T.C.
ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTA-AĞIR VE AĞIR TEK-ÇİFT ÇEKİRDEKLERDE İKİNCİ-MERTEBE ŞEKİL FAZ GEÇİŞLERİNİN KOLLEKTİF MODEL İLE İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan

Hüseyin SONKAYA

Tezi Yöneten

Doç. Dr. İlyas İNCİ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ÇANKIRI
2019

Her hakkı saklıdır

T.C
ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTA-AĞIR VE AĞIR TEK-ÇİFT ÇEKİRDEKLERDE İKİNCİ-MERTEBE ŞEKİL FAZ GEÇİŞLERİNİN KOLLEKTİF MODEL İLE İNCELENMESİ

Hüseyin SONKAYA

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ÇANKIRI
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Hüseyin SONKAYA tarafından hazırlanan 'Orta-Ağır ve Ağır Tek-Çift Çekirdeklerde İkinci-Mertebe Şekil Faz Geçişlerinin Kollektif Model İle İncelenmesi' adlı tez çalışması 15/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlyas İNCİ

Başkan: Doç. Dr. Ercan KARAKÖSE

Üye: Doç. Dr. Ercan KARAKÖSE

Üye: Doç. Dr. Hamit ALYAR

Üye: Doç. Dr. İlyas İNCİ

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. Tamer KEÇELİ

Enstitü müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmenliğine göre hazırlamış olduğum " ORTA-AĞIR VE AĞIR TEK-ÇİFT ÇEKİRDEKLERDE İKİNCİ-MERTEBE ŞEKİL FAZ GEÇİŞLERİNİN KOLLEKTİF MODEL İLE İNCELENMESİ" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Hüseyin SONKAYA
Çankırı, Ocak 2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORTA-AĞIR VE AĞIR TEK-ÇİFT ÇEKİRDEKLERDE İKİNCİ-MERTEBE ŞEKİL FAZ GEÇİŞLERİNİN KOLLEKTİF MODEL İLE İNCELENMESİ

Hüseyin SONKAYA

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman Doç. Dr. İlyas İNCİ

Atomik çekirdeklerde nükleon sayısının değişimine bağlı olarak çekirdeklerin taban durumlarında gözlenen faz geçişleri, nükleer yapı fiziğin en önemli konularından biridir. Faz geçişlerinin incelenmesinde kullanılan en başarılı modellerden birisi Kollektif Modeldir. Bu tez çalışmasında kritik nokta civarında yapı sergileyen tek-çift çekirdeklerin özellikleri incelenmiştir. Tek-çift çekirdekler, tek bir nükleonun çift sayıda nükleon içeren kor'a çiftleniminden elde edilebildiği için, ilk önce çift-çift çekirdekler incelenmiştir. İkinci-mertebe faz geçişinin olduğu E(5) kritik noktanın özellikleri belirlenmiştir. Tek-çift çekirdekler için E(5/4) ve E(5/12) dinamik simetri limitleri, çift kor'a sırasıyla j=3/2 ve j=1/2, 3/2, 5/2 tek parçacık yörüngelerinde hareket eden tek nükleon çiftlendirilerek elde edilmiştir. Bu kritik noktalarda sistemin enerji özdeğer, özfonksiyonları analitik olarak bulunmuştur.

Kritik nokta civarında yapı sergileyen çekirdeklerin deneysel verilerini elde etmek için kullanılan potansiyelin serbest parametreye bağlı olması gerekir. Bu amaçla Coulomb, Kratzer ve Davidson potansiyelleri Bohr Hamiltoniyeninde kullanılmıştır. Ayrıca her bir potansiyel için kor ile tek nükleonun etkileşimin iki farklı formu ele alınmıştır. Kullanılan potansiyeller için enerji özdeğer ve özfonksiyonları analitik formda elde edilmiştir. Sonuçlar, belirlenen sisteme uygun çekirdeklerin uyarılma enerji spektrumu ve uyarılmış durumlar arası elektrik kuadrupol geçiş oranlarını tahmin etmek için kullanılmıştır.

2019, 105 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Tek-çift çekirdekler, Deforme çekirdekler, Kollektif model, İkinci-mertebe şekil faz geçişleri,

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF THE SECOND-ORDER SHAPE PHASE TRANSTIONS IN MEDIUM-HEAVY AND HEAVY ODD-EVEN NUCLEI WITH THE COLLECTIVE MODEL

Hüseyin SONKAYA

Çankırı Karatekin University Graduate School of Natural and Applied Sciences,

Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlyas İNCİ

Due to depending to the change in the number of nucleons in the atomic nuclei, Observed in the basic case of the phase transitions of the nuclei are one of the most important issues of nuclear structure. One of the most successful models used in the study of phase transitions is the collective bohr hamiltonian. In this thesis, the properties of single-double cores exhibiting the critical point are examined. Since the single-double nuclei can be obtained from a pair of nucleons containing a single nucleon, the double-double cores were first investigated. The property of E (5) critical point with second-order phase transition is determined. E (5/4) and E (5/12) dynamic symmetry limits for single-double cores the double cores were obtained by doubling the single nucleon moving in single particle trajectories j = 3/2 and j = 1 /2, 3 /2, 5/ 2 respectively. At these critical points, energy eigenvalues and eigenfunctions of the system were found analytically.

The potential used to obtain experimental data of nuclei around the critical point must be dependent on the free parameter. For this purpose, the potentials of Coulomb, Kratzer and Davidson were used in the Bohr Hamiltonian. In addition, two different forms of interaction with core and single nucleon are discussed for each potential. The energy eigenvalues and eigenfunctions of the potentials used were obtained in analytical form. The results were used to estimate the energy quadrants of excitation energy spectrum and excited states of electric quadrupole transition to the system identified.

2019, 105 pages

Keywords: Odd-even nuclei, Deforme nuclei, Collective model, Second-order shape phase transitions.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Orta-Ağır ve ağır Tek-Çift çekirdeklerde ikinci-mertebe şekil faz geçişlerinin kollektif model ile incelenmesi adlı bu çalışma 2017-2019 yılları arasında hazırlanarak Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne "Yüksek lisans tezi" olarak sunulmuştur. Bu çalışmanın amacı öncelikle projenin amacına uygun olarak incelenecek olan tek-çift çekirdekler belirlenmiştir. Bu çekirdeklerin uyarılma enerji spektrumu ve elektrik kuadrupol geçiş değerlerinin deneysel veri setleri oluşturulup, ikinci mertebe faz geçişinin olduğu kritik nokta civarında yapı sergileyen tek-çift çekirdeklerin bir veya daha fazla parametreler içeren Coulomb potansiyeli, Kratzer potansiyeli ve Davidson potansiyelleri kullanılarak kollektif model Hamiltoniyeninde kullanılmasıyla incelenmesidir.

Çalışmanın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren, her türlü yardımını esirgemeyen, her zaman destekleyen değerli hocam Doç. Dr. İlas İNCİ'ye sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca gerek eğitim gerekse de sosyal anlamda öğrencisine değer veren başta Prof. Dr. Ali YİĞİT ve Doç. Dr. Hamit ALYAR'a da ayrıca teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasını proje olarak destekleyen ve çalışmalarımıza mali destek veren TÜBİTAK'a (Proje No:116R025) teşekkürlerimi sunarım.

PROJE NO: TÜBİTAK 116R025

Hüseyin SONKAYA

Çankırı, 15 Ocak 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

İçindekiler Tablosu

TEZ ONAYI……...i
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR v
1. GİRİŞ 1
2. DİNAMİK SİMETRİ LİMİTLERİ 4
2.1. E(5) Dinamik Simetri Limiti 4
2.2 E(5/4) Dinamik Simetri Limiti 9
2.3 E(5/12) Dinamik Simetri Limiti 12
2.4. Asimtotik İterasyon Metodu 16
2.4.1 Asimtotik İterasyon Metodu Çözümü 17
3. TEK-ÇİFT SİSTEMLER İÇİN KULLANILAN POTANSİYELLER 19
3.1. j=3/2 Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Coulomb Potansiyeli 19
3.2 j=3/2 Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Kratzer Potansiyeli 26
3.2.1 g(β) sabit ise: 26
3.2.2. g(β) deformasyona bağlı ise 28
3.3. Çoklu j Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Kratzer Potansiyeli 34
3.4 j=3/2 Tek Parçacığın Çift Kor'a çiftlenimi: Davidson Potansiyeli 42
3.4.1. g(β) Sabit ise 44
3.4.2 g(β) Değişken ise 45
3.5. Çoklu j Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Davidson Potansiyeli 59
3.5.1. g(β) sabit 59
3.5.2. g(β) Değişken 60
ÖZGEÇMİŞ 92

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 E(5) dinamik simetri limitinde uyarılma enerji spektrumu ve B(E2) geçiş olasılıkları. 7

Şekil 2.2 Sabit etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Coulomb potansiyel parametresi $A = 100$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. Spektrumun daha açık olması için enerjisi 0 alınan $\tau_1 = 1/2$ enerji düzeyi gösterilmemiştir. Tüm enerjiler ilk $7/2^+$ durumunun enerjisine göre hesaplanmıştır. Bu spektrum $d_{3/2}$ tek-parçacığın çiftlenimine karşılık gelir. 22

Şekil 2.3 Sabit etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Kratzer potansiyel parametreleri D=100 ve $\beta 0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. $\xi_\pm$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir. İlk $7/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. Bu spektrum $d3/2$ tek-parçacık yörüngesinde bulunan tek nükleonun çiftlenimine karşılık gelir. 30

Şekil 2.4 $t_1\alpha$ operatörünün neden olduğu B(E2) geçiş güçleri. $\kappa = -1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $D = 100, \beta 0 = 0.5$ Kratzer potansiyel parametreleri kullanılmıştır. İlk uyarılmış durumdan taban duruma geçiş $B\left(E2; 7/2_1^+ \rightarrow 3/2_1^+\right)$ değeri 1'e normalize edilmiştir. Kesin değerleri bulmak için tüm geçiş güçleri $0{,}385094t12$ ile çarpılmalıdır. 31

Şekil 2.5 Deformasyona bağlı etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Kratzer potansiyel parametreleri $D = 100$ ve $\beta 0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. $\xi_\pm$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir. İlk $7/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. 32

Şekil 2.6 $t_1\alpha$ operatörünün neden olduğu B(E2) geçiş güçleri. $\kappa = -1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $A = 100$ Coulomb potansiyel parametresi kullanılmıştır. İlk uyarılmış durumdan taban duruma geçiş $B\left(E2; 7/2_1^+ \rightarrow 3/2_1^+\right)$ değeri 1'e normalize edilmiştir. Kesin değerleri bulmak için tüm geçiş güçleri $0.0027042t_1^2$ ile çarpılmalıdır. 35

Şekil 2.7 Sabit etkileşim gücü ile Kratzer potansiyel parametreleri $D = 100$ ve $\beta 0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. Burada $\kappa = -1/2, \kappa' = 5/2$ kullanılmıştır. İlk $5/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. 35

Şekil 2.8 $175W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Basunia 2004) ve teorik (siyah) spektrumu. 38

Şekil 2.9 $177Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu. 38

Şekil 2.10 $177W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.....39
Şekil 2.11 $179Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.....39
Şekil 2.12 $179Pt$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.....40
Şekil 2.13 $181Hf$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.....40
Şekil 2.14 $181Pt$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a)ve teorik (siyah) spektrumu.....41
Şekil 2.15 $183W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2016) ve teorik (siyah) spektrumu.....41
Şekil 2.16 $185Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005b) ve teorik (siyah) spektrumu.....42
Şekil 2.17 Etkileşimin (a) sabit ve (b) değişken alınmasıyla $\beta 0 = 1.15$ için Davidson potansiyelinden elde edilen uyarılma enerji spektrumunun etkileşim parametresine göre değişimi. Her iki durumda da ilk $7/2$ spinli durumun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. $n_{\pm}$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir.....46
Şekil 2.18 Değişken $g(\beta)$ için $t_1\alpha$ operatöründen kaynaklanan $B(E2)$ geçiş güçleri. Burada $k = -1/2$ ve Davidson potansiyeli minimumu $\beta 0 = 1.15$ alınmıştır. $B(E2;7/2 \rightarrow 3/2)$ değeri 1'e normalize edilmiştir ve gerçek değerler $0.732895\ t12$ ile çarpılarak bulunur.....47
Şekil 2.19 $129Te$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Timar 2014) teorik (siyah).....53
Şekil 2.20 $131Te$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Khazov 2006) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması. 54
Şekil 2.21 $135Ba$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Singh 2008) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.....54
Şekil 2.22 $155Tb$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Reich 2005) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.....55
Şekil 2.23 $157Tb$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Nica 2016) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.....55
Şekil 2.24 $159Tb$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Reich 2012) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.....56
Şekil 2.25 $187Ir$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Basunia 2009) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması. 56
Şekil 2.26 $189Ir$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Johnson 2017) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması. 57
Şekil 2.27 $191Ir$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Vanin 2007) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.....57
Şekil 2.28 $193Ir$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Basunia 2017) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması. 58
Şekil 2.29 $195Ir$ çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Xiaolong 2014) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması. 58

Şekil 2.30 $n=0$, $\beta 0=5.0$ $\kappa=-1/4$ ve $\kappa'=2$ için en düşük enerjili dört banddan oluşan spektrum. Bandlar sütun halinde verilmiştir ve her sütuna ait kuantum sayıları mavi ile alt kısımda yazılmıştır. Her durum için olası toplam açısal momentum değerleri seviye üzerinde gösterilmiştir. Bu durumlar dejeneredir. 62
Şekil 2.31 $n=0$ en düşük enerjili durum için herbir bandın band başı enerjilerinin değişimleri $\beta 0=5.0$ alınarak, (a) $\kappa'=1.2$ için κ 'ya göre (b) $\kappa=-0.25$ için κ' 'ye göre gösterilmiştir. Sabit çiftlenim gücü için "S", değişken çiftlenim gücü için "D" kullanılmıştır. 62
Şekil 2.32 $175W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Basunia 2004) ve teorik (siyah) spektrumu.....64
Şekil 2.33 $177Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu. 65
Şekil 2.34 $177W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.....65
Şekil 2.35 $179Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.....66
Şekil 2.36 $179Pt$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.....66
Şekil 2.37 $181Hf$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.....67
Şekil 2.38 $181Pt$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.....67
Şekil 2.39 $183W$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2016) ve teorik (siyah) spektrumu.....68
Şekil 2.40 $185Os$'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005b) ve teorik (siyah) spektrumu.....68

ÇİZELGELER DİZİNİ

Tablo 2.1 SO(5) grubunun $(\tau,0)$ simetrik temsillerinin açısal momentum L bileşenleri. 5
Tablo 2.2 Açısal kısmının normalize dalga fonksiyonları. 8
Tablo 2.3 $Spin(5)$ grubunun $(\tau_1,1/2)$ simetrik temsillerinin açısal momentum J bileşenleri. 11
Tablo 2.4 $O^{BF}(5)$ temsilinde toplam açısal momentum $\mathcal{J}$ bileşenleri. 13
Tablo 2.5 Seçilen izotoplar için deneysel spektrumu elde etmede kullanılan Hamiltoniyen parametreleri. 21
Tablo 2.6 Kratzer potansiyelinden elde edilen $\xi=0$ en düşük band sonuçlarının $119\le A\le 139$ kütle bölgesi izotopları için deneysel verilerle (Firestone 1996) karşılaştırılması. $(\tau,\tau_1)=(0,1/2)$ kuantum sayılı $J^+=3/2$ açısal momentumlu taban durumun enerjisi 0 olarak alınmıştır. 23
Tablo 2.7 Kratzer potansiyelinden elde edilen $\xi=0$ en düşük band sonuçlarının $^{155-163}Tb$ ve $^{187-195}Ir$ izotopları için deneysel verilerle (Firestone 1996) karşılaştırılması. $(\tau,\tau_1)=(0,1/2)$ kuantum sayılı $J^+=3/2$ açısal momentumlu taban durumun enerjisi 0 olarak alınmıştır. 24
Tablo 2.8 Kratzer potansiyeli ile spektrumu belirlenen izotopların deneysel elektrik kuadrupol geçiş güçleri (Vanin 2007, Basunia 2009, Reich 2012, Joshi 2016, Johnson 2017, Basunia 2017). 25
Tablo 2.9 $t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2}\times\tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinin neden olduğu $\Delta\tau=0,\pm2$ durumları arası bazı B(E2) geçiş güçleri. $\kappa=-1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $D=100$, $\beta_0=0.5$ Kratzer potansiyel parametreleri kullanılmıştır. 33
Tablo 2.10 $t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2}\times\tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinin neden olduğu $\Delta\tau=0,\pm2$ durumları arası bazı B(E2) geçiş güçleri. $\kappa=-1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $A=100$ Coulomb potansiyel parametresi kullanılmıştır. 36
Tablo 2.11 Çoklu-j modeline göre incelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi üreten serbest parametreler. 37
Tablo 2.12 Değişken $g(\beta)$ için $t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2}\times\tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinden kaynaklanan $B(E2)$ geçiş güçleri. Burada $k=-1/2$ ve Davidson potansiyeli minimumu $\beta_0=1.5$ alınmıştır. 48
Tablo 2.13 İncelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi veren serbest parametreler. 50
Tablo 2.14 Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau=1$ B(E2) geçiş güçlerinin, literatürde bulunan deneysel verilerle (Reich 2005, Khazov 2006, Vanin 2007,

Singh 2008, Reich 2012, Timar 2014, Nica 2016, Basunia 2017, Johnson 2017) karşılaştırılması. 52
Tablo 2.15 Çoklu-j modeline göre incelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi üreten serbest parametreler. 64
Tablo 2.16 Çoklu-j modeline Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau = 1$ band-içi ve band-arası izinli B(E2) geçiş güçleri. En düşük enerjili 5/2-1/2 seviyeleri arası geçiş 1'e normalize edilmiştir. Gerçek değerler, tüm geçişlerin $5.16689t12$ile çarpılması ile elde edilir. 70
Tablo 2.17 Çoklu-j modeline Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau = 0,\pm 2$ band-içi ve band-arası izinli B(E2) geçiş güçleri. En düşük enerjili 5/2-3/2 seviyeleri arası geçiş 1'e normalize edilmiştir. Gerçek değerler, tüm geçişlerin $2.78571\chi^2 t_2^2$ ile çarpılması ile elde edilir. 71

1. GİRİŞ

Atom çekirdeği, nükleon olarak adlandırılan proton ve nötronlardan oluşur. Çekirdekler ihtiva ettikleri proton ve nötron sayılarına göre çift-çift, tek-tek, veya tek-çift (çift-tek) şeklinde sınıflandırılabilir. Düşük nükleon sayılı çekirdekler küresel simetrik şekle sahiptirler ve nükleon sayısı arttıkça çekirdeğin küresel şekli bozularak deforme yapıya sahip olurlar. Bu çekirdeklerin yapılarını en iyi açıklayan modellerden biri Kollektif modeldir. Bu modele göre çekirdeklerin yapıları üç limit arasında olabilir. Bunlar Harmonik osilatör, γ-kararsız rotor ve Proleyt deforme rotordur. Böylece çekirdeklerin taban durumlarında meydana gelen faz geçişleri, sistemde enerji alışverişi olmadığı için kuantum faz geçişleri olarak adlandırılır. Gerek deneysel çalışmalarda kullanılan yöntemler gerekse de teorik çalışmalarda kullanılan yazılımların gelişmesi orta-ağır ve ağır tek-çift çekirdeklerde meydana gelen faz geçişleri üzerindeki çalışmaları arttırmıştır.

Küresel simetrik şekle sahip düşük kütleli veya kapalı kabuklara sahip çekirdekler, değerlik nükleon sayıları arttıkça bu nükleonların kor ile etkileşimleri çekirdeklerin yapılarını küresel simetriden saptırır. Bu sapma çekirdeklerin yüksek elektrik kuadrupol momentlere sahip olmasına yol açar. Bunlar genel olarak orta-ağır ve ağır çekirdeklerde görülmektedir ve deneysel olarak çoğu orta-ağır ve ağır çekirdeklerde gözlenmektedir. Çekirdeklerde titreşim ve dönme olmak üzere iki tip kollektif hareket gözlenir. İyice deforme olmuş çekirdeklerin yapıları eksensel simetriktir ve simetri eksenine dik eksen etrafında dönme gözlenir. Eğer kalıcı değilse, çekirdeğin herhangi bir andaki şekli eksensel simetriktir (Wilets end Jean 1956). Kollektif modelde zıt olarak mikroskobik etkileşimlerin dikkate alındığı ve tamamen cebirsel *U(6)* (Armia and Iachello 1975) grup yapısı cinsinden anlatım sağlayan IBM'e göre harmonik osilatör yapısı *U(5)* (Armia and Iachello 1976) dinamik simetri limitine karşılık gelirken S*U(3)* ve *O(6)* dinamik simetri limitleri sırasıyla eksenel simetrik ve asimetrik rotor yapılara karşılık gelmektedir (Armia and Iachello 1978) ve faz geçişleri de bu limitler arasında gerçekleşmektedir. Harmonik osilatör ile γ-kararsız limit arasındaki bölge için kollektif Bohr hamiltoniyeninde potansiyel enerji sadece β'ya bağlıdır. Potansiyel için sonsuz-kuyu potansiyeli, Kratzer potansiyeli, Davidson potansiyeli ve Morse potansiyeli Bohr hamiltoniyeninde kullanılarak faz geçişinin olduğu kritik nokta için sistemin özellikleri parametreden bağımsız olarak elde edilmiştir (Iachello 200). *E(5)* gurubu simetrisine sahip ve II.

Mertebe faz geçişinin olduğu bu kritik noktada sistemin durumları ve enerji özdeğerleri sırasıyla Bessel fonksiyonları ve Bessel fonksiyonlarının sıfırları ile belirlenir.

Harmonik osilatör ile eksensel simetrik deforme limit arasındaki bölge için kollektif Bohr hamiltoniyeni hem deformasyon parametresi β'ya hem de şekil parametresi γ'ya bağlıdır. Hamiltoniyenin bileşenlerine kesin olarak ayrılabileceği kabulü altında β kısmı için sistemin durumu ve özdeğerleri sırasıyla Bessel fonksiyonları ile bu fonksiyonların sıfırları ile verilip, serbest parametreden bağımsızdır. Hamiltoniyenin γ kısmı için sistemin durumu Laguerre polinomları ile verilirken enerji özdeğerleri bir tane serbest parametre içermektedir. I. mertebe faz geçişinde iki farklı şekil eşzamanlı olarak bulunmaktadır fakat sonsuz-kuyu potansiyeli, Kratzer potansiyeli, Davidson potansiyeli ve Morse potansiyelinde bu durumlar ortadan kalkmaktadır. Aslında potansiyel enerji yüzeyinde iki şekli birbirinden ayıran bir bariyer vardır.

E(5) hamiltoniyeninde Coulomb, Kratzer, Davidson ve Morse potansiyellerinin kullanılmasıyla oluşturulan diferansiyel denklem analitik olarak çözülmüş, enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları kapalı formda elde edilmiştir (Fortunato and Vitturi 2003). Davidson potansiyeli hem *U(5)-O(6)* hem de *U(5)-SU(3)* limitleri arsında köprü vazifesi görmektedir. Bu iki faz geçişi bölgesinde yer alan kritik nokta simetrileri için taban durum bantları elde edilmiştir (Bonatsos 2004).

Tek-çift çekirdekler, tek bir nükleonun (proton veya nötron) çift sayıda proton ve nötrondan oluşan kor (core) ile çiftlenmesiyle elde edilebilir. Dolayısıyla harmonik osilatör yapı ile γ-kararsız yapı arasındaki geçiş bölgesinde yapı sergileyen tek-çift çekirdek, tek bir nükleonun aynı geçiş bölgesinde yapı sergileyen çift-çift çekirdeğe çiftlenimi ile anlatılabilir. Bu nedenle çift-çift çekirdekler için kollektif Bohr Hamiltoniyeninin çözümleri tek-çift çekirdeklerin yapılarının açıklanmasında önem arz etmektedir. Bu bağlamda ilk olarak, ikinci-mertebe faz geçişinin gözlendiği kritik nokta olan E(5) dinamik simetri limitinde Bohr Hamiltoniyeninin çözümleri, sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılarak elde edilmiştir. Enerji özdeğer ve özfonksiyonlarını hesaplayan bilgisayar programı Mathematica'da hazırlanmıştır. Program kullanılarak kritik noktada uyarılma enerji spektrumu ve bu durumlar arası elektrik kuadrupol geçişleri elde edilerek literatürde yer alan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada ikinci-mertebe faz geçişinin olduğu kritik nokta civarında yapı sergileyen tek-çift çekirdekler, bir veya daha

fazla serbest parametre içeren potansiyellerin kollektif model Hamiltoniyeninde kullanılmıştır. Teorik olarak incelenen tek-çift çekirdekler belirlenmiş, bu çekirdeklere ait uyarılma enerji spektrumu ve elektrik kuadrupol geçiş değerlerinin deneysel veri setleri oluşturulmuştur. Programın doğruluğunu test etmek amacıyla, $j = 3/2$ tek-parçacık yörüngesinde bulunan tek nükleonun γ-kararsız çift-çift kor'a çiftlenimi sonucu elde edilen ve E(5/4) ile temsil edilen kritik nokta için uyarılma enerji spektrumu ile elektrik kuadrupol geçiş güçleri elde edilmiş ve literatürdeki sonuçları verdiği görülmüştür. Çiftlenen tek-nükleonun açısal momentumu $j = 3/2$ olduğu için, bu durum yalnızca taban durum spini $3/2$ olan tek-çift çekirdeklere uygulanabilir. Eğer seçilen nükleonun $j = 1/2, 3/2, 5/2$ yörüngelerinde hareket ettiği kabul edilirse, toplam sistemin γ-kararsız yapısı yine korunur. Bu sisteme karşılık gelen kritik nokta E(5/12) ile temsil edilir. Bu limit için uyarılma enerji spektrumu ve elektrik kuadrupol geçiş oranları, bilgisayar programının test edilmesi amacıyla elde edilmiştir. Coulomb ve Kratzer kullanılarak elde edilen ikinci-mertebe diferansiyel denklemlerin çözümü standart çözüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Tek nükleonun *j=3/2* yörüngesinde olduğu kabul edilerek tek-nükleonun çiftleniminde çiftlenim gücü sabit ve deformasyona bağlı olduğu iki durum ele alınmıştır. Bu şartlar altında Coulomb ve Kratzer potansiyelleri için enerji özdeğer ve özfonksiyonları kapalı formda elde edilmiştir. Çekirdek seçiminde, çekirdeğin taban-durum spininin $j = 3/2$ ve deneysel olarak yeterli miktarda veri bulunması kriterleri dikkate alınmıştır. İkinci olarak tek nükleonun çoklu-j yörüngesinde olduğu kabul edilmiştir. Çiftlenim gücünün sabit veya deformasyona bağlı olmasının uyarılma enerji spektrumuna etkisinin çok fazla olmaması nedeniyle, bu aşamada sabit çiftlenim gücü kullanılmıştır. Bu model için Coulomb potansiyeli kullanılmamıştır. Çoklu-j modeline göre çekirdeğin taban durum spin-paritesi $1/2^+$ olmalıdır. Buna uygun olarak incelenecek izotoplar ${}^{111-117}_{48}Cd$, ${}^{113-119}_{50}Sn$, ${}^{117-125}_{452}Te$, ${}^{123-129}_{55}Cs$, ${}^{125-133}_{56}Ba$, ${}^{139-141}_{62}Sm$, ${}^{141-145}_{64}Gd$, ${}^{147-151}_{65}Tb$ ve ${}^{157-177}_{69}Tm$ olarak belirlenmiştir.

2. DİNAMİK SİMETRİ LİMİTLERİ

2.1. E(5) Dinamik Simetri Limiti

Bir çekirdekte nükleon sayısı değiştikçe, buna bağlı olarak yapı da değişmektedir (Casten 2006, Cejnar et al. 2010). Yapıdaki bu değişim Harmonik osilatör ile γ-kararsız yapı arasında çok yavaş gelişmektedir ve iki yapının aynı anda bulunduğu kritik nokta E(5) ile adlandırılır (Iachello 2000). İkinci-mertebe şekil-faz geçişinin gözlendiği bu kritik noktada, sistemin yapısı kollektif Bohr Hamiltoniyeninde sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılarak elde edilir. En genel Hamiltoniyen (Bohr 1952, Bohr and Mottelson 1998),

$$H=-\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}k\right)}\right]+V(\beta,\gamma) \qquad (1)$$

ile verilir. β ve γ, sırasıyla çekirdeğin şeklinin küresellikten eksenel ayrılmasını ve küresel simetriden sapmasını belirleyen kollektif koordinatlardır. Cisim merkezli koordinat sisteminde açısal momentumun bileşenlerine karşılık gelen operatörler $k=1,2,3$ olmak üzere Q_k'lar ile tanımlanır. Bir izotop zinciri ele alındığında kütle parametresi *B*, tam olarak çekirdeğin kütlesine karşılık gelmez. Sistemin potansiyel enerjisi $V(\beta,\gamma)$, ikinci mertebe şekil-faz geçişinin olduğu bu kritik nokta için γ açısından bağımsız olup sadece β'ya bağlıdır. Dalga fonksiyonu ise $\Psi(\beta,\gamma,\theta_i)=f(\beta)\Phi(\gamma,\theta_i)$ olarak tanımlanırsa (Wilets and Jean 1956), Hamiltoniyen değişkenlerine kolayca ayrılabilir. Hamiltoniyenin açılara bağlı kısmı,

$$\left[\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}k\right)}\right]\Phi(\beta,\theta_i)=-\Lambda\Phi(\beta,\theta_i) \qquad (2)$$

ile verilir. Burada Λ, SO(5) grubunun Casimir operatörüdür ve $\Lambda=\tau(\tau+3)$ ile tanımlıdır. τ, SO(5) grubunun indirgenemez temsillerini karakterize eden ve tamsayı değerler alan kuantum sayısıdır (Bes 1959). Her bir indirgenemez temsilde yani her bir τ

için açısal momentum L 'nin değeri $\tau = 3\nu_\Delta + \lambda$ ve $L = \lambda, \lambda+1, ..., 2\lambda-2, 2\lambda$ ($2\lambda-1$ eksik) ifadesine göre belirlenir. $\nu_\Delta = 0,1,2,...$ değerlerini alabilen $SO(5) \supset SO(3)$ indirgenmesindeki eksik kuantum sayısıdır (Iachello and Arima 1987). İzinli açısal momentum değerleri Tablo 2-1'de $\tau \leq 8$ için verilmiştir.

Tablo 2.1 SO(5) grubunun $(\tau,0)$ simetrik temsillerinin açısal momentum L bileşenleri

τ	ν_Δ	L	τ	ν_Δ	L
0	0	0	6	0	12, 10, 9, 8, 7, 6
1	0	2		1	6, 4, 3
2	0	4, 2		2	0
3	0	6, 4, 3	7	0	14, 12, 11, 10, 9, 8, 7
	1	0		1	8, 6, 5, 4
4	0	8, 6, 5, 4		2	2
	1	2	8	0	16, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8
5	0	10, 8, 7, 6, 5		1	10, 8, 7, 6, 5
	1	4, 2		2	4, 2

Açısal kısmın dalga fonksiyonu bu kuantum sayılarıyla temsil edilir ve şu şekilde oluşturulur,

$$\Phi_{\tau,\nu_\Delta,L,M}(\gamma,\theta_i) = \sum_{\substack{K=0 \\ çift}}^{L} F_{\tau,\nu_\Delta,L,M}(\gamma)\varphi^K_{M,K}(\theta_i) \tag{3}$$

burada φ 'ler

$$\varphi^K_{M,K}(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_K)}}\left(D^L_{M,K}(\theta_i) + (-1)^L D^L_{M,-K}(\theta_i)\right) \tag{4}$$

şeklinde, simetrik ve normalize Wigner-D fonksiyonlarının lineer kombinasyonları cinsinden tanımlanır. Literatürde, açısal kısmın dalga fonksiyonları açık bir şekilde verilmiştir. Hamiltoniyenin radyal yani β 'ya bağlı kısmı, indirgenmiş enerji

$\varepsilon = \left(2B/\hbar^2\right)E$ ve indirgenmiş potansiyel $u(\beta) = \left(2B/\hbar^2\right)V(\beta)$ tanımları kullanıldığında indirgenmiş şekli şu formda yazılır,

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\Lambda}{\beta^2}+u(\beta)\right]f(\beta)=\varepsilon\, f(\beta) \tag{5}$$

İndirgenmiş potansiyele sahip, β_w genişliğine sahip sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılırsa, $x_{\xi,\tau}$ $J_{\tau+3/2}(z)$ Bessel fonksiyonlarının ξ'inci sıfırı olmak üzere, enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları,

$$E_{\xi,\tau}=\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{x_{\xi,\tau}}{\beta_w}\right)^2;\quad f_{\xi,\tau}(\beta)=C_{\xi,\tau}\beta^{-3/2}J_{\tau+3/2}\left(k_{\xi,\tau}\beta\right) \tag{6}$$

şeklinde tanımlanır. $C_{\xi,\tau}$ normalizasyon sabitleri, $\int_0^{\beta_w} f(\beta)^2\beta^4 d\beta = 1$ normalizasyon şartından elde edilir. Dalga fonksiyonlarının tespitinden sonra, uyarılmış seviyeler arası elektrik kuadrupol geçiş oranları, geçiş operatörlerinin matris elemanları bulunarak hesaplanabilir. Elektrik kuadrupol operatörü

$$T^{(E2)}=t\,\alpha_{2\mu}=t\,\beta\left[D^{(2)}_{\mu,0}\cos(\gamma)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(D^{(2)}_{\mu,2}+D^{(2)}_{\mu,-2}\right)\sin(\gamma)\right] \tag{7}$$

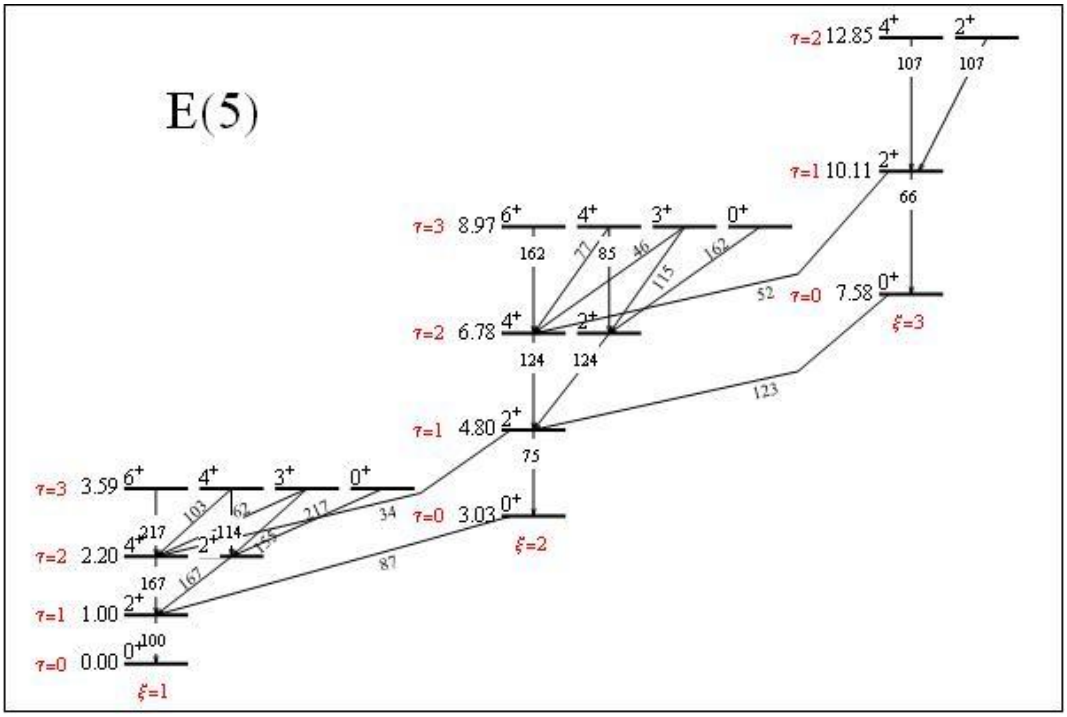
ile verilir ve indirgenmiş elektrik kuadrupol geçiş oranı $B(E2)$, ilk ve son durumlar arası çift-matris elamanı ile orantılıdır (Edmonds 1957).

$$B(E2;\xi_i,\tau_i,L_i\rightarrow\xi_s,\tau_s,L_s)=\frac{1}{2L_i+1}\left|\left\langle\xi_i,\tau_i,L_i\left\|T^{(E2)}\right\|\xi_s,\tau_s,L_s\right\rangle\right|^2 \tag{8}$$

Herhangi bir operatör için çift-matris elemanı şu şekilde hesaplanır (Caprio and Iachello 2007),

$$\left\langle \Psi_3^{(L_3)} \middle\| \hat{\Psi}_2^{(L_2)} \middle\| \Psi_1^{(L_1)} \right\rangle = \frac{16\pi^2}{\sqrt{2L_3+1}} \int_0^{\pi/3} \Bigg[\sum_{K_1,K_2,K_3} \sqrt{\frac{\left(1+\delta_{K_3}\right)}{\left(1+\delta_{K_1}\right)\left(1+\delta_{K_2}\right)}}$$
$$\times \left[\left(L_1 K_1 L_2 K_2 \middle| L_3 K_3\right) + \begin{cases} (-1)^{L_2} \left(L_1 K_1 L_2 K_2 \middle| L_3 K_3\right) & K_1 \geq K_2 \\ (-1)^{L_1} \left(L_1 K_1 L_2 K_2 \middle| L_3 K_3\right) & K_1 \leq K_2 \end{cases} \right] \tag{9}$$
$$\times F_{1K_1}(\gamma) F_{2K_2}(\gamma) F_{3K_3}(\gamma) \Big] \sin(3\gamma) d\gamma \int_0^{\beta_w} f_1(\beta) f_3(\beta) \beta^5 d\beta$$

E(5) kritik noktası için elde edilen enerji spektrumu ve seviyeler arası indirgenmiş elektrik kuadrupol geçiş oranları Şekil 2-1'de verilmiştir. Bu spektrumda, tüm enerjiler ilk uyarılma durum enerjisine göre alınmıştır yani $E\left(L_{\xi,\tau}^{+}\right) = E\left(2_{1,1}^{+}\right) = 1$ alınmıştır. Ayrıca tüm geçiş oranları da ilk uyarılmış durumdan taban duruma geçişe göre hesaplanmıştır, yani $B\left(E2; 2_{1,1}^{+} \rightarrow 0_{1,0}^{+}\right) = 100$ alınmıştır. $B(E2)$'nin kesin değerleri, tüm geçiş oranlarının $0.07452918\ t^2\beta_w^2$ ile çarpılması ile elde edilir. Şekil 2-1'de verilen sonuçlar, yapılan diğer çalışmalarla (Bonatsos et al. 2004, Caprio and Iachello 2007) uyum içindedir.



Şekil 2.1 E(5) dinamik simetri limitinde uyarılma enerji spektrumu ve B(E2) geçiş olasılıkları.

Tablo 2.2 Açısal kısmının normalize dalga fonksiyonları

τ	L	K	$\sqrt{8\pi^2}F_{\tau,L,K}$	τ	L	K	$\sqrt{8\pi^2}F_{\tau,L,K}$
0	0	0	$\sqrt{3/2}$	4	8	8	$\frac{3\sqrt{385}}{128}[3-4\cos(3\gamma)+\cos(4\gamma)]$
1	2	2	$\left(\sqrt{15}/2\right)\sin(\gamma)$			6	$\frac{3}{32}\sqrt{\frac{77}{2}}[2\sin(2\gamma)-\sin(4\gamma)]$
		0	$\left(\sqrt{15}/2\right)\cos(\gamma)$			4	$\frac{3}{64}\sqrt{\frac{11}{13}}[21-4\cos(2\gamma)-17\cos(4\gamma)]$
2	4	4	$\left(\sqrt{105}/8\right)[1-\cos(2\gamma)]$			2	$\frac{9}{32}\sqrt{\frac{15}{26}}[10\sin(2\gamma)+3\sin(4\gamma)]$
		2	$\left(\sqrt{45}/4\right)\sin(2\gamma)$			0	$\frac{3}{128}\sqrt{\frac{7}{13}}[99+92\cos(2\gamma)+\cos(4\gamma)]$
		0	$\left(\sqrt{3}/8\right)[7+5\cos(2\gamma)]$		6	6	$\frac{3}{16}\sqrt{\frac{77}{2}}[-2\sin(2\gamma)+\sin(4\gamma)]$
	2	2	$-\left(\sqrt{15}/2\right)\sin(2\gamma)$			4	$\frac{3\sqrt{7}}{16}[-3+2\cos(2\gamma)+\cos(4\gamma)]$
		0	$\left(\sqrt{15}/2\right)\cos(2\gamma)$			2	$\frac{3}{16}\sqrt{\frac{35}{2}}[-2\sin(2\gamma)+\sin(4\gamma)]$
3	6	6	$\frac{3}{16}\sqrt{\frac{35}{2}}[3\sin(\gamma)-\sin(3\gamma)]$			0	$\frac{3}{16}[3+14\cos(2\gamma)+7\cos(4\gamma)]$
		4	$\frac{9}{16}\sqrt{\frac{35}{11}}[\cos(\gamma)-\cos(3\gamma)]$		5	4	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{11}{2}}[\cos(2\gamma)-\cos(4\gamma)]$
		2	$\frac{3}{16}\sqrt{\frac{7}{22}}[15\sin(\gamma)+11\sin(3\gamma)]$			2	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{11}{2}}[\sin(2\gamma)+\sin(4\gamma)]$
	4	4	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{105}{22}}[-\cos(\gamma)+\cos(3\gamma)]$		4	4	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{13}}\sin(\gamma)[5\sin(\gamma)+9\sin(3\gamma)]$
		2	$-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{5}{22}}\sin(\gamma)$			2	$-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{13}}[4\sin(2\gamma)+9\sin(4\gamma)]$
		0	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{22}}[5\cos(\gamma)+7\cos(3\gamma)]$			0	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{13}}[7-4\cos(2\gamma)+9\cos(4\gamma)]$
	3	2	$\sqrt{\frac{63}{8}}\sin(3\gamma)$		2	2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2}}[\sin(2\gamma)-3\sin(4\gamma)]$
	0	0	$(3/2)\sin(3\gamma)$			0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}[\cos(2\gamma)-3\cos(\gamma)\cos(3\gamma)]$

2.2 E(5/4) Dinamik Simetri Limiti

γ-kararsız çift-çift kor'a, bu özelliği bozmadan bir nükleon (proton veya nötron) çiftlendirerek tek-çift çekirdek elde edilir. Çiftlenecek nükleonun en basit anlamda $j = 3/2$ açısal momentuma sahip tek parçacık yörüngesinde olması gerekir. $j = 3/2$ durumunun $m_j = \pm 3/2, \pm 1/2$ olmak üzere toplam dört tane manyetik alt durumu vardır. Çiftlenim sonucu oluşan dinamik simetri limiti bu nedenle E(5/4) olarak adlandırılır (Iachello 2005). Bu kritik limit, deneysel olarak ^{135}Ba izotopunda gözlenmiştir (Fetea et al. 2006). Elde edilen tek-çift çekirdek sistemine karşılık gelen Kollektif model Hamiltoniyeni

$$H_{BF} = H_B + H_F + V_{BF} \tag{10}$$

formundadır. Buradaki H_B terimi bir önceki bölümde bahsedilen çift-çift kor'u anlatan Hamiltoniyendir. İkinci terim H_F tek fermiyonun durumunu anlatan ve sabit olduğu için sıfır alınabilen Hamiltoniyendir. Son terim V_{BF} ise kor ile fermiyon arasındaki çiftlenim etkisidir ve 5-boyutta spin-yörünge etkileşimi $\hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma}$ ile tanımlanır. Böylece Hamiltoniyen,

$$H_{BF} = H_B + \kappa g(\beta) \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \tag{11}$$

burada H_B Denk.(1) ile verilen kor Hamiltoniyenidir. $g(\beta)$, sabit veya deformasyona bağlı olarak alınabilen etkileşimin gücüdür. $(\tau,0)$ kor temsillerinin $(1/2,1/2)$ fermiyon temsiline çiftleniminden dolayı sistemin durumları, τ kuantum sayısına ek olarak τ_1 kuantum sayısı ile temsil edilir. Dalga fonksiyonun radyal kısmı $f(\beta)$ ile verilirken açısal kısmı

$$\Phi = \sum_{\substack{L,M_L \\ m_j}} \left\langle \begin{matrix} (\tau,0) & (1/2,1/2) \\ L & 3/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\tau_1,1/2) \\ J \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} L & 3/2 \\ M_L & m_j \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ M_J \end{matrix} \right\rangle \Phi_{\tau,\nu_\Delta,L,M_L}(\gamma,\theta_i) \chi_{3/2,m_j}(\eta) \tag{12}$$

buradaki semboller, spin(5)'in indirgenmesi için izoskaler faktörlerdir. $\chi(\eta)$, η koordinatlarına sahip parçacığın dalga fonksiyonudur. Bu dalga fonksiyonu ile etkileşim teriminin beklenen değeri $2\langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle = \tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4$ olarak bulunur. Çiftlenmiş sistemin açısal kısmının çözümü, E(5) kritik noktası için elde edilenle aynıdır. Böylece radyal kısım şu şekilde verilir,

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + \frac{2B}{\hbar^2}\kappa\, g(\beta) 2\langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle + u(\beta) \right] f(\beta) = \varepsilon\, f(\beta) \tag{13}$$

İndirgenmiş potansiyel için β_W genişliğinde sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılırsa, etkileşim gücünün formuna göre iki durum karşımıza çıkmaktadır. $g(\beta) = (\hbar^2/2B)$ olarak sabit alınırsa, dalga fonksiyonu Denk.(6) ile aynı olmak üzere enerjiye $2\langle \hat{\Lambda} \circ \hat{\Sigma} \rangle$ ek katkısı gelir, yani

$$E_{\xi,\tau,\tau_1} = \frac{\hbar^2}{2B}\left[\left(\frac{x_{\xi,\tau}}{\beta_W} \right)^2 + \kappa(\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4) \right] \tag{14}$$

Öte yandan, $g(\beta) = (\hbar^2/2B)(1/\beta^2)$ deformasyona bağlı alınırsa, bu kez kuantum sayıları tek parametre altında toplanabilir, $\Lambda' = \Lambda + \kappa(\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4)$. $\nu = \sqrt{\Lambda' + 9/4}$ olmak üzere enerji özdeğer ve özfonksiyonlar,

$$E_{\xi,\tau,\tau_1} = \frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{x_{\xi,\tau,\tau_1}}{\beta_W} \right)^2; \quad f_{\xi,\tau,\tau_1}(\beta) = C_{\xi,\tau,\tau_1}\beta^{-3/2} J_\nu(k_{\xi,\tau,\tau_1}\beta) \tag{15}$$

ile verilir. Burada x_{ξ,τ,τ_1}, $J_\nu(k_{\xi,\tau,\tau_1}\beta)$ Bessel fonksiyonlarının ξ'inci sıfırlarıdır. Kor temsillerinin fermiyon temsilleri ile çiftlenimi $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ temsilleri ile sonuçlanır, yani enerji spektrumunda her ξ için iki band oluşur. κ parametresi bu iki bandın bağıl ayrılma miktarını tayin eder. spin(5)'in $(\tau_1, 1/2)$ için açısal momentum kuantum sayıları ise $\nu_\Delta = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ olmak üzere aşağıdaki formül ile verilir (Iachello and Van Isacker 1991),

$$J = 2\tau_1 - 6\nu_\Delta + \frac{1}{2}, 2\tau_1 - 6\nu_\Delta - \frac{1}{2}, \ldots, \tau_1 - 3\nu_\Delta + 1 - \frac{1}{4}\left[1 - (-1)^{2\nu_\Delta}\right] \tag{16}$$

İzinli toplam açısal momentum değerleri $\tau_1 \leq 11/2$ için Tablo 3'de verilmiştir. Bu tablodan en düşük durum hariç aynı kuantum sayılarına, birden fazla toplam açısal momentum durumları karşılık gelmektedir yani durumlar dejeneredir.

Tablo 2.3 *Spin*(5) grubunun $(\tau_1,1/2)$ simetrik temsillerinin açısal momentum J bileşenleri.

τ_1	ν_Δ	J	τ_1	ν_Δ	J
1/2	0	3/2	9/2	0	19/2, 17/2, 15/2, 13/2, 11/2
3/2	0	7/2, 5/2		1/2	13/2, 11/2, 9/2, 7/2,
	1/2	1/2		1	7/2, 5/2
5/2	0	11/2, 9/2, 7/2		3/2	1/2
	1/2	5/2, 3/2	11/2	0	23/2, 21/2, 19/2, 17/2, 15/2, 13/2
7/2	0	15/2, 13/2, 11/2, 9/2		1/2	17/2, 15/2, 13/2, 11/2, 9/2
	1/2	9/2, 7/2, 5/2		1	11/2, 9/2, 7/2
	1	3/2		3/2	5/2, 3/2

Çiftlenmiş tek-çift sistemler için, elektromanyetik geçiş güçlerine hem kor tarafından hem de tek nükleon tarafından katkı vardır. Bu ekstra fermiyonik terimi içeren geçiş operatörü $T^{(E2)} = T_B^{(E2)} + T_F^{(E2)}$ ile verilir ve T_B sadece kor'a etki ederken T_F sadece fermiyona etki eder.

$$T^{(E2)} = t_1\alpha + t_2(\alpha \times \alpha)^{(2)} + t'\left(a^+ \times \tilde{a}\right)^{(2)} \tag{17}$$

Dikkat edilirse kor kısmı için α koordinatının ikinci mertebe terimi de dahil edilir. Çünkü bu denklemde ilk terim $\Delta\tau = \pm 1$ olan durumlar arası geçişe neden olurken diğer terimler $\Delta\tau = 0,\pm 2$ durumlar arası geçişe neden olur. Böylece kor ve fermiyonik matris elemanları şu şekilde bulunur,

$$\left\langle \xi'\tau'\tau_1' J' \left\| T_B^{(E2)} \right\| \xi\tau\tau_1 J \right\rangle = \sum_{L,L'} \left\langle \begin{matrix} (\tau',0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left(\tau_1',\frac{1}{2}\right) \\ L' & \frac{3}{2} & J' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left(\tau_1,\frac{1}{2}\right) \\ L & \frac{3}{2} & J \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times (-1)^{L'+J+7/2} \sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1} \begin{Bmatrix} L' & J' & 3/2 \\ J & L & 2 \end{Bmatrix} \left\langle \xi'\tau' L' \left\| T_B^{(E2)} \right\| \xi\tau L \right\rangle \quad (18)$$

burada ilk ve son durum dalga fonksiyonları $\left|\xi\tau\tau_1 J\right\rangle$ şeklinde kuantum sayıları ile verilmiştir. İfadede yer alan ilk iki sembol izoskaler faktörlerdir (Iachello and Van Isacker 1991), $\{\ \}$ ile gösterilen ise 6-j sembolüdür (Edmonds 1957). Son terim, çift-çift kor için hesaplanan elektrik kuadrupol matris elemanıdır.

$$\left\langle \xi'\tau'\tau_1' J' \left\| T_F^{(E2)} \right\| \xi\tau\tau_1 J \right\rangle = \sum_{L} \left\langle \begin{matrix} (\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left(\tau_1',\frac{1}{2}\right) \\ L & \frac{3}{2} & J' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left(\tau_1,\frac{1}{2}\right) \\ L & \frac{3}{2} & J \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times (-1)^{L+J+7/2} \sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1} \begin{Bmatrix} 3/2 & J' & L \\ J & 3/2 & 2 \end{Bmatrix} \delta_{\xi'\xi}\,\delta_{\tau'\tau} \left\langle \frac{3}{2} \left\| T_F^{(E2)} \right\| \frac{3}{2} \right\rangle \quad (19)$$

Elektrik kuadrupol geçişlerine fermiyonik katkı seçilen potansiyelden bağımsız olup, sabittir.

2.3 E(5/12) Dinamik Simetri Limiti

Bu limitte Kor'a çiftlenen tek fermiyonun, $j = 1/2, 3/2, 5/2$ tek parçacık yörüngelerinde hareket ettiği kabul edilir (Alonso et al. 2007a, Alonso et al. 2007b). Her j değeri için toplam $m_j = -j,...,+j$ olmak üzere $2j+1$ manyetik alt durumu vardır. Böylece üç yörüngenin toplam 12 durumu vardır ve bu durumlar Kor'un γ-kararsız yapısını bozmadığı için E(5/12) dinamik simetri limiti olarak adlandırılır. Tek parçacık açısal momentumunu pseudo-spin ve pseudo-yörüngesel kısımlara ayırır ve ikisi arasında çiftlenim olmadığını kabul edersek, bu durum E(5) kor'unun tek-parçacığı temsil eden iki seviyeli sistemle temsil eder, yani $j = 1/2$ $(L_F = 0)$ ve $j = 3/2, 5/2$ $(L_F = 2)$. Buradan

τ_F sırasıyla 0 ve 1 değerlerini alır. Sistemin durumları $O^B(5)$ grubunu karakterize eden τ_B ve $O^F(5)$ grubunu karakterize eden τ_F kuantum sayıları ile belirlenir. Bu iki temsil çiftlenerek indirgenemez temsilleri (τ_1,τ_2) ile karakterize edilen $O^{BF}(5)$ grubunu oluşturur. Bu grup için indirgenemez temsillere karşılık gelen açısal momentum bileşenleri şu şekilde bulunur (Iachello and Isacker 1991):

$$\begin{aligned}&(\tau_1,0): L=2\tau_1-6\nu_\Delta, 2\tau_1-6\nu_\Delta-2,..., \tau_1-3\nu_\Delta+1, \tau_1-3\nu_\Delta \;;(\nu_\Delta=0,1,2,...)\\&(\tau_1,1): L=2\tau_1-6\nu_\Delta+1, 2\tau_1-6\nu_\Delta,..., \tau_1-3\nu_\Delta+2-\left(1-\delta_{\nu_\Delta,0}\right);(\nu_\Delta=0,1/2,1/3,...)\end{aligned} \tag{20}$$

Toplam açısal momentum $J=L\pm 1/2\ (L\neq 0)$ ile belirlenir ve bazı değerler tablo 2-4 te verilmiştir.

Tablo 2.4 $O^{BF}(5)$ temsilinde toplam açısal momentum J bileşenleri.

(τ_1,τ_2)	ν_Δ	J	(τ_1,τ_2)	ν_Δ	J
(0,0)	0	1/2	(1,1)	0	7/2, 5/2
(1,0)	0	5/2, 3/2		1/3	3/2, ½
(2,0)	0	9/2, 7/2, 5/2, 3/2	(2,1)	0	11/2, 9/2, 9/2, 7/2
(3,0)	0	13/2, 11/2, 9/2, 7/2, 7/2, 5/2		1/3	7/2, 5/2, 5/2, 3/2
	1	1/2		2/3	3/2, ½

Çiftlenmiş sistemin Hamiltoniyeni, Denk.(10)'da verildiği gibi kor, fermiyon ve etkileşim terimlerinin toplamı şeklindedir, fakat fermiyon kısmı artık sıfırdan farklı ve $H_F=\kappa' g(\beta)\hat{L}_F^2$ olarak verilir (Alonso et al. 2007).

$$H_{BF}=H_B+\kappa\, g(\beta)\hat{L}_B\circ\hat{L}_F+\kappa'\, g(\beta)\hat{L}_F\circ\hat{L}_F \tag{21}$$

Toplam dalga fonksiyonu $\Psi = f(\beta)\left[\Phi(\gamma,\theta_i,\eta_{orb})\otimes\chi(\eta_{spin})\right]_{J_{BF}}$ ile tanımlanır. Burada η_{orb} ve η_{spin} sırasıyla pseudo-yörüngesel ve pseudo-spin uzaylarındaki koordinatlarıdır. Böylece Φ dalga fonksiyonları $(\tau_B,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF},M_L)$ kuantum sayıları ile belirlenir ve

$$\Phi = \sum_{\substack{L_B,M_{L_B}\\L_F,M_{L_F}}} \left\langle \begin{matrix}(\tau_B,0) & (\tau_F,0) & |(\tau_1,\tau_2)\\ L_B & L_F & |L_{BF}\end{matrix}\right\rangle \left\langle \begin{matrix} L_B & L_F & |L_{BF}\\ M_{L_B} & M_{L_F} & |M_L\end{matrix}\right\rangle \times \phi_{\tau_B,L_B,M_{L_B}}(\gamma,\theta_i)X_{\tau_F,L_F,M_{L_F}}(\eta_{orb}) \tag{22}$$

Hamiltoniyenin açısal kısmı daha önceki kesimlerdeki sonuçlarının aynısıdır. Radyal kısmı ise

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{4}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}-\varepsilon+\frac{\Lambda}{\beta^2}+\frac{2B}{\hbar^2}\kappa g(\beta)2\left\langle\hat{L}_B\circ\hat{L}_F\right\rangle+\frac{2B}{\hbar^2}\kappa' g(\beta)\left\langle\hat{L}_F\circ\hat{L}_F\right\rangle+u(\beta)\right]f(\beta) \tag{23}$$

$2\left\langle\hat{L}_B\circ\hat{L}_F\right\rangle=\tau_1(\tau_1+3)+\tau_2(\tau_2+1)-\tau(\tau+3)-\tau_F(\tau_F+3)$ ve

$\left\langle\hat{L}_F\circ\hat{L}_F\right\rangle=\tau_F(\tau_F+3)$ ile tanımlanır. İndirgenmiş potansiyel yerine sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılır ve etkileşim gücü deformasyona bağlı seçilirse radyal dalga fonksiyonu

$$f_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF}}(\beta)=C_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF}}\beta^{-3/2}J_\nu\left(x_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF}}\beta/\beta_w\right) \tag{24}$$

burada $\nu=\Lambda+\kappa 2\left\langle\hat{L}_B\circ\hat{L}_F\right\rangle+\kappa'\left\langle\hat{L}_F\circ\hat{L}_F\right\rangle$ olup χ, J_ν Bessel fonksiyonunun ξ'inci sıfırıdır ve enerji aşağıdaki gibi verilir.

$$E_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF}}=\frac{\hbar^2}{2B}\left(x_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF}}/\beta_w\right)^2 \tag{25}$$

Elektrik kuadrupol geçiş gücü, yine $T^{(E2)}=T_B^{(E2)}+T_F^{(E2)}$ şeklinde tanımlanan elektrik kuadrupol operatörünün matris elemanı ile orantılıdır. Kor katkısı (Alonso et al. 2007a)

$$\left\langle \xi\,\tau\,\tau_F\;\tau_1\tau_2\,L_{BF}\,J\left\|T_B^{(E2)}\right\|\xi'\,\tau'\,\tau'_F\;\tau'_1\tau'_2\,L'_{BF}\,J'\right\rangle = \sum_{L_F,L_B,L'_F,L'_B}\left\langle \begin{matrix}(\tau,0) & (\tau_F,0) & \left|(\tau_1,\tau_2)\right.\right\rangle \\ L_B & L_F & \left|L_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle$$
$$\left\langle \begin{matrix}(\tau',0) & (\tau'_F,0) & \left|(\tau'_1,\tau'_2)\right.\right\rangle \\ L'_B & L'_F & \left|L'_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle \sum_{j,j'}(-1)^{L'+J+j+2}\sqrt{2L_{BF}+1}\sqrt{2L'_{BF}+1}\sqrt{2J'+1}$$
$$\sqrt{2J+1}\sqrt{2j'+1}\sqrt{2j+1}\begin{Bmatrix} L_B & L_F & L_{BF} \\ 1/2 & J & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} L'_B & L'_F & L'_{BF} \\ 1/2 & J' & j'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} L_B & J & j \\ J' & L'_B & 2\end{Bmatrix} \qquad (26)$$
$$\delta_{\tau_F,\tau'_F}\,\delta_{L_F,L'_F}\,\delta_{j,j'}\left\langle \xi\,\tau\,L_B\left\|T_B^{(E2)}\right\|\xi'\,\tau'\,L'_B\right\rangle$$

ile verilir. Burada $\left\langle \xi\,\tau\,L_B\left\|T_B^{(E2)}\right\|\xi'\,\tau'\,L'_B\right\rangle$, çift-çift sistem için hesaplanan kollektif kısımdır. Fermiyonik katkı ise (Alonso et al. 2007a)

$$\left\langle \xi\,\tau\,\tau_F\;\tau_1\tau_2\,L_{BF}\,J\left\|T_F^{(E2)}\right\|\xi'\,\tau'\,\tau'_F\;\tau'_1\tau'_2\,L'_{BF}\,J'\right\rangle = \sum_{L_F,L_B,L'_F,L'_B}\left\langle \begin{matrix}(\tau,0) & (\tau_F,0) & \left|(\tau_1,\tau_2)\right.\right\rangle \\ L_B & L_F & \left|L_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle$$
$$\left\langle \begin{matrix}(\tau',0) & (\tau'_F,0) & \left|(\tau'_1,\tau'_2)\right.\right\rangle \\ L'_B & L'_F & \left|L'_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle \sum_{j,j'}(-1)^{L'+J'+j'+2}\sqrt{2L_{BF}+1}\sqrt{2L'_{BF}+1}\sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1}$$
$$\sqrt{2j'+1}\sqrt{2j+1}\begin{Bmatrix} L_B & L_F & L_{BF} \\ 1/2 & J & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} L'_B & L'_F & L'_{BF} \\ 1/2 & J' & j'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j & J & L_B \\ J' & j' & 2\end{Bmatrix}\delta_{\xi,\xi'}\delta_{\tau,\tau'}\delta_{L_B,L'_B} \qquad (27)$$
$$\left\langle j\left\|T_F^{(E2)}\right\|j'\right\rangle$$

Burada $\left\langle j\left\|T_F^{(E2)}\right\|j'\right\rangle$, $\left\langle j\left\|\left(a^+_{j_1}\times\tilde{a}_{j_2}\right)^{(\lambda)}\right\|j'\right\rangle = -\sqrt{2\lambda+1}\,\delta_{j_2,j'}\,\delta_{j_1,j}$ ile hesaplanan tek-parçacık matris elemanıdır. Fermiyonik katkı yine kor için seçilen potansiyelden bağımsızdır ve sabittir. Ayrıca bu katkı, Denk.(27)'den görüldüğü gibi aynı band içinde aynı açısal momentum ve τ değerlerine sahip durumlar arasında sıfırdan farklıdır.

2.4. Asimtotik İterasyon Metodu

Bu metot, ikinci-mertebe değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için önerilmiş (Ciftci et al. 2003, Ciftci vd. 2005) ve kullanılmıştır (Bayrak ve Boztosun 2006, Boztosun vd. 2008). Metodun uygulanacağı diferansiyel denklemin çözümü için $\lambda_0(x)$ sıfırdan farklı olmak üzere

$$y''(x) = \lambda_0(x)y'(x) + s_0(x)y(x) \tag{28}$$

formunda olmalıdır. Öyle ki $s_0(x)$ ve $\lambda_0(x)$ fonksiyonlarının yeteri kadar türevlenebilir olmalıdır. $k > 0$ olmak üzere, büyük k değerleri için eğer

$$\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \alpha(x) \tag{29}$$

yakınsaması gerçekleşmelidir. Burada $s_k(x)$ ve $\lambda_k(x)$ fonksiyonları, aşağıda verilen tekrarlama bağıntıları ile bulunur,

$$\begin{aligned} s_k(x) &= s'_{k-1}(x) + s_0(x)\lambda_{k-1}(x) \\ \lambda_k(x) &= \lambda'_{k-1}(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x) \end{aligned} \tag{30}$$

Denk.(29) ile verilen metodun yakınsama koşulu $\Delta_k(x) = \lambda'_k(x)s_{k-1}(x) - \lambda'_{k-1}(x)s_k(x) = 0$ şeklinde düzenlenirse, bu ifadenin kökleri enerji özdeğerlerini verir. Dalga fonksiyonları ise

$$y_n(x) = N_n \exp\left(-\int^x \frac{s_n(x_1)}{\lambda_n(x_1)} dx_1 \right) \tag{31}$$

formülü kullanılarak elde edilir.

2.4.1 Asimtotik İterasyon Metodu Çözümü

Diğer bölümde Kratzer potansiyeli başlığı altında değinecek olan

$$f''(\beta)+\frac{4f'(\beta)}{\beta}+\left[\varepsilon-\kappa\left(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\right)+\frac{2D\beta_0}{\beta}-\frac{\tau(\tau+3)+D\beta_0^2}{\beta^2}\right]f(\beta)=0$$ denklemi

herhangi bir metoda gerek kalmadan çözülebilecek formda olan bir diferansiyel denklemdir. Bununla birlikte, böyle bir diferansiyel denklem Asimtotik İterasyon Metodu (AIM) kullanılarak şu şekilde çözülebilir. Bu denklemde $f(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$, $E=-\varepsilon$, $\varepsilon'=E+\kappa(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4)$, $\tau(\tau+3)+D\beta_0^2+2=p(p+1)$, $k=D\beta_0/\sqrt{\varepsilon'}$, $x=2\sqrt{\varepsilon'}\beta$ dönüşümleri uygulanırsa

$$\chi''_{\tau,\tau_1}(x)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}-\frac{p(p+1)}{x^2}\right]\chi_{\tau,\tau_1}(x)=0 \tag{32}$$

Bu denklemi sağlayacak dalga fonksiyonu fiziksel olmalıdır, yani $x\to 0$ ve $x\to\infty$ limitlerinde sonlu olmalıdır. Dalga fonksiyonunun $\chi_{n,\tau,\tau_1}(x)=x^{p+1}e^{-x/2}R_{n,\tau,\tau_1}(x)$ formunda olduğunu kabul edelim ve Denk.(32)'de yerine koyarsak

$$R''_{n,\tau,\tau_1}(x)=\left(\frac{x-2p-2}{x}\right)R'_{n,\tau,\tau_1}(x)+\left(\frac{p+1-k}{x}\right)R_{n,\tau,\tau_1}(x) \tag{33}$$

Denk.(28) formunda bir denklem elde ederiz. Buradan $\lambda_0(x)=\frac{x-2p-2}{x}$ ve $s_0(x)=\frac{p+1-k}{x}$ olarak belirlenir. $\lambda_i(x)$ ve $s_i(x)$ değerleri, metodun tekrarlama bağıntıları Denk.(30) kullanılarak

$$\lambda_1(x)=\frac{4p^2+10p+6-3px-3x-kx+x^2}{x^2}$$
$$s_1(x)=\frac{-2p^2-5p-3+3k+px+x-kx+2kp}{x^2},\ \ldots \tag{34}$$

elde edildikten sonra yakınsama şartı Δ_i 'ler

$$\Delta_1(x) = \frac{2-3k+3p+p^2-2kp+k^2}{x^2}$$
$$\Delta_2(x) = -\frac{6+11p-11k+6p^2+6k^2-12kp-3kp^2+3pk^2+p^3-k^3}{x^2}, \ \ldots \tag{35}$$

bulunur. Bu ifadelerin kökünden enerji özdeğerleri $k_0 = p+1$, $k_1 = p+2$, $k_3 = p+3$, ... bulunur. Genelleme yapıldığında $k_n = p+1+n$ formülü bulunur. k'nın tanımından enerjiye geçilirse,

$$E_{\xi,\tau,\tau_1} = \left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2 + (\tau+3/2)^2} + \xi + 1/2} \right)^2 - \kappa\left[\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - \frac{7}{4} \right]$$ denklemiyle

olan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$E_{n,\tau,\tau_1} = \left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2 + (\tau+3/2)^2} + n + 1/2} \right)^2 - \kappa\left[\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - \frac{7}{4} \right] \tag{36}$$

Burada n, ξ kuantum sayısı ile özdeştir. Dalga fonksiyonları ise Denk.(31) kullanılarak bulunur. Örneğin $n = \xi = 0$ için aşağıdaki gibi bulunur.

$$R_{0,\tau,\tau_1}(x) = N_{0,\tau,\tau_1} Exp\left(-\int^x \frac{s_0(x_1)}{\lambda_0(x_1)} dx_1 \right) = N_{0,\tau,\tau_1} Exp\left(-\int^x \frac{(p+1-k)/x_1}{(x_1-2p-2)/x_1} dx_1 \right) \tag{37}$$
$$= N_{0,\tau,\tau_1} (x-2p-2)^{k-p-1}$$

3. TEK-ÇİFT SİSTEMLER İÇİN KULLANILAN POTANSİYELLER

3.1. j=3/2 Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Coulomb Potansiyeli

Coulomb potansiyeline sahip γ-kararsız çift-çift kor ile j=3/2 tek-parçacık yörüngesinde bulunan tek nükleonun çiftlendiğini kabul edelim. Potansiyelin sertliği A olmak üzere Coulomb potansiyeli $u_C = -\dfrac{A}{\beta}$ şeklinde tanımlanır. Yine Hamiltoniyen, Denk.(11)'de verildiği gibi kor ve etkileşim terimlerinin toplamı şeklindedir. Açısal kısımların çözümleri, çift-çift sistemlerinki ile aynıdır. Radyal kısım ise

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\Lambda}{\beta^2}+\frac{2B}{\hbar^2}\kappa\, g(\beta)2\left\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\right\rangle-\frac{A}{\beta}\right]f(\beta)=\varepsilon\, f(\beta) \tag{38}$$

Etkileşim gücünün sabit veya değişken olması, enerji spektrumunda belirgin bir fark ortaya koymadığı için $g(\beta)$ sabit kabul edilerek işlem yapılacaktır. $g(\beta)=\hbar^2/2B$ alınır ve $\Lambda=\tau(\tau+3)$, $2\left\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\right\rangle=\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4$ değerleri yerine konursa Denk(38), aşağıdaki gibi olur,

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon-\kappa\left(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\right)+\frac{A}{\beta}-\frac{\tau(\tau+3)}{\beta^2}\right]f(\beta)=0 \tag{39}$$

formuna indirgenir. $f(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$, $E=-\varepsilon$, $\varepsilon'=E+\kappa(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4)$, $\tau+3/2=\mu$, $k=D\beta_0/\left(2\sqrt{\varepsilon'}\right)$, $x=2\sqrt{\varepsilon'}\beta$ dönüşümleri uygulanırsa

$$\chi''(x)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\left(1/4-\mu^2\right)}{x^2}\right]\chi(x)=0 \tag{40}$$

Bağlı durum yani negatif enerjiler için çözüm $M_{k,\mu}(x)$ Whittaker fonksiyonları ile verilir,

$$\chi_{k,\mu}(x) = N_{\tau,\tau_1} x^{(\mu+1)/2} e^{-x/2} {}_1F_1(\mu+1/2-k, 2\mu+1; x) \tag{41}$$

Enerji özdeğerleri, dalga fonksiyonunun sonlu olması koşulu dikkate alınarak bulunur. Öyle ki bu şartın sağlanması için Hypergeometrik fonksiyonun ilk terimi negatif tamsayı olmalıdır, yani $\mu+1/2-k=-\xi$. Böylece uyarılmış durumların enerjileri

$$E_{\xi,\tau,\tau_1} = \left(\frac{A/2}{\tau+\xi+2}\right)^2 - \kappa\left[\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - \frac{7}{4}\right] \tag{42}$$

Sabit etkileşim gücü için bu ifade kullanılarak elde edilen enerji spektrumu Şekil 3-1'de, seçilen potansiyel parametreleri için verilmiştir. Şekil 3-1 incelendiğinde artan açısal momentumlu durumlar için seviyeler arası enerji farkı kapanmaktadır ve belli bir limit duruma yaklaşmaktadır. Coulomb potansiyeli için gözlenen bu özellik, bu potansiyelin gerçek çekirdekler için kullanılmasını zorlaştırmaktadır. Çünkü deneysel spektrumlar incelendiğinde, artan açısal momentum değerleri ile enerji değeri de artmaktadır.

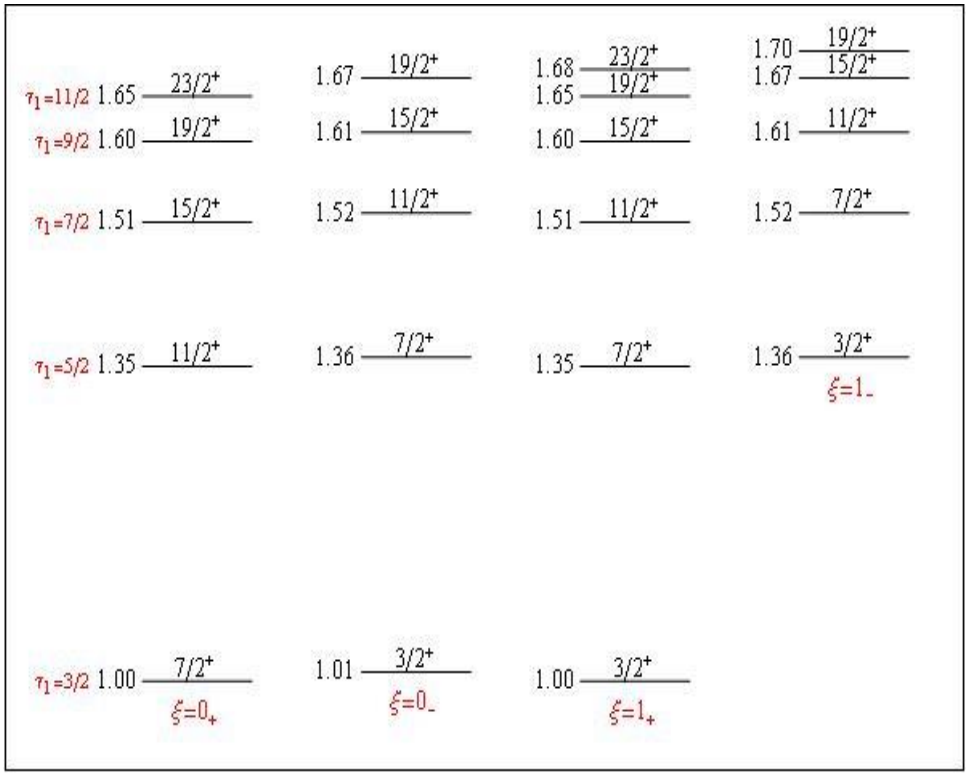
Dalga fonksiyonlarının normalizasyon sabitleri N, $\int_0^\infty f(\beta)^2 \beta^4 d\beta = 1$ normalizasyon şartı kullanılarak bulunur. İlk üç band için normalizasyon sabitleri analitik formda elde edilmiştir,

$$\begin{aligned}
N_{0,\tau,\tau_1} &= \frac{\left(E_{0,\tau,\tau_1}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(4\mu+2)}}\left(\frac{1}{2\mu+1}\right)^{1/2} \\
N_{1,\tau,\tau_1} &= \frac{\left(E_{1,\tau,\tau_1}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(4\mu+2)}}\left(\frac{2\mu+1}{4\mu^2+12\mu+7}\right)^{1/2} \\
N_{2,\tau,\tau_1} &= \frac{\left(E_{2,\tau,\tau_1}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(4\mu+2)}}\left(\frac{(2\mu+1)(\mu+1)}{4\mu^3+24\mu^2+41\mu+19}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{43}$$

Elektrik kuadrupol geçiş güçleri, Denk.(17)'de verilen elektrik kuadrupol operatörünün çift matris elemanı hesaplanarak elde edilir. Uyarılmış durumlar arası B(E2) değerleri, $\Delta\tau = \pm 1$ için Şekil 6'da ve $\Delta\tau = 0, \pm 2$ için Tablo 3-6'da verilmiştir.

Tablo 3.1 Seçilen izotoplar için deneysel spektrumu elde etmede kullanılan Hamiltoniyen parametreleri.

İzotop	β_0	D	κ	κ'	Δ	İzotop	β_0	D	κ	κ'	Δ
^{119}Cd	0.7	61	-1.7	0.8	0.0758	^{143}Sm	0.9	90	-1.6	0.5	0.0868
^{121}Cd	1.4	110	-0.1	0.5	0.1768	^{155}Tb	1.1	70	-0.7	0.4	0.3645
^{123}Cd	0.4	100	-1.1	0.7	0.0008	^{157}Tb	0.9	70	-1.6	0.5	0.0523
^{129}Te	1.0	64	-1.5	0.2	0.0287	^{159}Tb	0.9	207	-1.3	0.3	0.0032
^{131}Te	1.1	127	-1.8	0.1	0.0075	^{161}Tb	0.4	80	-2.0	0.4	0.2256
^{133}Xe	2.0	87	-0.4	0.1	0.0504	^{163}Tb	0.1	100	-2.0	0.1	0.2407
^{135}Ba	0.6	107	-1.6	0.7	0.0061	^{187}Ir	0.6	211	-0.1	0.7	0.0406
^{137}Ba	1.9	208	-0.3	0.1	0.1474	^{189}Ir	0.5	133	-0.1	1.0	0.0378
^{139}Ce	0.7	110	-1.9	0.6	0.0046	^{191}Ir	0.6	55	-1.8	0.5	0.0372
^{139}Nd	1.7	66	-0.2	0.2	0.4811	^{193}Ir	0.5	73	-1.0	1.0	0.0668
^{141}Nd	1.1	67	-0.9	0.3	0.0283	^{195}Ir	0.6	222	-1.1	1.2	0.6000



Şekil 3.1 Sabit etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Coulomb potansiyel parametresi $A = 100$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. Spektrumun daha açık olması için enerjisi 0 alınan $\tau_1 = 1/2$ enerji düzeyi gösterilmemiştir. Tüm enerjiler ilk $7/2^+$ durumunun enerjisine göre hesaplanmıştır. Bu spektrum $d_{3/2}$ tek-parçacığın çiftlenimine karşılık gelir.

Tablo 3.2 Kratzer potansiyelinden elde edilen $\xi = 0$ en düşük band sonuçlarının $119 \le A \le 139$ kütle bölgesi izotopları için deneysel verilerle (Firestone 1996) karşılaştırılması. $(\tau, \tau_1) = (0,1/2)$ kuantum sayılı $J^+ = 3/2$ açısal momentumlu taban durumun enerjisi 0 olarak alınmıştır.

(τ, τ_1)	J^+	^{119}Cd		^{121}Cd		^{123}Cd		^{129}Te		^{131}Te	
		Te.	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*
(1,3/2)	1/2	0.06	0.06	0.02	0.02	0.44	0.44	0.22	0.22	0.31	0.31
(1,3/2)	5/2	0.56	1.88	0.54	1.12	0.73	1.00	0.63	0.67	0.67	0.68
(1,3/2)	7/2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(2,5/2)	3/2	0.56	0.06	0.53	-	1.10	-	2.00	2.19	1.42	-
(2,5/2)	5/2	0.87	2.46	0.86	1.17	1.30	1.55	1.25	0.77	1.65	1.27
(2,5/2)	7/2	1.31	1.22	1.31	1.12	1.55	1.55	1.61	1.60	1.97	1.98
(2,5/2)	9/2	1.87	-	1.90	1.61	1.88	2.61	2.08	1.00	2.38	1.98
(2,5/2)	11/2	2.56	-	2.62	-	2.29	-	2.65	-	2.89	-
(3,7/2)	13/2	3.67	-	3.87	-	3.24	-	4.06	-	4.87	-
(3,7/2)	15/2	4.61	-	4.84	-	3.80	-	4.84	-	5.56	-
(1,1/2)	3/2	0.91	0.92	0.28	-	0.84	-	2.32	2.36	4.56	-
(1,3/2)	1/2	1.30	0.92	0.43	-	1.40	-	3.56	2.62	7.05	-
(2,3/2)	5/2	1.80	2.99	0.95	1.17	1.70	1.75	3.97	1.19	7.42	1.34
(2,3/2)	7/2	2.24	1.22	1.41	1.59	1.96	2.24	4.34	2.03	7.74	2.19

(τ,τ_1)	J^+	^{133}Xe		^{135}Ba		^{137}Ba		^{139}Ce	
		Te.	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*
(1,3/2)	1/2	0.11	0.12	0.25	0.21	0.22	0.22	1.18	0.18
(1,3/2)	5/2	0.58	0.57	0.65	0.54	0.63	1.03	0.62	0.97
(1,3/2)	7/2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(2,5/2)	3/2	0.83	0.63	0.91	0.67	1.01	1.16	0.85	1.18
(2,5/2)	5/2	1.12	1.13	1.16	1.15	1.27	1.18	1.12	1.34
(2,5/2)	7/2	1.53	-	1.51	-	1.63	1.86	1.49	-
(2,5/2)	9/2	2.06	-	1.96	-	2.10	1.86	1.98	-
(2,5/2)	11/2	2.71	-	2.51	-	2.67	-	2.58	-
(3,7/2)	13/2	2.23	-	3.69	-	4.22	-	3.84	-
(3,7/2)	15/2	5.11	-	4.44	-	5.00	-	4.65	-
(1,1/2)	3/2	1.47	-	0.97	0.97	1.15	1.18	1.20	1.21
(2,3/2)	1/2	2.30	-	1.56	1.12	1.94	1.46	1.88	-
(2,3/2)	5/2	2.77	-	1.96	-	2.36	1.63	2.31	1.45
(2,3/2)	7/2	3.18	-	2.31	-	2.72	-	2.69	-

Tablo 3.3 Kratzer potansiyelinden elde edilen $\xi = 0$ en düşük band sonuçlarının $^{155-163}Tb$ ve $^{187-195}Ir$ izotopları için deneysel verilerle (Firestone 1996) karşılaştırılması. $(\tau, \tau_1) = (0,1/2)$ kuantum sayılı $J^+ = 3/2$ açısal momentumlu taban durumun enerjisi 0 olarak alınmıştır.

(τ, τ_1)	J^+	^{155}Tb		^{157}Tb		^{159}Tb		^{161}Tb		^{163}Tb	
		Te.	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*
(1,3/2)	1/2	0.10	-	0.06	-	0.31	-	0.54	-	0.82	
(1,3/2)	5/2	0.58	0.42	0.56	0.42	0.68	0.00	0.78	0.42	0.92	0.47
(1,3/2)	7/2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(2,5/2)	3/2	0.70	-	0.62	-	1.16	-	1.21	-	1.09	-
(2,5/2)	5/2	0.99	-	0.94	-	1.39	-	1.36	-	1.16	-
(2,5/2)	7/2	1.42	-	1.38	?	1.72	-	1.58	-	1.24	-
(2,5/2)	9/2	1.96	1.44	1.94	1.76	2.13	1.75	1.86	1.73	1.35	1.93
(2,5/2)	11/2	2.62	2.62	2.63	2.61	2.64	2.63	2.20	-	1.48	-
(3,7/2)	13/2	3.89	3.70	3.88	3.70	4.17	3.71	3.03	-	1.64	-
(3,7/2)	15/2	4.79	4.80	4.83	4.82	4.87	4.87	3.50	-	1.82	-
(1,1/2)	3/2	0.81	-	1.25	-	1.45	-	1.40	-	2.07	-
(2,3/2)	1/2	1.25	-	1.84	-	2.43	-	2.20	-	2.76	-
(2,3/2)	5/2	1.73	1.74	2.34	2.28	2.79	2.53	2.45	2.36	2.85	-
(2,3/2)	7/2	2.15	2.15	2.78	2.84	3.12	3.11	2.66	2.95	2.94	-

(τ, τ_1)	J^+	^{187}Ir		^{189}Ir		^{191}Ir		^{193}Ir		^{195}Ir	
		Te.	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*	*Te.*	*De.*
(1,3/2)	1/2	0.37	0.37	0.31	0.31	0.24	0.24	0.20	0.20	0.18	0.18
(1,3/2)	5/2	0.71	0.39	0.68	0.38	0.65	0.38	0.63	0.39	0.62	0.45
(1,3/2)	7/2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(2,5/2)	3/2	1.17	0.67	0.99	0.59	0.82	0.52	0.74	0.50	0.82	0.73
(2,5/2)	5/2	1.38	1.09	1.22	-	1.07	1.02	1.01	1.01	1.09	1.05
(2,5/2)	7/2	1.67	-	1.54	-	1.42	-	1.38	1.44	1.48	-
(2,5/2)	9/2	2.05	1.55	1.95	1.51	1.88	1.46	1.86	1.46	1.97	-
(2,5/2)	11/2	2.50	2.52	2.45	2.48	2.44	2.42	2.44	2.40	2.57	-
(3,7/2)	13/2	3.81	3.17	3.58	3.06	3.46	2.93	3.45	2.90	3.84	-
(3,7/2)	15/2	4.44	4.44	4.27	4.32	4.22	4.13	4.25	4.08	4.67	-
(1,1/2)	3/2	0.53	-	0.47	-	1.30	1.57	0.63	1.29	0.59	0.59
(2,3/2)	1/2	1.08	-	0.88	-	1.94	1.82	0.95	1.56	1.01	1.09
(2,3/2)	5/2	1.42	-	1.25	1.06	2.35	2.18	1.38	1.94	1.44	1.27
(2,3/2)	7/2	1.71	1.65	1.57	1.55	2.70	2.73	1.75	1.74	1.83	-

Tablo 3.4 Kratzer potansiyeli ile spektrumu belirlenen izotopların deneysel elektrik kuadrupol geçiş güçleri (Vanin 2007, Basunia 2009, Reich 2012, Joshi 2016, Johnson 2017, Basunia 2017).

$B(E2;\psi_{son}\rightarrow\psi_{ilk})$		^{139}Ce	^{159}Tb	^{187}Ir	^{189}Ir	^{191}Ir	^{193}Ir
$(\tau,\tau_1,J)_{son}$	$(\tau,\tau_1,J)_{ilk}$						
(1,3/2,1/2)	(0,1/2,3/2)	71(20)	-	12.4(4)	13.4(5)	20.9(7)	22.6(8)
(1,3/2,5/2)	(1,3/2,1/2)	1.8(3)	-	-	-	10.4(13)	-
(1,3/2,5/2)	(0,1/2,3/2)	-	365(10)	270(60)	290(55)	96.2(24)	84(3)
(1,3/2,7/2)	(1,3/2,5/2)	-	240(40)	-	>100	29.8(19)	23.8(21)
(1,3/2,7/2)	(0,1/2,3/2)	-	142(7)	-	>82	41.9(20)	32.3(17)
(2,5/2,3/2)	(1,3/2,5/2)	-	-	-	-	27(9)	-
(2,5/2,3/2)	(1,3/2,1/2)	-	-	180(110)	230(7)	58(9)	55(22)
(2,5/2,3/2)	(0,1/2,3/2)	>0.21	-	16(14)	20(6)	15.7(20)	8(4)
(2,5/2,5/2)	(1,3/2,5/2)	-	-	-	-	3.9(9)	-
(2,5/2, 5/2)	(1,3/2,1/2)	-	-	>38	-	39(7)	22(4)
(2,5/2, 5/2)	(0,1/2,3/2)	-	-	>0.048	-	-	1.21(25)
(2,5/2,9/2)	(1,3/2,7/2)	-	118(12)	-	-	-	-
(2,5/2,9/2)	(1,3/2,7/2)	-	220(10)	-	-	72(11)	61(9)
(2,5/2,11/2)	(2,5/2,9/2)	-	113(11)	-	-	-	-
(2,5/2,11/2)	(1,3/2,7/2)	-	294(5)	-	-	-	-

3.2 j=3/2 Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Kratzer Potansiyeli

j=3/2 tek-parçacık yörüngesinde bulunan tek nükleonun, Kratzer potansiyeline sahip γ-kararsız çift-çift kor ile çiftlendiğini kabul edelim. Potansiyelin derinliği D ve minimumu β_0 olmak üzere Kratzer potansiyeli $u_K = -2D\left(\frac{\beta_0}{\beta} - \frac{\beta_0^2}{2\beta^2}\right)$ şeklinde tanımlanır (Fortunato and Vitturi 2003). Bu sistem için Hamiltoniyen, Denk.(11)'de verildiği gibi kor ve etkileşim terimlerinin toplamı şeklindedir. Daha önce değinildiği gibi açısal kısımların çözümleri, çift-çift sistemlerinki ile aynıdır. Radyal kısım ise

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + \frac{2B}{\hbar^2}\kappa\, g(\beta) 2\left\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\right\rangle - 2D\left(\frac{\beta_0}{\beta} - \frac{\beta_0^2}{2\beta^2}\right)\right] f(\beta) = \varepsilon\, f(\beta) \qquad (44)$$

Burada etkileşim gücü $g(\beta)$'nın sabit veya değişken olmasına göre iki durum karşımıza çıkar.

3.2.1 g(β) sabit ise:

$g(\beta)$ sabit ve $\hbar^2/2B$ alınır ve $\Lambda = \tau(\tau+3)$, $2\left\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\right\rangle = \tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4$ değerleri yerine konursa Denk(44),

$$f''(\beta) + \frac{4f'(\beta)}{\beta} + \left[\varepsilon - \kappa\left(\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\right) + \frac{2D\beta_0}{\beta} - \frac{\tau(\tau+3) + D\beta_0^2}{\beta^2}\right] f(\beta) = 0 \qquad (45)$$

formuna indirgenir. Bu denklemi daha basit şekle indirgemek için $f(\beta) = \beta^{-2}\chi(\beta)$, $E = -\varepsilon$, $\varepsilon' = E + \kappa(\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4)$, $\tau(\tau+3) + D\beta_0^2 + 9/4 = \mu^2$, $k = D\beta_0/\sqrt{\varepsilon'}$, $x = 2\sqrt{\varepsilon'}\beta$ dönüşümleri uygulanırsa

$$\chi''(x)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\left(1/4-\mu^2\right)}{x^2}\right]\chi(x)=0 \tag{46}$$

Bağlı durum yani negatif enerjiler için çözüm $M_{k,\mu}(x)$ Whittaker fonksiyonları ile verilir (Flügge 1994),

$$\chi_{k,\mu}(x)=N_{\tau,\tau_1}x^{(2\mu+1)/2}e^{-x/2}\,{}_1F_1(\mu+1/2-k,2\mu+1;x) \tag{47}$$

Enerji özdeğerleri, dalga fonksiyonunun sonlu olması koşulu dikkate alınarak bulunur. Öyle ki bu şartın sağlanması için Hypergeometrik fonksiyonun ilk terimi negatif tamsayı olmalıdır, yani $\mu+1/2-k=-\xi$. Böylece uyarılmış durumların enerjileri

$$E_{\xi,\tau,\tau_1}=\left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2+(\tau+3/2)^2}+\xi+1/2}\right)^2-\kappa\left[\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-\frac{7}{4}\right] \tag{48}$$

Sabit etkileşim gücü için bu ifade kullanılarak elde edilen enerji spektrumu Şekil 2-1'de, seçilen potansiyel parametreleri için verilmiştir.

Dalga fonksiyonlarının normalizasyon sabitleri N, $\int_0^\infty f(\beta)^2\beta^4 d\beta=1$ normalizasyon şartı kullanılarak bulunur. İlk üç band için normalizasyon sabitleri ilk defa analitik formda elde edilmiştir,

$$\begin{aligned}
N_{0,\tau}&=\frac{\left(\mathrm{E}_{0,\tau}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(\mu)}}\left(\frac{1}{\mu(2\mu+1)}\right)^{1/2}\\
N_{1,\tau}&=\frac{\left(\mathrm{E}_{1,\tau}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(2\mu)}}\left(\frac{2\mu+1}{\mu(2\mu+3)}\right)^{1/2}\\
N_{2,\tau}&=\frac{\left(\mathrm{E}_{2,\tau}\right)^{1/4}}{\sqrt{\Gamma(\mu)}}\left(\frac{(2\mu+1)(\mu+1)}{\mu(2\mu+5)}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{49}$$

Elektrik kuadrupol geçiş güçleri, Denk.(17)'de verilen elektrik kuadrupol operatörünün çift matris elemanı hesaplanarak elde edilir. Uyarılmış durumlar arası B(E2) değerleri, $\Delta\tau=\pm1$ için Şekil 3-3'te ve $\Delta\tau=0,\pm2$ için Tablo 3-5'te verilmiştir. Şekil 3-3'te verilen

geçişlere katkı, elektrik kuadrupol operatörünün ilk teriminden geldiği için B(E2) değerleri sadece t_1^2 ile orantılıdır ve en düşük kuantum sayılı iki durum arasındaki geçiş 1'e normalize edilmiştir. Tablo 3-5'te $\Delta\tau = 0,\pm 2$ geçişlerine katkı hem bozonik hem de fermiyoniktir. Dolayısıyla bu geçişler t_2 ve t_F ile orantılıdır. Fakat 0_- band içi $(9/2 \to 7/2)$ gibi bazı geçişlere fermiyonik katkı gelmemektedir. Böylece deneysel değerleri tahmin etmek için bu geçişler kullanılarak t_2 değeri kestirilebilir. Daha sonra diğer geçişler de dikkate alınarak t_F değerleri bulunur.

3.2.2. g(β) deformasyona bağlı ise

$g(\beta)$ deformasyona bağlı ve $\left(\hbar^2/2B\right)\left(1/\beta^2\right)$ alınabilir. Bu durumda Denk(44),

$$f''(\beta)+\frac{4f'(\beta)}{\beta}+\left[\varepsilon+\frac{2D\beta_0}{\beta}-\frac{\tau(\tau+3)+D\beta_0^2+\kappa\left(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\right)}{\beta^2}\right]f(\beta)=0 \qquad (50)$$

Benzer şekilde $f(\beta)=\beta^{-2}\chi(\beta)$,

$\tau(\tau+3)+D\beta_0^2+\kappa\left(\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\right)+9/4=\mu^2$, $E=-\varepsilon$, $k=D\beta_0/\sqrt{E}$ ve $x=2\sqrt{E}\beta$ dönüşümleri uygulanırsa,

$$\chi''(x)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\left(1/4-\mu^2\right)}{x^2}\right]\chi(x)=0 \qquad (51)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümleri, bağlı durumlar için, $M_{k,\mu}(x)$ Whittaker fonksiyonları (Flügge 1994) ile verilir

$$\chi_{k,\mu}(x)=N_{\tau,\tau_1}x^{(2\mu+1)/2}e^{-x/2}{}_1F_1(\mu+1/2-k,2\mu+1;x) \qquad (52)$$

Enerji özdeğerleri ise

$$E_{\xi,\tau,\tau_1} = \left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2 + (\tau+3/2)^2 + \kappa\left[\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - \frac{7}{4}\right]} + \xi + 1/2} \right)^2 \tag{53}$$

Deformasyona bağlı etkileşim gücü için, yukarıda verilen ifade kullanılarak elde edilen enerji spektrumu Şekil 3-4'te, seçilen potansiyel parametreleri için verilmiştir.

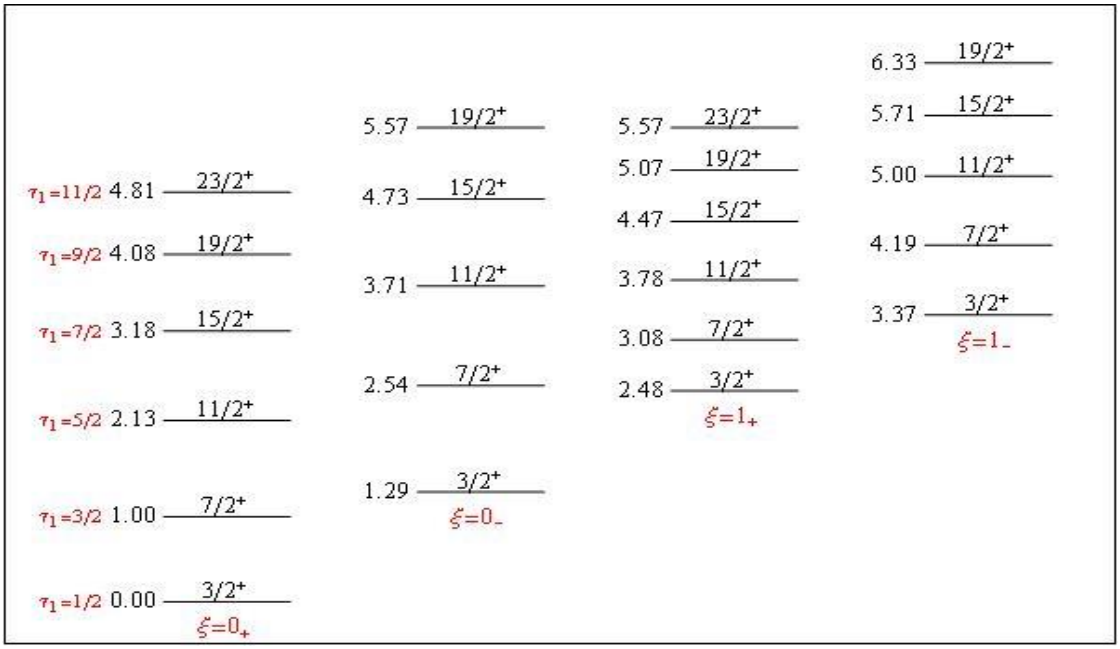
Etkileşim gücünün sabit veya değişken olarak alınmasının enerji spektrumu üzerine etkisinin çok fazla olmadığı Şekil 3-2 ve Şekil 3-4'ün karşılaştırılması ile görülebilir. Bu nedenle çalışmanın devamında etkileşim gücü sabit kabul edilecektir.

Elde edilen teorik sonuçların, deneysel çekirdeklere uygulanmasında bir noktanın daha dikkate alınması gerekir. Dikkat edilirse γ-kararsız yapıda uyarılmış durumlar dejeneredir, yani Tablo 2-3'ten görülebileceği gibi aynı τ_1 kuantum sayısına aynı enerjide farklı açısal momentum değerleri karşılık gelmektedir. Bu dejenerasyon, çekirdeklerin deneysel spektrumunda gözlenmez. Teorik olarak bu dejenerasyonu kırmak için Hamiltoniyene açısal momentum ile ilgili bir terim daha eklemek gerekir. Sabit etkileşim terimi kullanılarak Denk.(11)'de verilen Hamiltoniyene $\kappa' g(\beta)\hat{J}\cdot\hat{J}$ terimi eklenirse, Denk(48)'de verilen enerji özdeğer ifadesi şu şekilde değişir,

$$E_{\xi,\tau,\tau_{1,J}} = \left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2 + (\tau+3/2)^2} + \xi + 1/2} \right)^2 - \kappa\left[\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - \frac{7}{4}\right] - \kappa' J(J+1) \tag{54}$$

Hamiltoniyen parametrelerini belirlemek için, deneysel değerler ile teorik sonuçlar arasındaki farkın minimum olması gerekir. Bu farkı gösteren kalite faktörü Δ şu şekilde tanımlanmıştır,

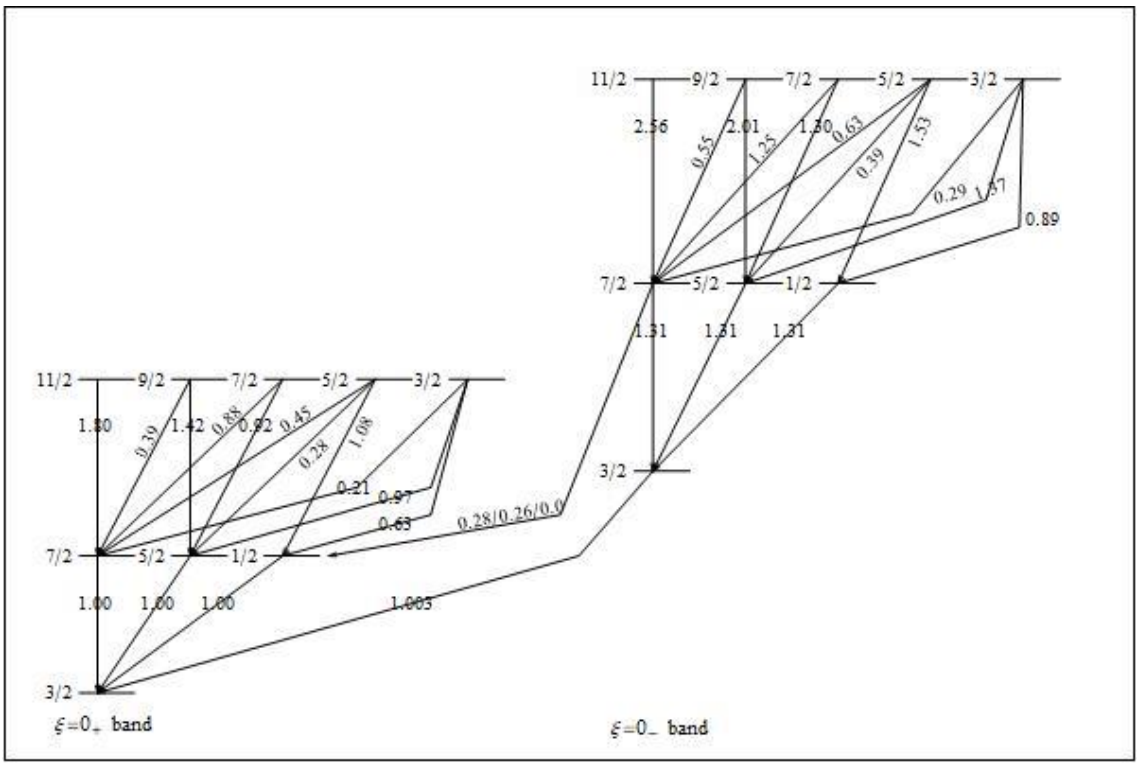
$$\Delta = \sum_i \frac{\left| \left(E_i^{teori} - E_i^{deney} \right) \right|}{E_i^{deney}} \tag{55}$$



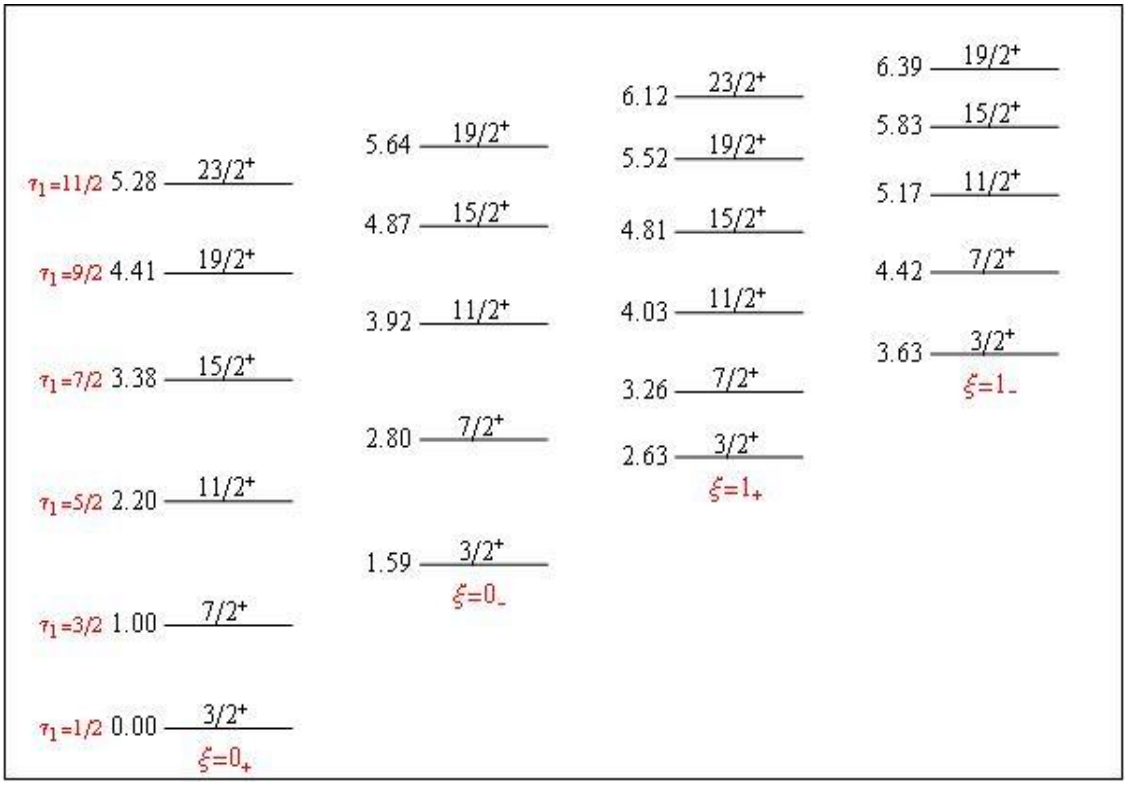
Şekil 3.2 Sabit etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Kratzer potansiyel parametreleri D=100 ve $\beta_0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. $\xi_{\pm}$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir. İlk $7/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. Bu spektrum $d_{3/2}$ tek-parçacık yörüngesinde bulunan tek nükleonun çiftlenimine karşılık gelir.

Elde edilen teorik sonuçların, çekirdeklerin deneysel verilerini elde etmedeki başarısı sınanmıştır. Bu amaçla, taban durum spinleri 3/2 olan ${}^{119-123}_{48}Cd$, ${}^{129-131}_{52}Te$, ${}^{133}_{54}Xe$, ${}^{135-137}_{56}Ba$, ${}^{139}_{58}Ce$, ${}^{155-163}_{65}Tb$ ve ${}^{187-195}_{77}Ir$ izotopları seçilmiştir. Bu izotopların deneysel spektrumu fit edilirken her duruma karşılık gelen en yüksek açısal momentumlu durumun enerjisi dikkate alınmıştır. Çünkü diğer durumların hangi kuantum sayılı duruma karşılık geldiğini kestirmede zorluklar vardır. Örneğin deneysel ikinci $J = 3/2$ durumu $(\tau, \tau_1) = (2,5/2)$ kuantum sayılarıyla mı yoksa $(\tau, \tau_1) = (1,1/2)$ kuantum sayıları ile mi elde edileceği açık değildir. Çünkü κ ve κ' parametreleri, bu düzeylerin birbirine göre bağıl düzenlenmesini belirler. Denk(54), kullanılarak elde edilen Hamiltoniyen parametreleri Tablo 3-1'de artan kütle numarasına göre verilmiştir. Tablo 3-2 ve Tablo

3-3'te ise elde edilen sonuçlar deneysel verilerle karşılaştırılmıştır. Tablo 3-4. bu çekirdeklere ait deneysel elektrik kuadrupol geçiş güçlerini göstermektedir.



Şekil 3.3 $t_1\alpha$ operatörünün neden olduğu B(E2) geçiş güçleri. $\kappa=-1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $D=100$, $\beta_0=0.5$ Kratzer potansiyel parametreleri kullanılmıştır. İlk uyarılmış durumdan taban duruma geçiş $B\left(E2;7/2_1^+ \rightarrow 3/2_1^+\right)$ değeri 1'e normalize edilmiştir. Kesin değerleri bulmak için tüm geçiş güçleri $0{,}385094t_1^2$ ile çarpılmalıdır.



Şekil 3.4 Deformasyona bağlı etkileşim gücü $(\kappa = -1/2)$ için Kratzer potansiyel parametreleri $D = 100$ ve $\beta_0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. $\xi_{\pm}$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir. İlk $7/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir.

Tablo 3.5 $t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^{+}_{3/2}\times\tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinin neden olduğu $\Delta\tau=0,\pm2$ durumları arası bazı B(E2) geçiş güçleri. $\kappa=-1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $D=100$, $\beta_0=0.5$ Kratzer potansiyel parametreleri kullanılmıştır.

ξ	τ_1	J	ξ'	τ_1'	J'	B(E2)
0_+	$3/2$	$7/2$	0_+	$3/2$	$5/2$	$\left(-0.113t_2-0.717t_F\right)^2$
0_+	$3/2$	$5/2$	0_+	$3/2$	$1/2$	$\left(+0.062\,t_2-0.592\,t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$11/2$	0_+	$5/2$	$9/2$	$\left(-0.120t_2-0.725t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$11/2$	0_+	$5/2$	$7/2$	$\left(-0.105t_2-0.375t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$9/2$	0_+	$5/2$	$7/2$	$\left(-0.093t_2-0.174t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$9/2$	0_+	$5/2$	$5/2$	$\left(-0.096t_2-0.957t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$7/2$	0_+	$5/2$	$5/2$	$\left(+0.046t_2-1.192t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$7/2$	0_+	$5/2$	$3/2$	$\left(-0.047\,t_2-0.429\,t_F\right)^2$
0_+	$5/2$	$5/2$	0_+	$5/2$	$3/2$	$\left(+0.086t_2-0.313t_F\right)^2$
0_-	$3/2$	$7/2$	0_-	$3/2$	$5/2$	$\left(-0.162t_2-0.005t_F\right)^2$
0_-	$3/2$	$5/2$	0_-	$3/2$	$1/2$	$\left(+0.089\,t_2+0.000\,t_F\right)^2$
0_-	$5/2$	$11/2$	0_-	$5/2$	$9/2$	$\left(-0.183t_2-0.020t_F\right)^2$
0_-	$5/2$	$11/2$	0_-	$5/2$	$7/2$	$\left(-0.161t_2+0.000t_F\right)^2$
0_-	$5/2$	$9/2$	0_-	$5/2$	$7/2$	$\left(-0.143t_2+0.000t_F\right)^2$
0_-	$5/2$	$9/2$	0_-	$5/2$	$5/2$	$\left(-0.147\,t_2+0.000\,t_F\right)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$7/2$	$\left(+0.068t_2-0.633t_F\right)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$5/2$	$\left(+0.147\,t_2+0.548\,t_F\right)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$1/2$	$\left(-0.118t_2+0.316t_F\right)^2$

3.3. Çoklu j Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Kratzer Potansiyeli

$j = 1/2, 3/2, 5/2$ tek-parçacık yörüngelerinde bulunabilecek tek nükleonun, Kratzer potansiyeli ile anlatılan kor'a çiftlenmesi durumunda Hamiltoniyen, Denk.(23) ile verilir. Burada Kratzer potansiyeli kullanılırsa, sabit etkileşim gücü için Hamiltoniyenin radyal kısmı

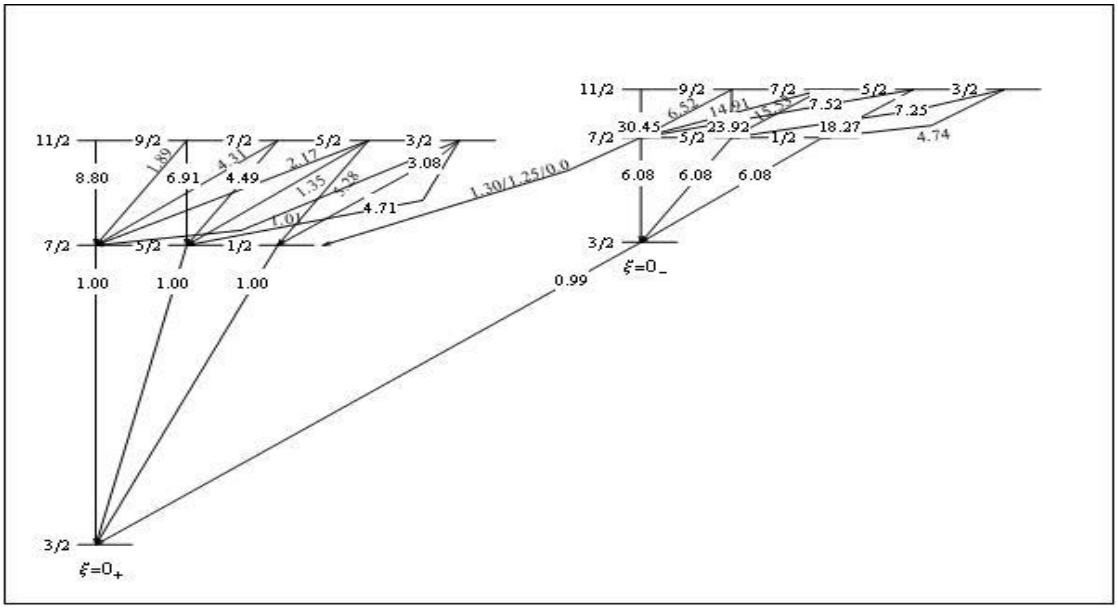
$$\chi''(x) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\left(1/4 - \mu^2\right)}{x^2} \right] \chi(x) = 0 \tag{56}$$

ile verilir. Burada $f(\beta) = \beta^{-2}\chi(\beta)$, $E = -\varepsilon$, $\tau(\tau+3) + D\beta_0^2 + 9/4 = \mu^2$, $k = D\beta_0 / \sqrt{\varepsilon'}$,

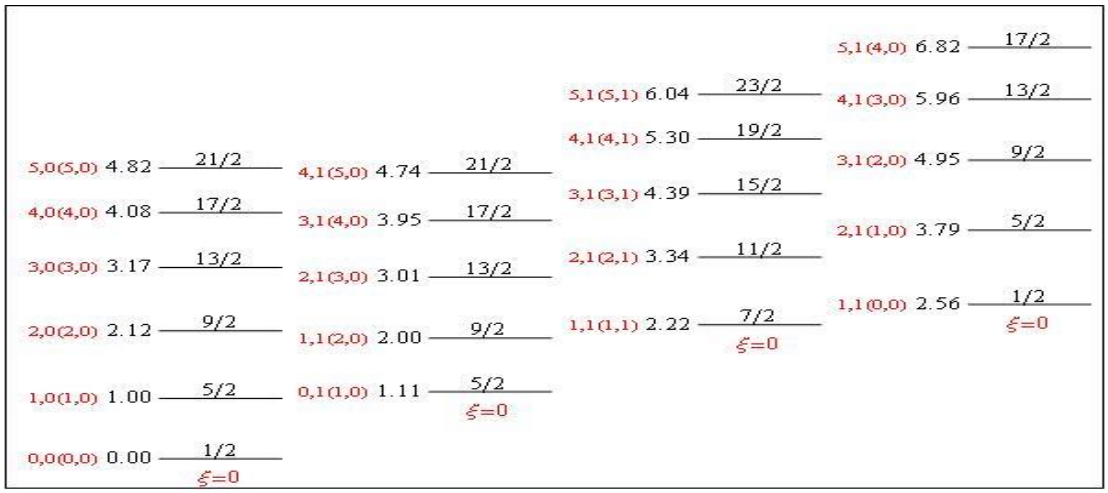
$\varepsilon' = E + \kappa(\tau_1(\tau_1+3) + \tau_2(\tau_2+1) - \tau(\tau+3) - \tau_F(\tau_F+3) + \kappa'\tau_F(\tau_F+3))$, $x = 2\sqrt{\varepsilon'}\beta$ dönüşümleri uygulanmıştır. Bağlı durumlar için çözüm $M_{k,\mu}(x)$ Whittaker fonksiyonları ile verilir,

$$\chi_{k,\mu}(x) = N_{\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2} x^{(2\mu+1)/2} e^{-x/2} {}_1F_1(\mu + 1/2 - k, 2\mu + 1; x) \tag{57}$$

Enerji özdeğerleri yine, dalga fonksiyonunun sonlu olması koşulu dikkate alınarak bulunur



Şekil 3.5 $t_1\alpha$ operatörünün neden olduğu B(E2) geçiş güçleri. $\kappa = -1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $A = 100$ Coulomb potansiyel parametresi kullanılmıştır. İlk uyarılmış durumdan taban duruma geçiş $B\left(E2; 7/2_1^+ \rightarrow 3/2_1^+\right)$ değeri 1'e normalize edilmiştir. Kesin değerleri bulmak için tüm geçiş güçleri $0.0027042t_1^2$ ile çarpılmalıdır.



Şekil 3.6 Sabit etkileşim gücü ile Kratzer potansiyel parametreleri $D = 100$ ve $\beta_0 = 0.5$ kullanılarak elde edilen uyarılma enerji spektrumu. Burada $\kappa = -1/2, \kappa' = 5/2$ kullanılmıştır. İlk $5/2^+$ durumunun enerjisi 1'e normalize edilmiştir.

Tablo 3.6 $t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2}\times\tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinin neden olduğu $\Delta\tau=0,\pm2$ durumları arası bazı B(E2) geçiş güçleri. $\kappa=-1/2$ olmak üzere sabit etkileşim terimi ve $A=100$ Coulomb potansiyel parametresi kullanılmıştır.

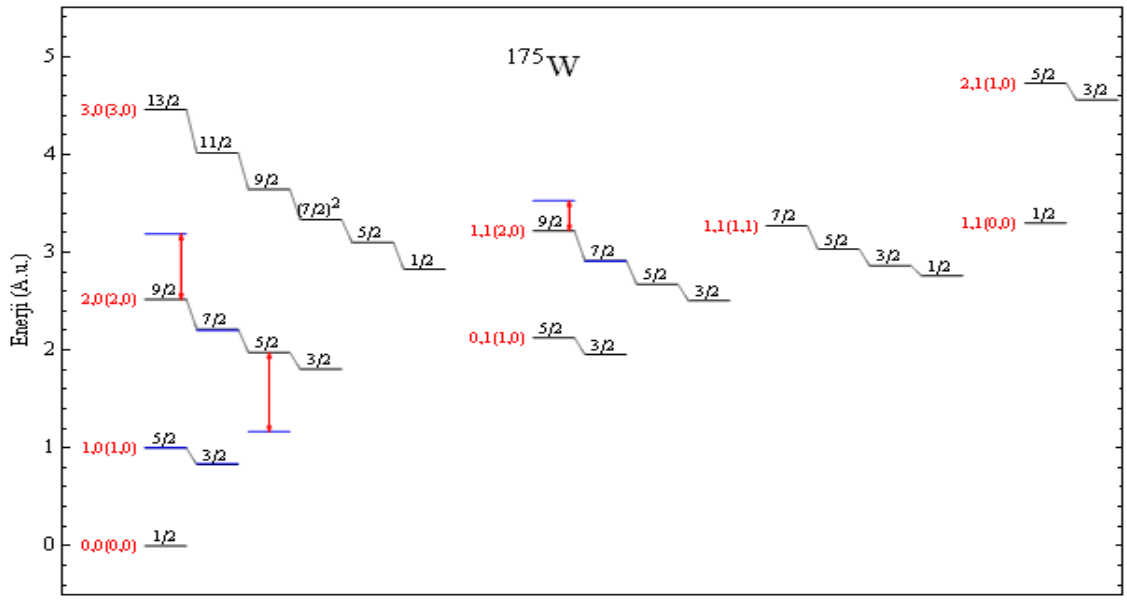
ξ	τ_1	J	ξ'	τ_1'	J'	B(E2)
0_+	$3/2$	$7/2$	0_+	$3/2$	$5/2$	$(-0.027t_2-0.717t_F)^2$
0_+	$3/2$	$5/2$	0_+	$3/2$	$1/2$	$(+0.015t_2-0.592t_F)^2$
0_+	$5/2$	$11/2$	0_+	$5/2$	$9/2$	$(-0.063t_2-0.725t_F)^2$
0_+	$5/2$	$11/2$	0_+	$5/2$	$7/2$	$(-0.055t_2-0.375t_F)^2$
0_+	$5/2$	$9/2$	0_+	$5/2$	$7/2$	$(-0.049t_2-0.174t_F)^2$
0_+	$5/2$	$9/2$	0_+	$5/2$	$5/2$	$(-0.050t_2-0.957t_F)^2$
0_+	$5/2$	$7/2$	0_+	$5/2$	$5/2$	$(+0.024t_2-1.192t_F)^2$
0_+	$5/2$	$7/2$	0_+	$5/2$	$3/2$	$(-0.025t_2-0.429t_F)^2$
0_+	$5/2$	$5/2$	0_+	$5/2$	$3/2$	$(+0.045t_2-0.313t_F)^2$
0_-	$3/2$	$7/2$	0_-	$3/2$	$5/2$	$(-0.082t_2-0.005t_F)^2$
0_-	$3/2$	$5/2$	0_-	$3/2$	$1/2$	$(+0.045t_2+0.000t_F)^2$
0_-	$5/2$	$11/2$	0_-	$5/2$	$9/2$	$(-0.154t_2-0.020t_F)^2$
0_-	$5/2$	$11/2$	0_-	$5/2$	$7/2$	$(-0.135t_2+0.000t_F)^2$
0_-	$5/2$	$9/2$	0_-	$5/2$	$7/2$	$(-0.120t_2+0.000t_F)^2$
0_-	$5/2$	$9/2$	0_-	$5/2$	$5/2$	$(-0.123t_2+0.000t_F)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$7/2$	$(+0.016t_2-0.633t_F)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$5/2$	$(+0.034t_2+0.548t_F)^2$
0_-	$1/2$	$3/2$	0_+	$3/2$	$1/2$	$(-0.028t_2+0.316t_F)^2$

$$E_{\xi,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2} = \left(\frac{D\beta_0}{\sqrt{D\beta_0^2 + (\tau+3/2)^2} + \xi + 1/2} \right)^2 \qquad (58)$$
$$-\kappa\left[\tau_1(\tau_1+3)+\tau_2(\tau_2+1)-\tau(\tau+3)-\tau_F(\tau_F+3)\right]-\kappa'\tau_F(\tau_F+3)$$

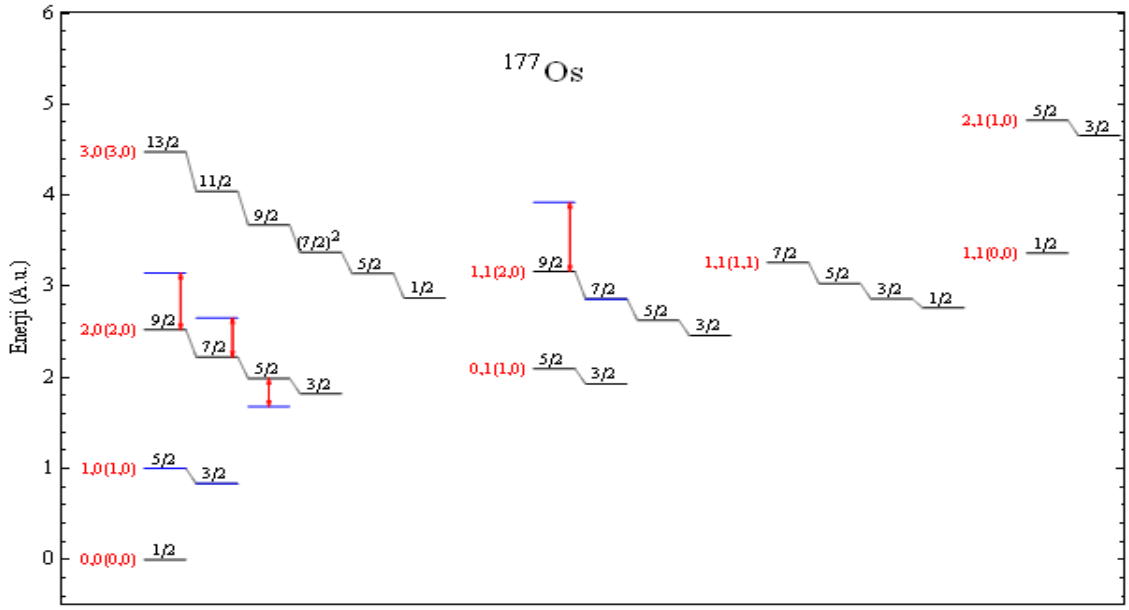
Sabit etkileşim gücü için bu ifade kullanılarak elde edilen enerji spektrumu Şekil 3-6'da, seçilen potansiyel parametreleri için verilmiştir. Uyarılmış durumlar arası elektrik kuadrupol geçiş oranları, kor ve fermiyon katkıları Denk.(26) ve Denk.(27) kullanılarak hesaplanır. Sabit etkileşim gücü ve Kratzer potansiyelinin Kollektif Bohr Hamiltoniyeninde kullanılmasıyla elde edilen enerji özfonksiyon ve özdeğerleri Denk.(57) ve Denk.(58)'de verilmiştir. Bu denklemler kullanılarak, incelenen çekirdeklerin spektrumları Şekil 3-8' Şekil 3-15'te, deneysel verilerle kıyaslamalı olarak verilmiştir. İzotoplara ait elde edilen serbest parametreler ise Tablo 3-7'de gösterilmiştir.

Tablo 3.7 Çoklu-j modeline göre incelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi üreten serbest parametreler.

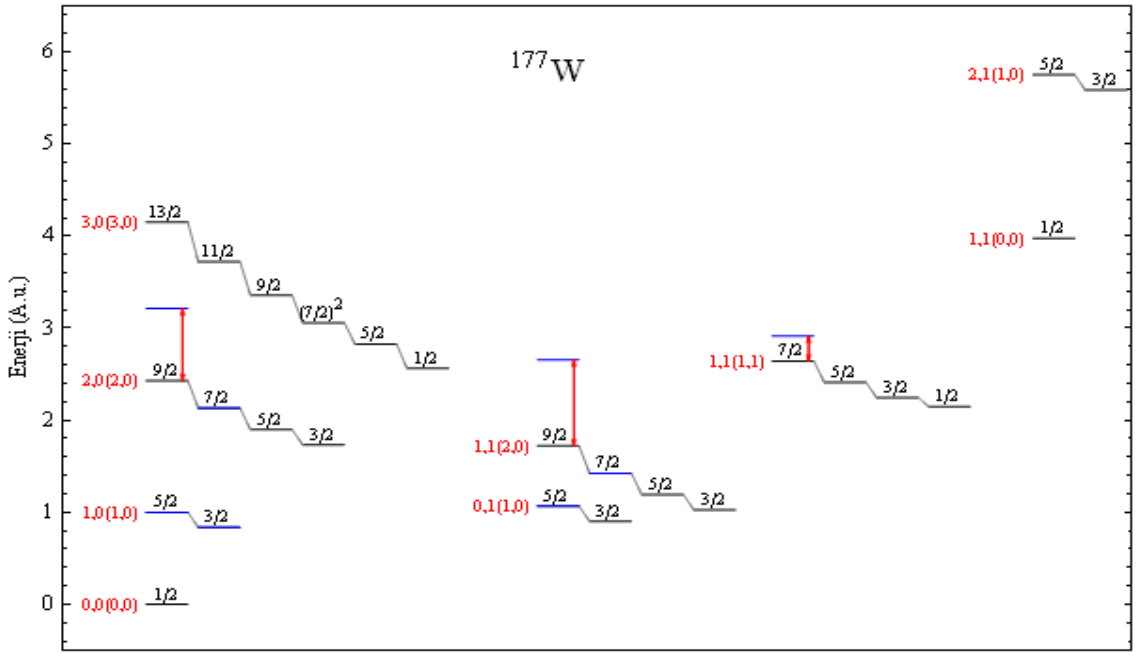
İzotop	t	D	β_0	κ	κ'	κ''	$\Delta\times10^2$
^{175}W	5	60	1.14	-0.29	1.50	0.11	6.32
^{177}W	7	60	0.81	-1.66	1.09	0.18	9.26
^{183}W	5	60	1.46	-0.77	2.30	0.30	8.09
^{177}Os	6	60	1.19	-0.30	1.37	0.10	12.32
^{179}Os	8	60	1.35	-0.85	0.54	0.10	9.02
^{185}Os	7	60	1.20	-1.08	2.00	0.30	25.73
^{179}Pt	5	60	1.29	-0.26	1.15	0.10	9.90
^{181}Pt	6	60	1.12	-0.26	1.35	0.10	2.96
^{181}Hf	6	60	1.40	-0.83	2.50	0.33	10.11



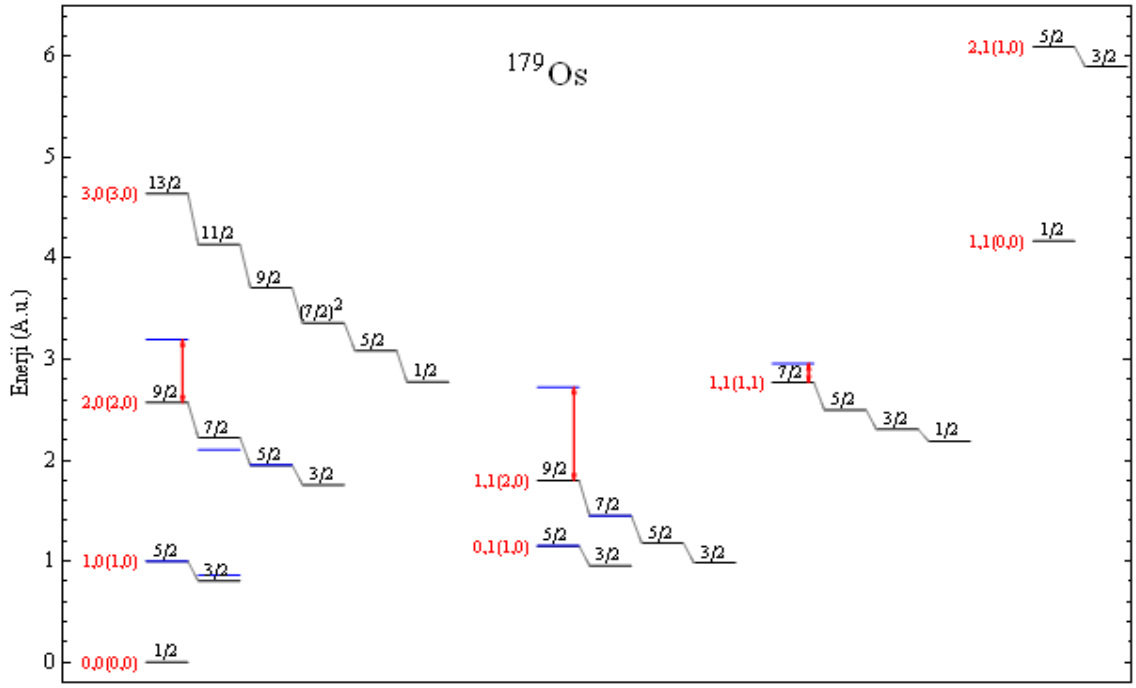
Şekil 3.7 ^{175}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Basunia 2004) ve teorik (siyah) spektrumu.



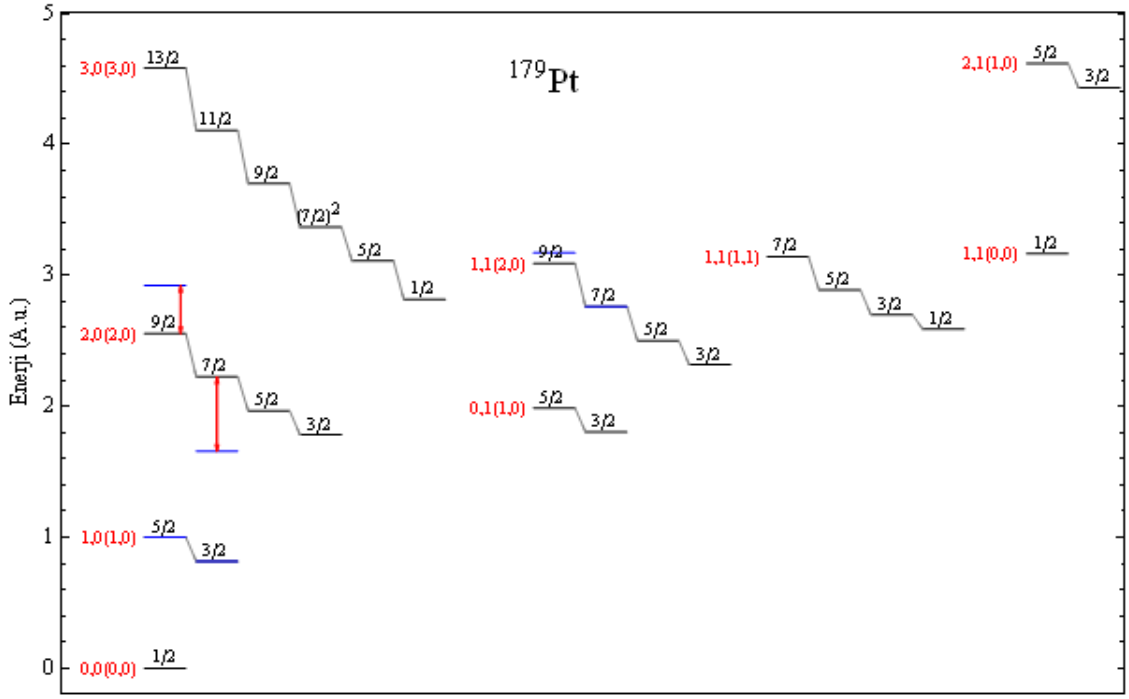
Şekil 3.8 ^{177}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.



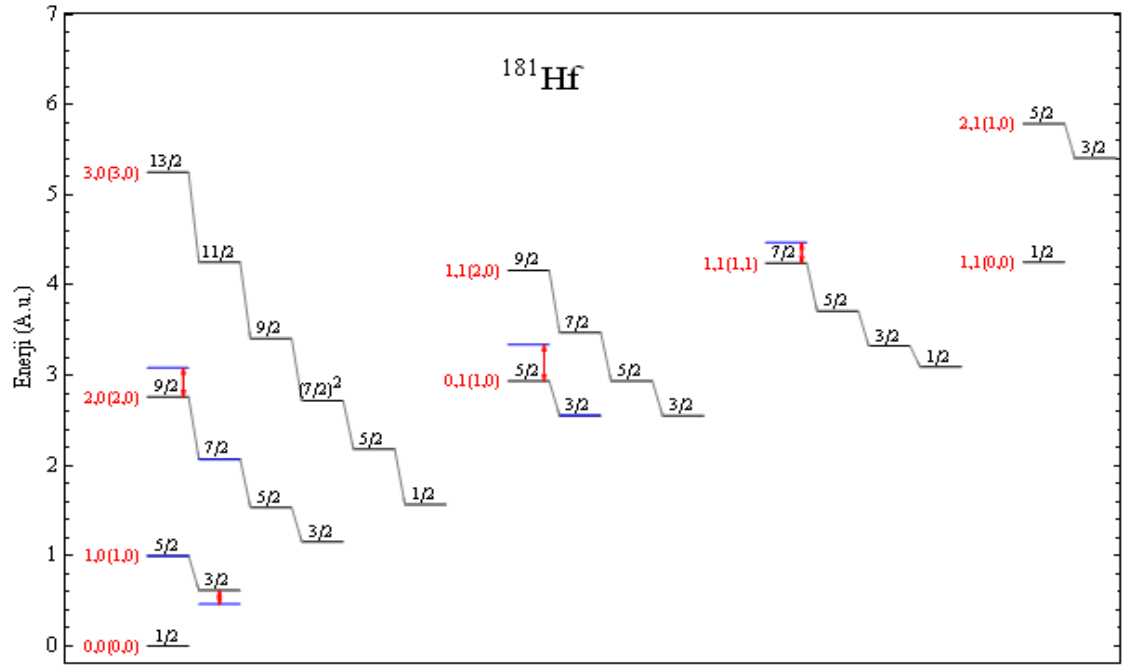
Şekil 3.9 ^{177}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.



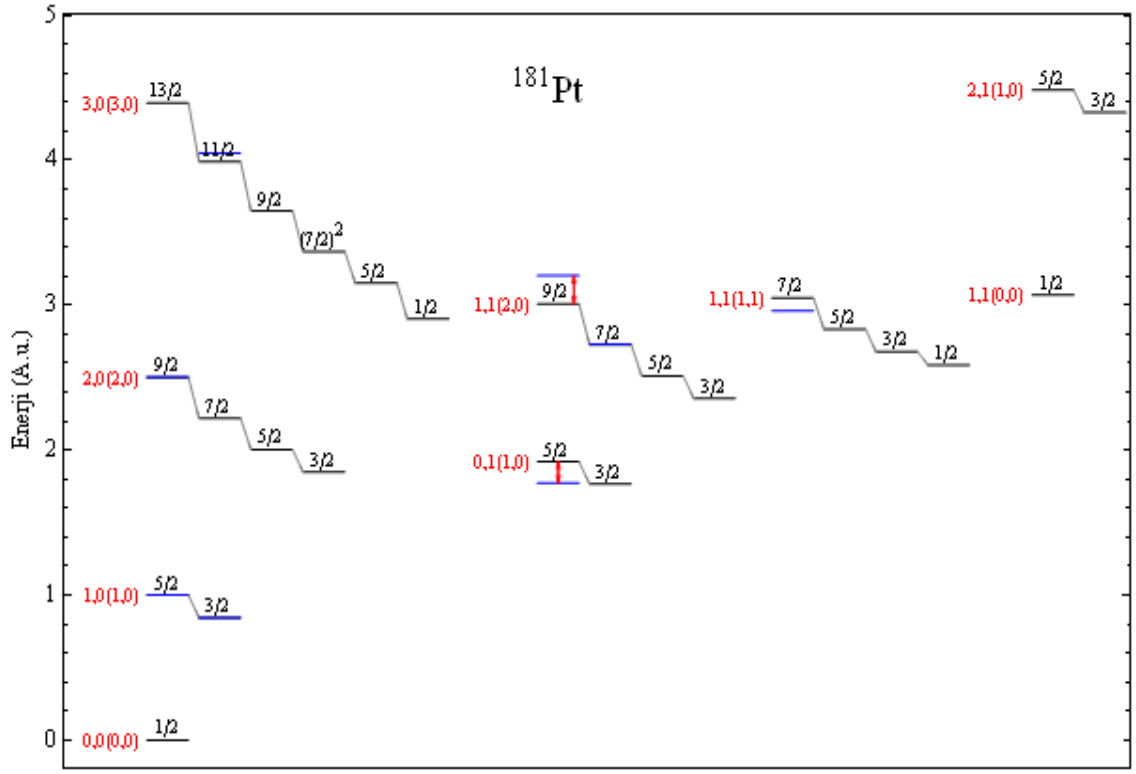
Şekil 3.10 ^{179}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.



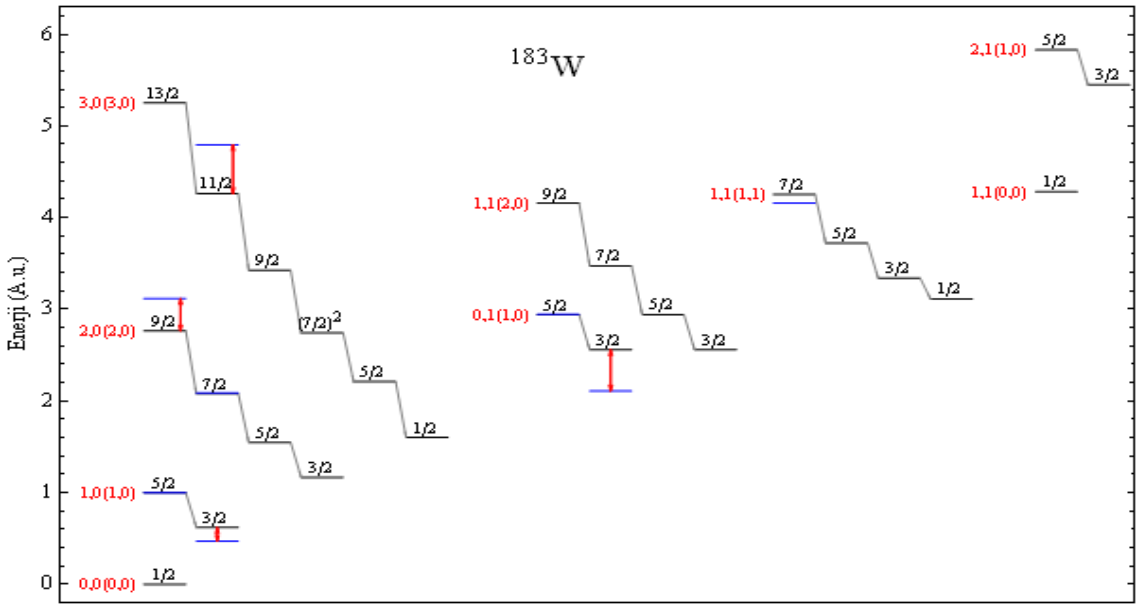
Şekil 3.11 ^{179}Pt'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.



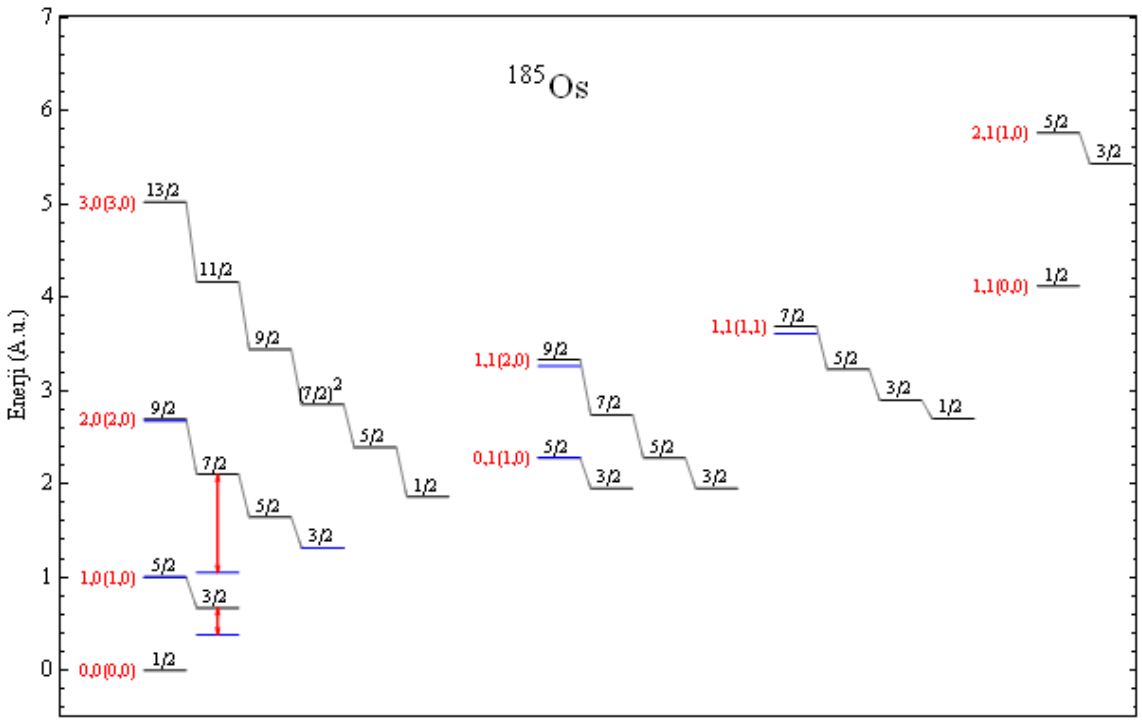
Şekil 3.12 ^{181}Hf'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.13 ^{181}Pt'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a)ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.14 ^{183}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2016) ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.15 ^{185}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005b) ve teorik (siyah) spektrumu.

Şekillerden görülebileceği gibi taban durum spini 1/2 olan çekirdeklerin deneysel verileri oldukça azdır. Bununla birlikte bu çekirdeklerin elektrik kuadrupol geçişlerine ait deneysel veri bulunmamaktadır. Bu nedenle kıyaslama yapılamamıştır.

Aşağıda E(5/12) modeli için B(E2) değerlerini hesaplayan örnek kod verilmiştir. Bu kod, genişliği 1 birim olan sonsuz kare kuyu potansiyeli için yazılmıştır ve ref.(Alonso et al. 2007)'ta verilen Fig.(5-6) sonuçlarını elde etmektedir.

3.4 j=3/2 Tek Parçacığın Çift Kor'a çiftlenimi: Davidson Potansiyeli

$j = 3/2$ yörüngesinde hareket eden tek bir nükleonun, çiftlenmiş nükleonlardan oluşan kor'a çiftlenmesiyle elde edilen tek-çift sistem için Hamiltoniyen (Iachello 2005),

İle verilir. Buradaki ilk terim çift-çift kor'u temsil eden bozon Hamiltoniyenidir. İkinci terim tek fermiyonun durumunu anlatan ve sabit olduğu için sıfır alınabilen Hamiltoniyendir. Son terim ise kor ile fermiyon arasındaki çiftlenim etkisidir ve 5-boyutta spin-yörünge etkileşimi $\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}$ ile tanımlanır (Caprio 2007). Bozon terimi,

$$H_B=-\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}k\right)}\right]+V(\beta,\gamma) \tag{60}$$

İkinci-mertebe faz geçişinin gözlendiği γ-kararsız bölgede potansiyelin yalnızca deformasyona bağlı olduğu (Iachello 2000) ve böylece Hamiltoniyenin açısal kısmının sabit bir katkı getirdiği bir önceki bölümde detaylıca açıklanmıştır. Sistemi anlatan dalga denkleminin radyal ve açısal bileşenlerin çarpımı şeklinde verilir,

$$\psi(\beta,\gamma,\theta_i,\eta)=f(\beta)\Phi(\gamma,\theta_i,\eta) \tag{61}$$

Açısal kısım (Iachello 2005), Denk.(12) ile verilmiştir,

$$\Phi=\sum_{\substack{L,M_L\\m_j}}\left\langle\begin{matrix}(\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ L & \frac{3}{2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\left(\tau_1,\frac{1}{2}\right)\\ J\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}L & \frac{3}{2}\\ M_L & m_j\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J\\ M_J\end{matrix}\right\rangle\Phi_{\tau,\nu_\Delta,L,M_L}(\gamma,\theta_i)\chi_{3/2,m_j}(\eta) \tag{62}$$

Radyal dalga fonksiyonu $f(\beta)$, sistemin potansiyeline bağlı olarak aşağıda verilen denklemin çözümünden elde edilir.

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{4}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\Lambda}{\beta^2}+\frac{2B}{\hbar^2}\kappa g(\beta)2\left\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\right\rangle+u(\beta)\right]f(\beta)=\varepsilon f(\beta) \tag{63}$$

Potansiyelin minimum olduğu nokta β_0 olmak üzere Davidson potansiyeli (Davidson 1932),

$$u_D(\beta)=\beta^2+\beta_0^4/\beta^2 \tag{64}$$

ile 5-boyutta açısal momentum operatörünün matris elemanı $\Lambda=\tau(\tau+3)$ ve spin-yörünge etkileşimi matris elemanı $2\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\rangle=\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4$ ifadeleri kullanılırsa radyal kısım,

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon-\frac{\tau(\tau+3)+\beta_0^4}{\beta^2}-k\frac{2B}{\hbar^2}g(\beta)2\langle\hat{\Lambda}\circ\hat{\Sigma}\rangle-\beta^2\right]f(\beta)=0 \tag{65}$$

3.4.1. g(β) Sabit ise

Çift-çift kor ile tek nükleon arasındaki etkileşim deformasyondan bağımsız $g(\beta)=\hbar^2/2B$ olarak kabul edilirse etkileşim terimi indirgenmiş enerjiye bir katkı getirir,

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon-\frac{\tau(\tau+3)+\beta_0^4}{\beta^2}-k\{\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\}-\beta^2\right]f(\beta)=0 \tag{66}$$

burada $\tau(\tau+3)+\beta_0^4=p(p+3)$ ve $\varepsilon-k\{\tau_1(\tau_1+3)-\tau(\tau+3)-7/4\}=\varepsilon'$ tanımları kullanılırsa,

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon'-\frac{p(p+3)}{\beta^2}-\beta^2\right]f(\beta)=0 \tag{67}$$

Bu denklem, herhangi bir yaklaşıma gerek duymadan direkt olarak çözülebilir. $p=-3/2+\sqrt{\tau(\tau+3)+\beta_0^4+9/4}$ olmak üzere özfonksiyonlar Laguerre polinomları ve Γ -fonksiyonları cinsinden verilir,

$$f_{n,\tau}(\beta)=\left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2}\beta^p e^{-\beta^2/2}L_n^{p+3/2}\left(\beta^2\right) \tag{68}$$

Enerji özdeğeri ise

$$\varepsilon^{S}_{n,\tau,\tau_1} = 2n + p + 5/2 + k\left(\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\right) \tag{69}$$

Etkileşimin deformasyondan bağımsız alınması dalga fonksiyonuna katkı getirmemekte yalnızca enerjiye ek terim getirmektedir, yani $f(\beta)$ τ_1'den bağımsız olup bu kuantum sayısı enerjide ortaya çıkmaktadır.

3.4.2 g(β) Değişken ise

Etkileşim deformasyona bağlı ve $g(\beta) = \left(\hbar^2/2B\right)\beta^{-2}$ olarak kabul edilirse

$$f''(\beta) + \frac{4}{\beta} f'(\beta) + \left[\varepsilon - \frac{\tau(\tau+3) + \beta_0^4 + k\{\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\}}{\beta^2} - \beta^2\right] f(\beta) = 0 \tag{70}$$

bu defa $\tau(\tau+3) + \beta_0^4 + k\{\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\} = p(p+3)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$f''(\beta) + \frac{4}{\beta} f'(\beta) + \left[\varepsilon - \frac{p(p+3)}{\beta^2} - \beta^2\right] f(\beta) = 0 \tag{71}$$

Elde edilir. $p = -3/2 + \sqrt{\tau(\tau+3) + \beta_0^4 + 9/4 + k\{\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\}}$ olmak üzere enerji özdeğer ve özfonksiyonlar,

$$f_{n,\tau,\tau_1}(\beta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2} \beta^p e^{-\beta^2/2} L_n^{p+3/2}\left(\beta^2\right) \tag{72}$$

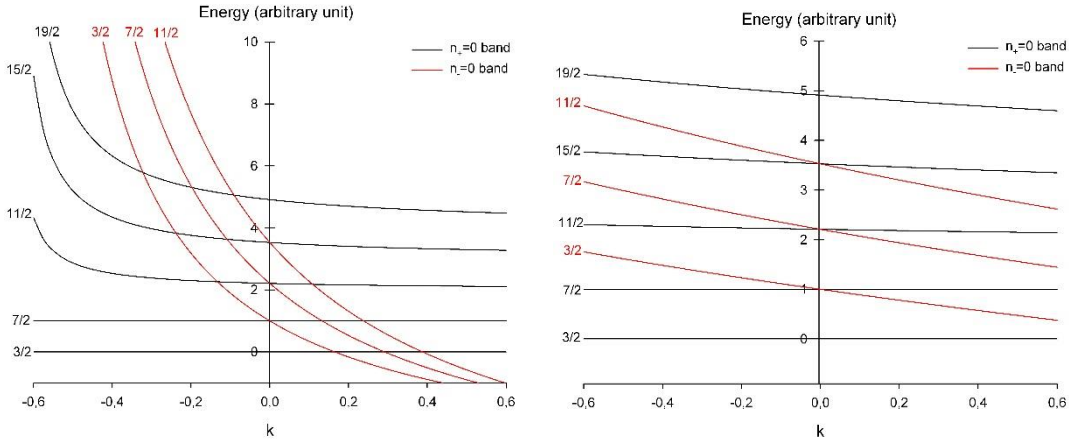
$$\varepsilon^{d}_{n,\tau,\tau_1} = 2n + p + 5/2 \tag{73}$$

Bu durumda enerji özfonksiyonları da τ_1 kuantum sayısına bağlıdır. Nükleon-kor etkileşiminin her iki durumu için elde edilen spektrumların etkileşim parametresi k'ya göre değişimleri incelenmiştir. Şekil 3-16'dan görüleceği gibi, sabit $g(\beta)$ için uyarılma enerji spektrumu k'ya çok kuvvetli olarak bağlıdır. Dahası belli bir k değerine

gelindiğinde enerjide ani artışlar görülmektedir. Bu davranış, normalize enerji ifadesi dikkate alınarak açıklanabilir,

$$N\varepsilon^{s}_{n,\tau,\tau_1} = \frac{E^{s}_{n,\tau,\tau_1} - E^{s}_{0,0,1/2}}{E^{s}_{0,1,3/2} - E^{s}_{0,0,1/2}} \tag{74}$$

Normalize enerjinin paydadaki ifadesi $k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9+4\beta_0^4} - \sqrt{25+4\beta_0^4}\right)$ değeri için sıfır'a gider, örneğin $\beta_0 = 1.5$ için $k \cong -0.659$ değerine karşılık gelir ki bu değer Şekil 3-16 (a)'da gözlenen ani artış noktası ile uyum içindedir. Benzer bir artış, değişken $g(\beta)$ durumu için de gözlenir fakat ani artışın gözlendiği nokta çok düşüktür, örneğin $\beta_0 = 1.5$ için $k \cong -4.0$ değerindedir.



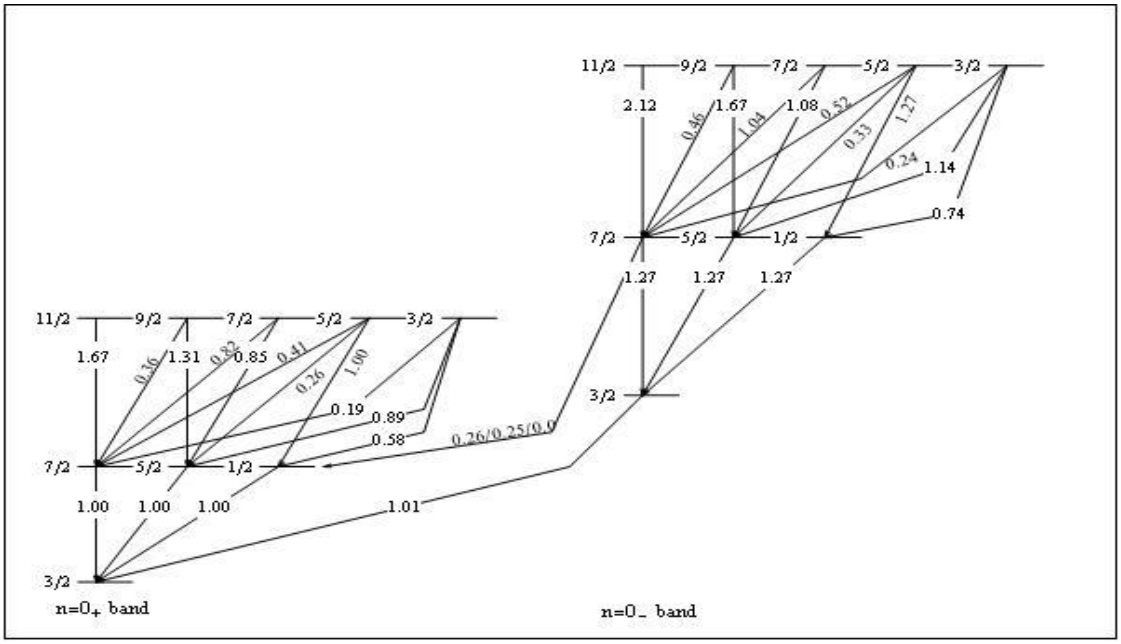
(a) (b)

Şekil 3.16 Etkileşimin (a) sabit ve (b) değişken alınmasıyla $\beta_0 = 1.15$ için Davidson potansiyelinden elde edilen uyarılma enerji spektrumunun etkileşim parametresine göre değişimi. Her iki durumda da ilk $7/2$ spinli durumun enerjisi 1'e normalize edilmiştir. $n_{\pm}$ sırasıyla $\tau_1 = \tau \pm 1/2$ bandlarına karşılık gelmektedir.

Bu nedenle Davidson potansiyeli ile tek-çift yapıları incelerken değişken $g(\beta)$ değeri kullanılmıştır. Hesaplanan bir diğer özellik ise uyarılmış durumlar arası elektrik kuadrupol geçiş güçleridir. Elektrik kuadrupol geçiş gücü, kuadrupol operatörü (Caprio 2007) $T^{(E2)} = t_1\alpha + t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)} + t'\left(a^{+}\times\tilde{a}\right)^{(2)}$,nin ilk ve son durumlar arası matris elemanı ile tanımlanır,

$$\left\langle n'\tau'\tau_1' J' \middle\| T_B^{(E2)} \middle\| n\tau\tau_1 J \right\rangle = \sum_{L,L'} \left\langle \begin{matrix}(\tau',0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left|\left(\tau_1',\frac{1}{2}\right)\right. \\ L' & \frac{3}{2} & \left. J' \right|\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}(\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left|\left(\tau_1,\frac{1}{2}\right)\right. \\ L & \frac{3}{2} & \left. J \right|\end{matrix} \right\rangle \times (-1)^{L'+J+7/2}\sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1}\begin{Bmatrix} L' & J' & 3/2 \\ J & L & 2 \end{Bmatrix}\left\langle n'\tau' L' \middle\| T_B^{(E2)} \middle\| n\tau L \right\rangle \tag{75}$$

$$\left\langle n'\tau'\tau_1' J' \middle\| T_F^{(E2)} \middle\| n\tau\tau_1 J \right\rangle = \sum_{L} \left\langle \begin{matrix}(\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left|\left(\tau_1',\frac{1}{2}\right)\right. \\ L & \frac{3}{2} & \left. J' \right|\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}(\tau,0) & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left|\left(\tau_1,\frac{1}{2}\right)\right. \\ L & \frac{3}{2} & \left. J \right|\end{matrix} \right\rangle \times (-1)^{L+J+7/2}\sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1}\begin{Bmatrix} 3/2 & J' & L \\ J & 3/2 & 2 \end{Bmatrix}\delta_{n'n}\,\delta_{\tau'\tau}\left\langle \frac{3}{2} \middle\| T_F^{(E2)} \middle\| \frac{3}{2} \right\rangle \tag{76}$$



Şekil 3.17 Değişken $g(\beta)$ için $t_1\alpha$ operatöründen kaynaklanan $B(E2)$ geçiş güçleri. Burada $k=-1/2$ ve Davidson potansiyeli minimumu $\beta_0 = 1.15$ alınmıştır.

$B(E2;7/2 \rightarrow 3/2)$ değeri 1'e normalize edilmiştir ve gerçek değerler $0.732895\, t_1^2$ ile çarpılarak bulunur.

Etkileşim gücü $g(\beta)$ değişken ve $k=-1/2$ alındığında dejenere durumda ve Davidson potansiyelinin minimumu $\beta_0 = 1.5$ için $t_1\alpha$ operatöründen kaynaklanan $B(E2)$ değerleri Şekil 3-17'de verilmiştir. Şekil oluşturulurken en düşük enerjili iki durum arasındaki geçiş $B(E2;7/2 \rightarrow 3/2)$ değeri 1'e normalize edilmiştir ve gerçek değerler $0.732895 t_1^2$ ile çarpılarak bulunur. $t_2(\alpha \times \alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2} \times \tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinden kaynaklanan $B(E2)$ geçiş güçleri ise Tablo 3-8'de verilmiştir. Burada Fermiyonik katkı, seçilen potansiyelden bağımsızdır.

Tablo 3.8 Değişken $g(\beta)$ için $t_2(\alpha \times \alpha)^{(2)}$ ve $t_F\left(a^+_{3/2} \times \tilde{a}_{3/2}\right)^{(2)}$ operatörlerinden kaynaklanan $B(E2)$ geçiş güçleri. Burada $k=-1/2$ ve Davidson potansiyeli minimumu $\beta_0 = 1.5$ alınmıştır.

n	τ_1	J	n	τ_1	J	*B(E2)*
0_+	3/2	7/2	0_+	3/2	5/2	$(-0.705\, t_2 - 0.717\, t_F)^2$
0_+	3/2	5/2	0_+	3/2	1/2	$(+0.388\, t_2 - 0.592\, t_F)^2$
0_+	5/2	11/2	0_+	5/2	9/2	$(-0.651\, t_2 - 0.725 t_F)^2$
0_+	5/2	11/2	0_+	5/2	7/2	$(-0.572\, t_2 - 0.375\, t_F)^2$
0_+	5/2	9/2	0_+	5/2	7/2	$(-0.508\, t_2 - 0.174\, t_F)^2$
0_+	5/2	9/2	0_+	5/2	5/2	$(-0.571\, t_2 - 0.957\, t_F)^2$
0_+	5/2	7/2	0_+	5/2	5/2	$(+0.252\, t_2 - 1.192\, t_F)^2$
0_+	5/2	7/2	0_+	5/2	3/2	$(-0.257\, t_2 - 0.429\, t_F)^2$
0_+	5/2	5/2	0_+	5/2	3/2	$(+0.468\, t_2 - 0.313\, t_F)^2$
0_-	3/2	7/2	0_-	3/2	5/2	$(-0.896\, t_2 - 0.005\, t_F)^2$
0_-	3/2	5/2	0_-	3/2	1/2	$(+0.493\, t_2 + 0.000\, t_F)^2$
0_-	5/2	11/2	0_-	5/2	9/2	$(-0.816\, t_2 - 0.020\, t_F)^2$
0_-	5/2	11/2	0_-	5/2	7/2	$(-0.718\, t_2 + 0.000\, t_F)^2$
0_-	5/2	9/2	0_-	5/2	7/2	$(-0.637\, t_2 + 0.000\, t_F)^2$
0_-	5/2	9/2	0_-	5/2	5/2	$(-0.654\, t_2 + 0.000\, t_F)^2$
0_-	1/2	3/2	0_+	3/2	7/2	$(+0.430\, t_2 - 0.633\, t_F)^2$
0_-	1/2	3/2	0_+	3/2	5/2	$(+0.931\, t_2 + 0.548\, t_F)^2$
0_-	1/2	3/2	0_+	3/2	1/2	$(+0.752\, t_2 + 0.316\, t_F)^2$

Oluşturulan bu model ile tek-çift çekirdeklerin deneysel spektrumlarını tahmin edebilmek için enerji seviyelerinin dejenerasyonunu ortadan kaldırmak gerekir. Bu ise açısal momentuma bağlı bir terimin Hamiltoniyene eklenmesi ile yapılabilir. Hem dejenerasyonu kıracak hem de γ-karasız yapıyı bozmayacak en uygun terim $k'g(\beta)J(J+1)$'dir. Bu ifade Denk.(71)'de eklendiğinde,

$p = -3/2 + \sqrt{\tau(\tau+3) + \beta_0^4 + 9/4 + k\{\tau_1(\tau_1+3) - \tau(\tau+3) - 7/4\} + k'J(J+1)}$ olmak üzere enerji özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi verilir

$$f_{n,\tau,\tau_1,J}(\beta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2} \beta^p e^{-\beta^2/2} L_n^{p+3/2}(\beta^2) \tag{77}$$

$$E^d_{n,\tau,\tau_1,J} = 2n + p + 5/2 \tag{78}$$

Davidson potansiyeli, Tablo 3-9'da verilen izotopların deneysel spektrumunu elde etmek için kullanılmıştır. Deney ile teorik sonuçların uyumu, t karşılaştırma yapılan enerji seviye sayısı olmak üzere Δ parametresi ile belirlenmiştir,

$$\Delta = \frac{1}{t}\sum_i^t \frac{\sqrt{\left(E_i^{th} - E_i^{ex}\right)^2}}{E_i^{ex}} \tag{79}$$

Tablo 3.9 İncelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi veren serbest parametreler.

İzotop	t	β_0	k	k'	$\Delta\times10^2$
^{129}Te	8	2.40	-0.39	0.29	10.66
^{131}Te	9	2.20	-0.69	0.35	10.41
^{135}Ba	8	1.60	-0.48	0.48	7.24
^{155}Tb	11	3.80	-1.14	0.67	6.98
^{157}Tb	15	4.38	-0.69	0.18	12.29
^{159}Tb	9	5.00	-0.69	0.12	18.36
^{187}Ir	13	1.72	-3.01	0.32	14.81
^{189}Ir	15	1.73	-2.66	0.40	14.80
^{191}Ir	21	2.10	-1.89	0.60	9.13
^{193}Ir	17	2.10	-1.52	0.60	11.06
^{195}Ir	8	0.69	-0.49	0.66	5.33

Tablo 3-9'da incelendiğinde deneysel verileri tahmin etmek için kullanılan enerji verisinin en fazla 21 ile ^{191}Ir izotopunda olduğu, buna karşın en az hata payına sahip olduğu görülmektedir. Elde edilen sonuçlar, daha iyi görülebilmesi açısında tablo olarak değil enerji spektrumu olarak deneysel verilerle karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Şekil 3-18 ve Şekil 3-28'de incelenen çekirdeklerin spektrumlarını göstermektedir. Bu şekillerde, en düşük enerjili iki band dikkate alınmıştır. Teorik sonuçlar siyah ile deneysel veriler ise mavi renkle gösterilmiştir. Seviyelere karşılık gelen kuantum sayısı τ_1, seviyelerin sol tarafında kırmızı ile verilmiştir ve açısal momentumlar ise her seviyenin üstüne yazılmıştır. Aynı τ_1'e karşılık gelen farklı açısal momentumlu durumlar, birbirlerine gri çizgi ile bağlanmıştır. Deneysel ve teori arasındaki yüksek farklar, çift yönlü kırmızı ok ile belirtilmiştir. Bu şekiller incelendiğinde ^{191}Ir ve ^{193}Ir izotopları için teorik sonuçların, deneysel verileri oldukça mükemmel bir biçimde tahmin ettiği görülmektedir (İnci ve Sonkaya 2018). Diğer yandan $A>150$ çekirdekleri için, $n=0_+$ bandında aynı τ_1 kuantum sayısına sahip durumların ikinci seviyesine ait teorik sonuçlar

deneysel verilerden oldukça yüksektir. Örneğin ^{159}Tb için $\tau_1 = 3/2, J = 5/2$; $\tau_1 = 5/2, J = 9/2$; $\tau_1 = 7/2, J = 13/2$; $\tau_1 = 9/2, J = 17/2$ gibi durumların teorik sonuçları, deneysel değerlerden oldukça düşüktür.

Dahası, Ir izotoplarının spektrumları incelendiğinde, bu ikinci durumun enerjilerinin bir sonraki üçüncü durumla dejenere olduğu görülmektedir. Yani deneysel olarak $\tau_1 = 3/2$ için $J = 5/2$ ile $J = 1/2$; $\tau_1 = 5/2$ için $J = 9/2$ ile $J = 7/2$; $\tau_1 = 7/2$ için $J = 13/2$ ile $J = 11/2$ durumları dejeneredir. Bu dejenerasyon ise yapının daha fazla simetriye sahip olduğunu gösterir.

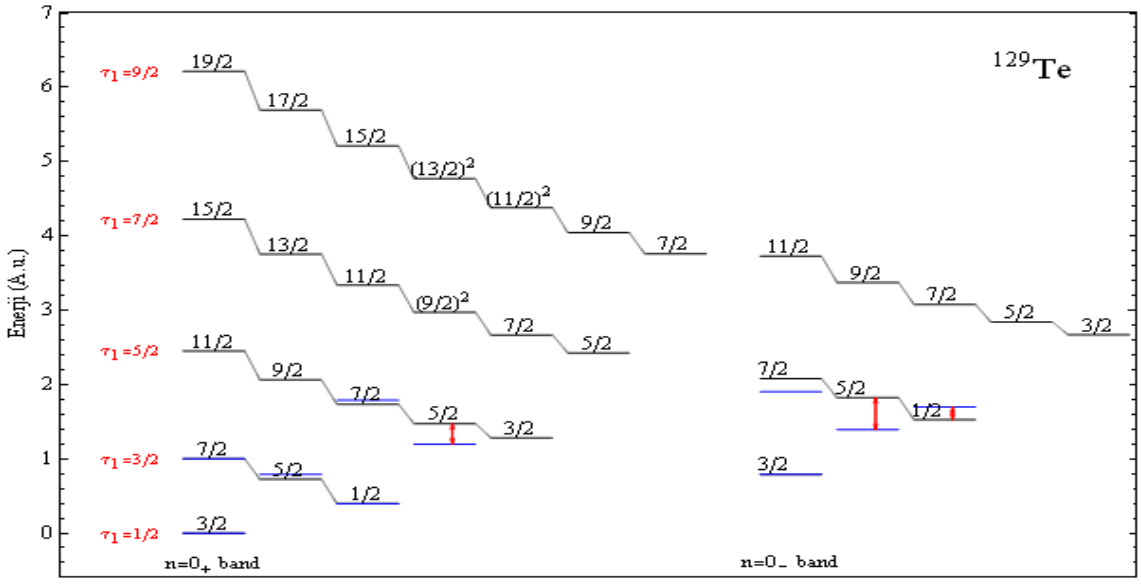
Tablo 3-9'da verilen parametre setleri kullanılarak uyarılmış durumlar arası B(E2) geçiş güçleri de incelenmiştir. Elektrik kuadrupol geçiş güçleri, Denk.(75,76)'dan görülebileceği gibi $\Delta\tau = 1$ olan durumlar arasında t_1, $\Delta\tau = 0,\pm 2$ geçişleri için t_2 ve t_F parametrelerine bağlıdır. $\Delta\tau = 0,\pm 2$ geçişlerine ait deneysel B(E2) verileri hemen hemen yoktur. $\Delta\tau = 1$ geçişleri için B(E2) verileri de az olmasına rağmen bulunabilir. Teorik sonuçları deneysel verilerle kıyaslamak için birim ve serbest parametrelerden kurtulmak gerekir. Bunun için en düşük enerji bandında ilk uyarılmış durumdan taban durum bandına geçiş baz alınabilir. Deneysel verilerin ve teorik sonuçların oluşturulmasında, $B(E2; 7/2 \rightarrow 3/2) = 1.0$ normalizasyonu uygulanmıştır. En düşük enerjili band için $\Delta\tau = 1$ band-içi B(E2) değerleri Tablo 3-10'da verilmiştir. Tablo incelendiğinde teorik sonuçların deneysel verilerle hemen hemen aynı mertebede olduğu görülür.

Tablo 3.10 Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau = 1$ B(E2) geçiş güçlerinin, literatürde bulunan deneysel verilerle (Reich 2005, Khazov 2006, Vanin 2007, Singh 2008, Reich 2012, Timar 2014, Nica 2016, Basunia 2017, Johnson 2017) karşılaştırılması.

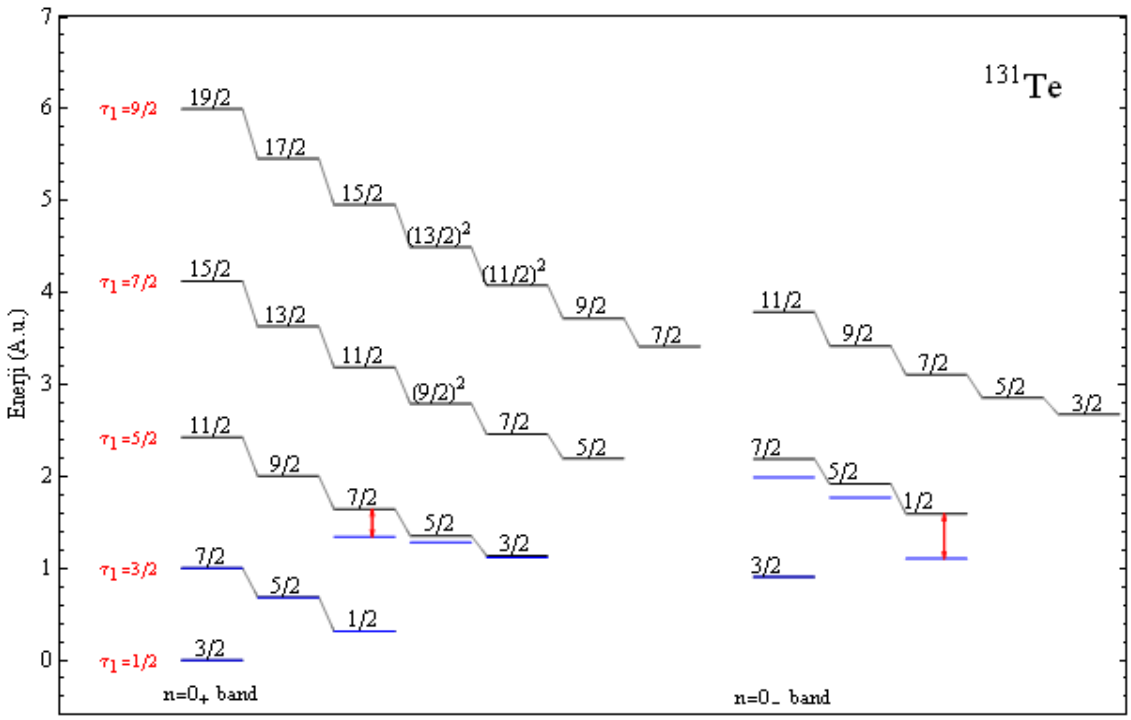
$B(E2; J_{\tau_1} \rightarrow J'_{\tau_1'})$	^{129}Te		^{131}Te		^{135}Ba	
	Den.	Teo.	Den.	Teo.	Den.	Teo.
$(7/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	-	1.000	-	1.000	1.00	1.000
$(5/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	-	0.994	-	0.993	1.42±0.10	1.000
$(1/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	-	0.986	-	0.980	0.23±0.02	0.975
$(11/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	1.551	-	1.591	-	1.821
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.331	-	0.340	-	0.394
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	1.193	-	1.211	-	1.330
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.752	-	0.771	-	0.893
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.771	-	0.783	-	0.869
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.377	-	0.385	-	0.442
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.230	-	0.234	-	0.259
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	-	0.886	-	0.887	-	0.920
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.173	-	0.177	-	0.200
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.802	-	0.812	-	0.895
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	-	0.515	-	0.516	-	0.537
	^{155}Tb		^{157}Tb		^{159}Tb	
	Den.	Teo.	Den.	Teo.	Den.	Teo.
$(7/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	1.00	1.000	-	1.000	1.00	1.000
$(5/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	3.14±0.46	0.996	-	0.999	2.57±0.19	1.000
$(1/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	-	0.991	-	0.999	-	0.999
$(11/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	1.468	-	1.441	2.07±0.13	1.435
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.313	-	0.309	0.83±0.12	0.307
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	1.141	-	1.130	-	1.127
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.713	-	0.705	-	0.702
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.738	-	0.733	-	0.731
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.358	-	0.355	-	0.354
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.221	-	0.220	-	0.219
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	-	0.858	-	0.861	-	0.860
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.165	-	0.164	-	0.164
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.770	-	0.769	-	0.768
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	-	0.499	-	0.502	-	0.501

Tablo 3.10 (Devamı).

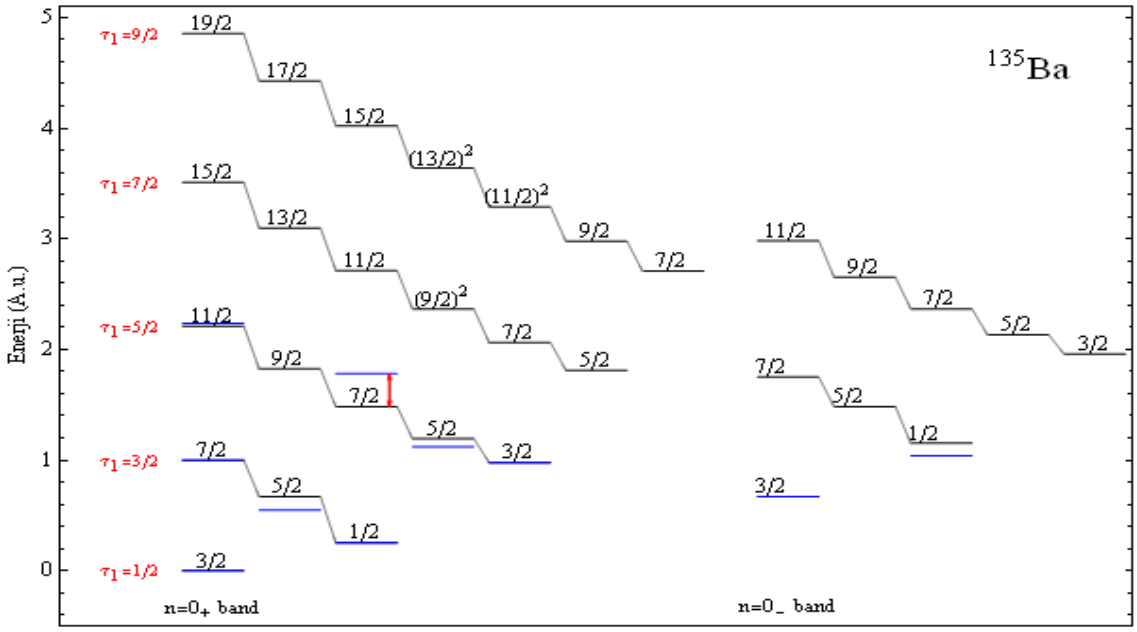
$B(E2; J_{\tau_1} \rightarrow J'_{\tau'_1})$	^{189}Ir		^{191}Ir		^{193}Ir	
	Den.	Teo.	Den.	Teo.	Den.	Teo.
$(7/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	1.00	1.000	1.00	1.000	1.00	1.000
$(5/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	3.54±0.67	0.986	2.30±0.16	0.990	2.38±0.22	0.992
$(1/2)_{3/2} \rightarrow (3/2)_{1/2}$	0.16±0.01	0.951	0.50±0.04	0.962	0.64±0.06	0.965
$(11/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	1.674	-	1.638	1.38±0.38	1.644
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.358	-	0.351	-	0.353
$(9/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	1.234	1.72±0.33	1.217	1.53±0.36	1.223
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.806	-	0.792	-	0.796
$(7/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.798	-	0.789	-	0.793
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.397	-	0.390	-	0.393
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.236	-	0.234	-	0.235
$(5/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	-	0.862	-	0.861	-	0.867
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (7/2)_{3/2}$	-	0.179	-	0.176	-	0.178
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (5/2)_{3/2}$	-	0.813	0.64±0.23	0.805	-	0.811
$(3/2)_{5/2} \rightarrow (1/2)_{3/2}$	2.81±0.09	0.499	1.38±0.26	0.499	0.97±0.73	0.503



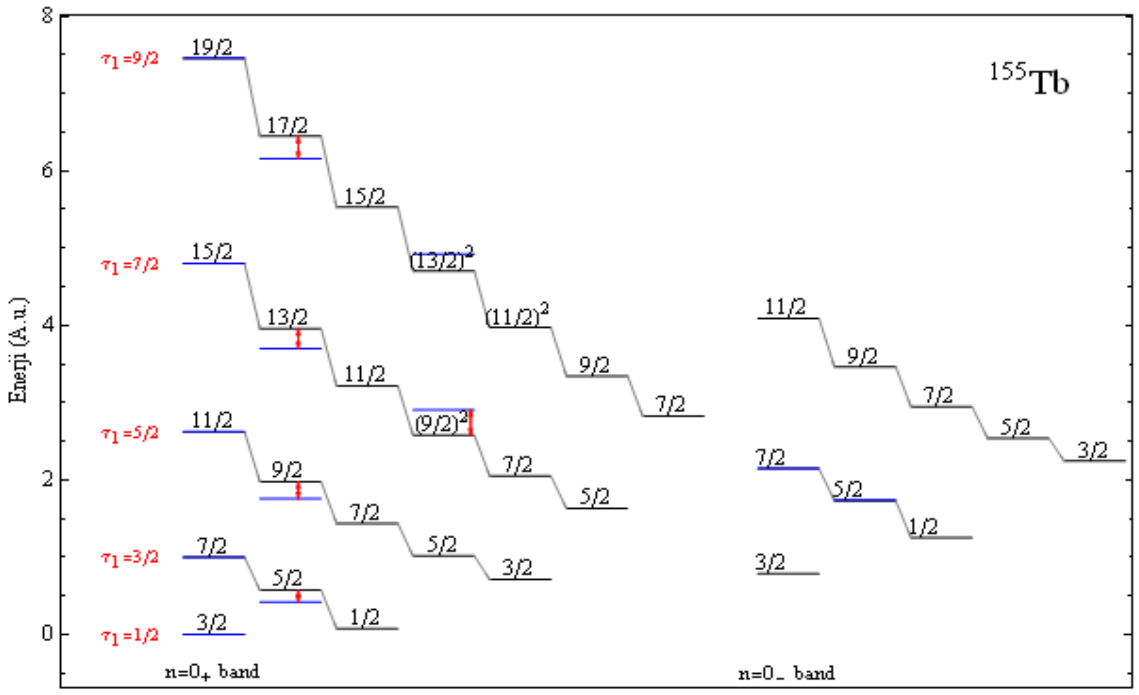
Şekil 3.18 ^{129}Te çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Timar 2014) teorik (siyah)



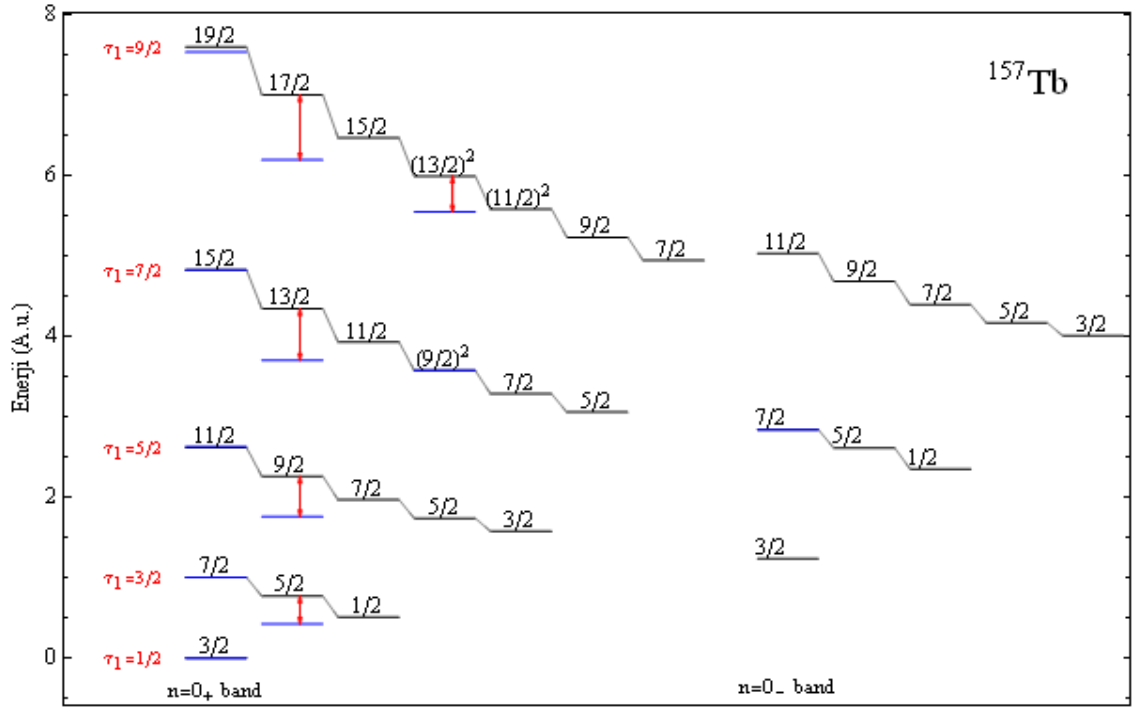
Şekil 3.19 ^{131}Te çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Khazov 2006) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



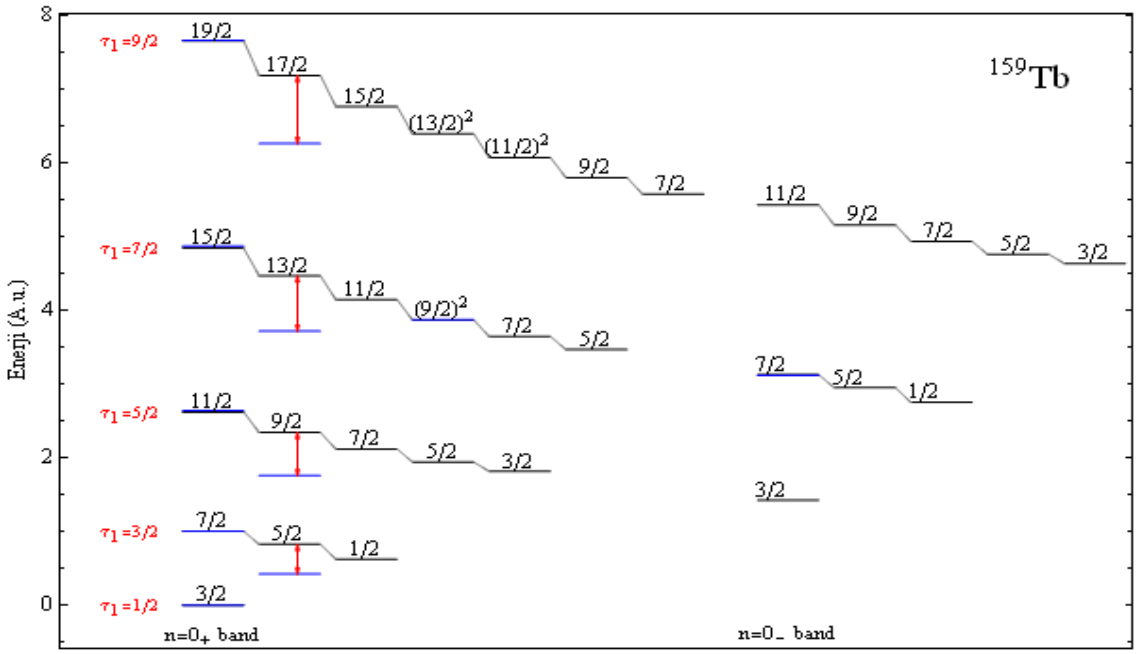
Şekil 3.20 ^{135}Ba çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Singh 2008) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



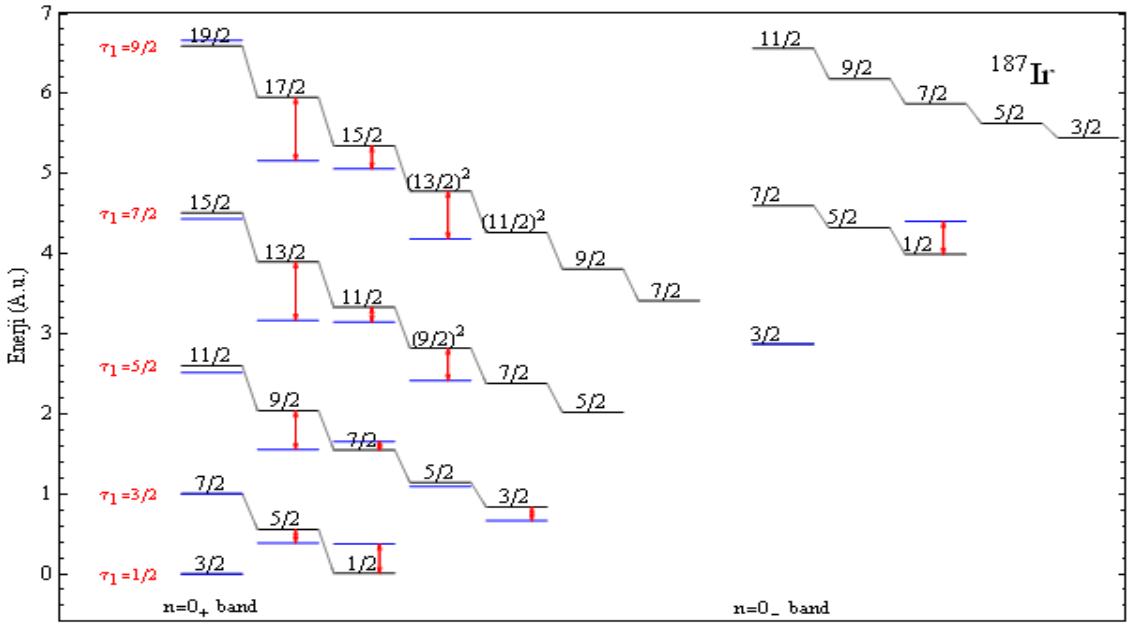
Şekil 3.21 ^{155}Tb çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Reich 2005) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



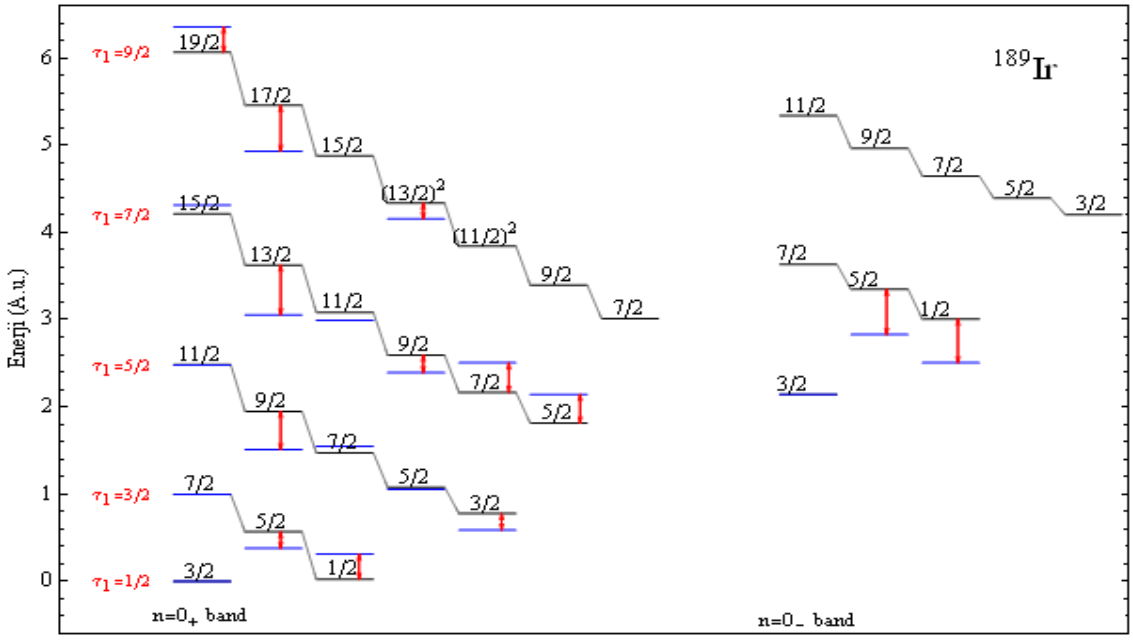
Şekil 3.22 ^{157}Tb çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Nica 2016) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



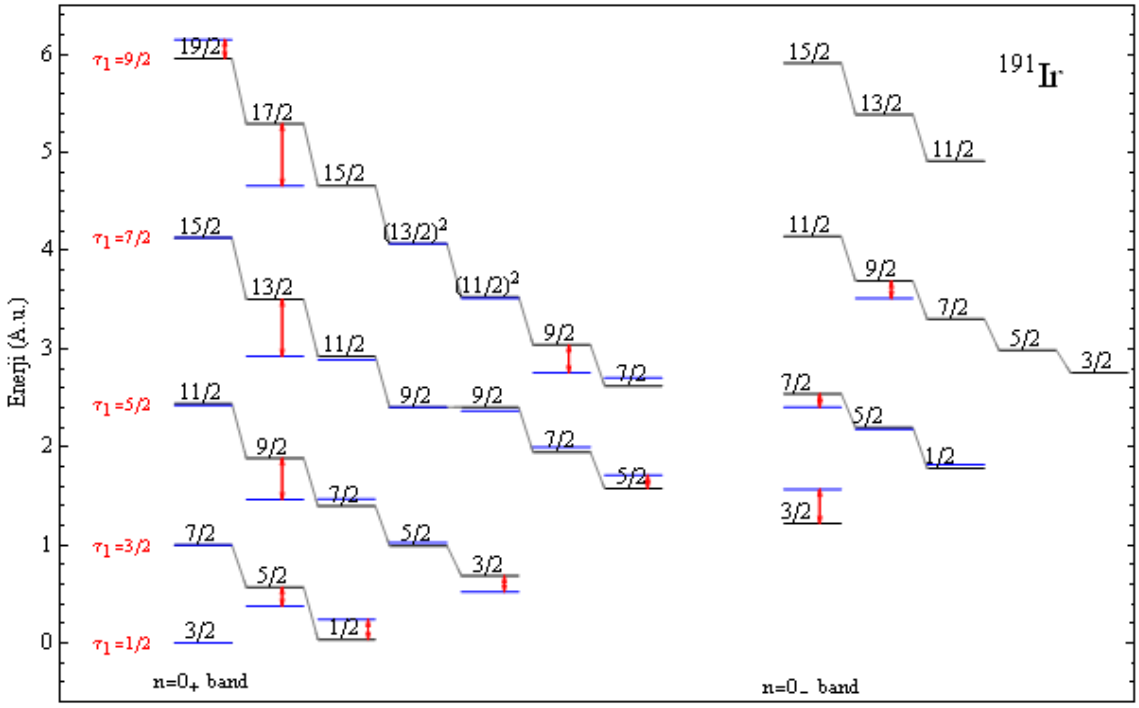
Şekil 3.23 ^{159}Tb çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Reich 2012) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



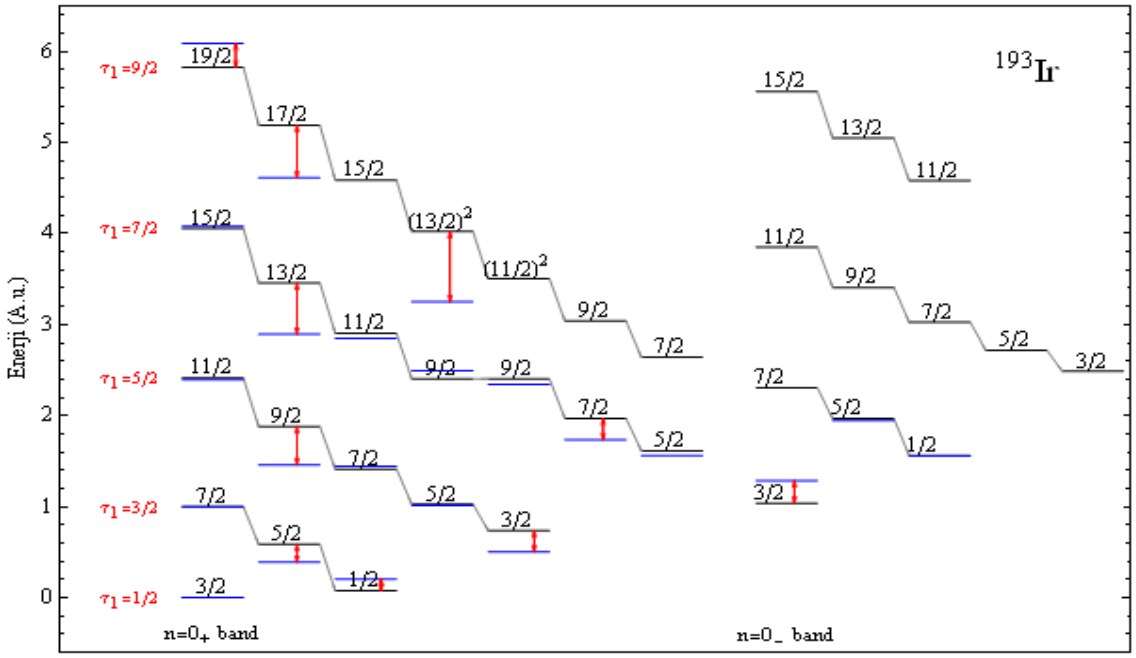
Şekil 3.24 ^{187}Ir çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Basunia 2009) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



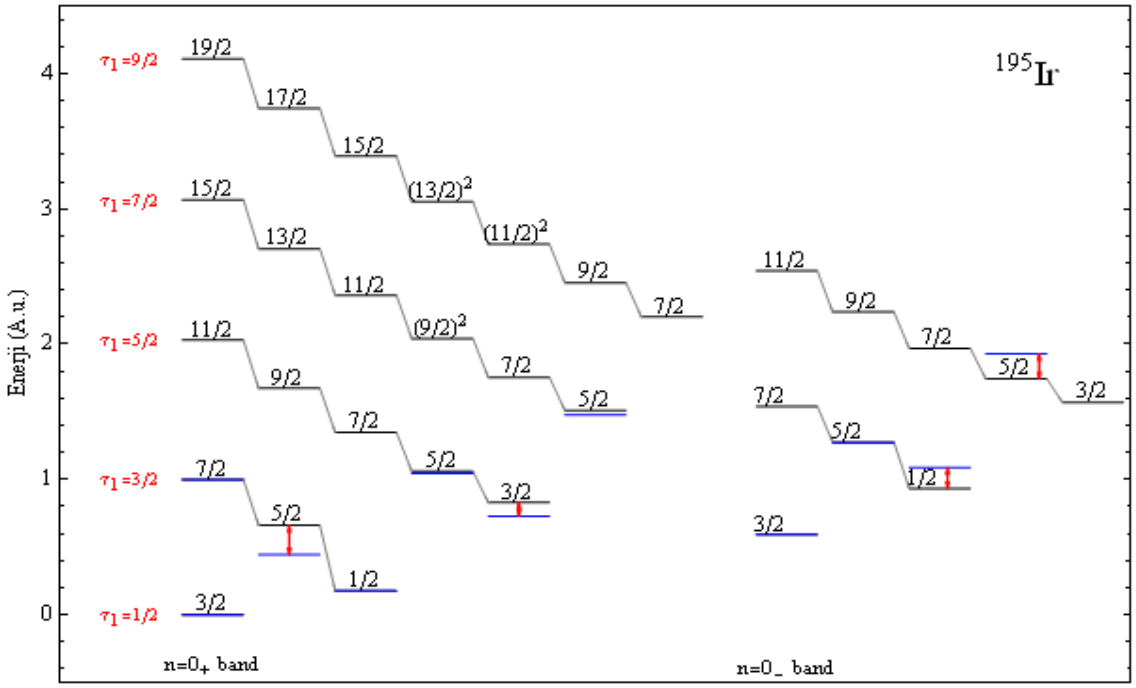
Şekil 3.25 ^{189}Ir çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Johnson 2017) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



Şekil 3.26 ^{191}Ir çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Vanin 2007) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



Şekil 3.27 ^{193}Ir çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Basunia 2017) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.



Şekil 3.28 ^{195}Ir çekirdeğinin ilk iki bandı için deneysel (mavi) verilerle (Xiaolong 2014) teorik (siyah) sonuçların karşılaştırılması.

3.5. Çoklu j Tek Parçacığının Çift Kor'a çiftlenimi: Davidson Potansiyeli

$j = 1/2, 3/2, 5/2$ tek parçacık yörüngelerinde hareket ettiği kabul edilen bir nükleonun γ-kararsız çift-çift kor'a çiftlendiği durum için Hamiltoniyen (Alonso 2007),

$$H_{BF} = H_B + \kappa g(\beta)\hat{L}_B \circ \hat{L}_F + \kappa' g(\beta)\hat{L}_F \circ \hat{L}_F \tag{80}$$

ile verilir. Hamiltoniyenin açısal kısmı, sistem γ-kararsız olduğu için kullanılan potansiyelden bağımsızdır. Radyal kısmı ise

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{4}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta} - \varepsilon + \frac{\Lambda}{\beta^2} + \frac{2B}{\hbar^2} g(\beta)\Lambda' + u(\beta)\right] f(\beta) \tag{81}$$

$\left\langle \hat{L}_F \circ \hat{L}_F \right\rangle = \tau_F(\tau_F + 3)$ve $2\left\langle \hat{L}_B \circ \hat{L}_F \right\rangle = \tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1) - \tau(\tau + 3) - \tau_F(\tau_F + 3)$ olmak üzere $\Lambda' = 2\left\langle \hat{L}_B \circ \hat{L}_F \right\rangle \kappa + \left\langle \hat{L}_F \circ \hat{L}_F \right\rangle \kappa'$ ve $\Lambda = \tau(\tau + 3)$ olarak tanımlanmıştır. İndirgenmiş potansiyel yerine $u_D(\beta) = \beta^2 + \beta_0^4/\beta^2$ Davidson potansiyeli kullanırsak Denk.(81),

$$f''(\beta) + \frac{4}{\beta} f'(\beta) + \left[\varepsilon - \frac{\Lambda + \beta_0^4}{\beta^2} - \frac{2B}{\hbar^2} g(\beta)\Lambda' - \beta^2\right] f(\beta) \tag{82}$$

formunu alır.

3.5.1. g(β) sabit

Etkileşim gücü $g(\beta) = \hbar^2/2B$ alınırsa,

$$f''(\beta) + \frac{4}{\beta} f'(\beta) + \left[\varepsilon - \Lambda' - \frac{\Lambda + \beta_0^4}{\beta^2} - \beta^2\right] f(\beta) \tag{83}$$

$\Lambda + \beta_0^4 = p(p+3)$ ve $\varepsilon - \Lambda' = \varepsilon'$ tanımları kullanılırsa,

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon'-\frac{p(p+3)}{\beta^2}-\beta^2\right]f(\beta)=0 \tag{84}$$

Böylece radyal fonksiyonlar, $p=-3/2+\sqrt{\tau(\tau+3)+\beta_0^4+9/4}$ olmak üzere Laguerre polinomları ve Γ -fonksiyonları cinsinden verilir,

$$f_{n,\tau}(\beta)=\left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2}\beta^p\, e^{-\beta^2/2}\, L_n^{p+3/2}\left(\beta^2\right) \tag{85}$$

Enerji özdeğeri ise

$$\varepsilon^{s}_{n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2}=2n+p+5/2+\Lambda' \tag{86}$$

3.5.2. g(β) Değişken

$g(\beta)=\left(\hbar^2/2B\right)\left(1/\beta^2\right)$ kabul edilirse Denk.(82),

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon-\frac{\Lambda+\beta_0^4+\Lambda'}{\beta^2}-\beta^2\right]f(\beta) \tag{87}$$

$\Lambda+\beta_0^4+\Lambda'=p(p+3)$ ve $p=-3/2+\sqrt{\Lambda+\beta_0^4+\Lambda'+9/4}$ olmak üzere

$$f''(\beta)+\frac{4}{\beta}f'(\beta)+\left[\varepsilon-\frac{p(p+3)}{\beta^2}-\beta^2\right]f(\beta)=0 \tag{88}$$

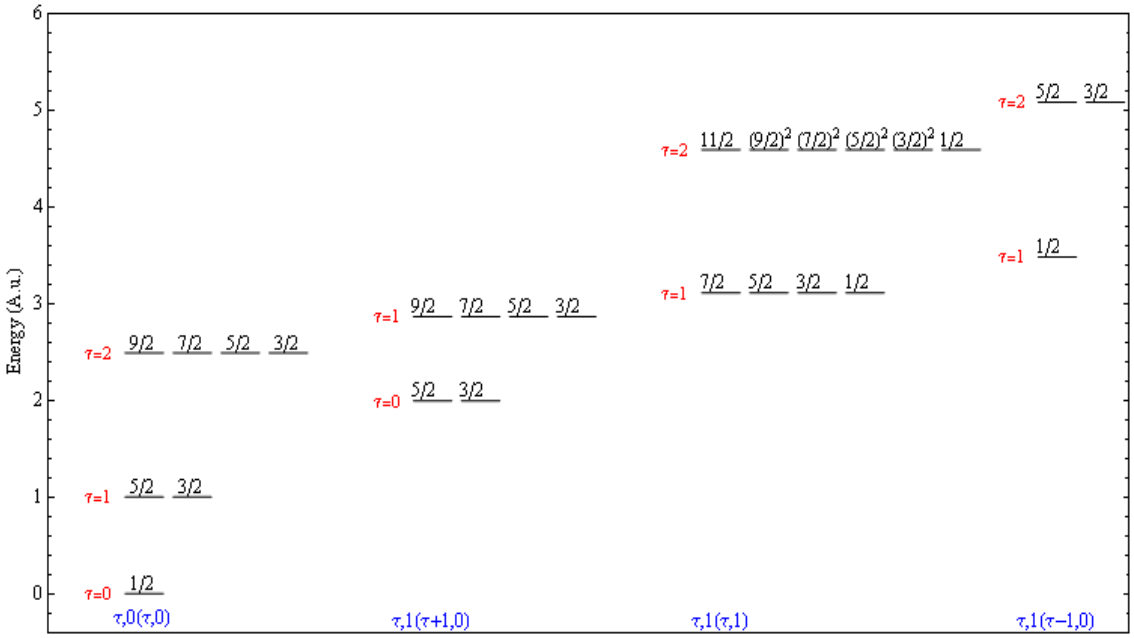
Böylece özfonksiyonlar ve enerji özdeğerleri aşağıdaki gibi bulunur,

$$f_{n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2}(\beta)=\left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2}\beta^p\, e^{-\beta^2/2}\, L_n^{p+3/2}\left(\beta^2\right) \tag{89}$$

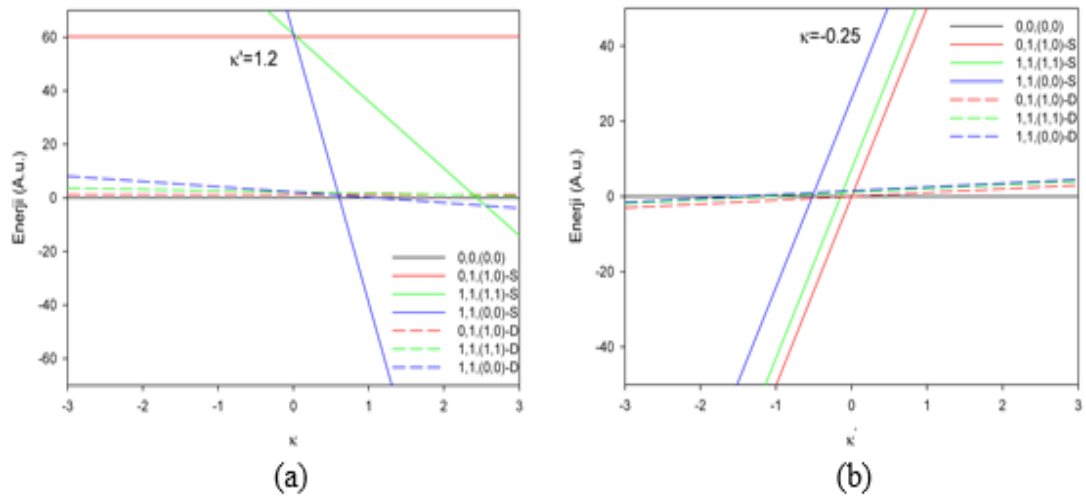
$$\varepsilon^{d}_{n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2}=2n+p+5/2 \tag{90}$$

Burada kuantum sayılarının aldığı değerler önemlidir. En düşük enerjili band için $n=0$ değerinden başlar ve daha yüksek enerji bandlar için pozitif tamsayı değerleri alır, $n=0,1,2,...$. Taban durumda çift-çift kor'un spini 0'dır ve $\tau=0,1,2,...$ değerlerini alır. Tek kalan nükleonun açısal momentumunun $j=1/2,3/2,5/2$ olabilmesi için $\tau_F=0, L_F=0$ ($j=1/2$) veya $\tau_F=1, L_F=2$ ($j=3/2,5/2$) olmalıdır. Kor ve tek nükleonun çiftlenmesi sonucunda durumlar (τ_1,τ_2) kuantum sayı çiftiyle karakterize edilir (Alonso 2007). Bu durumda dört farklı band karşımıza çıkar. En düşük enerjili durum $\tau_F=0$ için $\tau,\tau_F(\tau_1,\tau_2)=\tau,0(\tau,0)$ şeklinde gösterilen banttır. $\tau_F=1$ ile çiftlenim ise $(\tau_1,\tau_2)=(\tau+1,0)$, $(\tau_1,\tau_2)=(\tau,1)$ ve $(\tau_1,\tau_2)=(\tau-1,0)$ kombinasyonlarını verir. Dejenere durum için elde edilen spektrum Şekil 3-29'da gösterilmiştir.

Kor ile tek nükleon arasındaki çiflenim gücü sabit alındığında $\tau,0(\tau,0)$ bandı hariç diğer bantlarda ani artışlar gözlenmiştir, yani bu bantlar κ ve κ' parametrelerinin değişimlerine çok hassas olmaktadır. Bu davranış Şekil 3-30'da açıkça görülmektedir. Şekilde her bir band başı enerjisinin sabit $\beta_0=5.0$ değeri için κ ve κ' parametrelerine göre değişimi görülmektedir. Sabit ve değişken etkileşim gücü için değerler sırasıyla "S" ve "D" etiketiyle işaretlenmiştir. Şekil incelendiğinde band sıralanmasının doğru olabilmesi için κ'nın negatif, κ''nün pozitif değer alması gerektiği anlaşılır. Ayrıca sabit değişken gücü kullanıldığında band başı enerjilerinin çok ani artış kaydettiği görülmektedir. Bu artış, deneysel değerleri fit etme aşamasında çok fazla süre gerektirmektedir. Fakat benzer davranış değişken çiftlenim gücü kullanıldığında gözlenmemektedir. Bu nedenle, çoklu-j durumu için değişken çiftlenim gücü kullanılmıştır.



Şekil 3.29 $n=0$, $\beta_0 = 5.0$ $\kappa=-1/4$ ve $\kappa'=2$ için en düşük enerjili dört banddan oluşan spektrum. Bandlar sütun halinde verilmiştir ve her sütuna ait kuantum sayıları mavi ile alt kısımda yazılmıştır. Her durum için olası toplam açısal momentum değerleri seviye üzerinde gösterilmiştir. Bu durumlar dejeneredir.



Şekil 3.30 $n=0$ en düşük enerjili durum için herbir bandın band başı enerjilerinin değişimleri $\beta_0 = 5.0$ alınarak, (a) $\kappa'=1.2$ için κ'ya göre (b) $\kappa=-0.25$ için κ''ye göre gösterilmiştir. Sabit çiftlenim gücü için "S", değişken çiftlenim gücü için "D" kullanılmıştır.

Şekil 3-29'dan görüldüğü gibi aynı kuantum sayılarıyla verilen farklı açısal momentumlu durumlar aynı enerjidedir. Bu dejenerasyonu kırmak için Denk.(80)'de verilen Hamiltoniyene, açısal momentum ile orantılı ekstra bir terim daha ilave edilmelidir,

$$H_{BF} = H_B + \kappa g(\beta)\hat{L}_B \circ \hat{L}_F + \kappa' g(\beta)\hat{L}_F \circ \hat{L}_F + \kappa'' g(\beta)\hat{J} \circ \hat{J} \tag{91}$$

Bu Hamiltoniyen için işlem yapıldığında yine enerji özfonksiyon ve özdeğerleri, $\Lambda + \beta_0^4 + \Lambda' + \kappa'' J(J+1) = p(p+3)$ ve $p = -3/2 + \sqrt{\Lambda + \beta_0^4 + \Lambda' + \kappa'' J(J+1) + 9/4}$ olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_{n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2}(\beta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+p+5/2)}\right]^{1/2} \beta^p e^{-\beta^2/2} L_n^{p+3/2}(\beta^2) \tag{92}$$

$$\varepsilon^d_{n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2} = 2n + p + 5/2 \tag{93}$$

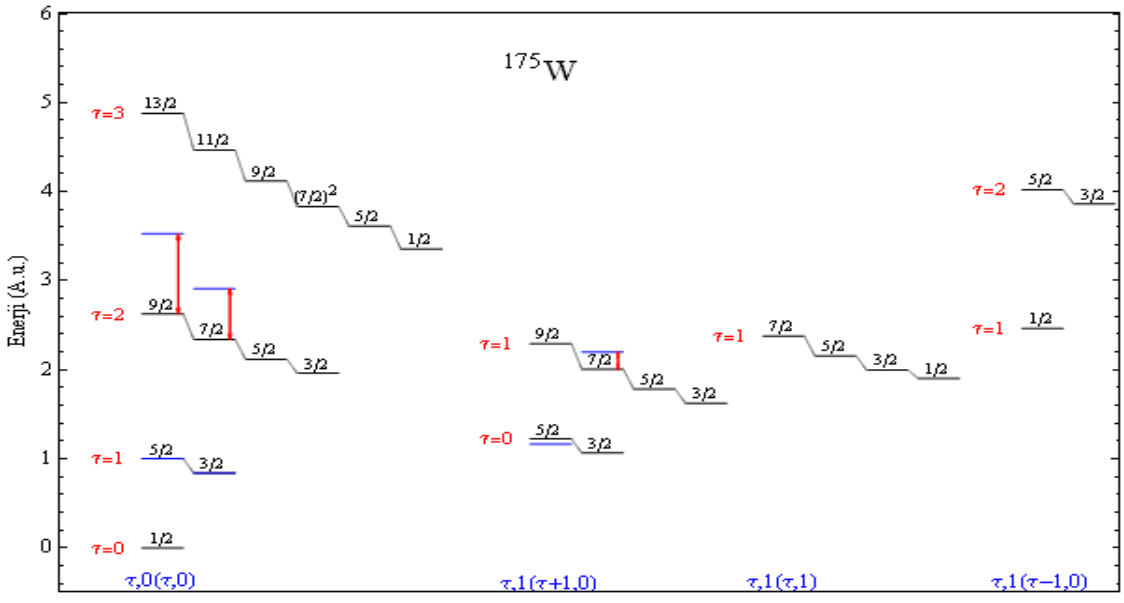
Elde edilen bu sonucun deneysel verileri ne ölçüde tahmin ettiğinin ölçüsü olarak yine Denk.(79) ile verilen Δ parametresi kullanılmıştır.

Çoklu-j modelinde değişken etkileşim gücü kullanılarak incelenen çekirdekler için elde edilen serbest parametreler Tablo 3-11'de verilmiştir. Tabloda *t* değeri, deneysel verileri fit etmede kullanılan deneysel durum sayısını göstermektedir. Dikkat edilirse, incelenen çekirdeklerin uyarılma enerjine ait deneysel veri fazla yoktur. Bu parametrelere göre elde edilen teorik enerji değerlerinin deneysel verilerle kıyaslanması, daha açık şekilde görülebilmesi için Şekil 3-31 ve Şekil 3-38'de verilmiştir. Şekillerde, her bir band sütun halinde verilmiş olup banda ait $\tau, \tau_F(\tau_1, \tau_2)$ kuantum sayıları, ait olduğu sütunun tabanında mavi renkle τ cinsinden belirtilmiştir. τ değerleri ise en yüksek açısal momentuma sahip seviyenin sol tarafında kırmızı renkle gösterilmiştir. Aynı τ değerine karşılık gelen farklı açısal momentumlu seviyeler, birbirlerine gri çizgi ile bağlanmıştır. Teorik veriler siyah çizgi ile deneysel veriler ise mavi çizgi ile gösterilmiştir. Teori ile deney arasında çok fazla fark olması durumunda deneysel verinin hangi seviyeye bağlı olduğunu vurgulamak amacıyla çift yönlü kırmızı ok işareti kullanılmıştır. Kıyaslamayı sağlıklı yapabilmek için en düşük enerjili bandta $\tau = 1,\ J = 5/2$ durumun enerjisi 1'e

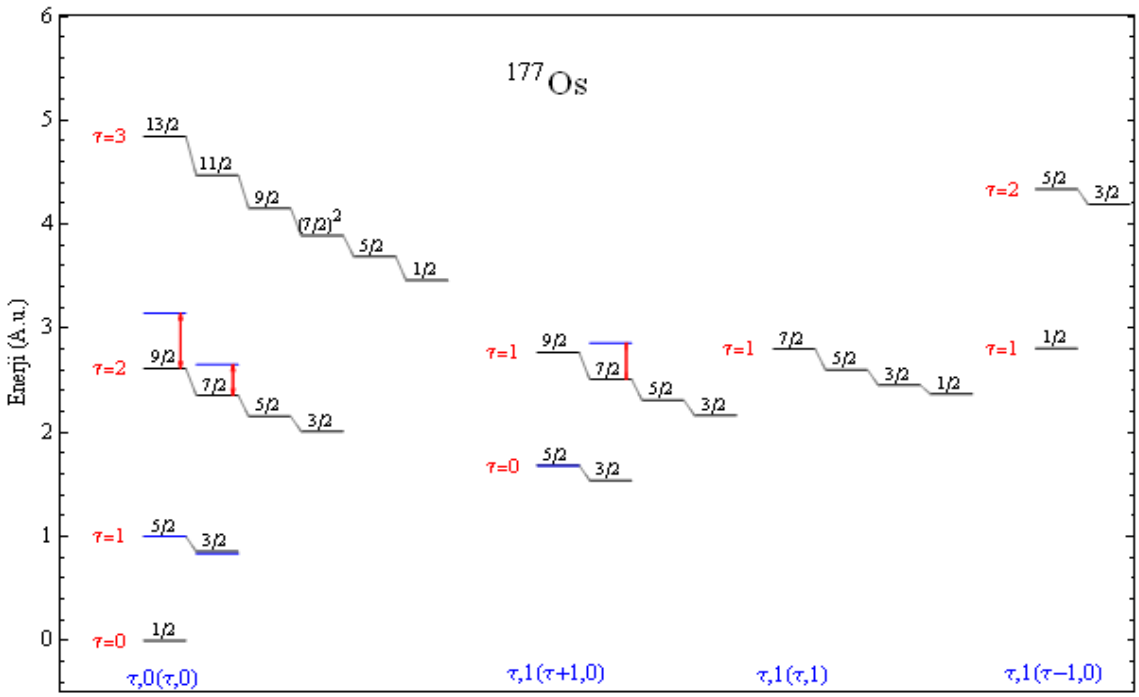
normalize edilmiş, diğer tüm enerjiler bu değere göre belirlenmiştir. Böylece enerji birimi keyfidir.

Tablo 3.11 Çoklu-j modeline göre incelenen çekirdeklerin deneysel verilerini en iyi üreten serbest parametreler.

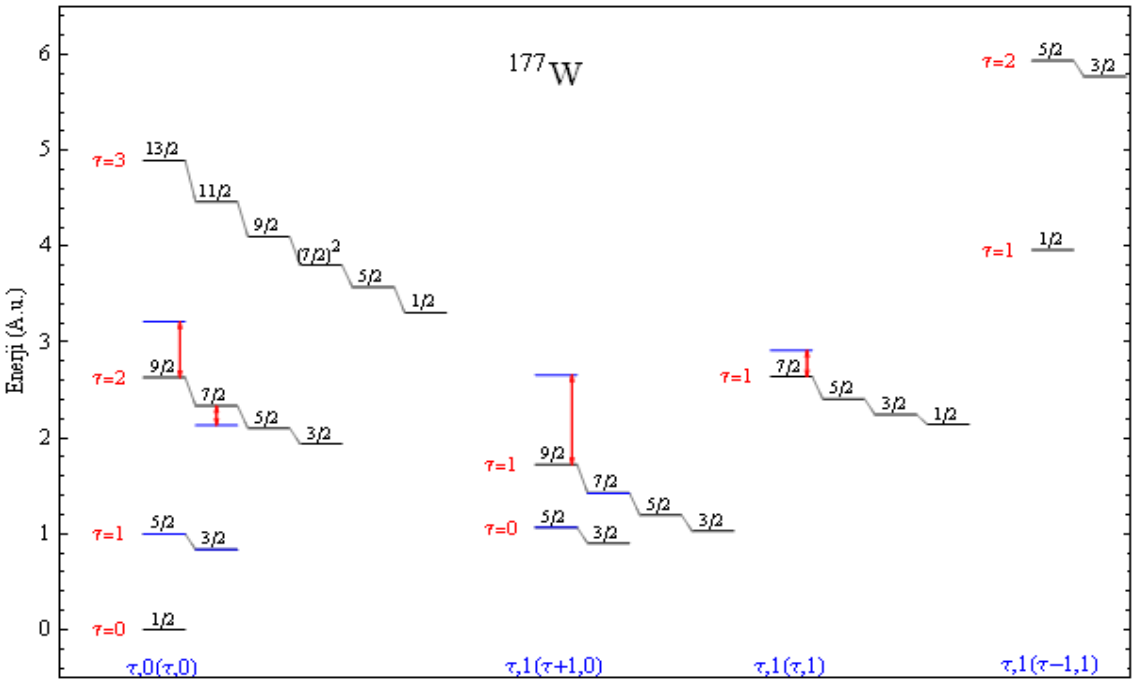
İzotop	t	β_0	κ	κ'	κ''	$\Delta\times10^2$
^{175}W	5	36	-0.50	1.30	0.17	11.12
^{177}W	7	36	-1.65	1.09	0.17	11.45
^{183}W	5	36	-1.59	3.37	0.11	21.32
^{177}Os	6	36	-0.38	1.89	0.15	12.09
^{179}Os	8	30	-1.90	1.20	0.20	10.27
^{185}Os	7	36	-1.99	3.89	0.63	11.84
^{179}Pt	5	40	-1.01	2.64	0.21	10.38
^{181}Pt	6	36	-0.41	2.02	0.16	3.85
^{181}Hf	6	36	-1.81	5.70	0.72	16.33



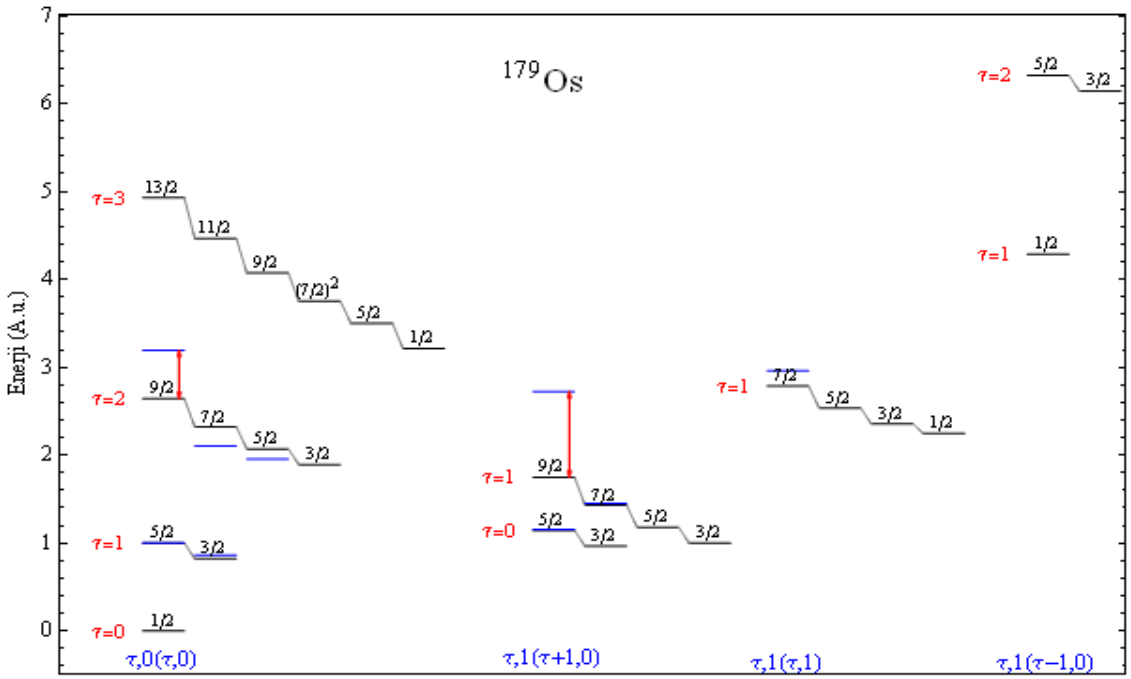
Şekil 3.31 ^{175}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Basunia 2004) ve teorik (siyah) spektrumu.



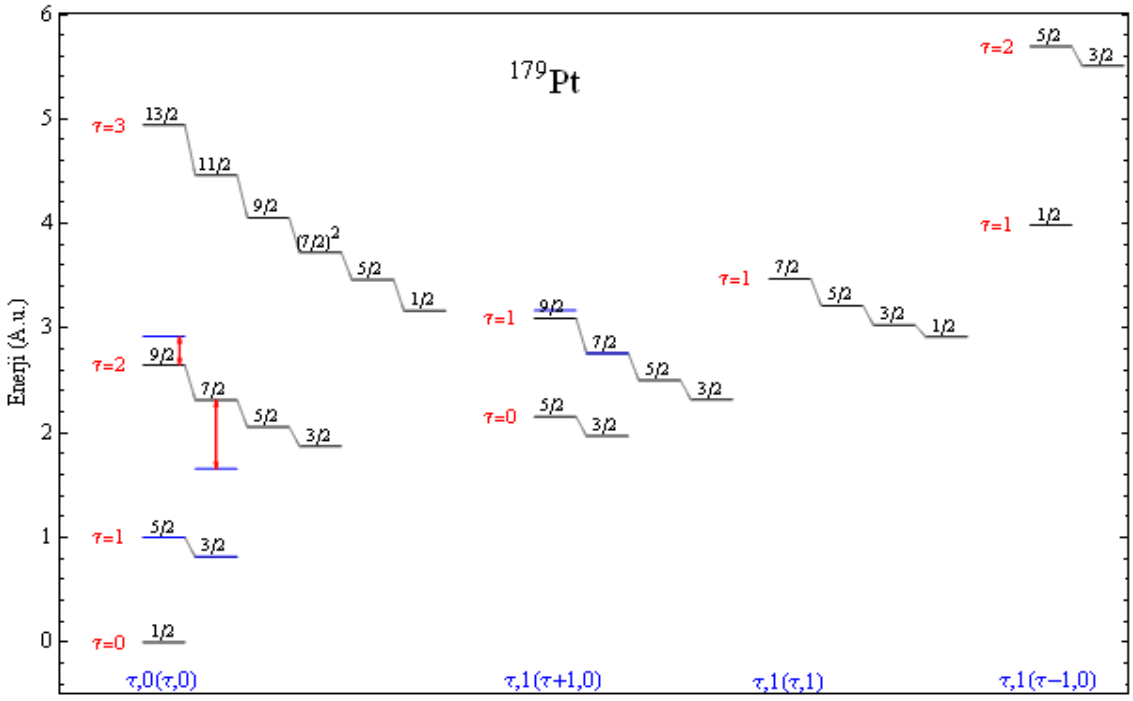
Şekil 3.32 ^{177}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.



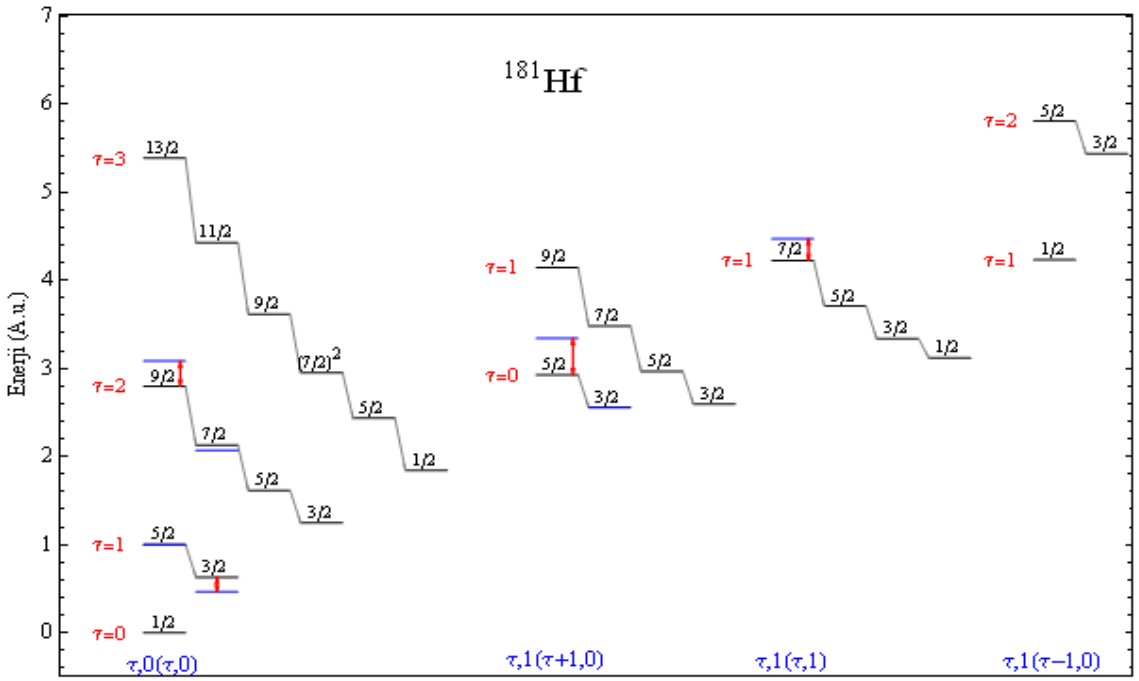
Şekil 3.33 ^{177}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Kondev 2003) ve teorik (siyah) spektrumu.



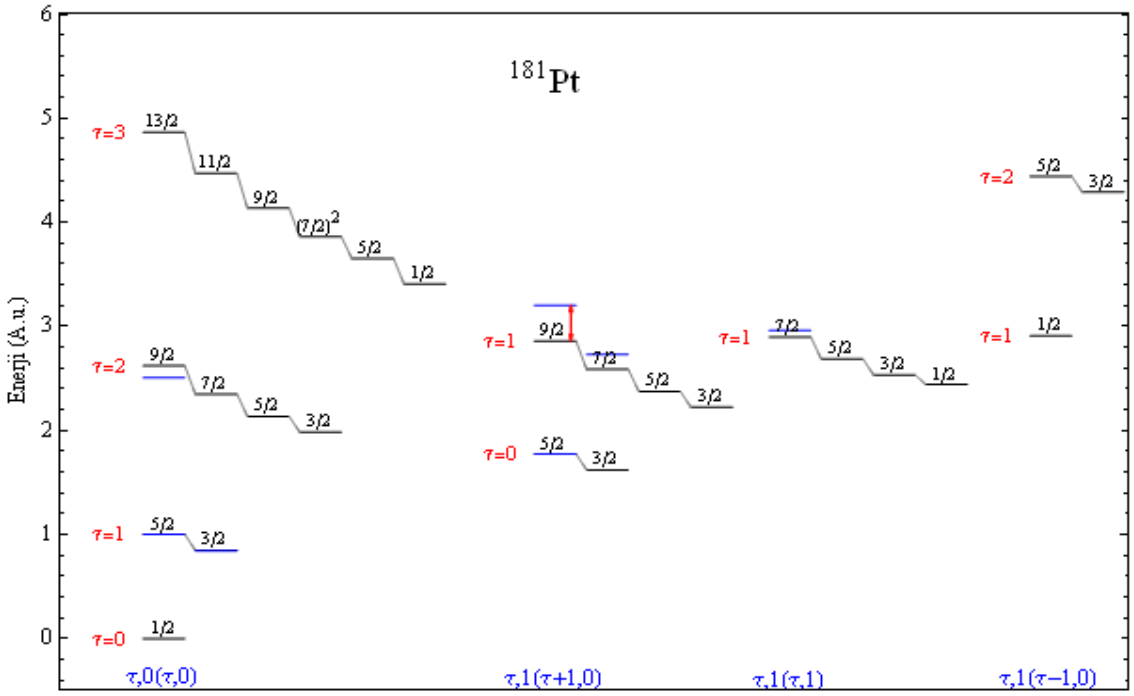
Şekil 3.34 ^{179}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.



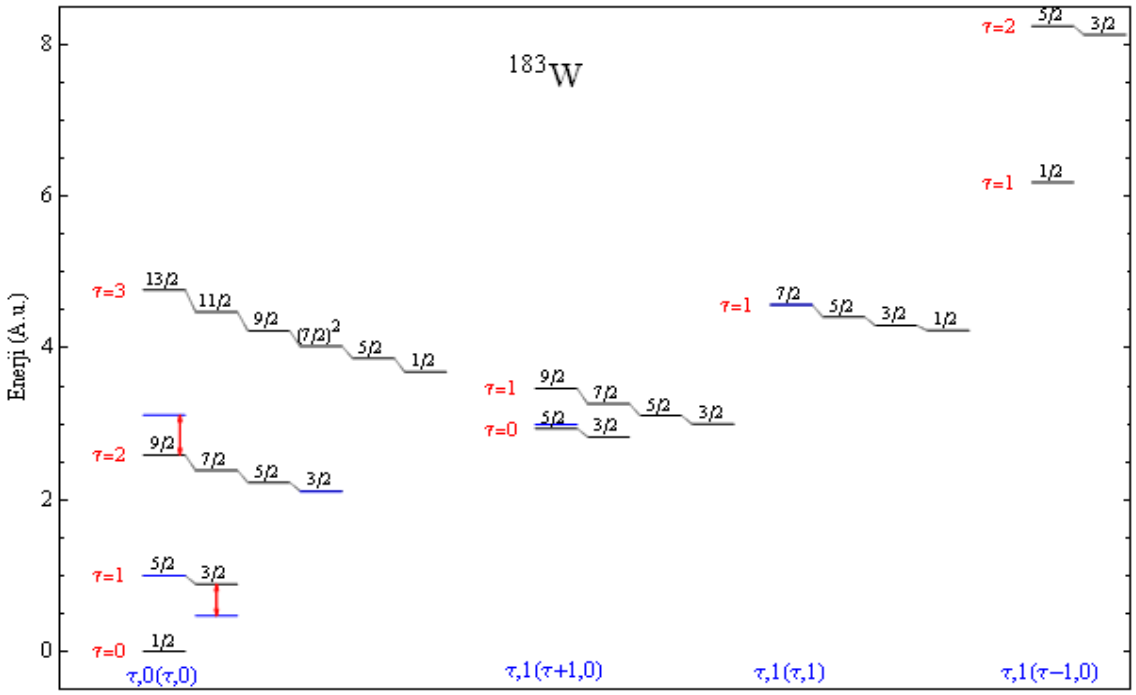
Şekil 3.35^{179}Pt'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2009) ve teorik (siyah) spektrumu.



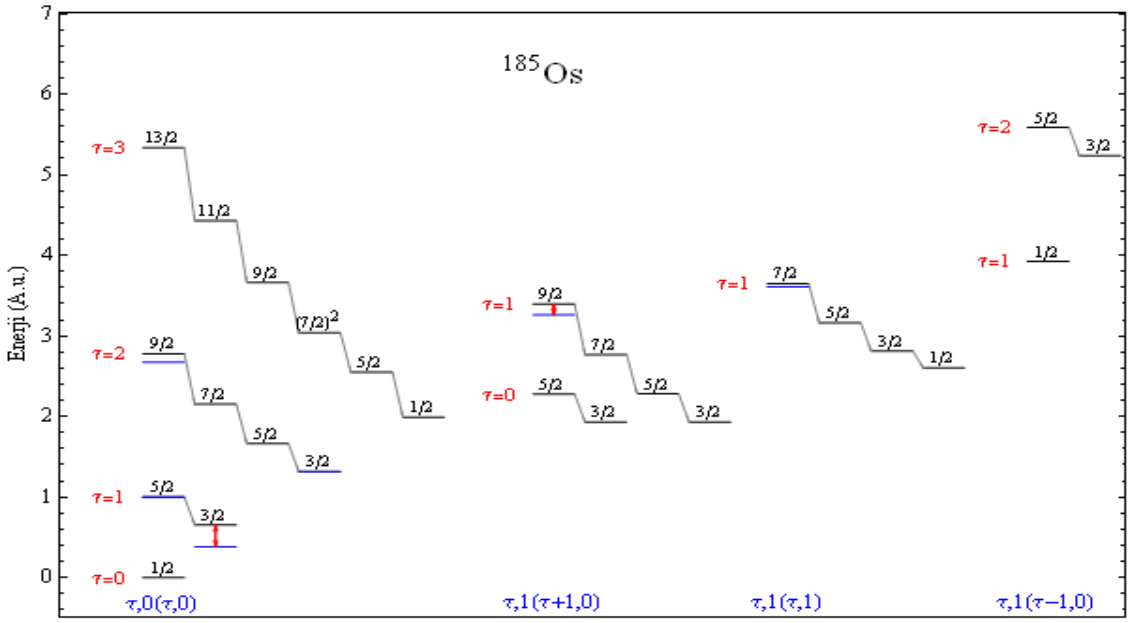
Şekil 3.36 ^{181}Hf'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.37 ^{181}Pt'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005a) ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.38 ^{183}W'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Baglin 2016) ve teorik (siyah) spektrumu.



Şekil 3.39 ^{185}Os'un en düşük enerjili deneysel (mavi) (Wu 2005b) ve teorik (siyah) spektrumu.

Hesaplanan bir diğer nicelik ise B(E2) ile gösterilen elektrik kuadrupol geçiş güçleridir. Elektrik kuadrupol operatörü $T^{(E2)} = t_1\alpha + t_2(\alpha\times\alpha)^{(2)} + t'\left(a^{+}\times\tilde{a}\right)^{(2)}$,'nin ilk ve son durumlar arası matris elemanı, bosonik ve fermiyonik katkılar olmak üzere

$$\begin{aligned}\left\langle n',\tau',\tau'_F,\tau'_1,\tau'_2,L'_{BF},1/2;J'\middle\|T_B^{(E2)}\middle\|n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF},1/2;J\right\rangle =& \\ \sum_{\substack{L_B,L_F,\\ L'_B,L'_F}}\left\langle\begin{matrix}(\tau',0) & (\tau'_F,0) & \left|(\tau'_1,\tau'_2)\right.\\ L'_B & L'_F & \left|L'_{BF}\right.\end{matrix}\middle\rangle\middle\langle\begin{matrix}(\tau,0) & (\tau_F,0) & \left|(\tau_1,\tau_2)\right.\\ L_B & L_F & \left|L_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle& \\ \times\sum_{j,j'}(-1)^{L'_B+J+j+2}\sqrt{2L_{BF}+1}\sqrt{2L'_{BF}+1}\sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1}\sqrt{2j'+1}\sqrt{2j+1}& \\ \times\begin{Bmatrix}L'_B & L'_F & L'_{BF}\\ 1/2 & J' & j'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L_B & L_F & L_{BF}\\ 1/2 & J & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L_B & J & j\\ J' & L'_B & 2\end{Bmatrix}\left\langle n'\tau' L'_B\middle\|T_B^{(E2)}\middle\|n\tau L_B\right\rangle& \\ \times\delta_{\tau'_F,\tau_F}\,\delta_{L'_F,L_F}\,\delta_{j',j}&\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}\left\langle n',\tau',\tau'_F,\tau'_1,\tau'_2,L'_{BF},1/2;J'\middle\|T_F^{(E2)}\middle\|n,\tau,\tau_F,\tau_1,\tau_2,L_{BF},1/2;J\right\rangle =& \\ \sum_{\substack{L_B,L_F,\\ L'_B,L'_F}}\left\langle\begin{matrix}(\tau',0) & (\tau'_F,0) & \left|(\tau'_1,\tau'_2)\right.\\ L'_B & L'_F & \left|L'_{BF}\right.\end{matrix}\middle\rangle\middle\langle\begin{matrix}(\tau,0) & (\tau_F,0) & \left|(\tau_1,\tau_2)\right.\\ L_B & L_F & \left|L_{BF}\right.\end{matrix}\right\rangle& \\ \times\sum_{j,j'}(-1)^{L'_B+J'+j'+2}\sqrt{2L_{BF}+1}\sqrt{2L'_{BF}+1}\sqrt{2J'+1}\sqrt{2J+1}\sqrt{2j'+1}\sqrt{2j+1}& \\ \times\begin{Bmatrix}L'_B & L'_F & L'_{BF}\\ 1/2 & J' & j'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L_B & L_F & L_{BF}\\ 1/2 & J & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & J & L_B\\ J' & j' & 2\end{Bmatrix}\left\langle j'\middle\|T_F^{(E2)}\middle\|j\right\rangle& \\ \times\delta_{\tau'_B,\tau_B}\,\delta_{L'_B,L_B}\,\delta_{n',n}&\end{aligned} \tag{95}$$

ile verilir. Fermiyonik katkı için $\left\langle j'\middle\|T_F^{(E2)}\middle\|j\right\rangle$ tek-parçacık matris elamanı aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\left\langle j'\middle\|\left(a^{+}_{j_1}\times\tilde{a}_{j_2}\right)^{(2)}\middle\|j\right\rangle = -\sqrt{5}\,\delta_{j_2,j'}\,\delta_{j_1,j} \tag{96}$$

Şekil 3-29'da verilen spektrum için uyarılmış durumlar arası $\Delta\tau = 1$ ve $\Delta\tau = 0,\pm 2$ elektrik kuadrupol geçişleri, etkileşim gücünün değişken kabul edilmesiyle Davidson potansiyeli için sırasıyla Tablo 3-12 ve Tablo 3-13'te verilmiştir.

Tablo 3.12 Çoklu-j modeline Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau = 1$ band-içi ve band-arası izinli B(E2) geçiş güçleri. En düşük enerjili 5/2-1/2 seviyeleri arası geçiş 1'e normalize edilmiştir. Gerçek değerler, tüm geçişlerin $5.16689t_1^2$ile çarpılması ile elde edilir.

İlk durum $(n', \tau', \tau'_F, \tau'_1, \tau'_2, J')$	Son durum $(n, \tau, \tau_F, \tau_1, \tau_2, J)$	B(E2)
0,1,0,1,0,5/2	0,0,0,0,0,1/2	1.000
0,1,0,1,0,3/2	0,0,0,0,0,1/2	1.000
0,2,0,2,0,9/2	0,1,0,1,0,5/2	1.434
0,2,0,2,0,7/2	0,1,0,1,0,5/2	0.143
0,2,0,2,0,7/2	0,1,0,1,0,3/2	1.291
0,2,0,2,0,5/2	0,1,0,1,0,5/2	1.147
0,2,0,2,0,5/2	0,1,0,1,0,3/2	0.287
0,2,0,2,0,3/2	0,1,0,1,0,5/2	0.430
0,2,0,2,0,3/2	0,1,0,1,0,3/2	1.004
0,1,1,2,0,9/2	0,0,1,1,0,5/2	1.006
0,2,1,3,0,13/2	0,1,1,2,0,9/2	1.442
0,2,1,2,1,11/2	0,1,1,1,1,7/2	1.083
0,2,1,1,0,5/2	0,1,1,0,0,1/2	0.066
0,1,1,1,1,7/2	0,0,1,1,0,5/2	0.906
0,1,1,0,0,1/2	0,0,1,1,0,5/2	0.604
0,2,1,1,0,5/2	0,1,1,1,1,7/2	0.121

Tablo 3.13 Çoklu-j modeline Davidson potansiyelinden elde edilen $\Delta\tau = 0,\pm 2$ band-içi ve band-arası izinli B(E2) geçiş güçleri. En düşük enerjili 5/2-3/2 seviyeleri arası geçiş 1'e normalize edilmiştir. Gerçek değerler, tüm geçişlerin $2.78571\chi^2 t_2^2$ ile çarpılması ile elde edilir.

İlk durum $(n', \tau', \tau'_F, \tau'_1, \tau'_2, J')$	Son durum $(n, \tau, \tau_F, \tau_1, \tau_2, J)$	B(E2)
0,1,0,1,0,5/2	0,1,0,1,0,3/2	1.000
0,2,0,2,0,9/2	0,2,0,2,0,7/2	0.457
0,2,0,2,0,9/2	0,2,0,2,0,5/2	0.997
0,2,0,2,0,7/2	0,2,0,2,0,5/2	0.100
0,2,0,2,0,7/2	0,2,0,2,0,3/2	0.897
0,2,0,2,0,5/2	0,2,0,2,0,3/2	0.112
1,1,0,1,0,5/2	0,1,0,1,0,5/2	0.153
1,1,0,1,0,5/2	0,1,0,1,0,3/2	0.038
0,0,1,1,0,5/2	0,0,1,1,0,3/2	0.000
0,1,1,2,0,9/2	0,1,1,2,0,7/2	0.189
0,1,1,2,0,9/2	0,1,1,2,0,5/2	0.413
0,1,1,1,1,7/2	0,1,1,1,1,5/2	0.023
0,1,1,1,1,5/2	0,1,1,1,1,3/2	0.000
0,1,1,0,0,1/2	0,1,1,2,0,5/2	3.040

This programme calculates the excitation energy and the electric quadrupole transition ratios of an odd-even nuclei which comprised of a single j=3/2 particle coupled to gamma-unstable even-even core with Kratzer potential.

The angular part:

In this cell, the Bes functions given in Table 2 are defined up to $\tau \leq 3$ and are labeled by F[τ,L,K]. Here K takes even values from 0 to L.

```
In[1]:= F[0, 0, 0] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*(Sqrt[3]/2);
        F[1, 2, 2] := ((Sqrt[15]/2)*Sin[γ])/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[1, 2, 0] := ((Sqrt[15]/2)*Cos[γ])/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[2, 4, 4] := ((Sqrt[105]/4)*(1/2 - (1/2)*Cos[2*γ]))/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[2, 4, 2] := ((Sqrt[105]/4)*(Sqrt[3/7]*Sin[2*γ]))/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[2, 4, 0] := ((Sqrt[105]/4)*(Sqrt[7/5]/2 +(1/2)*Sqrt[5/7]*Cos[2*γ]))/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[2, 2, 2] := (-(8*Pi^2)^(-2^(-1)))*(Sqrt[15]/2)*Sin[2*γ];
        F[2, 2, 0] := ((Sqrt[15]/2)*Cos[2*γ])/(8*Pi^2)^2^(-1);
        F[3, 6, 6] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[315/32]*((3*Sin[γ])/4 - (1/4)*Sin[3*γ]);
        F[3, 6, 4] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[315/32]*((3*Cos[γ])/(2*Sqrt[22]) - (3*Cos[3*γ])/(2*S
        F[3, 6, 2] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[315/32]*((3/4)*Sqrt[5/11]*Sin[γ] + (1/4)*Sqrt[11/5]*
        F[3, 6, 0] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[315/32]*((3/2)*Sqrt[7/22]*Cos[γ] + (3*Cos[3*γ])/(2*S
        F[3, 4, 4] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[945/88]*(-(Cos[γ]/2) + (1/2)*Cos[3*γ]);
        F[3, 4, 2] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[945/88]*((-Sqrt[3/7])*Sin[γ]);
        F[3, 4, 0] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[945/88]*((1/2)*Sqrt[5/7]*Cos[γ]+(1/2)*Sqrt[7/5]*Cos[
        F[3, 3, 2] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[63/8]*Sin[3*γ];
        F[3, 3, 0] := 0;
        F[3, 0, 0] := (1/Sqrt[8*Pi^2])*Sqrt[9/4]*Cos[3*γ];
```

The Electric Quadrupole operator, $T = t_1 \alpha + t_2(\alpha \times \alpha) + t'(a^+ \times \tilde{a})$, is used as given in Eq.(17). The corresponding γ-dependent functions are defined as FE2α[2,μ] and FE2$\alpha\alpha$[2,μ], where μ takes only even values from 0 to 2.

The bosonic part: α and $\alpha\times\alpha$ terms

```
In[19]:= FE2α[2, 0] := Cos[γ]/Sqrt[2]; FE2α[2, 2] := Sin[γ]/Sqrt[2];
         FE2αα[2, 0] := (-(1/Sqrt[7]))*Cos[2*γ]; FE2αα[2, 2] :=(1/Sqrt[7])*Sin[2*γ];
```

The fermionic part: $a^+\times\tilde{a}$ term

```
In[21]:= TE2F[λ_] := -Sqrt[2 λ + 1.]
```

Here, the coefficient given by square brackets in Eq.(9) is defined.

```
In[22]:= Coeff[L1_, K1_, L2_, K2_, L3_, K3_] := Piecewise[{{(-1)^L2*ClebschGordan[{L1, K1}, {L2, -K
             {L3, K3}], K1 > K2},{(-1)^L1*ClebschGordan[{L1, -K1}, {L2, K2}, {L3, K3}], K1 <= K2
```

The angular part of the electric quadrupole operator matrix elements given in Eq.(9) is calculated by

In[23]:=
```
Off[ClebschGordan::"phy"]; Off[SixJSymbol::"tri"]; Off[ClebschGordan::"tri"];
(* α term *)
Transitionα[τ_, L_, τp_, Lp_] := 16 π^2 / Sqrt[2 Lp + 1] Integrate[Sum[
  Sqrt[((1 + KroneckerDelta[Kp, 0]) / ((1 + KroneckerDelta[K, 0]) (1 + KroneckerDelta[μ, 0]))
   (ClebschGordan[{L, K}, {2, μ}, {Lp, Kp}] + Coeff[L, K, 2, μ, Lp, Kp]) F[τ, L, K] FE2α[2,
    μ] F[τp, Lp, Kp], {K, 0, L, 2}, {μ, 0, 2, 2}, {Kp, 0, Lp, 2}] Sin[3 γ], {γ, 0, π / 3}]
```

In[25]:=
```
(* α*α term *)
Transitionαα[τ_, L_, τp_, Lp_] := 16 π^2 / Sqrt[2 Lp + 1] Integrate[Sum[
  Sqrt[((1 + KroneckerDelta[Kp, 0]) / ((1 + KroneckerDelta[K, 0]) (1 + KroneckerDelta[μ, 0]))
   (ClebschGordan[{L, K}, {2, μ}, {Lp, Kp}] + Coeff[L, K, 2, μ, Lp, Kp])
   F[τ, L, K] FE2αα[2, μ] F[τp, Lp, Kp], {K, 0, L, 2},
  {μ, 0, 2, 2}, {Kp, 0, Lp, 2}] Sin[3 γ], {γ, 0, π / 3}]
```

■ β part with Kratzer Potential for constant interaction term:

In[26]:=
```
μ[τ_] := Sqrt[(τ + 3 / 2)^2 + 𝔻 β0^2]
ϵKodd[ξ_, τ_, τ1_, J_] := 𝔻^2 β0^2 / (μ[τ] + 1 / 2 + ξ)^2 - κ ((τ1 (τ1 + 3) - τ (τ + 3) - 7/4)) - κp J (J + 1)
ϵKoddN[ξ_, τ_, τ1_, J_] := (ϵKodd[ξ, τ, τ1, J] - ϵKodd[0, 0, 1 / 2, 3 / 2]) / (ϵKodd[0, 1, 3 / 2, 7 / 2] - ϵKodd[0, 0, 1 / 2, 3 / 2])
kodd[ξ_, τ_, τ1_, J_] := 𝔻 β0 / Sqrt[ϵKodd[ξ, τ, τ1, J]]
χKodd[ξ_, τ_, τ1_, J_, β_] := 𝕮Kodd[ξ, τ, τ1, J] (2 Sqrt[ϵKodd[ξ, τ, τ1, J]] β)^(2 μ[τ]+1)
  E^(-Sqrt[ϵKodd[ξ,τ,τ1,J]] β) ξ! / Pochhammer[2 μ[τ] + 1, ξ] LaguerreL[ξ, 2 μ[τ], 2 Sqrt[ϵKodd[ξ, τ, τ1, J]] β]
```

In[31]:=
```
𝕮Kodd[0, τ_, τ1_, J_] := ϵKodd[0, τ, τ1, J]^(1/4) / Sqrt[Gamma[4 μ[τ] + 2]] (1 / (2 μ[τ] + 1))^(1/2)
𝕮Kodd[1, τ_, τ1_, J_] := ϵKodd[1, τ, τ1, J]^(1/4) / Sqrt[Gamma[4 μ[τ] + 2]] ((2 μ[τ] + 1) / (4 μ[τ]^2 + 12 μ[τ] + 7))^(1/2)
```

In[33]:=
```
(* α term *)IIα[ξp_, τp_, τ1p_, Jp_, ξ_, τ_, τ1_, J_] :=
  NIntegrate[β χKodd[ξp, τp, τ1p, Jp, β] χKodd[ξ, τ, τ1, J, β], {β, 0, ∞}];
(* α*α term *)
IIαα[ξp_, τp_, τ1p_, Jp_, ξ_, τ_, τ1_, J_] :=
  NIntegrate[β^2 χKodd[ξp, τp, τ1p, Jp, β] χKodd[ξ, τ, τ1, J, β], {β, 0, ∞}];
```

In[35]:=
```
(* α term *)TCE2α[ξ_, τB_, τ1_, J_, LB_, ξp_, τBp_, τ1p_, Jp_, LBp_] :=
  Transitionα[τB, LB, τBp, LBp] IIα[ξ, τB, τ1, J, ξp, τBp, τ1p, Jp];
(* α*α term *)
TCE2αα[ξ_, τB_, τ1_, J_, LB_, ξp_, τBp_, τ1p_, Jp_, LBp_] :=
 Transitionαα[τB, LB, τBp, LBp] IIαα[ξ, τB, τ1, J, ξp, τBp, τ1p, Jp]
```

Kratzer Potential parameters D and β_0; interaction parameters κ and κ' should be given below:

In[37]:=
```
𝔻 = 100; β0 = 0.5; κ = -0.5; κp = 0.0
(* taking κp=0 corresponds to degenerate case, given in Fig.(2) *);
```

▪ Isoscaler Factors $\left\langle \begin{matrix} (\tau, 0) & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ L & 3/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\tau_1, \frac{1}{2}) \\ J \end{matrix} \right\rangle$ defined as ISF[τ, L, τ_1,J]

In[38]:=
```
ISF[0, 0, 1 / 2, 3 / 2] := 1; ISF[1, 2, 1 / 2, 3 / 2] := 1; ISF[1, 2, 3 / 2, 1 / 2] := 1;
ISF[1, 2, 3 / 2, 5 / 2] := 1; ISF[1, 2, 3 / 2, 7 / 2] := 1; ISF[2, 2, 3 / 2, 1 / 2] := -1;
ISF[2, 2, 3 / 2, 5 / 2] := 5 / 7; ISF[2, 2, 3 / 2, 7 / 2] := -2 / 7;
ISF[2, 2, 5 / 2, 3 / 2] := 1; ISF[2, 2, 5 / 2, 5 / 2] := √24 / 7;
ISF[2, 2, 5 / 2, 7 / 2] := √45 / 7; ISF[2, 4, 3 / 2, 5 / 2] := √24 / 7;
ISF[2, 4, 3 / 2, 7 / 2] := √45 / 7; ISF[2, 4, 5 / 2, 5 / 2] := -5 / 7;
ISF[2, 4, 5 / 2, 7 / 2] := 2 / 7; ISF[2, 4, 5 / 2, 9 / 2] := 1; ISF[2, 4, 5 / 2, 11 / 2] := 1;
ISF[3, 0, 5 / 2, 3 / 2] := 1 / √3 ; ISF[3, 0, 7 / 2, 3 / 2] := √2 / √3 ;
ISF[3, 3, 5 / 2, 3 / 2] := -√2 / √3 ; ISF[3, 3, 5 / 2, 5 / 2] := -√7 / √18 ;
ISF[3, 3, 5 / 2, 7 / 2] := √7 / √18 ; ISF[3, 3, 5 / 2, 9 / 2] := -√11 / √90 ;
ISF[3, 3, 7 / 2, 3 / 2] := 1 / √3 ; ISF[3, 3, 7 / 2, 5 / 2] := √11 / √18 ;
ISF[3, 3, 7 / 2, 7 / 2] := √11 / √18 ; ISF[3, 4, 5 / 2, 5 / 2] := √11 / √18 ;
ISF[3, 4, 5 / 2, 7 / 2] := √11 / √18 ; ISF[3, 4, 5 / 2, 9 / 2] := √49 / √198 ;
ISF[3, 4, 5 / 2, 11 / 2] := -√8 / √99 ; ISF[3, 4, 7 / 2, 5 / 2] := √7 / √18 ;
ISF[3, 4, 7 / 2, 7 / 2] := -√7 / √18 ; ISF[3, 4, 7 / 2, 11 / 2] := √91 / √99 ;
ISF[3, 6, 5 / 2, 9 / 2] := √104 / √165 ; ISF[3, 6, 5 / 2, 11 / 2] := √91 / √99 ;
ISF[3, 6, 7 / 2, 11 / 2] := √8 / √99 ; ISF[3, 6, 7 / 2, 13 / 2] := 1; ISF[3, 6, 7 / 2, 15 / 2] := 1;
```

In[39]:=
```
indices[τ_] := DeleteCases[Range[τ, 2 τ], 2 τ - 1];
```

In[40]:=
```
TE2α[λ_, ξ_, τ_, τ1_, J_, ξp_, τp_, τ1p_, Jp_] :=
 (1 / √(2 J + 1) Sum[ISF[τ, L, τ1, J] ISF[τp, Lp, τ1p, Jp] (-1)^(Lp+J+λ+3/2) √((2 J + 1) (2 Jp + 1))
    SixJSymbol[{Lp, Jp, 3 / 2}, {J, L, λ}] TCE2α[ξ, τ, τ1, J, L, ξp, τp, τ1p, Jp, Lp] t1
   , {L, indices[τ]}, {Lp, indices[τp]}])
```

In[41]:=
```
TE2αα[λ_, ξ_, τ_, τ1_, J_, ξp_, τp_, τ1p_, Jp_] :=
 (1 / √(2 J + 1) Sum[ISF[τ, L, τ1, J] ISF[τp, Lp, τ1p, Jp] (-1)^(Lp+J+λ+3/2) √((2 J + 1) (2 Jp + 1))
    SixJSymbol[{Lp, Jp, 3 / 2}, {J, L, λ}] TCE2αα[ξ, τ, τ1, J, L, ξp, τp, τ1p, Jp, Lp] t2
   , {L, indices[τ]}, {Lp, indices[τp]}])
```

In[42]:=
```
TFE2[ξ_, τ_, τ1_, J_, ξp_, τp_, τ1p_, Jp_] :=
 (1/Sqrt[2 J + 1] Sum[ISF[τ, L, τ1, J] ISF[τp, Lp, τ1p, Jp] (-1)^(L+Jp+2+3/2)
   Sqrt[(2 J + 1) (2 Jp + 1)] SixJSymbol[{3/2, Jp, L}, {J, 3/2, 2}]
   KroneckerDelta[ξ, ξp] KroneckerDelta[τ, τp] TE2F[2] tF
  , {L, indices[τ]}, {Lp, indices[τp]}])
```

normalised enegry spectrum

- In the matrix, the each line correspond to $\xi = 0_+$, $\xi = 0_-$, $\xi = 1_+$, $\xi = 1_-$ bands, respectively.

In[43]:=
```
ZeroPlusband = Table[ϵKoddN[0, τ, τ + 1/2, 2 τ + 3/2], {τ, 0, 5}];
ZeroMinusband = Table[ϵKoddN[0, τ, τ - 1/2, 2 (τ - 1) + 3/2], {τ, 1, 5}];
OnePlusband = Table[ϵKoddN[1, τ, τ + 1/2, 2 τ + 3/2], {τ, 0, 5}];
OneMinusband = Table[ϵKoddN[1, τ, τ - 1/2, 2 (τ - 1) + 3/2], {τ, 1, 5}];
MatrixForm[{ZeroPlusband, ZeroMinusband, OnePlusband, OneMinusband}]
```

Out[47]//MatrixForm=

{0., 1., 2.125374, 3.180043, 4.079029, 4.808243}				
{1.294041, 2.537032, 3.709317, 4.72592, 5.572751}				
{2.475516, 3.078561, 3.78258, 4.465572, 5.066548, 5.567796}				
{3.372603, 4.194238, 4.994846, 5.713439, 6.332303}				

ELECTRIC QUADRUPOLE TRANSITION RATIOS

In[48]:=
```
norm = TE2α[2, 0, 1, 3/2, 7/2, 0, 0, 1/2, 3/2]^2
```

Out[48]=
$$0.3850936\ t1^2$$

Δτ=1 Transitions

In[49]:=
```
NTE2α[λ_, ξ_, τ_, τ1_, J_, ξp_, τp_, τ1p_, Jp_] := TE2α[λ, ξ, τ, τ1, J, ξp, τp, τ1p, Jp]^2 / norm
```

- **ξ_+ = 0 INTRA-BAND BE(2)'s**

In[50]:=
```
Print["B(E2;7/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 1, 3/2, 7/2, 0, 0, 1/2, 3/2]]
Print["B(E2;5/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 1, 3/2, 5/2, 0, 0, 1/2, 3/2]]
Print["B(E2;1/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 1, 3/2, 1/2, 0, 0, 1/2, 3/2]]
Print["B(E2;11/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 11/2, 0, 1, 3/2, 7/2]]
Print["B(E2;9/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 9/2, 0, 1, 3/2, 7/2]]
Print["B(E2;9/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 9/2, 0, 1, 3/2, 5/2]]
Print["B(E2;7/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 7/2, 0, 1, 3/2, 7/2]]
Print["B(E2;7/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 7/2, 0, 1, 3/2, 5/2]]
Print["B(E2;5/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 5/2, 0, 1, 3/2, 7/2]]
Print["B(E2;5/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 5/2, 0, 1, 3/2, 5/2]]
Print["B(E2;5/2-->1/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 5/2, 5/2, 0, 1, 3/2, 1/2]]
```

```
B(E2;7/2-->3/2)=1.

B(E2;5/2-->3/2)=1.

B(E2;1/2-->3/2)=1.

B(E2;11/2-->7/2)=1.751914

B(E2;9/2-->7/2)=0.3754102

B(E2;9/2-->5/2)=1.376504

B(E2;7/2-->7/2)=0.8580805

B(E2;7/2-->5/2)=0.8938339

B(E2;5/2-->7/2)=0.4326156

B(E2;5/2-->5/2)=0.2681502

B(E2;5/2-->1/2)=1.051149
```

- **ξ_- = 0 INTRA-BAND BE(2)'s**

```
In[61]:= Print["B(E2;7/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 1 / 2, 3 / 2]]
         Print["B(E2;5/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 5 / 2, 0, 1, 1 / 2, 3 / 2]]
         Print["B(E2;1/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 1 / 2, 0, 1, 1 / 2, 3 / 2]]
         Print["B(E2;11/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 11 / 2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2]]
         Print["B(E2;9/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 9 / 2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2]]
         Print["B(E2;9/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 9 / 2, 0, 2, 3 / 2, 5 / 2]]
         Print["B(E2;7/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 7 / 2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2]]
         Print["B(E2;7/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 7 / 2, 0, 2, 3 / 2, 5 / 2]]
         Print["B(E2;5/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 5 / 2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2]]
         Print["B(E2;5/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 5 / 2, 0, 2, 3 / 2, 5 / 2]]
         Print["B(E2;5/2-->1/2)=", NTE2α[2, 0, 3, 5 / 2, 5 / 2, 0, 2, 3 / 2, 1 / 2]]

B(E2;7/2-->3/2)=1.255523

B(E2;5/2-->3/2)=1.255523

B(E2;1/2-->3/2)=1.255523

B(E2;11/2-->7/2)=2.3805

B(E2;9/2-->7/2)=0.5101072

B(E2;9/2-->5/2)=1.870393

B(E2;7/2-->7/2)=1.165959

B(E2;7/2-->5/2)=1.214541

B(E2;5/2-->7/2)=0.5878378

B(E2;5/2-->5/2)=0.3643623

B(E2;5/2-->1/2)=1.4283
```

- **ξ_- = 0 -->ξ_+ = 0 INTER-BAND BE(2)'s**

```
In[72]:= Print["B(E2;3/2-->3/2)=", NTE2α[2, 0, 1, 1 / 2, 3 / 2, 0, 0, 1 / 2, 3 / 2]]

B(E2;3/2-->3/2)=0.9885232
```

In[73]:=
```
Print["B(E2;7/2-->7/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 3 / 2, 7 / 2]]
Print["B(E2;7/2-->5/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 3 / 2, 5 / 2]]
Print["B(E2;7/2-->1/2)=", NTE2α[2, 0, 2, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 3 / 2, 1 / 2]]
```

```
B(E2;7/2-->7/2)=0.257763

B(E2;7/2-->5/2)=0.2474525

B(E2;7/2-->1/2)=0
```

Δτ=0,2 Transitions Bosonic part

In[76]:=
```
Print["B(E2;7/2-->5/2)=", TE2αα[2, 0, 1, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 3 / 2, 5 / 2]]
Print["B(E2;5/2-->1/2)=", TE2αα[2, 0, 1, 3 / 2, 5 / 2, 0, 1, 3 / 2, 1 / 2]]
Print["B(E2;11/2-->9/2)=", TE2αα[2, 0, 2, 5 / 2, 11 / 2, 0, 2, 5 / 2, 9 / 2]]
Print["B(E2;11/2-->7/2)=", TE2αα[2, 0, 2, 5 / 2, 11 / 2, 0, 2, 5 / 2, 7 / 2]]
```

```
B(E2;7/2-->5/2)=-0.4043505 t2

B(E2;5/2-->1/2)=0.2223814 t2

B(E2;11/2-->9/2)=-0.4310381 t2

B(E2;11/2-->7/2)=-0.379124 t2
```

Δτ=0,2 Transitions Fermionic part

In[80]:=
```
ISF[2, 2, 5 / 2, 9 / 2] := 0; ISF[2, 2, 5 / 2, 7 / 2] := √(45 / 49) ; ISF[2, 4, 5 / 2, 7 / 2] := -√(4 / 49)
```

In[81]:=
```
Print["B(E2;7/2-->5/2)=", TFE2[0, 1, 3 / 2, 7 / 2, 0, 1, 3 / 2, 5 / 2]]
Print["B(E2;5/2-->1/2)=", TFE2[0, 1, 3 / 2, 5 / 2, 0, 1, 3 / 2, 1 / 2]]
Print["B(E2;11/2-->9/2)=", TFE2[0, 2, 5 / 2, 11 / 2, 0, 2, 5 / 2, 9 / 2]]
Print["B(E2;11/2-->7/2)=", TFE2[0, 2, 5 / 2, 11 / 2, 0, 2, 5 / 2, 7 / 2]]
Print["B(E2;9/2-->7/2)=", TFE2[0, 2, 5 / 2, 9 / 2, 0, 2, 5 / 2, 7 / 2]]
```

```
B(E2;7/2-->5/2)=-0.7171372 tF

B(E2;5/2-->1/2)=-0.591608 tF

B(E2;11/2-->9/2)=-0.7247431 tF

B(E2;11/2-->7/2)=-0.3751587 tF

B(E2;9/2-->7/2)=-0.1736647 tF
```

This code calculates the Electric Quadrupole Transition ratios in the E(5/12) model.

Angular part (γ)

Bes functions labeled by F[τ, L, K]. Here K takes even values from 0 to L.

$$F[0,0,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\frac{\sqrt{3}}{2};\quad F[1,2,2] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{Sin}[\gamma];$$

$$F[1,2,0] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{Cos}[\gamma];\quad F[2,4,4] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{105}}{4}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}[2\gamma]\right)\right);$$

$$F[2,4,2] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{105}}{4}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,\mathrm{Sin}[2\gamma]\right);$$

$$F[2,4,0] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{105}}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{7}{5}}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\,\mathrm{Cos}[2\gamma]\right)\right);$$

$$F[2,2,2] := -(8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{Sin}[2\gamma];\quad F[2,2,0] := (8\pi^2)^{-1/2}\frac{\sqrt{15}}{2}\,\mathrm{Cos}[2\gamma];$$

$$F[3,6,6] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{315}{32}}\left(\frac{3\,\mathrm{Sin}[\gamma]}{4} - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}[3\gamma]\right);$$

$$F[3,6,4] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{315}{32}}\left(\frac{3\,\mathrm{Cos}[\gamma]}{2\sqrt{22}} - \frac{3\,\mathrm{Cos}[3\gamma]}{2\sqrt{22}}\right);$$

$$F[3,6,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{315}{32}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{11}}\,\mathrm{Sin}[\gamma] + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{5}}\,\mathrm{Sin}[3\gamma]\right);$$

$$F[3,6,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{315}{32}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{22}}\,\mathrm{Cos}[\gamma] + \frac{3\,\mathrm{Cos}[3\gamma]}{2\sqrt{154}}\right);$$

$$F[3,4,4] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{945}{88}}\left(-\frac{\text{Cos}[\gamma]}{2}+\frac{1}{2}\text{Cos}[3\gamma]\right);$$

$$F[3,4,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{945}{88}}\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\,\text{Sin}[\gamma]\right);$$

$$F[3,4,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{945}{88}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}}\,\text{Cos}[\gamma]+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\,\text{Cos}[3\gamma]\right);$$

$$F[3,3,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{63}{8}}\,\text{Sin}[3\gamma]; F[3,3,0] := 0; F[3,0,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{9}{4}}\,\text{Cos}[3\gamma];$$

$$F[4,8,8] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{3465}{256}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\text{Cos}[2\gamma]+\frac{1}{8}\text{Cos}[4\gamma]\right);$$

$$F[4,8,6] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{3465}{256}}\left(\frac{\text{Sin}[2\gamma]}{\sqrt{10}}-\frac{\text{Sin}[4\gamma]}{2\sqrt{10}}\right);$$

$$F[4,8,4] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{3465}{256}}\left(\frac{3\sqrt{\frac{7}{65}}}{4}-\frac{\text{Cos}[2\gamma]}{\sqrt{455}}-\frac{17\,\text{Cos}[4\gamma]}{4\sqrt{455}}\right);$$

$$F[4,8,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{3465}{256}}\left(15\sqrt{\frac{3}{2002}}\,\text{Sin}[2\gamma]+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2002}}\,\text{Sin}[4\gamma]\right);$$

$$F[4,8,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{3465}{256}}\left(\frac{9\sqrt{\frac{11}{65}}}{8}+\frac{23\,\text{Cos}[2\gamma]}{2\sqrt{715}}+\frac{\text{Cos}[4\gamma]}{8\sqrt{715}}\right);$$

$$F[4,6,6] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{693}{32}}\left(-\frac{1}{2}\text{Sin}[2\gamma]+\frac{1}{4}\text{Sin}[4\gamma]\right);$$

$$F[4,6,4] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{693}{32}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{22}}+\frac{\cos[2\gamma]}{\sqrt{22}}+\frac{\cos[4\gamma]}{2\sqrt{22}}\right);$$

$$F[4,6,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{693}{32}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{11}}\sin[2\gamma]+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{11}}\sin[4\gamma]\right);$$

$$F[4,6,0] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{693}{32}}\left(\frac{3}{2\sqrt{154}}+\sqrt{\frac{7}{22}}\cos[2\gamma]+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{22}}\cos[4\gamma]\right);$$

$$F[4,5,4] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{165}{8}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\cos[2\gamma]-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\cos[4\gamma]\right);$$

$$F[4,5,2] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{165}{8}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sin[2\gamma]+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sin[4\gamma]\right); F[4,5,0] := 0;$$

$$F[4,4,4] := \sqrt{6}\sqrt{\frac{9}{8\pi^2\,9360}}\left(5\sin[\gamma]^2+9\sin[\gamma]\sin[3\gamma]\right)\sqrt{\frac{35}{2}};$$

$$F[4,4,2] := \sqrt{6}\sqrt{\frac{9}{8\pi^2\,9360}}\left(5\sin[2\gamma]-18\cos[\gamma]\sin[3\gamma]\right)\sqrt{\frac{15}{2}};$$

$$F[4,4,0] := \sqrt{3}\sqrt{\frac{9}{8\pi^2\,9360}}\left(5\left(6\cos[\gamma]^2+\sin[\gamma]^2\right)-45\left(\sin[\gamma]\sin[3\gamma]\right)\right);$$

$$F[4,2,2] := \frac{\sqrt{15}\,(\sin[2\gamma]-3\sin[4\gamma])}{16\pi}; F[4,2,0] := \frac{1}{8\pi}\sqrt{15}\,(\cos[2\gamma]-3\cos[\gamma]\cos[3\gamma]);$$

$$F[5,10,10] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{9009}{512}}\left(\frac{5\sin[\gamma]}{8}-\frac{5}{16}\sin[3\gamma]+\frac{1}{16}\sin[5\gamma]\right);$$

$$F[5,10,8] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{9009}{512}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{38}}\cos[\gamma]-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{15}{38}}\cos[3\gamma]+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{38}}\cos[5\gamma]\right);$$

$$F[5,10,6] := \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{9009}{512}}\left(\frac{29}{8}\sqrt{\frac{5}{969}}\sin[\gamma]+\frac{1}{16}\sqrt{\frac{95}{51}}\sin[3\gamma]-\frac{23}{16}\sqrt{\frac{5}{969}}\sin[5\gamma]\right);$$

```
F[5, 10, 4] := 1/Sqrt[8 π^2] Sqrt[9009/512] (7/2 Sqrt[5/646] Cos[γ] - 9/4 Sqrt[5/646] Cos[3 γ] - 5/4 Sqrt[5/646] Cos[5 γ]);
F[5, 10, 2] :=
 1/Sqrt[8 π^2] Sqrt[9009/512] (113/4 Sqrt[5/25194] Sin[γ] + 1/8 Sqrt[1235/102] Sin[3 γ] + 37/8 Sqrt[5/25194] Sin[5 γ]);
F[5, 10, 0] := 1/Sqrt[8 π^2] Sqrt[9009/512] (45/4 Sqrt[33/8398] Cos[γ] + 15/8 Sqrt[39/7106] Cos[3 γ] - 3/8 Sqrt[33/8398] Cos[5 γ]);
```

Here, the Electric Quadrupole operator defined as FE2[2,μ] where μ takes even values from 0 to 2. Linear (α) and second-order ($\alpha\times\alpha$) terms are defined as FE2α and FE2$\alpha\alpha$, respectively.

```
FE2α[2, 0] := Cos[γ]/Sqrt[2]; FE2α[2, 2] := Sin[γ]/Sqrt[2];
FE2αα[2, 0] := -1/Sqrt[28] χ Cos[2 γ]; FE2αα[2, 2] := +χ/Sqrt[28] Sin[2 γ]
Coeff[L1_, K1_, L2_, K2_, L3_, K3_] :=
 Piecewise[{{(-1)^L2 ClebschGordan[{L1, K1}, {L2, -K2}, {L3, K3}], K1 > K2},
   {(-1)^L1 ClebschGordan[{L1, -K1}, {L2, K2}, {L3, K3}], K1 ≤ K2}}]
```

Angular (γ) part of the transition induced by linear term:

```
Off[ClebschGordan::"phy"]
Transitionα[τ_, L_, τp_, Lp_] := 16 π^2/Sqrt[2 Lp + 1] Integrate[Sum[
    Sqrt[((1 + KroneckerDelta[Kp, 0]) / ((1 + KroneckerDelta[K, 0]) (1 + KroneckerDelta[μ, 0])))
     (ClebschGordan[{L, K}, {2, μ}, {Lp, Kp}] + Coeff[L, K, 2, μ, Lp, Kp]) F[τ, L, K] FE2α[2,
      μ] F[τp, Lp, Kp], {K, 0, L, 2}, {μ, 0, 2, 2}, {Kp, 0, Lp, 2}] Sin[3 γ], {γ, 0, π / 3}]
```

Angular (γ) part of the transition induced by quadratic term:

```
Transitionαα[τ_, L_, τp_, Lp_] := 16 π^2/Sqrt[2 Lp + 1] Integrate[Sum[
    Sqrt[((1 + KroneckerDelta[Kp, 0]) / ((1 + KroneckerDelta[K, 0]) (1 + KroneckerDelta[μ, 0])))
     (ClebschGordan[{L, K}, {2, μ}, {Lp, Kp}] + Coeff[L, K, 2, μ, Lp, Kp])
     F[τ, L, K] FE2αα[2, μ] F[τp, Lp, Kp], {K, 0, L, 2},
    {μ, 0, 2, 2}, {Kp, 0, Lp, 2}] Sin[3 γ], {γ, 0, π / 3}]
```

▪ Radial part (β)

β_w is the width of the well

```
βw = 1;
(* Eq.2.12 of Phys. Rev. C 75-064316(2007)*)
Ap[τB_, τF_, τ1_, τ2_] :=
 τB (τB + 3) + k (τ1 (τ1 + 3) + τ2 (τ2 + 1) - τB (τB + 3) - τF (τF + 3)) + kp τF (τF + 3)
νp[τB_, τF_, τ1_, τ2_] := √(Ap[τB, τF, τ1, τ2] + 9 / 4)
xp[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] := BesselJZero[νp[τB, τF, τ1, τ2], ξ];
(* Eq.2.14 of Phys. Rev. C 75-064316(2007)*)
(*Energy eigenvalue equation*)εp[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] := (N[xp[ξ, τB, τF, τ1, τ2]] / βw)^2
(*Normalized Energy*)
εNormp[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] := (εp[ξ, τB, τF, τ1, τ2] - εp[1, 0, 0, 0, 0]) / (εp[1, 1, 0, 1, 0] - εp[1, 0, 0, 0, 0])
(*Normalization constants*)
Ccp[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] := (βw^2 / 2) BesselJ[νp[τB, τF, τ1, τ2] + 1, xp[ξ, τB, τF, τ1, τ2]]^2;
(* Eq.2.13 of Phys. Rev. C 75-064316(2007)*)f[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_, β_] :=
 (1 / √(Ccp[ξ, τB, τF, τ1, τ2])) β^(-3/2) BesselJ[νp[τB, τF, τ1, τ2], (β / βw) xp[ξ, τB, τF, τ1, τ2]];
Iα[ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] :=
  NIntegrate[β f[ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, β] f[ξ, τB, τF, τ1, τ2, β] β^4, {β, 0, 1}];
Iαα[ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_] :=
  NIntegrate[β^2 f[ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, β] f[ξ, τB, τF, τ1, τ2, β] β^4, {β, 0, 1}];
TCE2α[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_, LB_, ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, LBp_] :=
 (1 / (2 LB + 1)) (Transitionα[τB, LB, τBp, LBp] Iα[ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, ξ, τB, τF, τ1, τ2])^2
TCE2αα[ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_, LB_, ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, LBp_] :=
 (1 / (2 LB + 1)) (Transitionαα[τB, LB, τBp, LBp] Iαα[ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, ξ, τB, τF, τ1, τ2])^2
```

Isoscalar factors: $\langle \begin{matrix} (\tau_B, 0)\ (\tau_F, 0) \\ L_B \quad L_F \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\tau_1, \tau_2) \\ L_{BF} \end{matrix} \rangle$ represented by ISF[τB_, LB_, τF_, LF_, τ1_, τ2_, LBF_]

```
ISF[τp_, Lp_, τF_, LF_, τ1_, τ2_, L_] := Piecewise[{
    {1, τF == 0 (*&&LF==2τF&&τ1==τp&&Lp==2τp&&L==Lp*)},
    {1, τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp + 2 && Lp == 2 τp},
    {Sqrt[2 (2 τp + 1) / ((τp + 1) (4 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp && Lp == 2 τp},
    {Sqrt[(τp - 1) (4 τp + 3) / ((τp + 1) (4 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp && Lp == 2 τp - 2},
    {Sqrt[2 (τp - 1) (4 τp + 1) / ((τp + 1) (2 τp - 1) (4 τp - 1))],
     τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp - 1 && Lp == 2 τp},
    {-Sqrt[3 (2 τp + 1) / ((τp - 1) (τp + 1) (4 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF &&
      τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp - 1 && Lp == 2 τp - 2},
    {Sqrt[(τp - 2) τp (2 τp + 1) / ((τp - 1) (τp + 1) (2 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 &&
      τ2 == 0 && L == 2 τp - 1 && Lp == 2 τp - 3},
    {√((32 (τp - 2) (τp - 1) τp) / ((τp + 1) (2 τp - 1) (2 τp + 3) (4 τp - 3) (4 τp - 1))),
     τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp + 1 && τ2 == 0 && L == 2 τp - 2 && Lp == 2 τp},
    {1, τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp && τ2 == 1 && L == 2 τp + 1 && Lp == 2 τp},
    {Sqrt[(τp - 1) (4 τp + 3) / ((τp + 1) (4 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp && τ2 == 1 && L == 2 τp && Lp == 2 τp},
    {-Sqrt[2 (2 τp + 1) / ((τp + 1) (4 τp - 1))], τF == 1 && LF == 2 τF && τ1 == τp && τ2 == 1 && L == 2 τp && Lp == 2 τp - 2}
  }]

NISF[τp_, Lp_, τF_, LF_, τ1_, τ2_, L_] := Piecewise[{
    {(-1)^(L+Lp) Sqrt[τp (2 τp + 1) (2 Lp + 1) / ((τp + 2) (2 τp + 3) (2 L + 1))] ISF[τp - 1, L, 1, 2, τp, τ2, Lp], τ1 == τp - 1}},
  ISF[τp, Lp, τF, LF, τ1, τ2, L]
 ]

Off[SixJSymbol::"tri"]
Off[ClebschGordan::"tri"]
indices[τ_] := DeleteCases[Range[τ, 2 τ], 2 τ - 1];
jmin[L_] := Piecewise[{{L + 1 / 2, L == 0}, {L - 1 / 2, L ≠ 0}}]
```

```
TCα[λ_, ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_, LBF_, J_, ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, LBFp_, Jp_] := Sum[
  NISF[τB, LB, τF, LF, τ1, τ2, LBF] NISF[τBp, LBp, τFp, LFp, τ1p, τ2p, LBFp]
   Sum[(-1)^(LBp+J+j+λ) Sqrt[(2 LBF + 1) (2 LBFp + 1) (2 J + 1) (2 Jp + 1) (2 j + 1) (2 jp + 1)]
     SixJSymbol[{LB, LF, LBF}, {1 / 2, J, j}]
     SixJSymbol[{LBp, LFp, LBFp}, {1 / 2, Jp, jp}] SixJSymbol[{LB, J, j}, {Jp, LBp, λ}]
     Sqrt[1 / (2 J + 1)] Sqrt[TCE2α[ξ, τB, τF, τ1, τ2, LB, ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, LBp] (2 LB + 1)]
     KroneckerDelta[τF, τFp] KroneckerDelta[LF, LFp] KroneckerDelta[j, jp]
    , {j, jmin[LF], LF + 1 / 2, 1}
    , {jp, jmin[LFp], LFp + 1 / 2, 1}]
  , {LB, indices[τB]}
  , {LF, indices[τF]}
  , {LBp, indices[τBp]}
  , {LFp, indices[τFp]}]

TCαα[λ_, ξ_, τB_, τF_, τ1_, τ2_, LBF_, J_, ξp_, τBp_, τFp_, τ1p_, τ2p_, LBFp_, Jp_] := Sum[
  NISF[τB, LB, τF, LF, τ1, τ2, LBF] NISF[τBp, LBp, τFp, LFp, τ1p, τ2p, LBFp]
   Sum[(-1)^(LBp+J+j+λ) Sqrt[(2 LBF + 1) (2 LBFp + 1) (2 J + 1) (2 Jp + 1) (2 j + 1) (2 jp + 1)]
     SixJSymbol[{LB, LF, LBF}, {1 / 2, J, j}]
     SixJSymbol[{LBp, LFp, LBFp}, {1 / 2, Jp, jp}] SixJSymbol[{LB, J, j}, {Jp, LBp, λ}]
     Sqrt[1 / (2 J + 1)] Sqrt[TCE2αα[ξ, τB, τF, τ1, τ2, LB, ξp, τBp, τFp, τ1p, τ2p, LBp] (2 LB + 1)]
     KroneckerDelta[τF, τFp] KroneckerDelta[LF, LFp] KroneckerDelta[j, jp]
    , {j, jmin[LF], LF + 1 / 2, 1}
    , {jp, jmin[LFp], LFp + 1 / 2, 1}]
  , {LB, indices[τB]}
  , {LF, indices[τF]}
  , {LBp, indices[τBp]}
  , {LFp, indices[τFp]}]

(*Free parameters*)k = -1 / 4; kp = 5 / 2;
```

$\Delta\tau_B = +-1$ transitions :
Results in Fig .5 of Phys. Rev. C 75 - 064316 (2007)

```
(* normalized value given in the caption of Fig.5*)
normα = TCα[2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 / 2]^2
```

```
0.07452918
```

$\xi = 1$, $(\tau_B, \tau_F, \tau_1, \tau_2)=(\tau_B,0,\tau_B,0)$ intra - band Transitions

```
Print["B(E2;5/2-->1/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;3/2-->1/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;5/2-->1/2): 100.
```

```
B(E2;3/2-->1/2): 100.
```

```
Print["B(E2;9/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 9 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;9/2-->5/2): 167.4027
```

```
Print["B(E2;7/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;7/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;7/2-->5/2): 16.74027
```

```
B(E2;7/2-->3/2): 150.6625
```

```
Print["B(E2;5/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;5/2-->5/2): 133.9222
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 33.48055
```

```
Print["B(E2;3/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;3/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;3/2-->5/2): 50.22082
```

```
B(E2;3/2-->3/2): 117.1819
```

$\xi = 1, (\tau_B, \tau_F, \tau_1, \tau_2)=(\tau_B,1,\tau_{B+1},0)$ intra - band Transitions

```
Print["B(E2;9/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 9 / 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;9/2-->5/2): 128.6857
```

```
Print["B(E2;7/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;7/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;7/2-->5/2): 12.86857
```

```
B(E2;7/2-->3/2): 115.8172
```

```
Print["B(E2;5/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normα]
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normα]
```

```
B(E2;5/2-->5/2): 102.9486
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 25.73715
```

```
Print["B(E2;3/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 3/2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 5/2]^2 / normα]
Print["B(E2;3/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 3/2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 3/2]^2 / normα]
```

```
B(E2;3/2-->5/2): 38.60572
```

```
B(E2;3/2-->3/2): 90.08002
```

From $\xi = 2$ to ξ=1, (τ_B, τ_F, τ_1, τ_2)=(τ_B,0,τ_B,0) inter-band Transitions

```
Print["B(E2;1/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2]^2 / normα]
Print["B(E2;1/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3/2]^2 / normα]
```

```
B(E2;1/2-->5/2): 52.07658
```

```
B(E2;1/2-->3/2): 34.71772
```

```
Print["B(E2;5/2-->9/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 9/2]^2 / normα]
Print["B(E2;5/2-->7/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7/2]^2 / normα]
Print["B(E2;5/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5/2]^2 / normα]
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3/2]^2 / normα]
```

```
B(E2;5/2-->9/2): 31.31068
```

```
B(E2;5/2-->7/2): 2.504855
```

```
B(E2;5/2-->5/2): 15.02913
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 3.757282
```

```
Print["B(E2;3/2-->7/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3/2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7/2]^2 / normα]
Print["B(E2;3/2-->5/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5/2]^2 / normα]
Print["B(E2;3/2-->3/2):", " ",
 100 TCα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3/2]^2 / normα]
```

```
B(E2;3/2-->7/2): 33.81554
```

```
B(E2;3/2-->5/2): 5.635923
```

```
B(E2;3/2-->3/2): 13.15049
```

$\Delta\tau_B = 0, +-2$ transitions : Results in Fig .6 of Phys. Rev. C 75 - 064316 (2007)

```
(* normalized value given in the caption of Fig.6*)
normαα = TCαα[2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5/2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3/2]^2
```

```
0.0007855402 χ^2
```

$\xi = 1$, $(\tau_B, \tau_F, \tau_1, \tau_2)=(\tau_B,0,\tau_B,0)$ intra - band Transitions

```
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 100.
```

```
Print["B(E2;9/2-->7/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 9 / 2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7 / 2]^2 / normαα]
Print["B(E2;9/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 9 / 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;9/2-->7/2): 55.76654
```

```
B(E2;9/2-->5/2): 121.6725
```

```
Print["B(E2;7/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2]^2 / normαα]
Print["B(E2;7/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 4, 7 / 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;7/2-->5/2): 12.16725
```

```
B(E2;7/2-->3/2): 109.5052
```

```
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3 / 2]^2 / normαα]
Print["B(E2;5/2-->1/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5 / 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 13.68815
```

```
B(E2;5/2-->1/2): 310.4325
```

```
Print["B(E2;3/2-->1/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3 / 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;3/2-->1/2): 310.4325
```

From $\xi = 2$ to $\xi=1$, $(\tau_B, \tau_F, \tau_1, \tau_2)=(\tau_B,0,\tau_B,0)$ inter-band Transitions

```
Print["B(E2;5/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normαα]
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;5/2-->5/2): 60.86891
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 15.21723
```

```
Print["B(E2;3/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 5 / 2]^2 / normαα]
Print["B(E2;3/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3 / 2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;3/2-->5/2): 22.82584
```

```
B(E2;3/2-->3/2): 53.2603
```

```
Print["B(E2;1/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 5/2]^2 / normαα]
Print["B(E2;1/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3/2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;1/2-->5/2): 449.2662
```

```
B(E2;1/2-->3/2): 299.5108
```

$\xi = 1, (\tau_B, \tau_F, \tau_1, \tau_2)=(\tau_B,1,\tau_{B+1},0)$ intra - band Transitions

```
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 5/2, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 3/2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 0
```

```
Print["B(E2;9/2-->7/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 9/2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 7/2]^2 / normαα]
Print["B(E2;9/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 9/2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 5/2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;9/2-->7/2): 24.86797
```

```
B(E2;9/2-->5/2): 54.25738
```

```
Print["B(E2;7/2-->5/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 7/2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 5/2]^2 / normαα]
Print["B(E2;7/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 4, 7/2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 3/2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;7/2-->5/2): 5.425738
```

```
B(E2;7/2-->3/2): 48.83164
```

```
Print["B(E2;5/2-->3/2):", " ",
 100 TCαα[2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 5/2, 1, 1, 1, 2, 0, 2, 3/2]^2 / normαα]
```

```
B(E2;5/2-->3/2): 6.103955
```

KAYNAKLAR

Alonso, C. E., Arias, J. M., Vitturi, A. 2007. Shape phase transition in odd nuclei in a multi- *j* model: The U*B*(6) ⊗ U*F*(12) case. Physical Review C, 75, 064316.

Alonso, C. E., Arias, J. M., Vitturi, A. 2007. Critical-point symmetries in boson-fermion systems: The case of shape transitions in odd nuclei in a multiorbit model. Physical Review Letters, 98, 052501.

Basunia, M. S. 2009. Nuclear Data Sheets for A=187*. Nuclear Data Sheets, 110,999-1238.

Basunia, M. S. 2017. Nuclear Data Sheets for A=193*. Nuclear Data Sheets, 143, 1-381.

Bayrak, O., Boztosun, I. 2006. Arbitrary ℓ-state solutions of the rotating Morse potential by the asymptotic iteration method. Journal of Physics A: Mathematical and General, 39 (22), 6955-6964.

Baglin, C. M. 2009. Nuclear Data Sheets for A=179*. Nuclear Data Sheets, 110, 265-506.

Baglin, C. M. 2016. Nuclear Data Sheets for A=183*. Nuclear Data Sheets, 134, 149-430.

Basunia, M. S. 2004. Nuclear Data Sheets for A=175*. Nuclear Data Sheets, 102, 719-900.

Bes, D. R. 1959. The γ-dependent part of the wave functions representing γ-unstable surface vibrations. Nuclear Physics, 10, 373-385.

Bohr, A. 1952. The Coupling of Nuclear Surface Oscillations to the Motion of Individual Nucleons. Matematisk-fysiske Meddelelser Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 26, no. 14.

Bohr, A., Mottelson, B. R. 1998. Nuclear Structure Vol II: Nuclear Deformations (2. Edition), Singapore: World Scientific.

Bonatsos, D., Lenis, D., Minkov, N., Raychev, P. P., Terziev, P. A. 2004. Sequence of potentials interpolating between the U(5) and E(5) symmetries. Physical Review C, 69, 044316.

Boztosun, I., Bonatsos, D., Inci, I. 2008. Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential. Physical Review C, 77, 044302.

Caprio, M. A., Iachello, F. 2007. Analytic descriptions for transitional nuclei near the critical point. Nuclear Physics A, 781, 26-66.

Casten, R. F. 2006. Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. Nature Physics, 2, 811-820.

Cejnar, P., Jolie, J. ve Casten, R. F. 2010. Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei. Reviews of Modern Physics, 82, 2155-2212.

Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N. 2003. Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. Journal of Physics A: Mathematical and General, 36 (47), 11807-11816.

Ciftci, H., Hall, R. L., Saad, N. 2005. Construction of exact solutions to eigenvalue problems by the asymptotic iteration method. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38 (5), 1147-1156.

Davidson, P. M. 1932. Eigenfunctions for calculationg electronic vibrational intensities. Proceedings of the Royal Society A, 135, 459-472.
Edmonds, A. R. 1957. Angular Momentum in Quantum Mechanics (1st Edition), New Jersey: Princeton University.
Fetea, M. S., Cakirli, R. B., Casten, R. F., Warner, D. D., McCutchan, E. A., Meyer, D. A., Heinz, A., Ai, H., Gürdal, G., Qian, J., Winkler, R. 2006. First test of the E(5/4) Bose-Fermi symmetry: The structure of Ba135. Physical Review C, 73, 051301.
Firestone, R. B. 1996. Table of Isotopes CD-ROM Edition, Version 1.0, Wiley-Interscience.
Flügge, S. 1994. Practical quantum mechanics (2nd Edition), Berlin: Springer-Verlag.
Fortunato, L., Vitturi, A. 2003. Analytically solvable potentials for γ-unstable nuclei. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 29, 1341-1349.
Iachello, F. ve Arima, A. 1987. The Interacting Boson Model, Cambridge: Cambridge University Press.
Iachello, F. 2000. Dynamic Symmetries at the Critical Point. Physical Review Letter, 85 (17), 3580-3583.
Iachello, F. 2005. Dynamic Supersymmetries of Differential Equations with Applications to Nuclear Spectroscopy. Physical Review Letter, 95, 052503.
Iachello, F. and Van Isacker, P. 1991. The Interacting Boson-Fermion Model, Cambridge: Cambridge University Press.
Inci, I., Bonatsos, D., Boztosun, I. 2011. Electric quadrupole transitions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential. Physical Review C, 84, 024309.
Inci, I. ve Sonkaya,H. Coupling of a j=3/2 nucleon to even-even core with Davidson potential. Internotional Journal of Modern Physics E dergisinde vol. 27, no. 10, 1850085, 2018
Inci,I. ve Sonkaya,H. Odd deformed nuclei with gamma-instability The European Physical Journal Plus - Note of acceptance - EPJP-D-18-01864R1
Johnson, T. D. ve Singh, B. 2017. Nuclear Data Sheets for A=189*. Nuclear Data Sheets, 142, 1-330.
Joshi, P. K., Singh, B., Singh, S. ve Jain, A. S. 2016. Nuclear Data Sheets for A=139*. Nuclear Data Sheets, 138, 1-292.
Khazov, Y., Mitropolsky, I. ve Rodionov, A. 2006. Nuclear Data Sheets for A=131*.Nuclear Data Sheets, 107, 2715-2930.
Kondev, F. G. 2003. Nuclear Data Sheets for A=177*. Nuclear Data Sheets, 98, 801-1095.
Nica, N. 2016. Nuclear Data Sheets for A=157*. Nuclear Data Sheets, 132, 1-256.
Reich, C. W. 2005. Nuclear Data Sheets for A=155*. Nuclear Data Sheets, 104, 1-282.
Reich, C. W. 2012. Nuclear Data Sheets for A=159*. Nuclear Data Sheets, 113, 157-363.
Singh, B., Rodionov, A. A. ve Khozov, Y. L. 2008. Nuclear Data Sheets for A=135*. Nuclear Data Sheets, 109, 517-698.
Timar, J., Elekes, Z. ve Singh, B. 2014. Nuclear Data Sheets for A=129*. Nuclear Data Sheets, 121, 143-394.
Wilets, L. ve Jean, M. 1956. Surface oscillations in even-even nuclei. Physical Review, 102, 788-796.
Wu, S. C. 2005. Nuclear Data Sheets for A=181*. Nuclear Data Sheets, 106, 367-600.
Wu, S. C. 2005. Nuclear Data Sheets for A=185*. Nuclear Data Sheets, 106, 619-812.

Xiaolong, H. ve Mengxiao, K. 2014. Nuclear Data Sheets for A=195*. Nuclear Data Sheets, 121, 395-560.
Vanin, V. R., Maidana, N. L., Castro, R. M., Achterberg, E., Capurro, O. A. ve Marti, G. V. 2007. Nuclear Data Sheets for A=191*. Nuclear Data Sheets, 108, 2393-2588.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hüseyin SONKAYA

Doğum Yeri :Adıyaman/Çelikhan

Doğum Tarihi : 08.09.1988

Yabancı Dili : İngilizce

Adres : Kırkevler Mah. İhvan Sitesi B Blok Kat: 2 No: 4

E-posta : huseyinsnky44@gmail.com

Eğitim durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Atatürk lisesi

Lisans: İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü

Yüksek lisans: Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen bilimleri Fakültesi Fizik Anabilim Dalı

Yayınları

1. Inci, I. ve Sonkaya,H. Coupling of a j=3/2 nucleon to even-even core with Davidson potential. Internotional Journal of Modern Physics E dergisinde vol. 27, no. 10, 1850085, 2018

2. Inci,I. ve Sonkaya,H. Odd deformed nuclei with gamma-instability The European Physical Journal Plus - Note of acceptance - EPJP-D-18-01864R1

3. Turkish Physical Society 33^{rd} International Physics Congress held in Bodrum, TURKEY, September Poster Presentation 6-10, 2017

4. Turkish Physical Society 33^{rd} International Physics Congress held in Bodrum, TURKEY, September Oral Presentation 5-9, 2018