İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STİFNERLİ PANELLERDE GALERKİN YÖNTEMİ İLE BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülaydın KOÇ

Gemi İnşaat ve Gemi Makineleri Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaat ve Gemi Makineleri Mühendisliği Programı

OCAK 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STİFNERLİ PANELLERDE GALERKİN YÖNTEMİ İLE BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülaydın KOÇ
508111005

Gemi İnşaat ve Gemi Makineleri Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaat ve Gemi Makineleri Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Bahadır UĞURLU

OCAK 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 508111005 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Gülaydın KOÇ** ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"STİFNERLİ PANELLERDE GALERKİN YÖNTEMİ İLE BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME ANALİZİ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Yrd. Doç. Dr. Bahadır UĞURLU** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Ahmet ERGİN** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Yrd. Doç. Dr. İsmail BAYER Yıldız Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2013**
Savunma Tarihi : **21 Ocak 2014**

Sevgili aileme,

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasını tamamlanmasında yardımını esirgemeyen, tez danışmanım ve değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Bahadır Uğurlu' ya teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen değerli annem, babam ve kardeşime sonsuz şükranlarımı sunarım.

Aynı zamanda bu çalışma sırasında sürekli irtibat halinde olduğum ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Ocak 2014

Gülaydın KOÇ
(Gemi ve Deniz Teknolojisi Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
SEMBOL LİSTESİ ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
ÖZET ..... **xvii**
SUMMARY ..... **xix**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Yapılan Çalışmalar 4
1.2 Plak, Levha ve Stifnerli Panel Terminolojisi 7
1.3 Panel Göçme Modları 8
2. ANALİTİK BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME YÖNTEMLERİ **11**
2.1 Denge Denklemleri 11
2.2 Enerji İfadesi 12
3. İZOTROP PLAKLARIN BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLMESİ **17**
3.1 Denge Denklemlerinin Elde Edilmesi 17
3.1.1 Genel plak teorisi 17
3.1.2 Plak diferansiyel denklemi 21
3.1.2.1 Yanal yüklü plak 21
3.1.2.2 Düzlem içi yük etkisindeki plak 25
3.1.2.3 Yanal ve düzlem içi yük etkisindeki plak 27
3.2 Galerkin Metodu 31
3.3 İzotrop Plak İçin Galerkin Yönteminin Uygulanması 33
3.3.1 Kusursuz plak 34
3.3.2 Kusurlu plak 36
3.3.3 İzotropik plak için Galerkin metodu uygulaması 38
4. ORTOTROPİK PLAK YAKLAŞIM **43**
4.1 Panel Geometrisi 43
4.2 Panel Malzemesinin Özellikleri 45
4.3 Panel Sınır Koşulları 46
4.4 Ortotropik Plak Yaklaşımda Denge Denklemleri 47
4.5 Ortotropik Plak Yakşaşımı İçin Galerkin Yönteminin Uygulanması 50
4.5.1 Kusursuz geometrideki ortotropik plak için Galerkin yöntemi 50
4.5.2 Kusurlu geometrideki ortotropik plak için Galerkin yöntemi 52
4.5.3 Stifnerli panellere ortotropik plak yaklaşımı için Galerkin yönteminin uygulanması 55
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **63**
KAYNAKLAR **65**
ÖZGEÇMİŞ **69**

SEMBOL LİSTESİ

a : Enine stifnerler arası mesafe
A_{xs} : Boyuna stifner kesit alanı
A_{ys} : Enine stifner kesit alanı
b : Boyuna stifnerler arası mesafe
b_{fx} : Boyuna stifner flenşi genişliği
b_{fy} : Enine stifner flenşi genişliği
B : Plak genişliği
D : İzotropik plak Eğilme rijitliği
D_x : Ortotropik plak x doğrultusundaki eğilme rijitliği
D_y : Ortotropik plak y doğrultusundaki eğilme rijitliği
E : Young Modülü
E_x : Ortotropik plak x doğrultusundaki Young Modülü
E_y : Ortotropik plak y doğrultusundaki Young Modülü
F : Airy gerilme fonksiyonu
G : İzotropik plak Kayma modülü
G_{xy} : Ortotropik plak Kayma modülü
H : Ortotropik plak burulma rijitliği
h_{wx} : Boyuna stifner gövdesi yüksekliği
h_{wy} : Enine stifner gövdesi yüksekliği
I_f : Stifner flenşi atalet momenti
I_x : En kesitin y eksenine göre atalet momenti
I_y : En kesitin x eksenine göre atalet momenti
J_f : Stifner flenşi burulma atalet momenti
L : Plak boyu
n_{xs} : Boyuna stifner sayısı
n_{ys} : Enine stifner sayısı
N_x : x doğrultusundaki düzlem içi kuvvet bileşeni
N_y : y doğrultusundaki düzlem içi kuvvet bileşeni
N_{xy} : kayma düzlem içi kuvvet bileşeni
p : Lateral basınç yükü
P_x : Boyuna doğrultuda basma yükü
P_{xb} : Boyuna doğrultuda burkulma yükü
P_y : Enine doğrultuda basma yükü
t : Plak kalınlığı
t_{xs} : Boyuna stifner kalınlığı
t_{ys} : Enine stifner kalınlığı
U_{plate} : Plak şekil değiştirme enerjisi
U_{wep} : Stifner gövdesi şekil değiştirme enerjisi
U_{flange} : Stifner flenşi şekil değiştirme enerjisi
v^{lw} : Boyuna stifner y doğrulturundaki deplasman
v^{tw} : Enine stifner y doğrulturundaki deplasman
W_{plate} : Plak üzerinde düzlem içi kuvvetlerin yaptığı iş
W_{wep} : Stifner gövdesi üzerinde düzlem içi kuvvetlerin yaptığı iş

W_{flenge} : Stifner flenşi üzerinde düzlem içi kuvvetlerin yaptığı iş
w : z doğrultusundaki deplasman
w_0 : Başlangıç kusuru
σ_x : boyuna doğrultudaki normal gerilme
σ_{xb} : boyuna doğrultudaki burkulma gerilmesi
σ_{xeq} : plak nihai gerilmesi
σ_y : enine doğrultudaki normal gerilme
σ_0 : Akma gerilmesi
σ_{0x} : Boyuna stifnerli panel eşdeğer akma gerilmesi
σ_{0y} : Enine stifnerli panel eşdeğer akma gerilmesi
σ_{0p} : Plak akma gerilmesi
σ_{0s} : Stifner akma gerilmesi
$_{xy}$: Kayma gerilmesi
ε_x : x doğrultusundaki şekil değiştirme bileşeni
ε_y : y doğrultusundaki şekil değiştirme bileşeni
γ_{xy} : Kayma şekil değiştirme bileşeni
β : Narinlik oranı
ϑ : Poisson oranı
ϑ_x : Ortotropik plak x doğrultusundaki Poisson oranı
ϑ_x : Ortotropik plak y doğrultusundaki Poisson oranı
π : Toplam plak Şekil değiştirme potansiyel enerjisi
δ : Varyasyon operatörü
ζ : lateral yük düzeltme faktörü

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Plak geometrisi 38
Çizelge 3.2 : Plak malzeme özellikleri 39
Çizelge 3.3 : İzotrop plak nihai gerilmesi 41
Çizelge 4.1 : Stifnerli panel için levha malzeme özellikleri 55
Çizelge 4.2 : Stifner malzeme özellikleri 55
Çizelge 4.3 : Stifnerli panellerin geometrik ölçüleri 55
Çizelge 4.4 : Stifnerli panel boyunun nihai gerilmelere etkisi 58
Çizelge 4.5 : Farklı stifner ebatlarının nihai gerilmelere etkisi 59
Çizelge 4.6 : Stifnerli gövde yüksekliğinin nihai gerilmelere etkisi 59
Çizelge 4.7 : Stifnerli sayısının nihai gerilmeye etkisi 60

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Stifnerli panel yapıları 7
Şekil 1.2 : Göçme modu I 8
Şekil 1.3 : Göçme modu II 8
Şekil 1.4 : Göçme modu III 9
Şekil 1.5 : Göçme modu IV 9
Şekil 1.6 : Göçme modu V 10
Şekil 2.1 : Stabilite analojisi 13
Şekil 3.1 : Sonsuz küçük plak parçası eksenel şekil değiştirme 17
Şekil 3.2 : Sonsuz küçük plak elemanında açısal şekil değiştirme 18
Şekil 3.3 : Plak gerilme halleri 20
Şekil 3.4 : Uniform moment dağılımı 21
Şekil 3.5 : Kuvvet dağılımı 22
Şekil 3.6 : Plağın iç kuvvetlerinin değişimleri 22
Şekil 3.7 : Plağın moment değişimleri 24
Şekil 3.8 : Plak orta düzlemine etki eden kuvvetler 26
Şekil 3.9 : Plak kenarları kuvvet dağılımı 27
Şekil 3.10 : Orta düzleme etkiyen kuvvet gösterimi 28
Şekil 3.11 : İzotrop plak için yük deplasman eğrisi 41
Şekil 4.1 : İki eksenli basma/cekme ve lateral yük ile yüklenmiş stifnerli panel 44
Şekil 4.2 : (a) boyuna; (b) enine T stifner geometrisi 46
Şekil 4.3 : Değişen panel boyu için yük deplasman eğrisi 58
Şekil 4.4 : Farklı stifner boyutları için yük deplasman eğrisi 59
Şekil 4.5 : Stifnerli gövde yüksekliği için yük deplasman eğrisi 60
Şekil 4.6 : Stifner sayısı için yük deplasman eğrisi 61

STİFNERLİ PANELLERDE GALERKİN YÖNTEMİ İLE BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME ANALİZİ

ÖZET

Stifnerli paneller, levha ve stifnerlerin yapısına ve rijitliğine göre çeşitli modlarda göçmeye maruz kalırlar. Bu çalışmada, plak ve stifnerlerinin bir bütün gibi hareket etmesi sonucu birlikte burkulduğu ve ortotropik plak davranışı sergilediği göçme modunda inceleme gerçekleştirilmiş ve küçük stifnerlerle (yeterince güçlü olmayan stifnerlerle) desteklenmiş stifnerli panellerin bu moddaki büyük sehimli eğilme analizi Galerkin yöntemi vasıtasıyla yaklaşık olarak yapılmıştır.

Çalışmada, stifnerli panele ortotropik plak yaklaşımında Galerkin yönteminin kullanımını daha iyi anlamak amacıyla izotrop plakta Galerkin yönteminin kullanımına değinilmiştir. İzotrop plak için denge ve uyumluluk denklemlerinin çıkarılışı Von Karman' ın nonlineer plak teorisi yardımıyla anlatılmış ve Galerkin yöntemi ile yaklaşık hesap için bir uygulamaya yer verilmiştir.

Galerkin metodunun arkasındaki matematiksel teori oldukça kompleks görünmesine rağmen fiziksel yorumu oldukça basittir. Yöntem uygulanırken sistemin dengede olduğu (iç kuvvetler ve dış kuvvetlerin birbirine eşit olduğu) kabul edilir. Yapısal sistemin dengesi, sonsuz küçük plak elemanının dengesini ifade eden diferansiyel ifadenin tüm yapı üzerine entegre edilmesiyle elde edilir. Bu entegrasyon sonucu elde edilen sisteme ait difreansiyel ifadenin küçük deplasman varyasyonlarıyla birlikte kullanımıyla temel varyasyonel denklemine ulaşılır. Problem için gerekli sınır koşullarına karşılık gelen bağımsız sürekli eğilme ifadesinin temel varyasyon denkleminde kullanılmasıyla deneme fonksiyonunun belirsiz kat sayıları belirlenir ve eğilme deplasmanları yaklaşık olarak bulunur.

İzotrop plakta, sisteme ait kısmi diferansiyel ifadeler (uyumluluk ve denge denklemi) kullanılarak yapılacak olan Galerkin yöntemiyle yaklaşık analiz iki aşamadan oluşur: Uyumluluk denkleminin çözülmesiyle Airy gerilme ifadesinin belirlenmesi ve Denge denkleminin Galerkin yöntemi integrasyonunda kullanılmasıyla da sistemin düşey deplasman ifadesinin W_{mn} bilinmeyen kat sayıları saptanması.

Boyuna doğrultuda basma yüklemesiyle birlikte yanal basınç yüklemesine maruz bırakılan izotrop plak için Galerkin metoduyla büyük sehimli plak eğilmesi analizi çalışma içerisinde yapılmıştır. Bu yaklaşık analiz sonucu elde edilen nihai gerilme değeri ile nonlineer sonlu elemanlar metoduyla saptanan nihai gerilme değeri karşılaştırılmış ve Galerkin metodu ile yük deplasman eğrileri verilmiştir.

Küçük stifnerlerle desteklenmiş stifnerli panel yapılarında genel burkulma esnasında plak ve stifnerin birlikte bir bütün gibi hareket etmesi neticesinde stifnerli panel ortotropik plak davranışı sergiler ve böylece stifnerli panele ortotropik plak gibi yaklaşmak mümkün olur. Ortotropik plak yaklaşımında önemli olan bir hususta ortotropik plak malzeme sabitlerinin belirlenmesidir. Bu malzeme sabitlerinin

belirlenmesi, izotropik plak malzeme sabitlerinin ve stifnerlelerin yapısal özelliklerinin kullanımıyla yapılmaktadır.

Stifnerli panellerde, Galerkin metodu ile ortotropik plak büyük sehimli eğilme analizi izotrop plakta yapılan analiz işleminin benzeridir. Ortotropik plak kısmi diferansiyel ifadeleri kullanılarak yapılacak olan yaklaşık analiz iki aşamadan meydana gelir: Uyumluluk denklemi ile Airy gerilme ifadesinin belirlenmesi ve denge denkleminin Galerkin yöntemi integrasyonunda kullanılması ile sistemin düşey deplasman ifadesinin W_{mn} bilinmeyen kat sayıları saptanması. Böylece plak boyutlarına göre değişen m (boyuna burkulma mod sayısı) ve n (enine burkulma mod sayısı) burkulma modlarındaki eğilme deplasmanları hesaplanabilir.

Boyuna doğrultuda basma yüklemesi ve yanal basınç yüklemesine maruz bırakılan boyuna stifnerler desteklenmiş stifnerli panel için Galerkin metoduyla ortotropik plak büyük sehimli eğilme analizi yapılmıştır. Bu yaklaşık analiz sonucu elde edilen nihai gerilme değerleri ile nonlineer sonlu elemanlar yöntemiyle saptanan nihai gerilme değerleri karşılaştırılmaları ve Galerkin metodu ile yük deplasman eğrileri çalışma içinde gösterilmiş ve

- Stifnerli panelin boyunun karşılaştırmasında, panel boyu kısa olduğunda kullanılan yöntem ile nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucunun birbirine daha yakın olduğu
- Stifner atalet büyüklüklerine göre karşılaştırmada, stifner flenşlerinin aynı ama stifner gövdesinin farklı boyutlarda olduğu durumlarda atalet kuvvetinin küçük olduğu halin nonlineer sonlu elemanlar sonucu ile kullanılan yöntem sonucunun birbirine daha yakın olduğu
- Stifner gövde yüksekliği karşılaştırmasında, gövde yüksekliğinin daha kısa olduğu durumda nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucu ile Galerkin yöntemi sonucunun birbirine daha yakın olduğu
- Stifner sayısı karşılaştırmasında, stifner sayısının daha az olduğu durumda nonlineer sonlu eleman analizi ile Galerkin yöntemi sonucunun birbirine daha yakın olduğu

sonuçlarına ulaşılmıştır.

LARGE DEFLECTION BENDING ANALYSIS OF STIFFENED PANELS BY USING THE GALERKİN METHOD

SUMMARY

One of issues of great importance of a floating structure used in freight and passenger vessels is that strength against buckling event in shipbuilding industry like structure in various fields of industry in the world. In the linear region, researcher works a topic which in terms of strength permissible stresses on the structural design of the maximum load to be carried by the structure in this sector. After von Karman developed his nonlinear plate theory at 1910, lots of researchers present expressions and methods based his theory.

In this study, stiffened panel consist of plate and stiffeners categorized different six types of deflection caused by material conditions (like material geometry or rigidity) with various loading types and especially Mod I is studied.

Mode I typically represents the collapse pattern when the stiffeners are relatively weak. In this case, the stiffeners can buckle together with plating, the overall (grillage) buckling behavior remaining elastic. The stiffened panel can normally sustain further loading even after overall (grillage) buckling in the elastic regime occurs, and the ultimate strength is eventually reached by formation of a large yield region inside the panel and/or along the panel edges. In Mode I, the stiffened panel behaves as an “orthotropic plate”.

After partial differantial equations of plate with perfect geometry and plate with imperfect geometry is determined via Von Karman nonlinear plate theory in static state of equilibrium, the large deflection isotropic plate nonlinear analysis study is performed using Galerkin Method.

Galerkin’s method can be applied successfully to such diverse types of problems as small- and large-deflection theories, linear and nonlinear vibration and stability problems of plates and shells, provided that differential equations of the problem under investigation have already been determined. Although the mathematical theory behind Galerkin’s method is quite complex, its physical interpretation is relatively simple. İt is assumed that the structural system is in equilibrium. Consequently, the sum of all external and internal forces is zero. The equilibrium of the structural system is obtained by integrating these differential equations over the entire structure.

Galerkin method with two partial differential equations of system is used to make nonlinear analysis of isotropic plate. After Airy stress function is determined using equilibrium equations of partial differantial equations, compatibility equation is applied in Galerkin expression to get third degree equations of system used to determine unknown coefficient of lateral deflections. After that, lateral deflections can be computed.

While simply supported isotropic plate is subjected under combined longitudinal axial compression and lateral pressure, large deflection plate nonlinear analysis is made using Galerkin method. Unknown coefficient of lateral deflection is determined using this method and then ultimate strength determined by this method is compared with nonlineer finite element solutions of this system of ultimate strength. Furthermore, load displacement curve is presented using Galerkin method.

The response of the stiffened plate structure can be studied at three levels, namely at the entire plate structure level, the stiffened panel level and the bare plate level. This study is primarily concerned with the second level (i.e. the stiffened panel level) in which a plate is supported by a large number of longitudinals and transverses. However, the results and insights developed in this study can of course be applied to a specific isotropic plate (i.e. at the third level).

The length and breadth of the stiffened panel are denoted by L and B, respectively. The thickness of the plate is t. The x axis of the panel is always taken in one direction, e.g. parallel to the ship length, and the y axis is taken in the direction normal to the x direction. Therefore, one may not always have to take the panel length to be located along the long edges. A benefit of this type of coordinate system is that computerization of strength calculations is much easier for a large size plated structure which is composed of a number of individual panels in which some panels are "wide" while the others are "long".

The stiffened panel in ship structures is generally subjected to combined in-plane and lateral pressure loads. In-plane loads are caused by the distributions of weight and buoyancy, and augmented by waves during operation of the vessel at sea. Lateral pressure is due to water pressure and cargo weight. The magnitude of water pressure depends on the vessel draft, and the value of cargo pressure is determined by the amount and density of cargo loaded. Both are affected by vessel motions and accelerations. This study considers that the stiffened panel is subjected to combined biaxial compression/tension and lateral pressure loads. Also, the stiffened panels will be normally subjected to lateral loads first and the other in-plane load components will be applied additionally.

To calculate the distribution of membrane stresses inside the idealized orthotropic plate, this study attempts to analytically solve the nonlinear governing differential equations of large deflection orthotropic plate. The reliability of orthotropic plate analysis depends significantly on various elastic constants that need to be determined when a stiffened panel is replaced by an equivalent orthotropic plate.

For an isotropic plate, the number of independent elastic constants is two, namely the elastic modulus E and the Poisson ratio ϑ. For the orthotropic plate, four elastic constants, namely E_x, E_y, ϑ_x and ϑ_y, are required to describe the orthotropic stress–strain relationship of the plate. It is of crucial importance to accurately determine various elastic constants used in governing differential equations since the reliability of orthotropic plate analysis depends significantly on them. In this study, these elastic constants are theoretically determined.

To analyze large deflection orthotropic plate approach nonlinear analysis using Galerkin method is the same as large deflection isotropic plate nonlinear analysis using Galerkin method. After partial differantial equations of orthotropic plate with perfect geometry and orthotropic plate with imperfect geometry is determined via Von Karman nonlinear plate theory in static state of equilibrium, large deflection orthotropic plate nonlinear analysis study is performed using Galerkin Method.

Galerkin method with two partial differential equations of system is used to make nonlinear analysis of orthotropic plate. After Airy stress function is determined using equilibrium equations of partial differantial equations, compatibility equation is applied in Galerkin expression to get third degree equations of system used to determine unknown coefficient of lateral deflections. After that, lateral deflections can be computed.

While simply supported longitudinally stiffened panel is subjected under combined longitudinal axial compression and lateral pressure, large deflection orthotropic plate nonlinear analysis is made using Galerkin method. Unknown coefficient of lateral deflection of stiffened panel is determined using this method and ultimate strength of stiffened panel determined by this method is compared with nonlineer finite element solutions of this system of ultimate strength. So that, the following results are determined:

- Comparing the length of a stiffened panel, when the panel is short, the results of nonlinear finite element method and Galerkin method are closer
- Comparing the inertia moment of a stiffener, when inertia moment of a stiffener is small while stiffener flanges are same but stiffener webs are different, the results of nonlinear finite element method and Galerkin method are closer
- Comparing the depth of a stiffener, when the depth of web is short, the results of nonlinear finite element method and Galerkin method are closer
- Comparing the number of stiffeners, when the panel has less stiffener, the results of nonlinear finite element method and Galerkin method are closer

1. GİRİŞ

Yük ve yolcu taşımacılığında kullanılan gemilerin bünyesel ve çevresel faktörlerden kaynaklanan gerilmelere karşı yeterli mukavemete sahip olup olmadığı yapı üzerine çalışan mühendislerin ilgilendikleri temel problemlerden biri olmuştur.

Desteksiz levhaların bünyede nadiren yer bulduğu yapısal bir sistem olarak gemilerde stifnerlerle desteklenen panellerin genellikle çok ince yapıda olması, burkulmaya karşı gerekli dayanıma sahip olmaları mühendis ve araştırmacıların yapısal tasarım sırasında karşılaştıkları başlıca sorunlardan biri haline getirmiştir.

Lineer elastik bölgede müsaade edilen gerilme değerlerine göre yapısal tasarım yapılan gemi inşa sanayisinde, gelişen sektörel ihtiyaçlar ve özel talepler doğrultusunda üretilmesi istenen gemi sayısı gün geçtikçe artmaktadır ve güvenli bir şekilde taşınabilecek maksimum yükün belirlenmesi için gerilme analizinin yapılması elzem bir hale gelmiştir.

Stifnerli gemi panellerinin burkulma davranışları panelin geometrisine (uzun veya geniş panel), yükleme koşullarına, stifner geometrisine bağlı olarak farklılık göstermektedir. Genelde stifnerli paneller iki şekilde burkulur: destek elemanların arasında kalan plak kısmının veya stifnerin burkulması (lokal burkulma) ve stifnerler ve plağın birlikte burkulması (genel burkulma). Burkulma analizinde klasik yaklaşım, lineer teorinin uygulanabildiği küçük deplasmanlı durumu incelemekle yetinir. Yer değiştirmenin levha kalınlığına göre küçük alındığı (maksimum sehimin plak kalınlığının onda birini geçmediği durumda) lineer teoride

- Plak orta düzleminden ölçülen sehim değerleri plağın kalınlığına göre küçük değerdedirler. Bu nedenle orta düzlemin eğimi küçük olacaktır. Karesi ise "1" in yanında çok küçük kalacaktır.
- Eğilmeden dolayı orta düzlemde gerinme ve deformasyon görülmeyecektir.
- Orta düzleme dik olan yüzey normalleri, dikliklerini eğilmeden sonra da korurlar. Bunun anlamı, yanal yüzeylerde τ_{yz}, τ_{xz} kayma gerinmeleri oluşamayacaktır. Plağın eğilmesi, eğilme gerilmeleri dolayısıyla olacaktır.

Yanal yüklemenin olmaması nedeniyle plağın kalınlığı boyunca oluşması beklenen ε_z bileşenleri sıfır değerinde olacaktır.

- Plağın orta düzlemine dik olarak oluşacak olan σ_z normal gerilme değerleri diğer gerilme bileşenlerine göre küçük değerlerde olacağından sıfır değerde alınmaktadır. Fakat bu kabul yüksek değerdeki yoğun yüklerin uygulandığı yüzeylerin etrafında geçerli olamayacağı açıktır.

kabulleri altında yer değiştirmeler

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \textbf{(1.1)}$$

şeklindedir. Burada u boyuna yer değiştirme, v enine yerdeğiştirme, w düşey deplasman, z noktanın orta düzleme olan uzaklığı, x noktanın orijine olan boyuna uzaklığı ve y noktanın orijine olan enine uzaklığıdır. Birim şekil değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \textbf{(1.2)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ile verilir. Burada ε_x boyuna şekil değiştirme, ε_y enine şekil değiştirme, γ_{xy} kayma şekil değiştirmesidir. Normal gerilmeler ve kayma gerilmesi

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\vartheta^2}\ \varepsilon_x + \vartheta\varepsilon_y\ = -\frac{Ez}{1-\vartheta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\vartheta^2}\ \varepsilon_y + \vartheta\varepsilon_x\ = -\frac{Ez}{1-\vartheta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad \textbf{(1.3)}$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\ 1+\vartheta}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\vartheta}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

biçimindedir (Szilard,2004). Burada σ_x boyuna normal gerilme, σ_y enine normal gerilme, τ_{xy} kayma gerilmesi, E Young modülü ve ϑ poison oranıdır.

Büyük sehimli plak eğilmelerinde ise lineer teori yerine nonlineer plak teorisinin kulanılması analizin güvenilirliği için gereklidir. Nonlineer plak teorisi *malzeme nonlineerliği* ve *geometrik nonlineerlik* olmak üzere iki tür nonlineerlikten bahseder.

Geometrik nonlineerite, eksenel kuvvetten dolayı meydana gelen sehimleri, deforme olmuş elemanın geometrisinin değişimini, büyük deplasmanları, elemanlardaki lineer elastik şekil değişmeleri kapsar. Elemanlarda veya sistemde meydana gelen deformasyonlar küçükse, yapının içinde beliren gerilme eşitsizliğin etkileri ihmal edilir. Böylece, eksenel kuvvet ile birlikte diğer kesit tesirlerine maruz elemanlarda, eksenel kuvvet ve kesit tesirleri arasındaki etkileşim ihmal edilir. Gerilme eşitsizliği etkilerinin ihmal edildiği durumlarda kuvvetlerle deplasmanlar arasındaki ilişkiyi ifade eden *[K]* matrisi sabit ve doğrusaldır. Eğer yapının içinde beliren gerilme eşitsizliğinin etkileri ihmal edilmiyorsa, yani, yer değiştirmeler büyükse *[K]* doğrusal olmayan bir matristir. Nonlineer *[K]* matrisi iki matristen meydana gelir.

$$K_T = K_L + K_G \qquad \textbf{(1.4)}$$

Burada $[K_L]$ lineer elastik rijitlik matrisi ve $[K_G]$ ise geometrik rijitlik matrisi olarak adlandırılmaktadır. Çeşitli kesit tesirleri ve tipleri için değişik yaklaşımlara dayanarak, düzlem ve uzay çerçeve elemanları için çıkarılmış ve literatüre geçmiştir. Denklem (1.4) ile verilen $[K_T]$ ise tanjant (teğet) rijitlik matrisi olarak adlandırılmaktadır. $[K_T]$ matrisi, düğüm yüklerinin artımsal değerleri ile düğüm deplasmanlarının artımsal değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Malzemenin elastik veya inelastik olması durumuna göre, elastik tanjant rijitlik matrisi veya inelastik tanjant rijitlik matrisi olarak adlandırılır.

Malzeme nonlineerliği ise plağın malzeme özelliklerinden kaynaklanan bir durumdur. Plastisite, hiperelastisite ve sünme gibi malzeme özelliklerinden kaynaklanan nonlineerlik bu gruba girer. Plağın, nonlineer elastik veya elasto-plastik bölgelerde sergilediği malzeme davranışları bu nonlineerliği temsil eder.

Plakların büyük sehimlerle ilişkili nonlineer davranışları ondokuzuncu yüzyılın sonlarından itibaren bir çok araştırmacının ilgi alanına girmiştir. Plakların büyük sehimli eğilmesi ile ilgili ilk önemli çalışma Von Karman (1910) tarafından yapılmış, hem plak orta düzleminin eğilmesinin hem de yüzey gerilmelerinin plağın eğilme davranışı üzerindeki etkileri dikkate alınmıştır. Nonlineerlik üzerine sunulan bir çok

çalışmada yer alan nonlineerlik ifadelerinin temelinde Von Karman' ın nonlineer teorisi yatmaktadır.

Bu çalışmada, plak eğilmesi üzerindeki nonlineer etkilerden geometrik kaynaklı olanlar incelenecektir. Geometrik nonlineerlikte plak, küçük başlangıç sehimine (maruz kalınan etkilerden dolayı plak bünyesindeki küçük şekil değiştirmelere) sahip olması ya da olmaması durumuna göre *kusurlu* veya *kusursuz* geometride plak olarak isimlendirilir. Kusursuz plaklarda nonlineer etkiler dikkate alınmazken, kusurlu plakların analizinde büyük sehimlerin eğilme davranışı üzerindeki etkilerine yer verilir.

Galerkin yöntemi ile plakların büyük sehimli eğilme analizi yapılırken iki nokta üzerinde odaklanılır: kusurlu veya kusursuz geometrideki plağın statik denge halindeki kısmi diferansiyel denklemlerin belirlenmesi ve Galerkin yöntemi ile yaklaşık hesabın yapılması. Airy gerilme fonsiyonunun saptanması ve düşey doğrultudaki w deplasmanı ifadesi içerisinde yer alan W_{mn} belirsiz katsayılarının belirlenmesi analizin birer ara basamağıdır.

1.1 Yapılan Çalışmalar

Caldwell (1965), stifnerli levhalarda lokal çökmeleri incelediği çalışmasında, kolon modellenmesini kullanarak efektif genişlik metodunu geliştirmiştir. Bu çalışmada, stifnerli panellerin davranışları için daha önceden deneysel ve teorik olarak incelenmiş olan eş değer kalınlıkta plaklar kullanılmış ve burkulma etkisi dikkate alınarak eğilme momentleri elde edilmiştir. Burkulan bölgede; akma gerilmesi ifadesi bir mukavemet azaltma faktörü kullanılarak belirlenmiştir.

Ortotropik plakların elastik davranışlarının analizi için nonlineer bir teori ortaya koyan Mansour (1971), küçük başlangıç sehimine sahip düzlemsel basma/çekme yükü ve yanal basınçla yüklenmiş stifnerli panellerin burkulma sonrası davranışları için dizayn eğrileri sunmuştur.

Suryanarayana ve Ramachandran (1978), büyük sehimli dikdörtgen ortotropik plaklarda, sistemin kuvvet ve momentlerinin dengesinden çıkarılan denge denklemlerini ve nonlineer gerilme-şekil değiştirme yaklaşımını kullanarak ortotropik plakların analizi üzerine çalışmıştır. Von Karman lineer gerilme-şekil

değiştirme yaklaşımını, benzer şekilde malzeme nonlineerliği için kullanmış ve sayısal bir çözüm önermiştir.

Gemi kirişi mukaveti üzerine Caldwell' in (1965) yaptığı çalışmanın bir benzeri basitleştirilmiş yöntemler olarak Smith (1977) tarafından geliştirilmiştir. Hızlı ve etkin sonuçlar üreten bu yöntem özellikle stifnerlerin yapısal davranış üzerinde belirleyici olduğu durumlarda daha doğru sonuçlar vermektedir.

İdealize edilmiş Yapısal Birim Metodu (ISUM), Ueda ve Rashed (1984) tarafından geliştirilen sonlu eleman temelli bir yöntemdir. Yöntemde, yapının nonlineer davranışları idealleştirilmiş en büyük yapısal birimlere ayrılmış ve yapı bir analitik formda tanımlanmıştır. Yöntemin sistem serbestlik derecesinin ve düğüm noktası sayısının azaltılmasına olanak vermesiyle, yapı daha etkin ve basit bir biçimde modellenebilmekte ve çözüm süresi kısalmaktadır.

Little (1986), ince dikdörtgen büyük sehimli ortotropik plaklar için enerji minimizasyon bazlı nonlineer bir analiz yöntemi önermiştir. Çalışma, Kirchhoff-Love hipotezine dayanmakla beraber farklı sınır koşullarında çeşitli düzlem içi ve düzleme dik yükleme durumları için büyük yer değiştirmelere de müsaade etmektedir.

Mukhopadhyay ve Bera (1993), homojen, uniform kalınlıklı, elastik ortotropik bir plağın ısıl etkiler altındaki davranışını geometrik nonlineerlikleri dikkate alarak Galerkin metodu ile araştırmıştır.

Gordo ve Soares (1996), kiriş elemanının göçme davranışını temsil eden basitleştirilmiş yöntem kaynaklı yeni bir yöntem geliştirmiştir. Yöntem, kiriş kolon elemanlarının çökmelere karşı dayanıklığının basitleştirilmiş yöntem yaklaşımıyla ifade edilmesine dayanan nihai moment hesabını içermektedir.

Bedaira (1997), stifnerli panellerin eksenel olmayan basma yüklemelerindeki stabilitesi üzerine çalışmış ve ortotropik plak teorisini kullanarak burkulma yüklemesi için ifadeler geliştirmiştir. Plak ve stifnerlerin rijit bir şekilde birleşmesiyle oluşan stifnerli paneller için enerji eşitlikleri sunmuştur. Yöntem stifnerin ve plağın geometrik özelliklerine göre kritik burkulma yükünün hesabında kullanılmıştır.

Paik ve diğ. (1999), stifnerli panelleri levha ve stifnerden oluşan yapılar olarak modellemiş ve üç farklı göçme modu önererek nihai mukavemet analizi için analitik

bir yöntem geliştirmiştir. Stifner gövdesinde dönme olmadan stifner kaynaklı kusurlarda ve plak kaynaklı kusurlarda Perry-Robertson yaklaşımı kriter belirlemek için kullanılmıştır. Ayrıca temel plastisite düzeltmesini sağlayan Johnson-Ostenfeld formulasyonu stifner gövdesinin burkulma mukavemeti ifadesi ile birlikte kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen teorik sonuçlar eksenel olmayan basma yüklemesi altındaki stifnerli panel mukavemetinin deneysel sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Paik ve diğ. (2001), iki eksenli basma/çekme yükü ve yanal yük etkisi altındaki stifnerli panellerin nihai mukavemet analizini büyük sehimli ortotropik levha yaklaşımı ile gerçekleştirmiştir. Bu çalışmada, stifnerli panelin iki adet olan izotropik plak malzeme sabitleri, daha fazla sayıda bulunan ortotropik plak malzeme sabitlerinin hesabı için kullanılmıştır. Nonlineer analiz, geometrik nonlineerliğin kullanıldığı sistemin kısmi diferansiyel denklemlerinin çözülmesiyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmada, stifnerli panel bütün olarak göçmeye uğrayan yapı olarak tasarlanmış ve ifadeler ortotropik plak davranışı sergilenen göçme moduna sahip yapı için verilmiştir.

Paik ve Kim (2002), stifnerli panellerin çeşitli yükleme koşullarına göre nihai mukavemetini hesaplamak amacıyla kulanıma hazır eşitlikler çıkarmıştır. İfadelerden elde edilen sonuçlar Norveç loydu DNV' nin tasarım kılavuzunda belirtilen kriterler kullanılarak hesaplananlarla karşılaştırılmış, stifnerin çok güçlü olduğu durumlarda daha iyi sonuçlar üreten DNV kriterlerinin stifnerin zayıf olduğu durumlarda düşük mukavemet değerleri verdiği gözlenmiştir.

Fujiko ve Keading (2002), stifnerli paneli ISUM yöntemini kullanarak plak ve kiriş elemanı olarak modellemiş ve stifnerli panelin nihai mukavemet analizini malzeme ve geometrik nonlineerlikleri de dikkate alarak yapmıştır.

Chen (2003), kiriş kolon yaklaşımı kullanarak stifnerli panellerin nihai mukavemet analizi için kademeli göçme analizi tekniğini geliştirmiştir. Çalışmada sunulan sayısal hesaplama yöntemi, farklı yükleme durumları (eksenel basma, lateral basınç ve birleşik yüklemelerde) için sonlu eleman sonuçları ve Paik ve diğ. (2001) tarafından geliştirilen ortotropik levha modeli sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Fujiko ve diğ. (2005), enine yönde eksenel ve yanal olarak yüklenmiş sürekli bir levhanın nihai mukavemeti için elastik ve elasto plastik büyük şekil değiştirme

analizi gerçekleştirmiş ve stifnerli panellerin nihai mukavemet analizi için eşitlikler sunmuştur.

1.2 Plak, Levha ve Stifnerli Panel Terminojisi

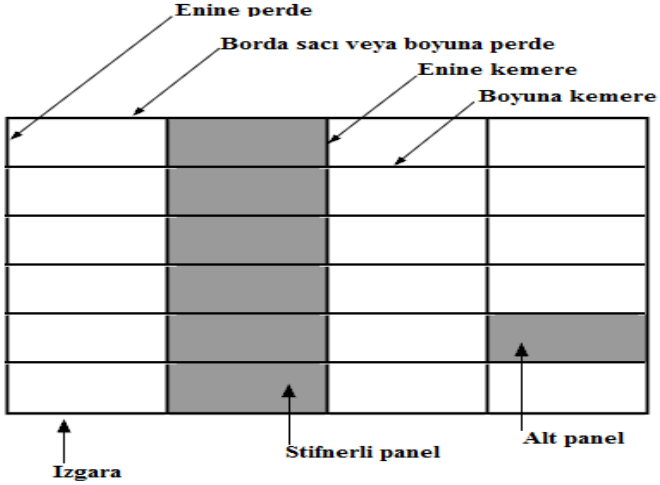
Kendi düzlemindeki bir takım kuvvetlerin etkisi altında bulunan ve orta düzlemi şekil değiştirme sonrasında da yine düzlem kalan bir taşıyıcı sisteme *levha (panel)* adı verilir. Eğer aynı cisim, başlangıçta düzlem olan orta düzleminde bir eğilme meydana getirecek şekilde yüklemeye maruz bırakılırsa, bu durumda *plak* adını alır (Girkmann,1965).

Chen (2003), stifnerli panelleri (Şekil 1.1) büyüklüklerine göre üç grup olarak sınıflandırmıştır:

- Izgara sistemi: boyuna ve enine elemanlarla desteklenmiş çok büyük panel
- Stifnerlenmiş panel: iki enine destek elemanının arasında kalan ve boyuna stifnerlerle desteklenmiş panel
- Alt panel: iki boyuna stifner ve iki enine destek elemanı arasında kalan panel

Stifnerlenmiş panellerin stabilitesi bileşenleri olan levhaya, enine ve boyuna destek elemanlarına ve stifnerlere bağlıdır. Levhalar, yapıya etkiyen eksenel ve yanal yükleri taşırken, stifnerler de bu yüklerin bir kısmını üzerine alarak yapıya destek olur ve yapının stabilitesini artırır. Destek elemanları ise stifnerlere ara destek sağlar.

Enine destek elemanları boyuna stifnerlerin burkulmasını önleyecek rijitliğe sahip olmadığında levha, boyuna stifnerler ve enine destek elemanları birlikte burkulurlar ama destek elemanı yeterli rijitliğe sahip ise, sadece iki enine destek elemanı arasındaki panelde burkulma gerçekleşir Chen (2003). Enine destek elemanları genellikle yeterli rijitliğe sahiptir ve burkulma ve göçme analizi iki destek elemanı arası bölgede gerçekleşir.

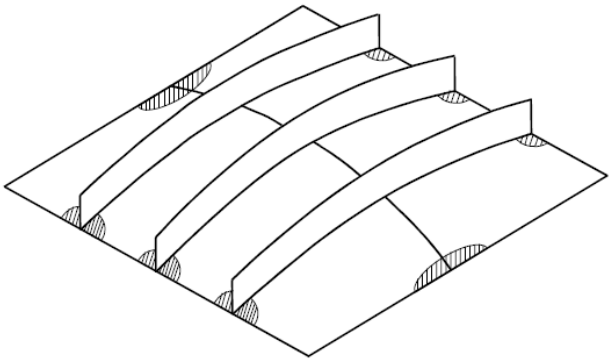


Şekil 1.1 : Stifnerli panel yapıları

1.3 Panel Göçme Modları

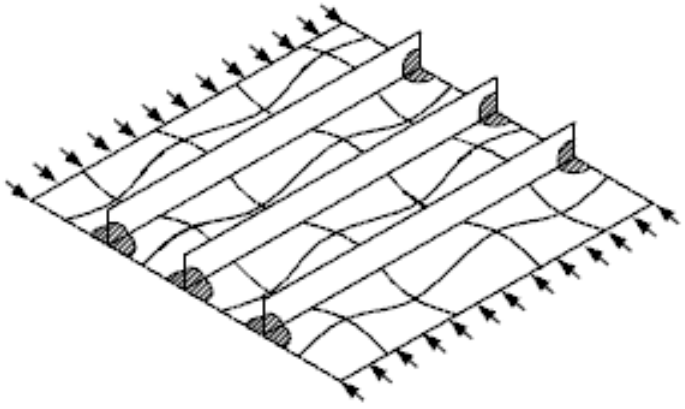
Stifnerli paneller, levha ve stifnerlerin yapısına ve rijitliğine göre çeşitli modlarda göçmeye maruz kalırlar. Panellerin göçme davranışları altı genel başlık altında toplanabilir (Paik ve diğ., 2001).

Mod I, burkulma olayında levha ve stifner hareketlerinin birlikte ve bir bütünmüş gibi gerçekleşmesi sonucu meydana gelen göçmedir. Genellikle stifnerlerin yeterince güçlü olmadığı panellerde gözlenen bu modda burkulma başlangıçta elastik bölgededir. Şekil değiştirmelerin artmasıyla birlikte panel boyunca ve kenarlarda akma meydana gelmeye başlar (Şekil 1.2) ve panel nihai yük taşıma kapasitesine ulaşır. Bu durumda burkulan stifnerlenmiş panellerin ortotropik plak gibi davrandığı kabul edilir.



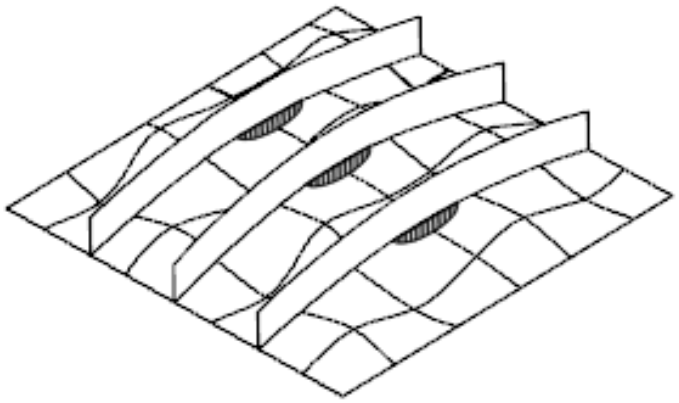
Şekil 1.2 : Göçme modu I

İki eksenli yükler etkisindeki panelin burkulmasıyla oluşan göçme durumunu tanımlayan Mod II panel kenarında stifner-levha bağlantı noktalarının akmaya maruz kalmasıyla ilişkilidir (Şekil 1.3) ve genellikle narin levhalarda gözlenir.



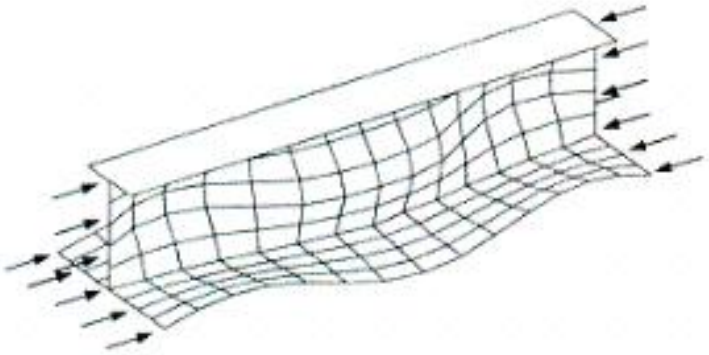
Şekil 1.3 : Göçme modu II

Mod III stifnerlenmiş panelin stifner panel kombinasyonundaki stifnerin kolon veya kiriş-kolon elemanı biçiminde burkulması sonucu meydana gelen göçme halidir ve boyuna doğrultuda yüklenen panelde, levha-stifner birleşim hattının orta bölgelerinde meydana gelen akmayla (Şekil 1.4) ilişkilidir. Bu durumdaki panellerde stifner rijitliği orta seviyededir.



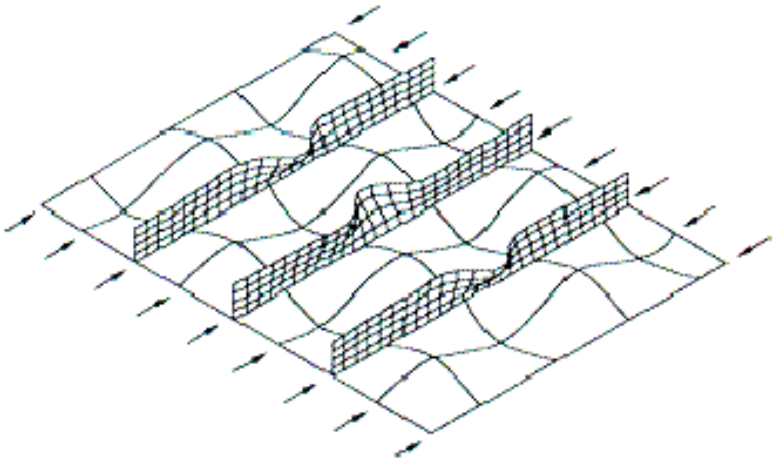
Şekil 1.4 : Göçme modu III

Mod IV stifner gövdesinin lokal burkulması sonucu meydana gelen göçmedir. Yükseklik/kalınlık oranı büyük olan stifnerlerde lokal burkulmayla gerçekleşen göçmeyi (Şekil 1.5) temsil eder. Stifner flenşinin, stifner gövdesinin burkulmasını engellemeye yetecek kadar rijitliğe sahip olmadığı durumlarda da bu göçme şekli gerçekleşir.



Şekil 1.5 : Göçme modu IV

Mod V stifner gövdesinin burulmalı burkulması (tripping) sonucu meydana gelen (Şekil 1.6) göçmedir. Bu modda stifnerin yükseklik/kalınlık oranı yüksektir.



Şekil 1.6 : Göçme modu V

Mod VI panelin aşırı akmaya maruz kalması sonucu meydana gelen göçmedir ve düşük narinlikteki panellerde, gerilmelerin burkulma öncesi akma seviyesine ulaşmasıyla ilişkilidir.

Bu çalışmada, stifnerli panel göçme modlarından sadece stifnerler ve plağın bir bütün gibi hareket ettikleri ve ortotropik plak davranışı sergiledikleri Mod I için analiz ve değerlendirme yapılmıştır. Ortotropik plak yaklaşımında bulunulan stifnerli panel için gerekli ortotropik malzeme sabitleri ve nonlineer analizinde kullanılan diferansiyel ifadeler bu göçme modu sayesinde belirlenmiştir.

2. ANALİTİK BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLME YÖNTEMLERİ

Büyük sehimli plak analizindeki önemli bir husus plağın orta düzleminde meydana gelen şekil değiştirmedir. Nonlineer plak analizinde bu şekil değiştirmenin hesaplara ve analitik çözüm aşamalarına yansıtılması gerekir.

Elastik bölgede gerçekleşen büyük sehimli eğilme analizinin yaklaşık olarak (Galerkin yöntemi, Rayleigh-Ritz yöntemi gibi Ağılıklı artıklar metodu kullanarak) yapılmak istendiği çalışmalarda denge denklemleri ve enerji ifadeleri sıkça kullanılan eşitliklerdir. Bu bölümde, kısaca bu ifadeler tanıtılacaktır.

2.1 Denge Denklemleri

Timoshenko ve Krieger (1959), mekanik etkilerin dengesinde plağın büyük sehimli davranışı, maruz bırakılan yükleme durumuna (eksenel yükleme, yanal basınç veya birleşik yükleme) göre sisteminin kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümüyle belirlenir.

Kusursuz bir geometriye sahip büyük sehimli plaklar için uyumluluk ve denge denklemleri

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}-E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0 \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{t}{D}\left(\frac{p}{t}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0 \qquad \textbf{(2.2)}$$

şeklindedir (Hughes ve Paik, 2010). Burada, w plağın düşey doğrultudaki deplasmanı, E elastisiide modülü, t plak kalınlığı, p lateral basınç yükü, F Airy gerilme fonksiyonu, D eğilme rijitliğidir ve

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\vartheta^2)} \qquad \textbf{(2.3)}$$

ile verilmektedir.

Geometrik nonlineerliliğe de sahip büyük sehimli plaklar için ifadeler

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}-E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{t}{D}\left[\frac{p}{t}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial x\partial y}\right]=0 \tag{2.5}$$

haline gelir. Burada w_0 plağın küçük başlangıç sehimidir. F Airy gerilme fonksiyonu ile düzlem içi kuvvetler N_x, N_y ve N_{xy} arasında

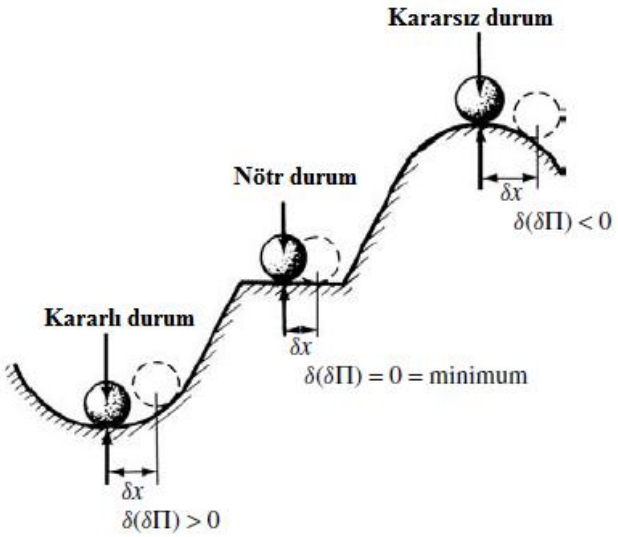
$$N_x=t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$
$$N_y=t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{2.6}$$
$$N_{xy}=-t\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

ilişkisi vardır (Timoshenko ve Krieger, 1959). N_x, N_y ve N_{xy} düzlem içi kuvvet değerleri, verilen geometri ve yapının maruz kaldığı yük bileşenlerine bağlı olarak düzlem gerilme probleminin çözümünden elde edilir. Geometri ve yükleme koşullarının kompleksleştiği durumlarda düzlem gerilme probleminin çözümünü gerçekleştirmek oldukça zorlaşmaktadır. Bu sebeble basit geometri ve yükleme koşulları için çözüm yapılabilmektedir.

2.2 Enerji İfadesi

Enerji yöntemi mekanik sistemin dengesine (stabilitesine) dayanır. Yapı sahip olduğu potansiyel enerji miktarına göre *kararsız, kararlı* ve *nötr durum* olmak üzere üç halde bulunur. Sistemin potansiyel enerjisinin küçük δx mesafesi uzaklıktaki potansiyel enerjiyle (Şekil 2.1) karşılaştırılmasıyla bu haller açıklanabilinir. Eğer sistem potansiyel enerjisi büyük değere sahip ise kararsız durumda, küçük değere sahipse kararlı durumda, eşit ise nötr durumda olarak kabul edilir. Mekanik sistemin dengesinde sistemin potansiyel enerjisi ektremum değerine ulaşır. Bu aşamada

sistemin potansiyel enerjisi minimum ve sistem kararlı haldedir. Mekanik sistemler kararlı halden kararsız hale geçerken nötr durumdan geçiş yapar. Levhaların elastik stabilite problemlerinin matematiksel modellenmesinde nötr durum dallanma noktası olarak kabul edilir (Szilard, 2004).



Şekil 2.1 : Stabilite analojisi

Byklum (2002), korunumlu sistemlerde minimum enerji ilkesi virtüel enerji ifadesinden türetilir. Mümkün olan tüm göçme durumlarında sistemin minimum enerjisi statik denge halindeki cismin potansiyel enerjisinin kinematik uyumluluğuyla belirlenmektedir.

Virtüel iş prensibi "kinematik olarak uyumlu tüm virtüel yer ve şekil değiştirmelerde iç ve dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işlerin toplamı sıfır ise sistem statik denge halindedir" şeklinde tanımlanır ve

$$\delta\Pi = \delta U + \delta W = 0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

ile verilir (Byklum, 2002). Burada δU plağın iç virtüel enerjisini, δW dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi, δ varyasyon operatörünü temsil etmektedir. Virtuel iş prensibi çok genel bir ifadedir ve hem korunumlu hem de korunumsuz sistemlerde geçerlidir.

Yapının şekil değiştirmiş haldeki deplasmanı w ise sistemin minimum enerjiye sahip olduğu

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w} = 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

şeklinde gösterilir (Byklum, 2002).

Kirchhhoff- Love hipotezine göre, plak orta düzlemine dik doğrultudaki normal gerilme, kayma gerilmeri ve bu gerilmelerin sabit küçük plak kalınlığı boyunca değişimleri yok sayılabilecek kadar küçüktür. Böylece

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad ; \quad \tau_{zx} = 0 \qquad ; \quad \tau_{zy} = 0 \tag{2.9}$$

kabulü yapılabilir ve bu durumda ince plak tanımına uyan dikdörtgen bir plağın elastik şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} \; dxdydz \tag{2.10}$$

ile verilir (Amabili, 2008). Plak gerilmeleriyle birim şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{2.11}$$

biçimindedir ve (2.10) potansiyel enerji ifadesinde gerilmeler şekil değiştirmeler cinsinden yazılarak,

$$U = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)} \iiint_V \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dxdydz \tag{2.12}$$

elde edilir.

Düzlem içi kuvvetler cinsinden dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş

$$W = \frac{-1}{2}\iint_A \left(N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + qw \right) dxdy \tag{2.13}$$

ile verilir ve N_x, N_y ve N_{xy} düzlem içi kuvvetler gerilmeler cinsinden

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz,$$
$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \qquad \textbf{(2.14)}$$
$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx} dz,$$

biçimindedir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Stifnerli panel analizinde genellikle iki burkulma moduyla ilgilenilir. Bunlar, plağın güçlü stifnerlerle desteklenmiş olduğu durumda stifnerler arasında kalan plak bölümünün lokal burkulması ve plağın zayıf stifnerlerle desteklenmesi durumunda oluşan stifner ile plağın birlikte burkulmasıdır. Stifner ve plağın bir bütün gibi davrandığı burkulma durumundaki stifnerli panelin enerjisi

$$\Pi = U_{plak} + U_{sgövde} + U_{sflenş} - W_{plak} - W_{sgövde} - W_{sflenş} \qquad \textbf{(2.15)}$$

ile verilir (Ventsel ve Krauthammer, 2001). Burada, *Π* enerji ifadesini, U_{plak} plağın elastik şekil değiştirme enerjisini, $U_{sgövde}$ stifner gövdesinin elastik şekil değiştirme enerjisini, $U_{sflenş}$ stifner flenşinin elastik şekil değiştirme enerjisini, W_{plak} düzlem içi kuvvetlerin plak üzerinde yaptığı işi, $W_{sgövde}$ düzlem içi kuvvetlerin stifner gövdesinde yaptığı işi ve $W_{sflenş}$ düzlem içi kuvvetlerin stifner flenşinde yaptığı işi temsil etmektedir.

Stifnerli panelin plağının şekil değiştirme enerjisi

$$U_{plak} = \frac{E}{2\ 1-\vartheta^2} \iiint_V \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\vartheta\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\vartheta}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dxdydz \qquad \textbf{(2.16)}$$

şeklindedir ve tek stifner gövdesi için eğilme enerjisi

$$U_{sgövde} = \frac{E}{2\ 1-\vartheta^2} \iiint_V \left\{ \ \varepsilon_{xx}^{b\ 2} + \ \varepsilon_{zz}^{b\ 2} + 2\vartheta\varepsilon_{xx}^b\varepsilon_{zz}^b + \frac{1-\vartheta}{2}\ \gamma_{xy}^{b\ 2} \right\} dxdzdy \qquad \textbf{(2.17)}$$

biçimindedir. Ayrıca stifner flenşinin eğilme enerjisi

$$U_{sflenş} = \sum_{i=1}^{nxs} \frac{EI_{fl}}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v_i^{wl}}{\partial x^2}|_{z=h} \right)^2 dx + \frac{GJ_{fl}}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v_i^{wl}}{\partial x \partial z}|_{z=h} \right)^2 dx$$
$$\sum_{i=1}^{nys} \frac{EI_{ft}}{2} \int_0^B \left(\frac{\partial^2 v_i^{wt}}{\partial y^2}|_{z=h} \right)^2 dy + \frac{GJ_{ft}}{2} \int_0^B \left(\frac{\partial^2 v_i^{wt}}{\partial y \partial z}|_{z=h} \right)^2 dy \qquad \textbf{(2.18)}$$

biçimindedir. Burada ilk kısımlar flenşin eğilmesi, ikinci kısımlar ise flenşin burulmasıyla ilişkilidir. EI_{fl} ve EI_{ft} boyuna ve enine stifner flenşlerinin eğilme rijitlikleri, GJ_{fl} ve GJ_{ft} boyuna ve enine stifner flenşinin burulma rijitlikleridir. Stifnerli plağın plak kısmına etkiyen düzlem içi kuvvetlerin yaptığı iş

$$W_{plate} = \frac{-1}{2}\iint_A \left(N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + qw \right) dxdy \qquad \textbf{(2.19)}$$

şeklindedir (Byklum, 2002).

Stifnerli panelin tek bir boyuna stifnerinde düzlem içi kuvvetlerin yaptığı iş

$$W_{stifner} = -\frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{h_w} N_w \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dxdz - \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{b_f} N_f \left(\frac{\partial v}{\partial x}|_{z=h_w}\right)^2 dxdz \qquad \textbf{(2.20)}$$

biçimindedir. Burada N_w ve N_f stifner gövdesine ve flenşine etkiyen kuvvetleri temsil etmektedir. Aynı şekilde enine stifner için de düzlem içi kuvvetlerin yaptığı işi vermek mümkündür. Böylece stifnerli panelin tüm boyuna ve enine stifnerleri için toplam iş

$$W_{sgövde} = -\sum_{i=1}^{nxs} \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{h_{wl}} N_i^{wl} \left(\frac{\partial v_i^{wl}}{\partial x}\right)^2 dxdz - \sum_{i=1}^{nys} \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{h_{wt}} N_i^{wt} \left(\frac{\partial v_i^{wt}}{\partial x}\right)^2 dydz \qquad \textbf{(2.21)}$$

$$W_{sflenş} = -\sum_{i=1}^{nxs} \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{b_{fl}} N_i^{fl} \left(\frac{\partial v_i^{wl}}{\partial x}|_{z=h_{wl}}\right)^2 dxdz - \sum_{i=1}^{nys} \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{b_{ft}} N_i^{fl} \left(\frac{\partial v_i^{wt}}{\partial x}|_{z=h_{wt}}\right)^2 dydz \qquad \textbf{(2.22)}$$

şeklindedir (Fujikobo ve Yao, 1999).

3. İZOTROP PLAKLARIN BÜYÜK SEHİMLİ EĞİLMESİ

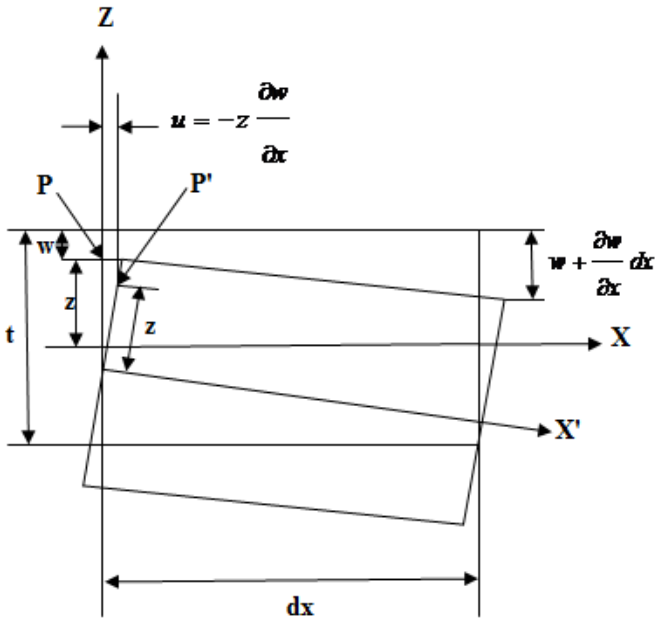
Bu bölümde, Galerkin yöntemi ile izotrop plaklar için büyük sehimli eğilme analizi üç ana başlık altında izah edilecektir: mekanik etkilerin dengesinde sisteme ait denge denklemlerinin çıkarılışı, Galerkin yöntemi ve son olarak tüm kenarları basit mesnetlenmiş olan izotrop plak için büyük sehimli eğilme analizi.

3.1 Denge Denklemleri

3.1.1 Genel plak teorisi

Elastisite teorisinin özel bir uygulaması olan plak teorisinde plak bünyesindeki kuvvetler, yer değiştirmeler, şekil değiştirmeler ve gerilmeler incelenir.

Sonsuz küçük bir plak parçası için düzlem içi şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri (Şekil 3.1, 3.2)



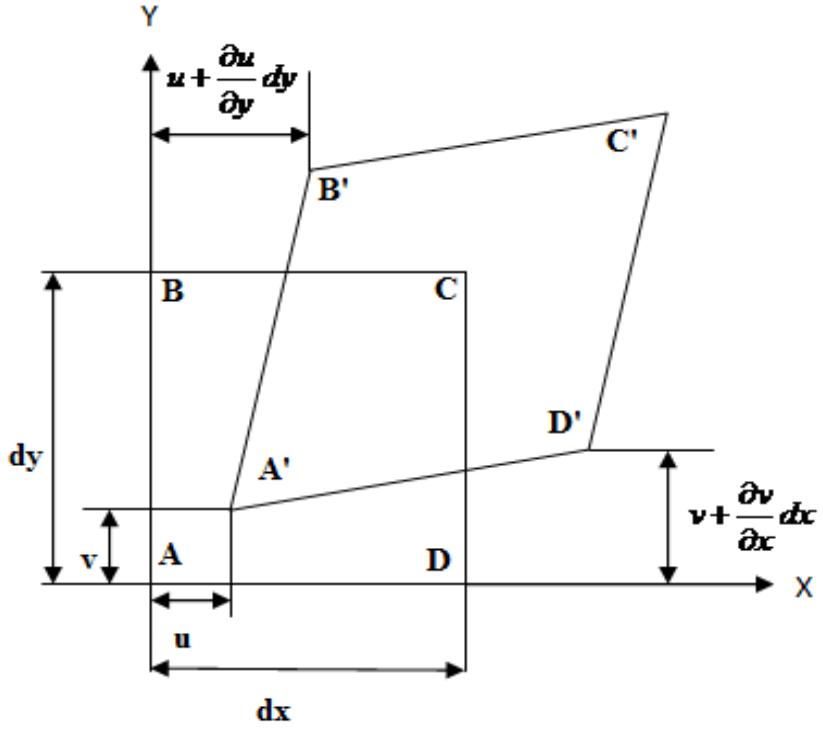
Şekil 3.1 : Sonsuz küçük plak parçası eksenel şekil değiştirme

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.3}$$

şeklindedir (Timoshenko ve Krieger, 1959). Burada *u*, *v* düzlem içi yer değiştirmeleri (*x* ve *y* eksenleri doğrultularında), *w* yanal yer değiştirmeyi (*z* ekseni doğrultusunda), ε_x, ε_y, γ_{xy} *x*, *y* doğrultularındaki birim şekil değiştirmeler ile açısal birim şekil değiştirmeyi temsil etmektedir.



Şekil 3.2 : Sonsuz küçük plak elemanında açısal şekil değiştirme

Sonsuz küçük bir plak parçası için düzlem içi birim şekil değiştirme-gerilme ilişkileri

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \vartheta\sigma_y}{E} \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \vartheta\sigma_x}{E} \tag{3.5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\ 1+\vartheta\ \tau_{xy}}{E} \tag{3.6}$$

biçimindedir. Burada σ_x, σ_y normal gerilmeleri (x ve y eksenleri doğrultularında), τ_{xy} kayma gerilmesi, E Young modülü, G kayma modülünü ve ϑ Poisson oranını temsil etmektedir. Şekil değiştirme-gerilme ilişkileri yardımıyla gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E\ \ \varepsilon_x + \vartheta\varepsilon_y}{1-\vartheta^2} \tag{3.7}$$

$$\sigma_y = \frac{E\ \ \varepsilon_y + \vartheta\varepsilon_x}{1-\vartheta^2} \tag{3.8}$$

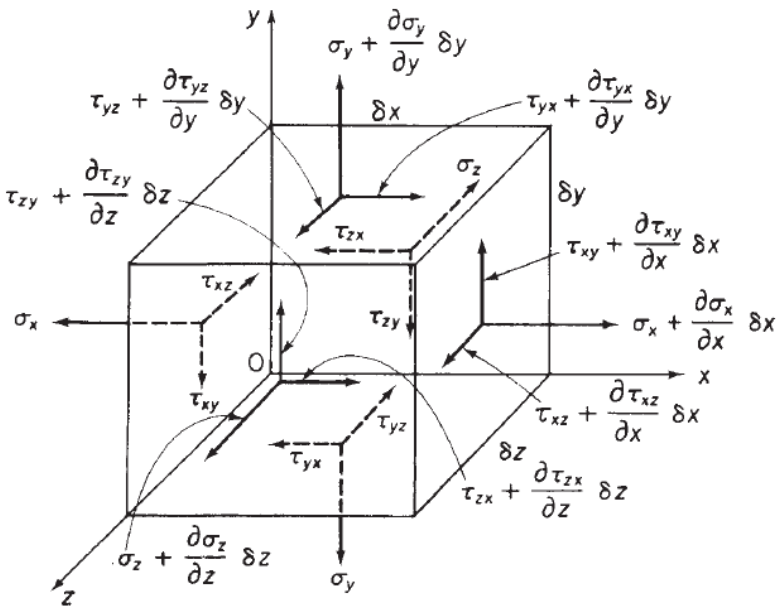
$$\tau_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2\ 1+\vartheta} \tag{3.9}$$

ile verilir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Termal etkilerin ihmal edildiği şartlarda, homojen, izotropik ince bir plakta

- Orta düzlemin normalleri, eğilmeden sonra da orta düzleme normal kalır
- Yanal doğrultudaki normal gerilme diğer gerilme bileşenlerine göre küçük olduğundan, gerilme uzama bağıntısında ihmal edilir
- Plağın orta düzlemi hiçbir uzamaya maruz kalmaz
- Plak kalınlığı diğer boyutlara göre küçüktür
- Plak başlangıçta düzdür
- Plak malzemesi lineer elastiktir ve Hooke kanunu geçerlidir

ve $\sigma_{zz} = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ kabulleri yapılabilir (Amabili, 2008). Şekil 3.3'te sonsuz küçük plak parçası üzerindeki gerilmeler gösterilmiştir.



Şekil 3.3 : Plak gerilme halleri

Hesaplarda, gerilme bileşenlerinin yerine plak kesitinin birim boyuna isabet eden kesit momentlerini (Şekil 3.4) ve kesit kuvvetlerini kullanmak daha yaygındır. Plak kesitinin birim uzunluğuna etkiyen eğilme ve burulma momentlerinin büyüklüğü gerilmelerin ürettiği kuvvet çiftinine eşit olacaktır. Kesit momentleri

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$
$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \qquad \textbf{(3.10)}$$
$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz$$

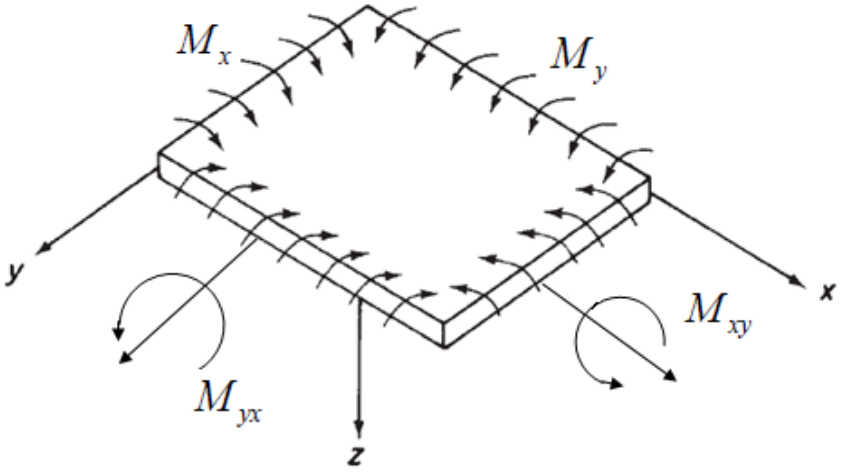
ile verilir (Timoshenko ve Krieger, 1959). Burada M_x ve M_y x, y eksenleri tarafındaki eğilme momentleri ve M_{xy} burulma momentidir. (3.10) ifadesinde gerilme-şekil değiştirme ve şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad \textbf{(3.11)}$$
$$M_{xy} = -M_{yx} = D\ 1-\vartheta\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

yazılabilir. İfadelerde yer alan D plağın eğilme rijitliğidir ve

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\vartheta^2)} \tag{3.12}$$

ile verilir.



Şekil 3.4 : Uniform moment dağılımı

3.1.2. Plak Diferansiyel Denge Denklemleri

3.1.2.1 Yanal yüklü plak

Plak yüzeyine etkiyen yüklere karşı plak kenarlarında verilen M_x ve M_y eğilme momentleri ve M_{xy} burulma momenti reaksiyonlarına ilave olarak Q_x ve Q_y kesme kuvvetleri mevcuttur. Birim uzunluğa isabet eden, enine ve boyuna doğrultulara paralel olan bu Q_x ve Q_y kesme kuvvetleri

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \tag{3.13}$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \tag{3.14}$$

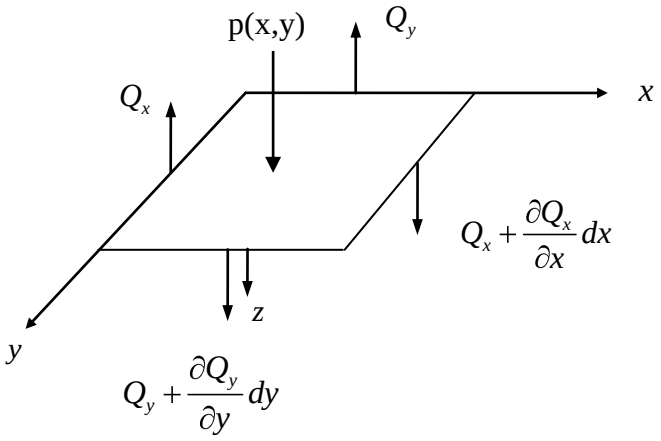
ile verilir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Elemanın dengesi için boyuna, enine ve düşey doğrultudaki kuvvetlerin ve momentlerin toplamı sıfır olmalıdır. Plakta, gerilmeler noktadan noktaya değiştiğinden (Şekil 3.5) bu noktalardaki momentler ve kesme kuvvetleri boyuna ve enine mesafeyle ilişkilidir. Yerçekimi kuvvetleri P(x,y) yanal yüküne göre küçük olduğundan ihmal edilmiştir. Orta düzleminde uzama olmayan plakta, boyuna ve enine doğrultusundaki kuvvetlerin toplamı sıfırdır (Timoshenko ve Krieger, 1959).

$$\sum F_z = 0$$

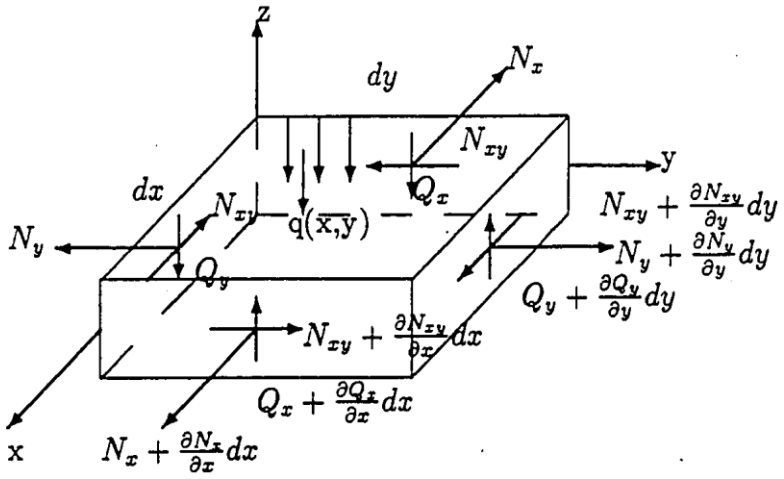
$$Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy - Q_x dy + Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy - Q_y dx + pdxdy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \qquad \textbf{(3.15)}$$



Şekil 3.5 : Kuvvet dağılımı

Sonsuz plak parçası için kuvvet değişimi ve dengesi Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6 : Plağın iç kuvvetlerinin değişimleri

Sonsuz küçük plak kesiti için *x* ve *y* doğrultuları etrafındaki moment değişimi Şekil 3.7'de verilmiştir. Plak kesitinin kenarlarına göre momentler alındığında eksenlere göre moment dengeleri;

y eksenine göre,

$$\sum M_y = 0$$

$$M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - Q_y dx \frac{dx}{2}$$
$$- \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dxdy + pdxdy \frac{dy}{2} = 0$$

şeklindedir ve sadeleştirmeler sonunda

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dxdy + Q_x dxdy + \left(- \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} pdy \right) dxdy = 0$$

biçimine gelir. Parantezli ifadenin mertebesi çok küçük olduğundan ihmal edilir ve

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dxdy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dxdy - Q_x dxdy = 0$$

şeklinde yazılır ve ifade *dxdy* terimine bölünürse

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

şeklinde olur. Aynı şekilde *x* eksenine göre moment dengesi yazılırsa,

$$\sum M_x = 0$$

$$M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2}$$
$$- Q_x dy \frac{dy}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dxdy + pdxdy \frac{dy}{2} = 0$$

şeklindedir ve sadeleştirmeler sonunda

$$- \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + Q_y dxdy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} pdy \right) dxdy = 0$$

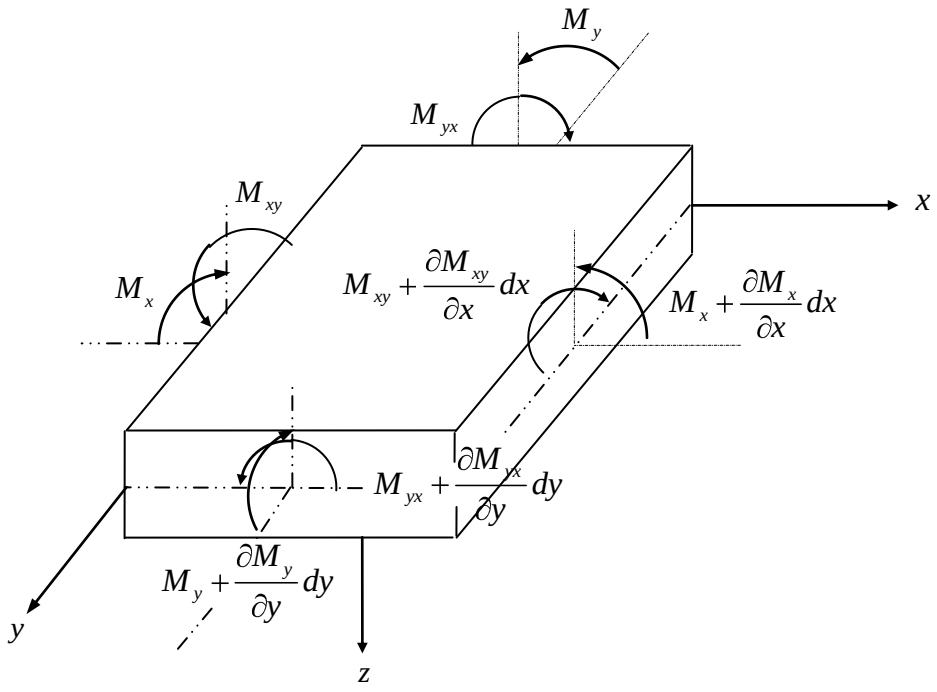
biçimine gelir. Parantezli ifadenin mertebesi çok küçük olduğundan ihmal edilir ve

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy + Q_y dxdy = 0$$

şeklinde yazılır ve ifade *dxdy* terimine bölünürse

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad \textbf{(3.17)}$$

şeklini alır (Timoshenko ve Krieger, 1959).



Şekil 3.7 : Plağın moment değişimleri

(3.15) denklemini

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p=0$$

şeklindedir ve (3.15) denkleminde (3.16) ve (3.17) denklemleri ile bulunan kesme kuvvetleri eğilme momentleri ilişkisi kullanırsa ifade

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+p=0 \qquad \textbf{(3.18)}$$

şeklinde olur. Burulma momentleri arasındaki

$$M_{xy}=-M_{yx}$$

ilişkisi kullanılarak (3.18) ifadesi

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-p \qquad \textbf{(3.19)}$$

şeklide yazılabilir. (3.19) ifadesindeki eğilme momentleri ve burulma momentleri yerine (3.11) eşitlikleri kullanılarak, yanal yayılı yük etkisindeki ince plağın denge denklemi yer değiştirmeler cinsinden elde edilir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad \textbf{(3.20)}$$

3.1.2.2 Düzlem içi yük etkisindeki plak

Plak yanal yük ile yüklenmek yerine orta ekseninde çekme veya basma kuvvetine maruz bırakılırsa, plak için denge denklemi korunum kanunları vasıtasıyla yanal yüklü halde olduğu gibi elde edilir.

z ekseni doğrultusundaki $\sum F_z=0$ olduğundan,

N_x kuvvetinin *z* ekseni üzerindeki iz düşümü

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \qquad \textbf{(3.21)}$$

N_y kuvvetinin z ekseni üzerindeki iz düşümü

$$-N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx \qquad \textbf{(3.22)}$$

şeklindedir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

N_{xy} kuvvetinin *z* ekseni üzerindeki iz düşümü

$$-N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_{xy} + \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} dx \right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy \qquad \textbf{(3.23)}$$

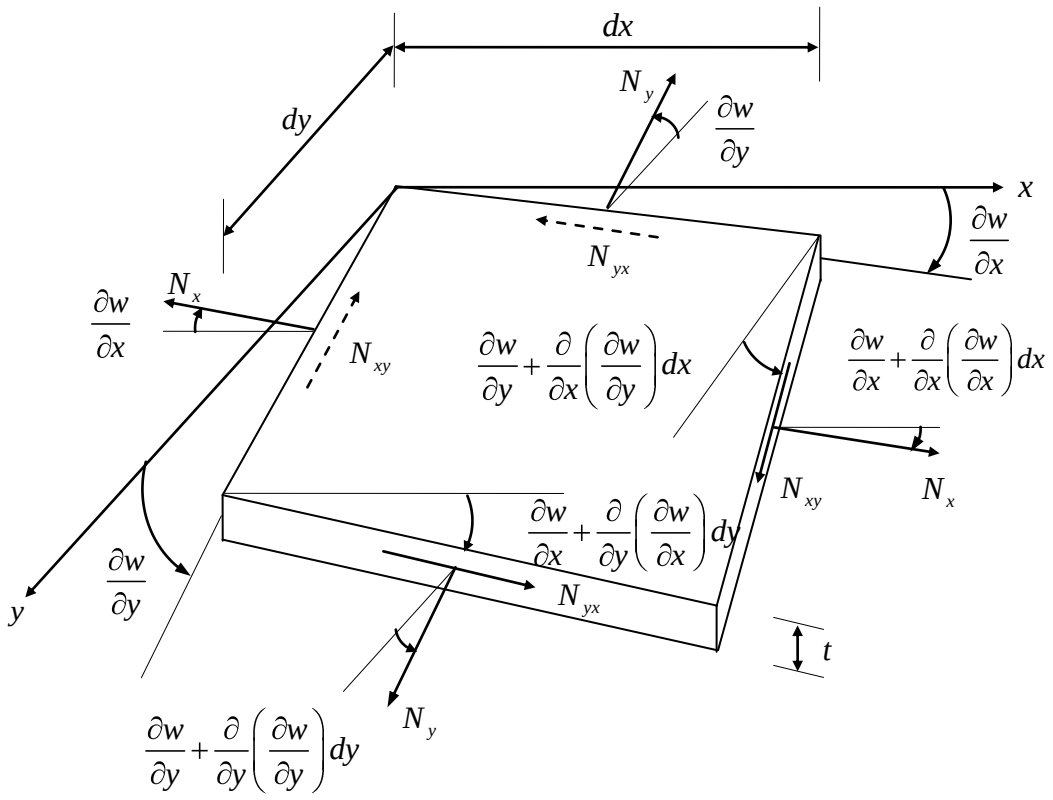
N_{yx} kuvvetinin *z* ekseni üzerindeki iz düşümü

$$-N_{yx} dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_{yx} + \frac{\partial^2 N_{yx}}{\partial x \partial y} dy \right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx \qquad \textbf{(3.24)}$$

biçimindedir. Plağın köşelerine göre moment alınarak

$$N_{yx} = N_{xy}$$

olduğu görülebilir (Timoshenko ve Krieger, 1959).



Şekil 3.8: Plak orta düzlemine etki eden kuvvetler

Düşey doğrultuda orta düzleme etki eden kuvvetten ötürü meydana gelen toplam kuvvet, düzlem içi kuvvetlerin iz düşümleri de kullanılarak

$$\left(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)dxdy \qquad \textbf{(3.25)}$$

biçiminde bulunur. Plak kenarlarında oluşan reaksiyonlar Şekil 3.9'da gösterilmiştir ve Şekil 3.9'da görüldüğü üzere düşey doğrultudaki reaksiyon kuvvetleri toplamı

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)dxdy \qquad \textbf{(3.26)}$$

şeklindedir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Düşey doğrultuda etki eden kuvvetler ve reaksiyon kuvvetleri sonucu toplam kuvvet ifadesi

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \qquad \textbf{(3.27)}$$

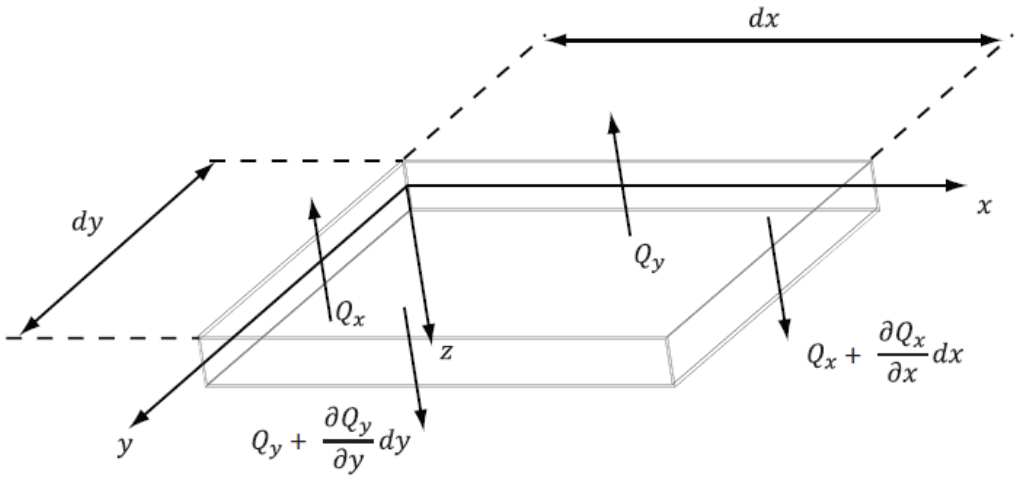
şeklindedir. Eğilme momenti kesme kuvveti ilişkisi kullanılarak toplam kuvvet ifadesi

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \qquad \textbf{(3.28)}$$

biçimindedir. Eğillme momenti yer değiştirme ilişkisini kullanarak toplam kuvvet ifadesi

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \qquad \textbf{(3.29)}$$

şeklinde olur (Timoshenko ve Krieger, 1959).



Şekil 3.9: Plak kenarları kuvvet dağılımı

3.1.2.3 Yanal ve düzlem içi yük etkisindeki plak

Yanal ve düzlem içi yük ile zorlanmış plak sisteminde denge denklemleri elde edilirken, yanal yüklü halde olduğu gibi hareket edilir ve plaktan *xz* ve *xy* koordinat düzlemlerine paralel ikişer düzlemle ayrılmış sonsuz küçük bir elemanın dengesine bakılır. Buna ilave olarak plağın orta düzlemine de kuvvet tesir etmektedir. Bu kuvvetlerin de *x* ve *y* eksenlerine iz düşümlerini alarak sistemin denge denklemi

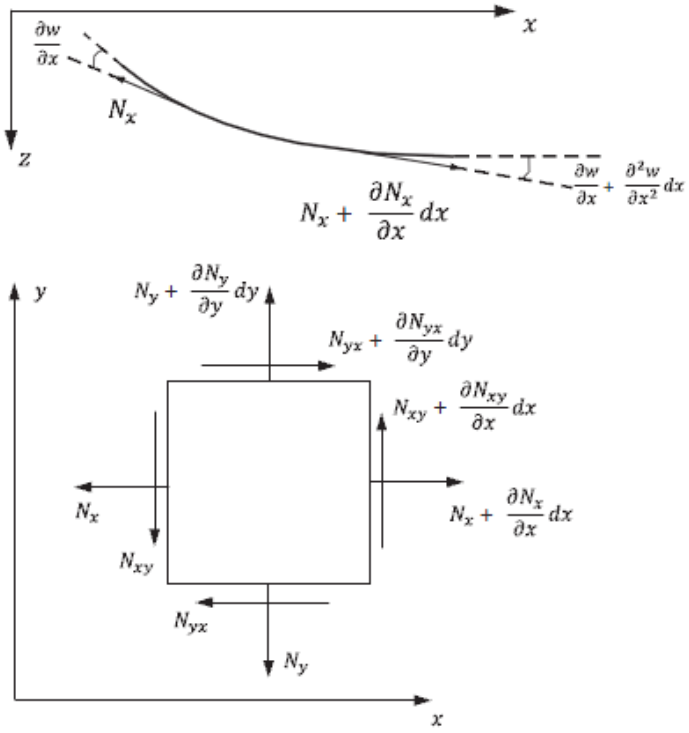
$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}&=0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.30)}$$

şeklindedir. Orta düzleme etkiyen kuvvetlerin düşey doğrultu üzerindeki iz düşümleri ((3.21), (3.22), (3.23), ve (3.24) denklemleri) de kullanılarak düşey doğrultu üzerindeki toplam kuvvet dengesi

$$\sum F_z = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dxdy + pdxdy + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \textbf{(3.31)}$$

biçimindedir (Timoshenko ve Krieger, 1959).



Şekil 3.10: Orta düzleme etkiyen kuvvet gösterimi

Düşey doğrultudaki toplam kuvvet ifadesi, eğilme moment-kesme kuvveti ilişkisi kullanılarak

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\left(p + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \qquad \textbf{(3.32)}$$

şeklinde olur. Bu ifadede eğilme momentleri ve burulma momentleri yerine yer değiştirme ifadeleri kullanılırsa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D}\left(p + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \qquad \textbf{(3.33)}$$

biçimini alır (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Büyük sehimli plak eğilmesi probleminde, plak orta düzlemininde de şekil değiştirmeler meydana gelmektedir. Bu durumda, plağın orta düzleminin şekil değiştirmesinin hesaplara ve analitik çözüm safhalarına yansıtılması gerekir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Büyük sehimli plakların davranışlarıyla ilgilenilirken, plağa dik durumda alınan sonsuz küçük plak elemanının düşey doğrultudaki toplam kuvvet dengesi kullanılır. Lakin burada düzlem içi N_x, N_y, N_{xy} kuvvetleri yalnız plağın orta düzlemine etkiyen kuvvetlerden değil, eğilmeden dolayı plağın orta düzleminde meydana gelen şekil değiştirmeye de bağlıdır. *xy* düzlemindeki bir elemanın denge durumundaki (3.30) denklemi

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0$$

biçimindedir ama düzlem içi kuvvetleri belirlemek için denklem sayısı yeterli değildir. N_x, N_y, N_{xy} kuvvetlerinin büyüklüklerini belirlemek için gerekli olan üçüncü denklem ise eğilme esnasında plağın orta yüzeyinde meydana gelen şekil değiştirme ile belirlenir. Bunun için birim şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkisi

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

biçimindedir. Bu eşitliklerin diferansiyel biçimde ifadesi

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \textbf{(3.34)}$$

şeklindedir. Şekil değiştirmeler yerine

$$\varepsilon_x = \frac{1}{tE}\ N_x - \vartheta N_y$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{tE}\ N_y - \vartheta N_x \qquad \textbf{(3.35)}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{tG} N_{xy}$$

eş değer ifadeleri yazılırsa, kullanılacak olan üçüncü denklem N_x, N_y ve N_{xy} cinsinden elde edilmiş olunur. Problemde kullanılacak bu üç denklemin çözümü için eşitliklerde Airy gerilme fonksiyonunun kullanılması ile çözüme ulaşmak çok daha kolay hale gelir. Denge koşullarında geometrik bağıntılar ve gerilme-şekil değiştirme bağıntıları (Elastostatik bağıntılar), düzlem içi kuvvetleri ve şekil değiştirmeleri elde edebilmek için kullanılır. Düzlem içi kuvvetler ile Airy gerilme fonksiyonu arasındaki ilişki

$$N_x = t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = t\sigma_x$$
$$N_y = t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = t\sigma_y \qquad \textbf{(3.36)}$$
$$N_{xy} = -t\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -t\tau_{xy}$$

şeklinde ifade edilir. Burada F boyuna ve enine mesafenin fonksiyonu olup, şekil değiştirme denklemlerinde düzlem içi kuvvetlerin yerine konulmasıyla

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \vartheta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \vartheta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{(3.37)}$$
$$\gamma_{xy} = -\frac{2\ 1+\vartheta}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

ifadesi elde edilmiş olunur. Bu ifadeyi (3.34) denge denkleminde kullanılmasıyla

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \qquad \textbf{(3.38)}$$

biçiminde uyumluluk denklemi elde edilir (Timoshenko ve Krieger, 1959).

Deplasman değerlerini elde etmekte kullanılacak ikinci denklemi belirlemek için (3.33) toplam kuvvet denkleminde iç kuvvetler yerine (3.36) Airy gerilme fonksiyonu kullanılırsa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{t}{D}\left(\frac{q}{t}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) \quad \textbf{(3.39)}$$

şeklinde denge denklemi bulunur (Timoshenko ve Krieger, 1959).

3.2 Galerkin Metodu

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde ağırlıklı artık yöntemlerine sıkça başvurulur ve mühendislikte, ağırlıklı artık yöntemleri araştırılan problemlere ait denklemlerde yaklaşık bir çözüm aracı olarak kullanılır. Nonlineer ve lineer sistem problemlerine rahatlıkla uygulanabilen ağırlıklı artık yöntemleri, bir çok farklı yaklaşık çözüm yöntemini kapsamaktadır ve Galerkin yöntemi, En küçük kareler yöntemi, Kollokasyon yöntemi, Alt bölge yöntemi, Moment yöntemi, … vs bunların başlıcalarıdır. Ağırlıklı artık yöntemleri kullanışlı olmaları ve hesaplamalarda hızlı olması sebebiyle tercih edilir.

Galerkin metodu, farlı türden araştırma konusu olarak belirlenmiş problemlerin çözümünde (plak ve kabukların küçük ve büyük çökme teorileri, lineer ve nonlineer titreşim veya stabilite problemleri gibi) başarıyla uygulanan yaklaşık çözüm yöntemlerinden biridir. Galerkin metodunun arkasındaki matematiksel teori oldukça kompleks görünmesine rağmen fiziksel yorumu oldukça basittir (Szilard, 2004).

Galerkin yöntemi uygulanırken sistemin dengede olduğu varsayılmaktadır ve sonsuz küçük bir elemanın denge durumu

$$\begin{aligned} G_1(u,v,w)-p_x&=0\\ G_2(u,v,w)-p_y&=0\\ G_3(u,v,w)-p_z&=0 \end{aligned} \quad \textbf{(3.40)}$$

diferansiyel ifadesiyle verilir (Szilard, 2004). Burada *x, y* ve *z* doğrultularındaki tüm kuvvetlerin dengesi gösterilmiştir ve p_x, p_y ve p_z dış kuvvetleri temsil ederken, G_1, G_2 ve G_3 deplasman fonksiyonlarında diferansiyel operatörün kullanımını göstermektedir. Yapısal sistemin dengesi tüm yapı üzerine bu diferansiyel ifadenin entegre edilmesiyle elde edilir.

Deplasman fonksiyonunun keyfi küçük varyasyonları (değişimleri) δu, δv ve δw ile ifade edilir. Deplasman bileşenleri birbiriyle ilişkili olmasına rağmen bu keyfi varyasyonlar birbirleriyle ilişkili değildir. İç ve dış kuvvetlerin virtüel işi, sitemin

gerçek potansiyel enerjisi belirlenmeksizin denge durumundaki diferansiyel ifadeden belirlenir (Szilard, 2004).

$$\delta W_i + \delta W_e = \delta \ W_i + W_e \ = 0 \tag{3.41}$$

Burada W_i iç kuvvetlerin yaptığı işi, W_e dış kuvvetlerin yaptığı işi temsil etmektedir ve (3.41) eşitliğinin yazılmasıyla

$$\begin{aligned} &\iiint_V \ G_1(u,v,w) - p_x \quad \delta u \ \ dV = 0 \\ &\iiint_V \Big[G_2(u,v,w) - p_y \Big] \ \delta v \ \ dV = 0 \\ &\iiint_V \ G_3(u,v,w) - p_z \quad \delta w \ \ dV = 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

ifadesi elde edilir. Bu varyasyon denklemleri yanlızca deplasman fonksiyonlarının tam sonuca sahip olduğu araştırma probleminde geçerlidir. Deplasmanların tam sonucu yerine

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i \ \ x,y,z \ \ ; \ \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \eta_i \ \ x,y,z \ \ ; \ \mathrm{w} = \sum_{i=1}^{r} c_i \zeta_i \ \ x,y,z \tag{3.43}$$

yaklaşık ifadeleri konulabilir. Burada $\xi_i(x,y,z)$, $\eta_i(x,y,z)$ ve $\zeta_i(x,y,z)$ sınır koşullarına karşılık gelen fonksiyonları ve a_i, b_i ve c_i belirsiz kat sayıları temsil etmektedir. Küçük keyfi deplasman varyasyonları

$$\delta u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \ \ x,y,z \ \delta a_i \ ; \ \delta \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \ \ x,y,z \ \delta b_i \ ; \ \delta \mathrm{w} = \sum_{i=1}^{r} \zeta_i \ \ x,y,z \ \delta c_i \tag{3.44}$$

biçiminde yazılır. Sonuçta (3.42) ve (3.44) ifadelerinden

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i} \delta a_i \iiint_V \ G_1(u,v,w) - p_x \ \xi_i \ \ x,y,z \ \ dV = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} \delta b_i \iiint_V \Big[G_2(u,v,w) - p_y \Big] \eta_i \ \ x,y,z \ \ dV = 0 \\ &\sum_{i=1}^{r} \delta c_i \iiint_V \ G_3(u,v,w) - p_z \ \zeta_i \ \ x,y,z \ \ dV = 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

ifadesine ulaşılır (Szilard, 2004).

Galerkin metodu plak eğilmesine de uygulanır. Lateral çökmeyi temsil edebilecek bağımsız sürekli bir fonsiyon

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x,y) \tag{3.46}$$

biçiminde seçilirse, bu ifade problemin tüm sınır koşullarını sağlaması gerekmesine rağmen diferansiyel plak denklemini sağlaması gerekli değildir çünkü bu plak denge denkleminin elde edilişi düşey doğrultudaki iç ve dış kuvvetlerin eşitliğine dayanmaktadır.

İç ve dış kuvvetlerin düşey yönündeki küçük bir δw deplasmanı için yaptığı toplam iş

$$\iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_z(x,y) \right] \delta w \; dxdy = 0 \tag{3.47}$$

şeklindedir. Bu eşitlik plak eğilmesinin temel varyasyonel denklemine karşılık gelmektedir. Bu ifade içine yanal deplasmanı temsil edebilecek seri ifadesi

$$\sum_{i=1}^{n} \delta c_i \iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_z(x,y) \right] f_i \;\; x,y \;\; dxdy = 0 \tag{3.48}$$

biçiminde yazılır. Herhangi bir δc_i değeri için (3.48) denklemi

$$\begin{aligned}
&\iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_z(x,y) \right] f_1 \;\; x,y \;\; dxdy = 0 \\
&\iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_z(x,y) \right] f_2 \;\; x,y \;\; dxdy = 0 \\
&\vdots \\
&\iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_z(x,y) \right] f_n \;\; x,y \;\; dxdy = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

ifadesini yerine getirmelidir ve (3.49) ifadesindeki integrasyonların alınması sonucu elde edilecek lineer denklem sisteminin çözümü sonucunda c_1, c_2, …, c_n belirsiz katsayıları bulunur.

3.3 İzotropik Plak İçin Galerkin Yönteminin Uygulanması

İzotrop plak için büyük sehimli eğilme analizi Galerkin yöntemi kullanılarak bu başlık altında yapılacaktır. Kusurlu ve kusursuz plaklar için büyük sehimli eğilme ifadelerine ve izorop plak için uygulamaya burada yer verilecektir.

3.3.1 Kusursuz plak

İzotrop kusursuz plakta, tüm kenarları basit mesnetlenmiş duruma karşılık gelen sınır koşulları

$$\begin{aligned} &w = 0 \text{ ; x=0 ve x=L} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ ; x=0 ve x=L} \\ &w = 0 \text{ ; y=0 ve y=B} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ ; y=0 ve y=B} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.50)}$$

şeklindedir ve düşey doğrultudaki w deplasmanının sınır koşullarını sağlayacak Fourier serisi ifadesi

$$w = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \qquad \textbf{(3.51)}$$

biçimindedir .Burada W_{mn} bilinmeyen katsayıyı temsil etmektedir.

İzotrop kusursuz plak için (3.38) uyumluluk denklemi ve (3.39) denge denklemi

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{t}{D}\left(\frac{q}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

şeklindedir. İzotrop plakta Galerkin yöntemi ile analiz gerçekleştirilirken yapılacak ilk iş Airy gerilme fonksiyonunun belirlenmesidir. Airy gerilme fonksiyonu (3.38) uyumluluk kısmi diferansiyel denklemin çözülmesiyle belirlenir. Adi diferansiyel denklem çözümünde olduğu gibi kısmı diferansiyel denklem çözümümde de ifademiz (Airy gerilme fonksiyonu) homojen ve özel çözüme sahiptir. Homojen çözümümüz (3.52) ifadesinde, özel çözümü (3.53) ifadesinde ve Airy gerilme fonksiyonu (3.54) ifadesinde verilmiştir.

$$F_h = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} \qquad \textbf{(3.52)}$$

$$F_{ö} = \frac{W_{mn}^2 E}{32}\left[\frac{L^2 n^2}{B^2 m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \qquad \textbf{(3.53)}$$

$$F = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} + \frac{W_{mn}^2 E}{32}\left[\frac{L^2 n^2}{B^2 m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \quad \textbf{(3.54)}$$

(3.39) denge denklemi Galerkin yöntemi integrasyonunda kullanılmasıyla ulaşılacak ifade

$$\int_0^L\int_0^B\left[D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - t\left(\frac{q}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right)dxdy = 0 \quad \textbf{(3.55)}$$

şeklindedir. İntegrasyonu alındığında eşitlik

$$\left[\frac{\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{n^4 L}{B^3}\right)\right]W_{mn}^3 + \left[-\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{m^2 n^2}{LB} + \frac{n^4 L}{B^3}\right)\right]W_{mn} - \frac{16LB}{\pi^4 t}p = 0 \quad \textbf{(3.56)}$$

biçimini alır. Fourier serisi şeklinde üçüncü dereceden denklem sistemi

$$\begin{aligned} &C_1 W_{mn}^3 + C_2 W_{mn}^2 + C_2 W_{mn} + C_4 = 0 \\ &C_1 = \frac{\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{n^4 L}{B^3}\right) \\ &C_2 = 0 \\ &C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{m^2 n^2}{LB} + \frac{n^4 L}{B^3}\right) \\ &C_4 = -\frac{16LB}{\pi^4 t}p \end{aligned} \quad \textbf{(3.57)}$$

halini alır ve denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} &W_{mn} = -\frac{C_2}{3C_1} + k_1 + k_2 \\ &k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} + \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}}\right)} \\ &k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} - \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}}\right)} \\ &X = \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2^2}{3C_1^2} \\ &Y = \frac{2C_2^3}{27C_1^3} - \frac{C_2 C_3}{3C_1^2} + \frac{C_4}{C_1} \end{aligned} \quad \textbf{(3.58)}$$

biçimindedir (Hughes ve Paik, 2010).

3.3.2 Kusurlu plak

Geometrik nonlineerliğe sahip izotrop plak için sınır koşullarını sağlayan *w* deplasman ifadesi kusursuz geometrideki izotrop plak için verilen (3.50) ve (3.51) ifadelerinin aynısı olup, plağın sahip olduğu küçük başlangıç sehimi Fourier serisi şeklinde

$$w_0 = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} W_{0mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right)$$

(3.59)

ile verilir. Burada W_{0mn} m ve n burkulma modunun başlangıç sehim genliğidir ve maksimum başlangıç sehiminin belli bir miktarı olarak alınabilir (Hughes ve Paik, 2010).

$$W_{0mn} = 0.18W_{opl} \; ; \; W_{opl} = 0.1\beta^2 t \; ; \; \beta = \frac{B}{t}\sqrt{\frac{\sigma_0}{E}} \qquad \textbf{(3.60)}$$

Burada W_{opl} maksimum başlangıç sehimini, σ_o malzeme akma gerilmesini temsil etmektedir ve β narinlik katsayısıdır.

Geometrik nonlineerliğe sahip izotrop plak için Galerkin yönteminde kullanılacak (2.3) uyumluluk denklemi ve (2.4) denge denklemi

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{t}{D}\left[\frac{p}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \; w+w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \; w+w_0}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \; w+w_0}{\partial x \partial y}\right] = 0$$

şeklindedir. (2.3) uyumluluk denkleminde Airy gerilme ifadesini çekip kısmi diferansiyel denklem çözülürse; (3.61) homojen terim, (3.62) özel terim ve bu iki terimden oluşan (3.63) Airy gerilme ifadeleri

$$F_h = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} \qquad \textbf{(3.61)}$$

$$F_{\ddot{o}} = \frac{W_{mn}^2 + 2W_{0mn}W_{mn}}{32}\frac{E}{}\left[\frac{L^2n^2}{B^2m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{B^2m^2}{L^2n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \tag{3.62}$$

$$F = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} + \frac{W_{mn}^2 + 2W_{0mn}W_{mn}}{32}\frac{E}{}\left[\frac{L^2n^2}{B^2m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \frac{B^2m^2}{L^2n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \tag{3.63}$$

biçiminde elde edilir. ve (2.4) denge denkleminin geometrik nonlineerlikteki izotrop plak için Galerkin yöntemi integrasyonunda kullanılması ile

$$\int_0^L\int_0^B\left[D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - t\left[\frac{p}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\ w+w_0}{\partial x\partial y}\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right)dxdy = 0 \tag{3.64}$$

ifadesi elde edilir. İntegrasyonu alındığında ifade

$$\left[\frac{\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\right]W_{mn}^3 + \left[\frac{3\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\right]W_{mn}^2 + \left[-\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 W_{0mn}^2 E}{8}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right) + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{m^2n^2}{LB} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\right]W_{mn} - \frac{16LB}{\pi^4 t}p - W_{0mn}\left(\frac{m^2P_x}{Lt} + \frac{n^2P_y}{Bt}\right) = 0 \tag{3.65}$$

halini alır ve

$$\begin{aligned}
&C_1W_{mn}^3 + C_2W_{mn}^2 + C_2W_{mn} + C_4 = 0\\
&C_1 = \frac{\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\\
&C_2 = \frac{3\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\\
&C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 W_{0mn}^2 E}{8}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{n^4L}{B^3}\right) + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4B}{L^3} + \frac{m^2n^2}{LB} + \frac{n^4L}{B^3}\right)\\
&C_4 = -\frac{16LB}{\pi^4 t}p - W_{0mn}\left(\frac{m^2P_x}{Lt} + \frac{n^2P_y}{Bt}\right)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

şeklinde üçüncü dereceden denklem sistemi olarak yazılabilir. Sistemin çözümü W_{mn} bilinmeyen kat sayılarını verecektir (Hughes ve Paik, 2010):

$$W_{mn} = -\frac{C_2}{3C_1} + k_1 + k_2$$
$$k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} + \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}}\right)}$$
$$k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} - \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}}\right)} \qquad \textbf{(3.67)}$$
$$X = \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2^2}{3C_1^2}$$
$$Y = \frac{2C_2^3}{27C_1^3} - \frac{C_2 C_3}{3C_1^2} + \frac{C_4}{C_1}$$

3.3.3 İzotropik plak için Galerkin metodu uygulaması

Galerkin metodu ile analizi yapılacak izotrop plağın geometrik ve malzeme özellikleri sırasıyla Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : Plak geometrisi

Plak boyu (L)	500 mm
Plak genişliği (B)	500 mm
Plak kalınlığı (t)	3.2 mm

Çizelge 3.2 : Plak malzeme özellikleri

Akma gerilmesi (σ_0)	264.6 MPa
Elastisite (Young) Modülü	205800 MPa
Poison oranı	0.3

Eksenel basma gerilmesi burkulma gerilmesi değerine ulaştığı zaman, kusursuz geometriye sahip izotrop plak burkulur ve küçük sehimli plağa benzer bir dallanma meydana gelir (Hughes ve Paik, 2010). Galerkin yönteminin uygulanması sonucu elde edilen üçüncü dereceden ifade kullanarak yanal yayılı yükün sıfır değerini ($p=0$) aldığı durumda burkulan plak için dallanma denklemi türetilir ve başlangıç sehiminin de olmadığı ($W_{0mn}=0$) durumunda C_2 ve C_4 katsayıları sıfırdır. Bu aşamada, burkulma olayı gerçekleşmeden önce lateral göçme yoktur.

$$W_{mn} = \sqrt{-\frac{C_3}{C_1}} = 0 \qquad \textbf{(3.68)}$$

Burada

$$C_1 = \frac{\pi^2 E}{16}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{n^4 L}{B^3}\right)$$

$$C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{m^2 n^2}{LB} + \frac{n^4 L}{B^3}\right)$$

şeklindedir. (3.68) ifadesinin çözümü C_3 katsayının sıfır olması ile mümkündür.

$$-\frac{P_x m^2}{Lt} + \frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^4 B}{L^3} + \frac{m^2 n^2}{LB} + \frac{n^4 L}{B^3}\right) = 0 \qquad \textbf{(3.69)}$$

(3.69) ifadesinin çözülmesi ile izotropik plağın boyuna burkulma yükü değeri

$$P_{xb} = \pi^2 D\left(\frac{m^2 B}{L^2} + \frac{n^4 L^2}{m^2 B^3} + 2\frac{n^2}{B}\right) \qquad \textbf{(3.70)}$$

şeklinde bulunur. Burkulma yükü ile burkulma gerilmesi arasındaki ilişki

$$\sigma_{xb} = -\frac{P_{xb}}{Bt}$$

olduğundan burkulma gerilmesi için

$$\sigma_{xb} = -\frac{\pi^2 D}{t}\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^4 L^2}{m^2 B^3} + 2\frac{n^2}{B^2}\right) \qquad \textbf{(3.71)}$$

elde edilir.

Boyuna yüklemeye maruz bırakılmış izotrop plakta burkulma gerilmesi yardımıyla burkulma modları belirlenebilir. Enine burkulma modu tek olduğu (n=1) zaman, boyuna burkulma modunun (m' nin) plak boyu ve plak genişliği arasındaki ilişki

$$\frac{m^2}{L^2} + \frac{L^2}{m^2 B^3} + 2\frac{1}{B^2} \le \frac{(m+1)^2}{L^2} + \frac{L^2}{(m+1)^2 B^3} + 2\frac{1}{B^2} \qquad \textbf{(3.72)}$$

şeklindedir ve sadeleştirilmiş hali

$$\frac{L}{B} \le \sqrt{m(m+1)} \qquad \textbf{(3.73)}$$

şeklindedir.

Yanal basınç ve boyuna basma yüklemelerine maruz kalmış geometrik nonlineerlikteki büyük sehimli izotrop plak için nihai gerilme değeri boyuna doğrultudaki maksimum ve enine doğrultudaki minimum gerilme yardımıyla bulunur ve bu değerler

$$\sigma_{x\max} = -\frac{P_x}{Bt} - \frac{m^2\pi^2 W_{mn}\ \left(W_{mn} + 2W_{omn}\right) E}{8L^2}$$
$$\sigma_{y\min} = \frac{\pi^2 W_{mn}\ \left(W_{mn} + 2W_{omn}\right) E}{8B^2} \qquad \textbf{(3.74)}$$

ile verilir. Boyuna basma ve lateral basınç yüklemesine maruz kusurlu plak için nihai gerilme değeri

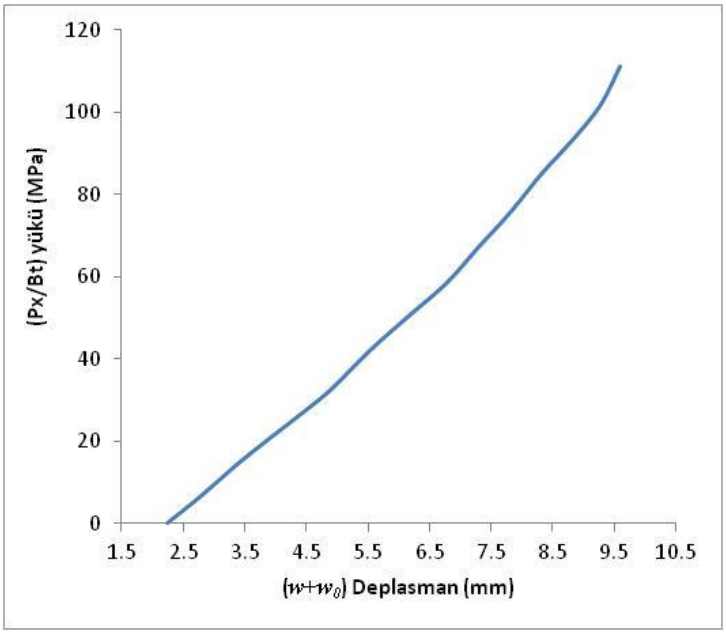
$$\sigma_{xeq} = \sqrt{\sigma^2_{x\max} - \sigma_{x\max}\sigma_{y\min} + \sigma^2_{y\min}} \qquad \textbf{(3.75)}$$

şeklindedir (Hughes ve Paik, 2010).

Boyuna basma yükü ve lateral basınç yüklemesine maruz bırakılan izotrop plak için Galerkin yöntemiyle büyük sehimli plak nihai gerilme değeri ve nonlineer sonlu elemanlar yöntemi nihai gerilme değeri Çizelge 3.3'te ve Galerkin yöntemiyle büyük sehimli eğilme analizi yük-deplasman eğrisi Şekil 3.11'de verilmiştir.

Çizelge 3.3 : İzotrop plak nihai gerilmesi

Galerkin yöntemi ile nihai gerilme	Nonlineer Sonlu Elemanlar ile nihai gerilme (Paik, 2010)
111.132 MPa	106.862 MPa



Şekil 3.11 : İzotrop plak için yük deplasman eğrisi

4. ORTOTROPİK PLAK YAKLAŞIMI

Küçük stifnerlerle desteklenmiş paneller, farklı stifnerli panel göçme modlarından Mod I (levha ve stifnerlerinin bir bütün halinde hareket ederek ortotropik plak davranışı sergilediği ve birlikte burkulmaya uğradığı göçme modu) türünde göçmeye uğrar ve böylece stifnerli panele büyük sehimli ortotropik plak yaklaşımı yapılır. Mod I göçme durumu için eş ortotropik plak özelliklerine göre modellenen stifnerli gemi panelinde, bir çok malzeme sabitinin yapısal ortotropisi klasik elasitisite teorisi kullanılarak uygun sistematik davranışlarda belirlenir (Paik ve diğ., 2001).

4.1 Panel Geometrisi

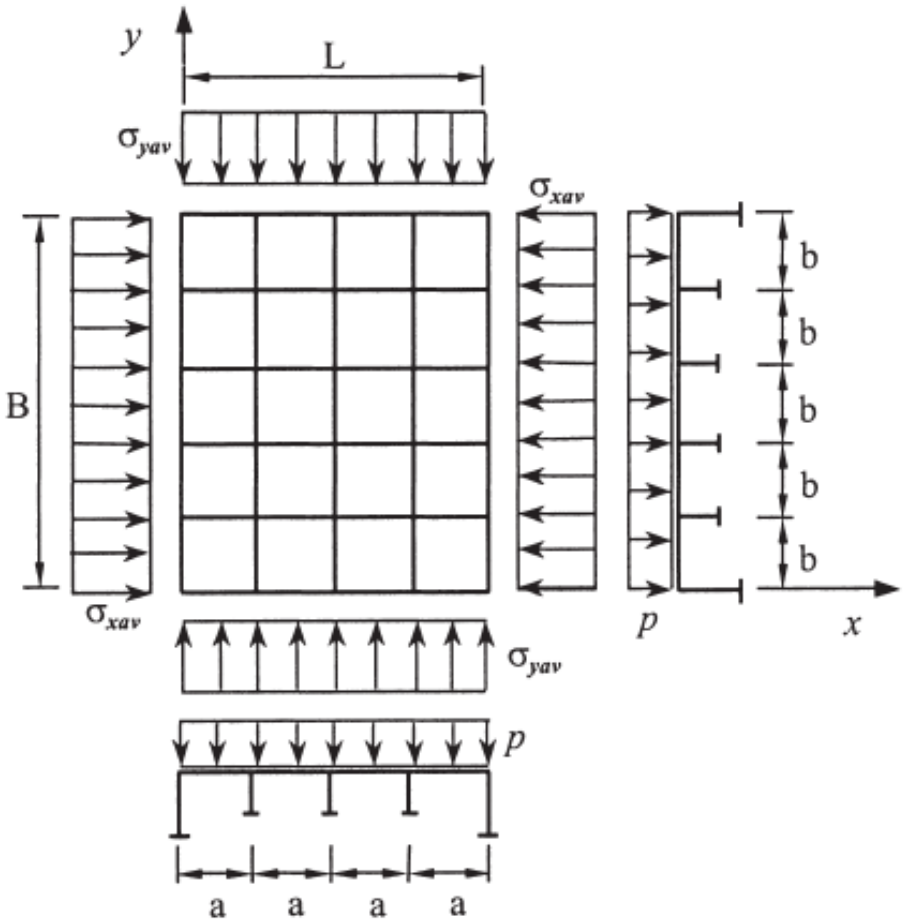
Stifnerli plak yapılarının tepkileri tüm plak yapısı düzeyinde, stifnerli panel düzeyinde ve yalın plak düzeyinde olmak üzere üç farklı seviyede ele alınabilir. Stifnerli panellere ortotropik plak yaklaşımında, birçok boyuna ve enine stifner elemanları ile desteklenmiş plak yapıları ile (stifnerli panel düzeyi ile) ilgilenilmesine rağmen sonuç ve kavramlar spesifik izotrop plağa (yalın plak düzeyine) uygulanarak geliştirilir (Paik ve diğ., 2001).

Stifnerli panel üzerinde dik kartezyen bir koordinat eksen takımı (x, y) kullanılmıştır ve x, y sırasıyla gemi boyuna ve enine doğrultuları işaret etmektedir (Şekil 4.1). L stifnerli plağın boyu, B stifnerli plağın genişliği ve t stifnerli plağın plak kısmının kalınlığıdır. Bu koordinat sisteminin avantajı geniş ve uzun panellerin birleşmesinden oluşan büyük plak yapılarında gerilme hesaplarının bilgisayarlarla yapılmasının çok daha kolay olmasıdır.

Çelik panellerde stifnerler genellikle tek bir doğrultuda yer alır, ancak bu bölümde verilen ifadeler, stifnerlerin her iki doğrultuda uygulandığı en genel durum içindir.

Tek bir boyuna ve tek bir enine stifner için kesit alanları (4.1), (4.2) ifadeleri ile verilmiştir. Yapıda yer alan toplam boyuna ve enine stifner sayısı sırasıyla n_{xs}, n_{ys}'dir ve stifnerler arası enine ve boyuna boşluklar, sırasıyla a, b, (4.3), (4.4) eşitlikleri ile

tanımlanabilir. Burada A_{xs} boyuna tek bir stifnerin kesit alanını, A_{ys} enine tek bir stifnerin kesit alanını, h_{wx} boyuna stifner gövdesi yüksekliğini, h_{wy} enine stifner gövdesi yüksekliğini, t_{wx} boyuna stifner gövdesi kalınlığını, t_{wy} enine stifner gövdesi kalınlığını, b_{fx} boyuna stifner flenşi genişliğini, b_{fy} enine stifner flenşi genişliğini, t_{fx} boyuna stifner flenşi kalınlığını, t_{fy} enine stifner flenşi kalınlığını temsil etmektedir.



Şekil 4.1 : İki eksenli basma/cekme ve lateral yük ile yüklenmiş stifnerli panel

$$A_{xs} = h_{wx}t_{wx} + b_{fx}t_{fx} \quad \textbf{(4.1)}$$

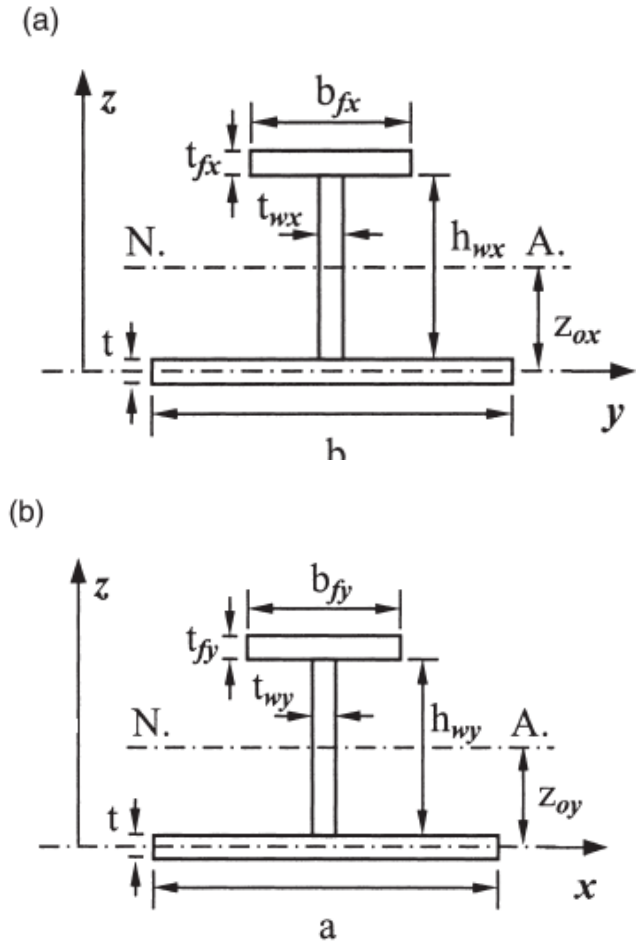
$$A_{ys} = h_{wy}t_{wy} + b_{fy}t_{fy} \quad \textbf{(4.2)}$$

$$a = \frac{L}{n_{ys}+1} \quad \textbf{(4.3)}$$

$$b = \frac{B}{n_{xs}+1} \quad \textbf{(4.4)}$$

Stifnerli panellerde, panelin düşey doğrultusunun pozitif yönüne tek taraflı olacak şekilde bir çok küçük stifnerin (genellikle 3 stifnerden fazla) eklendiği kabul edilir.

Stifner gövdesinin merkez hattının düşey eksene paralel olmasına rağmen Hollanda tipi ve köşebent tipi stifnerlerin merkez hatları düşey eksene paralel değildir çünkü stifner flenşlerinden dolayı asimetriktirler ama T tipi stifnerde (Şekil 4.2) merkez hattı simetriktir ve düşey eksene paraleldir. Stifnerli panellerin ortotropik plak yaklaşımı ile analizinde, stifnerin geometrik özelliklerinin tüm ortogonal yönlerde aynı olduğu kabul edilir (Paik ve diğ., 2001).



Şekil 4.2 : (a) boyuna; (b) enine T stifner geometrisi

4.2 Panel Malzemesi Özellikleri

Stifnerli gemi panellerinde, özellikle plak ve stifnerlerin Young modülü (E) ve Poisson oranı (ϑ) gibi malzeme özellikleri yapının her yerinde aynı olmalıdır. Gemi yapılarındaki stifnerlerin akma gerilmeleri bazı durumlarda (plaklarda hafif çelik veya yüksek mukavemetli çelik kullanılması ve stifnerde yüksek mukavemetli çelik kullanılması durumunda) plaktan farklıdır ve hesaplamalarda bu durum dikkate

alınmalıdır. Ayrıca, aynı doğrultudaki (boyuna veya enine doğrultuda) stifnerler aynı malzeme özellikleri sahip olmalıdır (Paik ve diğ., 2001).

Panel stifnerleri küçük olduğunda, stifnerler ve plak beraber burkulurlar ve stifnerli panel ortotropik bir plak gibi davranır. Bu durumda, tüm stifnerli panel için eşdeğer akma gerilmesi σ_{oep} yaklaşık olarak,

$$\sigma_{oeq} = \begin{cases} \sigma_{ox} \text{ boyuna stifnerli panel} \\ \sigma_{oy} \text{ enine stifnerli panel} \\ \sigma_{ox} + \sigma_{oy} \ / 2 \text{ ortogonal stifnerli panel} \end{cases}$$

ile belirlenir. Burada

$$\sigma_{ox} = \frac{Bt\sigma_{op} + n_{xs}A_{xs}\sigma_{os}}{Bt + n_{xs}A_{xs}} \quad \textbf{(4.5)}$$

$$\sigma_{oy} = \frac{Lt\sigma_{op} + n_{ys}A_{ys}\sigma_{os}}{Bt + n_{ys}A_{ys}} \quad \textbf{(4.6)}$$

ile verilmiştir ve σ_{op}, σ_{os} sırasıyla stifnerli paneldeki plağın ve stifnerin akma gerilmesi değerleridir (Paik ve diğ., 2001).

4.3 Panel Sınır Koşulları

Stifnerli panellerde, sınır destek elemanları veya enine çerçeve elemanları panelin eğilme rijitliğinden çok daha büyük eğilme rijitliğine sahiptir ve destek elemanının panel göçme yönündeki deplasmanı genellikle panel göçmesi gerçekleşene kadar küçük kalmaktadır. Ayrıca, panel kenarlarındaki dönme sınırlaması destek elemanlarının burulma rijitliğine bağlıdır. Bu sınırlama, destek elemanlarında ne burulmaya karşı hiçbir direnç gösteremeyecek kadar küçük, ne de burulmaya tümüyle karşı koyabilecek kadar büyüktür.

Güçlü kiriş elemanlarıyla desteklenmiş sürekli plak yapılarına ağırlıklı olarak düzlemsel basma yüklemesi uygulandığı zaman, panelin asimetrik (bir panel yukarı doğru burkulma eğilimindeyken diğer panel aşağı doğru eğilme eğiliminde) olarak burkulur ve panel kenarlarındaki dönme sınırlaması küçük olur. Sürekli panel yapıları ağırlıklı olarak yanal dağıtılmış yükle yüklendiğinde ise, burkulma şekli simetriktir (her bir bitişik panel yanal basınç yükleme yönünde eğilecek şekilde) ve

kenarlardaki dönme sınırlaması (sanki yükleme başında ankastre biçimde mesnetlenmiş durum gibi) büyük olur (Hughes ve Paik, 2010).

Sürekli stifnerli panel yapılarında, komşu panellerde eğilme gerçekleşmiş olsa dahi, yapısal tepkilerden dolayı her bir panelin kenarının nerdeyse düz kaldığı kabul edilir.

4.4 Ortotropik Plak Yaklaşımda Denge Denklemleri

Stifnerli panele büyük sehimli ortotropik plak yaklaşımında önemli bir hususta plak gerilmelerinin belirlenmesidir. Mekanik etkilerin de dengesi göz önüne alındığında ortotropik plak gerilmeleri, nonlineer kısmi diferansiyel denklemlerin (denge denklemi ve uyumluluk denklemi) çözümüyle hesaplanır (Paik ve diğ., 2001).

Kusursuz ortotropik plak için denge ve uyumluluk denklemleri,

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p}{t} \right] = 0 \quad \textbf{(4.7)}$$

$$\frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2\frac{\vartheta_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \textbf{(4.8)}$$

şeklindedir ve kusurlu ortotropik plak için

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial y^2} + \frac{p}{t} \right] = 0 \quad \textbf{(4.9)}$$

$$\frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2\frac{\vartheta_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad \textbf{(4.10)}$$

haline gelir (Hughes ve Paik, 2010).

Stifnerli panellerin ortotropik plak yaklaşımıyla analizinin başarısı, malzeme sabitlerinin 'doğru' değerler almasıyla yakından ilişkilidir. İzotropik plak için bağımsız iki malzeme sabiti (Young modülü, E, ve Poisson oranı, ϑ) olmasına rağmen ortotropik plakta *x* ve *y* doğrultularındaki Young modülleri (E_x), (E_y) ve Poisson oranları (ϑ_x), (ϑ_y) olmak üzere dört adet malzeme sabiti bulunmaktadır. Bu

sabitler, ortotropik plak yaklaşımına uygun olarak izotropik plak sabitleri ve yapı geometrisi yardımıyla belirlenir.

Ortotropik bir plak için Young modülleri

$$E_x = E\left(1+\frac{n_{xs}A_{xs}}{Bt}\right) \tag{4.11}$$

$$E_y = E\left(1+\frac{n_{ys}A_{ys}}{Lt}\right) \tag{4.12}$$

ve G_{xy} elastik kayma modülü

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2\ 1+\sqrt{\nu_x \nu_y}} \approx \frac{E}{2\ 1+\sqrt{\nu_x \nu_y}} \tag{4.13}$$

şeklinde hesaplanabilir (Paik ve diğ., 2001).

Poison oranları ϑ_x ve ϑ_y yapısal ortotropi yüzünden malzeme özelliği sayılmazlar, ancak geometrik yapılara karşılık gelen bu elastik sabitlerin önceden bilinmesi gerekir. Betti karşıtlık teoremi,

$$\vartheta_x E_y = \vartheta_y E_x \tag{4.14}$$

$$\vartheta_x D_y = \vartheta_y D_x \tag{4.15}$$

şartlarının sağlanmasını gerektirir. Burada D_x, D_y ortotropik plağın sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusundaki eğilme rijitlikleridir ve

$$D_x = \frac{Et^3}{12\ 1-\vartheta_{xy}^2} + \frac{Etz_{ox}^2}{1-\vartheta_{xy}^2} + \frac{EI_x}{b} \tag{4.16}$$

$$D_y = \frac{Et^3}{12\ 1-\vartheta_{xy}^2} + \frac{Etz_{oy}^2}{1-\vartheta_{xy}^2} + \frac{EI_y}{a} \tag{4.17}$$

$$\vartheta_{xy} = \sqrt{\vartheta_x \vartheta_y} \tag{4.18}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\vartheta_y D_x + \vartheta_x D_y + G_{xy}\frac{t^3}{3}\right) \tag{4.19}$$

ile verilir (Paik ve diğ., 2001). I_x, I_y , tarafsız eksene göre sırasıyla boyuna ve enine stifnerlerin atalet momenti, z_{ox} , z_{oy} sırasıyla boyuna ve enine stifnerlerin tarafsız ekseninin plağın orta düzleminden uzaklığıdır ve

$$I_x = \frac{t_{wx}h_{wx}^3}{12} + t_{wx}h_{wx}\left(\frac{h_{wx}}{2}+\frac{t}{2}-z_{ox}\right)^2 + \frac{b_{fx}t_{fx}^3}{12} + b_{fx}t_{fx}\left(\frac{t_{fx}}{2}+h_{wx}+\frac{t}{2}-z_{ox}\right)^2 \quad \textbf{(4.20)}$$

$$I_y = \frac{t_{wy}h_{wy}^3}{12} + t_{wy}h_{wy}\left(\frac{h_{wy}}{2}+\frac{t}{2}-z_{oy}\right)^2 + \frac{b_{fy}t_{fy}^3}{12} + b_{fy}t_{fy}\left(\frac{t_{fy}}{2}+h_{wy}+\frac{t}{2}-z_{oy}\right)^2 \quad \textbf{(4.21)}$$

$$z_{ox} = \frac{h_{wx}t_{wx}\left(\frac{h_{wx}}{2}+\frac{t}{2}\right)+b_{fx}t_{fx}\left(\frac{t_{fx}}{2}+h_{wx}+\frac{t}{2}\right)}{bt+h_{wx}t_{wx}+b_{fx}t_{fx}} \quad \textbf{(4.22)}$$

$$z_{oy} = \frac{h_{wy}t_{wy}\left(\frac{h_{wy}}{2}+\frac{t}{2}\right)+b_{fy}t_{fy}\left(\frac{t_{fy}}{2}+h_{wy}+\frac{t}{2}\right)}{at+h_{wy}t_{wy}+b_{fy}t_{fy}} \quad \textbf{(4.23)}$$

şeklindedir. *x*, *y* doğrultularındaki eğilme rijitliklerinin birlikte kullanılmasıyla

$$\left[\frac{EI_x}{b}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)^2 - \frac{EI_y}{a}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)\right]v_x^3 - \left[\frac{E_y}{E_x}\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{ox}^2+\frac{EI_x}{b}\right)-\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{oy}^2+\frac{EI_y}{a}\right)\right]v_x = 0 \quad \textbf{(4.24)}$$

ifadesine ulaşılır ve Betti karşıtlık teoremi kullanılarak *x* ve *y* doğrultularındaki Poison oranları için

$$\vartheta_x = c\left[\frac{\frac{E_y}{E_x}\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{ox}^2+\frac{EI_x}{b}\right)-\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{oy}^2+\frac{EI_y}{a}\right)}{\frac{EI_x}{b}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)^2-\frac{EI_y}{a}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)}\right]^{0.5} \quad \textbf{(4.25)}$$

$$\vartheta_y = \frac{E_y}{E_x}\vartheta_x = c\frac{E_y}{E_x}\left[\frac{\frac{E_y}{E_x}\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{ox}^2+\frac{EI_x}{b}\right)-\left(\frac{Et^3}{12}+Etz_{oy}^2+\frac{EI_y}{a}\right)}{\frac{EI_x}{b}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)^2-\frac{EI_y}{a}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)}\right]^{0.5} \quad \textbf{(4.26)}$$

yazılabilir. Burada *c*, izotrop Poison oranı (ϑ) le ortotrop Poison oranlarını (ϑ_x, ϑ_y) ilişkilendirmek için kullanılan bir düzeltme faktörüdür ve yaklaşık olarak

$$c = \frac{\vartheta}{0.86}$$

ile verilir (Paik ve diğ., 2001).

4.5 Ortotropik Plak Yaklaşımı için Galerkin Yönteminin Uygulanması

Stifnerli panel için Galerkin yöntemiyle büyük sehimli ortotropik plak eğilme analizi bu kısımda gerçekleştirilmiştir. Hesaplamalar sırasında ortotropik plağın küçük başlangıç sehimine sahip olup olmaması dikkate alınarak iki farklı ifade verilmiştir.

4.5.1 Kusursuz geometrideki ortotropik plak için Galerkin yöntemi

Küçük başlangıç sehimine sahip olmayan, tüm kenarları basit mesnetlenmiş ortotropik plak problemi için sınır koşulları

$$\begin{aligned} &w = 0 \text{ ; x=0 ve x=L} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ ; x=0 ve x=L} \\ &w = 0 \text{ ; y=0 ve y=B} \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ ; y=0 ve y=B} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.27)}$$

şeklindedir ve düşey yöndeki w deplasmanının sınır koşullarını sağlayacak Fourier serisi ifadesi

$$w = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \qquad \textbf{(4.28)}$$

biçimindedir (Hughes ve Paik, 2010). Burada W_{mn} bilinmeyen katsayıları temsil etmektedir.

Kusursuz geometrideki ortotropik plak için denge ve uyumluluk denklemleri ise

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p}{t}\right] = 0$$

$$\frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2\frac{\vartheta_x}{E_x}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0$$

biçimindedir (Hughes ve Paik, 2010).

Stifnerli panele büyük sehimli ortotropik plak yaklaşımının Galerkin yöntemi ile analizinde yapılacak ilk iş Airy gerilme fonksiyonunun belirlenmesidir. Bunun için (4.8) uyumluluk denkleminin çözülmesi gerekir. Adi diferansiyel denklem çözümünde olduğu gibi kısmi diferansiyel denklemin çözümünde de Airy gerilme ifadesi homojen ve özel çözüme sahiptir. Homojen çözüm, özel çözüm ve Airy gerilme ifadesi sırasıyla (4.29), (4.30) ve (4.31) eşitlikleriyle verilmiştir.

$$F_h = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} \tag{4.29}$$

$$F_{\ddot{o}} = \frac{W_{mn}^2}{32}\left[E_y \frac{L^2 n^2}{B^2 m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + E_x \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \tag{4.30}$$

$$F = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} + \frac{W_{mn}^2}{32}\left[E_y \frac{L^2 n^2}{B^2 m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + E_x \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{B}\right)\right] \tag{4.31}$$

Galerkin yönteminin (4.7) denge denklemine uygulanmasıyla

$$\int_0^L\int_0^B \left[D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - t\left[\frac{p}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right) dxdy = 0 \right. \tag{4.32}$$

elde edilir ve integrasyon sonucunda

$$\left[\frac{\pi^2}{16}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3}\right)\right] W_{mn}^3 + \left[-\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB}\right)\right] W_{mn} - \frac{16LB}{\pi^4 t} p = 0 \tag{4.33}$$

halini alır (Hughes ve Paik, 2010). Bu ifade üçüncü dereceden denklem sistemi olarak,

$$\begin{aligned} &C_1 W_{mn}^3 + C_2 W_{mn}^2 + C_2 W_{mn} + C_4 = 0 \\ &C_1 = \frac{\pi^2}{16}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3}\right) \\ &C_2 = 0 \\ &C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB}\right) \\ &C_4 = -\frac{16LB}{\pi^4 t} p \end{aligned} \tag{4.34}$$

ile verilebilir. Denklem sisteminin çözümü

$$W_{mn} = -\frac{C_2}{3C_1} + k_1 + k_2$$

$$k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} + \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}} \right)}$$

$$k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} - \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}} \right)} \qquad \textbf{(4.35)}$$

$$X = \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2^2}{3C_1^2}$$

$$Y = \frac{2C_2^3}{27C_1^3} - \frac{C_2 C_3}{3C_1^2} + \frac{C_4}{C_1}$$

şeklindedir.

4.5.2 Kusurlu geometrideki ortotropik plak için Galerkin yöntemi

Geometrik nonlineerliğe sahip ortotrop plak için sınır koşullarını sağlayan *w* deplasman ifadesi kusursuz geometrideki ortotrop plak için verilen (4.27) ve (4.28) ifadelerinin aynısıdır ve plağın sahip olduğu küçük başlangıç sehimi

$$w_0 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} W_{0mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B} \right)$$

(4.36)

ile verilebilir. *m, n* burkulma modunun başlangıç sehim genliği olan W_{0mn}, maksimum başlangıç sehiminin belli bir miktarı olarak alınabilir (Hughes ve Paik, 2010):

$$W_{0mn} = 0.18 W_{opl} \; ; \; W_{opl} = 0.1\beta^2 t \; ; \; \beta = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_0}{E}} \; ; \; b = \frac{B}{n_{sx} + 1} \qquad \textbf{(4.37)}$$

Burada W_{opl} maksimum başlangıç sehimini, σ_o malzeme akma gerilmesini, *b* boyuna stifnerler arası mesafeyi temsil etmektedir ve β narinlik oranıdır.

Geometrik nonlineerliğin dikkate alındığı ortotropik bir plak için Galerkin yönteminde kullanılacak (4.9) denge ve (4.10) uyumluluk denklemleri

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial y^2} + \frac{p}{t} \right] = 0$$

$$\frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2\frac{\vartheta_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0$$

şeklindedir. (4.10) uyumluluk kısmi diferansiyel denkleminin çözülmesiyle; (4.38) homojen terim, (4.39) özel terim ve bu iki terimden oluşan (4.40) Airy gerilme ifadeleri

$$F_h = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} \qquad \textbf{(4.38)}$$

$$F_{\ddot{o}} = \frac{W_{mn}^2 + 2W_{mn}W_{0mn}}{32} \left[E_y \frac{L^2 n^2}{B^2 m^2} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L} \right) + E_x \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2} \cos\left(\frac{2n\pi y}{B} \right) \right] \qquad \textbf{(4.39)}$$

$$F = -\frac{P_x y^2}{2Bt} - \frac{P_y x^2}{2Lt} + \frac{W_{mn}^2 + 2W_{mn}W_{0mn}}{32} \left[E_y \frac{L^2 n^2}{B^2 m^2} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L} \right) + E_x \frac{B^2 m^2}{L^2 n^2} \cos\left(\frac{2n\pi y}{B} \right) \right] \qquad \textbf{(4.40)}$$

şeklinde bulunur ve (4.9) denge denklemi Galerkin yöntemi integrasyonunda kullanılmasıyla ulaşılacak ifade

$$\int_0^L \int_0^B \left[\left(D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - t\left[\frac{p}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \ w + w_0}{\partial x \partial y} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{L} \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B} \right) dxdy = 0 \right. \qquad \textbf{(4.41)}$$

şeklindedir. İntegrasyon sonucunda eşitlik

$$\left[\frac{\pi^2}{16} \left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) \right] W_{mn}^3 + \left[\frac{3\pi^2 W_{0mn}}{16} \left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) \right] W_{mn}^2 + \left[-\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 W_{0mn}^2}{8} \left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) + \frac{\pi^2}{t} \left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB} \right) \right] W_{mn} - W_{0mn} \left(\frac{m^2 P_x}{Lt} + \frac{n^2 P_y}{Bt} \right) - \frac{16LB}{\pi^4 t} p = 0 \qquad \textbf{(4.42)}$$

halini alır ve

$$
\begin{aligned}
&C_1 W_{mn}^3 + C_2 W_{mn}^2 + C_2 W_{mn} + C_4 = 0 \\
&C_1 = \frac{\pi^2}{16}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) \\
&C_2 = \frac{3\pi^2 W_{0mn}}{16}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) \\
&C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} - \frac{P_y n^2}{Bt} + \frac{\pi^2 W_{0mn}^2}{8}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right) + \frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB} \right) \\
&C_4 = -\frac{16LB}{\pi^4 t} p - W_{0mn}\left(\frac{m^2 P_x}{Lt} + \frac{n^2 P_y}{Bt} \right)
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

şeklinde üçüncü dereceden denklem sistemi olarak yazılabilir (Hughes ve Paik, 2010). Sistemin çözümü W_{mn} katsayılarını verecektir:

$$
\begin{aligned}
&W_{mn} = -\frac{C_2}{3C_1} + k_1 + k_2 \\
&k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} + \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}} \right)} \\
&k_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{Y}{2} - \sqrt{\frac{Y^2}{4} + \frac{X^3}{27}} \right)} \\
&X = \frac{C_3}{C_1} - \frac{C_2^2}{3C_1^2} \\
&Y = \frac{2C_2^3}{27C_1^3} - \frac{C_2 C_3}{3C_1^2} + \frac{C_4}{C_1}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

4.5.3 Stifnerli panellere ortotropik plak yaklaşımı için Galerkin yönteminin uygulanması

Galerkin metodu ile analizi yapılacak stifnerli panelin levha malzeme özellikleri Çizelge 4.1'de, stifnerlerin malzeme özellikleri Çizelge 4.2'de ve stifnerli panellerin geometrik ölçüleri Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 : Stifnerli panel için levha malzeme özellikleri

Akma gerilmesi (σ_{0p})	352.8 MPa
Elastisite (Young) Modülü	205800 MPa
Poison oranı	0.3

Çizelge 4.2 : Stifner malzeme özellikleri

Akma gerilmesi (σ_{0s})	352.8 MPa
Elastisite (Young) Modülü	205800 MPa
Poison oranı	0.3

Çizelge 4.3 : Stifnerli panellerin geometrik ölçüleri

Panel	L(mm)	B(mm)	t(mm)	n_{xs}	h_w(mm)	t_w(mm)	b_f(mm)	t_f(mm)
P1	3600	3600	21	3	80	12	100	15
P2	3600	3600	21	3	150	12	100	15
P3	3600	3600	21	3	200	12	100	15
P4	3600	3600	21	5	80	12	100	15
P5	1800	3600	21	5	80	12	100	15
P6	2640	3600	21	5	80	12	100	15
P7	2640	3600	16	5	92	20	200	30
P8	2640	3600	16	5	120	12	100	15
P9	2640	3600	16	5	82	10	200	30

Başlangıç sehiminin ve yanal yükün olmadığı ($W_{0mn}=0$ ve $p=0$) durumunda Galerkin yönteminin uygulanması sonucu elde edilen üçüncü dereceden ifadedeki C_2 ve C_4 katsayıları sıfırdır ve burkulma olayı gerçekleşmeden önce lateral göçme bu durumda sıfır olmalıdır.

$$W_{mn} = \sqrt{-\frac{C_3}{C_1}} = 0 \qquad \textbf{(4.47)}$$

Burada

$$C_1 = \frac{\pi^2}{16}\left(E_x \frac{m^4 B}{L^3} + E_y \frac{n^4 L}{B^3} \right)$$

$$C_3 = -\frac{P_x m^2}{Lt} + \frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB} \right)$$

şeklindedir ve (4.47) ifadesinin çözümü C_3 katsayının sıfır olması ile mümkündür.

$$-\frac{P_x m^2}{Lt} + \frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^4 B}{L^3} + D_y \frac{n^4 L}{B^3} + 2H \frac{m^2 n^2}{LB} \right) = 0 \qquad \textbf{(4.48)}$$

(4.48) ifadesinin çözülmesi ile ortotropik plağın boyuna burkulma yükü değeri

$$P_{xb} = \pi^2 \left(D_x \frac{m^2 B}{L^2} + D_y \frac{n^4 L^2}{m^2 B^3} + 2H \frac{n^2}{B} \right) \qquad \textbf{(4.49)}$$

şeklinde olur. Bukulma yükü ile burkulma gerilmesi arasındaki

$$\sigma_{xb} = -\frac{P_{xb}}{Bt}$$

ilişkisinden burkulma gerilmesi

$$\sigma_{xb} = -\frac{\pi^2}{t}\left(D_x \frac{m^2}{L^2} + D_y \frac{n^4 L^2}{m^2 B^3} + 2H \frac{n^2}{B^2} \right) \qquad \textbf{(4.50)}$$

şeklinde olur (Paik ve diğ., 2001).

Boyuna yüklemeye maruz bırakılmış ortotrop plakta burkulma gerilmesi yardımıyla burkulma modları belirlenebilir. Enine burkulma yarım dalga sayısı bir (n = 1) olan plakta, boyuna burkulma modu (m) ile plak boyu ve plak genişliği arasındaki ilişki

$$D_x \frac{m^2}{L^2} + D_y \frac{L^2}{m^2 B^3} + 2H \frac{1}{B^2} \le D_x \frac{(m+1)^2}{L^2} + D_y \frac{L^2}{(m+1)^2 B^3} + 2H \frac{1}{B^2} \qquad \textbf{(4.51)}$$

ile verilir ve

$$\left(\frac{L}{B} \right)^4 \le \frac{D_x}{D_y} m^2 \ \ m+1\ ^2 \qquad \textbf{(4.52)}$$

şeklinde sadeleştirilebilir (Hughes ve Paik, 2010).

Yanal basınç ve boyuna basma yüklemelerine maruz kalmış geometrik nonlineerlikteki büyük sehimli ortotrop plak için nihai gerilme değeri, boyuna doğrultudaki maksimum ve enine doğrultudaki minimum gerilme yardımıyla bulunur ve bu değerler

$$\sigma_{x\max} = -\frac{P_x}{Bt} - \frac{m^2\pi^2 W_{mn}\ \ W_{mn} + 2W_{omn}\ \ E_x}{8L^2}$$
$$\sigma_{y\min} = \frac{\pi^2 W_{mn}\ \ W_{mn} + 2W_{omn}\ \ E_y}{8B^2} \qquad \textbf{(4.53)}$$

şeklindedir. Boyuna basma ve lateral basınç yüklemesine maruz plak için nihai gerilme değeri

$$\sigma_{xeq} = \sqrt{\sigma_{x\max}^2 - \sigma_{x\max}\sigma_{y\min} + \sigma_{y\min}^2} \qquad \textbf{(4.54)}$$

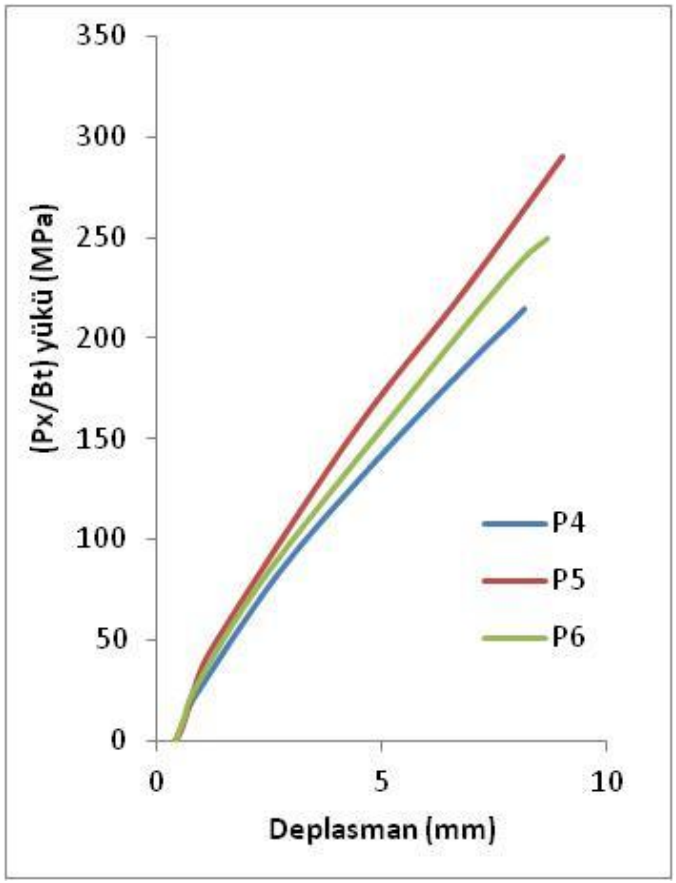
ile verilir (Paik ve diğ., 2001).

Boyuna basma kuvvetine ve lateral basınç yüküne maruz bırakılan ortotropik plak yaklaşımında bulunulan stifnerli paneller için nihai gerilme değerlerinin nonlineer sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen değerlerle karşılaştırılması Çizelge 4.4-4.7' de, Galerkin yöntemi ile yük deplasman eğrileri Şekil 4.3-4.6'de verilmiştir.

Stifnerli panelin boyunun nihai gerilmeye etkisi Çizelge 4.4'te ve Galerkin yöntemi ile yük deplasman eğrisi Şekil 4.3'te verilmiştir. Stifnerli panelin boyunun artışıyla birlikte nihai gerilmede azalma gözlenmiş ve panel boyu kısa olduğunda kullanılan yöntem ile nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucunun birbirine daha yakın olduğu tespit edilmiştir.

Çizelge 4.4 : Stifnerli panel boyunun nihai gerilmelere etkisi

Panel	Ortotropik Plak Yaklaşımı nihai gerilme	Nonlineer Sonlu Elemanlar nihai gerilme (Chen, 2003)
P4	229.32 MPa	194.04 MPa
P5	296.352 MPa	287.712 MPa
P6	225.792 MPa	250.488 MPa

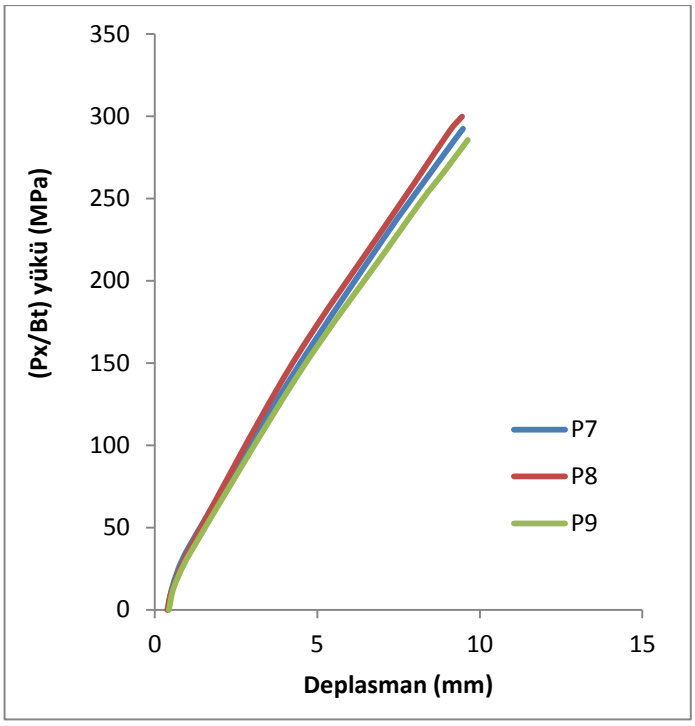


Şekil 4.3 : Değişen panel boyu için yük deplasman eğrisi

Stifnerli panelde farklı boyutlardaki stifnerlerin nihai gerilmeye etkisi Çizelge 4.5'te ve Galerkin yöntemi ile yük deplasman eğrileri Şekil 4.4'te verilmiştir. Stifner ataletinin büyük olduğu durumda nihai gerilme değerinin arttığı gözlenmiş ve stifner flenşlerinin aynı ama stifner gövdesinin farklı boyutlarda olduğu durumlarda (P7-P9) atalet kuvvetinin küçük olduğu halin nonlineer sonlu elemanlar ile daha yakın sonuç verdiği tespit edilmiştir.

Çizelge 4.5 : Farklı stifner boyutlarının nihai gerilmelere etkisi

Panel	Ortotropik Plak Yaklaşımı nihai gerilme	Nonlineer Sonlu Elemanlar nihai gerilme (Chen, 2003)
P7	298.224 MPa	313.992 MPa
P8	299.880 MPa	285.768 MPa
P9	285.768 MPa	296.352 MPa

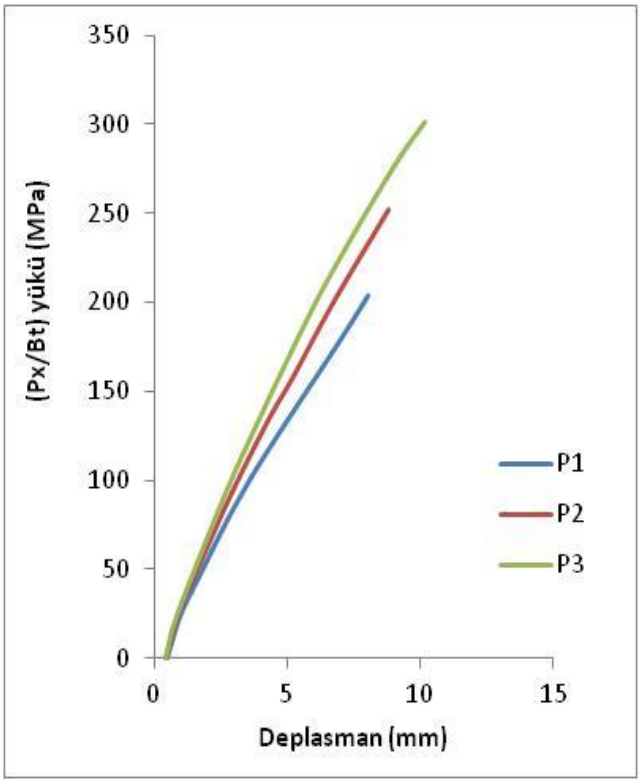


Şekil 4.4 : Farklı stifner boyutları için yük deplasmaneğrisi

Stifnerli panelin stifner yüksekliğinin nihai gerilmeye etkisi Çizelge 4.6'da ve Galerkin yöntemi ile yük deplasman eğrisi Şekil 4.5'te verilmiştir. Stifner gövde yüksekliğinin artırılması nihai gerilme değerini artırmış ve gövde yüksekliğinin daha kısa olduğu durumda nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucu ile Galerkin yöntemi birbirine daha yakın sonuçlar vermiştir.

Çizelge 4.6 : Stifnerli gövde yüksekliğinin nihai gerilmelere etkisi

Panel	Ortotropik Plak Yaklaşımı nihai gerilme	Nonlineer Sonlu Elemanlar nihai gerilme (Chen, 2003)
P1	204.624 MPa	183.456 MPa
P2	257.544 MPa	232.848 MPa
P3	303.408 MPa	278.712 MPa

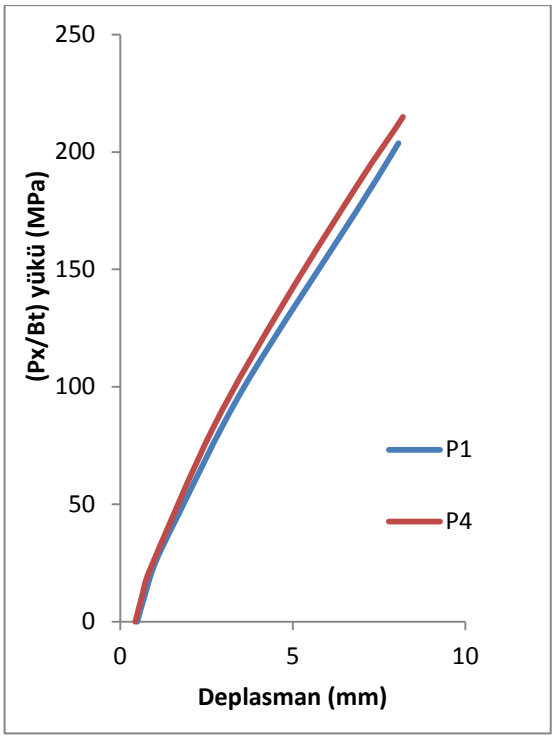


Şekil 4.5 : Stifnerli gövde yüksekliği için yük deplasman eğrisi

Stifnerli panelin stifner sayısının nihai gerilmeye etkisi Çizelge 4.7'de ve Galerkin yöntemi ile yük deplasman eğrisi Şekil 4.6'da verilmiştir. Beklenebileceği gibi, stifner sayısındaki artışla birlikte nihai gerilme değeri de yükselmiştir. Ancak stifner sayısının daha az olduğu durumda, nonlineer sonlu eleman analizi ile Galerkin yöntemi birbirine daha yakın sonuç vermektedir.

Çizelge 4.7 : Stifner sayısının nihai gerilmeye etkisi

Panel	Ortotropik Plak Yaklaşımı nihai gerilme	Nonlineer Sonlu Elemanlar nihai gerilme (Chen, 2003)
P1	204.624 MPa	183.456 MPa
P4	229.320 MPa	194.04 MPa



Şekil 4.6 : Stifner sayısı için yük deplasman eğrisi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, çeşitli göçme modlarına maruz kalan stifnerli gemi panellerine ortotropik plak yaklaşımıyla büyük sehimli eğilme analizi Galerkin yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın yapı taşı olan ortotropik plak yaklaşımının yapıldığı Mod I türünde göçmeden (stifner ve plağın birlikte hareket edip burkulduğu göçme modu) ve diğer stifnerli panel göçme modlarından bahsedilmiştir. Böylece yaklaşımın yapılabileceği stifnerli plak yapılarının özellikleri anlatılmıştır.

Yaklaşık çözüm yöntemlerinde kullanılan analitik ifadeler tanıtılarak yöntemin temel ifadeleri verilmiştir. Bu analitik eşitlikler: denge denklemleri ve enerji ifadesidir.

- Enerji ifadesi bölümünde, elastik şekil değiştirme potansiyel enerjisine ve minimum enerji ifadesine değinilmiştir. Başlangıçta çıplak plak için elastik şekil değiştirme potansiyel enerjisi ve plakta düzlem içi kuvvetlerin yaptığı virtüel iş ifadesi verilmiştir. Verilen bu ifadelerden büyük sehimli eğilme analizinde kullanılan minimum enerji ifadesi elde edilmiştir. Ardından da stifnerli panel için de bu ifadeler verilmiştir. Burada, elastik şekil değiştirme potansiyel enerjisi stifnerlerin ve plağın elastik şekil değiştirme enerjilerinin toplamı şeklinde, virtüel iş ifadesi de aynı şekilde stifnerler ve plak üzerinde düzlem içi kuvvetlerin yaptığı işin toplamı şeklindedir.
- Denge denklemleri bölümünde ise mekanik etkilerin dengesi ile elde edilen kısmi diferansiyel denklemlere kısaca değinilmiş ve geometrik nonlineerliğe göre isimlendirilen kusurlu ve kusursuz plaklar için bu eşitlikler ayrı ayrı verilmiştir.

Galerkin yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak analiz yapılırken sistemin nonlineer kısmi diferansiyel ifadeleri kullanılmıştır. İzotrop bir plak üzerinde bu kısmi diferansiyel denge denklemleri (denge ve uyumluluk denklemleri) mekanik etkilerin dengesi kullanılarak elde edilişi kapsamlı olarak (yanal yüklü durum, düzlem içi kuvvet etkisindeki durum ve birleşik durum olarak) anlatılmıştır. Ayrıca Galerkin

yöntemi tanıtılmış ve yaklaşık çözümde yöntemin kullanılışı anlatılmıştır ve tüm kenarları basit mesnetli izotrop bir plak örneği verilmiştir. Uygulama sonucu elde edilen nihai gerilme değeri ile nonlinneer sonlu elemanlar nihai gerilme değeri karşılaştırılmış ve yaklaşık çözüm değerinin daha büyük değerde olduğu görülmüştür. Buna ilave olarak Galerkin yöntemi ile yük-deplasman eğrisi verilmiştir.

İzotrop plak üzerinde Galerkin yöntemiyle yaklaşık çözüm anlatıldıktan sonra asıl konu olan stifnerli panellerde büyük sehimli eğilmenin yaklaşık analizine geçilmiştir. Stifnerli panele ortotropik plak yaklaşımı için panelin sahip olması gereken göçme modu, geometrisi, sınır koşulları ve panel yükleme durumlarından bahsedilmiştir. Bu gerekli şartlar altında nonlinerliğe göre kusurlu ve kusursuz ortotropik plak için denge ve uyumluluk ifadeleri verilmiştir. Galerkin yöntemi ile bu kısmi diferansiyel ifadeler kullanılarak yaklaşık olarak ortotropik plak için hesaplanan nihai gerilme ile nonlineer sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan nihai gerilme değerleri çeşitli durumlar için karşılaştırılmıştır ve bu durumlardaki yük- deplasman eğrileri Galerkin metodu ile verilmiştir:

- Stifnerli panelin boyunun artışıyla birlikte nihai gerilmede azalma gözlenmiş ve panel boyu kısa olduğunda kullanılan yöntem ile nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucunun birbirine daha yakın olduğu tespit edilmiştir.
- Stifner ataletinin büyük olduğu durumda nihai gerilme değerinin arttığı gözlenmiş ve stifner flenşlerinin aynı ama stifner gövdesinin farklı boyutlarda olduğu durumlarda (P7-P9) atalet kuvvetinin küçük olduğu halin nonlineer sonlu elemanlar ile daha yakın sonuç verdiği tespit edilmiştir.
- Stifner gövde yüksekliğinin artırılması nihai gerilme değerini artırmış ve gövde yüksekliğinin daha kısa olduğu durumda nonlineer sonlu elemanlar yöntemi sonucu ile Galerkin yöntemi birbirine daha yakın sonuçlar vermiştir.
- Stifner sayısındaki artışla birlikte nihai gerilme değeri de yükselmiştir. Ancak stifner sayısının daha az olduğu durumda, nonlineer sonlu eleman analizi ile Galerkin yöntemi birbirine daha yakın sonuç vermektedir.

İlerde yapılacak olan çalışmalarda tüm plak kenarlarının ankastre mesnetli, karşılıklı iki kenarının basit ve diğer iki kenarının ankastre gibi diğer mesnetlenmiş durumlar ve stifnerli panellerin yapısı ve rijitliğine göre meydana gelen farklı göçme modlarında da çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Amabili, M. (2008). Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates, Cambridge University Press, New York, USA.

Bedaira, O. K. (1997). The Elastic Behavior of Multi-Stiffened Plates Under Uniform compression, *Thin Walled Structures, 27,* 311-335.

Byklum, E. (2002). *Ultimate Strength Analysis of Stiffened Steel and Aluminium Panels Using Semi-Analytical Methods*, (doktora tezi), Norwegian University of Science And Technology, Trondheim, Norway.

Caldwell, J. B. (1965). Ultimate Longitudinal Strength, *Transactions of The Royal Instutions of Naval Architects, 107,* 411-430.

Chen, Y. (2003). *Ultimate Strength Analysis of Stiffened Panels Using A Beam Column Method,* (doktora tezi), Virginia Polytechnic Institude and State Universty, Blacksburg, Virginia.

Fujikubo, M., Harada, M., Yao, T., Khedmati, M. R. ve Yanagihara, D. (2005). Estimation of Ultimate Strength Continuous Stiffened Panel Under Combined Transverse Thrust and Lateral Pressure Part 1: Continuous Stiffened Panel, *Marine Structures, 18,* 383-410.

Fujikubo, M., Harada, M., Yao, T., Khedmati, M. R. ve Yanagihara, D. (2005). Estimation of Ultimate Strength Continuous Stiffened Panel Under Combined Transverse Thrust and Lateral Pressure Part 2: Continuous Stiffened Panel, *Marine Structures, 18,* 411-427.

Fujikubo, M. ve Kaeding, P. (2002). New Simplified Approach to Collapse Analysis of Stiffened Plates, *Marine Structures, 15,* 251-283.

Fujikubo, M. ve Yao T. (1999). Elastic Local Buckling Strength of Stiffened Plate Considering Plate/Stiffener Interaction and Welding Reidual Stress, *Marine Structures, 12,* 543-564.

Girkmann, K. (1965). Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler-Levhaların, Plakların, Kabukların ve Düzlem Elemanlı Kabukların Elastostatiğine Giriş, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul, Türkiye.

Gordo, J. M. ve Soares, C. G. (1996). Aproximate Method to Evaluate the Hull Girder Collapse Strength, *Marine Structures, 9,* 449-470.

Hughes, O. F. ve Paik, J. K. (2010). Ship Structural Analysis and design, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, New Jersey.

Little, G. H. (1986). Efficient Large Deflection Analysis of Rectangular Orthotropic Plates by Direct Energy Minimisation, *Computers and Structures, 26,* 871-884.

Mansour, A. E. (1971). On the Nonlinear Theory of Orthotropic Plates. *Journal of Ship Research, 15,* 217-240.

Mukhopadhyay, B. ve Bera, R. K. (1993). Nonlinear Analysis of Thin Homogeneous Orthotropic Elastic Plates Under Large Deflections and Thermal Loadig, *Computers Mathematics Applications, 28,* 81-88.

Paik, J. K. ve Kim, B. J. (2002). Ultimate Strength Formulations For Stiffened Panels Under Combined Axial Load, In-Plane Bending and Lateral Pressure: A Benchmark Study, *Thin Walled Structures, 40,* 45-83.

Paik, J. K., Thayamballi, A. K. ve Kim, B. J. (2001). Large Deflection Orthotropic Plate Approach to Develop Ultimate Strength Formulations for Stiffened Panels Under Combined Biaxial Compression/Tension and Lateral Pressure, *Thin Walled Structures, 39,* 215-146.

Paik, J. K., Thayamballi, A. K. ve Kim, D. H. (1999). An Analytical Method For the Ultimate Strength and Effective Plating of Stiffened Panels, *Journal of Constructional Steel Research, 49,* 43-68.

Smith, C. S. (1977). Influence of Local Compressive Failure on Ultimate Longitidinal Strength of A Ship's Hull, *International Symposium on Practical Design in Shipbuilding,* Tokyo, Japan.

Suryanarayana, A. ve Ramachandran, J. (1978). Large Deflection of Rectangular Orthotropic Plates With Nonlinear Stress-Strain Relations, *Computers and Structures, 8,* 93-98.

Szilard, R. (2004). Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods, Jonh Wiley & Sons., New Jersey.

Ueda, Y. ve Rashed, S. M. H. (1984). The Idealized Structural Unit Method and its Application to Deep Girder Structures, *Computers and Structures, 18,* 277-293.

Ventsel, E. ve Krauthemmer, T. (2001). Thin Plates and Shells Theory, Analysis and Applications, CRC Press, New York.

Timoshenko, S. ve Kriger, S. W. (1959). Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, New York, USA.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Gülaydın KOÇ

Doğum Yeri ve Tarihi: Ereğli/Konya – 01.01.1988

E-Posta: gulaydinkoc@hotmail.com

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi – Gemi ve Deniz Teknolojisi Mühendisliği Bölümü