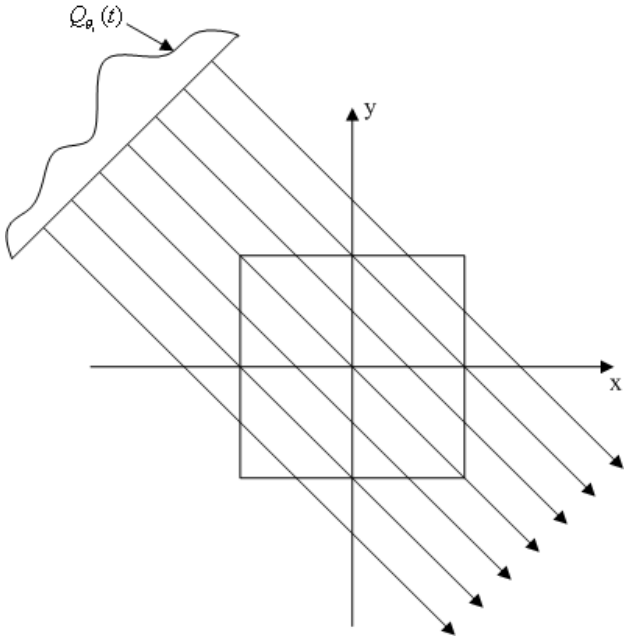
$$f(x,y) \approx \Delta\beta \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{L^2(x,y,\beta_i)} Q_{\beta_i}(\gamma') \tag{2.92}$$

γ', *(x,y)* noktası ve $\Delta\beta = 2\pi / M$ üzerinden geçen yelpaze ışınının açısıdır. Şekil 2.23'de seçilen β için, *(x,y)* noktasına $Q_{\beta_i}(\gamma)$ katkısını tespit edebilmek için öncelikle yapılması gereken, *(x,y)* noktasından geçen *SA* ışınına ait γ' açısını bulmaktır. Bundan sonra, β_i deki filtrelenmiş izdüşümden *(x,y)* noktasına katkı sağlanabilecektir. Elbette, hesaplanan γ' değeri, tanımlı $Q_{\beta_i}(n\alpha)$ için $n\alpha$ değerini karşılamayabilir. Böyle bir durumda interpolasyon kullanılmalıdır. *(x,y)* noktasındaki $Q_{\beta_i}(\gamma')$ katkısı, L^2 ile bölünmelidir. *L*; *S* kaynağının *(x,y)* noktasına olan uzaklığıdır.

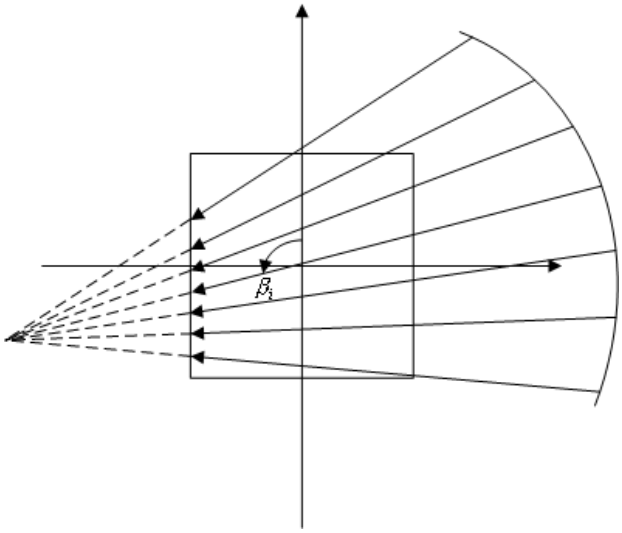
2.4.2 Eşit Aralıklarla Yerleştirilen Eş Doğrusal Detektörler

$R_\beta(s)$, Şekil 2.24'deki gibi bir yelpaze izdüşümünü temsil etsin. Detektörler sırasına karşılık gelen düz çizgi boyunca oluşan uzaklık *s*'dir. Burada sunulan algoritma ile sonraki alt başlıkta sunulacak algoritma arasındaki temel fark yelpaze izdüşümünden kaynaklanmaktadır. Bundan önceki konuda yelpaze izdüşümleri eşit açılı aralıklarla

örneklenmişti ve biz bunları $R_\beta(\gamma)$ ile göstermiştik. γ, ışının açısal konumunu temsil etmektedir. Şimdi bunlar $R_\beta(s)$ ile gösterilecektir.

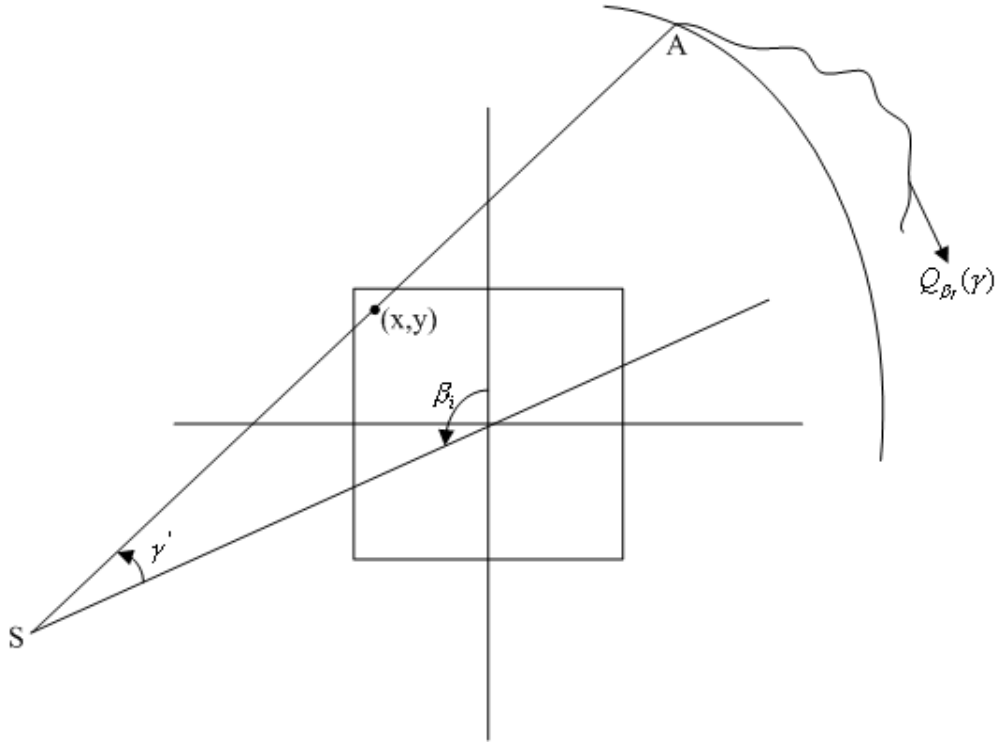


Şekil 2.21 Paralel geri-izdüşüm



Şekil 2.22 Yelpaze geri-izdüşüm

Her ne kadar izdüşümler Şekil 2.24'deki gibi bir D_1D_2 çizgisi üzerinde hesaplansalar da, teorik nedenlerden dolayı, orijinden geçen bir $D_1'D_2'$ hayali detektör çizgisinin varlığını varsaymak daha verimli olmaktadır. *SB* boyunca yer alan ışın integrali $D_1'D_2'$ üzerindeki *A* noktası ile birleştiriliyor. Böylece, Şekil 2.25'de bir yelpaze izdüşümü olan $R_\beta(s)$ hayali detektör çizgisi $D_1'D_2'$ ile birleştirilecektir.



Şekil 2.23 $Q_{\beta_i}(\gamma)$ filtrelenmiş izdüşümünün (x,y)'ye katkısı

Şimdi, şekildeki *SA* ışınını ele alalım. Bu ışın için *s* değeri *OA* uzunluğundadır. Eğer paralel izdüşüm verisi, cisim için oluşturulursa, *SA* ışını şekilde görüldüğü gibi *t* ve θ ile oluşan bir paralel izdüşüm $P_\theta(t)$'ye ait olacaktır. Paralellik durumu için β ve *t* arasındaki ilişki şöyledir:

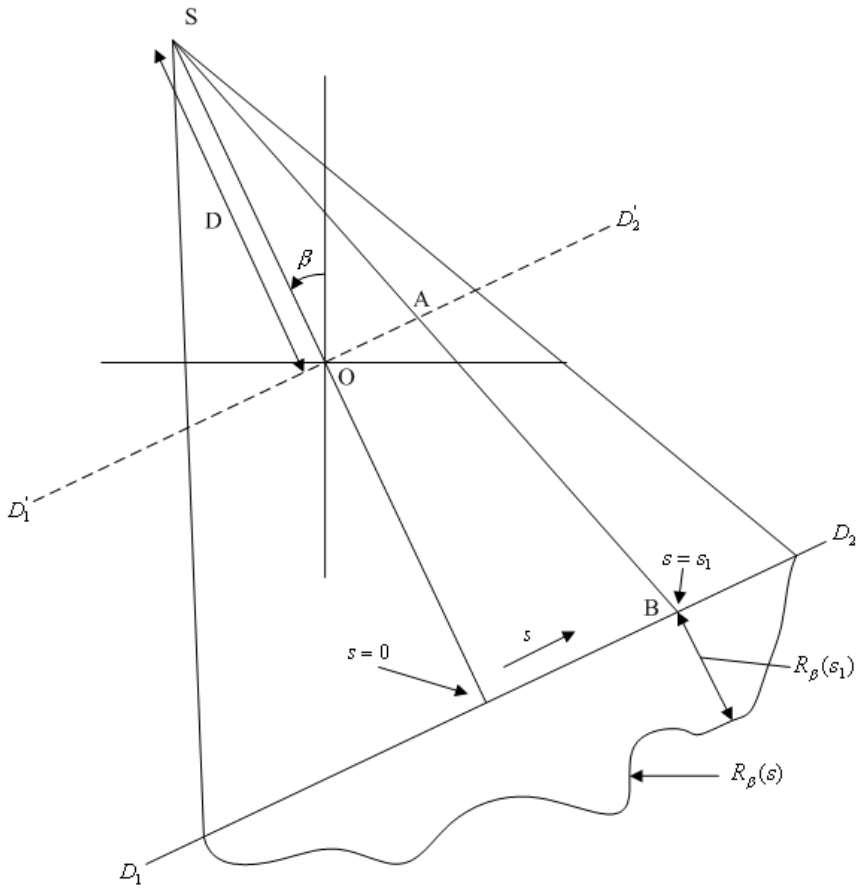
$$t = s\cos\gamma \qquad \theta = \beta + \gamma$$

$$t = \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \qquad \theta = \beta + \tan^{-1}\frac{s}{D} \tag{2.93}$$

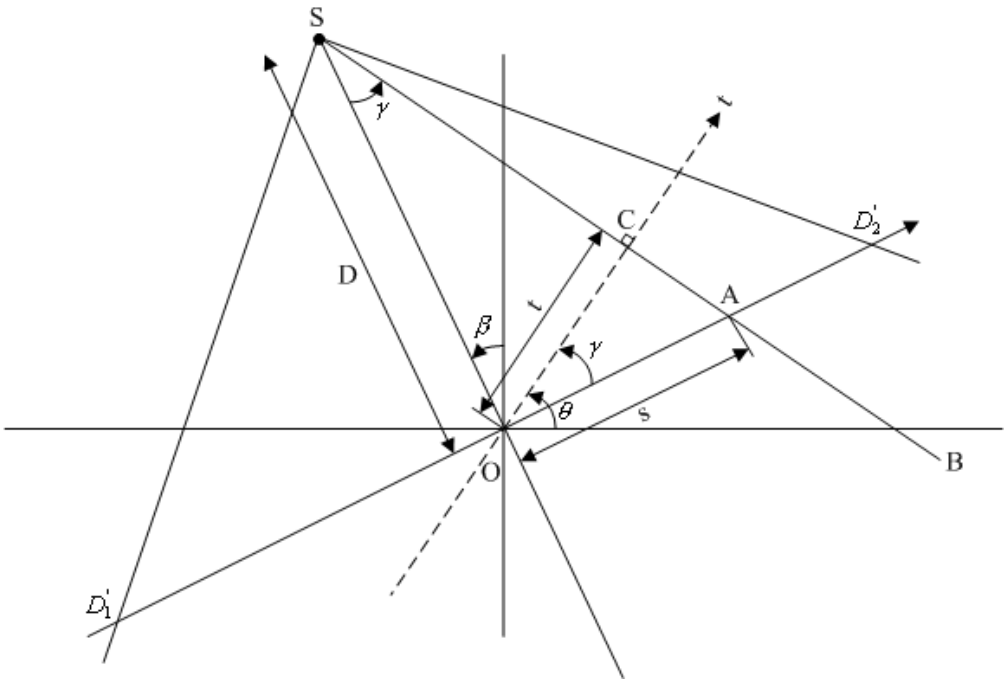
Bu ilişki *AOC* açısının *OSC* açısına eşit olduğu gerçeği ile oluşturulmaktadır. D, kaynak noktası S ile *O* orijini arasındaki uzaklıktır.

Paralel izdüşüm verisine göre yeniden oluşturulan görüntü, (2.94) ile verilmektedir. Burada yeniden hatırlarsak;

$$f(r,\phi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t)h(r\cos(\theta-\phi)-t)\,dt\,d\theta \tag{2.94}$$



Şekil 2.24 Eşit detektör aralıklı yelpaze izdüşümü [31]



Şekil 2.25 Eşit aralıklı detektörler için görüntü oluşumu algoritmasının türevinde kullanılan bütün parametrelerin temsili [31]

Burada $f(r,\phi)$, kutup koordinatlarında yeniden oluşturulan görüntüdür. (2.98)'deki ilişkiyi kullanarak, çift integrasyon şu şekilde gösterilebilir.

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_{-\tan^{-1}(S_m/D)}^{2\pi-\tan^{-1}(S_m/D)}\int_{-S_m}^{S_m} P_{\beta+\gamma}\left(\frac{sD}{\sqrt{D^2+s^2}}\right)$$

$$\cdot\, h\left[r\cos\left(\beta+\tan^{-1}\left(\frac{s}{D}\right)-\phi\right)-\frac{Ds}{\sqrt{D^2+s^2}}\right]\frac{D^3}{\left(D^2+s^2\right)^{3/2}}\,ds\;\,d\beta \qquad (2.95)$$

$$dt\;d\theta=\frac{D^3}{\left(D^2+s^2\right)^{3/2}}\,ds\;d\beta \qquad (2.96)$$

(2.95)'teki s_m, her bir izdüşümdeki en büyük *s* değeridir ve paralel izdüşüm verisi için t_m'ye karşılık gelmektedir. Limitler $-\tan^{-1}(s_m/D)$ ve $2\pi-\tan^{-1}(s_m/D)$, 360^0 açı aralığını kapsamaktadır. (2.95)'teki tüm β fonksiyonları, 2π periyodu ile periyodik olduklarından bu limitler 0 ve 2π ile yer değiştirebilirler. Aynı zamanda,

$$P_{\beta+\gamma}=\frac{sD}{\sqrt{D^2+s^2}} \qquad (2.97)$$

ifadesi, paralel izdüşüm verisi $P_\theta(t)$ içindeki *SA* boyunca yer alan ışın integraline karşılık gelmektedir. Bu ışın integralinin yelpaze izdüşüm verisi içindeki tanımı $R_\beta(s)$'dir. Bu değişiklikleri (2.95)'e yerleştirince şu elde edilmektedir:

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-S_m}^{S_m} R_\beta(s)h\left(r\cos\left(\beta+\tan^{-1}\frac{s}{D}-\phi\right)-\frac{Ds}{\sqrt{D^2+s^2}}\right)$$

$$\cdot\frac{D^3}{\left(D^2+s^2\right)^{3/2}}\,ds\,d\beta \qquad (2.98)$$

Bu formülün bir filtrelenmiş geri-izdüşüm formunda açıklanması için, öncelikle *h* argümanı gözden geçirilmelidir. Bu argüman şu şekilde yazılabilir.

$$r\cos\left(\beta+\tan^{-1}\frac{s}{D}-\phi\right)-\frac{Ds}{\sqrt{D^2+s^2}}$$

$$=r\cos(\beta-\phi)\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2}}-\left(D+r\sin(\beta-\phi)\right)\frac{s}{\sqrt{D^2+s^2}} \qquad (2.99)$$

Şimdi, bir bilgisayar uygulamasında kolaylıkla hesaplanabilen iki yeni değişken incelenecektir. Bunlardan ilki, *U* ile gösterilmektedir ve her bir *(x,y)* pikseli için, *SP*'nin Şekil 2.26'da gösterildiği gibi kaynak orijin uzaklığına olan oranını ortaya koymaktadır. *SP* kaynağın, merkezi ışın üzerindeki piksel mesafesi *SE*'ye izdüşümüdür.

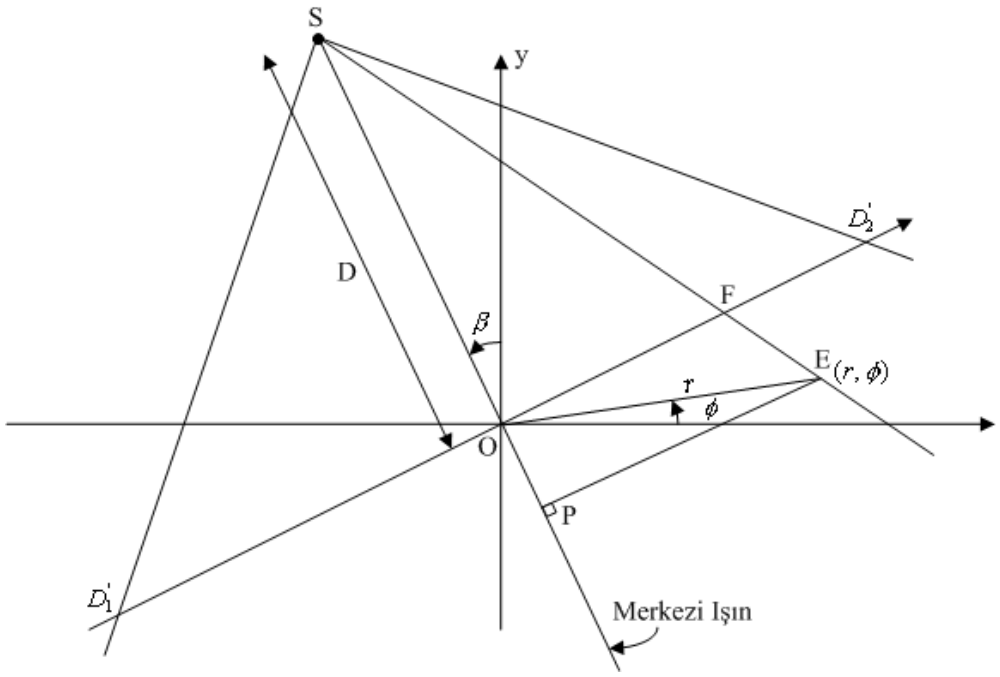
$$U(r,\phi,\beta)=\frac{\overline{SO}+\overline{OP}}{D} \tag{2.100}$$

$$=\frac{D+r\sin(\beta-\phi)}{D} \tag{2.101}$$

Tanınması gereken diğer parametre, (r,ϕ) pikseli üzerinden geçen ışın için *s* değeridir. s', bu *s* değerini ifade etsin. *s*, görüntü detektör çizgisi $D_1'D_2'$ boyunca hesaplandığından, *OF* mesafesi ile verilmektedir.

$$\frac{s'}{\overline{SO}}=\frac{\overline{EP}}{SP} \tag{2.102}$$

$$s'=D\frac{r\cos(\beta-\phi)}{D+r\sin(\beta-\phi)} \tag{2.103}$$



Şekil 2.26 Kutup koordinatlarındaki parametrelerin temsili [31]

Denklem (2.101) ve (2.103), denklem (2.99)'u U ve s' paralelinde açıklamak için kullanılabilir.

$$r\cos\left(\beta+\tan^{-1}\frac{s}{D}-\phi\right)-\frac{Ds}{\sqrt{D^2+s^2}}=\frac{s'UD}{\sqrt{D^2+s^2}}-\frac{sUD}{\sqrt{D^2+s^2}} \tag{2.104}$$

Denklem (2.104), (2.98) içine yerleştirilince şu elde edilmektedir:

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-S_m}^{S_m}R_\beta(s)h\left[(s'-s)\frac{UD}{\sqrt{D^2+s^2}}\right]\frac{D^3}{\left(D^2+s^2\right)^{3/2}}ds\,d\beta \tag{2.105}$$

Şimdi, denklem (2.55)'te verilene yakın bir formda olan bu denklemdeki h'nin konvolüsyonu açıklanabilir. Normal olarak; $h(t)$, frekans domenindeki $|w|$'nin ters Fourier dönüşümüdür.

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{j2\pi wt}dw \tag{2.106}$$

$$h\left[(s'-s)\frac{UD}{\sqrt{D^2+s^2}}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{j2\pi w(s'-s)\left(UD/\sqrt{D^2+s^2}\right)}dw \tag{2.107}$$

$$w'=w\frac{UD}{\sqrt{D^2+s^2}} \tag{2.108}$$

(2.108) dönüşümünü kullanarak (2.107) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$h\left[(s'-s)\frac{UD}{\sqrt{D^2+s^2}}\right]=\frac{D^2+s^2}{U^2D^2}\int_{-\infty}^{\infty}|w|e^{j2\pi(s'-s)w'}dw' \tag{2.109}$$

$$=\frac{D^2+s^2}{U^2D^2}h(s'-s) \tag{2.110}$$

Bu da, (2.105) içine yerleştirilince (2.112) şartıyla şu elde edilmektedir:

$$f(r,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{U^2}\int_{-\infty}^{\infty}R_\beta(s)g(s'-s)\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2}}ds\,d\beta \tag{2.111}$$

$$g(s)=\frac{1}{2}h(s) \tag{2.112}$$

Bilgisayar uygulaması için (2.111), bir filtrelenmiş ağırlıklı geri-izdüşüm algoritması olarak yorumlanabilir. Bunu göstermek için (2.111), aşağıdaki şekilde yeniden yazılacaktır.

$$f(r,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{U^2}Q_\beta(s')d\beta \tag{2.113}$$

$$Q_\beta(s)=R'_\beta(s)*g(s) \tag{2.114}$$

$$R'_\beta(s)=R_\beta(s)\cdot\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2}} \tag{2.115}$$

(2.113)'den (2.115)'ye kadar denklemler, bilgisayar uygulaması için aşağıdaki adımları gerekli kılmaktadır.

1) Her bir $R_\beta(s)$ izdüşümünün, bir *a* örnekleme aralığı ile örneklendiği varsayılsın. Bu durumda tanımlı veri $R_{\beta_i}(na)$ dır. *n*, orijinden geçen merkezi ışına karşılık gelen *n* = 0 değeri ile birlikte tüm *n* değerleri tamsayıdır. β_i, tanımlı yelpaze izdüşümler için açıları ifade etmektedir. Birinci adım, her bir yelpaze izdüşümü $R_{\beta_i}(na)$ için, dönüştürülmüş uygun $R'_{\beta_i}(na)$ değerini bulmaktır.

$$R'_{\beta_i}(na)=R_{\beta_i}(na)\cdot\frac{D}{\sqrt{D^2+n^2a^2}} \tag{2.116}$$

2) Filtrelenmiş uygun izdüşümü oluşturabilmek için, her bir dönüştürülmüş $R'_{\beta_i}(na)$ izdüşümünün, *g(na)* ile konvolüsyonunu sağlanmalıdır.

$$Q_{\beta_i}(na)=R_{\beta_i}(na)*g(na) \tag{2.117}$$

g(na) serisi, (2.112)'nin örneklenmiş halidir.

$$g(na)=\frac{1}{2}h(na) \tag{2.118}$$

Bunun içine (2.55)'de verilen *h(na)* değerleri yerleştirilince, konvolüsyon filtresinin dürtü yanıtı için şu elde edilmektedir:

$$g(na)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\alpha^2}, & n=0\\ 0, & n\,\text{çift sayı}\\ -\dfrac{1}{2n^2\pi^2a^2}, & n\,\text{tek sayı}\end{cases} \tag{2.119}$$

Denklem (2.117)'nin konvolüsyonu bir HFD algoritması kullanılan frekans domeninde uygulandığı zaman izdüşüm verisi, parazitlerinden kaynaklanan bozulmayı ortadan kaldırmak amacıyla yeterli sayıda sıfır ile doldurulmalıdır.
Pratikte, belirli sayıda düzleştirme, (2.117) içine konvolüsyon ile ilave edilirse, üstün görüntü oluşumları elde edilebilmektedir. *k(na)*, düzleştirme filtresinin dürtü yanıtıdır. Frekans domeni uygulamasında bu düzleştirme Hamming penceresi gibi bir çarpan penceresi ile oluşturulabilir.

$$Q_{\beta_i}(na)=R_{\beta_i}(na)*g(na)*k(na) \tag{2.120}$$

3) Uygun yelpaze boyunca her bir filtrelenmiş izdüşümün, ağırlıklı geri-izdüşümünü uygulansın. Tüm geri-izdüşümlerin toplamı, yeniden oluşturulan görüntüdür.

$$f(x,y)=\Delta B\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{U^2(x,y,\beta_i)}Q_{\beta_i}(s') \tag{2.121}$$

U, denklem (2.101) kullanılarak hesaplanmaktadır ve s', yelpazedeki *(x,y)* içinden geçen ışını ifade etmektedir. Kaynak β_i açısında konumlandırılmıştır. Elbette, bu s' değeri tanımlı Q_{β_i}'deki *na* değerlerinden birine karşılık gelmeyebilir. Bu durumda interpolasyon gerekli olmaktadır.

2.4.3 Bir Yeniden Sıralama Algoritması

Şimdi, yelpaze ışını izdüşüm verisini eşdeğerdeki paralel ışın izdüşüm verisine hızla yeniden sıralayan bir algoritma incelenecektir. Yeniden sıralamadan sonra, paralel izdüşüm verisi için filtrelenmiş geri-izdüşüm algoritması, görüntünün yeniden oluşumu için kullanılabilir.

Şekil 2.19'daki yelpaze ışın izdüşümlerinin bağımsız değerleri ile paralel izdüşümler arasındaki ilişkiler (2.70) ile verilmektedir:

$$t = D\sin\gamma \qquad \theta = \beta + \gamma \tag{2.122}$$

Eğer, daha önce olduğu gibi $R_\beta(\gamma)$, β açısından alınan yelpaze ışın izdüşümünü ve $P_\theta(t)$, θ açısında alınan bir paralel izdüşümü belirtiyorsa, (2.122) kullanılarak şu yazılabilir:

$$R_\beta(\gamma) = P_{\beta+\gamma}(D\sin\gamma) \tag{2.123}$$

$\Delta\beta$, ardarda gelen yelpaze ışın izdüşümleri arasındaki açısal artış olsun ve $\Delta\gamma$, yelpaze ışın izdüşümlerinin örneklenmesi için kullanılan açı aralıklarını belirtsin. Aşağıdaki şartın yeterli olduğu varsayılacaktır.

$$\Delta\beta = \Delta\gamma = \alpha \tag{2.124}$$

Açık bir şekilde (2.123)'deki β ve γ; *m* ve *n* indislerinin bazı tamsayı değerleri için $m\alpha$ ve $n\alpha$'ya eşittir. Böylece (2.123) şu şekilde yazılabilir:

$$R_{m\alpha}(n\alpha) = P_{(m+n)\alpha}(D\sin n\alpha) \tag{2.125}$$

Bu denklem hızlı yeniden sıralama algoritmasının temelini teşkil etmektedir. Denklem, m'inci radyal izdüşümdeki n'inci ışının *(m+n)'inci* paralel izdüşümdeki n'inci ışın olduğunu göstermektedir. Elbette, (2.125)'un sağ tarafındaki $\sin n\alpha$ çarpanı nedeniyle, elde edilen paralel izdüşümler hep aynı şekilde örneklenmektedir. Bu durum genellikle interpolasyon ile düzeltilebilir.

3. KIRINIMSIZLIK İÇİN İZDÜŞÜM BİLGİLERİNİN ÖLÇÜMÜ

Tomografik görüntülemede kullanılan matematiksel algoritmalar, izdüşüm bilgilerini temel alır. Bu izdüşümler, örneğin, konvansiyonel x-ışını tomografisinde olduğu gibi bir cismin içinden geçen x-ışınlarının zayıflatılmasını, emisyon tomografisinde olduğu gibi vücuttaki radyoaktif nükleoidlerin bozunmasını, ya da ultrasonik tomografide olduğu gibi kırılma oranı varyasyonlarını temsil edebilir.

Burada konu, cisimlerin içinden düz çizgileri takip ederek geçen enerji ile izdüşüm bilgisinin ölçülmesi olacaktır. Bu duruma, insan vücudu x-ışınlarıyla incelendiğinde daima rastlanır. Bu durum, yumuşak biyolojik dokuların (örneğin kadın memesi) görüntülenmesi için ultrasonik tomografi kullanıldığında meydana gelen sonuçla oldukça benzerdir.

İzdüşüm bilgileri, özellikleri sebebiyle, görüntüleme için kullanılan ışınım ile cismin varlığı arasındaki etkileşimin bir sonucu şeklinde ortaya çıkar. Böyle etkileşimler, bir cismin bir karakteristiğinin ölçüm integralleri olarak biçimlendirilebilir. Bunun en güzel örneği, bir x-ışını demetinin bir cisim boyunca ilerlerken uğradığı zayıflamadır. Bir x-ışını zayıflamasının doğru integrali, cisme giriş yapan monokromatik x-ışını fotonlarının cisimden çıkanlara oranının logaritmasıdır.

Doğru integrallerine eşit olan izdüşüm bilgilerine diğer bir örnek olarak da, sesin bir cisim boyunca ilerlerken yayılması gösterilebilir. Dar bir ses demetinin cisimden geçmesi için geçen toplam zaman bir doğru integralidir, çünkü bu, cismin her küçük parçasından geçmesi için geçen zamanların toplamıdır.

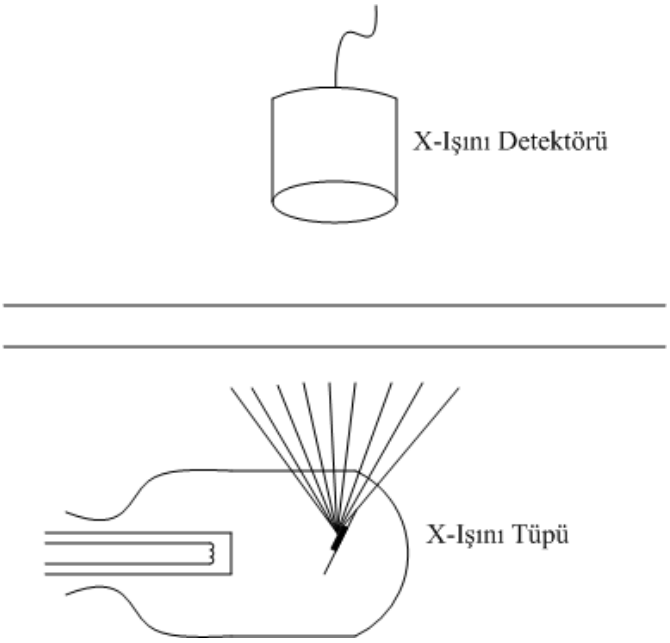
X-ışını ve ultrason konularının ikisinde de, ölçüm bilgisi, bir doğru integraline sadece yaklaşık olarak karşılık gelmektedir. Bir x-ışını demetinin zayıflaması, her bir fotonun enerjisine bağlı olarak gerçekleşmektedir. Görüntüleme için kullanılan x-ışınları, normal olarak bir miktar enerjiye sahip olduğundan, toplam zayıflama, doğru üzerindeki her bir noktada gözlemlenen zayıflamanın toplamı tanımından biraz daha karmaşık olmaktadır. Ultrason konusunda meydana gelen hatalar, ses dalgalarının, neredeyse hiçbir zaman bir cisim içinden geçemeyeceği gerçeğinden

kaynaklanmaktadır ve bu nedenle, ölçülen süre, cisim üzerindeki bazı tanımsız kıvrık yollara karşılık gelmektedir. Neyse ki, pratikteki pek çok önemli uygulama için, bu kıvrık yolların düz çizgiler ile tahmini kabul edilebilir olmaktadır.

Burada, sadece x-ışını tomografisi incelenecektir. Bu ve diğer bilgisayarlı tomografik görüntüleme uygulamalarının kapsamlı bir incelemesi, [40]'da yer almaktadır. Aynı zamanda, bu tarz tomografinin fiziksel sınırlamaları [24]'de de açıklanmaktadır.

3.1 X-Işını Tomografisi

X-ışını tomografisinde izdüşümler, zayıflama katsayısının doğru integrallerini içermektedirler. Bu sebeple, bu parametrenin özelliklerini tanımak büyük önem taşımaktadır. Paralel bir x-ışını foton demetine sahip olunduğu kabul edilirse, Şekil 3.1'de görüldüğü gibi bir homojen materyal dilimi içinden yayılan fotonlar birbirlerine paralel olan yollar boyunca hareket ettiklerinden, ışın ıraksaması nedeniyle ışın yoğunluğunda bir kayıp meydana gelmemektedir. Buna karşın ışın, madde atomları tarafından emilen ya da asıl hareket yönlerinden saçılan fotonlar nedeniyle zayıflamaya uğramaktadır.



Şekil 3.1 Bir x-ışını tüpünün, bir x-ışını demeti ile bir homojen materyali aydınlatması

Genel olarak diagnostik görüntülemede (20 keV'den 150 keV'ye) karşılaşılan foton enerjileri dizisi için zayıflama, fotoelektrik ve Compton etkileri sonucu oluşur.

Fotoelektrik soğurma, tüm enerjisini bir atomun bağ enerjisi yüksek bir elektronuna ileten bir x-ışını fotonundan oluşmaktadır.. Elektron, bu elde edilen enerjinin bir kısmını kabuk içindeki bağlanma enerjisini yenmek amacıyla kullanmaktadır. Geri kalan enerjiyse kinetik enerji olarak elektrona geçmektedir. Diğer taraftan Compton saçılımı, x-ışını fotonunun atomun dış kabuklarında bulunan bir elektronla gevşek olarak çarpışması sonucu oluşur. Bu çarpışmanın bir sonucu olarak, x-ışın fotonu, asıl yönünden sapmaktadır. Kaybedilen enerjiyse elektrona geçmektedir.

Hem fotoelektrik, hem de Compton etkisi enerjiye bağlıdır. Bunun anlamı, verilen bir fotonun soğurma ya da saçılma nedeniyle asıl ışın tarafından kaybedilmesi ihtimalinin, bu foton enerjisinin bir fonksiyonu olmasıdır. Fotoelektrik soğurma, enerjiye, Compton saçılma etkisinden daha fazla bağlıdır.

3.1.1 Monokromatik X-ışını İzdüşümleri

Şekil 3.1'de görülen dilim kalınlığında bir artış olduğu kabul edelim. Bir serbest ölçüm zaman aralığında, N adet monokromatik fotonun bu katmanın alt sınırını geçeceği varsayıldığında, üst katmanda (ΔN'nin sayısal değeri negatif olacaktır) ortaya çıkan $N + \Delta N$ adet foton, soğurma ya da saçılmadan etkilenmemektedir ve bu sebeple asıl yönlerinde yayılmaktadırlar. Eğer tüm fotonlar benzer enerjiye sahip ise, fizik kurallarına göre ΔN, aşağıdaki bağıntıyı sağlamalıdır:

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\tau - \sigma \tag{3.1}$$

τ ve σ, fotoelektrik ve Compton etkileri nedeniyle oluşan foton kayıp oranlarını (birim uzaklık başına) temsil etmektedir. Varmak istenen sonuç doğrultusunda her iki gösterge birleştirilerek, yukarıdaki denklem şu şekle dönüşmektedir:

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\mu \tag{3.2}$$

Limitte, Δx sıfıra giderken, aşağıdaki diferansiyel denklemi elde edilmektedir:

$$\frac{1}{N} dN = -\mu \, dx \tag{3.3}$$

Bu, dilim kalınlığının baştan başa integrali alınarak çözülebilmektedir.

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx \tag{3.4}$$

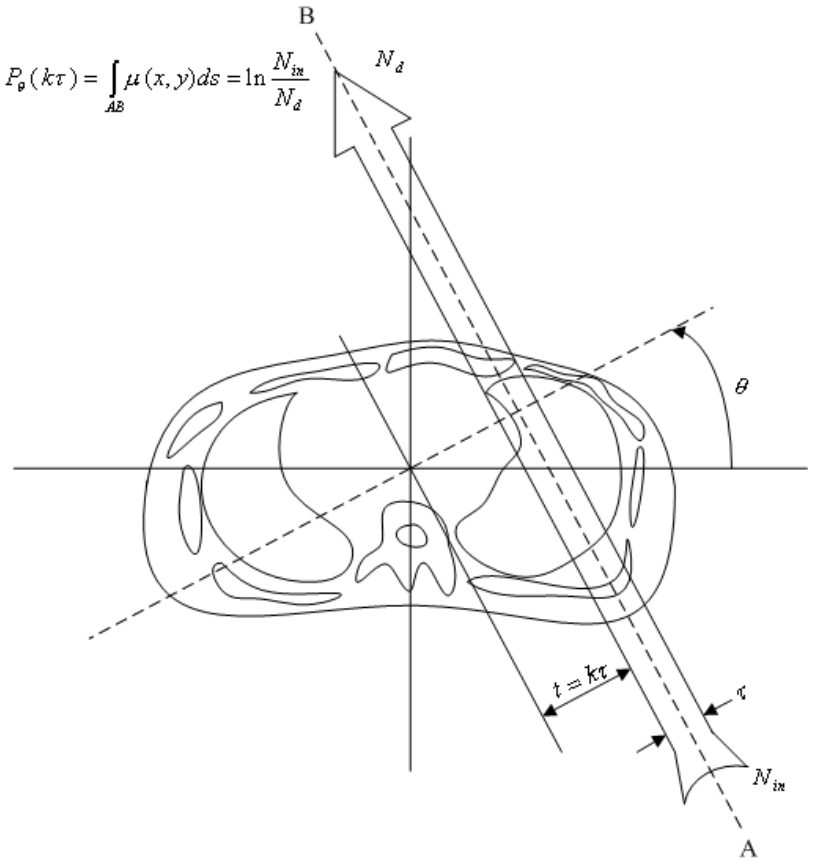
N_0, cisme giren foton sayısını ifade eder. Bu durumda dilim içerisindeki fotonların sayısı, fonksiyon olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\ln N - \ln N_0 = -\mu x \tag{3.5}$$

ya da

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x} \tag{3.6}$$

μ sabitine, maddenin doğrusal zayıflama katsayısı denir. Burada μ'nün, integrasyonun değer aralığı içerisinde sabit olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 3.2 Bir paralel x-ışını demetinin, insan vücudu kesiti içerisinde yayılması [28]

Şekil 3.2'yle gösterilen deneyde, tek bir x-ışını demeti ile aydınlatılan insan vücudunun kesiti görülmektedir. Şekildeki kesit düzlemine dikkat edildiğinde, μ sabitinin, iki uzay koordinatı *x* ve *y*'nin bir fonksiyonu olduğu ve buradan da

$\mu(x,y)$'nin zayıflama katsayısını gösterdiği düşünülebilir. N_{in}'in, A tarafından ışın yoluyla cisme (deney ölçümündeki zaman aralığı içinde) giren toplam foton sayısı, N_d'nin ise, B tarafından ışın yoluyla (aynı zaman aralığında) cisimden çıkan toplam foton sayısı olduğu kabul edildiğinde ve ışın genişliği τ, yeterince küçük olduğunda, N_d ve N_{in} arasında aşağıdaki bağıntı kurulabilir [41], [42] :

$$N_d = N_{in} \exp\left[-\int_{ray} \mu(x,y)ds\right] \tag{3.7}$$

ya da

$$\int_{ray} \mu(x,y)ds = \ln\frac{N_{in}}{N_d} \tag{3.8}$$

ds, bir uzunluk öğesidir ve integral *AB* doğrusu boyunca yürütülmektedir. Sol taraf izdüşüm için bir ışın integrali oluşturmaktadır. Böylece, farklı açılarda farklı ışınlar için alınan $\ln(N_{in}/N_d)$ gibi ölçüler, $\mu(x,y)$ fonksiyonu için izdüşüm verisi oluşturabilirler. Şu hususa önemle dikkat etmek gerekir ki; bu durum yalnızca, x-ışınının monoenergetik fotonlardan oluştuğu varsayımı için geçerlidir. Çünkü doğrusal zayıflama katsayısı, genel olarak foton enerjisinin bir fonksiyonudur. Saçılmadan etkilenmeyen dedektörler, dar ışın profili ve küçük aralık bu sonuç için gerekli diğer varsayımlardır.

3.1.2 Demet Kuvvetlendirme

Genellikle medikal görüntülemede x-ışını kaynakları monoenerjitik fotonlar üretemezler. Kısacası x-ışını demeti sonlu bir spektruma sahiptir. Bu polikromatik x-ışını demeti bir cisimden geçtiğinde, spektrumdaki farklı enerjili ışınlar farklı miktarlarda zayıflamaya tabi olurlar. Sonuç olarak spektrumun çıkış enerjisi, giriş spektrumundan farklılık gösterir. Diğer bir deyişle düşük enerjili x-ışınları, yüksek enerjili x-ışınlarından daha fazla zayıflar. Eğer yol boyu genişse veya cisim yüksek atom numaralı bileşenlere sahipse, bu durum daha belirgin bir şekilde oluşur. Polikromatik x-ışını yol boyuna bağlı düzgün olmayan zayıflamasının oluşturduğu bu sonuca "demet kuvvetlendirme etkisi" denir. Bütün izdüşümler için x-ışınlarının toplam yol boyunun aynı olmasını sağlayacak şekilde kompanzasyonun yapıldığı su çantası adı verilen demet kuvvetlendirmeyi kullanabilmek için kompanze edilebilir

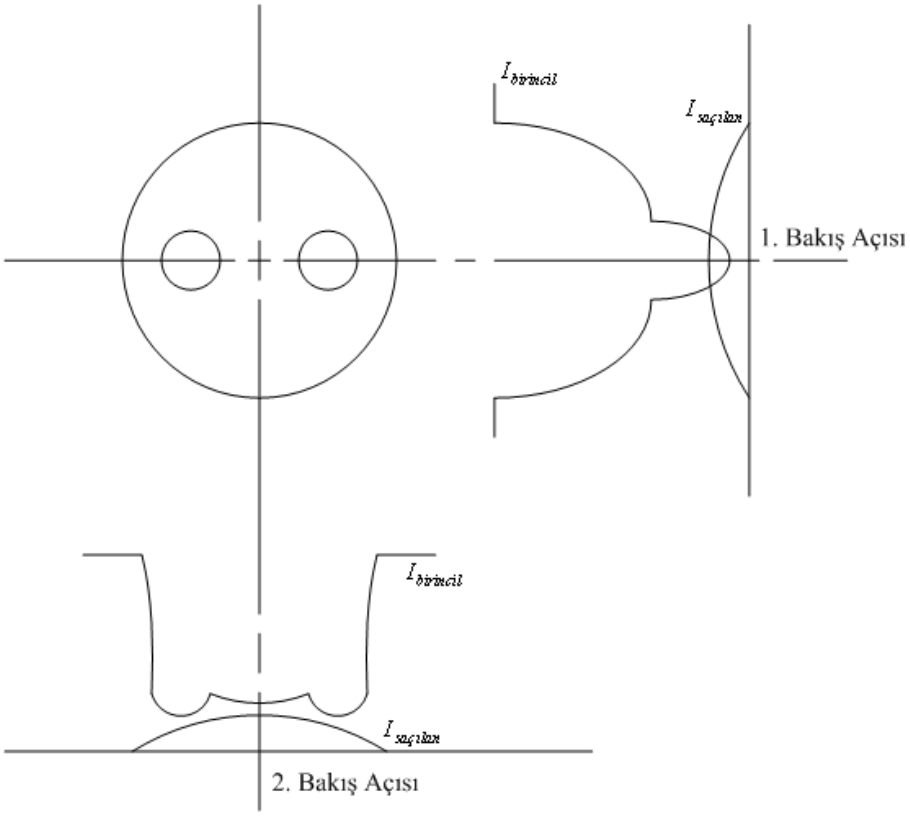
ölçümlerden yaralanılır. Diğer bir metod ise x-ışını demetini daha monoenerjitik hale getirecek şekilde alimunyum ya da bakır filtreden geçirmektir [43] . Bu işlem kullanılabilir foton sayısını azaltsa da x-ışınını kabul edilebilir ölçüde monoenerjitik hale getirmektedir. Ayrıca fotoelektrik soğurma da demet kuvvetlendirmeye sebep olmaktadır. Kısacası bu çalışmada yapılan uygulamalarda, (3.8) denklemini kullanabilmek amacıyla x-ışınlarının demet kuvvetlendirme ve filtreleme işlemlerinin tolere edilebilir bir sonucu olarak monoenerjitik olduğu kabul edilmiştir.

3.1.3 Saçılım

X-ışını saçılımı, izdüşüm ölçümünde birtakım hatalara yol açmaktadır. Cisim içinde yol alan bir x-ışın demetinin, fotoelektrik soğurma ya da saçılım yoluyla zayıflayabildiğini hatırlayalım. Fotoelektrik soğurma, enerjiye bağlıdır ve demet kuvvetlendirmeye neden olmaktadır. Diğer taraftan, saçılım yoluyla zayıflama, ışın demetindeki bir kısım enerjinin farklı bir yöne çevrilmesi nedeniyle meydana gelmektedir. Saçılım açısı rastlantısaldır fakat çoğu x-ışını genellikle ileri yönde saçılmaktadır.

Saçılmayı, izdüşüm hatalarına neden olmaktan koruyacak tek yol, mükemmel şekilde toplayıcı dedektörler kullanmaktır. Böylelikle kaynak ve dedektör arasındaki düz çizgide yol almayan tüm x-ışınları ihmal edilmektedir. Mükemmel bir şekilde toplayıcı dedektörü dördüncü-kuşak bir sabit dedektörlü tarayıcı içinde oluşturmak özellikle zordur. Bu tip makinelerde, dedektörler, kaynağın cisim etrafında döndürülmesi nedeniyle oldukça geniş bir açıdan x-ışınlarını ölçebilmek zorundadırlar.

X-ışını saçılımının, görüntü oluşumunda gürültülere yol açmasının nedeni her izdüşümde farklı bir karakter ortaya koymasıdır. Saçılan x-ışınlarının yoğunluğu, cismin farklı rotasyonları için yaklaşık olarak sabit olduğu halde, dedektördeki birinci ışın demetinin yoğunluğu sabit değildir. X-ışınları, toplayıcı içinden geçince, dedektör bu iki yoğunluğu basitçe toplamaktadır. Birincil yoğunluk oldukça küçük olduğunda saçılım etkisi büyük olacaktır. Birinci ışın demeti büyük olduğunda, saçılan x-ışınları çok fazla hataya yol açmayacaktır. Bu durum Şekil 3.3'de görülebilir [44],[45] .



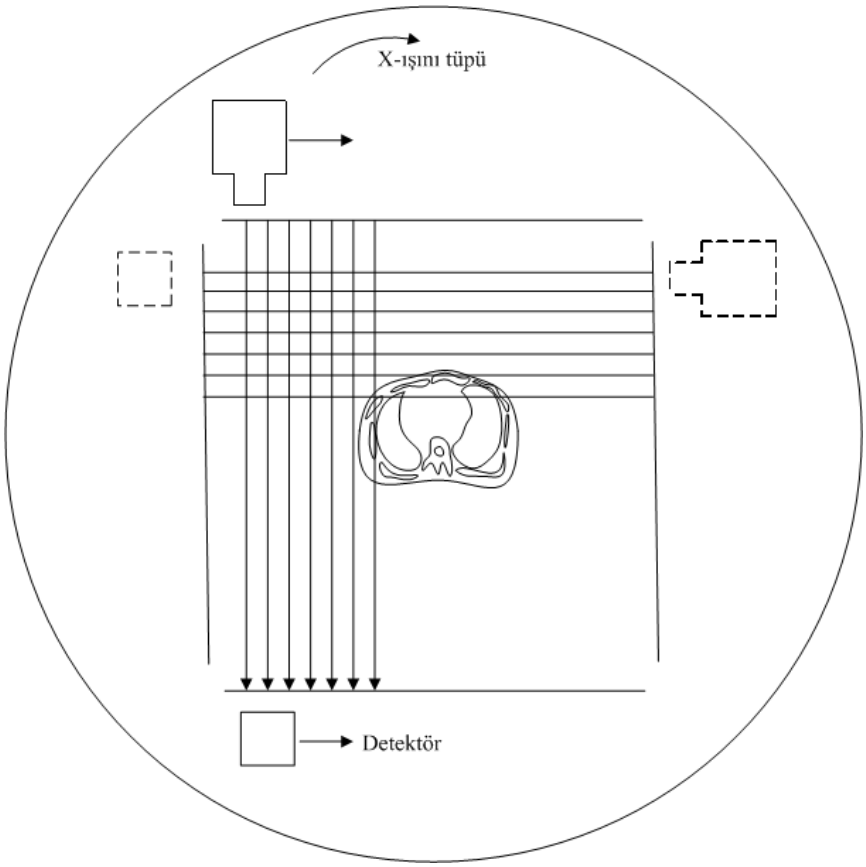
Şekil 3.3 İki farklı izdüşüm üzerindeki saçılma etkisi

Yukarıda değindiğimiz sonuçlar için saçılan enerji, bazı izdüşümlerde diğerlerine göre daha büyük hatalara neden olmaktadır. Bu nedenle, hatalı enerji tüm görüntü üzerine yayılmak yerine, görüntüde çizgi izlerine yol açan yönsel birtakım hatalar oluşmaktadır.

Dedektörleri görüntü düzleminin dışında kurarak, saçılma yoğunluğunu hesaplamak mümkün olmakla birlikte, tüm izdüşüm üzerindeki sabit saçılma yoğunluğunun kestirilmesi ile iyi sonuçlar elde edilebilmektedir [44] .

3.1.4 Farklı Tarama Yöntemleri

X-ışınlı bilgisayarlı tomografinin birinci kuşağını doğal olarak Hounsfield tarafından geliştirilen ilk tarayıcılar önemli hale getirmiştir. Bu tarayıcılar senkron bir şekilde dönen ve çeviren tek bir kalem demet ve tek bir detektör kullanıyordu. Taranacak cismin karşısında çevrimsel bir hareket vardı ve her çevrimsel hareketin sonunda takip edecek tarama için 1°'lik bir artış oluyordu. Fakat genellikle kesitin tomografik görüntüsünü elde etmek için gerekli izdüşüm veri setini toplamak dakikalar sürüyordu. Birinci kuşak bir tarayıcı Şekil 3.4'te görülmektedir [43].

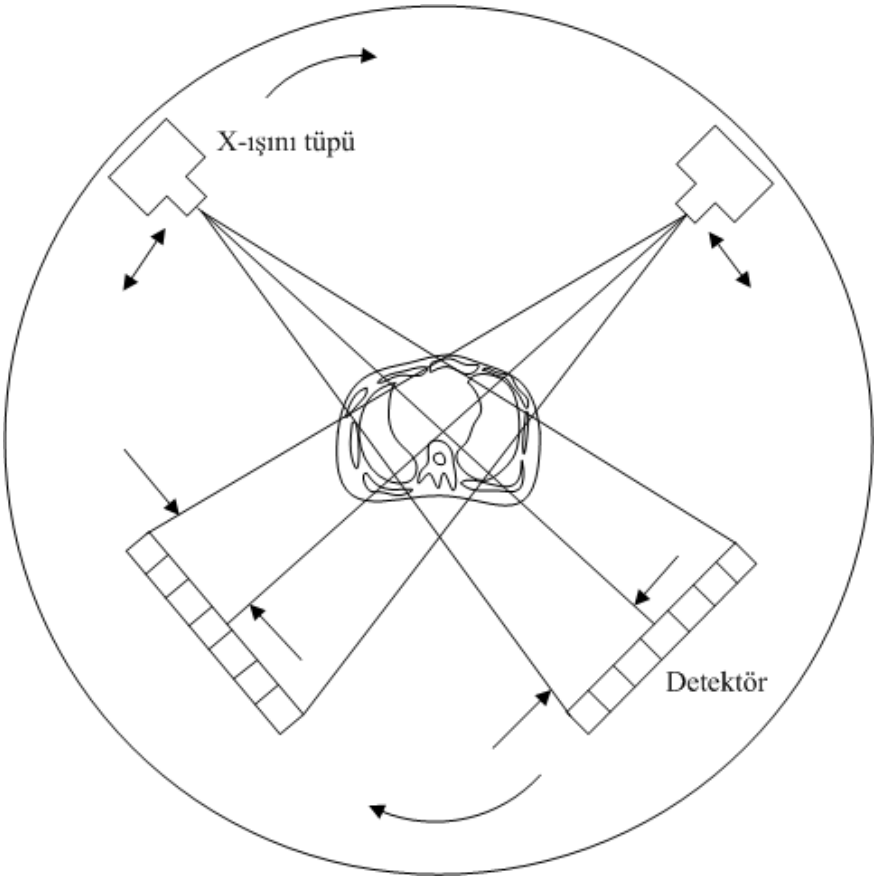


Şekil 3.4 Birinci-kuşak paralel izdüşüm alan bir tarayıcı [43]

İkinci kuşak bilgisayarlı tomografinin tasarımı küçük açılı yelpaze demet x-ışınları ve çoklu detektörlerin birlikte kullanılmasıyla oluşturulmuştur. Hasta içinden geçen birbirinden ayrılmış yelpaze demetleri veri toplama kanallarının sayısını arttırdığından, gereken açısal rotasyon sayısı düşürülebilmiştir.. Bu yüzden ikinci kuşak tarayıcılarda tarama zamanı birinci kuşağa göre azalmıştır. Öyle ki nominal tarama zamanı yaklaşık 20 saniye idi. İkinci kuşak tarayıcılar cismi tam olarak çevreleyebilmek için çevrimsel hareketi rotasyonel hareket gibi önemli kılmaktadır. İkinci kuşak bir tarayıcı Şekil 3.5'te görülmektedir [43] .

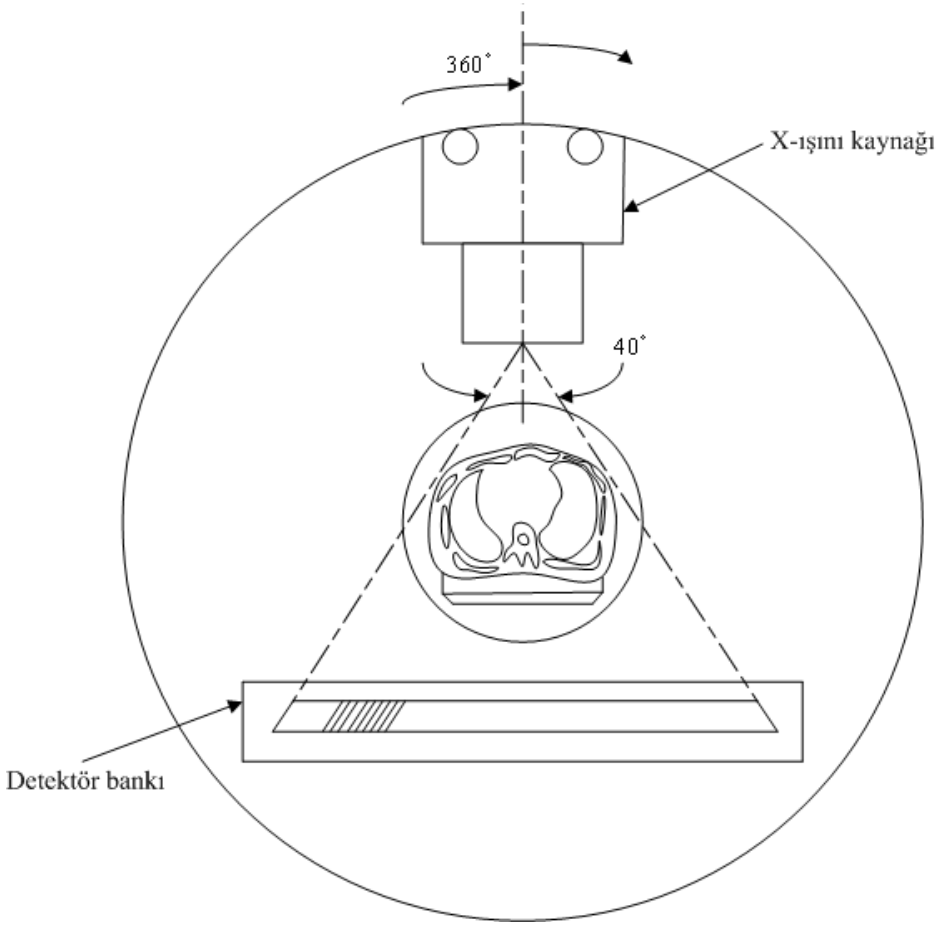
Öte yandan günümüzde çok daha hızlı veri toplamayı sağlayan iki ana tarama konfigürasyonu ağırlıklı olarak tercih edilmektedir. Bunlardan birincisi yelpaze ışını rotasyonel tip (üçüncü kuşak) ikincisi ise sabit dedektör halkalı dönen kaynaklı tip (dördüncü kuşak) olarak adlandırılır. Bu metotların ikisi de yelpaze ışını görüntü oluşumu konseptlerini kullanmaktadır. Bir paralel ışın makinesi için görüntü oluşum algoritmaları daha basit olsa da, cisim boyunca x-ışın kaynağı ile tarama yapmak ve ardından sonraki tarama için tüm kaynak-dedektör ayarlamasını sağlamak oldukça

uzun zaman almaktadır. Cismin taranması için gerekli süre, bir kaynaklar dizisinin kullanımı ile azaltılabilir fakat bu da büyük bir maliyetlere yol açmaktadır.



Şekil 3.5 İkinci-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı [43]

Bir (üçüncü kuşak) yelpaze ışını rotasyon makinesinde, bir x-ışınları yelpaze demeti Şekil 3.6'da görüldüğü gibi bir çoklu dedektör dizisini aydınlatmada kullanılmaktadır. Kaynak ve dedektör dizisinin her ikisi de, hasta çevresinde sürekli olarak 360^0 döndürülen bir sistem üzerinde kurulmuştur. Bu tarz tarayıcılar için veri toplama süresi 1 ile 20 saniye arasında değişmektedir ve bu süre içinde 1000'den fazla izdüşüm alınabilir. Eğer izdüşümler hareket halinde alınırsa veride bir rotasyonel lekelenme meydana gelmektedir. Buna karşın, bu lekelenme çok küçük ölçekte kalmakta ve son görüntüde etkileri göze çarpmamaktadır. Bu tarz tarayıcıların çoğu 30^0 ile 60^0 arasında değişen yelpaze açılarında yelpaze ışınları kullanmaktadırlar. Dedektör bankı genellikle 500 ile 700 arasında ya da daha fazla dedektöre sahiptir ve görüntüleme 256 x 256, 320 x 320 ya da 512 x 512'lik matrislerde oluşturulmaktadır.



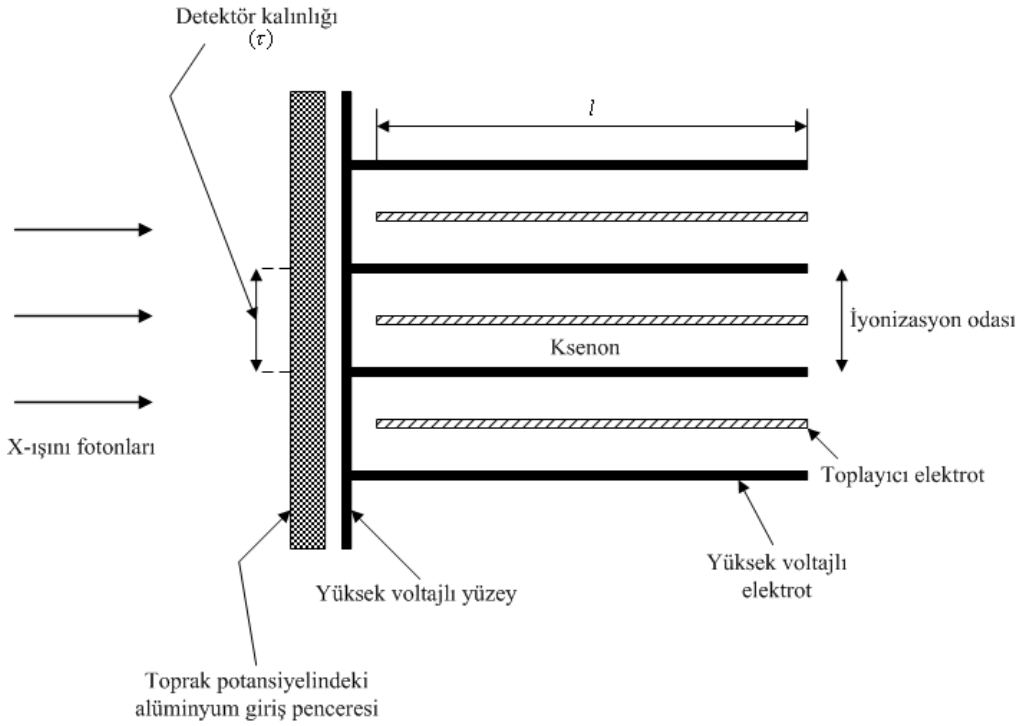
Şekil 3.6 Üçüncü-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı [28]

Yaygın olarak iki tip x-ışın dedektörü bulunmaktadır. Bunlar katı tip ve ksenon gaz iyonizasyon dedektörleridir. Üçüncü kuşak tarayıcılarda sık sık kullanılan üç ksenon iyonizasyon dedektörü Şekil 3.7'de görülmektedir.

Her bir dedektör, her iki yanda yüksek voltajlı bir şerit bulunan merkezi bir toplama elektrodundan oluşmaktadır. Bir dedektör alanına giren x-ışını fotonları, yüksek olasılıklı (dedektör uzunluğu l ve gaz basıncına bağlı olarak) iyonlaşmalara yol açmaktadır. Bir ticari tarayıcıda toplayıcı plakalar bakır, yüksek voltajlı şeritler ise tantaldan yapılmaktadır. Aynı tarayıcıda, uzunluk l, (Şekil 3.7'de görüldüğü gibi) 8 cm'dir. Elektrodlar arasında uygulanan voltaj 170 V ve gaz basıncı 10 atm.'dir. Bu dedektörün toplam verimi %60 civarındadır. Ksenon gaz dedektörlerinin öncelikli avantajları, birbirlerine yakın şekilde paketlenebilmeleri ve ucuz olmalarıdır. Şekil 3.7'deki giriş genişliği τ ,1 mm kadar küçük olabilir.

Yafee el al. [46] ksenon gaz detektörleri için enerji soğurma etkinliğini, yanıt doğrusallığını, saçılma duyarlılığını ve odak radyasyonu konularını ayrıntıları ile

incelemiştir. Williams [47] bunların ticari BT sistemlerindeki kullanımını araştırmıştır.

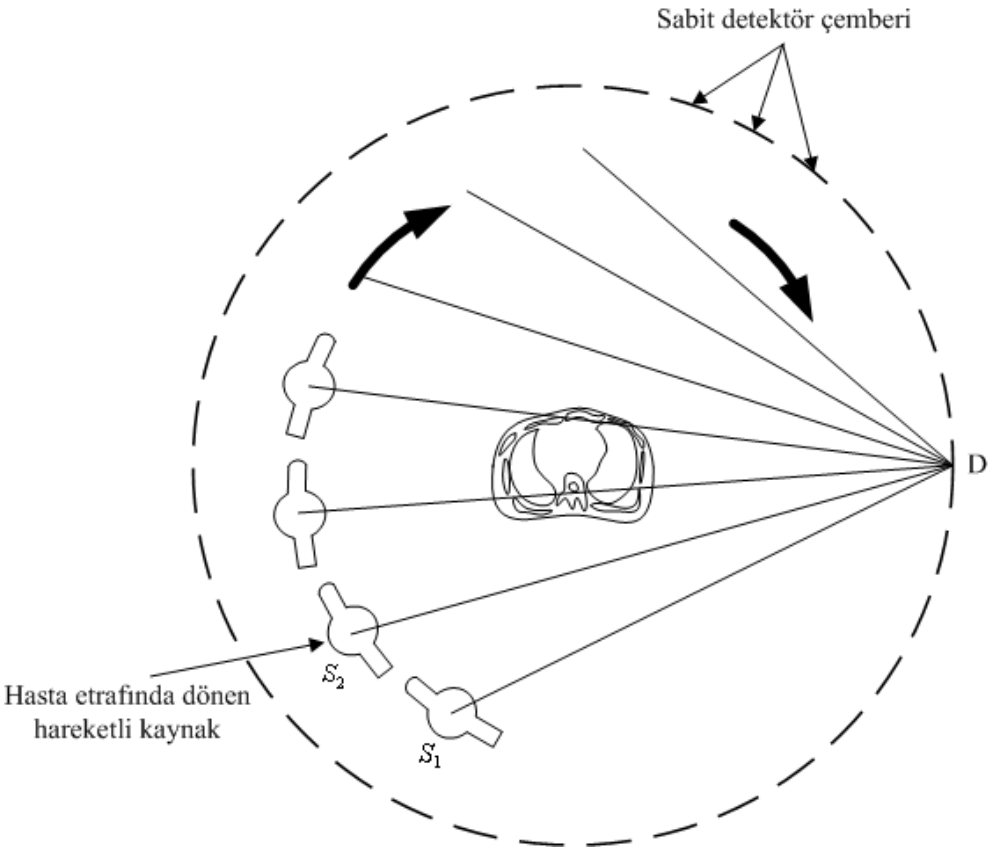


Şekil 3.7 Bir ksenon gaz dedektörü [28]

Bir sabit-dedektör ve döner-kaynak tarayıcısında (dördüncü kuşak) çok sayıda dedektör, Şekil 3.8'de görüldüğü gibi sabit bir çember üzerine yerleştirilmektedir. Bu halkanın içinde hasta çevresinde sürekli olarak dönen bir x-ışını tüpü bulunmaktadır. Bu rotasyon süresince, x-ışını tüpüne karşı gelen dedektörlerin çıkışı, her birkaç milisaniyede bir örneklenmektedir. (Dördüncü-kuşak bir makineden toplanan yelpaze ışın verileri, üçüncü-kuşak yelpaze ışın verilerine çok benzemektedir.) Dedektörler, bir çember çevresinde eşit açılı aralıklarda konumlandırıldığından, bir dedektörü örnekleyerek toplanan veriler yaklaşık olarak eşit açılı olmaktadır. Fakat kaynak ve detektörlerin hareket ettiği çemberlerin yarıçapları farklı olduğundan birtakım hatalar da oluşmaktadır. Elde edilen verileri daha uygun bir eş açılı yelpazeye çeviren interpolasyon, 2. bölümde anlatılan algoritmalar doğrultusunda kullanılabilir.

Dedektörlerin birbirlerine yakın yerleştirilmelerinin gerekli olmadığına dikkat edilmelidir. Dedektörlerin bir çember çevresinde dizildiği gerçeği ile birlikte bu inceleme ışıldama dedektörlerinin iyonizasyon odalarının yerine kullanılmasına izin vermektedir. Halen kullanılmakta olan çoğu ışıldama dedektörü, sodyum iodid (NaI),

bizmut germanat (BGO) ya da fotodiodlar ile birleştirilen sezyum iodid (CsI) kristallerinden yapılmaktadır. (Sodyum iyodid ve bizmut germanat karşılaştırması için [48]'e bakılabilir.) Işıldama için kullanılan kristal, iki amaca hizmet etmektedir. Birincisi, kristal büyüklüğü ve foton enerjisine dayanan bir etkinlik derecesi ile kristale çarpan x-ışını fotonlarının çoğunu yakalamaktadır. Bundan sonra x-ışını fotonları, ikincil elektronların üretilmesine neden olan, foto-elektrik soğurulmaya (Compton saçılımıyla birlikte) maruz kalmaktadırlar. Kristalin ikinci fonksiyonuysa, ikincil elektronları kinetik enerjisini ışık flaşlarına dönüştüren fosforun varlığıdır. Işıldama kristalinin geometrik yapısı öyle bir seçilir ki kristali terk eden ışık flaşlarının çok büyük bir bölümü fotoçoğullayıcı tüp tarafından detekte edilebilir.



Şekil 3.8 Dördüncü-kuşak yelpaze demet izdüşümü alan bir tarayıcı [28]

Dördüncü kuşak bir tarayıcının ticari modeli, 1088 tane sezyum iodid dedektör kullanmaktadır ve her bir dedektör yelpazesinde 1356 adet örnek alınmaktadır. Bu özellikteki sistem Şekil 3.6'da resmedilen sistemden şu noktada farklılaşmaktadır. X-ışını kaynağı, hasta çevresinde dedektör çemberinin dışında döndürülmektedir.

Üçüncü ve dördüncü kuşak konfigürasyonlar arasındaki en önemli farklardan biri de şudur. Üçüncü kuşak bir tarayıcıdaki bilgi, her ne kadar izdüşüm sayısının

kendisinde bir sınır olmasa da, temelde her bir izdüşümdeki ışın sayısı ile sınırlıdır. Bu sebeple, her bir izdüşümde dedektör dizisindeki dedektör sayısı kadar ışın bulunabilmektedir. Diğer taraftan, dördüncü-kuşak bir tarayıcıda toplanan veri, her bir izdüşümdeki ışın sayısında sınırlama olmadan, oluşturulabilecek izdüşüm sayısı ile sınırlandırılmıştır. (İyi kalitede görüntü oluşumları için izdüşümlerin sayısının, her bir izdüşümdeki ışın sayısı ile karşılaştırılabilir olması gerekmektedir.)

Bir üçüncü-kuşak tarayıcıda, eğer bir dedektör arızalı ise, her bir izdüşümdeki benzer ışın yanlış olarak kaydedilmektedir. Tüm izdüşümlerdeki birbiriyle bağlantılı hatalar çember gürültülerine neden olmaktadır [49] . Öte yandan, bir dedektör dördüncü-kuşak tarayıcıda başarısız olursa, bu bir tam izdüşümün kısmi kaybı anlamını taşır. Çok sayıda izdüşüm alındığında, bir izdüşümün kaybı genellikle görüntü oluşum kalitesini düşürücü bir faktör olarak görülmemektedir [50] . Tam tersi durum ise, x-ışını kaynağındaki değişkenlikler için geçerlidir. Bu durumda üçüncü-kuşak bir tarayıcıda, tüm izdüşüm ölçülmekte ve görüntü oluşumu büyük ölçüde etkilenmemektedir. Dördüncü kuşak tarayıcılarda ise, kaynak değişkenlikleri çember gürültülerine yol açmaktadır.

Üçüncü kuşak bir tarayıcıdaki bir gaz iyonizasyon dedektörünün yapısı saçılan radyasyon alımına karşı belirli oranda koruma sağlamaktadır. Diğer taraftan, dördüncü kuşak bir tarayıcıdaki dedektörler iyonizasyon detektörleri gibi yerleştirilemez. Çünkü x ışını tüpü hastanın etrafında dönerken bu dedektörler, çok sayıda yönden foton alabilmek zorundadır. Bu da dedektörleri saçılan radyasyona karşı daha az dayanıklı duruma getirmektedir.

Kalbin görüntüsünü almak için geleneksel tomografi tarayıcıları kullanıldığında, bilgi toplama süresi boyunca kalbin hareketleri sebebiyle, bulanık görüntüler oluşur. Günümüzde üretimde olan tarayıcılar, bir görüntü için gereken bilgiyi toplayabilmek için en az bir saniyeye ihtiyaç duyarlar. Ancak, tatmin edici görüntüler oluşturabilmeleri için, standart yelpaze demeti makinelerine bir takım modifikasyonlar yapılmıştır. [51], [52].

En basit yaklaşım, izdüşüm bilgisini kaynağın birkaç tam dönmesi için hesaplamak ve sonra kalp döngüsünün sadece aynı anlarında ortaya çıkan izdüşümleri kullanmaktır. Buna geçitli BT (bilgisayarlı tomografi) denir ve genelde her izdüşüm ölçülürken hastanın EKG'sinin (elektrokardiyogram) kaydedilmesiyle yapılır. Doğru

zamanda ya da bu zamana yakın bir anda oluşan tüm izdüşümler seçilir. Son olarak hiçbir bilginin bulunmadığı durumda bu izdüşümlerin kestirilmesi için interpolasyon kullanılarak, EKG döngüsünün istenilen herhangi bir bölümü için tam bir izdüşüm bilgi kümesi, tahmini olarak bulunur. Bu prosedür üzerine daha fazla ayrıntı [53]'de bulunabilir.

İnterpolasyona rağmen, eksik izdüşümler, geçitli BT yaklaşımının bir kusurudur. Öte yandan örneğin anjiyografik görüntülemede, hareket periyodik değildir ve geçitli BT teknikleri işe yaramaz. Bu sorunların üstesinden gelmek için iki donanım çözümü sunulmuştur. İkisinde de hedef, izdüşümleri yeterince kısa bir zaman aralığında oluşturmak ve böylece bu zaman aralığında nesnenin sabit durumda olduğunu kabul etmektir. [54]'te tanımlandığı üzere, Dinamik Uzamsal Görüntüleyici (DSR) tam bir izdüşüm kümesinin (112 görüntü) hesaplanması için 14 x-ışını kaynağı ve 14 geniş dairesel florasan ekran kullanılmaktadır. DSR vücuttaki hareketli yapıların 3 boyutlu görüntülerini elde etmede büyük başarı sağlamıştır.

Boyd ve Lipton [55], [56] tarafından tanımlanan ve Imatron tarafından gerçekleştirilen ikinci bir yaklaşım ise, dairesel bir anot etrafında taranan bir elektron demeti kullanmaktadır. Dairesel anot hastayı sarar ve hedef çemberine denk gelen demet, hastanın diğer kısmında sabit bir dedektör dizisi kullanılarak ölçülen bir x-ışını demeti oluşturur. X-ışını kaynağının yeri tamamen elektron demetinin sapmasına göre belirlendiğinden ve bu sapma da elektronik olarak kontrol edildiğinden, tüm tarama 0.05 saniye içerisinde yapılabilmektedir.

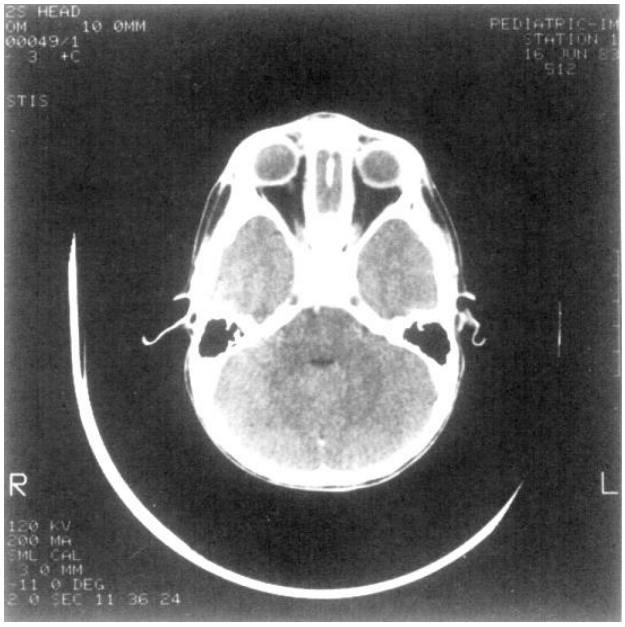
3.1.5 Uygulamalar

X-ışın tomografisinin en büyük kullanım alanı medikal endüstrisidir. Şekil 3.9, bu tarz görüntülemeyi popüler hale getiren iyi bir örneği göstermektedir. Bir insan kafasının bu görüntüsünde, cismin gözleri, burnu ve kulak memeleri açıkça görülebilmektedir. Diğer medikal uygulamalar için [57]'ye ve aralarında Journal of Computerized Tomography'nin de olduğu pek çok medikal yayına başvurulabilir.

Bilgisayarlı tomografi aynı zamanda endüstriyel cisim ve materyallerin zararsız testlerinde de kullanılmaktadır. Şekil 3.10'daki roket motoru, Hava Kuvvetleri - Aerojet İleri Bilgisayarlı Tomografi Sistem I tarafından tetkik edilmiştir. Görüntü oluşumu ise Şekil 3.11'de görülmektedir. Görüntüde, dış taraftaki halka, motoru desteklemekte kullanılan bir PVC borudur. Şekilde yıldız şekilli boşluk olarak

görülen büyük kütle, katı yakıt pervanesini temsil etmektedir. Pervanedeki anormallikler, kare kutular ile belirtilmiştir.

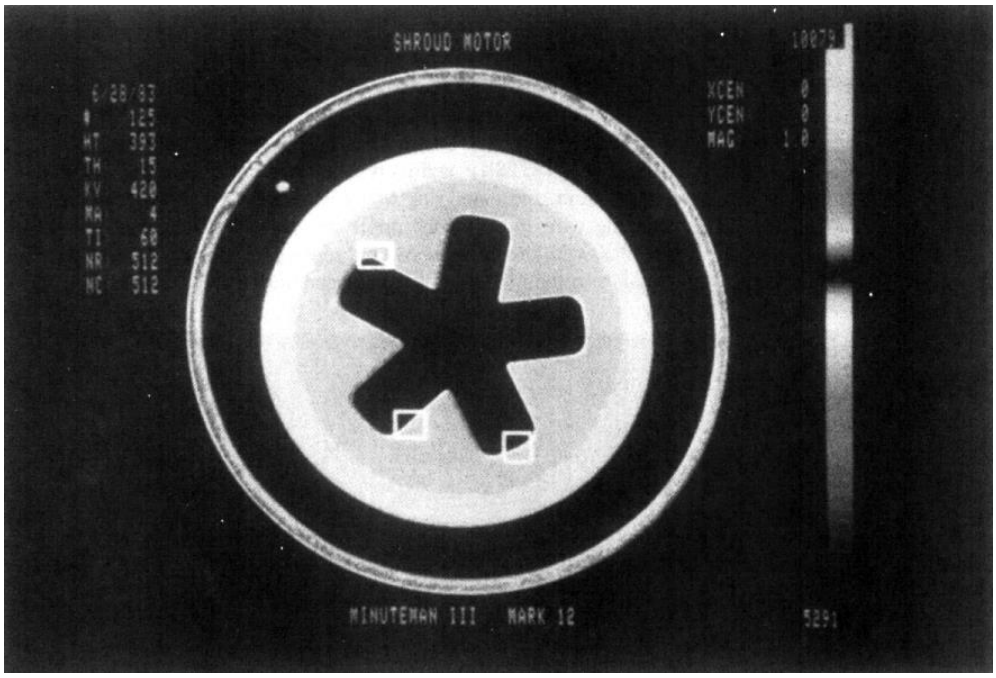
Bilgisayarlı tomografiyle ilgili daha başka uygulama alanları da büyük bir hızla artmaktadır. Örnek olarak petrol kuyularından gelen çekirdek örneklerin incelenmesi [58], kalite kontrol [59], sıvı akışkanlığının ölçümü [60] ve alev sıcaklığının tespiti [61] bunlardan sadece birkaçıdır.



Şekil 3.9 Tipik bir insan kafası tomografisi



Şekil 3.10 Katı yakıtlı bir roket motorunun fotoğrafı

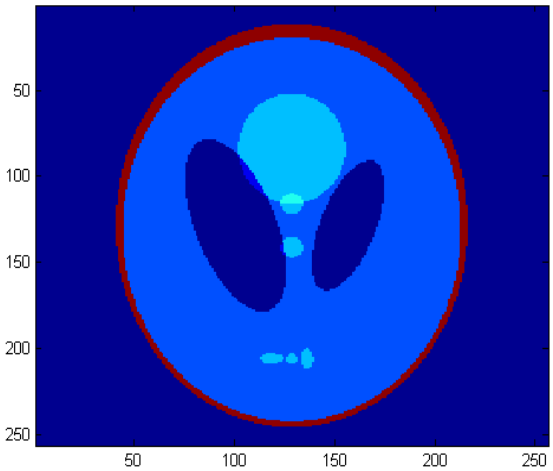


Şekil 3.11 Roket motorunun x-ışını tomografisiyle alınmış bir kesiti

4. SONUÇLAR

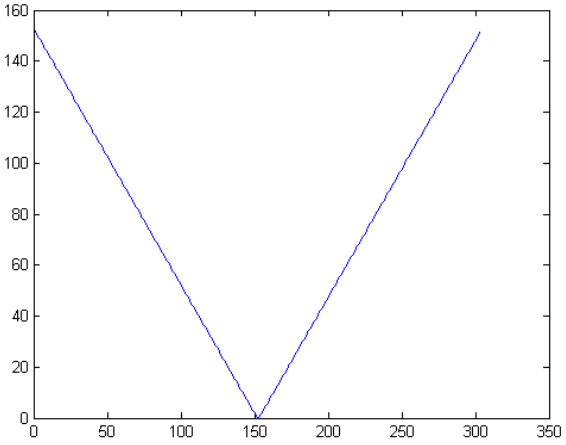
X-ışınlı bilgisayarlı tomografide filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının paralel ve yelpaze demet açılı yorumlarının incelenmesi sonucunda uygulama safhası için, konuya girişte anahtar rol üstlenen paralel izdüşüm metodu seçilmiştir. Bu metod yelpaze demet açılı yönteme göre daha uzun hesaplama sürelerine ihtiyaç duysa da, yalınlığı ve özellikle geri izdüşüm algoritmasının basitliği açısından tercih edilmiştir.

Yapılan uygulamada tomogramı elde edilecek kesit görüntü olarak "Shepp ve Logan"ın meşhur "kafa modeli" kullanılmıştır. Bu model dünya çapında üretilen algoritmaların doğruluğunun test edilmesi için kullanılan standart bir şekil olarak kabul görmektedir. Zira insan kafası teşhis amaçlı olarak sayısal doğruluğa ve gürültülerden bağımsız olunmasına en fazla ihtiyaç duyulan sahadır. Sonuç olarak bu modelin yeniden oluşturulmuş görüntüsü tatmin edici olursa kullanılan algoritmanın vücudun diğer bölgelerinin görüntülenmesinde de rahatlıkla uygulanabileceği sonucuna varılır. Bu çalışmada geliştirilen algoritmanın şeması EK C'de verilmiştir. Şekil 4.1'de yapılan tüm uygulamalarda kullanılan 256x256 boyutundaki "Shepp ve Logan kafa modeli" görülmektedir. Bu şekil 2. bölümde de anlatıldığı üzere 10 adet elipsten oluşmaktadır.

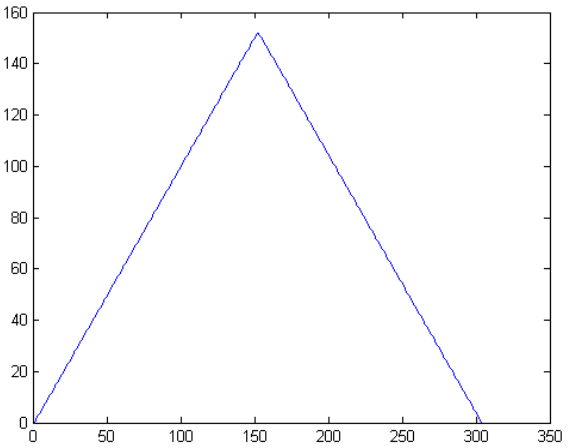


Şekil 4.1 Uygulamalarda kullanılan 256x256'lık "Shepp ve Logan kafa modeli"

Filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmalarının en önemli safhalarından biri filtreleme kısmıdır. Yapılan uygulamalarda Şekil 2.13'te temsili olarak gösterilen ideal filtre kullanılmıştır. 48'lik bir sıfır doldurma ile 64x64'lük basit bir görüntü oluşturulmak istenirse, Şekil 4.2'de görüldüğü gibi filtre, 304 elemanlı bir satır vektör olarak oluşturulmalıdır. Tanımlanan bu filtrenin boyutları, izdüşümde kullanılan ışın ve açı sayısı paralelinde matris boyutlarındaki uygunlukları temin açısından her defasında değişikliğe uğratılmalıdır. Zira görüntü kalitesi için cismin boyutları 4 katı oluncaya kadar sıfırla doldurulur. Doğal olarak bu işlem filtreleme safhasında da devam eder. Kısacası uygulanan sıfır doldurma paralelinde filtre boyutlarının arttırılması (2.69)'daki sıfır doldurma ile aynı anlamı taşımaktadır. Öte yandan biyolojik uygulamalarda Chris Henze rampa fonksiyonu olarak bilinen ve yanıtı, Şekil 4.3'de görüldüğü üzere ideal filtre yanıtının tam tersi olan fonksiyon kullanılarak da sonuçlar irdelenmiştir.

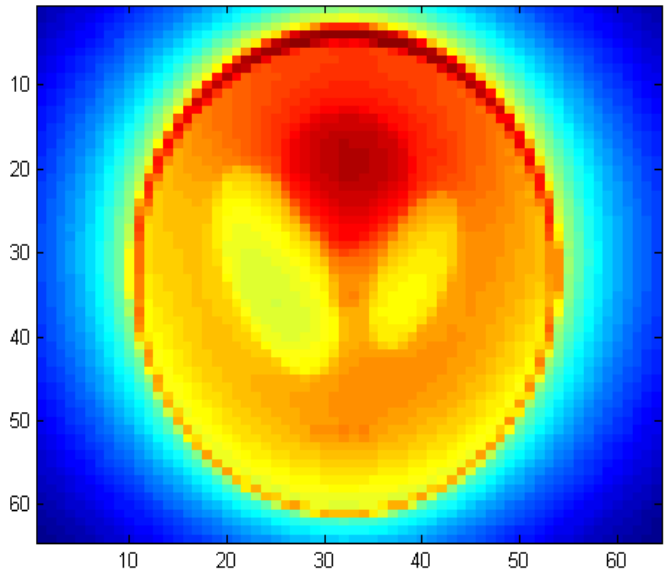


Şekil 4.2 304 elemanlı ideal filtre yanıtı

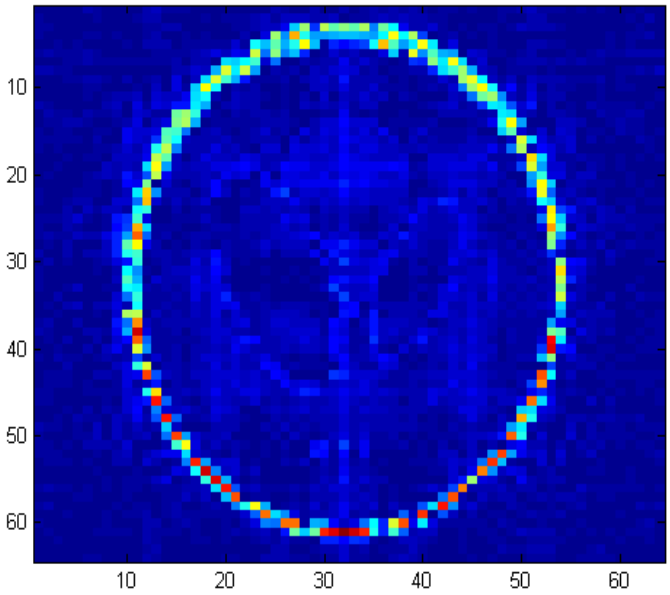


Şekil 4.3 304 elemanlı Chris Henze rampa fonksiyonu yanıtı

Bu iki farklı filtrenin sonuçlarını test etmek üzere Şekil 4.1'de gösterilen 256x256 boyutundaki "Shepp ve Logan kafa modeli" kullanılmış ve sadece 48 eleman sıfır doldurma yapılmıştır. Sonuç olarak ideal filtre ile elde edilen görüntü (Şekil 4.4), Chris Henze rampa fonksiyonu ile elde edilen görüntüden (Şekil 4.5) çok daha iyi sonuçlar doğurmuştur. Her iki görüntüye de 256 açı ve 256 ışınla yapılan izdüşümler sonucunda ulaşılmıştır.



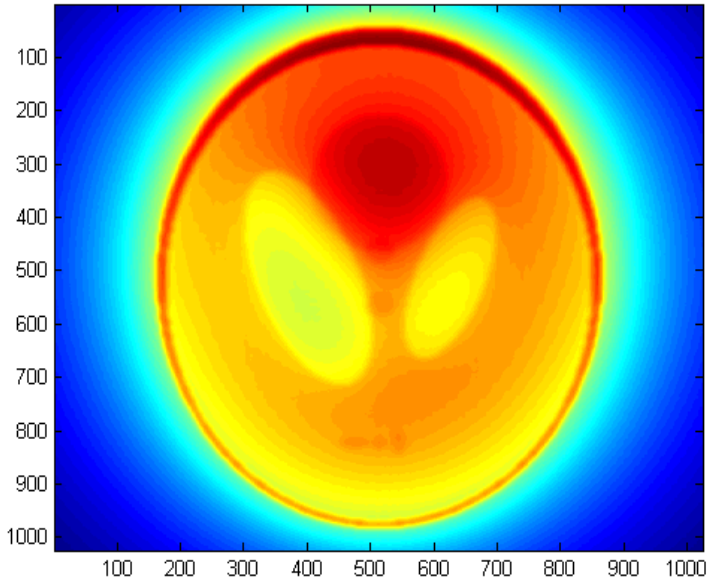
Şekil 4.4 İdeal filtre ile filtrelenmiş 64x64'lük görüntü



Şekil 4.5 Chris Henze rampa fonksiyonu ile filtrelenmiş 64x64'lük görüntü

Şekil 4.4'te kafa modelinde yer alan 10 elipsten sadece 1 tanesi ayırt edilememekte 5'i ise çok açık bir şekilde görülmektedir. En dıştaki elipslerin çevresindeki parlaklık istenmeyen bir durum oluştursa da sonuç görüntüye olan negatif etkisi çok düşük kalmaktadır. Şekil 4.5'te ise görüntü çok bulanık olarak elde edilebilmiştir. Sadece dıştaki iki elips net olarak görülmekte diğerlerinin birbirinden ayıt edilmesinde zorlanılmaktadır. Bu açıdan bu çalışmada yapılan uygulamalarda filtreleme safhasında daima ideal filtre tercih edilmiştir.

Uygulamalarda görüntünün kalitesinin arttırılmasında en büyük faydayı sıfır doldurma işlemleri sağlamıştır. Hızlı Fourier Dönüşümü algoritması en iyi şekilde ikinin tamsayı kuvveti olan vektörlerde işe yarayacağı gerçeğinden hareketle, her bir sıranın vektör uzunluğunun ikinin bir tamsayı katı halinde tutulması için sıfır doldurma yapılmıştır. Şekil 4.6'da 256x256'lık bir kafa modelinin 768 elemanlı sıfır doldurmayla yeniden oluşturulan 1024x1024'lük görüntüsü görülmektedir. Kısacası orijinal cisim, normal boyutlarının 4 katına ulaşması için sıfırla doldurulmuştur. Cismin izdüşümleri 256 açı ve 256 ışınla alınmıştır.

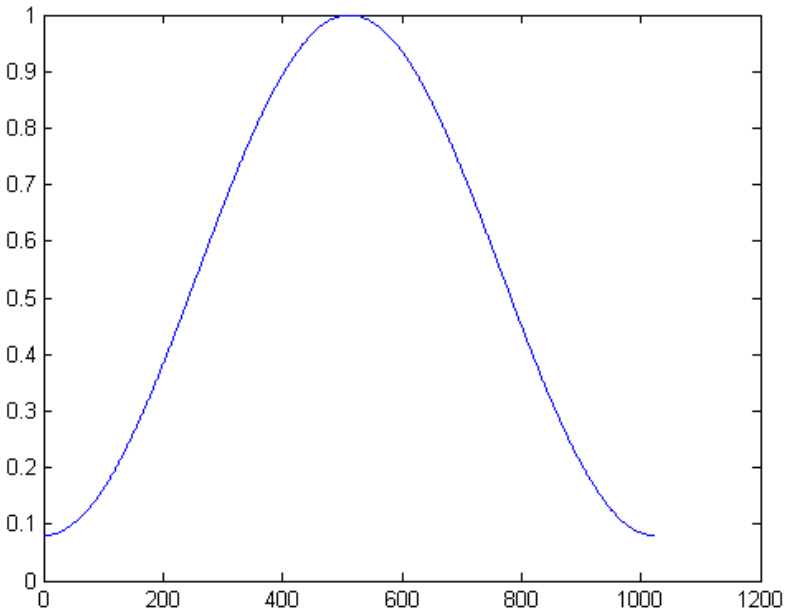


Şekil 4.6 768 eleman sıfır doldurma sonucunda yeniden oluşturulmuş görüntü

Şekil 4.6, Şekil 4.4 ile karşılaştırıldığında görüntü kalitesinde çok önemli iyileşmelerin olduğu görülmektedir. Özellikle alttaki 3 küçük elipsle tam ortadaki küçük elips artık açık seçik görülebilmektedir. Kısacası sıfır doldurma HFD

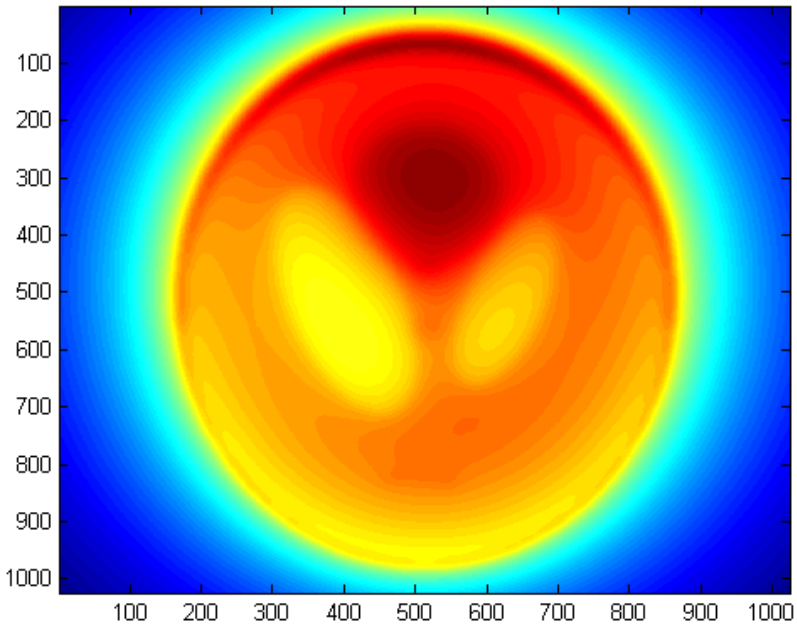
algoritmasının özelliğinden ötürü oluşan tümseklik-çukurluk ve dc gürültülerini azaltmak konusunda çok yararlı olmuştur.

Çalışmada düzleştirme filtresi yani pencereleme de uygulanmıştır. Bu sayede işaretin ilk değerleri ile son değerleri arasındaki devamsızlık giderilebilmiştir. Zira bu devamsızlık enerjinin diğer frekanslara sızması şeklinde algılanabileceğinden (spektral sızma) yeniden oluşturulan görüntüyü bozucu etkiye sahiptir. Yaygın olarak kullanılan 4-5 değişik fonksiyondan bu çalışma için Şekil 4.7'de de 1024 elemanlı bir örneği görülen Hamming penceresi kullanılmıştır. Burada Hamming filtresinin cismin boyutlarının yine 4 katı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu temelde yine bir sıfır doldurma olarak algılanmalıdır. Sonuçta 256 açı, 256 ışın için 768 elemanlı sıfır doldurmada yapıldığında Şekil 4.6'da elde edilen görüntü ortaya çıkmıştır. Hamming penceresi kullanılmadığı durumda ise Şekil 4.8'de görülen görüntü elde edilmiştir. Burada pencereleme yapılmış görüntüye oranla daha başarısız bir sonuç elde edilmiştir. Özellikle en alttaki 3 elips hiç görülememekte ve genel olarak çok daha belirsiz bir görüntü oluşumu meydana gelmektedir. Sonuç olarak Hamming penceresi özellikle ayrık Fourier dönüşümü hesabı öncesinde mutlaka uygulanmalıdır. Zira aksi durumda spektral sızma sonucu çok daha hatalı sonuçlar oluşabilir.



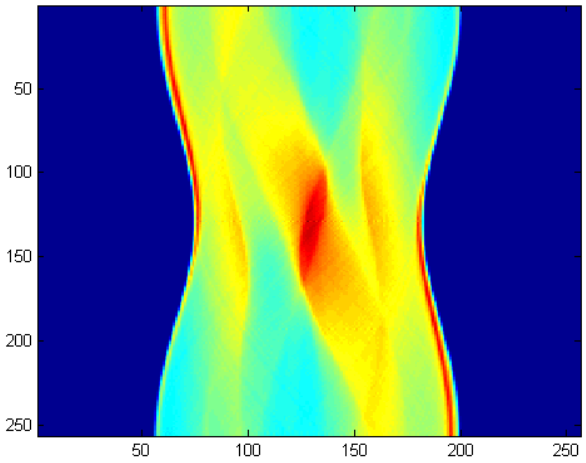
Şekil 4.7 Hamming penceresi

Yeniden oluşturulan görüntülerin kalitesindeki en önemli etkenler ise seçilen açı ve ışın sayılarıdır. Kesit görüntü olarak kullandığımız 256x256'lık kafa modelinde farklı sayıda açı ve ışın kombinasyonu için sonuçlar değerlendirildi. Buna göre 256x256 boyutundaki şeklin izdüşümlerinin oluşturulmasında en etkin sonucun yine 256 ışın için oluştuğu görüldü.

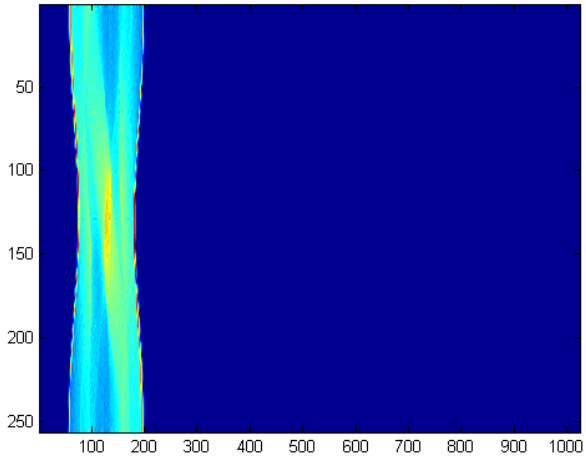


Şekil 4.8 Hamming penceresi kullanılmadan oluşturulan 1024x1024'lük görüntü

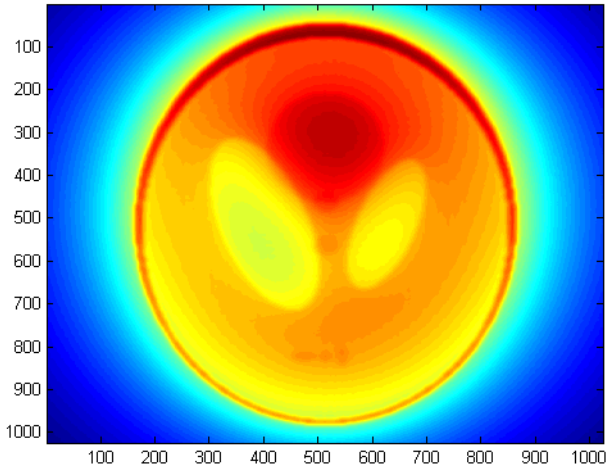
Zira pikseller arasındaki yoğunluk değeri bilinmediğinden, bu piksellerin sayısından fazla sayıda ışın kullanımı, fazladan bir bilgi getirmeyecektir. Kak, gerçek nesnelerin ele alınması durumunda bile, ışınların sayısının mantıklı bir değerden fazla çoğaltılmasının daha iyi görüntülerin ortaya çıkmasını sağlamayacağına değinmiştir [12]. Çalışmadaki uygulamalarda 256x256'lık kafa modeli izdüşümlerinin 512 ışınla alındığı durum için bir uygulama yapılmış kullanılan bilgisayarın Ram bellek'i (850 Mhz Pentium III, 128 Mb Ram) işlem hacmini kaldıramamış ve sonuçta Pentium III 650 Mhz 256 Mb Ram bellekli bir makinada işlemler tekrar edilmiştir.. Şekil 4.9'da 256 ışın 256 açı ve 768 elemanlı sıfır doldurma yapıldığında elde edilen izdüşümler, filtreli izdüşümler ve yeniden oluşturulan görüntü görülmekte. Şekil 4.10'da ise 512 ışın 256 açı ve yine 768 elemanlı sıfır doldurma için elde edilen görüntüler yeralmaktadır.



Şekil 4.9 a) 256 ışın için izdüşümler

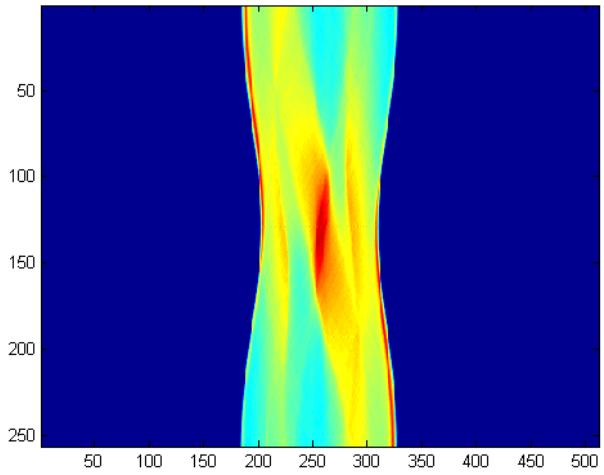


Şekil 4.9 b) 256 ışın için filtrelenmiş izdüşümler

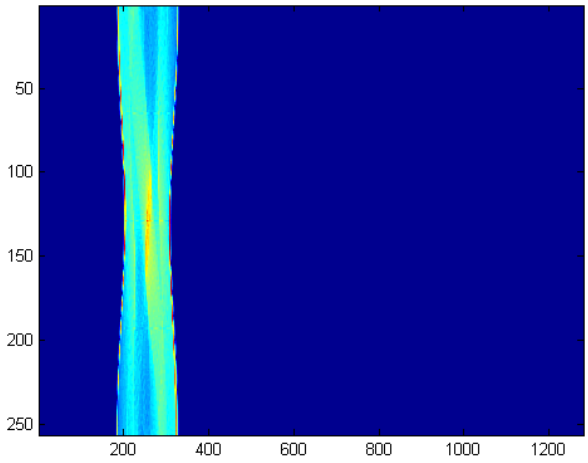


Şekil 4.9 c) 256 ışın için yeniden oluşturulmuş görüntü

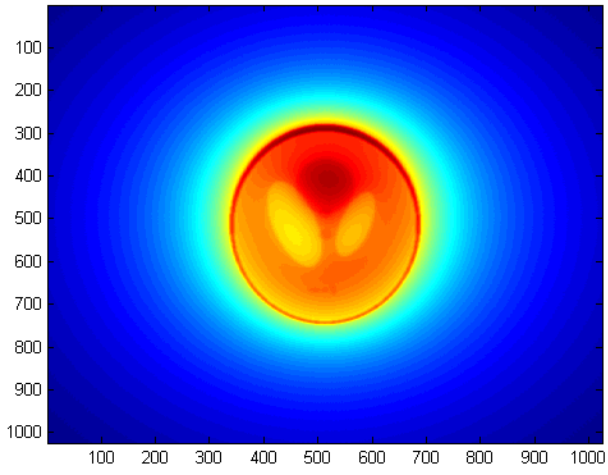
Şekil 4.9 256 ışın ve 768 sıfır doldurma için elde edilen görüntüler



Şekil 4.10 a) 512 ışın için izdüşümler



Şekil 4.10 b) 512 ışın için filtrelenmiş izdüşümler



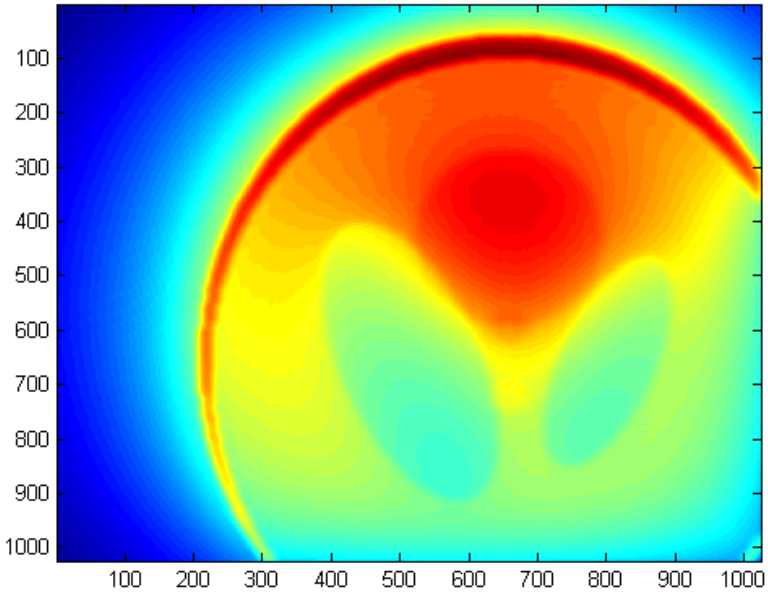
Şekil 4.10 c) 512 ışın için yeniden oluşturulmuş görüntü

Şekil 4.10 512 ışın ve 768 sıfır doldurmayla elde edilen görüntüler

Algoritmalarda çarpımlar esnasında matris boyutlarının uygunluğunu sağlayabilmek adına 512 ışın için cismin boyutları yine sıfır eklenerek arttırılmıştır. Bu da görüntü matrisinin boyunu arttırdığından dolayı şekiller daha küçük çıkmaktadır. Fakat yine de 512 ışınlı izdüşümle 256 ışınlı izdüşümler arasında önemli farklar gözlemlenmemiştir. Sonuç olarak cismin boyutlarından fazla sayıda ışınla izdüşüm yapmak yeniden oluşturulan görüntüye istenilen katkıyı sağlayamadığı teyid edimiştir. Bir miktar iyileşme sağlansa dahi fazlasıyla uzayan işlem süresi bu uygulamayı gereksiz bırakmaktadır.

Bu konuda gözle görülür bir sonuca ulaşmak için kullanılan bilgisayarın kapasitesini zorlamayacak ve kısa süre alan düşük sayıda sıfır doldurmayla elde edilen sonuçlar EK B'de Şekil B.1 ve Şekil B.2'de görülebilir. Bu uygulamalarda sadece 48 elemanlı bir sıfır doldurma uygulanmış ve elde edilen sonuçlar teoriyle uyuşmuştur. Hatta 512 ışın için görüntünün oransal olarak küçülmesi görüntülemeyi daha da kötüleştirmiştir bile diyebiliriz. Kısacası daha gelişmiş bir algoritma oluşturulsa dahi elde edilebilecek en iyi sonuç 256 ışın ile elde edilenden çok daha iyi olmayacaktır.

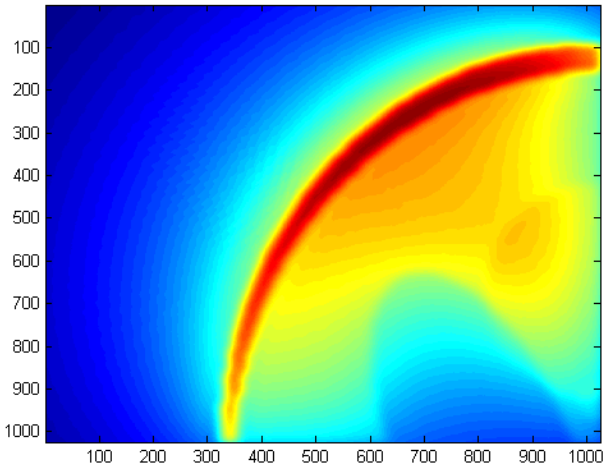
256x256'lık bir "Shepp ve Logan kafa modeli"nin izdüşümleri alınırken 256 ışından daha az sayıda ışın kullanımında ise görüntü aniden bozulmaya başlamaktadır. Örnek olarak 768 elemanlı sıfır doldurma için Şekil 4.11'de görüldüğü üzere ışın sayısı 200'e indirildiğinde dahi görüntü büyük ölçüde deforme olmaktadır.



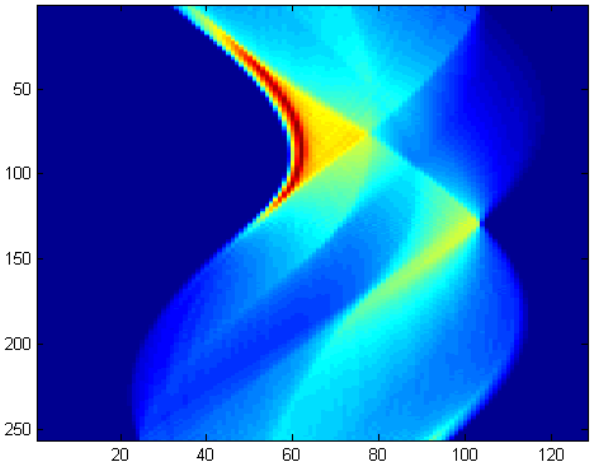
Şekil 4.11 200 ışın için yeniden oluşturulan görüntü

Bununla birlikte ışın sayısı 256'dan 128'e indiğinde elde edilen görüntü tamamiyle deforme olmaktadır. İzdüşümlerde durum yine aynıdır. 128 ışın için oluşan görüntüler Şekil 4.12'de verilmiştir. Bu görüntüler 768'lik sıfır doldurma durumunda geçerlidir.

Sonuç olarak bir cismin görüntüsü yeniden oluşturulacak ise seçilen ışın sayısı mümkün olduğunca o cismin boyutlarına yakın olmalıdır. Işın sayısı cismin boyutlarından az olduğu nispette görüntü deforme olmakta ve istenilen sonuç elde edilememektedir. Öte yandan en üst düzey algoritmalar kullanılsa bile ışın sayısının cismin boyutlarından büyük olması da önemli bir avantaj getirmemektedir.



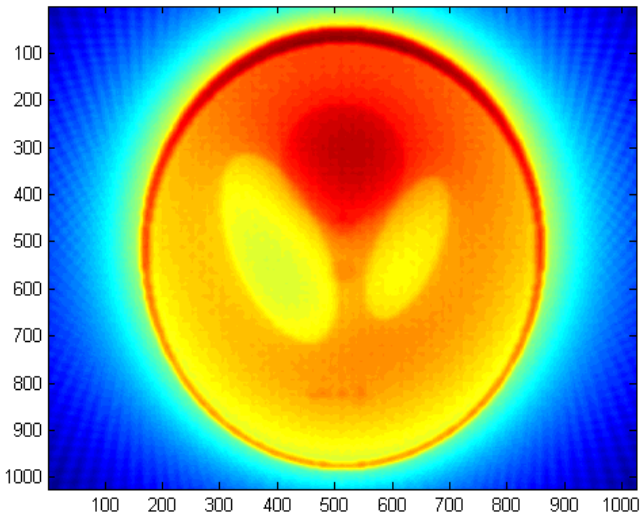
Şekil 4.12 a) 128 ışın için yeniden oluşturulan görüntü



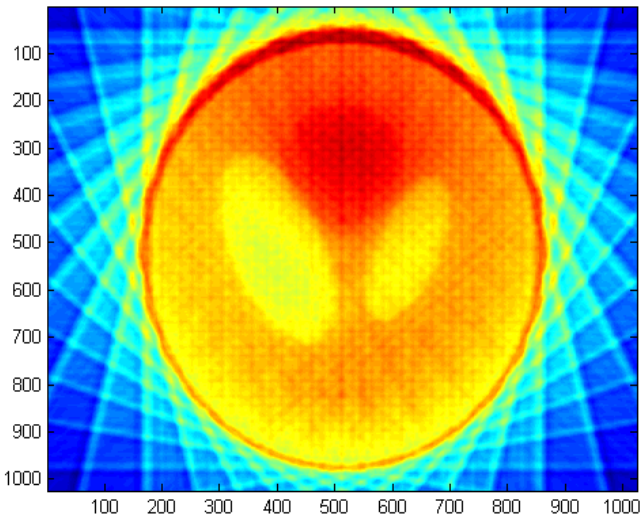
Şekil 4.12 b) 128 ışın için filtreli izdüşümler

Şekil 4.12 128 ışın 256 açı için elde edilen görüntüler

Yeniden görüntüsü oluşturulacak cismin 256x256 boyutundaki bir “Shepp ve Logan” kafa modeli olması durumda seçilecek ışın sayısının önemi yukarıda vurgulandı. Bununla birlikte elde edilen görüntü kalitesinde seçilen açı sayısının da etkisi vardır. Bu etki ışın sayısının etkisi kadar değildir fakat eğer seçilen açı sayısı cismin boyutlarının çok altında olursa görüntüde deformasyon meydana gelmektedir. Örneğin 768 elemanlı sıfır doldurma uygulandığında 64 açı için Şekil 4.13’te gösterilen görüntüde bir miktar kayıp olmaktadır. 16 açı için ise (Şekil 4.14) bu deformasyon çok artmaktadır. Sonuç olarak açı sayının da görüntü boyutlarına mümkün olduğu kadar yakın seçilmesi gerektiği anlaşılmaktadır.



Şekil 4.13 64 açı, 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü



Şekil 4.14 16 açı, 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü

İzdüşüm, filtreleme ve geri izdüşüm safhaları kullanılan algoritma paralelinde çok fazla zaman isteyen bir uygulama olabilmektedir. X-ışınlı bilgisayarlı tomografinin temellerinin 1917 yılında bulunmasına rağmen 1972 yılına kadar hayata geçirilemeyişinin altında yatan ana sebep de algoritmaların hesaplama safhasının çok uzun sürmesiydi. Zira tıbbi uygulamalarda hastaları uzun süreler hareketsiz bir şekilde tutmak pratik olarak imkansız bir olaydır. Bu açıdan ancak bilgisayarların hesaplama güçleri arttıktan sonra BT tarayıcıları geliştirilebilmiştir. Kısacası eldeki algoritma paralelinde en iyi görüntüyü en hızlı şekilde oluşturan ışın-açı kombinasyonu tercih edilmelidir. Tablo 4.1 farklı ışın-açı kombinasyonları için ölçülen ortalama izdüşüm, filtreli izdüşüm ve geri izdüşüm süreleri gösterilmektedir. Burada gösterilen süreler 48 elemanlı sıfır doldurma yapıldığı ve 64x64'lük bir görüntü oluşturulduğu durum için geçerlidir. Kullanılan bilgisayar Pentium III 850 Mhz işlemcili, 128 Mb Ram belleğe sahip bir makinedir.

Tablo 4.1 48'lik sıfır doldurma için ölçülen ortalama işlem süreleri

	İzdüşüm süresi (sn)	Filtreleme süresi (sn)	Geri izdüşüm süresi (sn)	Toplam süre (sn)
128 ışın 128 açı	116.5	1.15	29	146.65
256 ışın 128 açı	468.85	2.3	29.06	500.21
128 ışın 256 açı	236.4	3.51	58.77	298.68
256 ışın 256 açı	1062.32	3.46	65.58	1131.36
512 ışın 256 açı	4171.71	6.09	62.56	4240.36
256 ışın 512 açı	2081.84	10.6	126.33	2218.77
512 ışın 512 açı	8233.83	20.21	126.66	8380.7

Tablo 4.1'de gösterilen sonuçlar sıfır doldurmanın 768'e çıkarıldığı ve 1024x1024'lük bir görüntü oluşturulması durumda ise adeta katlanmaktadır. Burada

işlem hacmi çok arttığından Ram bellek ihtiyacı da artmaktadır. Bu nedenle bu işlemler için Pentium III 650 Mhz işlemcili 256 Mb Ram belleğe sahip bir makine kullanılmıştır. Tablo 4.2'de elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.

Tablo 4.2 768'lik sıfır doldurma için ölçülen ortalama işlem süreleri

	İzdüşüm Süresi (sn)	Filtreleme Süresi (sn)	Geri izdüşüm süresi (sn)	Toplam süre (sn)
128 ışın 128 açı	174.68	1.55	2806.87	2983.1
256 ışın 128 açı	688.27	3.4	10578.71	11270.38
128 ışın 256 açı	346.75	10.83	21721.9	22079.48
256 ışın 256 açı	1380.8	12.26	21369.25	22762.4
512 ışın 256 açı	5545.3	15.57	22174.27	27735.15
256 ışın 512 açı	2772.1	44.17	43168.39	45984.67
512 ışın 512 açı	10946.4	54.82	41916.9	52918.1

Tablo 4.1 ile Tablo 4.2'deki sonuçlar karşılaştırıldığında sıfır doldurmanın işlem sürelerine etkisi rahatlıkla görülmektedir. En etkin görüntü oluşumunun sağlandığı 256 ışın 256 açı kombinasyonunda sonuç yaklaşık 18 dakikadan, 6 saat 20 dakikaya çıkmaktadır. Medikal uygulamalarda 18 dakikanın bile uzun bir süre olduğu düşünülürse 6 saatin pratik uygulamalar için imkansızlığı anlaşılacaktır. Bunun en önemli nedeni ise algoritmanın matlab ile geliştirilmesidir. Kısacası bu tip uygulamalarda C veya C++ gibi makine işlemcisine çok hızlı bir şekilde erişen programlama dillerinin kullanılması bekleme süresini büyük ölçüde azaltacaktır.

Bununla birlikte 768 sıfır doldurmayla oluşturulan 1024x1024'lük görüntü teori doğrultusunda en doğru uygulamadır. Zira en etkin görüntü oluşumu için ana cismin boyutları 4 katına gelinceye kadar sıfırla doldurulması gereklidir. Bu durumda

makinenin işlem süresinin büyük miktarı geri izdüşümler sırasında harcanmaktadır. Bu açıdan daha hızlı algoritmalar geliştirilirken özellikle geri izdüşüm safhasında yoğunlaşmak gerekir. Ayrıca daha önce de değinildiği üzere cismin boyutlarından fazla sayıda ışın ve açı kullanımı hem görüntü kalitesini arttırmamakta hem de işlem süresini çok fazla arttırmaktadır. Örneğin 512 ışın ve 512 açı kombinasyonunda süre 14 saati geçmektedir. Bu açıdan da en etkin görüntü oluşumu 256 ışın 256 açı kombinasyonu için oluşmaktadır.

Bununla beraber burada oluşturulan paralel algoritmalar, yelpaze demet izdüşümlerini kapsayacak şekilde 2. bölümde açıklandığı gibi kolaylıkla genişletilebilir. Bu, işlem süresinde ve görüntü kalitesinde önemli ölçüde iyileşme sağlayacaktır. Aynı zamanda, 3 boyutlu görüntüler, 2 boyutlu dilimlerin birbiri üzerine yerleştirilmesiyle de oluşturulabileceğinden, burada geliştirilen algoritmalar birkaç 2 boyutlu dilimle 3 boyutlu görüntüler elde etme amacıyla da kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Cho Z. H., Ra J.B. and Hilal. Z. K., 1983. *IEEE Trans. Med. Imag.,* MI-2:6 – 8.

[2] Colsher J., 1980. *Phys. Med. Biol.,* vol. 25, 03 – 105.

[3] Shepp L. A., 1980. *J. Comput. Assit. Tomogr.,* vol. 4, 94 – 107.

[4] Gordon R., Bender R. and Herman G. T., 1970. *J. Theor. Biol.,* vol. 29, 471.

[5] Shepp L. A., Vardi Y., 1982. *IEEE Trans. Med. Imag.,* MI-1:113 – 122.

[6] Mersereau R. M. And Oppenhaim A. V., 1974. *IEEE Proc.,* vol. 62, 1319 – 1338.

[7] Alvarez R. E. and Macovski A., 1976. Energy selective reconstruction in X-ray computerized tomography, *Phys. Med. Biol.,* vol. 21, 733 – 744.

[8] Di Chiro G., Brooks R. A., Kessler R. M. et al., 1979. Tissue signatures with dual energy CT. *Radiology,* vol. 131, 521.

[9] Cho Z. H., Tsai C. M. and Wilson G., 1975. Study of contrast and modulation mechanisms in X-ray / photon transverse axial transmission tomography, *Phys. Med. Biol.* vol. 20, 879 – 889.

[10] McCullough E.C., 1977. Factors affecting the use of quantitative information from a CT scanner, *Radiology,* vol. 124, 99.

[11] Bracewell R.H. and Riddle A.C., 1967. Inversion of fan beam scans in radio astronomy, *Astrophysics Journal*, vol. 150, 427 – 434.

[12] Kak A.C. and Slaney M., 1988. Principles of Computerized Tomographic Imaging. *IEEE, Inc.*, New York: IEEE Press.

[13] Ramanchandran G.N. and Lakshminarayanan A.V., 1971. Three dimensional reconstruc-tions from radiographs and electron micrographs: Application of convolution instead of fourier transforms, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 68, 2236 – 2240.

[14] Lakshminarayanan A.V., 1975. Reconstruction from divergent ray data, *tech. rep., Dept.Computer Science*, State University of New York at Buffalo.

[15] Gordon R., Bender R., and Herman G., 1970. Algebraic reconstruction techniques(ART) forthree dimensional electron microscopy and X-ray photography, *Journal of Theoritical Biology*, vol. 36, 105-117.

[16] Gordon R., 1974. A tutorial on ART(Algebraic Reconstruction Techniques) *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-21, 78-93.

[17] Herman G. and Naparstek A., 1976. Fast image reconstruction based on a Radon inversionformula appropriate for rapidly collected data, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 33, 511-533.

[18] Herman G. and Lent A., 1976. Iterative reconstruction algorithms, *Cornput. Biol. Med.*,vol. 6, 273-294.

[19] Budinger T. and Gullberg G., 1974. Three-dimensional reconstruction in nuclear medicineemission imaging, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-21, 2-21.

[20] Wernecke S. and Addario L.D., 1977. Maximum entropy image reconstruction *IEEE Transactions on Computing*, vol. C-26, 351-364.

[21] Shepp L. and Logan B., 1974. The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans-actions on Nuclear Science*, vol. NS-21, 21-43.

[22] Brigham E. 0., 1974. The Fast Fourier Transform. Englewood Cliffs, NJ: *Prentice-Hall.*

[23] Dean S. R., 1983. The Radon Transform and Some of Its Applications. New York, NY: *John Wiley and Sons*.

[24] Macovski A., 1983. Medical Imaging Systems, *Englewood Cliffs*, NJ: Prentice-Hall.

[25] Barrett H. H. and Swindell W., 1981. Radiological Imaging: The Theory of Image Formation, *Detection and Processing.* New York, NY: Academic Press.

[26] Gordon R. and Herman G. T., 1974. Three-dimensional reconstructions from projections: A review of algorithms, *in International Review of Cytology, G. H. Boume and J. F. Danielli, Eds.* New York, NY: Academic Press, 111-151.

[27] Omeroglu F. E., Kent S. Tomografik Görüntülemede Filtreli Ters izdüşüm Algoritmasının Paralel İşlenmesi, *URSI-Türkiye'2002 1.Ulusal Kongresi,* 18-20 Eylül 2002, Istanbul, 428-430

[28] Kak A. C., 1979. Computerized tomography with x-ray emission and ultrasound sources, *Proc. IEEE,* vol. 67, 1245-1272.

[29] Kak A. C., 1981. Guest Editor, Special Issue on Computerized Medical Imaging, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, February, vol. BME-28.

[30] Herman G. T., 1983. Guest Editor, Special Issue on Computerized Tomography, *Proceedings of the IEEE*, March, vol. 71.

[31] Rosenfeld A. and Kak A. C., 1982. Digital Picture Processing, 2nd ed. New York, NY: *Academic Press.*

[32] Kak A. C., 1984. Image reconstructions from projections, in Digital Image Processing Techniques, M. P. Ekstrom, Ed. New York, NY: *Academic Press.*

[33] Kak A. C. 1985. Tomographic imaging with diffracting and non-diffracting sources, in Array Signal Processing, S. Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ: *Prentice-Hall.*

[34] Kak A. C. and Roberts B., 1986. Image reconstruction from projections, in Handbook of Pattern Recognition and Image Processing, T. Y. Young and K. S. Fu, Eds. New York, NY: *Academic Press.*

[35] Crowther R. A., DeRosier D. J., and Klug A., 1970. The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its applications to electron microscopy, Proc. Roy. Sot. London, vol. A317, 319-340.

[36] Pan S. X. and Kak A. C., 1983. A computational study of reconstruction algorithms for diffraction tomography: Interpolation vs. filtered-backpropagation, *IEEE Trans. Acoust. Speech Sinnal Processinn,* October, vol. ASSP-31, DD. 1262-1275.

[37] Hamming R. W., 1977. Digital Filters. Englewood Cliffs, NJ: *Prentice-Hall.*

[38] Schafer R. W. and Rabiner L. R., 1973. A digital signal processing approach to interpolation, *Proc. IEEE,* vol. 61, 692-702.

[39] Keating P. N., 1978. More accurate interpolation using discrete Fourier transforms, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing,* vol. ASSP-26, 368-369.

[40] Bates R. H. T., Garden K. L., and Peters T. M., 1983. Overview of computerized tomography with emphasis on future developments, *Proc. IEEE,* March vol. 71, 356-372.

[41] Hale J., 1974.The Fundamentals of Radiological Science. *Springfield,* IL: Charles C. Thomas, Publisher.

[42] TerPogossian M., 1967. The Physical Aspects of Diagnostic Raodiology. New York, NY: *Harper and Row.*

[43] Yazgan E., 2001. Biyomedikal Düzenler, ders notu.

[44] Glover G. H., 1982. Compton scatter effects in CT reconstructions, Med. Phys., November/December, vol. 9, 860-867.

[45] Joseph P. M., 1982. The effects of scatter in x-ray computed tomography, *Med. Phys.,* July/August, vol. 9, 464-472.

[46] Yaffe M., Fenster A., and Johns H. E., 1977. Xenon ionization detectors for fan-beam computed tomography scanners, *J. Comput. Assist. Tomog.,* vol. 1, 419-428.

[47] Williams G. H., 1978. The design of a rotational x-ray CT scanner, *Media (Proc. Of MEDEX 78),* June, vol. 6, no. 7, 47-53.

[48] Derenzo S. E., 1977. Positron ring cameras for emission computed tomography, *IEEE Trans. Nucl. Sci.,* April, vol. NS-24, 881-885.

[49] Shepp L. A. and Stein J. A., 1977. Simulated reconstruction artifacts in computerized x-ray tomography, in *Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine,* M. M. TerPogossian et al., Eds. Baltimore, MD: University Park Press.

[50] Schulz R. A., Olson E. C., and Han K. S., 1977. A comparison of the number of rays vs. the number of views in reconstruction tomography, *Proc. S.P.I.E.,* vol. 127, 313-320.

[51] Lipton M. J. and Higgins C. B., 1983. Computed tomography: The technique and its use for the evaluation of cardiocirculatory anatomy and function, *Cardiology Clinics,* August, vol. 1, 457-471.

[52] Margosian P. M., 1982. A redundant ray projection completion method for an inverse fan beam computed tomography system, *J. Comput. Assist. Tomog.,* June, vol. 6, 608-613.

[53] McKinnon G. C. and Bates R. H. T., 1981. Towards imaging the beating heart usefully with a conventional CT scanner. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* February, vol. BME-28. up. 123-127.

[54] Robb R. A., Hoffman E. A., Sinak L. J., Harris L. D., and Ritman E. L., 1983. High-speed three-dimensional x-ray computed tomography: The dynamic spatial reconstructor, *Proc. IEEE,* March, vol. 71, 308-319.

[55] Boyd D. P. and Lipton M. J., 1983. Cardiac computed tomography, *Proc. IEEE,* March, vol.71, 298-307.

[56] Peschmann K. R., Napel S., Couch J. L., Rand R. E., Alei R., Ackelsberg S. M., Gould R., and Boyd D. P., 1985. High-speed computed tomography: Systems and performance, *Appl. Phys.,* December 1, vol. 58, no. 1, 4052-4060.

[57] Axel L., Arger P. H., and Zimmerman R. A., 1983. Applications of computerized tomography to diagnostic radiology, *Proc. IEEE,* March, vol. 71, 293-297.

[58] Wang S. Y., Huang Y. B., Pereira V., and Gryte C. C., 1985. Applications of computed tomography to oil recovery from porous media, *Appl. Opt.,* December 1, vol. 24, 4021-4027.

[59] Allan C. J., Keller N. A., Lupton L. R., Taylor T., and Tonner P. D., 1985. Tomography: An overview of the AECL program, *Appl. Opt.,* December 1, vol. 24, 4067-4075.

[60] Snyder R. and Hesselink L., 1985. High-speed optical tomography for flow visualization, *Appl. Opt.,* December 1, vol. 24, 4046-4051.

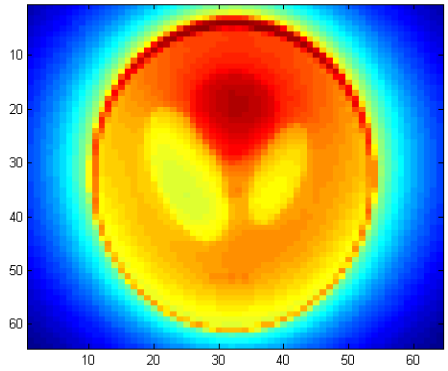
[61] Uckiyama H., Nakajima M., and Yuta S., 1985. Measurement of flame temperature distribution by IR emission computed tomography," Appl. Opt., December 1, vol. 24, 4111-4116.

EK A

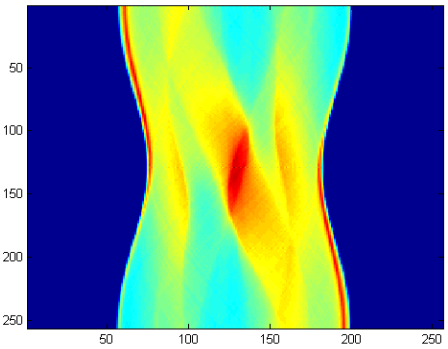
Tablo A.1 Dört farklı Fourier dönüşümü

	Sürekli Zaman	Ayrık Zaman
Sürekli Frekans	İsim: Fourier Dönüşümü İleri yönde: $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$ Ters: $x(t)=1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$ Periyodiklik : Yok	İsim: Ayrık Fourier Dönüşümü İleri yönde: $X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau)e^{-jwn\tau}$ Ters: $x(n\tau)=\frac{\tau}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} X(\omega)e^{jwn\tau}\,d\omega$ Periyodiklik: $X(\omega)=X(\omega+i(2\pi/\tau))$
Ayrık Frekans	İsim : Fourier Serileri İleri yönde: $X_n=1/T\int_0^T x(t)e^{-jn(2\pi/T)t}$ Tersi: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn(2\pi/T)t}$ Periyodiklik: $x(t)=x(t+iT)$	İsim: Sonlu Fourier Dönüşümü İleri yönde: $X_k=1/N\sum_{n=0}^{N} x_n e^{-j(2\pi/N)kn}$ Tersi: $x_k=\sum_{n=0}^{N} X_n e^{j(2\pi/N)kn}$ Periyodiklik: $x_k=x_{k+iN}$ ve $X_k=X_{k+iN}$

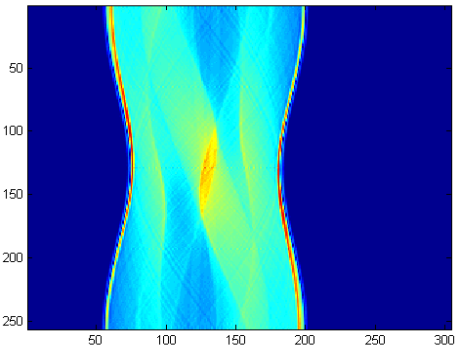
EK B



Şekil B.1 a) 256 ışın için yeniden oluşturulan görüntü (48'lik sıfır doldurmayla)

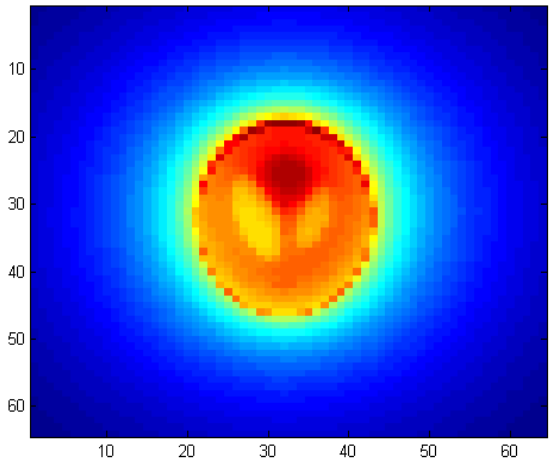


Şekil B.1 b) 256 ışın için izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)

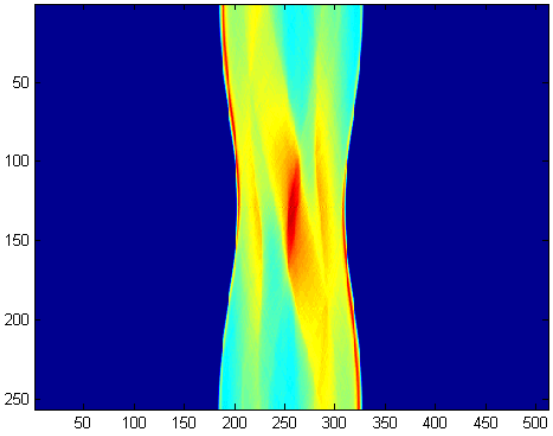


Şekil B.1 c) 256 ışın için filtrelenmiş izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)

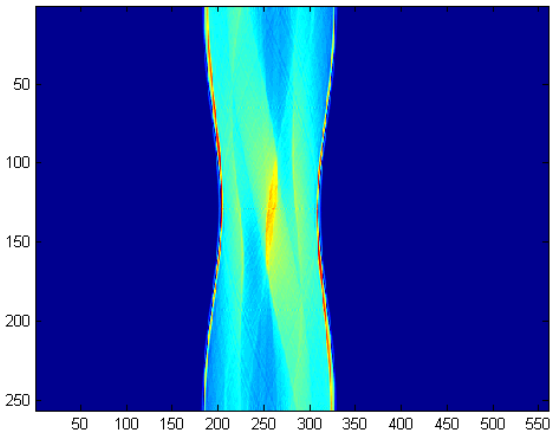
Şekil B.1 256 ışın 256 açı için 48'lik sıfır doldurma ile oluşturulan görüntüler



Şekil B.2 a) 512 ışın için yeniden oluşturulan görüntü (48'lik sıfır doldurmayla)



Şekil B.2 b) 512 ışın için izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)



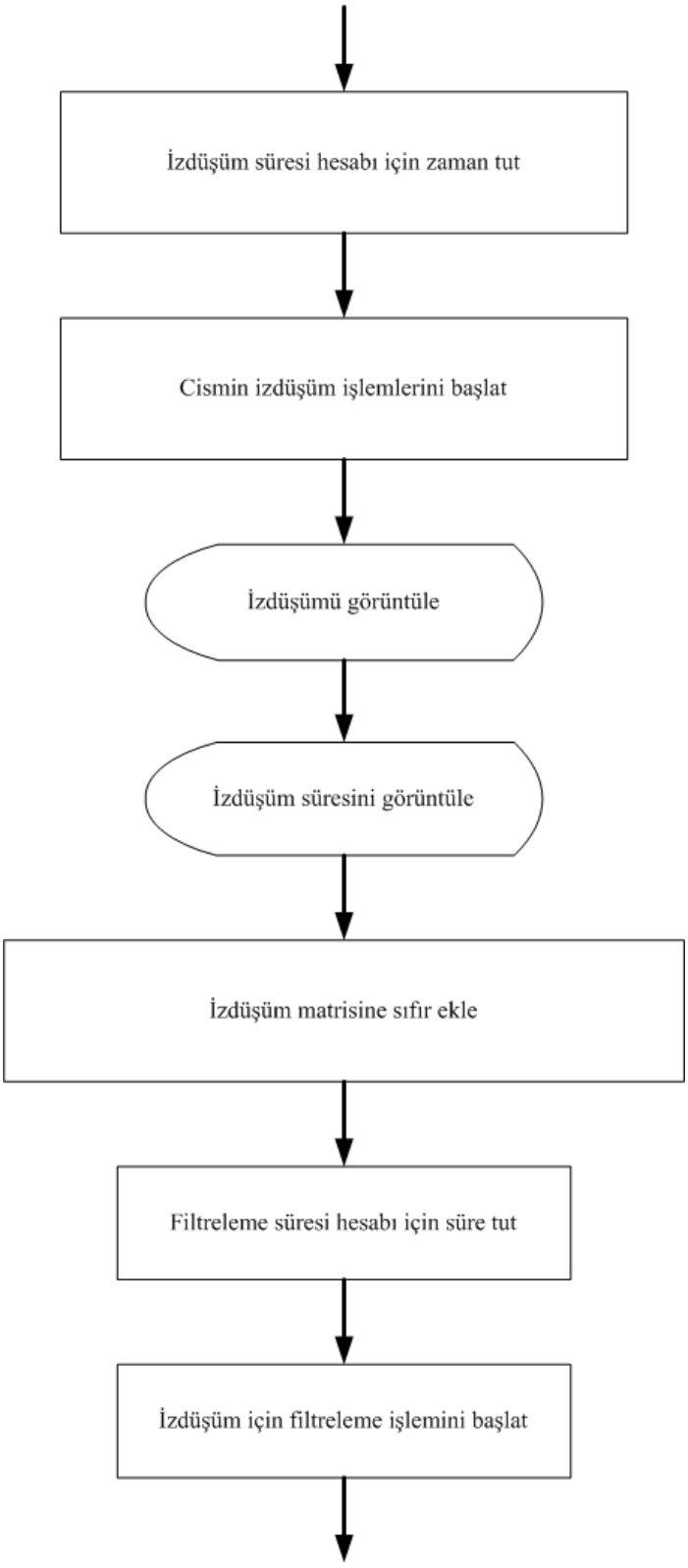
Şekil B.2 c) 512 ışın için filtrelenmiş izdüşümler (48'lik sıfır doldurmayla)

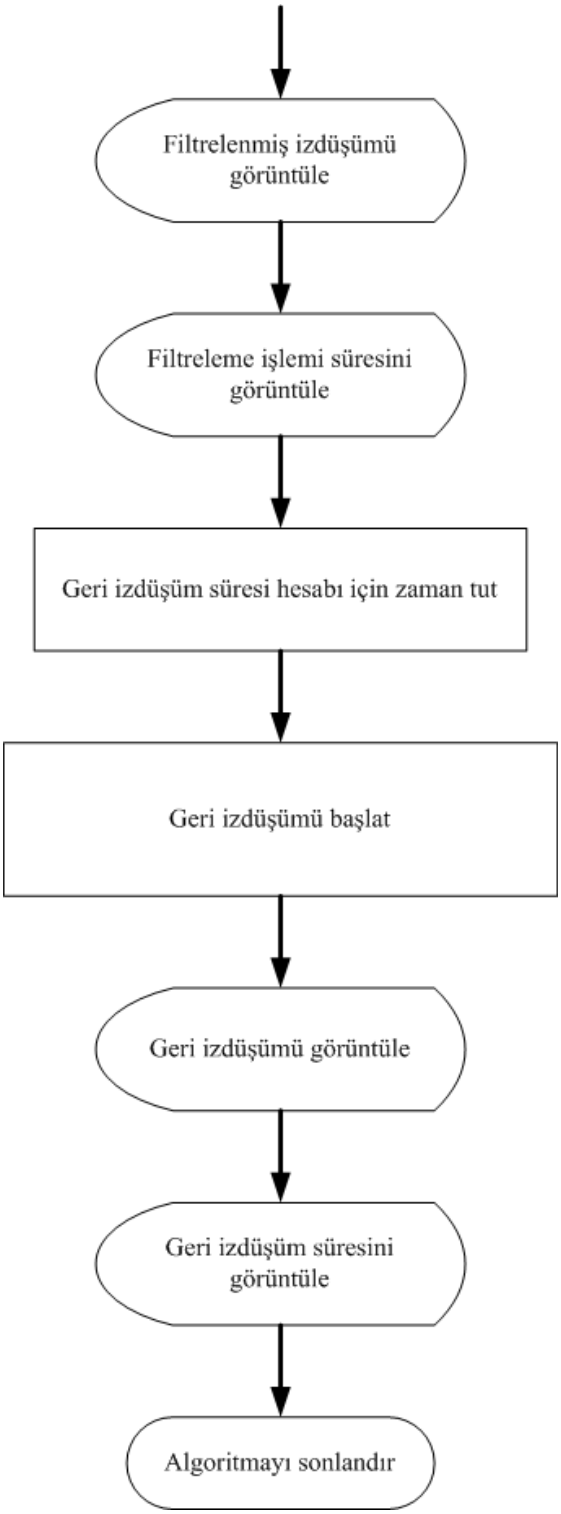
Şekil B.2 512 ışın 256 açı için 48'lik sıfır doldurma ile oluşturulan görüntüler

EK C

X-ışınlı bilgisayarlı tomografide paralel yorum için filtrelenmiş geri izdüşüm algoritmaları




İzdüşüm süresi hesabı için zaman tut
Cismin izdüşüm işlemlerini başlat
İzdüşümü görüntüle
İzdüşüm süresini görüntüle
İzdüşüm matrisine sıfır ekle
Filtreleme süresi hesabı için süre tut
İzdüşüm için filtreleme işlemini başlat


Filtrelenmiş izdüşümü görüntüle
Filtreleme işlemi süresini görüntüle
Geri izdüşüm süresi hesabı için zaman tut
Geri izdüşümü başlat
Geri izdüşümü görüntüle
Geri izdüşüm süresini görüntüle
Algoritmayı sonlandır

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Enes Ömeroğlu, 1975 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini 1993 yılında Bursa Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lisans öğrenimini 1999 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümünde tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Ağustos 1998 – Ekim 1999 arasında Bursa Olay Televizyonu'nda yapımcı olarak çalıştı. Kasım 1999'dan bu yana NTV'de prodüktör – yönetmen olarak çalışmaya devam etmektedir.