İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN ÜNİFORM BASINÇ YÜKÜ ALTINDAKİ GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN DAVRANIŞININ DENEYSEL VE SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal GÜNDOĞAN

Uçak Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak Uzay Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN ÜNİFORM BASINÇ YÜKÜ ALTINDAKİ GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN DAVRANIŞININ DENEYSEL VE SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal GÜNDOĞAN
(511091164)

Uçak Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU

HAZİRAN 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün **511091164** numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Kemal GÜNDOĞAN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN ÜNİFORM BASINÇ YÜKÜ ALTINDAKİ GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN DAVRANIŞININ DENEYSEL VE SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç.Dr.Vedat Ziya DOĞAN** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç.Dr.Haydar UYANIK .....
Hava Harp Okulu

Teslim Tarihi : **03 Mayıs 2013**
Savunma Tarihi : **24 Haziran 2013**

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca ve bu tez çalışması sürecinde, mesleki bilgi ve tecrübe birikimini benimle paylaşan ve hiç bitmek bilmeyen sabrıyla bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU'na teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ar.Gör.Demet BALKAN'a ve Özgür DEMİR'e vermiş olduğu destekler ve yardımlarından dolayı ve öğrenim dönemim boyunca çalıştığım, birikimlerinden faydalandığım tüm hocalarıma ve son olarak, hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve maddi ve manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2013

Kemal GÜNDOĞAN
Uzay Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
2. KATMANLI KOMPOZİT PLAĞIN TEMEL DENKLEMLERİ **5**
2.1 Kabuller 5
2.2 Yer Değiştirme Alanı 6
2.3 Gerinim - Yer Değiştirme Denklemleri 7
2.4 Bünye Denklemleri 9
2.5 Kuvvet ve Moment Bileşkeleri 12
2.6 Yönetici Denklemler 13
2.7 Sınır Şartları 16
3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ **17**
3.1 Giriş 17
3.2 Galerkin Metodu 17
3.3 Sonlu Elemanlar Metodu 20
4. DENEYSEL ÇALIŞMA **21**
4.1 Kompozit Plak İmalatı 21
4.2 Korelasyon Cihazı ile Sehim Ölçümü 22
4.2.1 Deney donanımı 22
4.2.2 Limess VIC3D çalışma prensibi 22
4.2.3 Deney düzeneğinin hazırlanması 23
4.2.4 Deneylerin gerçekleştirilmesi 24
5. SAYISAL VE DENEYSEL SONUÇLAR **33**
5.1 Katmanlı Kompozit Plağın Özellikleri 33
5.2 Sonlu Eleman Analizi ve Deneysel Çökme Sonuçları 34
5.3 Galerkin yaklaşık çözüm sonuçları 45
5.4 Sonlu Eleman Analizi ve Galerkin Gerinim Sonuçları 56
6. DEĞERLENDİRMELER **67**
KAYNAKLAR **69**

KISALTMALAR

$\mathbf{a, b}$	:	Plak Eni ve Boyu
$\mathbf{E_1, E_2}$	:	1 ve 2 yönündeki Elastisite Modülleri
$\mathbf{E_f, E_m}$	:	Elyaf ve Matrisin Elastisite Modülleri
$\mathbf{G_{12}}$	:	Kayma Modülü
$\mathbf{G_f, G_m}$	:	Elyaf ve Matris Yönündeki Kayma Modülleri
$\mathbf{h}$	:	Plak kalınlığı
$\mathbf{M_x, M_y, M_{xy}}$	:	Moment Bileşenleri
$\mathbf{m, n}$	:	Terim Sayısı
$\mathbf{N_x, N_y, N_{xy}}$	:	Kuvvet Bileşenleri
$\mathbf{Q_{ij}}$	:	Katmanlı Kompozit İndirgenmiş Katılık Matrisleri
$\mathbf{U, V, W}$	:	Yer Değiştirme Fonksiyonundaki Katsayılar
$\mathbf{u, v, w}$	:	x,y ve z Yönlerindeki Yer Değiştirme Bileşenleri
$\mathbf{u^0, v^0, w^0}$	:	Plağın Orta Yüzeyindeki Yer Değiştirme Bileşenleri
$\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{w}}$	:	Hız Bileşenleri
$\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{w}}$	:	İvme Bileşenleri
$\boldsymbol{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}}$	:	Gerinimler
$\boldsymbol{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0}$	:	Orta Düzlem Gerinimleri
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	:	Eğrilikler
$\boldsymbol{\nu}$	:	Poisson Oranı
$\boldsymbol{\nu_f}$	:	Elyaf Poisson Oranı
$\boldsymbol{\nu_m}$	:	Matris Poisson Oranı
$\boldsymbol{\rho}$	:	Malzeme Yoğunluğu
$\boldsymbol{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}}$	:	Gerilme Bileşenleri

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Karbon/Epoksi plak malzeme özellikleri 33
Çizelge 5.2 : Plağın orta noktasının çökmesinin yükle değişimi (Nastran).....45
Çizelge 5.3 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim.....47
Çizelge 5.4 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v bir, w iki terim. 49
Çizelge 5.5 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim, k=0.1.....51
Çizelge 5.6 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim, k=0.2.....53
Çizelge 5.7 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim, k=0.3.....55

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Plak boyutlandırmaları ve eksen takımı 6
Şekil 2.2 : İnce bir levhanın açısal olarak bölgesel ve global eksenleri 9
Şekil 3.1 : k katsayıları ile yaklaşım fonksiyonunun değişimi 19
Şekil 4.1 : VIC3D Kamera Sistemi 22
Şekil 4.2 : VIC3D Cihazı Bağlantı Elemanları 23
Şekil 4.3 : Kalibrasyon tableti.....24
Şekil 4.3 : Kalibrasyon kutucuğunun seçilmesi 25
Şekil 4.4 : Kalibrasyon yapılan görüntülerin okutulması 25
Şekil 4.5 : Kalibrasyonun gerçekleştirilmesi 26
Şekil 4.6 : Kameraların kalibrasyonu 26
Şekil 4.7 : Kalibrasyon verilerinin onaylanması.....27
Şekil 4.8 : Kalibrasyonların doğruluğunun tespiti 27
Şekil 4.9 : Numunenin ilk görüntüsünün alınması.....28
Şekil 4.10 : İlk görüntü üzerinde yapılan işlemler 29
Şekil 4.11 : x ekseni boyunca plak boyutlarının tanımlanması.....29
Şekil 4.12 : y ekseni boyunca plak boyutlarının tanımlanması.....30
Şekil 4.13 : z ekseni yönünde yer değiştirme referanslandırması.....30
Şekil 4.14 : İlk görüntüdeki görüntülerin karşılaştırması 31
Şekil 4.15 : İlk görüntü ilk deforme olmuş görüntülerin korelasyonunun yapılması.32
Şekil 5.1 : Plağın 50 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....35
Şekil 5.2 : Plağın 100 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....35
Şekil 5.3 : Plağın 100 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu) 36
Şekil 5.4 : Plağın 150 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu) 36
Şekil 5.5 : Plağın 150 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu) 37
Şekil 5.6 : Plağın 200 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....37
Şekil 5.7 : Plağın 200 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu) 38
Şekil 5.8 : Plağın 250 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....38
Şekil 5.9 : Plağın 250 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu) 39
Şekil 5.10 : Plağın 300 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....39
Şekil 5.11 : Plağın 300 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu).....40
Şekil 5.12 : Plağın 350 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....40
Şekil 5.13 : Plağın 350 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu).....41
Şekil 5.14 : Plağın 400 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....41
Şekil 5.15 : Plağın 400 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu).....42
Şekil 5.16 : Plağın 450 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....42
Şekil 5.17 : Plağın 450 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu).....43
Şekil 5.18 : Plağın 500 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu).....42
Şekil 5.19 : Plağın 500 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu).....43
Şekil 5.20 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.....46
Şekil 5.21 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.....46
Şekil 5.22 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.....46

Şekil 5.23 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim. 47
Şekil 5.24 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim. 47
Şekil 5.25 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.... 48
Şekil 5.26 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.... 48
Şekil 5.27 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.... 48
Şekil 5.28 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.... 49
Şekil 5.29 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.... 49
Şekil 5.30 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.1 50
Şekil 5.31 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.1 50
Şekil 5.32 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.1 50
Şekil 5.33 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.1 51
Şekil 5.34 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.1 51
Şekil 5.35 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.2 52
Şekil 5.36 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.2 52
Şekil 5.37 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.2 52
Şekil 5.38 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.2 53
Şekil 5.39 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.2 53
Şekil 5.40 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.3 54
Şekil 5.41 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.3 54
Şekil 5.42 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.3 54
Şekil 5.43 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.3 55
Şekil 5.44 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim,k=0.3 55
Şekil 5.45 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim. 56
Şekil 5.46 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim. 57
Şekil 5.47 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim. 57
Şekil 5.48 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim. 57
Şekil 5.49 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim. 58
Şekil 5.50 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.. 58
Şekil 5.51 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim 58
Şekil 5.52 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim 59
Şekil 5.53 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim 59
Şekil 5.54 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim 59
Şekil 5.55 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1 60
Şekil 5.56 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1 60
Şekil 5.57 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1 60
Şekil 5.58 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1 61
Şekil 5.59 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1 61
Şekil 5.60 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2 61
Şekil 5.61 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2 62
Şekil 5.62 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2 62
Şekil 5.63 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2 62
Şekil 5.64 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2 63
Şekil 5.65 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3 63
Şekil 5.66 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3 63
Şekil 5.67 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3 64
Şekil 5.68 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3 64
Şekil 5.69 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3 64

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN ÜNİFORM BASINÇ YÜKÜ ALTINDAKİ GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN STATİK DAVRANIŞININ SAYISAL VE DENEYSEL OLARAK İNCELENMESİ

ÖZET

Makina, gemi, kimya, inşaat, havacılık ve uzay mühendisliği gibi teknolojinin birçok dalında plak ve kabuk yapıların ince cidarlı çeşitli şekilleri ile karşılaşılır. Plak ve kabuk yapıların yaygın kullanımı kendine özgü özelliklerinden kaynaklanır. Katmanlı biçimde üretilen kompozit malzemeler ise; havacılık ve uzay yapıları, gemi gövdeleri, otomotivdeki yapısal parçalar, mikro-elektromekanik sistemler ve beton güçlendirmek için inşaat yapılarındaki sistemler gibi alanlarda kullanılan ve mukavemet ve tokluğu aynı anda yüksek tutabildiklerinden dolayı tercih edilen malzeme sistemi haline gelmektedir. Bu malzemeler havacılık ve uzay sanayinde daha çok plak ve kabuk formunda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş katmanlı kompozit bir ince plağın temel denklemleri von Karman plak teorisi ve klasik katmanlama teorisi çerçevesinde elde edilmiştir. Gerinim-yer değiştirme ilişkileri (kinematik denklemleri), gerilme gerinim ilişkileri (bünye denklemleri) ile denge denklemleri yazılmıştır. Ardından, iş ilkesi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Hareket denklemleri plak düzleminin orta yüzeyi için ifade edildiğinden geometrik doğrusal olmayan plak davranışını belirlemek üzere birbirine bağlı üç denklem elde edilir. Doğrusal olmayan bu denklemler Galerkin yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu amaçla ankastre sınır şartlarını sağlayan deneme fonksiyonlarının toplamı şeklinde seçilen çözüm fonksiyonları oluşturulmuştur. Bu çalışmada tek terimli yaklaşım fonksiyonları ile daha iyi bir çözüm elde edebilmek için özellikle çökme fonksiyonunun deneysel sonuçlara daha iyi uyumunu sağlayacak bir deneme fonksiyonu önerilmiştir. Yaklaşım fonksiyonları denge denklemlerinde yerine konarak Mathematica programı ile çözüm yapılmıştır. Problem aynı zamanda MSC Nastran sonlu eleman yazılımıyla da çözülmüştür. Bu amaçla Nastran sonlu eleman yazılımı belirlenen Patran 2010 ile modellediğimiz doğrusal olmayan statik çözümlerden yararlanılmıştır. Öncelikle Patran 2010 sonlu eleman modeli oluşturma

programı ile plak dört katmanlı kompozit olarak modellenmiş geometrisi 300 mm x 300 mm olarak belirlenmiştir. Plak orta yüzeyi 20x20=400 elemanla modellenmiştir. Plak etrafındaki tüm düğüm noktaları seçilerek yer değiştirme ve dönmeler sıfır yapılmış ve böylece plak dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiştir. Yükleme koşulları ise 500 N'a kadar artan değerlerle on farklı yük değeri düzgün yayılı yük olarak plak yüzeyine dağıtılmıştır. Yüklemeler toplam yük olarak çeşitli yükleme koşullarıyla girildiğinden analiz sonuçlarını karşılaştırma kolaylığı sağlamıştır. Analiz çeşidi, incelediğimiz plak modelini ifade etmek üzere, doğrusal olmayan statik seçilerek sonlu eleman modeli analize hazır hale getirilmiş ve SOL106 çözücü kullanılarak çözülmüştür. Analiz MD Nastran 2010.1 sonlu elemanlar analizi yazılımı ile gerçekleştirilmiş ve sayısal sonuçlar bölümünde sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlarla ve yaklaşık çözümle karşılaştırılmıştır. Malzeme değerleri kullanılan karbon için çekme testleri ile belirlenen değerler, kalınlık değeri ve malzeme yönelimleri girilmiş, plak katmanlaması ve yönelimleri girilmiştir. Çalışmanın deneysel kısmında karbon elyaf/epoksi kompozit bir plak dört katmanlı olarak imal edilmiş ve farklı yayılı yükler etki ettirilerek plak davranışı incelenmiştir. Deneysel çalışmada plağın çeşitli yükler altındaki sehimleri Limess firmasından tedarik edilmiş olan VIC3D cihazıyla ölçülmüştür. Bu cihazı kullanmadan önce yapılması gereken kalibrasyon ölçümleri yapılmış, ana plak üzerinden gerekli görüntü datalarıyla ilk görüntü yazılıma işlenmiş ve bu görüntü vasıtasıyla farklı düzgün dağılı basınç yükleri altında çeşitli görüntülerin elde edilmesiyle bu görüntüler arasında korelasyon işlemleri program vasıtasıyla başarılı bir şekilde tamamlanmıştır. Ayrıca bu incelemelerle beraber plak üzerinde çeşitli noktalardaki gerinimler gerinim ölçerler vasıtasıyla ölçülmüştür. En son olarak yapılan analiz sonuçları da gözönüne alınarak, bütün veriler arasında karşılaştırmalar yapılmış, çözüm yöntemi ve belirlenen yaklaşım fonksiyonunun doğruluğu değerlendirilmiştir.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL INVESTIGATION OF NONLINEAR STATIC BEHAVIOUR OF A LAMINATED COMPOSITE PLATE SUBJECTED TO UNIFORM PRESSURE LOAD

SUMMARY

Thin paries structures particularly thin plates and shells are come up in many major of technology, such as mechanical, marine, chemical, civil, aeronautical and astronautical engineering. Such a widespread use of plate and shell structures arises from their fundamental properties. When it is suitably designed, even very thin plates and especially shells, can support large loads and pressures. Thus, they are utilized in structures such as aerospace vehicles in which light weight is essential.

This research is concerned with experimental and numerical investigation of a laminated composite plate subjected to uniform pressure load. If a weighted residual method with multi-term displacement functions is applied to obtain approximate solution to the problem, a tremendous number of integrations should be performed. Therefore, the limited number of approximation functions is used in the approximate solution to reduce the solution efforts and the selection of approximation functions is the crucial to obtain reliable results.

In this study, the equations of motion are derived by the use of the virtual work principle in the frame of the von Kármán large deflection theory of thin plates. It is assumed that the plate is clamped at all edges. One-term approximation functions are defined for the in-plane displacements and two terms function is selected for the out-of-plane deflection. The form of out-of-plane displacement is determined by considering the experimental result of the deflection.

Finite element method can be applied to many engineering problems that are governed by a differential equations and to supply finite element equations, they are needed a systematic approaches such as weighted residual method and energy method.

Moreover, ordinary differential equations, especially fourth order equations, can be solved using method of the weighted residual and can be derived the element equations using Galerkin method for the finite element method.

Thus, the approximate displacement functions are substituted into the equations of motion and then Galerkin method is used to obtain the nonlinear algebraic governing equations. When the governing differential equation is available to orthotropic plates, Galerkin's method can be applied to any boundary condition of rectangular plates. Geometry is determined as 300 mm x 300mm. Beside, the load conditions are given as the values that ten different load increased from 50 N to 500 N and it is distributed on the plate surface. All of the nodes are chosen and the moment effect has been destroyed due to the fact that the plate is clamped at all edges.

Approximate solution is a linear combination of trial functions. Accuracy depends on the choice of trial functions. The approximate solution must satisfy the essential boundary conditions. Galerkin uses n trial functions for weighted functions. It can be integrated by parts with reducing the order of differentiation in the axial displacement and applying natural boundary conditions. When the same order of differentiation for both trial function and approximation solution is substituted and written in matrix form, n equations with n unknown coefficients can be obtained. The equations are solved by the use of MATHEMATICA software and the equations can be arranged as well.

Furthermore, the plate under the uniform pressure is modelled with MSC PATRAN and its geometry is determined as 300 mm x 300mm. The midplane of the plate is modelled with 20x20=400 elements. All of the nodes are chosen and the moment effect has been destroyed due to the fact that the plate is clamped at all edges. Beside, the load conditions are given as the values that ten different load increased from 50 N to 500 N and it is distributed on the plate surface. It is easy to understand and compare with ten different pressure load values. The analyse type, as defined that our plate model, is chosen nonlinear static finite element model and SOL106 problem solver is used as a solver type. Finally, modelled plate is solved using MSC NASTRAN 2010.1 finite element software and numerical values exported from PATRAN. Obtained values are prepared as compare of Galerkin and experimental results.

In the experimental side of study, a laminated carbon/epoxy plate is produced by the wet-hand layup method and cured in a heated vacuum table. The fibers used in the plate have 0^0 - 90^0 orientation as plain fabric balanced. The carbon/epoxy plate that is used with material values and determined by tensile tests, the thickness value and carbon/epoxy fiber orientations are given and four layers of the plate and orientations are determined. Carbon/epoxy composite plate are produced with four layers and by the way the load conditions on the plate are given as the values that ten different load increased from 50 N to 500 N and it is distributed on the plate surface and it is easy to understand and compare with ten different pressure load values.

In the experimental study, VIC3D digital image correlation device was used to obtain deformation behaviour of the plate under the uniform pressure load. Before VIC3D digital image correlation device is used, required correlation process is completed. It is accomplished that the snap-shot from the computer and analog devices.

After the correlation process is accomplished, the base image is obtained and it is accepted as a reference image. It is used to compare with another images that is loaded with the values that ten different load increased from 50 N to 500 N and it is distributed on the plate surface. Therefore, visual effect are compared with them and the pure images are obtained from the VIC3D digital image correlation device.

Finally, Numerical and experimental results of the analyses are compared for different uniform pressure load. A good agreement is found for the stress and strain variation on the plate on the different type of load.

1. GİRİŞ

İnce plak ve kabuk yapılar makina, gemi, havacılık ve uzay mühendisliği gibi teknolojinin birçok dalında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Plak ve kabuk yapıların bu yaygın kullanımı kendine özgü özelliklerinden kaynaklanır. Katmanlı kompozit malzemeler ise havacılık ve uzay yapıları, gemi gövdeleri, otomotivdeki yapısal parçalar, mikro-elektromekanik sistemler ve beton güçlendirmek için inşaat yapılarındaki sistemler gibi alanlarda kullanılan, mukavemet ve tokluğu aynı anda yüksek tutabildiklerinden dolayı tercih edilen malzemelerdir. Bu tür kompozit malzemelerin havacılık ve uzay sanayinde ise hafiflik ve direngenlik bakımından daha çok plak ve kabuk formları ile karşılaşılmaktadır. Plakların yük taşıma davranışları aynıdır. Plakların bu davranışı daha hafif ve mukavim yapıların tasarlanabilmesini sağlar. Ayrıca hafifliğin mühendislik tasarımlarında önemli olduğu, özellikle havacılık ve uzay sanayiinde ayrı bir yeri haizdir. Plağın uzunluk ve kalınlığı kıyaslanırsa bir kirişten oldukça katıdır. Bu yüzden ince plaklar, düşük ağırlık ve şekil verimliliği bakımından ayrıca ekonomik ve teknolojik verimlilik açısından çeşitli mühendislik uygulamalarında tercih edilmektedirler.

Bu çalışmada temel klasik varsayımlar kullanılarak herhangi bir ince elastik plak geometrisinin genel doğrusal teorisinden yola çıkılmıştır. Doğrusal plak ve kabuk teorilerinin genel bağıntı ve denklemlerini elde etmek, ileri matematik diferansiyel denklem teorisi ve yüzey teorisi gibi konulara bazı aşinalıklar gerektirmektedir. Bu konuda teori ve prensipleri elde etmek için gereken özen gösterilmeye çalışılmıştır. Ayrıca, kanıt ve doğrulama yapmadan plak teori yapıları için gerekli olan, yüzey teori elementleri, temel kinematik ve statik bağıntıları sunulmuştur. İlgilenenler için detaylı bağıntı ve denklemler mevcuttur. (Eduard Venstel, 2001) Sonrasında genel doğrusal teorisinin diferansiyel denklem yönlendirmesi plak yapıların belirli geometrik şekline uygulanmış olup, bu şekilde çeşitli plak teorisi mühendislik yaklaşımları, genel plak teorisine bazı tamamlayıcı varsayımları tanıtarak sunulmuştur. Bahsi geçen plak teorisinin matematiksel ifadeleri çoğunlukla kısmi diferansiyel denklem sistemlerine varmaktadır. Bu gibi durumlarda çeşitli çözüm

önerileri getirilmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinde özellikle Sonlu Farklar Yöntemi (FDM), Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM), Sınır Eleman Yöntemi (BEM), Sınır Düzenleme Yöntemi (BCM) gibi metodlara ve onların plak problem uygulamaları gibi bilgisayar tabanlı çözüm metodlarına başvurulmaktadır. Bununla birlikte tezimizde özellikle faydalandığımız Galerkin metodu ve ayrıca kullanılabilen Ritz metodu gibi klasik analitik çözüm metodlarıyla kaydadeğer sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu metodların sayısal çözüm elde etmede literatürde önemli bir yeri bulunmaktadır.

Literatürde ankastre mesnetli katmanlı kompozit plaklar için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiş ve farklı çalışmalar yapılmıştır. Klasik Plak Teorisi kullanılarak ankastre mesnetli katmanlı kompozit plakların burkulma ve titreşim problemi analitik olarak çözülmüştür (Leissa, 1973). Ankastre plaklar için çeşitli çözüm önerileri bulunmaktadır. Farklı sınır şartlarındaki kompozit plaklar Klasik Plak Teorisi kullanılarak Ortogonal Polinomlar yöntemi ile (Dickinson & Di Blasio, 1986) ve basit polinomlar yöntemi (Al-Obeid & Cooper, 1995) ile Ritz yöntemini kullanarak çözüm geliştirilmiştir. Ayrıca Parabolik Kayma Deformasyon Teorisi ile Navier tipi çözüm yapılmıştır (Reddy & Phan, 1985). Ankastre plakların titreşimleri Rayleigh-Ritz ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak ve deneysel olarak ele alınmıştır (Jensen & Crawley, 1985). Anlık basınç yüküne maruz katmanlı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik davranışlarında düzlem-içi katılık ve atalet etkilerinin incelendiği bir çalışma yapılmıştır (Kazancı, Mecitoğlu, & Hacıoğlu, 2004). Katmanlı kompozit bir plağın anlık basınç yükü altında doğrusal olmayan dinamik davranışı parametrik olarak incelenmiş, açıklık oranı ve elyaf oryantasyonu etkileri araştırılmıştır (Kazancı, Hacıoğlu, & Mecitoğlu, 2004). Katmanlı kompozit bir plağın farklı sınır şartları altındaki doğrusal olmayan titreşimleri incelenmiştir (Kazancı & Mecitoğlu, 2005).

İlk olarak elde etmiş olduğumuz yayılı yüke maruz katmanlı kompozit plağın hareket denklemleri ile yaklaşık ve sayısal çözüm teknikleri uygulanarak çözüm yapılmıştır. Bu çalışma için yaklaşık bir çözüm tekniği olan Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Plağın hareket denklemlerinin çözümüne, incelenen ankastre sınır şartı hali için, sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları seçilerek yaklaşım yapılmıştır. Plağın orta noktalarının yerdeğiştirmelerini ifade eden eşitliklerin çözümü için yer değiştirme fonksiyonlarına, koordinatlara bağlı fonksiyonların birer katsayıyla

çarpılıp toplanmasından elde edilen birer seriyle yaklaşım yapılabilir. Bu yaklaşım yapılırken seçilen yaklaşım fonksiyonlarının geometrik sınır şartlarını sağlaması gerekmektedir. Sınır şartlarına uygun bir fonksiyon seçilmesinin ardından Galerkin metodunu uygulamak üzere yer değiştirme fonksiyonlarına tek terimle yaklaşım yapılmıştır. Çok terim alınması bu tür doğrusal olmayan ve bağlı denklemlerin analitik çözümünü pratik olmaktan çıkaran çok sayıda terimle sonuçlandırdığından çok terim alınarak çözüm yapmak bu tür problemler için uygun değildir. Ancak, tek terim çözümlerinde sadece geometrik sınır şartlarının sağlanması sağlıklı çözümler elde etmek için yeterli olmayabilir. Çözüm fonksiyonunun bölge içindeki değişimi de mümkün mertebe sağlaması gerekir. Galerkin yöntemi sürekli ortamlar mekaniği problemleri için yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan ve yaklaşık bir çözüm getiren bir ağırlıklı artıklar yöntemidir. Bu yöntemde yaklaşım fonksiyonlarının çözülecek diferansiyel denklem sistemine konulmasıyla ortaya çıkan hata fonksiyonunun ağırlık fonksiyonlarıyla çarpımının çözüm bölgesi üzerindeki integrasyonları sıfıra eşitlenerek hata sıfıra çekilmeye çalışılır. Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonu olarak yaklaşım fonksiyonlarının kendisi seçilir. Böylece Galerkin yöntemi hatayı mümkün mertebe küçültecek uygun katsayıların hesaplanabilmesini sağlar. Bu çalışmada dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş katmanlı kompozit bir ince plağın temel denklemleri von Karman plak teorisi ve klasik katmanlama teorisi çerçevesinde elde edilmiştir. Gerinim-yer değiştirme ilişkileri (kinematik denklemleri), gerilme gerinim ilişkileri (bünye denklemleri) ile denge denklemleri yazılmıştır. Ardından, iş ilkesi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Plak yapıların geometrik özellikleri bakımından incelemeleri; doğrusal olmayan analiz için hareket denklemleri yapılan çalışmalar doğrultusunda oluşturulmasını ve hareket denklemleri ve sistem yüklemesi zamana bağlı olan uygunluk denklemlerinin ifade edilmesini kapsamaktadır.

Hareket denklemleri plak düzleminin orta yüzeyi için ifade edildiğinden geometrik doğrusal olmayan plak davranışını belirlemek üzere birbirine bağlı üç denklem elde edilir. Doğrusal olmayan bu denklemler Galerkin yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu amaçla ankastre sınır şartlarını sağlayan deneme fonksiyonlarının toplamı şeklinde seçilen çözüm fonksiyonları oluşturulmuştur. Bu çalışmada tek terimli yaklaşım fonksiyonları ile daha iyi bir çözüm elde edebilmek için özellikle çökme fonksiyonunun deneysel sonuçlara daha iyi uyumunu sağlayacak bir deneme

fonksiyonu önerilmiştir. Yaklaşım fonksiyonları denge denklemlerinde yerine konarak Mathematica programı ile çözüm yapılmıştır. Problem aynı zamanda MSC Nastran sonlu eleman yazılımıyla da çözülmüştür. Bu amaçla Nastran sonlu eleman yazılımı belirlenen Patran 2010 ile modellediğimiz doğrusal olmayan statik çözümlerden yararlanılmıştır. Öncelikle Patran 2010 sonlu eleman modeli oluşturma programı ile plak dört katmanlı kompozit olarak modellenmiş geometrisi $300\ mm\ x\ 300\ mm$ olarak belirlenmiştir. Plak orta yüzeyi $20\ x\ 20 = 400$ elemanla modellenmiştir. Plak etrafındaki tüm düğüm noktaları seçilerek yer değiştirme ve dönmeler sıfır yapılmış ve böylece plak dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiştir. Yükleme koşulları ise 500 N'a kadar artan değerlerle on farklı yük değeri düzgün yayılı yük olarak plak yüzeyine dağıtılmıştır. Yüklemeler toplam yük olarak çeşitli yükleme koşullarıyla girildiğinden analiz sonuçlarını karşılaştırma kolaylığı sağlamıştır. Analiz çeşidi, incelediğimiz plak modelini ifade etmek üzere, doğrusal olmayan statik seçilerek sonlu eleman modeli analize hazır hale getirilmiş ve SOL106 çözücü kullanılarak çözülmüştür. Analiz MD Nastran 2010.1 sonlu elemanlar analizi yazılımı ile gerçekleştirilmiş ve sayısal sonuçlar bölümünde sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlarla ve yaklaşık çözümle karşılaştırılmıştır. Malzeme değerleri kullanılan karbon için çekme testleri ile belirlenen değerler, kalınlık değeri ve malzeme yönelimleri girilmiş, plak katmanlaması ve yönelimleri girilmiştir. Çalışmanın deneysel kısmında karbon elyaf/epoksi kompozit bir plak dört katmanlı olarak imal edilmiş ve farklı yayılı yükler etki ettirilerek plak davranışı incelenmiştir. Deneysel çalışmada plağın çeşitli yükler altındaki sehimleri Limess firmasından tedarik edilmiş olan VIC3D cihazıyla ölçülmüştür. Bu cihazı kullanmadan önce yapılması gereken kalibrasyon ölçümleri yapılmış, ana plak üzerinden gerekli görüntü datalarıyla ilk görüntü yazılıma işlenmiş ve bu görüntü vasıtasıyla farklı uniform basınç yükleri altında çeşitli görüntülerin elde edilmesiyle bu görüntüler arasında korelasyon işlemleri program vasıtasıyla başarılı bir şekilde tamamlanmıştır. Ayrıca bu incelemelerle beraber plak üzerinde çeşitli noktalardaki gerinimler gerinim ölçerler vasıtasıyla ölçülmüştür. En son olarak yapılan analiz sonuçları da gözönüne alınarak, bütün veriler arasında karşılaştırmalar yapılmış, çözüm yöntemi ve belirlenen yaklaşım fonksiyonunun doğruluğu değerlendirilmiştir.

2. KATMANLI KOMPOZİT PLAĞIN TEMEL DENKLEMLERİ

Bu bölümde Von Karman'ın ince plakların büyük sehimleri için türettiği plak denklemleri için temel kabulleri verilmiştir. Bu kabullerden hareketle bir ince plağın geometrik davranışını modelleyen kinematik denklemler ifade edilmiştir. Katmanlı bir kompozit plak için bünye denklemleri yazılmıştır. Katmanlama teorisi kapsamında plak için kuvvet ve moment bileşkeleri ifade edilmiştir. Virtüel iş ilkesi kullanılarak plağın geometrik olarak doğrusal olmayan davranışını yöneten temel denklemler elde edilmiştir.

2.1 Kabuller

Plaklar kalınlıkları düzlem içi boyutlarına göre küçük olan düzlemsel yapı elemanlarıdır. Aslında düz olan plak, enine yüklere maruz kaldığında mukavemet etmek için kesme kuvveti, eğilme ve burulma momenti oluşturur. Çünkü yükler genellikle her iki yönde de taşınır.

Plaklarda düzlem içi boyut/kalınlık oranlarına göre kayma deformasyonları hesaba katılır veya ihmal edilir. Buna göre iki tip plak teorisi bulunmaktadır. Bunlardan biri ***kalın plak teorisi***dir**.** Reissner-Mindlin tarafından ortaya konan bu teoriye göre plak boyutlarının L/h oranı 5-10 arasındadır. Bu plaklarda kayma gerilmelerinden kaynaklı deformasyonlar önemli mertebededir ve hesaba katılmaktadır. İkincisi klasik plak teorisi diye de adlandırılan ***ince plak teorisi***dir. Bu teori Kirchoff-Love tarafından ortaya konan bu teoriye göre L/h oranı 10-100 arasındadır. Bu plaklarda kayma gerilmelerinden kaynaklanan deformasyonlar ihmal edilebilecek mertebededir.

Yukarıda ifade edilen plak teorileri kinematik bağıntılarda doğrusal bir deformasyon alanı kabul ederler. Ancak plağın maksimum sehimi kalınlığının onda biri mertebelerine ulaşınca kinematik bağıntılarda doğrusal olmayan terimlerin katkıları önemli olmaya başlar. Büyük sehimler için kinematik denklemler von Karman tarafından ortaya konmuştur. Bu tez çalışmasında ince plakların büyük deformasyon davranışı incelenecektir.

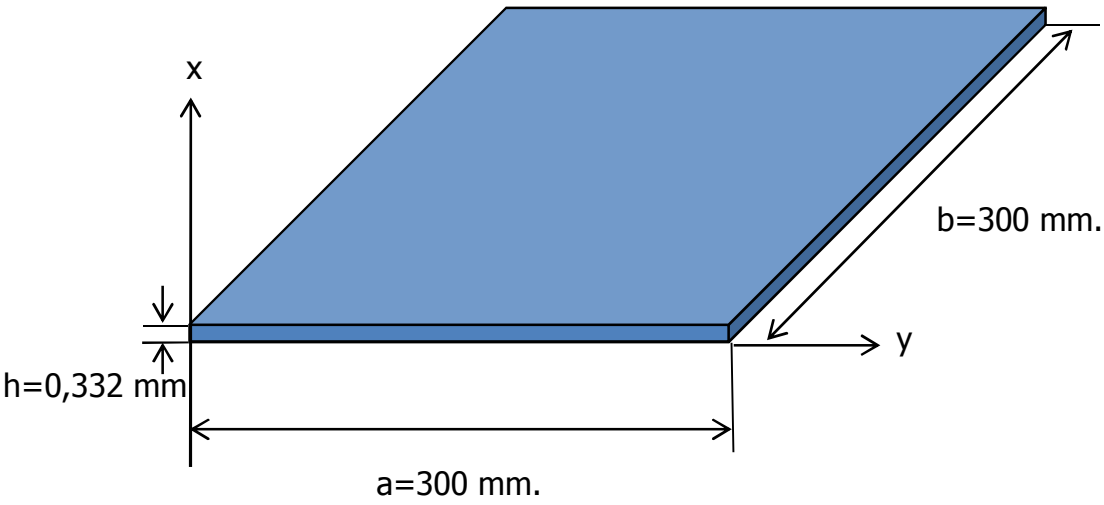
Plak üzerine düzgün yayılı bir basınç yükünün etki etmesi hali incelenecektir. Bir yapı üzerine etkiyen kuvvet kaldırıldığında yapı tekrar eski halini alabiliyorsa yapının davranışının elastik olduğu ifade edilir. Yapılan kabullerden biri de plağımızın doğrusal elastik olduğu, yani gerinim-gerilme diyağramının doğrusal kısmında kalacak şekilde plağın yüklendiği kabul edilecektir.

Kirchhoff-Love teorisinin en önemli kabulü plak üzerine yük etki ettirilmeden önce düz olan plak düzlemine dik bir takım çizgiler aldığımızda deformasyondan sonra bu çizgilerin deformasyon sonrası orta yüzeye dik kalacakları ve düzlüklerini koruyacaklarıdır.

Bu çalışmada kullanılan plak katmanlı kompozit olarak modellenmiş olup klasik katmanlama teorisi kullanılmıştır. Yani her bir tabaka için düzlem gerilme durumu geçerlidir. Bünye denklemleri tabakalar arasında kayma ve ayrılma olmadığı kabulü ile elde edilmektedir.

2.2 Yer Değiştirme Alanı

Plak denklemlerinin temel yaklaşımı plak yer değiştirme alanının kalınlık doğrultusundaki koordinat olan z'nin bir fonksiyonu olarak ifade edilmesidir.



Şekil 2.1 : Plak boyutlandırmaları ve eksen takımı

En genel halde kartezyen eksen yönlerindeki yer değiştirme bileşenleri u, v ve w'nin z'ye bağlılığı z'nin kuvvetleri cinsinden yazılarak bir yaklaşım yapılır.

Burada alınan terim sayısına ve yapılan yaklaşımlara göre çeşitli teoriler ortaya konmuştur. En genel haliyle yer değiştirme fonksiyonları:

$$u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\beta_x(x,y) + z^2\gamma_x(x,y) + \cdots \quad \textbf{(2.1)}$$

$$v(x,y,z) = v^0(x,y) + z\beta_y(x,y) + z^2\gamma_y(x,y) + \cdots \quad \textbf{(2.2)}$$

$$w(x,y,z) = w^0(x,y) + z\beta_z(x,y) + z^2\gamma_z(x,y) + \cdots \quad \textbf{(2.3)}$$

şeklinde yazılabilir. Kirchoff-Love ince plak teorisinde u ve v için ilk iki terim ve w için bir terim alınır. Ayrıca $\beta_x = -\partial w^0/\partial x$ ve $\beta_y = -\partial w^0/\partial y$ kabulü yapılır. Bu kabul Kirchoff-Love teorisindeki orta yüzeye dik olan çizgilerin deformasyon sonrasında da orta yüzeye dikliklerini koruyacakları kabulüne karşılık gelir. Böylece yer değiştirme alanı:

$$u = u^0 - z\ \partial w^0/\partial x, \quad \textbf{(2.4)}$$

$$v = v^0 - z\ \partial w^0/\partial y, \quad \textbf{(2.5)}$$

$$w = w^0 \quad \textbf{(2.6)}$$

halini alır. x, y ve z kartezyen koordinatları, u^0, v^0 ve w^0 plak orta yüzeyindeki yer değiştirmeleri terimleri göstermektedir. Yapılan yaklaşımlardan birisi de Denklem (2.3)'ten görüleceği gibi kalınlık boyunca çökme değerinin (sehimin) değişmediği, sabit kaldığıdır. Yani plak boyunca sehim sadece x ve y koordinatları ile değişmektedir; deformasyon dolayısıyla plak kalınlığında bir artma veya azalma söz konusu değildir.

2.3 Gerinim - Yer Değiştirme Denklemleri

Kartezyen koordinatlarda doğrusal olmayan gerinim-yer değiştirme ilişkileri Von Kármán büyük yer değiştirmeler teorisine göre ifade edilirse:

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x + {}^1/_2\,(\partial w/\partial x)^2, \quad \textbf{(2.7)}$$

$$\varepsilon_y = \partial v/\partial y + {}^1/_2\,(\partial w/\partial y)^2, \quad \textbf{(2.8)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x + {}^{\partial w}/_{\partial x}\,{}^{\partial w}/_{\partial y} \quad \textbf{(2.9)}$$

elde edilir.

Denklemlerdeki $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve ε_{xy} kartezyen koordinatlardaki gerinim bileşenlerini göstermektedir. Bu denklemlerde (2.4)-(2.6) ile verilen yer değiştirme ifadeleri kullanılırsa gerinim-yer değiştirme ilişkileri:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2 \quad \textbf{(2.10)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v^0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2 \quad \textbf{(2.11)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial w^0}{\partial y} \quad \textbf{(2.12)}$$

olarak elde edilir. Gerinimlerin bir kısmı z'den bağımsızdır ve bununla plak orta düzlemindeki gerinimler olarak değerlendirilebilir:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2 \quad \textbf{(2.13)}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2 \quad \textbf{(2.14)}$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial w^0}{\partial y} \quad \textbf{(2.15)}$$

z'ye bağlı olan terimler plağın orta yüzey eğriliklerine bağlı olarak ifade edilebilirler. Bu eğrilikler:

$$\kappa_x = -\,\partial^2 w^0/\partial x^2 \quad \textbf{(2.16)}$$

$$\kappa_y = -\,\partial^2 w^0/\partial y^2 \quad \textbf{(2.17)}$$

$$\kappa_{xy} = -2\,\partial^2 w^0/\partial x\,\partial y \quad \textbf{(2.18)}$$

şeklinde ifadelerle gösterilebilirler. Böylece gerinim-yer değiştirme denklemlerini:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \quad \textbf{(2.19)}$$

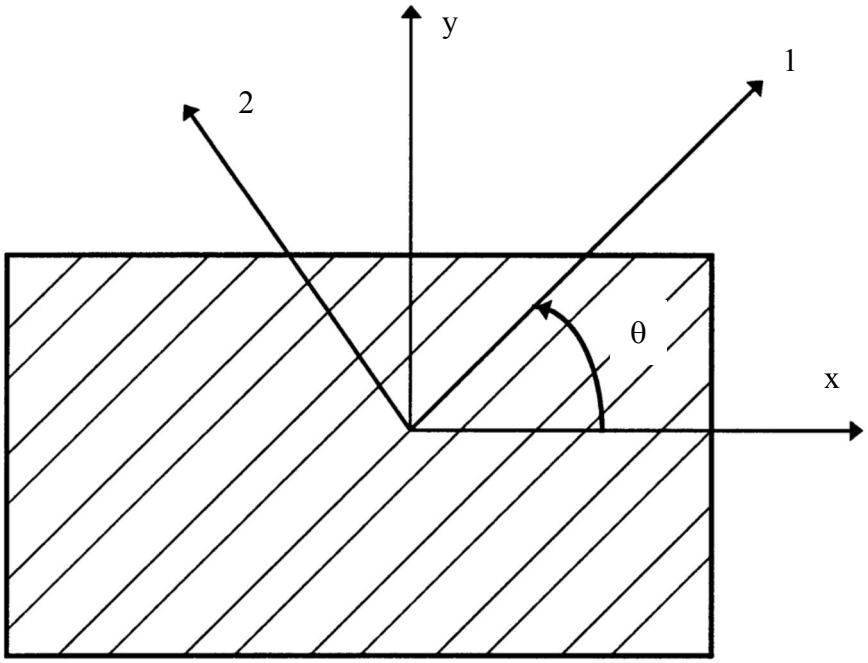
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \quad \textbf{(2.20)}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \quad \textbf{(2.21)}$$

biçiminde yazmak mümkün olur.

2.4 Bünye Denklemleri

Katmanlı bir kompozit için bünye denklemleri bu bölümde ayrıntılı olarak çıkarılarak denge denklemlerinin türetilmesi için gerekli olan gerilme-gerinim ifadeleri belirtilmiştir.



Şekil 2.2 : İnce bir levhanın açısal olarak bölgesel ve global eksenleri (Kaw, 2006)

Şekilde bir kompozit katmanın malzeme eksenleri 1 ve 2 ile global kartezyen eksen takımı x ve y gösterilmiştir. Elyafların yönlenme açısı x eksenine göre ölçülmekte ve θ ile gösterilmektedir. Malzeme eksenlerinde ortotrop olan malzemenin bünye denklemleri:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

şeklinde yazılabilir. Burada [Q];

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

şeklinde verilen direngenlik matrisidir.

Bu matrisin terimleri:

$$Q_{11} = E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{12} = Q_{21} = E_2\nu_{12}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \quad \textbf{(2.24)}$$

$$Q_{11} = E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

olarak tanımlıdır. Burada 1 ve 2, sırasıyla, elyaf yönü ve ona dik yönü, E Elastisite katsayısını, ν poisson oranını ve G kayma modülünü ifade etmektedir.

Düzlem gerilme halindeki bir kompozit katman için gerilme-gerinim ilişkilerini global Kartezyen eksen takımıunda elde edebilmek amacıyla malzeme eksenleri ile global kartezyen eksenler arasında bir dönüşüm işlemi yapılır. Bunun için tabakanın yönelim açısının sinüs ve kosinüslerinden oluşan bir dönüşüm matrisi kullanılır.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.25)}$$

Burada $\cos\theta = c$ ve $\sin\theta = s$ ile gösterilmiştir. Dönüşüm matrisi

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2-s^2\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.26)}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu matrisin tersi alınırsa,

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2-s^2\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.27)}$$

elde edilir. Bu matris kullanılarak global eksenlerdeki gerilmeler malzeme eksenlerindeki gerilme bileşenlerine bağlı olarak ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.28)}$$

Benzer şekilde malzeme eksenlerindeki gerinimler de global eksenlerdeki gerilmelere bağlı ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.29)}$$

Burada [R] Router matrisidir:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.30)}$$

(2.22), (2.27) ve (2.28) denklemleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.31)}$$

yazılabilir. (2.23), (2.25), (2.26) ve (2.29) denklemleri (2.30) denkleminde yerine konarak bir katmanın global eksen yönlerindeki bünye denklemleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.31)}$$

Burada $\bar{Q}_{ij}$ global eksenlerdeki direngenlik matrisini gösterir ve açık ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12+}2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4\,Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{12}\,(\cos^4\theta + \sin^2\theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12+}2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta \quad \textbf{(2.32)}$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2\,Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2\,Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta + Q_{66}\,(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

(2.31) ile ifade edilen bünye denklemleri orta düzlemden herhangi bir z uzaklığındaki gerinim gerilme ilişkisini vermektedir. (2.19)-(2.21) denklemleri matris formatında yazılarak:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

(2.31) denkleminde kullanılırsa bünye denklemleri:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

şeklinde ifade edilir.

2.5 Kuvvet ve Moment Bileşkeleri

Katmanlı kompozit plak için kuvvet ve moment bileşenleri gerilme bileşenlerinin ve bunların plak orta yüzeyine göre momentlerinin toplamı olarak ifade edilirler:

$$\{\bar{N}\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \tag{2.35}$$

$$\{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz, \tag{2.36}$$

Bu denklemlerde (2.34) ile verilen bünye denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{h_k-1}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\} \tag{2.37}$$

ve

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{h_k-1}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\} \tag{2.38}$$

elde edilir. Bu denklemlerdeki integrasyonlar yapılarak aşağıdaki direngenlik terimleri elde edilir:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k dz = \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1}) \quad \textbf{(2.39)}$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2\right) \quad \textbf{(2.40)}$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left({h_k}^3 - {h_{k-1}}^3\right) \quad \textbf{(2.41)}$$

Burada A_{ij} katmanların uzama direngenliklerini, B_{ij} bağlı direngenlikleri, D_{ij} ise eğilme direngenliklerini göstermektedir. Böylece (2.41) ve (2.42) denklemleri

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.42)}$$

ve

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.43)}$$

şeklinde yazılır. (2.43) ve (2.44) denklemleri birleştirilerek

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(2.44)}$$

biçiminde genelleştirilmiş bünye denklemi yazılabilir.

2.6 Yönetici Denklemler

Yönetici denklemler virtüel iş prensibi ile elde edilir:

$$\delta J_e = \int_T dt \iint_V \left[\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta\varepsilon_{xy}\right] dV - \iint_A \left[q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w\right] dA = 0 \quad \textbf{(2.45)}$$

Virtüel iş, bir kuvvetin tasavvur edilen keyfi bir yer değiştirme esnasında yapacağı işe denir. Virtüel iş prensibine göre dengede olan bir sistemin, herhangi bir virtüel yer ve şekil değiştirmesinde, dış kuvvetlerin işi iç kuvvetlerin işine eşit olmalıdır. İlgili denklemdeki ifadelerde bulunan q_x, q_y ve q_z sırasıyla x,y ve z yönlerindeki dış kuvvetleri göstermektedir.

Kompozit plak üzerine yalnızca düzgün yayılı bir q_z basınç yükü etki etki ettiğini dikkate alarak ve (2.49) denklemi kuvvet ve moment bileşkeleri cinsinden yazarak ifade edecek olursak:

$$\delta J_e = \int_T dt \iint_A \left[N_x \delta\varepsilon_x^0 + N_y \delta\varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta\varepsilon_{xy}^0 + M_x \delta\kappa_x + M_y \delta\kappa_y + M_{xy} \delta\kappa_{xy}\right] dA$$

$$- \iint_A q_z \delta w dA = 0 \qquad \textbf{(2.46)}$$

elde edilir. Terim terim kısmi integrasyon uygulanarak δu, δv ve δw varyasyonları üzerindeki türevler kaldırılır ve elde edilen denklemlerde δu, δv ve δw keyfi varyasyonları için sıfıra eşit olma şartından katmanlı kompozit plağın hareket denklemleri:

$$-\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(2.47)}$$

$$-\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(2.48)}$$

$$-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right)\frac{\partial w^0}{\partial x} - \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right)\frac{\partial w^0}{\partial y}$$

$$- \left(N_x \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right) - q_z = 0 \qquad \textbf{(2.49)}$$

şeklinde elde edilir. (2.43) ile verilen genelleştirilmiş bünye denklemleri ve (2.13)-(2.15) denklemleri ile verilen kinematik denklemler kullanılarak (2.51)-(2.53) ile verilen denge denklemleri orta yüzeyin yer değiştirmeleri cinsinden yazılabilir:

$$L_{11}u^0 + L_{12}v^0 + L_{13}w^0 + N_1(w^0) = 0 \qquad \textbf{(2.50)}$$

$$L_{21}u^0 + L_{22}v^0 + L_{23}w^0 + N_2(w^0) = 0 \qquad \textbf{(2.51)}$$

$$L_{31}u^0 + L_{32}v^0 + L_{33}w^0 + N_3(u^0, v^0, w^0) - q_z = 0 \qquad \textbf{(2.52)}$$

Denklemlerdeki doğrusal L_{ij} operatörleri sırasıyla:

$$L_{11} = -A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.53)}$$

$$L_{12} = L_{21} = -(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - A_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.54)}$$

$$L_{13} = -L_{31} = 3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + -(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + B_{26}\frac{\partial^3}{\partial y^3} \qquad \textbf{(2.55)}$$

$$L_{22} = -A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2A_{26}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad \textbf{(2.56)}$$

$$L_{23} = -L_{32} = (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3} + 3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad \textbf{(2.57)}$$

$$L_{33} = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2D_{12} + 4D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad \textbf{(2.58)}$$

Doğrusal olmayan N_i operatörleri ise:

$$N_1(w^0) = -A_{11}\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - (A_{12} + A_{66})\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} - A_{16}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}$$
$$-2A_{16}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} - A_{26}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} - A_{66}\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \quad \textbf{(2.59)}$$

$$N_2(w^0) = -(A_{12} + A_{66})\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} - A_{22}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} - 2A_{26}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}$$
$$-A_{26}\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} - A_{16}\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - A_{66}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \textbf{(2.60)}$$

$$N_3(u^0, v^0, w^0) = 2(B_{66} - B_{12})\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2(B_{12} - B_{66})\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right)$$
$$-A_{11}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}\right) - 3A_{11}/2\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - (A_{12} + A_{66})\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y}\right)$$
$$-2A_{66}\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) - 2A_{16}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y}\right) - A_{16}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}\right)$$
$$-3A_{16}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) - 3A_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2 - A_{26}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}\right)$$
$$-4A_{26}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) - A_{66}\left(\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}\frac{\partial w^0}{\partial x}\right) - (A_{66} + A_{12}/2)\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$$
$$-(A_{12} + A_{66})\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y}\right) - A_{22}\left(\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\right) - 3A_{22}/2\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}$$
$$-A_{26}\left(\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\right) - 2A_{26}\left(\frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y}\frac{\partial w^0}{\partial y}\right) - 3A_{26}\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\right) - A_{16}\left(\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)$$
$$-A_{66}\left(\frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}\frac{\partial w^0}{\partial y}\right) - (A_{66} + A_{12}/2)\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - A_{11}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right)$$
$$-A_{12}\left(\frac{\partial v^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right) - A_{16}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right) - A_{16}\left(\frac{\partial v^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\right) - A_{12}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right)$$
$$-A_{22}\left(\frac{\partial v^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right) - A_{26}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right) - A_{26}\left(\frac{\partial v^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\right) - 2A_{16}\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\right)$$
$$-A_{26}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\frac{\partial v^0}{\partial y}\right) - 2A_{66}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\frac{\partial u^0}{\partial y}\right) - 2A_{66}\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\frac{\partial v^0}{\partial x}\right) \quad \textbf{(2.61)}$$

şeklinde elde edilir.

2.7 Sınır Şartları

x değerinin sabit olması durumunda sağlanması gereken sınır şartları:

$$N_x = \bar{N}_x \text{ veya } u^0 = \bar{u},\ N_{xy} = \bar{N}_{xy} \text{ veya } v^0 = \bar{v},\ M_x = \bar{M}_x \text{ veya } \beta_x = \bar{\beta}_x,$$

$$N_x \frac{\partial w^0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w^0}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = \bar{V}_x \text{ veya } w^0 = \bar{w}, \qquad \textbf{(2.62)}$$

ile belirtilmiştir. y değerinin sabit olması durumunda sağlanması gereken sınır şartları:

$$N_{xy} = \bar{N}_{xy} \text{ veya } u^0 = \bar{u},\ N_y = \bar{N}_y \text{ veya } v^0 = \bar{v},\ M_y = \bar{M}_y \text{ veya } \beta_y = \bar{\beta}_y,$$

$$N_{xy} \frac{\partial w^0}{\partial x} + N_y \frac{\partial w^0}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \bar{V}_y \text{ veya } w^0 = \bar{w}, \qquad \textbf{(2.63)}$$

şeklinde verilir. Bu ifadelerdeki üst çizgili semboller önceden belirli olan değerleri göstermektedir. Bu çalışmada ele alınan plak tüm kenarlarından ankastre mesnetli plak olduğundan denklemlerde verilen sınır şartları

x = 0, x = a ve y = 0 ve y = b olması durumunda: $u^0 = v^0 = w^0 = 0$, **(2.64)**

$x = 0$ ve $x = a$ iken: $\partial u^0/\partial x = \partial v^0/\partial x = \partial w^0/\partial x = 0$ **(2.65)**

$y = 0$ ve $y = b$ iken: $\partial u^0/\partial x = \partial v^0/\partial x = \partial w^0/\partial x = 0$ **(2.66)**

şeklinde ifade edilir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1 Giriş

Bu bölümde elde etmiş olduğumuz yayılı yüke maruz katmanlı kompozit plağın hareket denklemleri bir ağırlıklı artıklar yöntemi olan Galerkin metodu kullanılarak çözülmüştür. Bu amaçla ankastre sınır şartlarını sağlayan deneme fonksiyonlarının toplamı şeklinde seçilen çözüm fonksiyonları oluşturulmuştur. Bu çalışmada tek terimli yaklaşım fonksiyonları ile daha iyi bir çözüm elde edebilmek için özellikle çökme fonksiyonunun deneysel sonuçlara daha iyi uyumunu sağlayacak bir deneme fonksiyonu önerilmiştir. Düzgün yayılı basınç yüküne maruz plak aynı zamanda NASTRAN sonlu eleman yazılımı ile modellenerek çözülmüştür.

3.2 Galerkin Metodu

Galerkin yöntemi sürekli ortamlar mekaniği problemleri için yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan ve yaklaşık bir çözüm getiren bir ağırlıklı artıklar yöntemidir. Bu yönteme göre (2.54-2.56) denklemleri ile verilen plağın yönetici denklemleri, incelenen ankastre sınır şartlarını sağlayacak şekilde deneme fonksiyonları seçilip bu fonksiyonların bilinmeyen katsayılarla çarpılıp toplanması ile elde edilen yaklaşım fonksiyonları ile yaklaşık olarak çözülmeye çalışılır:

$$u^0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} U_{ij}\, \phi_{ij}(x,y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$v^0 = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} V_{kl}\, \lambda_{kl}(x,y) \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$w^0 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} W_{mn}\, \psi_{mn}(x,y) \qquad \textbf{(3.3)}$$

Denklemlerdeki U_{ij}, V_{kl}, ve W_{mn} Galerkin çözümü sonunda bulunacak olan bilinmeyen katsayılardır. ϕ_{ij} , λ_{kl} ve ψ_{mn} ifadeleri ise sınır şartlarına göre belirlenen deneme fonksiyonlarıdır. Bunlar daha önce belirtildiği üzere ankastre mesnetli plak için belirlenen sınır şartlarına göre seçimi yapılmıştır. u^0, v^0, w^0 bir terim kullanılarak elde edilen yaklaşım fonksiyonları (3.4-3.6) denklemleri ile verilmiştir:

$$u^0 = U_{11}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi i x}{a}\right]\left(1 - \mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi j y}{b}\right]\right) \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$v^0 = V_{11}(1 - \mathrm{Cos}[\frac{2\pi kx}{a}])\mathrm{Sin}[\frac{2\pi ly}{b}]] \quad \textbf{(3.5)}$$

$$w^0 = W_{11}(1 - \mathrm{Cos}[\frac{2m\pi x}{a}])(1 - \mathrm{Cos}[\frac{2\pi ny}{b}])] \quad \textbf{(3.6)}$$

Mümkün olduğu kadar az sayıda terimle çözüm elde etmek için u^0 ve v^0 için bir terim, w^0 için, doğrusal olmayıştan kaynaklanan deformasyon biçimini elde edebilmek amacıyla, iki terim alınırsa (3.7-3.9) denklemleri ile verilen yaklaşım fonksiyonları ise:

$$u^0 = U_{11} \sin\left(\frac{2\pi ix}{a}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi jy}{b}\right)\right] \quad \textbf{(3.7)}$$

$$v^0 = V_{11}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi kx}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{2\pi ly}{b}\right) \quad \textbf{(3.8)}$$

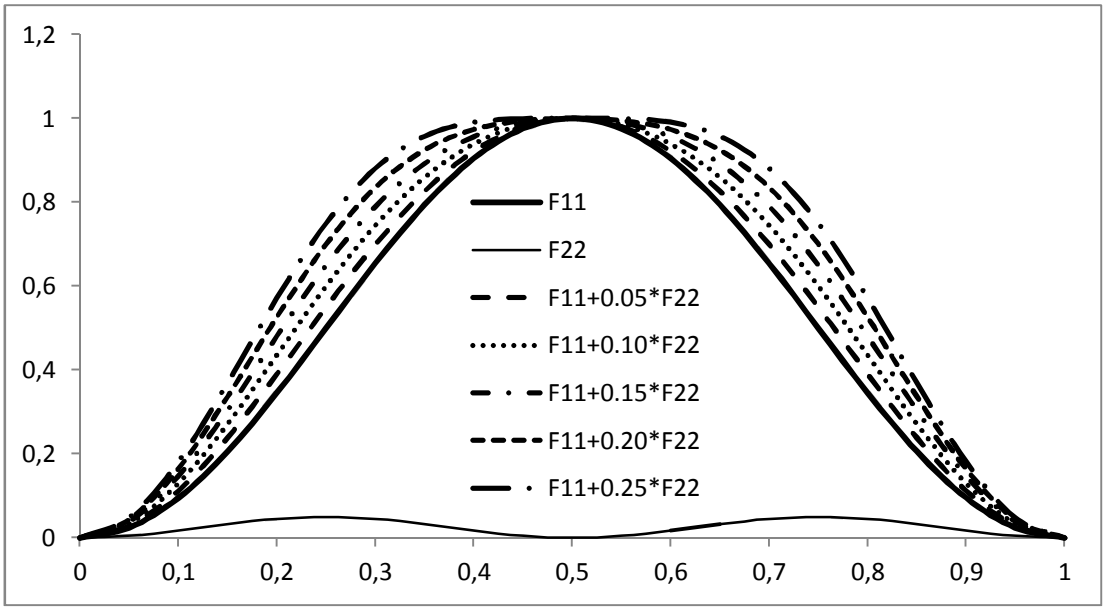
$$w^0 = W_{11}\left[1 - c\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right]\left[1 - c\cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right)\right] + W_{\mathrm{mn}=22}\left[1 - c\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right]\left[1 - c\cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right)\right] \quad \textbf{(3.9)}$$

haline gelir. Denklem (3.9)'dan görüldüğü gibi w^0 yaklaşım fonksiyonunun seçiminde m=1, n=2 ve m=2, n=1 simetrik olmayan terimleri alınmamıştır. Yükleme ve geometrinin x ve y eksenlerine göre simetrik olmasından dolayı sadece simetrik terimler alınarak çözüm yapılmıştır.

Bu çalışmada ayrıca tek terimli yaklaşım fonksiyonları ile daha iyi bir çözüm elde edebilmek için özellikle çökme fonksiyonunun deneysel sonuçlara daha iyi uyumunu sağlayacak bir deneme fonksiyonu önerilmiştir. Çok terim alınması bu tür doğrusal olmayan ve bağlı denklemlerin analitik çözümünü pratik olmaktan çıkaran çok sayıda terimle sonuçlandırmaktadır. Ancak, tek terim çözümlerinde sadece geometrik sınır şartlarının sağlanması sağlıklı çözümler elde etmek için yeterli olmayabilir.

Çözüm fonksiyonunun bölge içindeki değişiminin de mümkün mertebe sağlaması gerekir. Dolayısıyla u^0 ve v^0 için, sırasıyla, (3.7) ve (3.8) denklemleri kullanılırken w^0 fonksiyonu için aşağıdaki gibi k katsayılı tek terim çözümü önerilebilir. Buradaki k katsayısı çökme fonksiyonunu daha yayvan hale getirmeye yaramaktadır. Çünkü deformasyon seviyesi arttıkça çökme daha yayvan bir biçim almaktadır.

Şekil 3.1'de çeşitli k katsayısı değerleri için çözüm fonksiyonunun biçimi sunulmuştur. k katsayısının değeri deneysel sonuçlardan elde edilen amprik bağıntılarla elde edilmelidir.



Şekil 3.1: k katsayıları ile yaklaşım fonksiyonunun değişimi

k değerleri belirlenirken Şekil 3.1'den anlaşılabileceği üzere plak sehimini daha iyi ifade edebilecek, yayvanlığı güzel biçimde veren değerler k=0.1, k=0.2 ve k=0.3 olarak belirlenmiştir. Bu nedenle sonuçlarda karşılaştırılmak üzere ifade edilen k değerleri (3.10) ve (3.12) denklemlerinde yerine konularak plak sehimleri elde edilmiştir:

$$u^0 = U_{11} \sin\left(2\pi ix/a\right)\left[1 - \cos\left(2\pi jy/b\right)\right] \tag{3.10}$$

$$v^0 = V_{11}\left[1 - \cos\left(2\pi kx/a\right)\right]\sin\left(2\pi ly/b\right) \tag{3.11}$$

$$w^0 = W_{11}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right)\right] + k\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi mx}{a}\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi ny}{b}\right)\right] \tag{3.12}$$

Elde edilen bu değerlerle birlikte tüm yaklaşım fonksiyonları karşılaştırılmak üzere grafiklerde bir araya getirilmiştir. u, v, w bir terim alınarak ifade edilen (3.4) ve (3.6) denklemlerinde ve u, v bir w iki terim alınarak ifade edilen (3.7) ve (3.9) denklemlerinde üstüste getirilerek karşılaştırmaları yapılmıştır.

Galerkin metodunda yaklaşım fonksiyonlarının çözülecek diferansiyel denklem sistemine konulmasıyla ortaya çıkan hata fonksiyonunun ağırlık fonksiyonlarıyla çarpımının çözüm bölgesi üzerindeki integrasyonları sıfıra eşitlenerek hata sıfıra

çekilmeye çalışılır. Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonu olarak yaklaşım fonksiyonlarının kendisi seçilir. Böylece Galerkin yöntemi hatayı mümkün mertebe küçültecek uygun U_{ij}, V_{kl}, W_{mn} katsayılarının hesaplanabilmesini sağlar.

$$\iint_A (L_{11}u^0 + L_{12}v^0 + L_{13}w^0 + N_1(w^0) - q_x)\,\phi_{ij}\,dA = 0,\ i = 1,\ j = 1$$

$$\iint_A \left(L_{21}u^0 + L_{22}v^0 + L_{23}w^0 + N_2(w^0) - q_y\right)\lambda_{kl}\,dA = 0,\ k = 1, l = 1 \qquad \textbf{(3.13)}$$

$$\iint_A (L_{31}u^0 + L_{32}v^0 + L_{33}w^0 + N_3(u^0, v^0, w^0) - q_z)\,\psi_{mn}\,dA = 0, m = 1, n = 1$$

Bu denklemlerde q_x ve q_y sıfırdır. q_z ise plak üzerine etki eden basınç yüküdür. (3.4-3.12) denklemleri (3.13) denklemlerinde kullanılarak integrasyonlar gerçekleştirildiğinde U_{11}, V_{11}, W_{11} ve W_{22} bilinmeyen katsayıları cinsinden bağlı (coupled) doğrusal olmayan cebrik denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler MATHEMATICA yazılımı kullanılarak çözülüp bilinmeyen katsayılar elde edilir.

3.3 Sonlu Elemanlar Metodu

Düzgün yayılı basınç yükü altındaki katmanlı kompozit plağın yer değiştirme ve deformasyonları sonlu elemanlar yöntemiyle de incelenmiştir. Bu amaçla Patran yazılımı ile modellenen plağın geometrik doğrusal olmayan davranışı Nastran sonlu eleman yazılımıyla çözülmüştür.

İncelenen kompozit plak 300 mm x 300 mm boyutlarındadır. Plak 0°/90° elyaf yönelimli dört katmandan oluşmaktadır. Plak orta yüzeyi 20x20 = 400 elemanla modellenmiştir. Plak etrafındaki tüm düğüm noktaları seçilerek yer değiştirme ve dönmeler sıfır yapılmış ve böylece plak dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiştir. Yükleme koşulları ise 50 N'dan 500 N'a kadar 50 N artan değerlerle on farklı yük değeri düzgün yayılı yük olarak plak yüzeyine uygulanmıştır. Nastran SOL106 çözücüsü kullanılarak geometrik doğrusal olmayan analizler çeşitli basınç yükü seviyeleri için yapılmış ve elde edilen sonuçlar deneysel ve Galerkin çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

4. DENEYSEL ÇALIŞMA

Katmanlı kompozit karbon plak İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Kompozit Yapı Laboratuvarında elle ıslak yatırma yöntemi ile imal edilmiştir. İmal edilen plak bu laboratuvarda bulunan Isıtmalı Vakum Tablasında belirli bir sıcaklık profili uygulanarak vakum altında kür edilmiştir.

Daha sonra plak ankastre mesnetlenebilmesi için etrafında belirli aralıklarla delikler açılmıştır. Plak çelik iki çerçeve arasına alınarak cıvatalarla bu çerçevelere monte edilmiştir. Böylece plağın ankastre mesnetli davranış göstermesi sağlanmıştır. İmal edilen plak üzerindeki basınç plak üzerine düzgün yayılan kum yükü ile sağlanmıştır. Plak davranışı Limess firmasından tedarik edilmiş olan VIC3D cihazı ile dijital görüntü korelasyon sistemiyle belirlenmiştir.

4.1 Kompozit Plak İmalatı

Plak İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Kompozit Yapı Laboratuarı'nda üretilmiştir. Plak malzemesi, CC 302 kodlu, Texindustria marka, 0-90^0 iki yönlü 300 gr/m^2 ağırlığında karbon elyaf kumaştır.

Üretilmek istenen plak eğer kalıp kullanarak üretilmiyorsa reçine ile ıslak yatırma yapılan malzeme kenarlarda incelme göstereceğinden plak boyutlarından üçte bir oranında daha büyük boyutta plak üretilmesi tavsiye edilir. Böylece plak kenarlarındaki incelikten kaynaklanan hesap hataları engellenmiş olur. Kesilen malzeme ağırlığına bağlı olarak kompozit malzeme üzerine sürülecek olan reçine miktarının hesaplanması gerekmektedir.

Gerekli reçine miktarı belirlendikten sonra plak elle ıslak yatırma yöntemi ile imal edilmiştir. Ardından sıcaklık uygulanarak kür işlemlerini yapabildiğimiz ve vakum işlemiyle fazla reçineyi ve reçine içerisinde kalabilen havayı çekebildiğimiz kür tablasında imalat işlemi tamamlanmıştır. Bu işlem sekiz saat kadar sürmektedir. Karbon plak, liflerin ayrılmasını engelleyen özel kompozit kesici alet vasıtasıyla

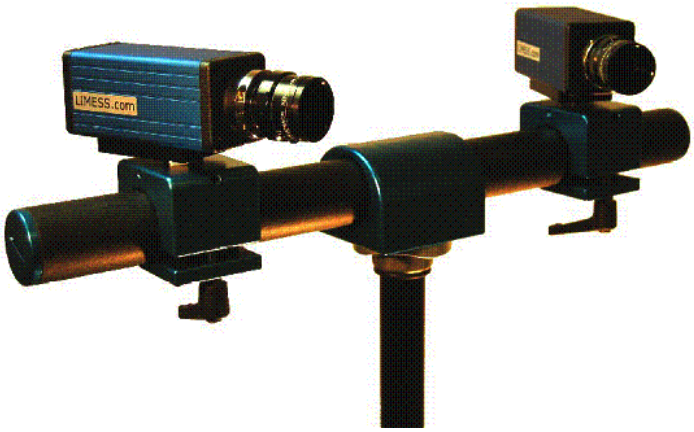
istenen boyutlarda kesilmiştir. Plağın kenarlarından ankastre edilebilmesi için plak kenarlarında belirli aralıklarla cıvata ve perçin delikleri açılmıştır.

4.2 Korelasyon Cihazı ile Sehim Ölçümü

Plak deformasyonları Limess firmasından tedarik edilen VIC3D dijital görüntü korelasyon sistemiyle yapılmıştır, Şekil 4.1. Burada görüntü alma ve ölçme işlemleri için öncelikle deney donanımı tanıtılacak cihaz hakkında bilgi verilecek, çalışma prensibi ve deneylerin nasıl gerçekleştirildiği anlatılacaktır.

4.2.1 Deney donanımı

Deney donanımı; 2 CCD 1392 x 1040 piksel, 40µs'den 15 dakikaya odaklama ve pozlama yapabilen, gerinim hassasiyeti %0.02 olan ve ölçüm alan boyutları 5 mm. ile 10 m arası değişen kameralar ve arayüz bağlantılarından oluşmaktadır.



Şekil 4.1 : VIC3D Kamera Sistemi

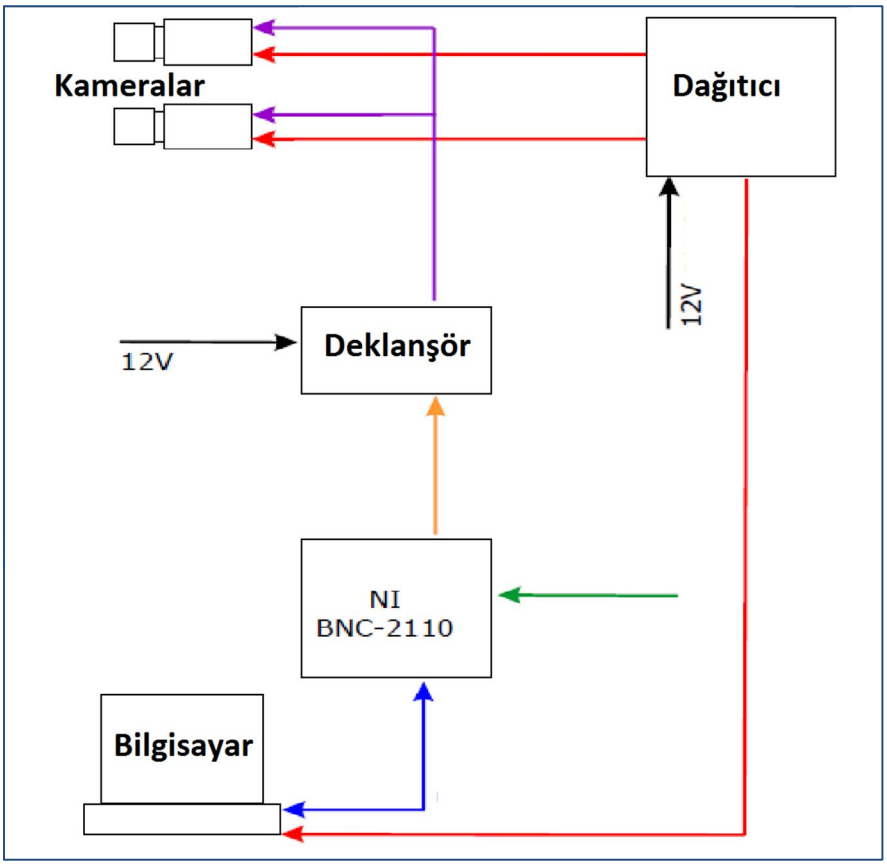
4.2.2 Limess VIC3D çalışma prensibi

Dijital görüntü korelasyonu deformasyon ölçümü yapabilmeyi sağlayan, bu amaçla tasarlanmış bir optik yöntemdir. Bu yöntem plağın deformasson öncesi görüntüsü ile deformasyon sonrası görüntüsünün bir yazılım tarafından karşılaştırılmasıyla yer değiştirme alanının ve buradan hareketle gerinimlerin hesaplanması esasına dayanır. Bu amaçla ölçüm yapılacak yüzey üzerindeki görüntü ilk görüntü üzerine işlenerek pikseller arası korelasyonlar yapılır. Numune yüzeyinin cihaz tarafından tanımlanabilmesi için rastgele biçimde dağıtılmış benekli bir yüzeye sahip olması sağlanmalıdır.

Sistem birçok malzemenin karmaşık geometrisi üzerindeki üç boyutlu yer değiştirme ve üç boyutlu yüzey gerinimlerini tam ölçümleme yapabilme kabiliyetine sahiptir. Ölçme yüzeyi en fazla 100 m^2olmalıdır.

4.2.3 Deney düzeneğinin hazırlanması

Şekil 4.2'de VIC3D Dijital Görüntü Korelayon Düzeneğinin elemanları ve birbirleriyle bağlantısı şematik olarak gösterilmiştir. Deney düzeneği için kameraların arayüz bağlantı elemanları aracılığıylabilgisayar bağlantılarının yapılması gerekmektedir. Deklanşör ve dağıtıcıdan gelen iki bağlantı elemanı kameraya bağlanır. Bilgisayarla kamera çıkış bağlantıları sayesinde pozlama yapabilen NI BNC-2110 arayüz bağlantısı takılır. Bu bağlantılar yapılırken giriş çıkış kablolarının yerlerine dikkat edilmelidir. İşlemler tamamlandığında bilgisayar açılıp VICSnap açıldığında görüntülenen deney ortamı net bir şekilde görünür olmalı ve son olarak kameraların ayaklarında bulunan üçlü ayaklar sayesinde sabitlenmeleri yapılmalı ve deney süresince herhangi bir şekilde hareket etmelerine müsaade edilmemelidir.

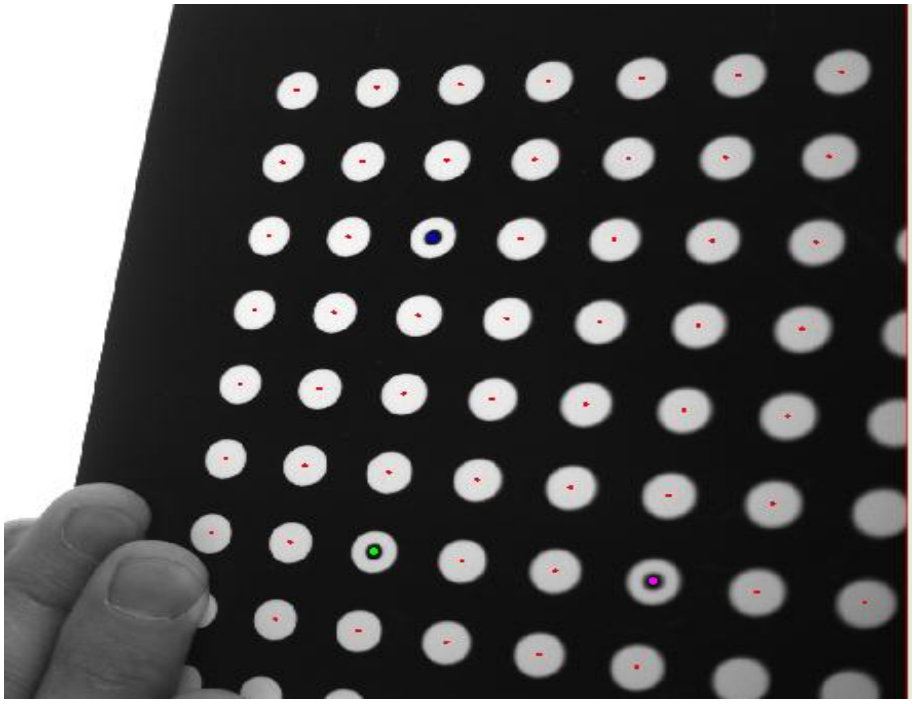


Şekil 4.2 : VIC3D Dijital Görüntü Korelasyon Düzeneğinin Şematik Gösterimi

4.2.4 Deneylerin gerçekleştirilmesi

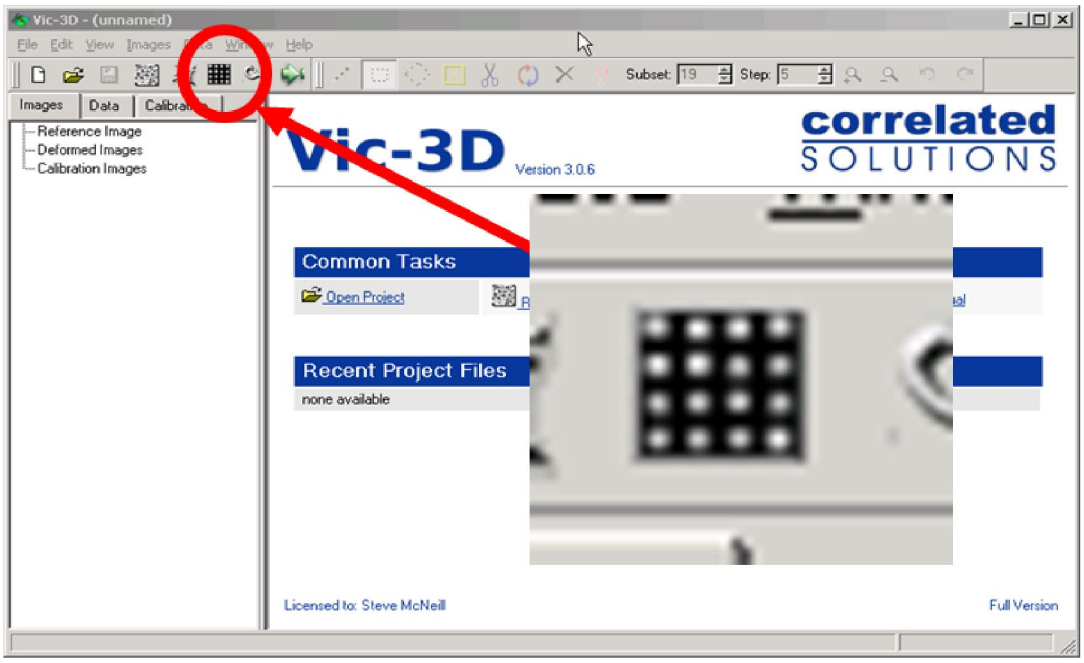
Deney işlemlerine geçmeden önce yardımcı program VIC Snap vasıtasıyla kalibrasyon işlemlerinin yapılması gerekmektedir. Deneye başlamadan kameraların ölçüm yapılacak numune uzaklığındaki netliğinin sağlanıp daha sonra kalibrasyona başlamak hem kalibrasyon yapmayı kolaylaştırır hem de deforme olan yüzeyin program tarafından tanınıp daha iyi sonuçlar elde edilebilmesini sağlar.

Kalibrasyon işlemleri deneyi yapılacak olan plağın konulması gereken yere çeşitli açılarda kalibrasyon tableti ölçüm sistemine tanıtılarak yapılmaktadır. Tanıtma işleminin doğru yapılabildiği ise kalibrasyon tableti üzerindeki üç siyah nokta etrafında farklı üç rengin görülmesi ile anlaşılmaktadır, Şekil 4.3.



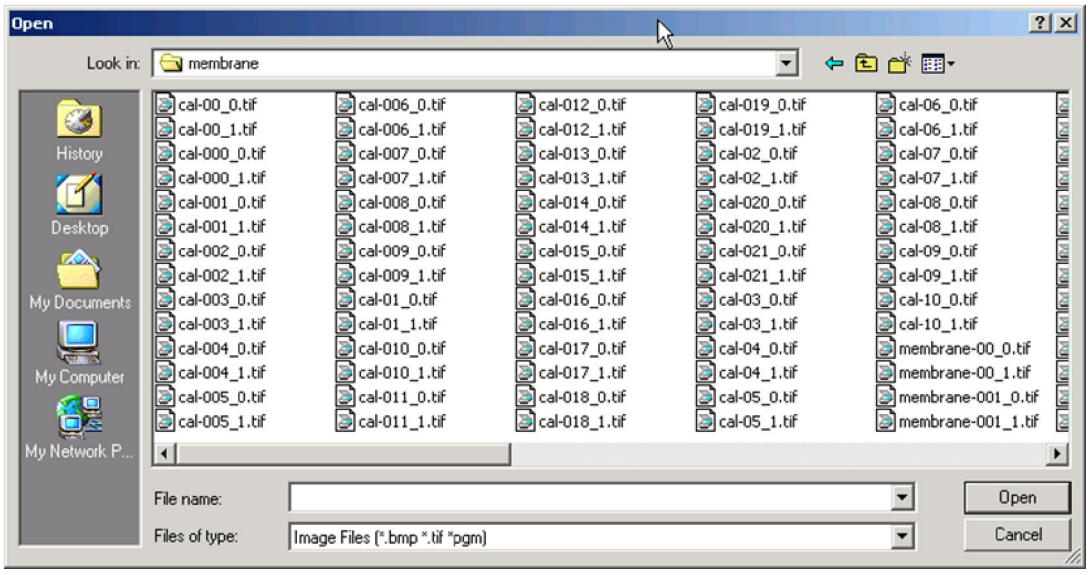
Şekil 4.3 : Kalibrasyon tableti

Ardından programa tanıtılan pozlanmış görüntüler kalibre edilerek, ana program üzerinde deney yapılacak olan uzaklık boyunca kameraların kalibrasyonları tamamlanmış olur. Öncelikle kalibrasyon aşamasının tamamlanması ve programa plak konumunun tanımlanması amacıyla kalibrasyon için VICSnap aracılığıyla pozlanma yapılan görüntüler VIC3D içine aktarılır. Bu işlemin yapılabilmesi için yazılım menüsünde kalibrasyon kutucuğu seçilmelidir, Şekil 4.4.



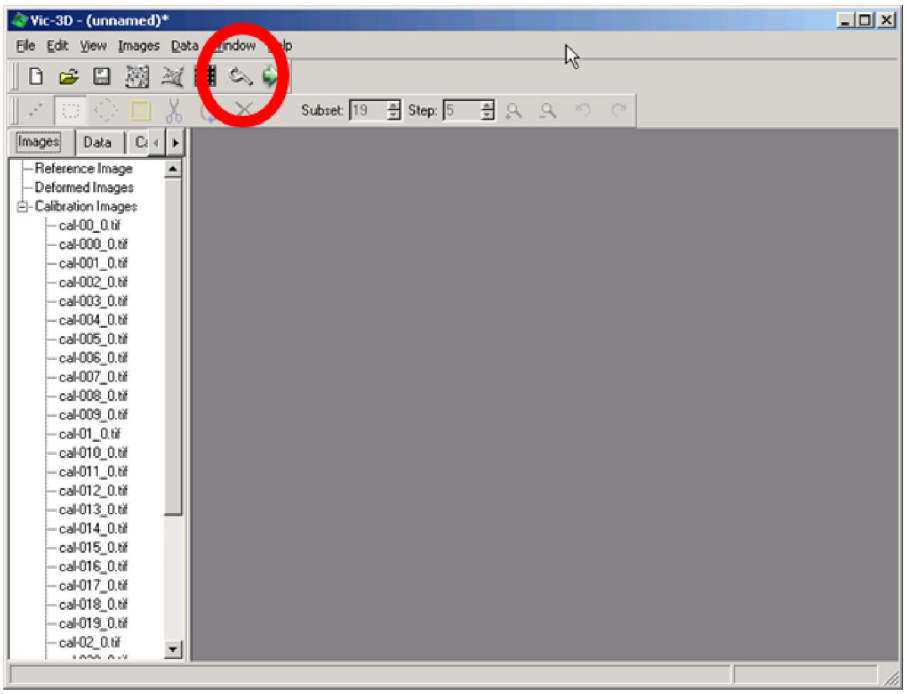
Şekil 4.4 : Kalibrasyon kutucuğunun seçilmesi

Kalibrasyon görüntülerinin oluşturulması için firma tarafından gönderilmiş olan kalibrasyon tabletinin ölçüm yapılacak plağın bulunduğu bölge civarında çeşitli açılarda tutulur. Net bir görüntü elde edene kadar kamera netlikleriayarlanır. Böylece çeşitli konum ve açılardan alınmış kalibrasyon görüntüleri korelayon sistemine kaydedilir, Şekil 4.5.



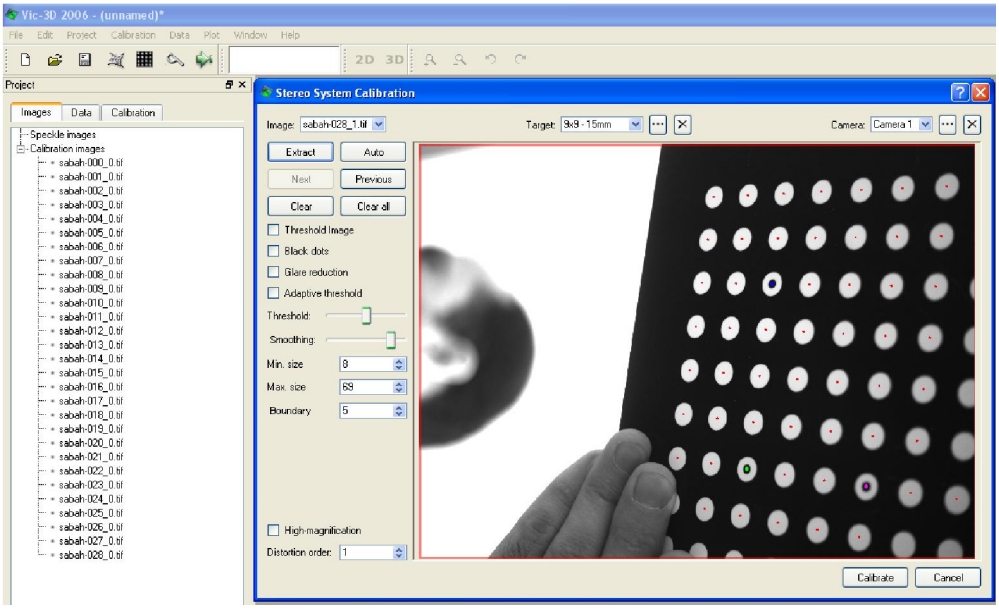
Şekil 4.5 : Kalibrasyon yapılan görüntülerin okutulması

Alınan bu görüntüler Şekil 4.6'de gösterildiği gibi "open" komutuyla açılır ve kalibrasyon ilgili buton tıklanarak gerçekleştirilir.



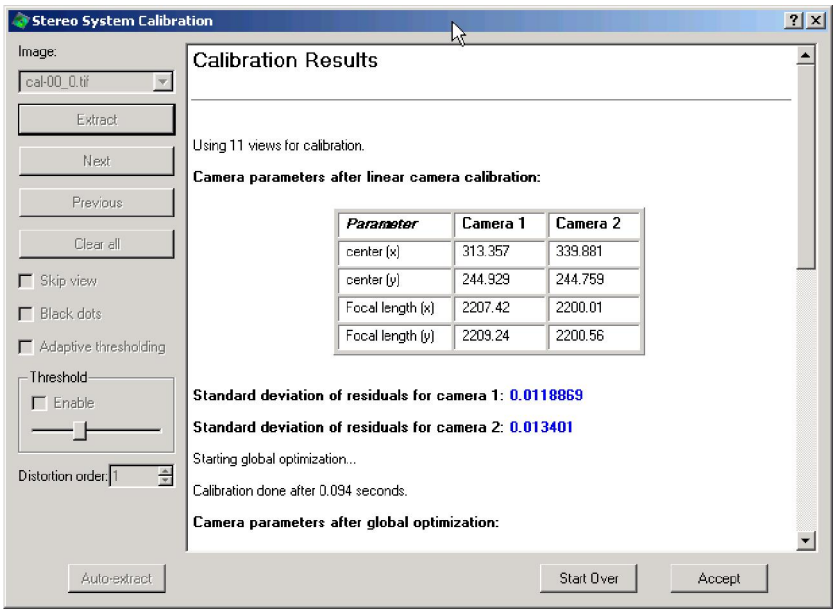
Şekil 4.6 : Kalibrasyonun gerçekleştirilmesi

Bu aşamada karşımıza çıkan ekranda kalibrasyon tabletinin boyutları seçilir ve hangi kamera kalibre ediliyorsa o şeçilir. Ardından seçilen kalibrasyon görüntüleri programda "Auto" komutuyla kalibrasyon içeriğine alınır. En son değer aldığımız kalibrasyon görüntüleri sağlıklı ise program kalibrasyon yapabileceğine dair, Şekil 4.6'da gösterildiği gibi, "Calibrate" komutunu aktif hale getirir. "Calibrate" ile kalibrasyona başlanır ve sonrasında kalibrasyon verileri program tarafından okunur ve onaylanır, Şekil 4.7.



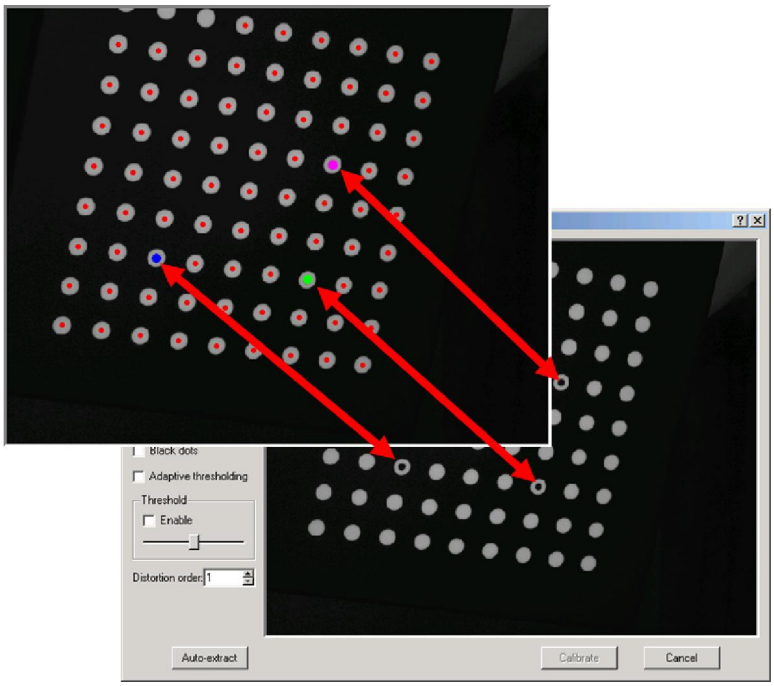
Şekil 4.7 : Kameraların kalibrasyonu

Kalibrasyonun doğruluğu kalibrasyon esnasında alınan görüntüleri kamera tarafından net görülüp görülmemesine, ortam ışığının çok fazla ya da yetersiz olmasına bağlı olarak değişmektedir. Standart sapma değeri %2-3 değerlerini aşmamalıdır.



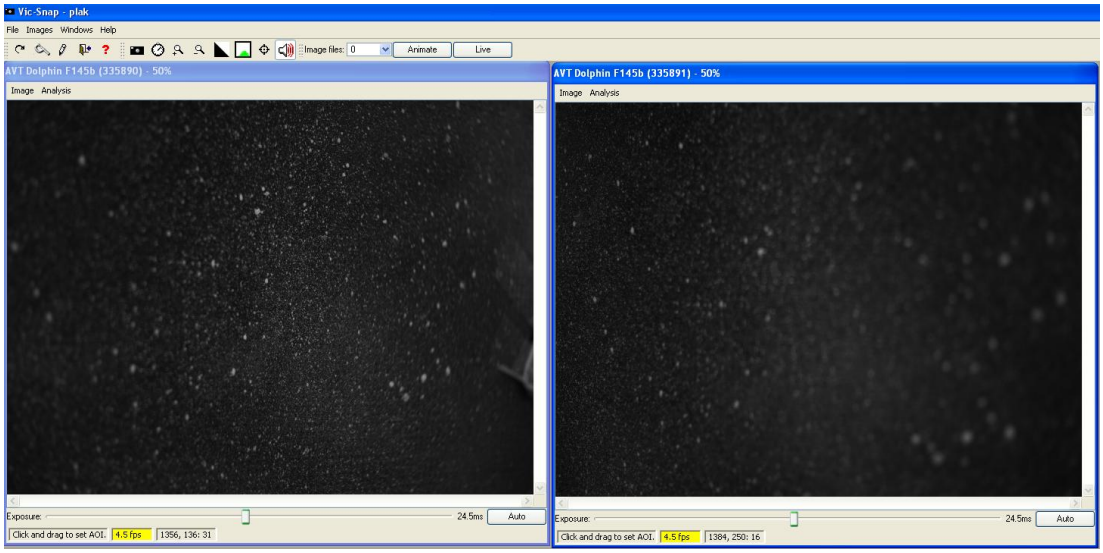
Şekil 4.8 : Kalibrasyon verilerinin onaylanması

Bu değerlerin üzerinde yapılan kalibrasyon sonucu deney sonuçlarının sağlıklı çıkmaması muhtemeldir. Kalibrasyon yapılabildiğini kalibrasyon tabletindeki küçük siyah noktaların, Şekil 4.9'de gösterildiği gibi, farklı renklerde görülmesinden anlaşılabilmektedir.



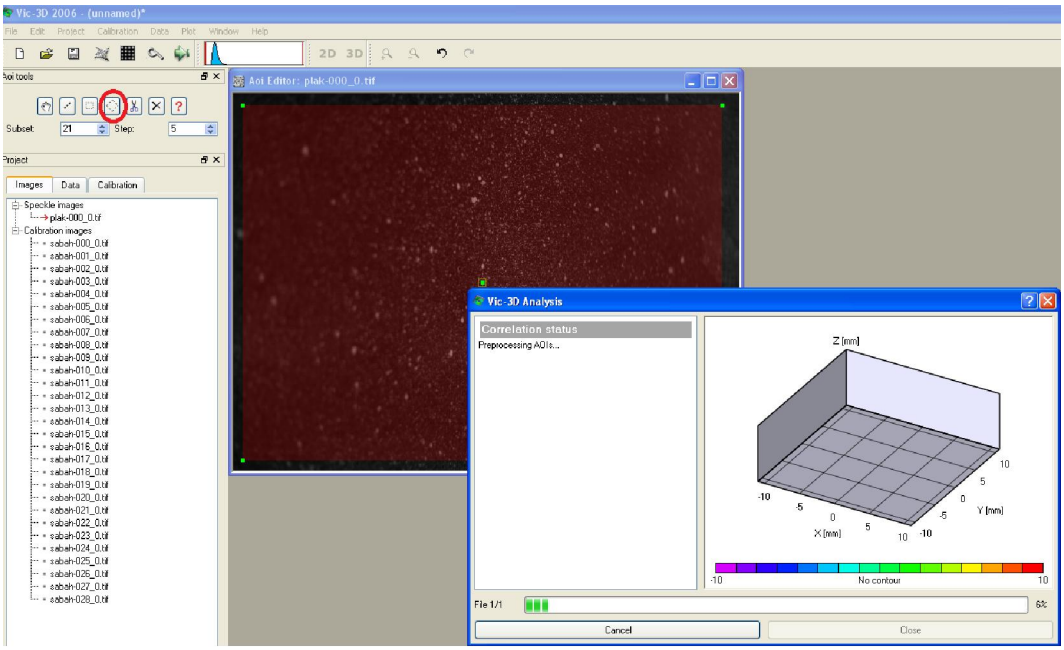
Şekil 4.9 : Kalibrasyonların doğruluğunun tespiti

Kalibrasyon işlemi, yazılımın deneyde gerçekleştirilen ölçümleri işleyerek doğru sonuçlar elde etmesi bakımından hayati önem taşımaktadır. Bu aşama oldukça zahmetli ve zor bir süreç olabilmektedir. Ortam ışığını ayarlamak bu süreçte en önemli noktadır. Ayrıca deney düzeneğinin yerleşimi ve kameralara uzaklığının doğru tespit edilmesi önemlidir. Kameralar ayarlanıp düzenek kurulduktan sonra ve ilk aşama olan kalibrasyon süreci geçildikten sonra deneye başlanabilir. Bu süreçte yapılması gereken Şekil 4.10'da gösterildiği gibi numunenin ilk görüntüsünün programa tanıtılıp daha sonra deforme olmuş olan numunenin program tarafından tanınıp karşılaştırmalarının doğru alınmasının sağlanmasıdır.



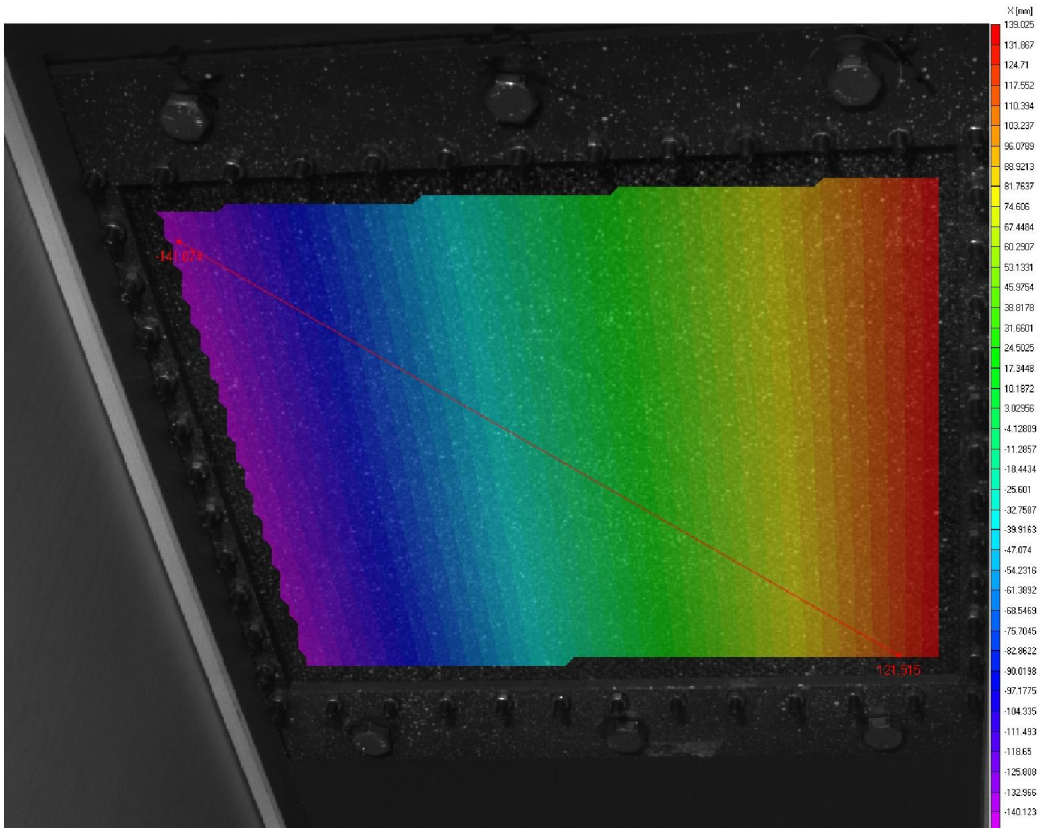
Şekil 4.10 : Numunenin ilk görüntüsünün alınması

İlk görüntü elde edildikten sonra Şekil 4.11'da gösterilen menüdeki işaretlenen buton kullanılarak ilk görüntü üzerinde korelasyon yapılmak istenen bölge seçilir ve analiz başlatılır.

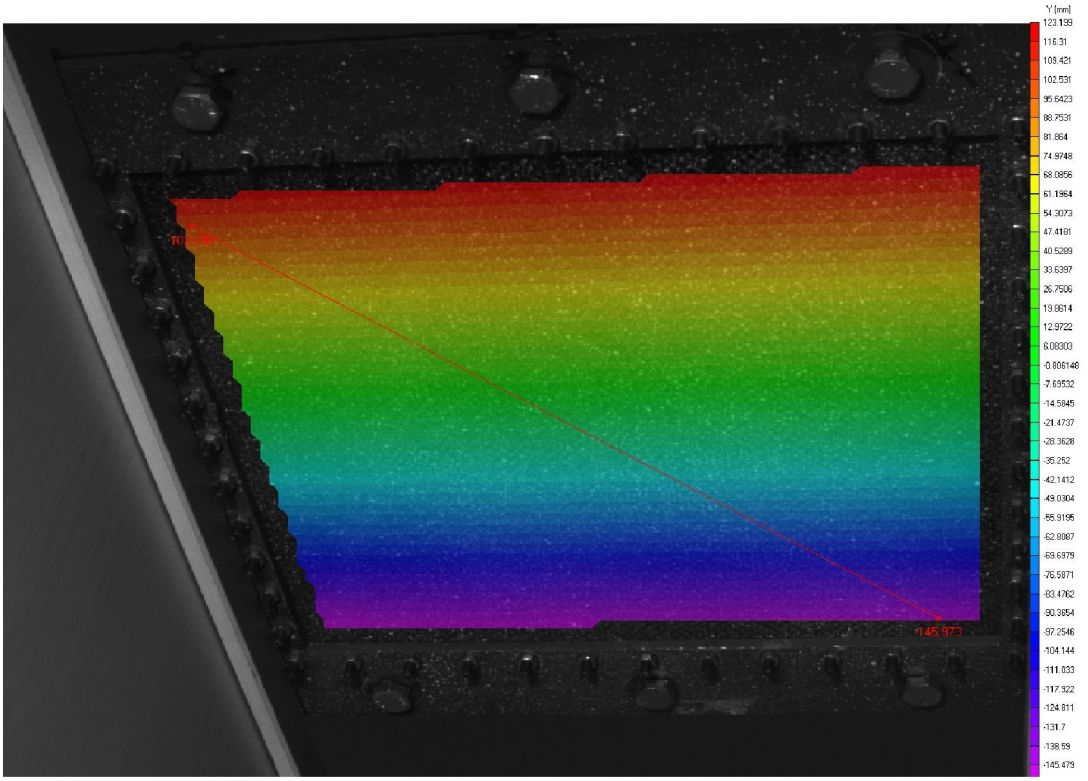


Şekil 4.10 : İlk görüntü üzerinde yapılan işlemler

Böylece programa ilk görüntünün analiz edilmek istenen bölgesi tanıtılmış olur. Bu işlem sonrasında x, y ve z eksenlerinde plak boyutları belirlenerek elde edilmiş olur, Şekil 4.11 ve Şekil 4.12.

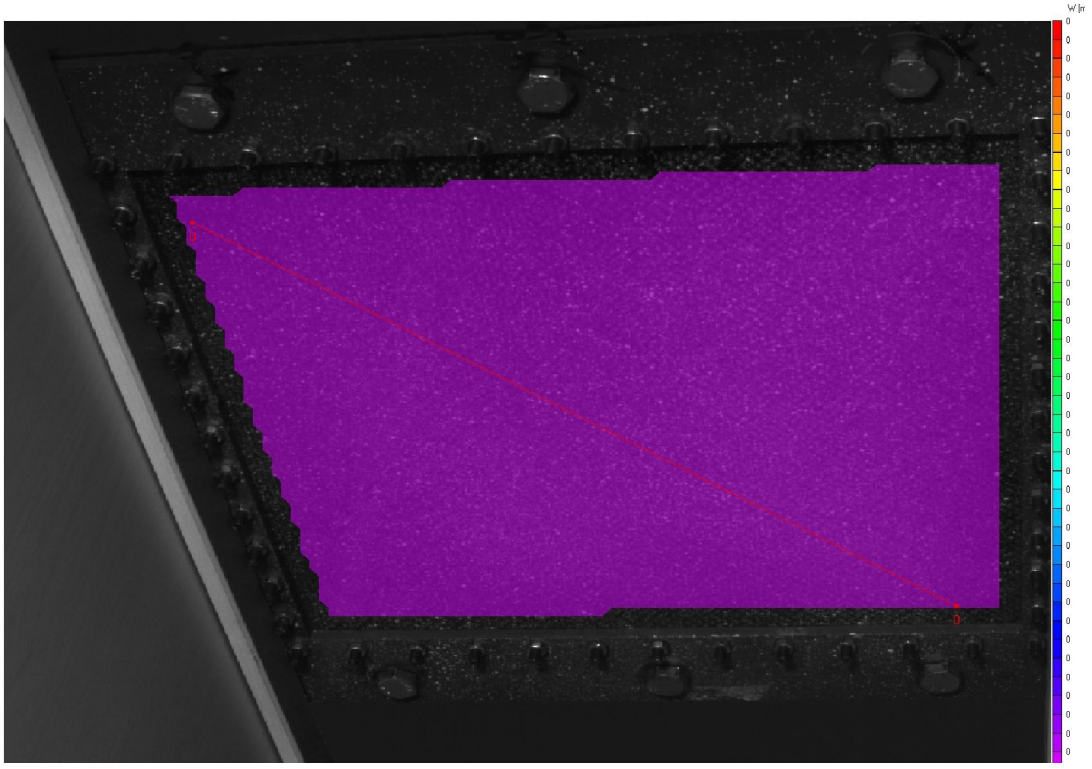


Şekil 4.11 : x ekseni boyunca plak boyutlarının tanımlanması.



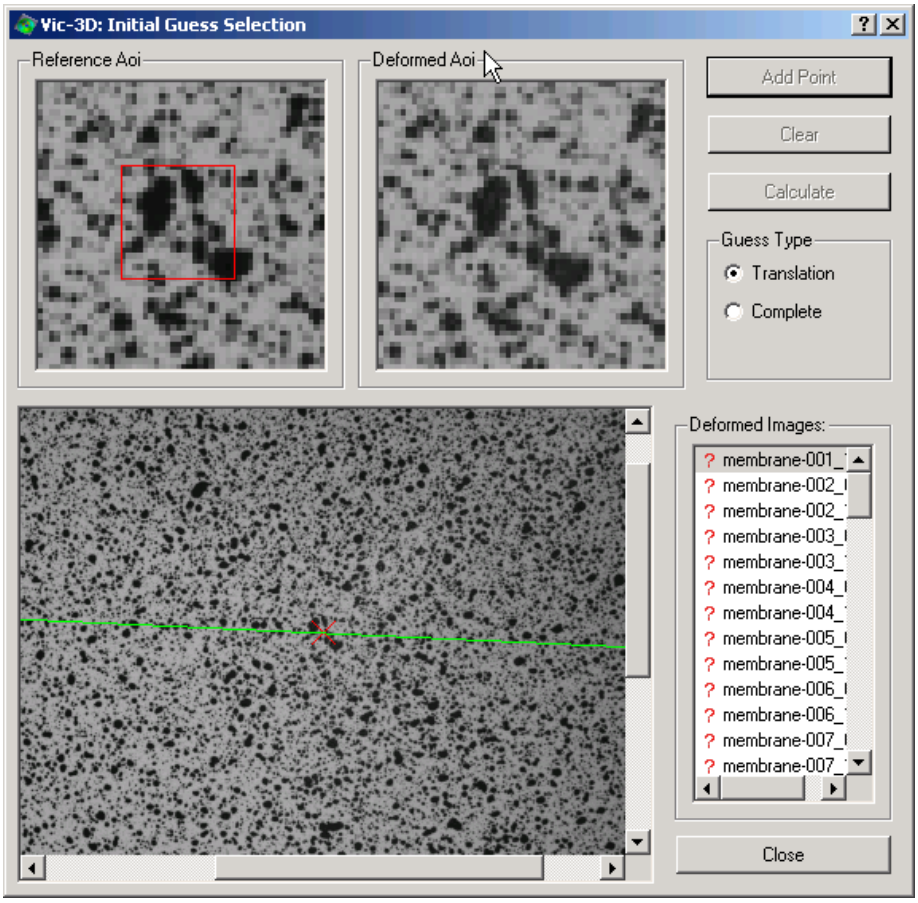
Şekil 4.12 : y ekseni boyunca plak boyutlarının tanımlanması.

Plağın yer değiştirmelerinin görüntülendirilebilmesi için plak referans yüzeyinin z ekseninde konumlandırılması yapılır, Şekil 4.13.



Şekil 4.13 : z ekseni yönünde yer değiştirme referanslandırılması.

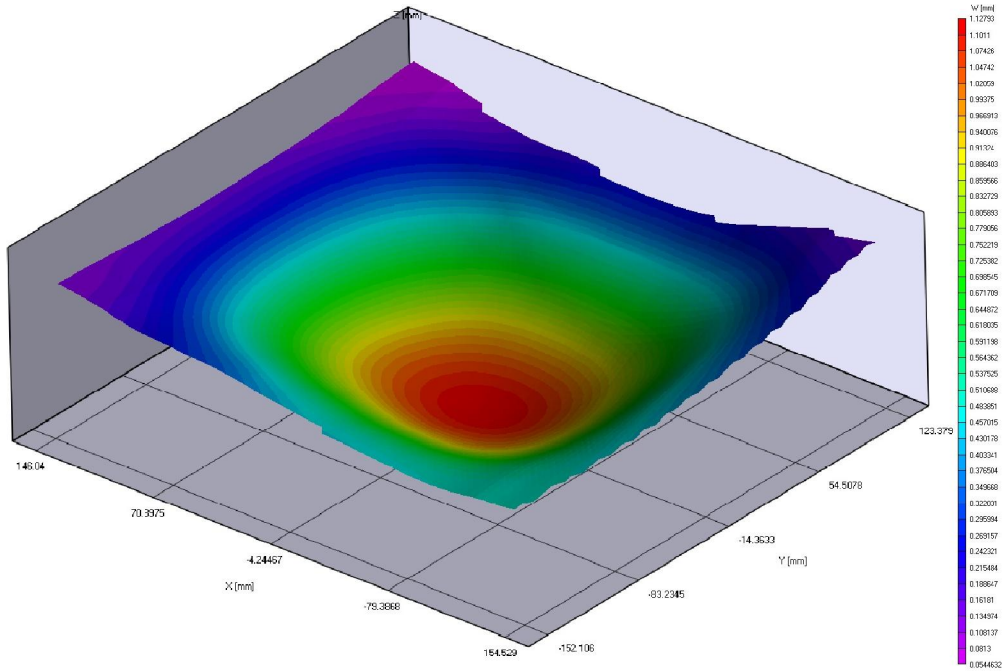
Bu aşamadan sonra deneye başlanabilmektedir. Hazırlanmış olan deney düzeneği üzerinde deneyler yapılırken deforme olmuş olan görüntülerin aynen kalibrasyon ve ilk görüntünün elde edilmesindeki gibi VICSnap programıyla elde edilmesi gerekmektedir. VIC3D 2006 programında analiz edilerek korelasyon işlemleri yapılır ve sonra bu programdan elde edilen görüntüler belirlediğimiz bir dosyada toplanabilir.



Şekil 4.14 : İlk görüntüdeki görüntülerin karşılaştırması

Korelasyon öncesi ilk görüntüde tespit edilen bazı tanımlanabilmesi mümkün olan bölgeler deforme olmuş olan görüntüler üzerinde eşlenerek programa tanıtılır. Bu bölgelerin seçiminde iki görüntü öncelikle iki görüntü yanyana getirilir. Sonra iki görüntünün üzerindeki noktalara detaylı bir şekilde bakılır ve iki farklı görüntü üzerinde plağın belirli bir konumu seçilerek diğer plak üzerinde o konumun neresi olabileceği detaylı bir şekilde araştırılarak aynı olduğu düşünülen nokta seçilir. Bu noktanın etrafında birkaç nokta seçilerek referans plak ve yükleme yapılmış plak üzerinde program tarafından açı ve mesafe ölçümleri yapılabilir hale getirilmiş olur. Program bu şekilde referans plak ve yükleme altındaki plak arasında karşılaştırma yaparak plağın yaptığı hareketi saptar.

Şekil 4.14'te görüldüğü üzere plak üzerinde belirli bir küme seçilmiş ve o küme içerisinde iki plak üzerindeki aynı bölge tespit edilmiş ve bu bölgelerdeki noktaların etrafında bu plak üzerindeki bu nokta diğer plak üzerindeki bu noktadır denilerek programa birkaç nokta etrafındaki konumlandırmalar tanıtılmış ve bahsedilen plak yer değiştirme hareketleri tespit edilmiştir.



Şekil 4.15 : İlk görüntü ile deforme olmuş görüntülerin korelasyonlarının yapılması

Bu aşamadan sonra elde edilen veriler (.out) içeriği olarak otomatik olarak kayıt altına alınmakta ve istendiğinde çeşitli sonuçlar almak üzere program tarafından kullanılmaktadır. Grafik verileri ve plak üzerinde istenen bölge için tanımlanması gereken grafik verileri ve istenen bölge için ihtiyaç duyulan grafik verilerine ".out" dosyasıyla ulaşılabilmektedir.

İstendiği takdirde yer değiştirme, gerinim vb. sonuç dosyalarını alarak diğer grafik programlarında çizimler elde etmek, deney sonuçlarını teorik sonuçlarla karşılaştırmak alınan bu ".out" dosyası sayesinde mümkün olabilmektedir.

5. SAYISAL VE DENEYSEL SONUÇLAR

Bu bölümde ankastre mesnetli katmanlı karbon elyaf/epoksi bir plağın sayısal, yaklaşık ve deneysel sonuçlarının karşılaştırılmasına yer verilmiştir. İlk olarak Nastran sonlu eleman yazılımı ile gerçekleştirilen küçük ve büyük deformasyon analizlerinin sonuçlar verilmiştir. Ardından VIC3D optik ölçme sistemi ile elde edilen yer değiştirme sonuçları ve 3. Bölümde elde edilen denklem sistemi Galerkin yöntemi kullanılarak Mathematica'da yazılmış olan bir kod ile çözdürülerek bulunan yer değiştirme ve gerinim değerleri elde edilmiştir. Son olarak bu üç yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.

5.1 Katmanlı Kompozit Plağın Özellikleri

Bu çalışmada incelenen katmanlı kompozit plak 300 mm x 300 mm boyutlarındadır. Plak 0°/90° elyaf yönelimli dört katmandan oluşmaktadır. Katman kalınlığı 0,332 mm. olup 4 katmanlı plak kalınlığı 1,328 mm. olmaktadır. Karbon epoksi kompozit malzeme için çekme testleri ile belirlenen mekanik özellikleri Çizelge 5.1'de verilmiştir, Ömercikoğlu (2009).

Çizelge 5.1 : Karbon/Epoksi Plağın Malzeme Özellikleri

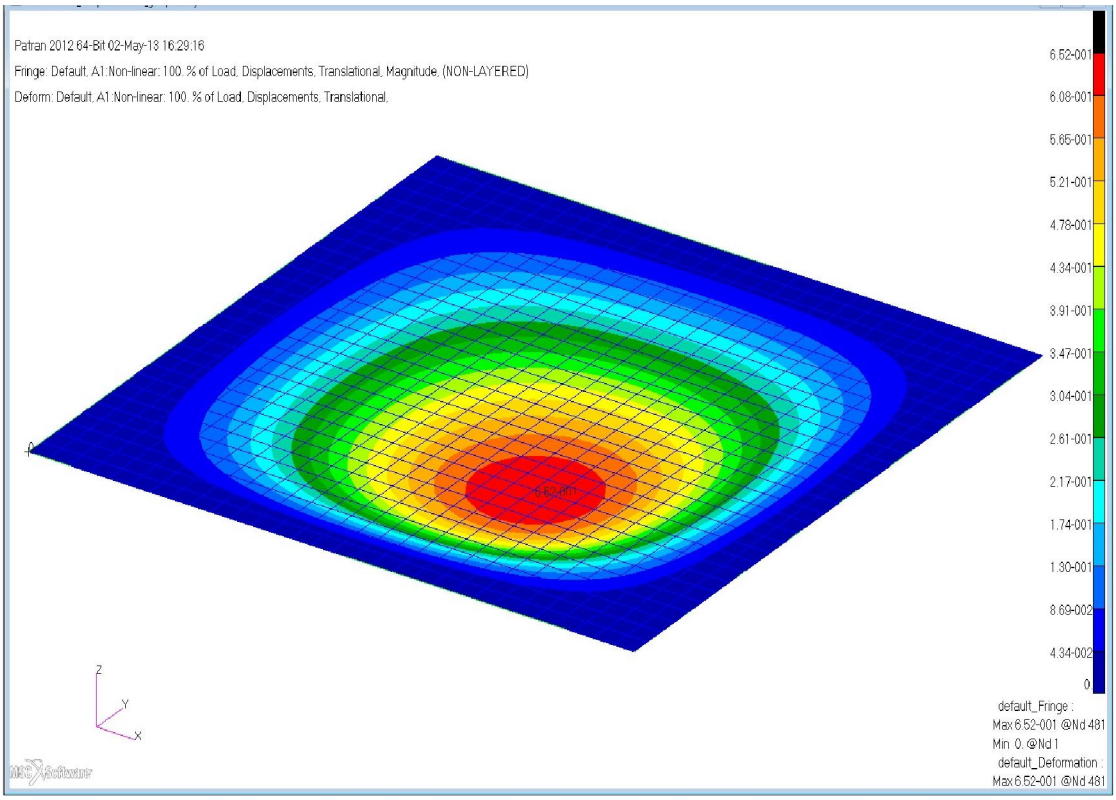
$\mathbf{E_{xx}}$	GPa	x yönündeki Elastisite Modülü	45.5
$\mathbf{E_{yy}}$	GPa	y Yönündeki Elastisite Modülü	45.5
$\mathbf{E_{zz}}$	GPa	z Yönündeki Elastisite Modülü	3.65
$\mathbf{G_{xy}}$	GPa	xy Düzlemindeki Kayma Modülü	2.70
$\mathbf{G_{yz}}$	GPa	yz Düzlemindeki Kayma Modülü	1.35
$\mathbf{G_{xz}}$	GPa	xz Düzlemindeki Kayma Modülü	1.35
h	mm	Plak kalınlığı (0.332 mm x 4 katman)	1.328
$\boldsymbol{\rho}$	kg/m^3	Malzeme Yoğunluğu	1340
$\boldsymbol{\nu_{xy}}$	-	xy Düzlemindeki Poisson Oranı	0.195
$\boldsymbol{\nu_{xz}}$	-	xz Düzlemindeki Poisson Oranı	0.353
$\boldsymbol{\nu_{yz}}$	-	yz Düzlemindeki Poisson Oranı	0.353

5.2 Sonlu Eleman Analizi ve Deneysel Çökme Sonuçları

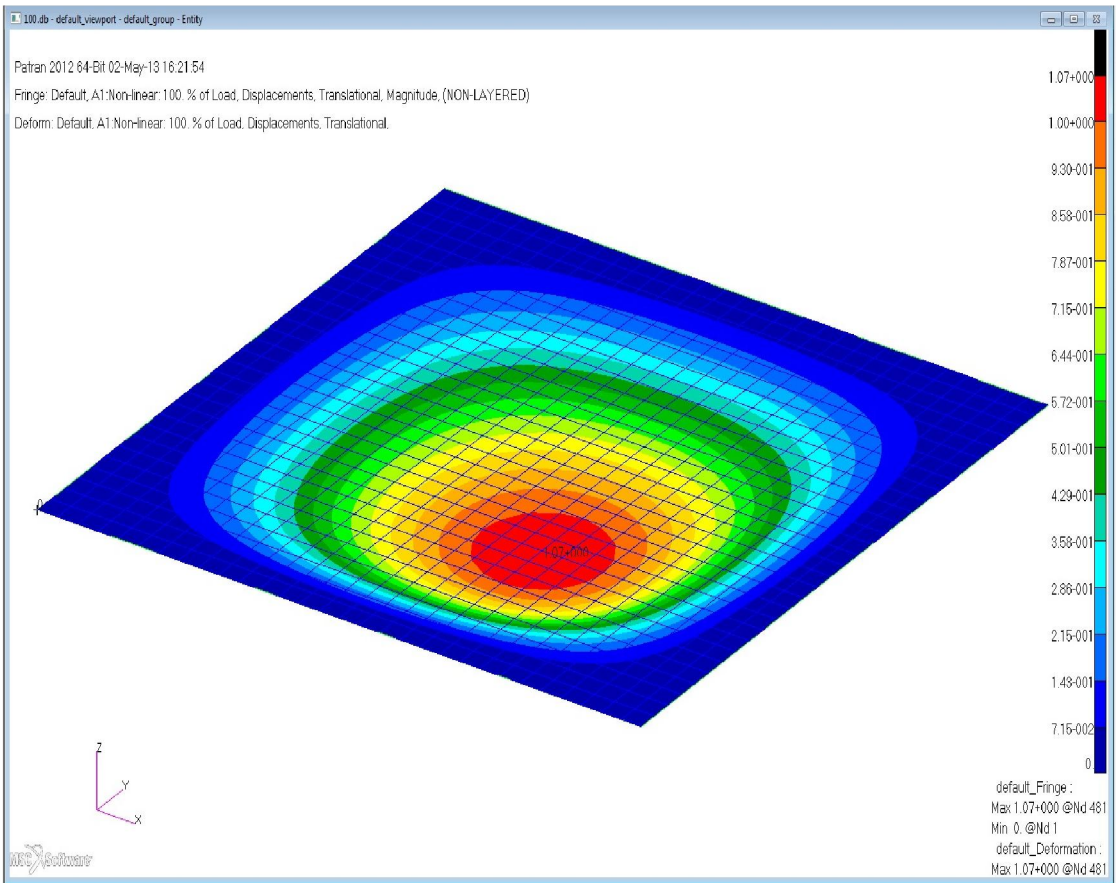
İlk olarak ankastre mesnetli katmanlı kompozit plak Patran yazılımında modellenip sonlu eleman çözüm ağı oluşturularak Nastran yazılımı ile geometrik doğrusal olmayan statik analizler çeşitli düzgün yazılı basınç yükleri için gerçekleştirilmiştir. Patran 2012 yazılımında sonlu eleman modeli oluşturulan plak $300\ mm\ x\ 300\ mm$ boyutlarında olup dört katmanlı kompozit olarak modellenmiştir. Plak orta yüzeyi $20\ x\ 20 = 400$ kabuk elemanla modellenmiştir. Plak kenarlarındaki tüm düğüm noktaları seçilerek yer değiştirme ve dönmeler sıfır yapılmış; böylece plak dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiştir. Yükleme koşulları ise 500 N'a kadar artan değerlerle on farklı yük değeri şeklinde seçilmiştir. Bu yükler plak yüzeyine düzgün yayılı yük olarak uygulanmıştır. Analiz çeşidi olarak doğrusal olmayan statik seçilerek sonlu eleman modeli SOL106 çözücü kullanılarak çözülmüştür. Analizler MD Nastran 2012 sonlu elemanlar analizi yazılımı ile gerçekleştirilmiştir. Katmanlı kompozit plak üzerine 50N'dan 500N'a kadar 50 N artımlarla 10 farklı yük durumu uygulanarak geometrik olarak doğrusal ve doğrusal olmayan analizler yapılmıştır.

Bu bölümde ayrıca katmanlı kompozit plaktan korelasyon cihazı ile alınan görüntülerin analizleri yapılarak sehim hesabı yapılmış ve alınan veriler farklı yükleme koşulları altında detaylı olarak sunulmuştur. Korelasyon cihazı olarak kullanılan Limess firmasının VIC3D cihazı ile farklı yükleme koşullarında alınan görüntülerden faydalanılarak görüntü karşılaştırmaları yapılmış ve plağın püskürtme yöntemiyle boyanan yüzeyinin noktasal olarak korelasyon cihazıyla yer değiştirmeleri tespit edilerek plak davranışı incelenmiştir. Bu sayede analiz sonuçları ve sayısal sonuçlardan alınan verilerle sayısal sonuçların doğruluğu ve yakınsama oranları tespit edilmiş ve yüzdesel olarak hesaplanarak ifade edilmiştir.

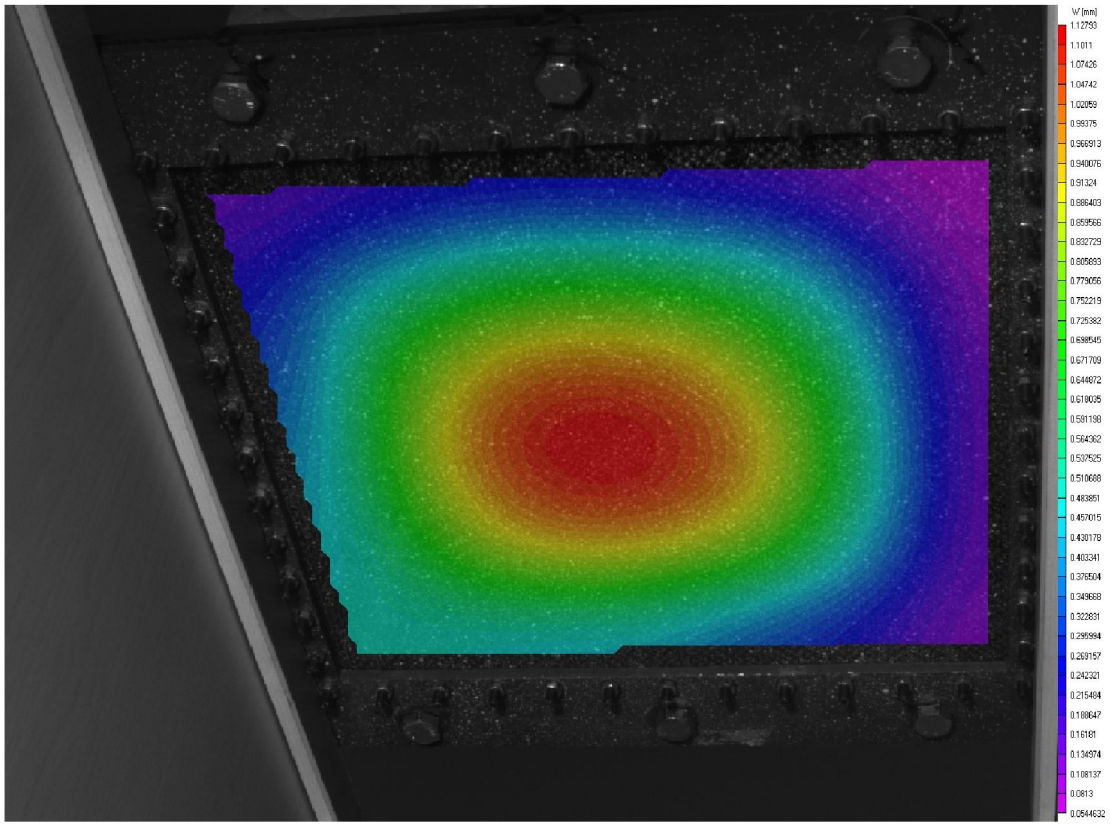
Doğrusal olmayan analizlerden elde edilen plak çökme sonuçları sırasıyla sonlu eleman sonuçları ve deneysel sonuçlar olarak Şekil 5.1 – Şekil 5.19'da sunulmuştur.



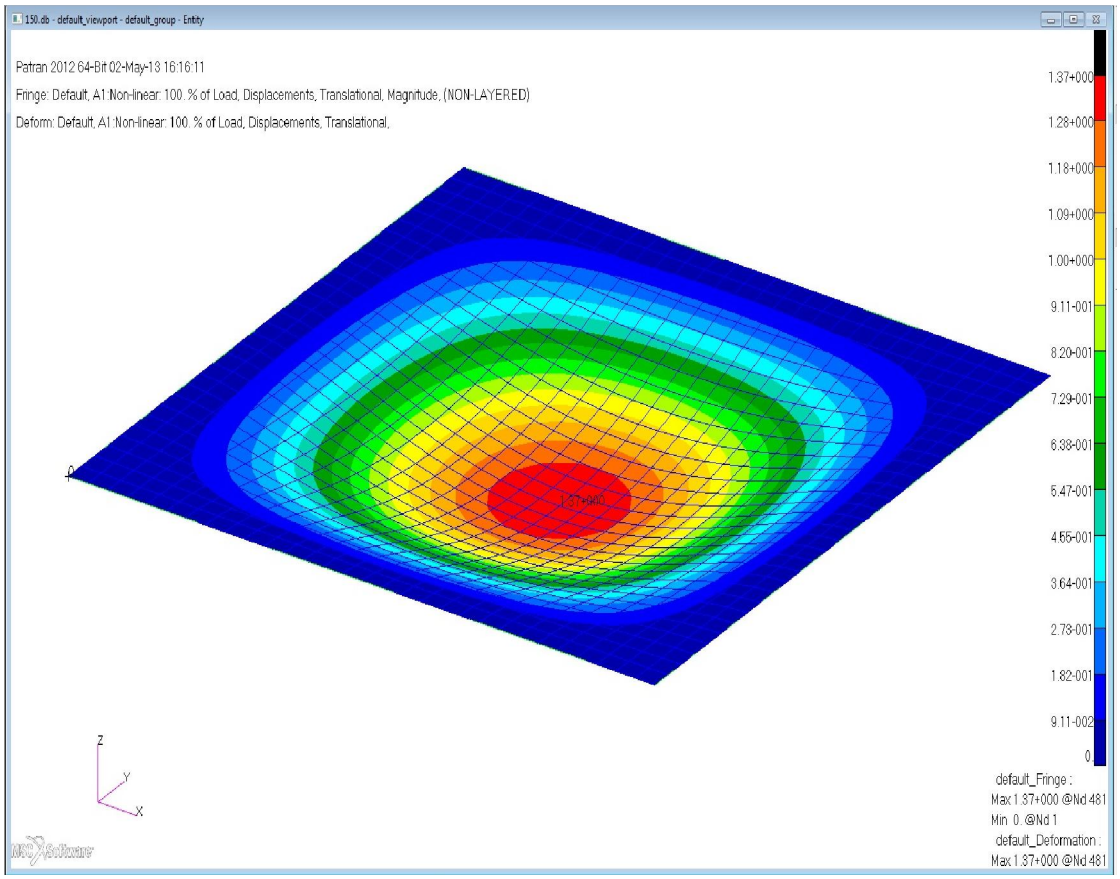
Şekil 5.1: Plağın 50 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



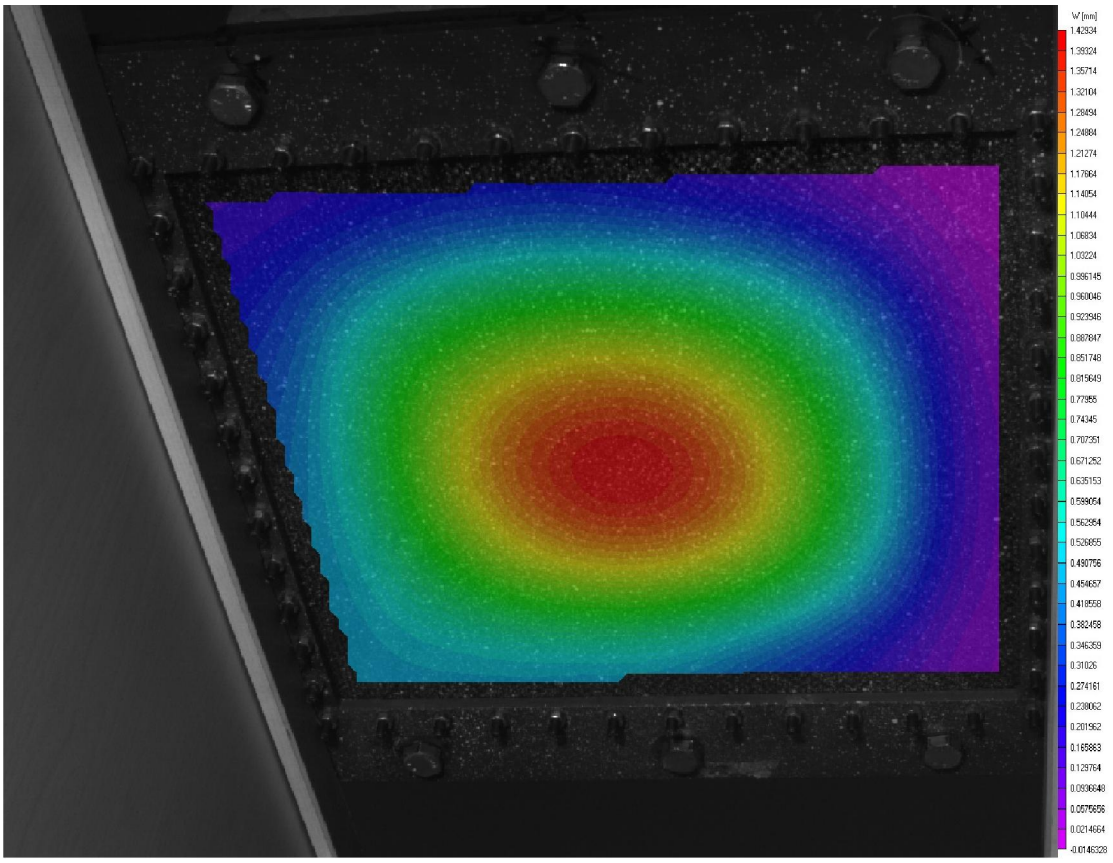
Şekil 5.2: Plağın 100 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



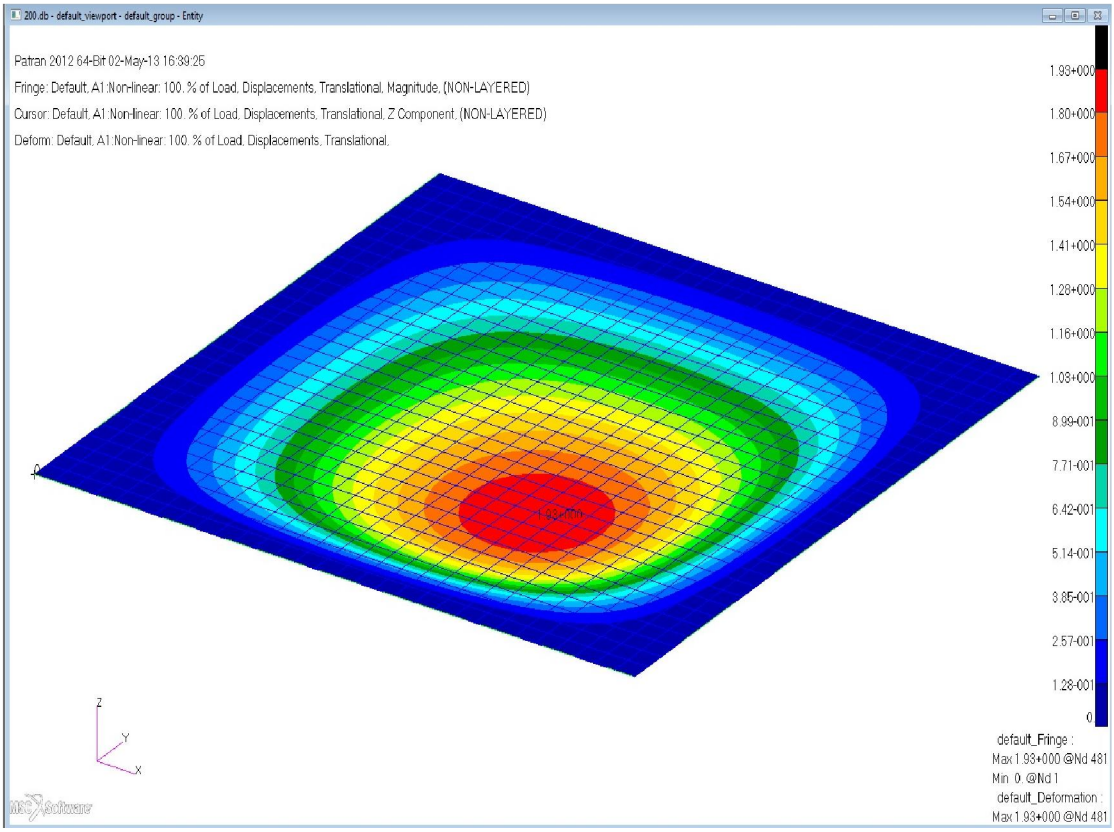
Şekil 5.3: Plağın 100 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



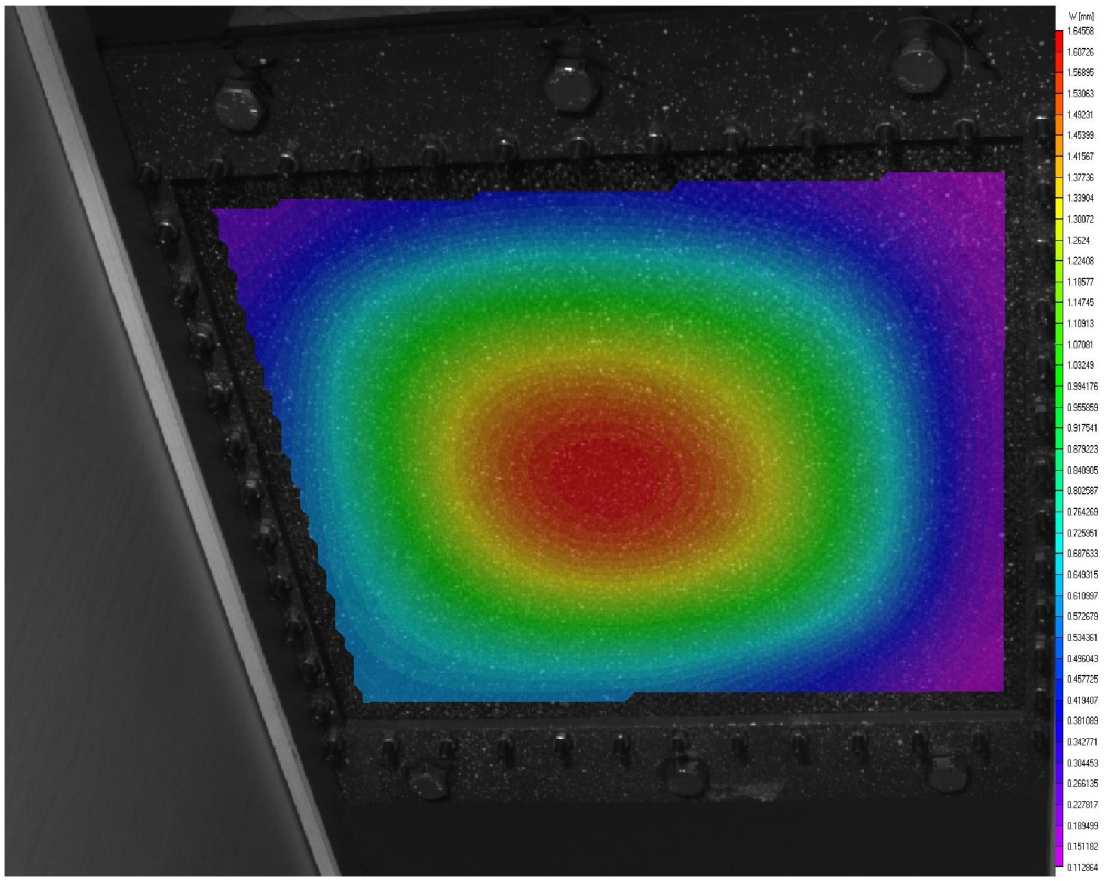
Şekil 5.4: Plağın 150 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



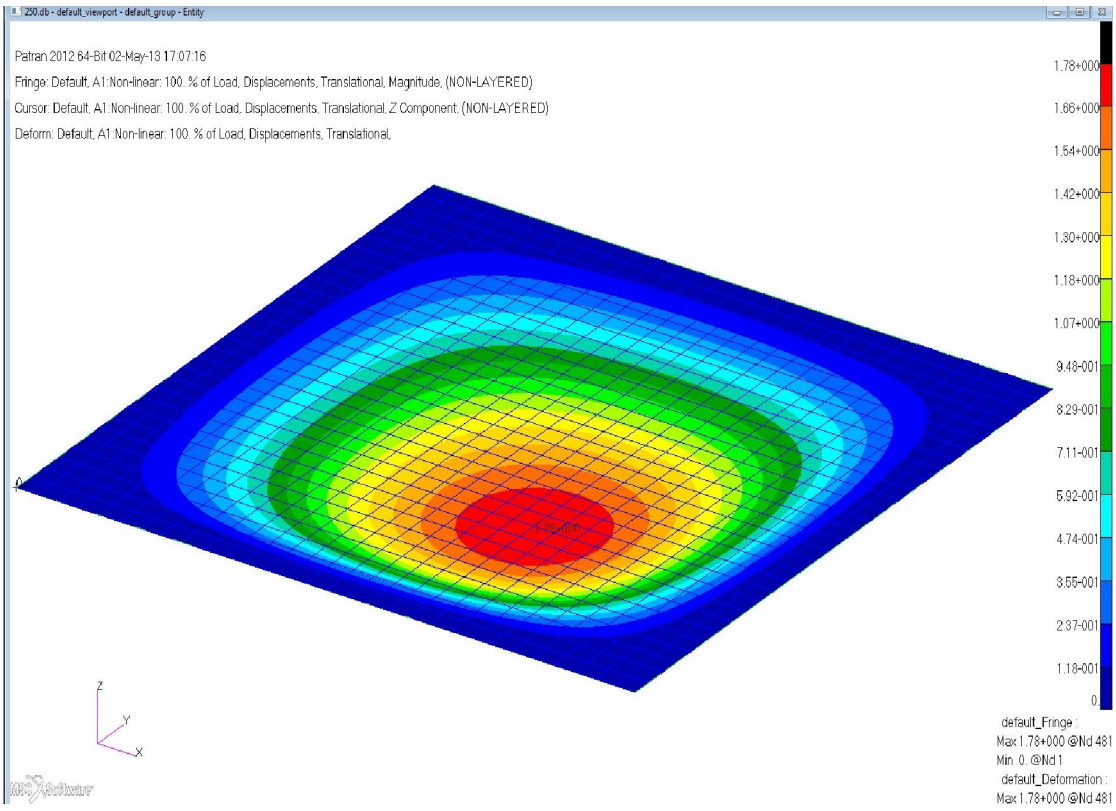
Şekil 5.5: Plağın 150 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



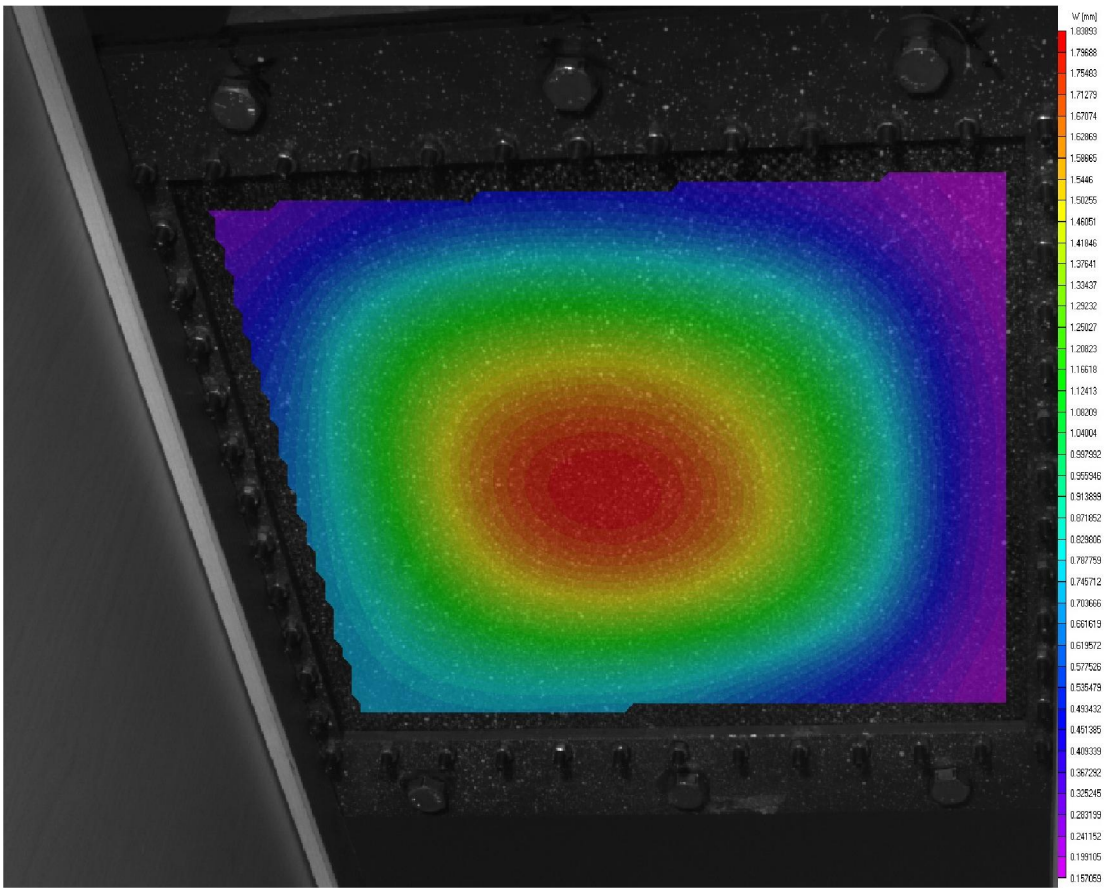
Şekil 5.6: Plağın 200 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



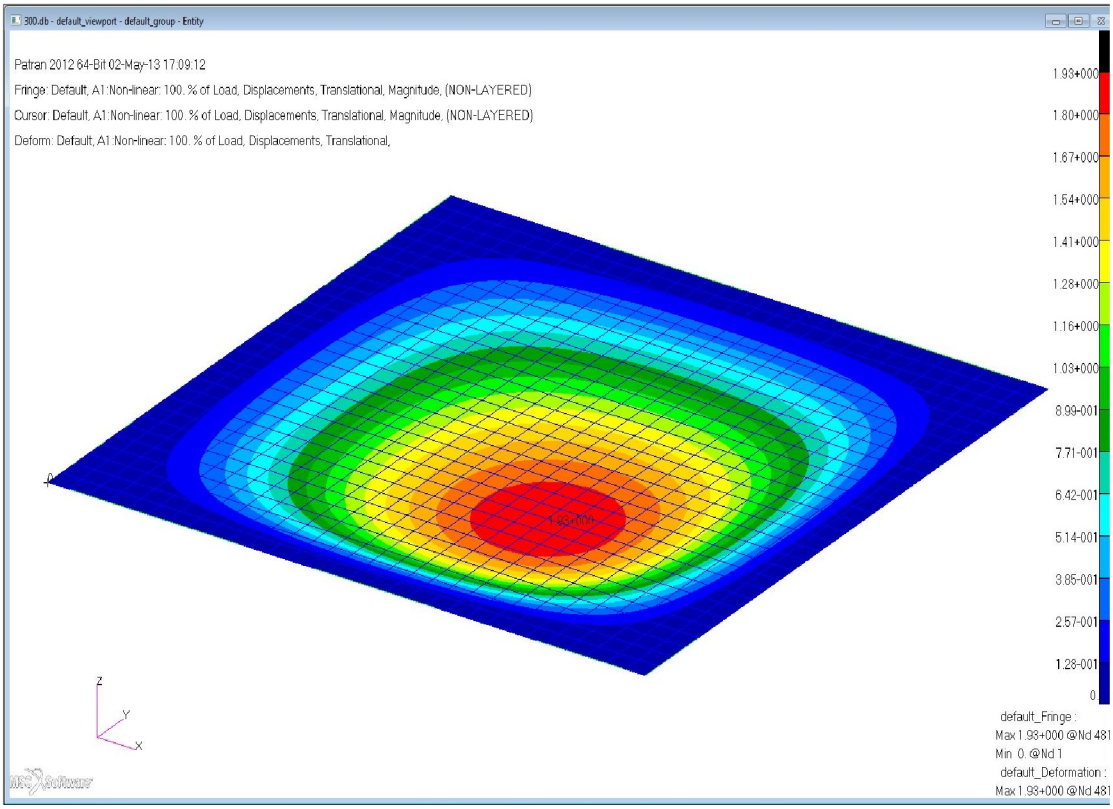
Şekil 5.7: Plağın 200 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



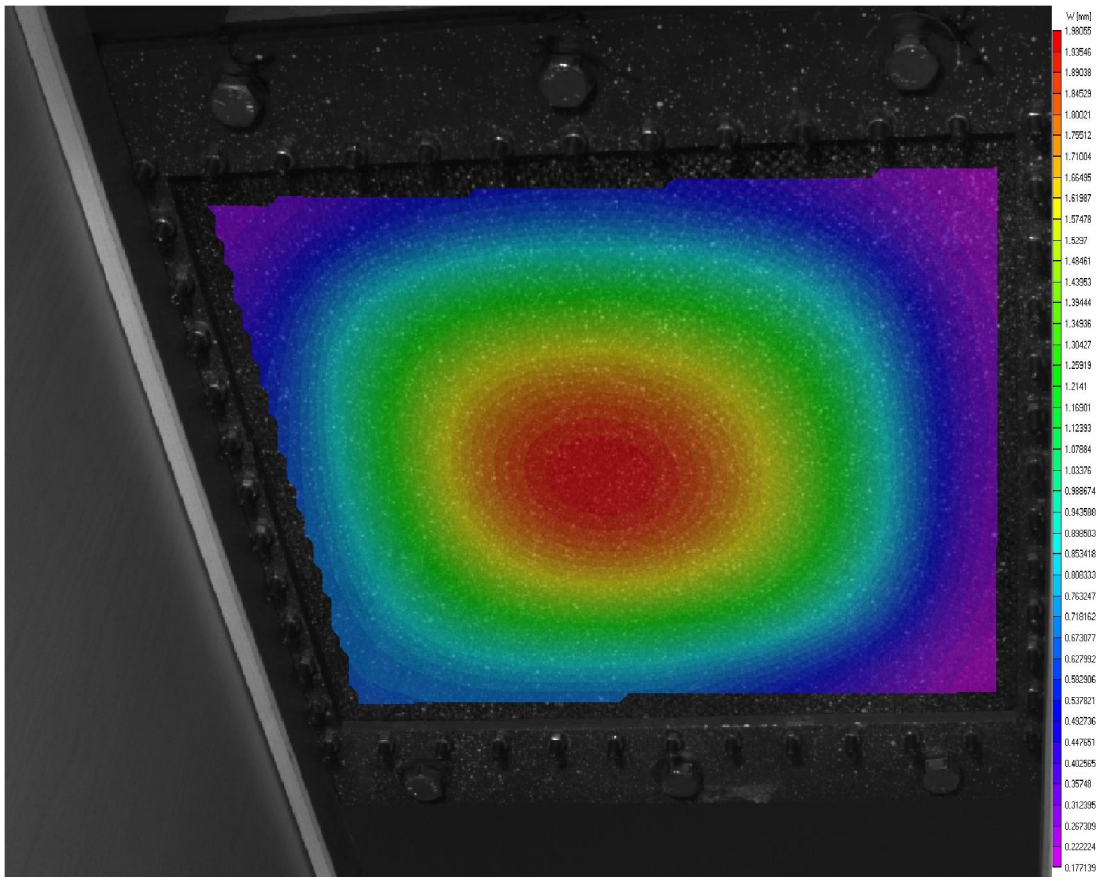
Şekil 5.8: Plağın 250 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



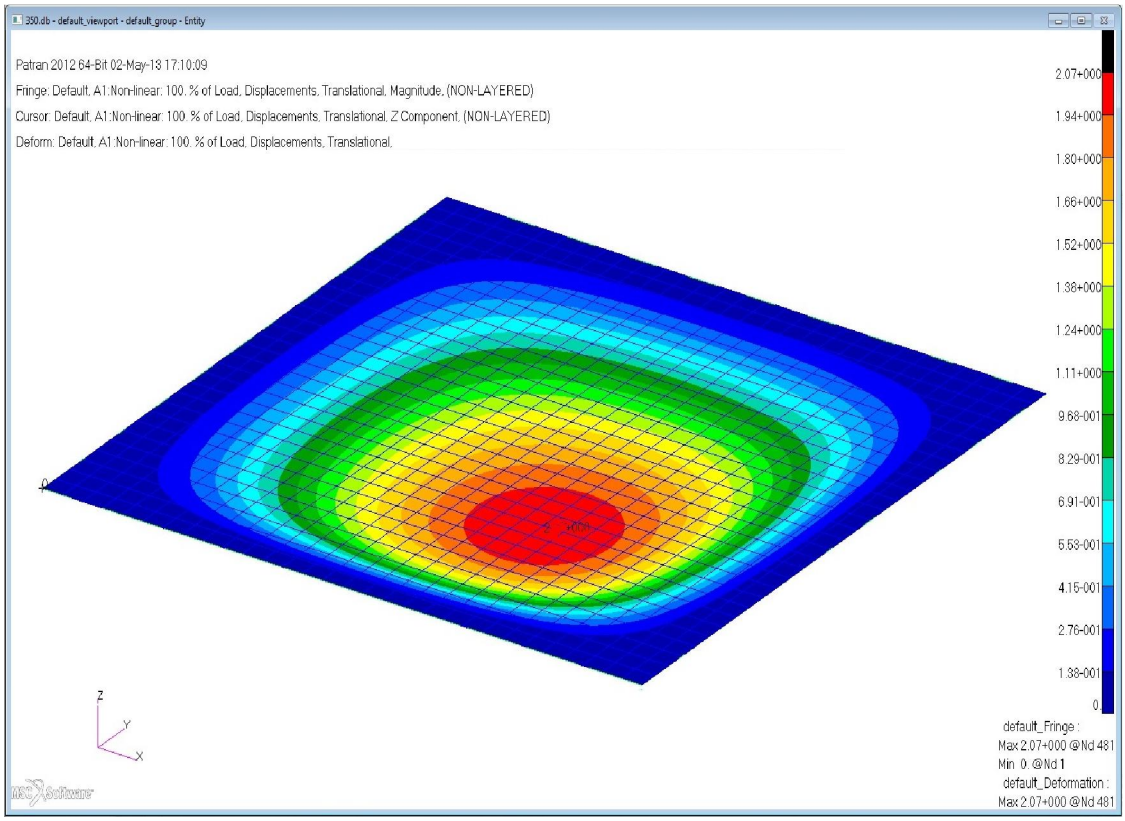
Şekil 5.9: Plağın 250 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



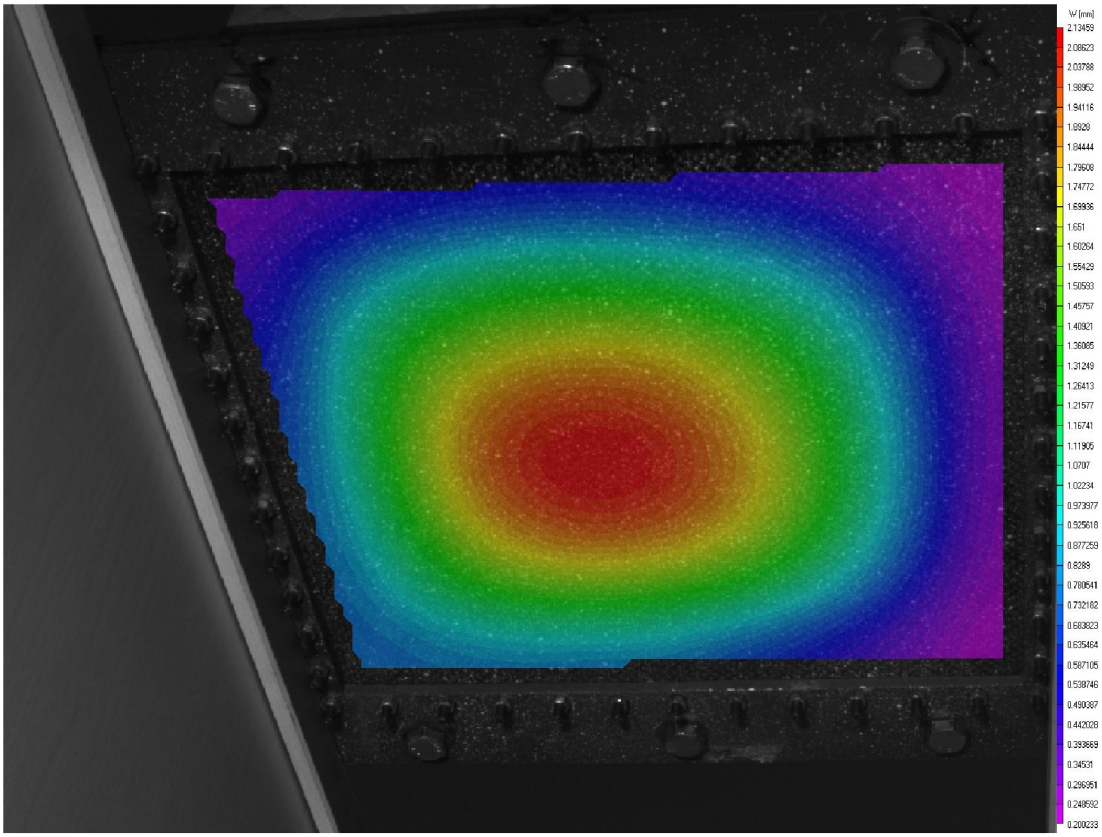
Şekil 5.10: Plağın 300 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



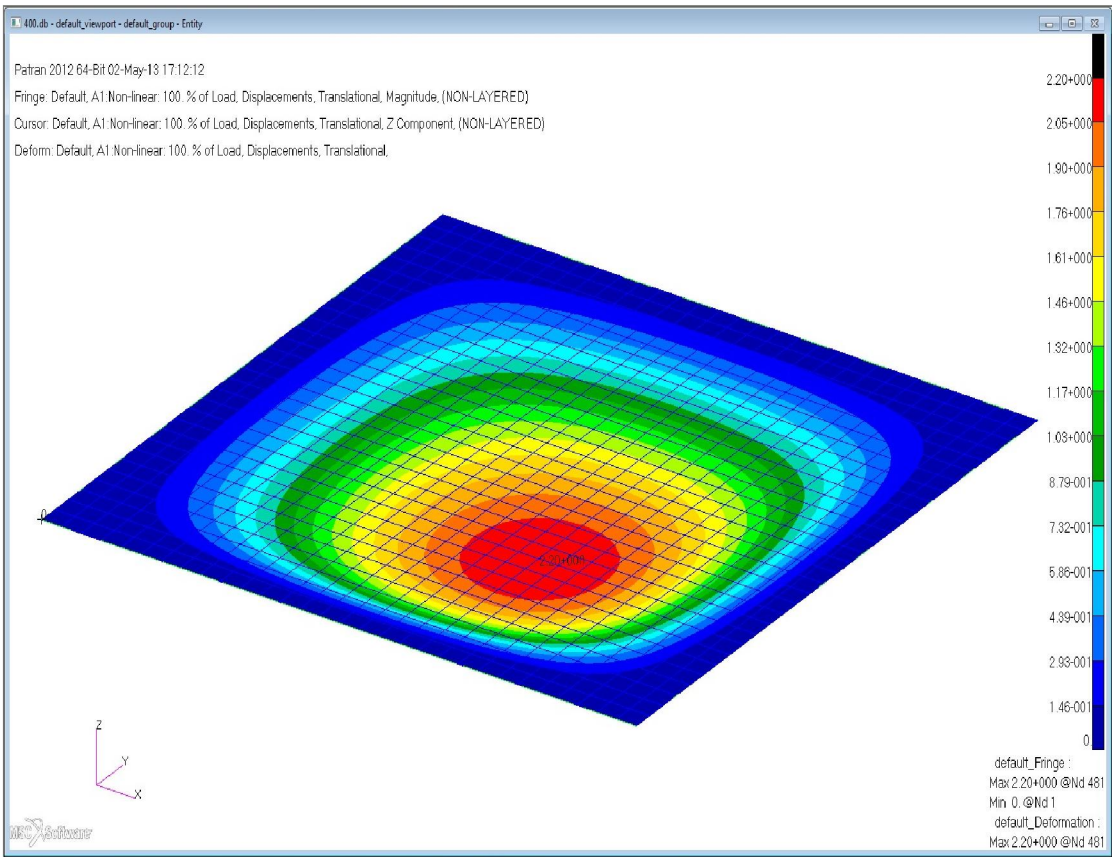
Şekil 5.11: Plağın 300 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



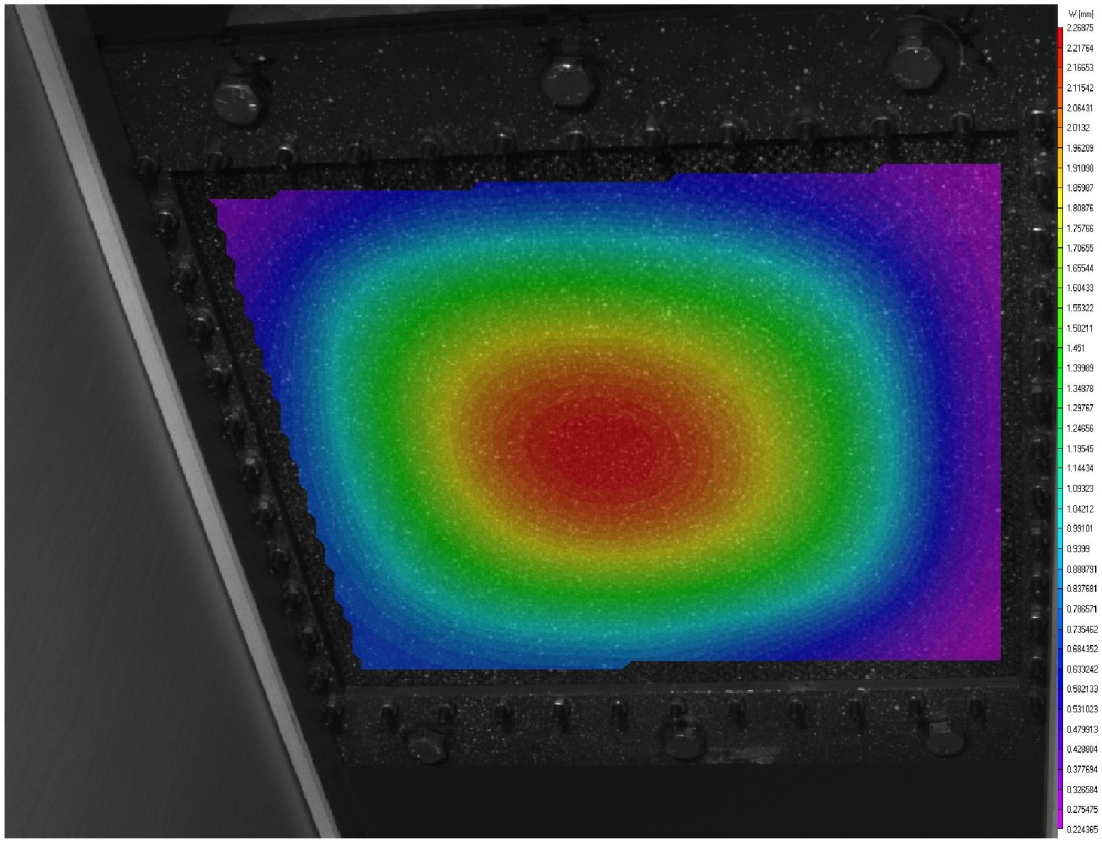
Şekil 5.12: Plağın 350 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



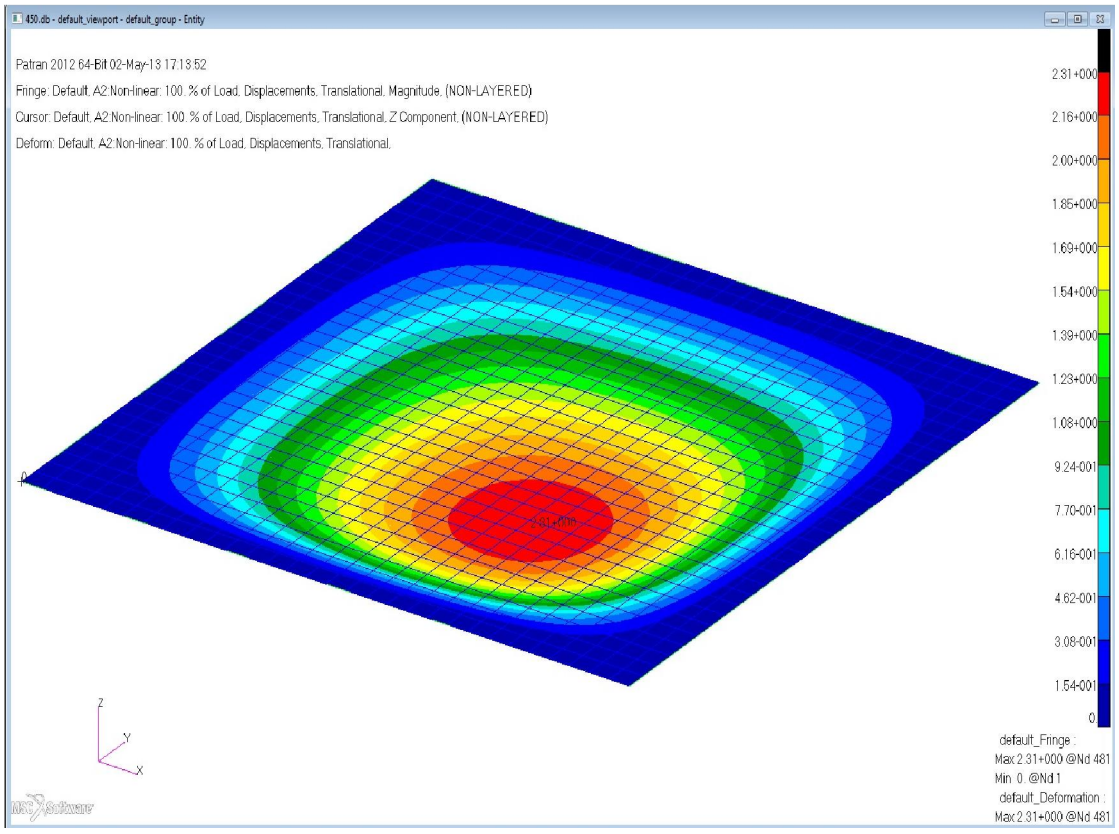
Şekil 5.13: Plağın 350 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



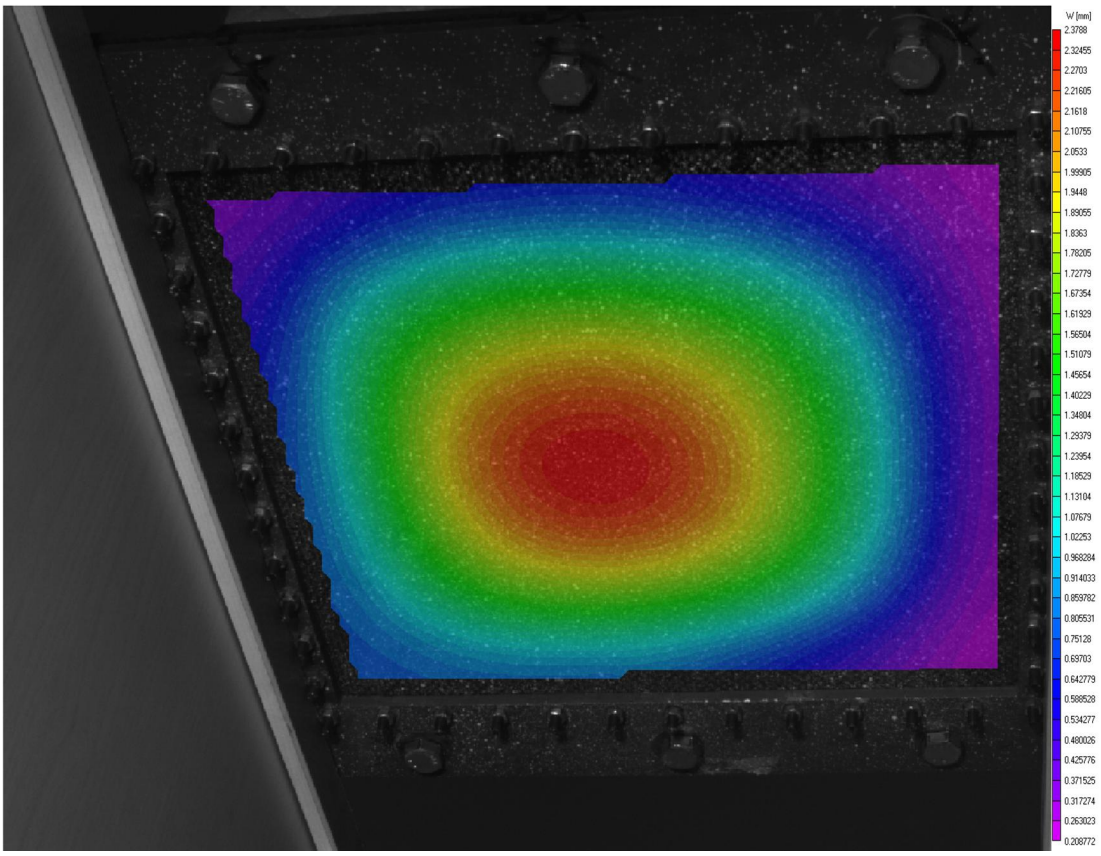
Şekil 5.14: Plağın 400 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



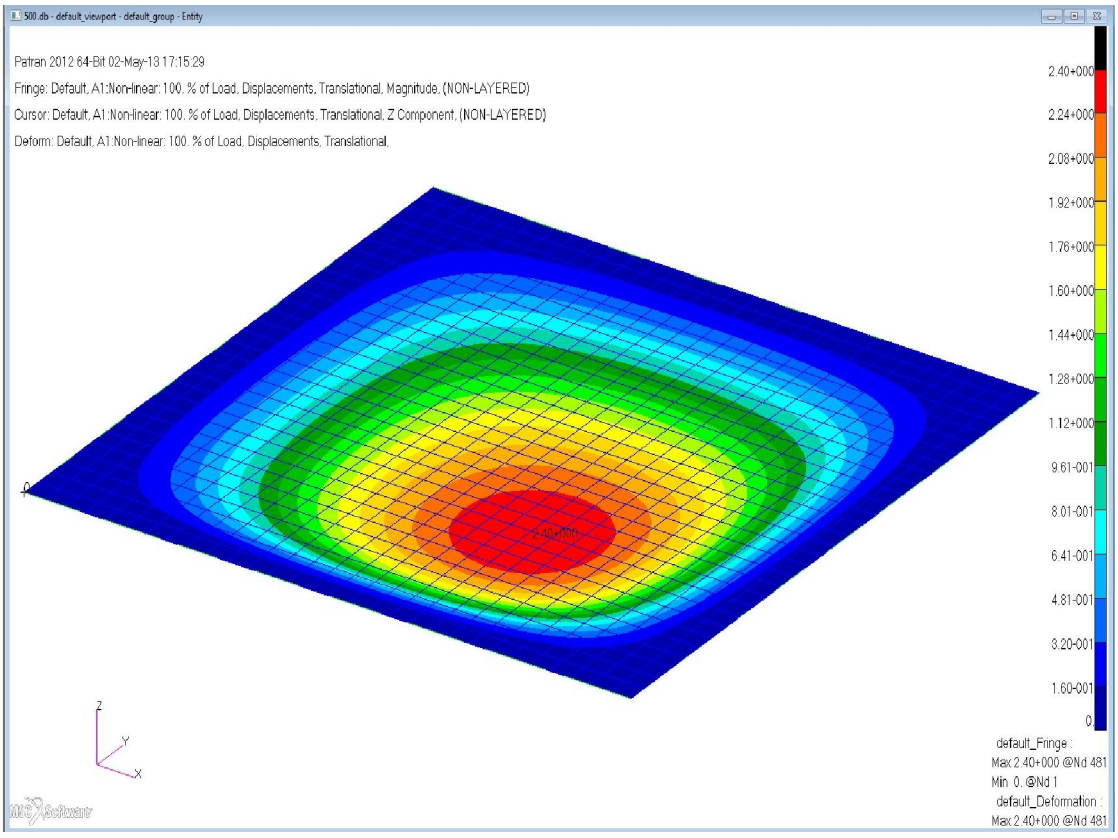
Şekil 5.15: Plağın 400 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



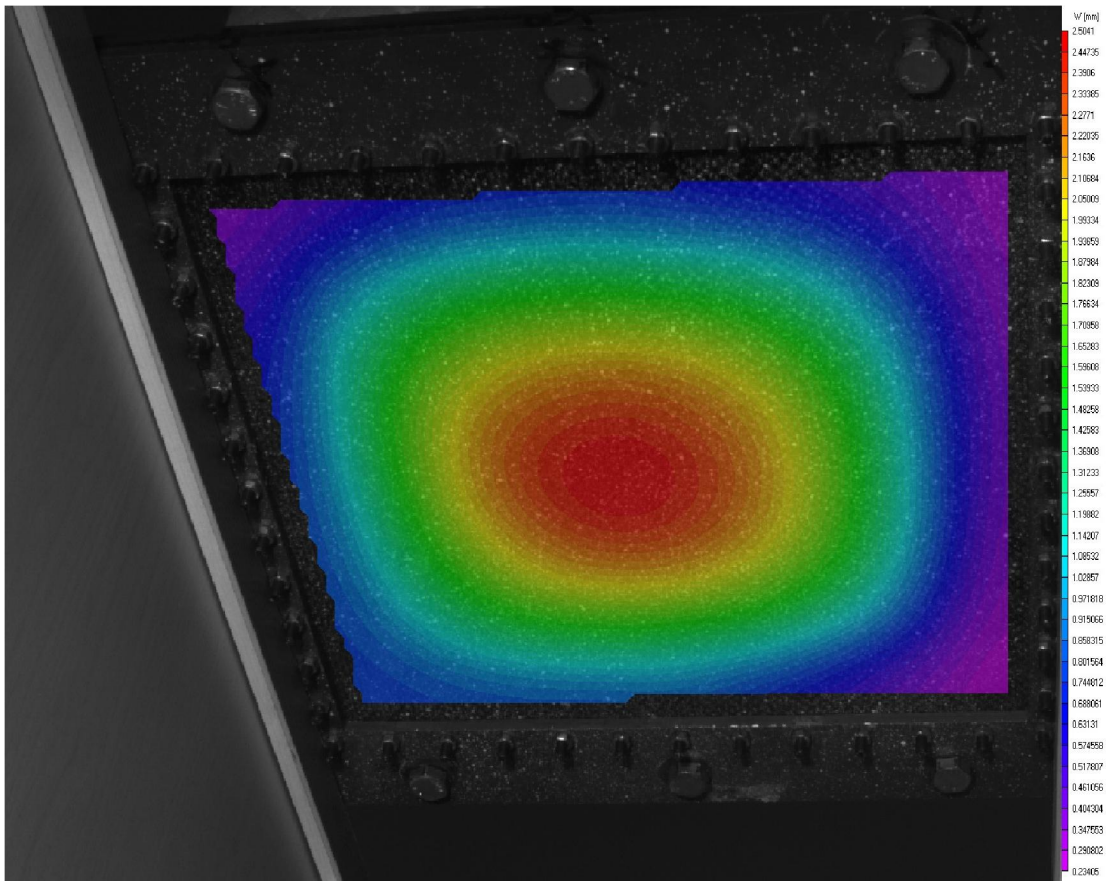
Şekil 5.16: Plağın 450 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



Şekil 5.17: Plağın 450 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)



Şekil 5.18: Plağın 500 N yük altındaki sehimi (Sonlu Eleman Sonucu)



Şekil 5.19: Plağın 500 N yük altındaki sehimi (Deney Sonucu)

Farklı yükleme şartları için geometrik olarak doğrusal olmayış etkilerini göstermek için doğrusal ve doğrusal olmayan analizlerden elde edilen plak orta noktası çökme değerleri karşılaştırmalı olarak Çizelge 5.1'de verilmiştir. Sonuçların değerlendirilmesinden belirli plak kalınlığına göre küçük olan sehimler için küçük yer değiştirme teorisini kullanmanın mümkün olduğu; ancak daha büyük sehim seviyeleri için küçük yer değiştirme teorisinin sehimlerin hesaplanmasında yetersiz kaldığı ve büyük yer değiştirme teorisinin kullanılması gerektiği görülmektedir. Yani plak davranışını ifade ederken plağın sehim seviyesine dikkat etmenin ve büyük sehimler için mutlaka doğrusal olmayan davranışı hesaba katan von Karman plak teorisi gibi bir modelle çözüm yapmanın gerekliliği açıkça görülmektedir. Doğrusal yaklaşım yapıldığında plak yer değiştirmelerinin gerçekteki değerlerden daha büyük olarak elde edildiği görülmektedir. Çünkü bu plak modelinde düzlem içi direngenlikler ve doğrusal olmayan direngenlikler hesaba katılmamaktadır. Halbuki bu direngenlikler büyük sehimler için plağın doğrusal eğilme direngenliğine göre önemli mertebede olmaktadırlar, Çizelge 5.1.

Çizelge 5.2 : Plağın orta noktasının çökmesinin yükle değişimi, (Nastran)

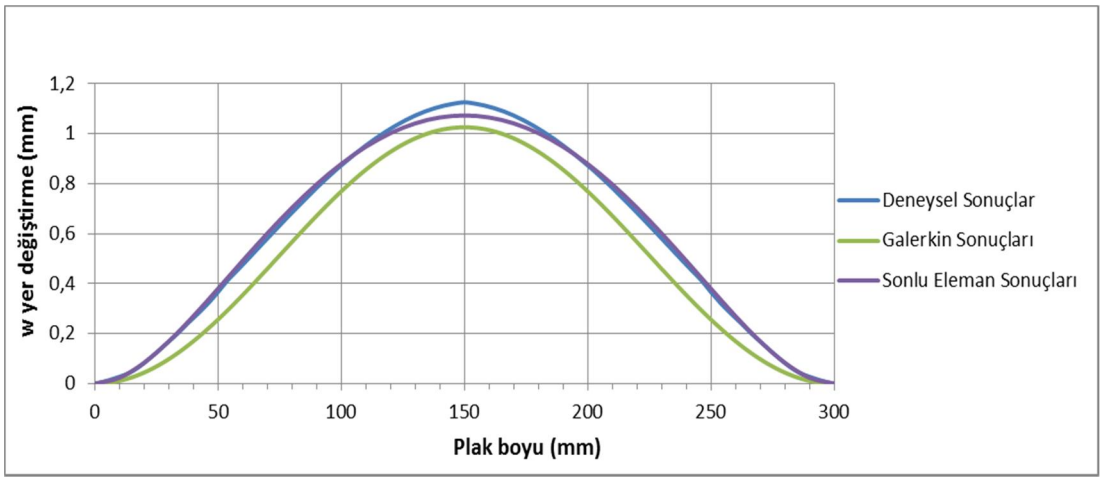
Yük (N)	En Büyük Çökme (mm)		
	Büyük Yer Değiştirme	Küçük Yer Değiştirme	Fark(%)
50	0,65154	0,74376	14,15
100	1,07294	1,49862	39,67
150	1,36625	2,23354	63,48
200	1,58388	2,97028	87,53
250	1,77714	3,72687	109,71
300	1,92637	4,46503	131,78
350	2,07344	5,20048	150,81
400	2,19648	5,95355	171,05
450	2,30977	6,69056	189,66
500	2,40295	7,43772	209,52

Ayrıca bu sonuçlarla beraber plak orta çizgisi boyunca x doğrultusunda çökme ve ε_x normal gerinim sonuçları elde edilmiş ve 5.3 kısmında elde edilen Galerkin yaklaşık çözüm sonuçları ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

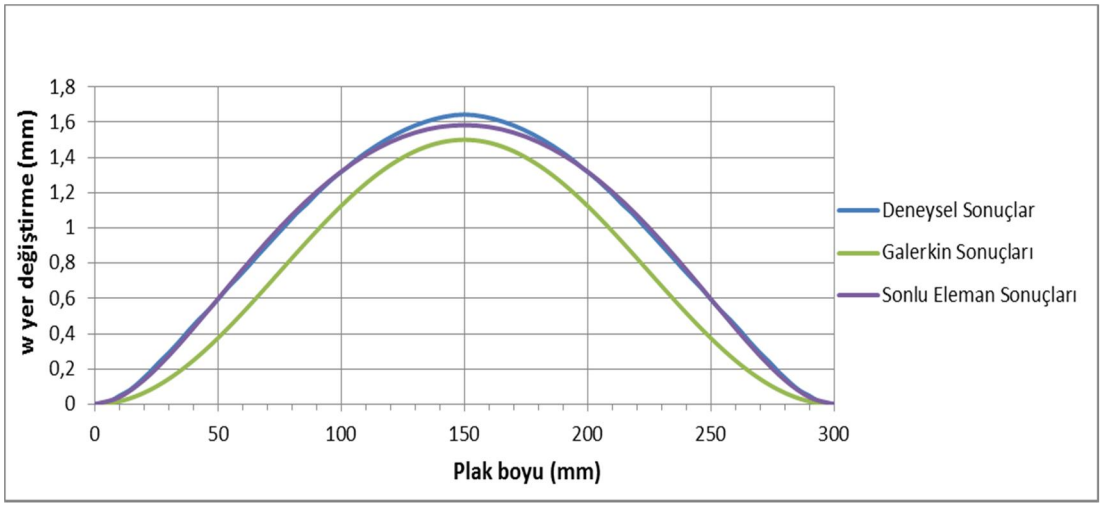
5.3 Galerkin yaklaşık çözüm sonuçları

Galerkin yaklaşık çözüm sonuçları daha önce belirtildiği üzere ankastre mesnetli plak için belirlenen, sınır şartlarına göre seçimi yapılan yaklaşım fonksiyonlarının beş farklı çeşidi ile bulunan sonuçlardır. Bu sonuçlar sırasıyla; u^0, v^0, w^0 bir terim kullanılarak elde edilen yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını, u^0 ve v^0 için bir terim, w^0 için, doğrusal olmayıştan kaynaklanan deformasyon biçimini elde edebilmek amacıyla, iki terim alınan yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını ve son olarak çözüm fonksiyonunun bölge içindeki değişiminin de mümkün mertebe sağlanması amacıyla u^0 ve v^0 için yine bir terim, w^0 fonksiyonu için ise belirlenen k=0.1, k=0.2 ve k=0.3 katsayılı tek terim yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını kapsamaktadır.

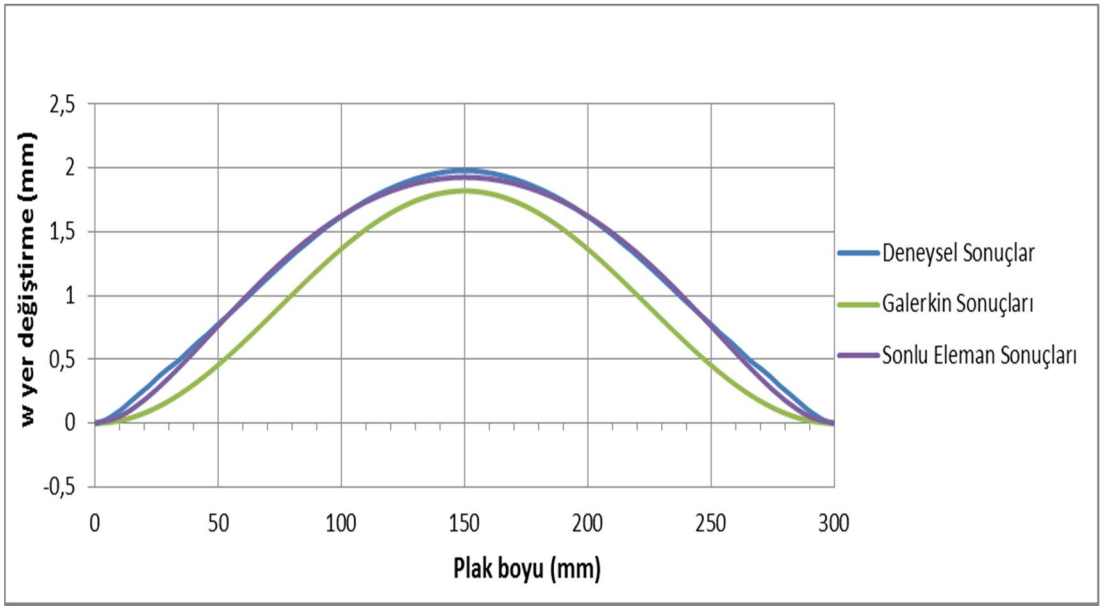
Şekil 5.20 – Şekil 5.44'te 100 N'dan 500 N'a kadar 100'er N artışlarla çeşitli yükler için plak ortasından geçen yatay çizgi boyunca w çökme değerlerinin değişimi için sonuçlar verilmiş, son olarak sonlu eleman analizinden ve Galerkin yaklaşık çözümünden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.



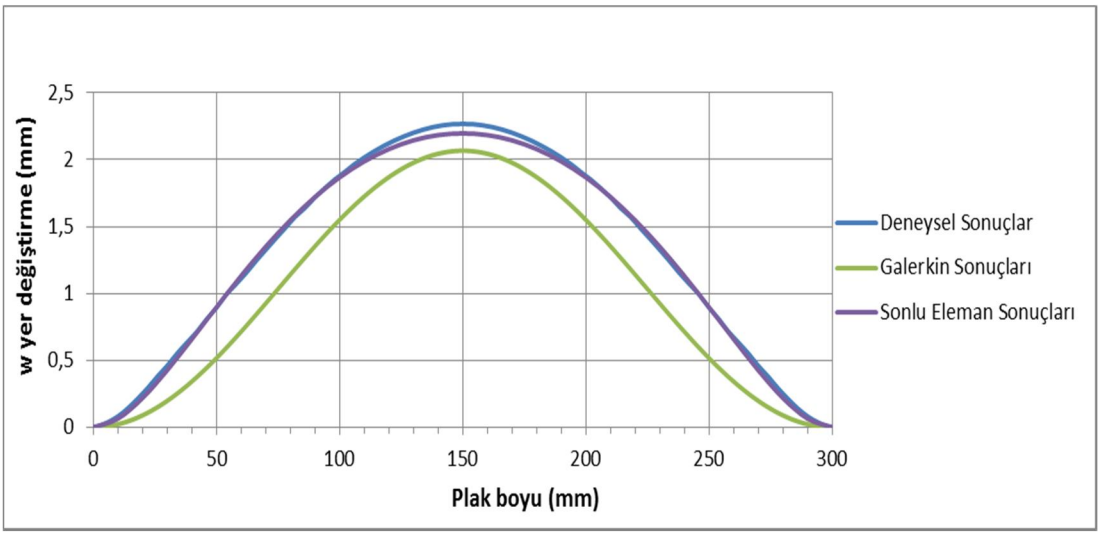
Şekil 5.20 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.



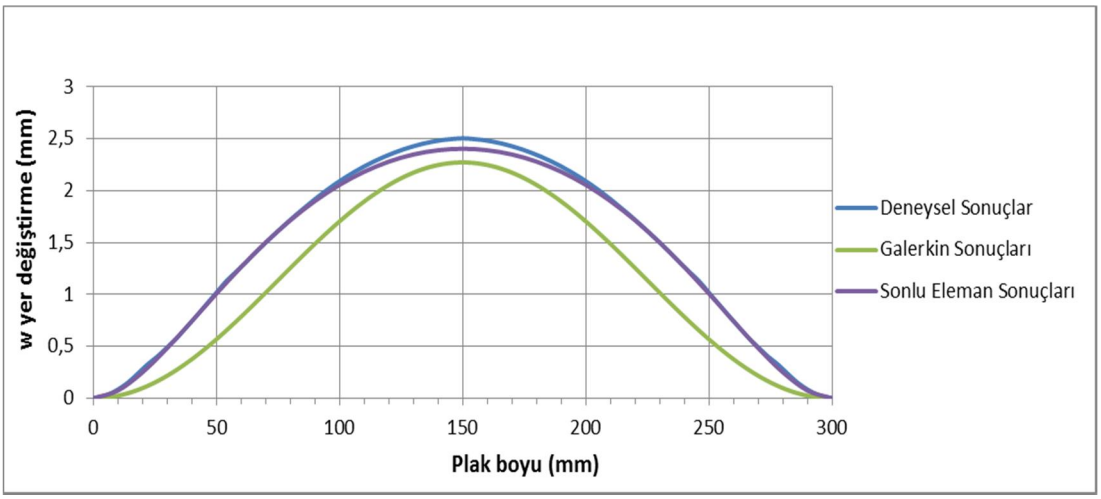
Şekil 5.21 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.



Şekil 5.22 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.



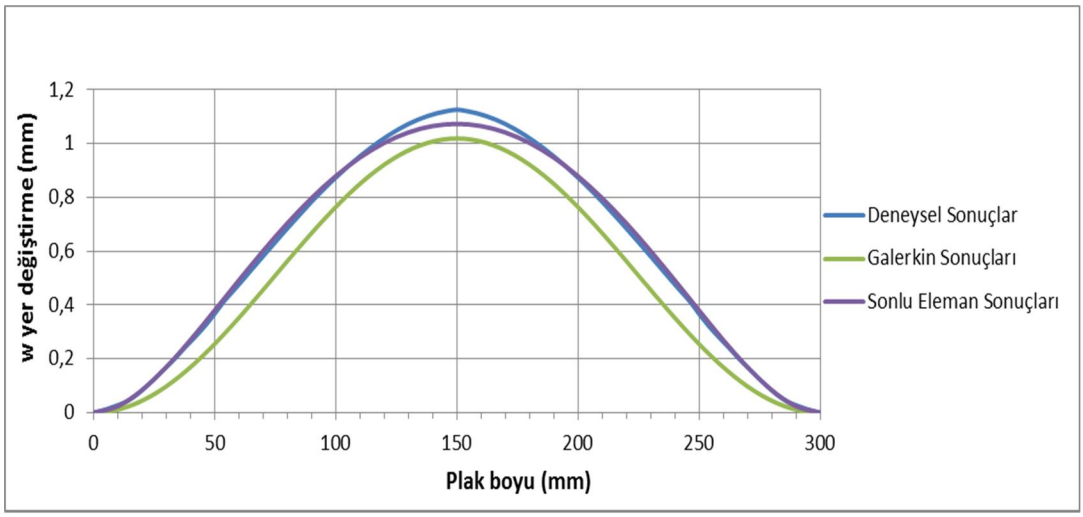
Şekil 5.23 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.



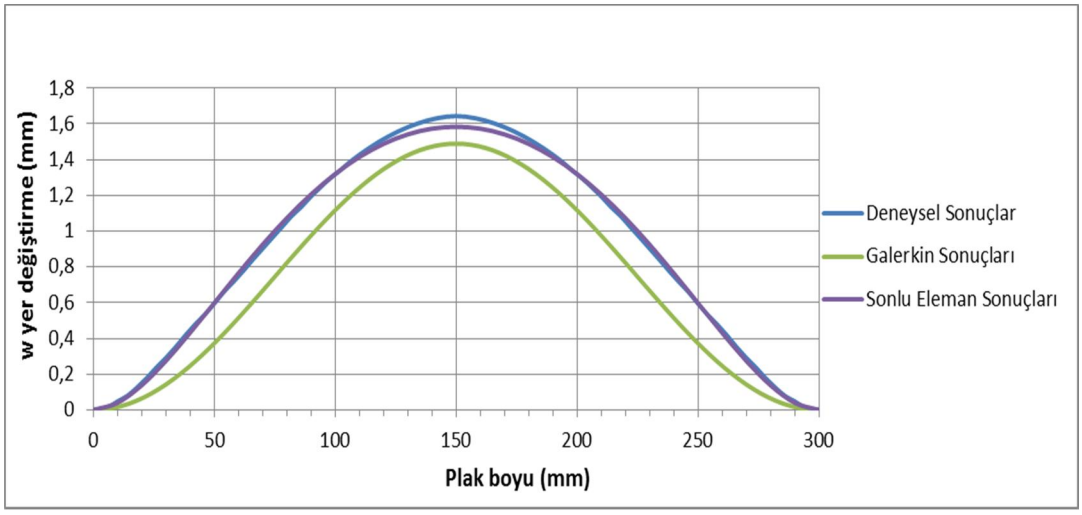
Şekil 5.24 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v-w bir terim.

Çizelge 5.3 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim.

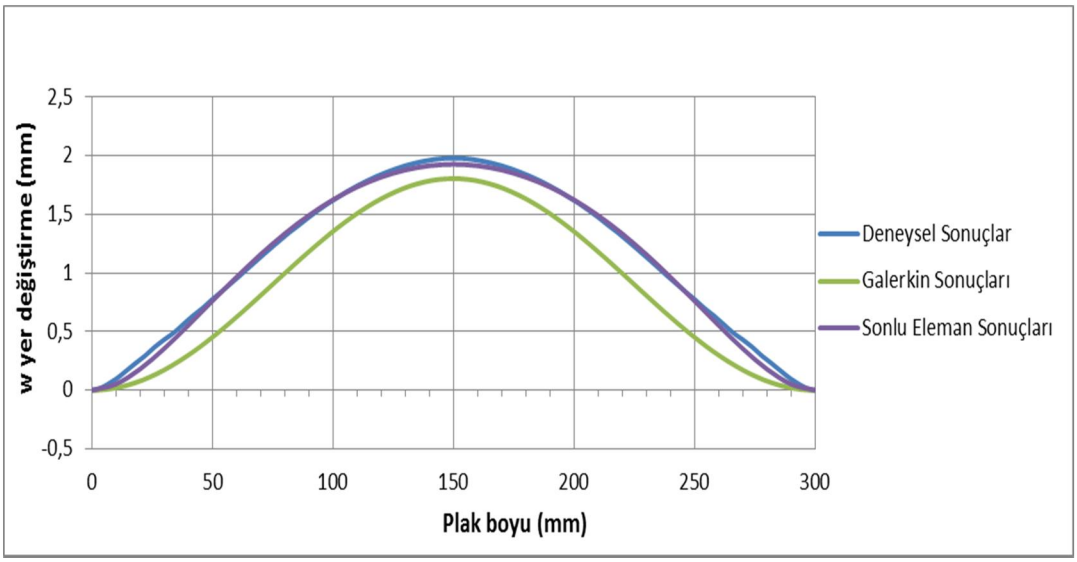
Yük (N)	FEA Sonuçları(mm)		Deneysel Sonuçlar (mm)	Galerkin Sonuçları (mm)	Hata Oranı (%)		
	Doğrusal Olmayan	Doğrusal			Deneysel-FEA	FEA - Galerkin	Deneysel-Galerkin
50	0,65	0,74	-	0,64	-	1,54	-
100	1,07	1,49	1,13	1,03	5,31	3,74	8,85
150	1,37	2,23	1,42	1,29	3,52	5,84	9,15
200	1,58	2,97	1,64	1,5	3,66	5,06	8,54
250	1,78	3,72	1,83	1,67	2,73	6,18	8,74
300	1,93	4,46	1,98	1,82	2,53	5,70	8,08
350	2,07	5,2	2,13	1,95	2,82	5,80	8,45
400	2,2	5,95	2,27	2,07	3,08	5,91	8,81
450	2,31	6,69	2,38	2,17	2,94	6,06	8,82
500	2,4	7,43	2,5	2,27	4,00	5,42	9,20



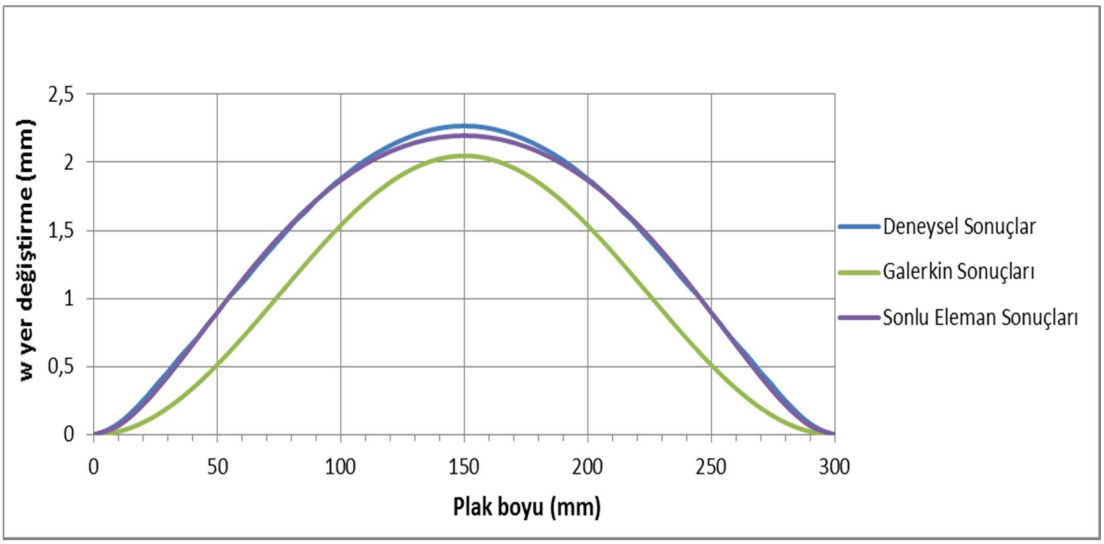
Şekil 5.25 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.



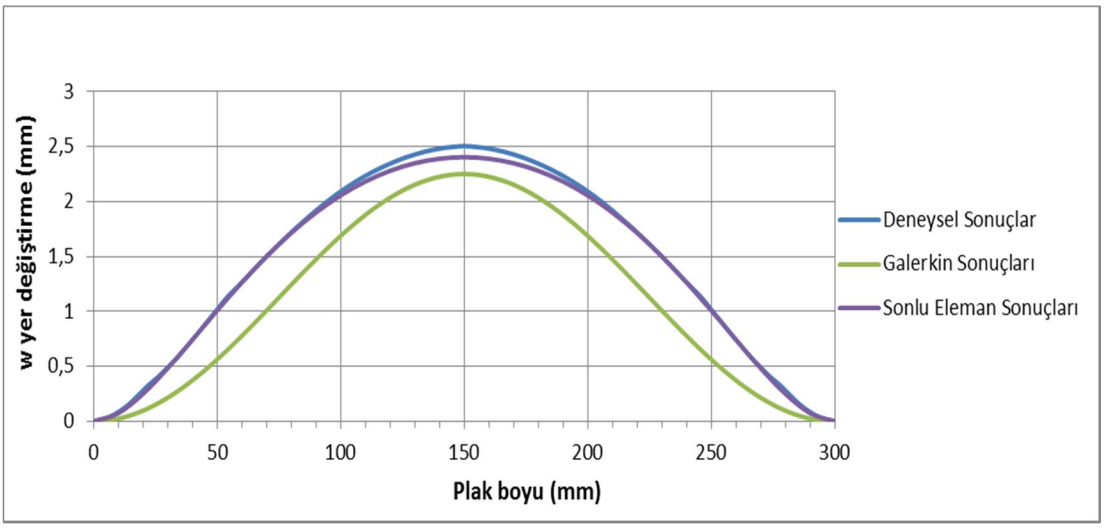
Şekil 5.26 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.



Şekil 5.27 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.



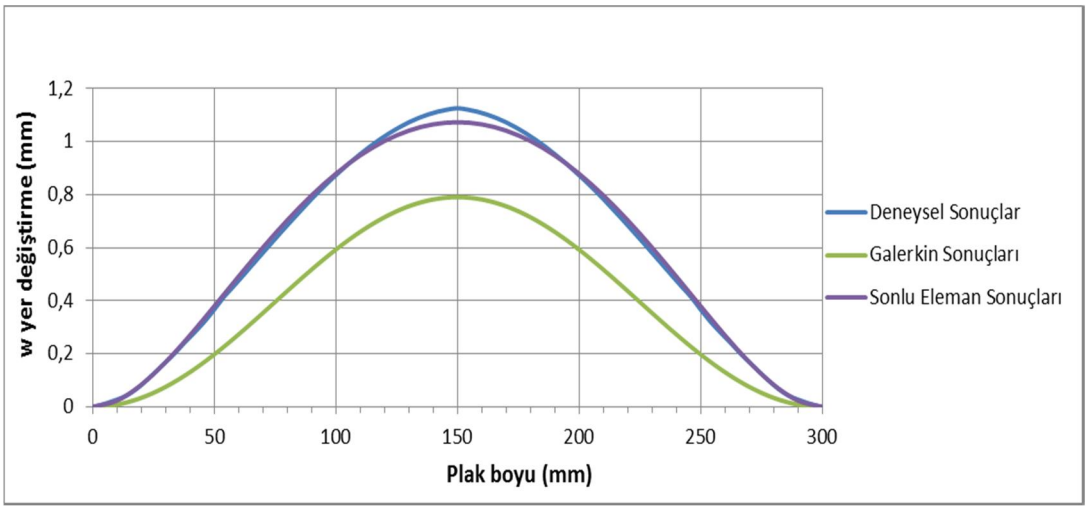
Şekil 5.28 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi (u-v bir, w iki terim)



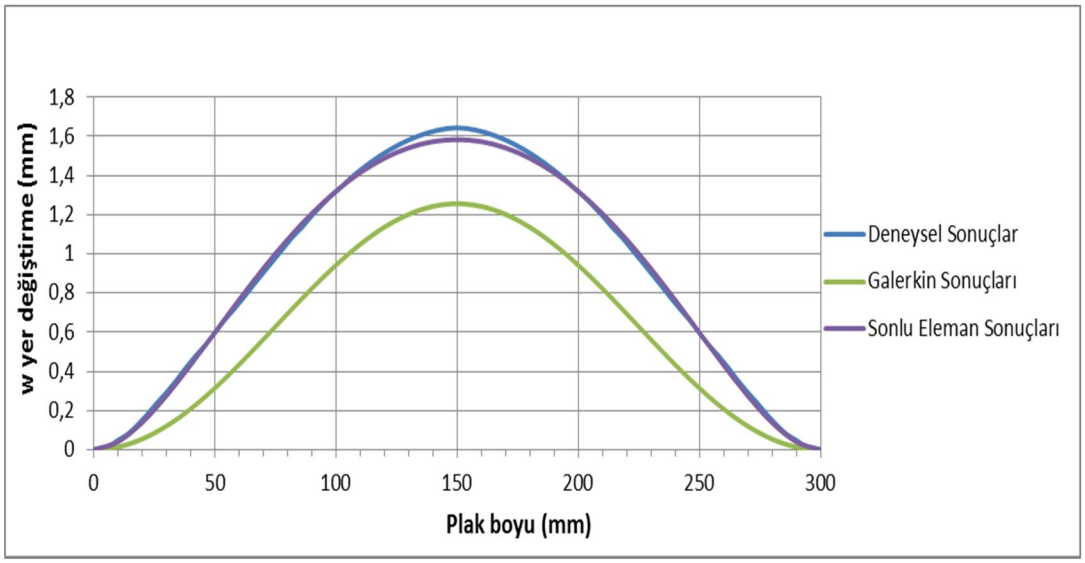
Şekil 5.29 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi, u-v bir, w iki terim.

Çizelge 5.4 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v bir, w iki terim.

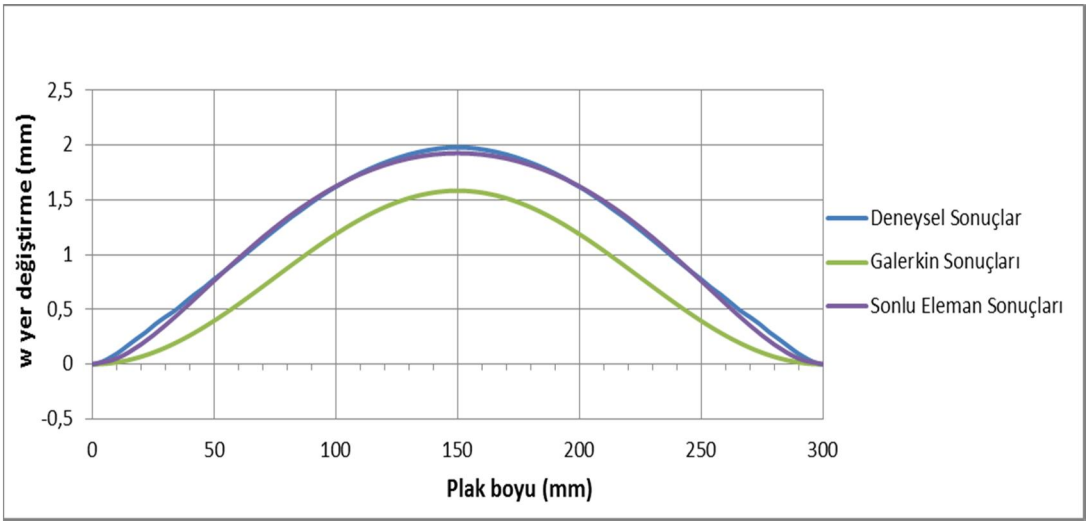
Yük (N)	FEA Sonuçları(mm)		Deneysel Sonuçlar (mm)	Galerkin Sonuçları (mm)	Hata Oranı (%)		
	Doğrusal Olmayan	Doğrusal			Deneysel-FEA	FEA - Galerkin	Deneysel-Galerkin
50	0,65	0,74	-	0,63	-	3,08	-
100	1,07	1,49	1,13	1,02	5,31	4,67	9,73
150	1,37	2,23	1,42	1,28	3,52	6,57	9,86
200	1,58	2,97	1,64	1,49	3,66	5,70	9,15
250	1,78	3,72	1,83	1,66	2,73	6,74	9,29
300	1,93	4,46	1,98	1,8	2,53	6,74	9,09
350	2,07	5,2	2,13	1,93	2,82	6,76	9,39
400	2,2	5,95	2,27	2,05	3,08	6,82	9,69
450	2,31	6,69	2,38	2,15	2,94	6,93	9,66
500	2,4	7,43	2,5	2,25	4,00	6,25	10,00



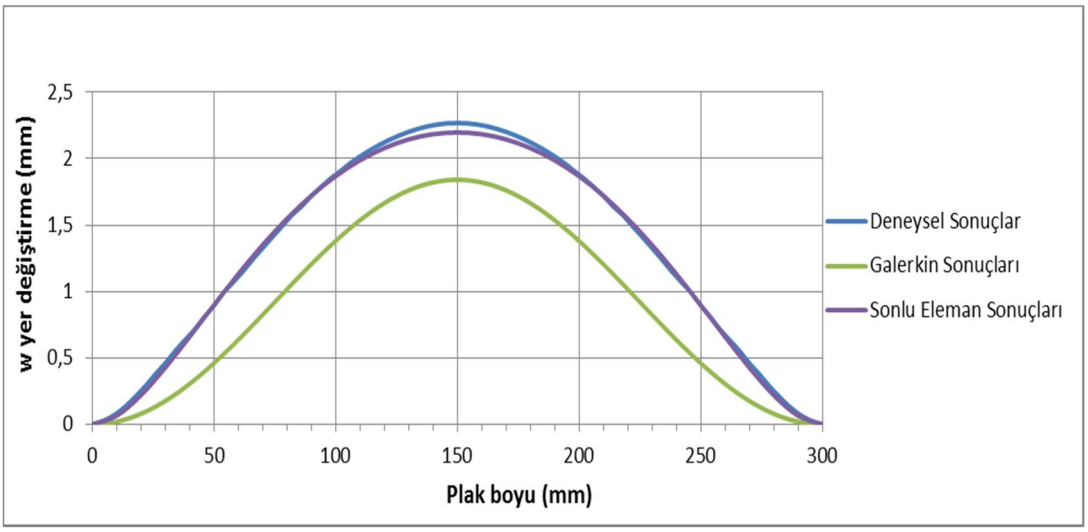
Şekil 5.30 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.1



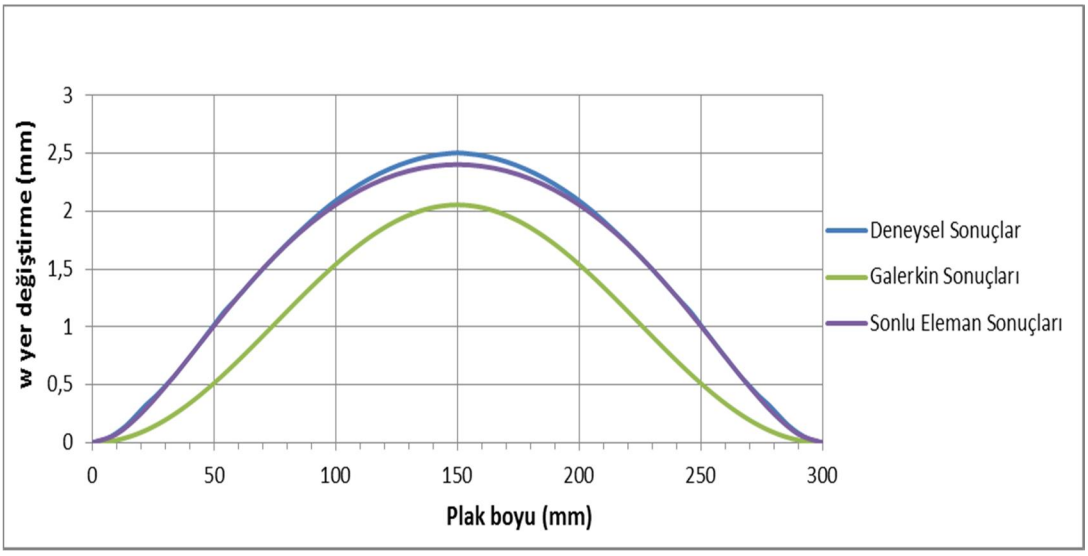
Şekil 5.31 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.1



Şekil 5.32 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.1



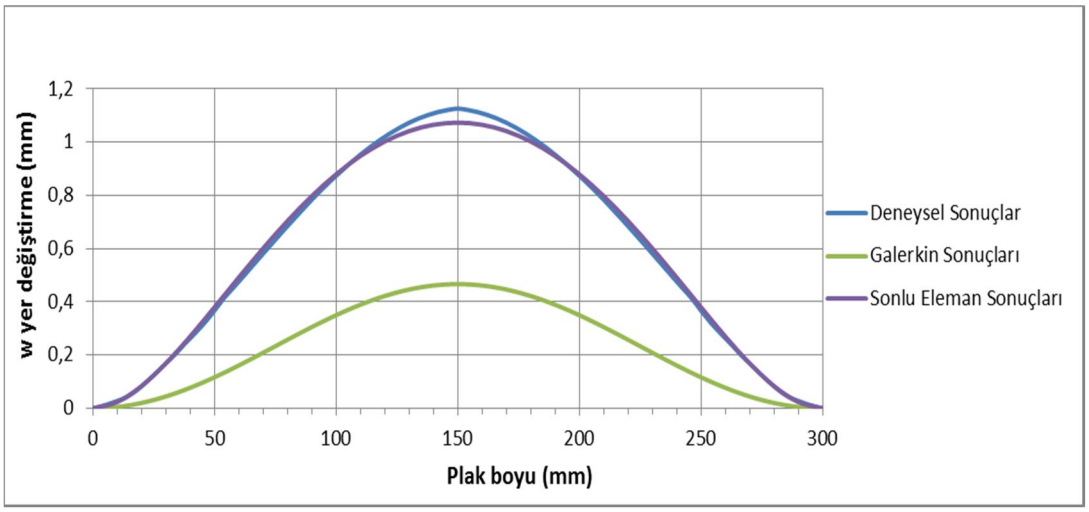
Şekil 5.33 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.1



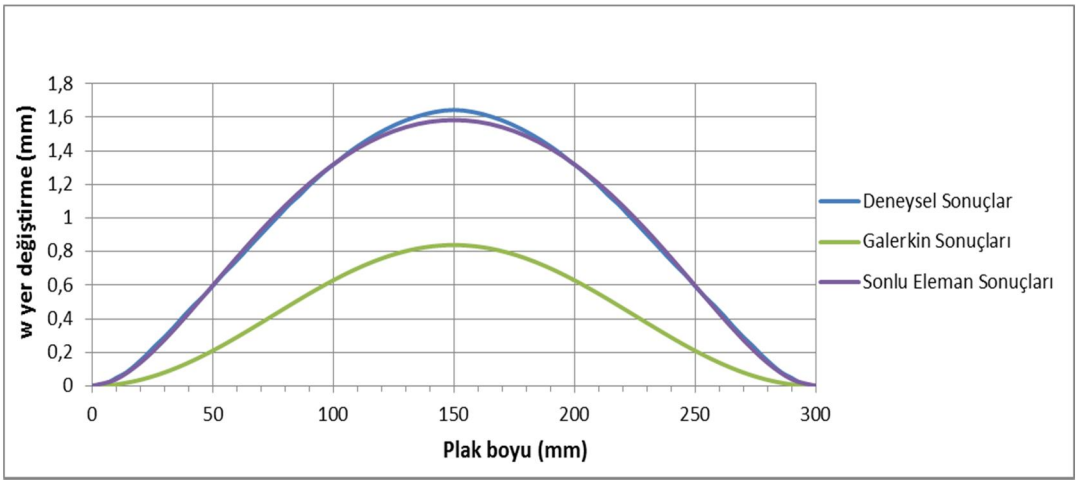
Şekil 5.34 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.1

Çizelge 5.5 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim, k=0.1.

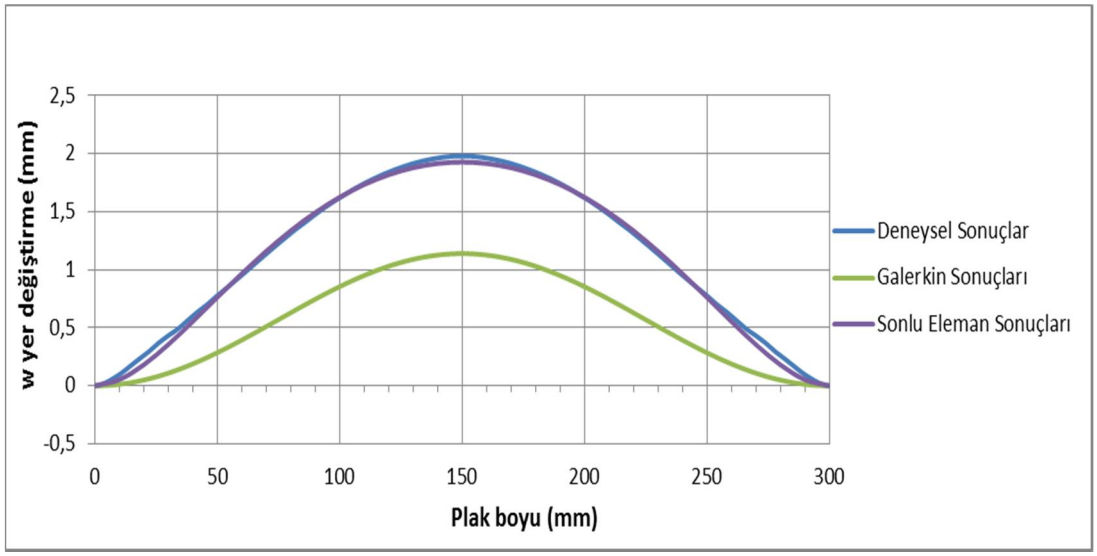
Yük (N)	FEA Sonuçları(mm)		Deneysel Sonuçlar (mm)	Galerkin Sonuçları (mm)	Hata Oranı (%)		
	Doğrusal Olmayan	Doğrusal			Deneysel-FEA	FEA - Galerkin	Deneysel-Galerkin
50	0,65	0,74	-	0,45	-	30,77	-
100	1,07	1,49	1,13	0,79	5,31	26,17	30,09
150	1,37	2,23	1,42	1,05	3,52	23,36	26,06
200	1,58	2,97	1,64	1,26	3,66	20,25	23,17
250	1,78	3,72	1,83	1,43	2,73	19,66	21,86
300	1,93	4,46	1,98	1,58	2,53	18,13	20,20
350	2,07	5,2	2,13	1,72	2,82	16,91	19,25
400	2,2	5,95	2,27	1,84	3,08	16,36	18,94
450	2,31	6,69	2,38	1,95	2,94	15,58	18,07
500	2,4	7,43	2,5	2,05	4,00	14,58	18,00



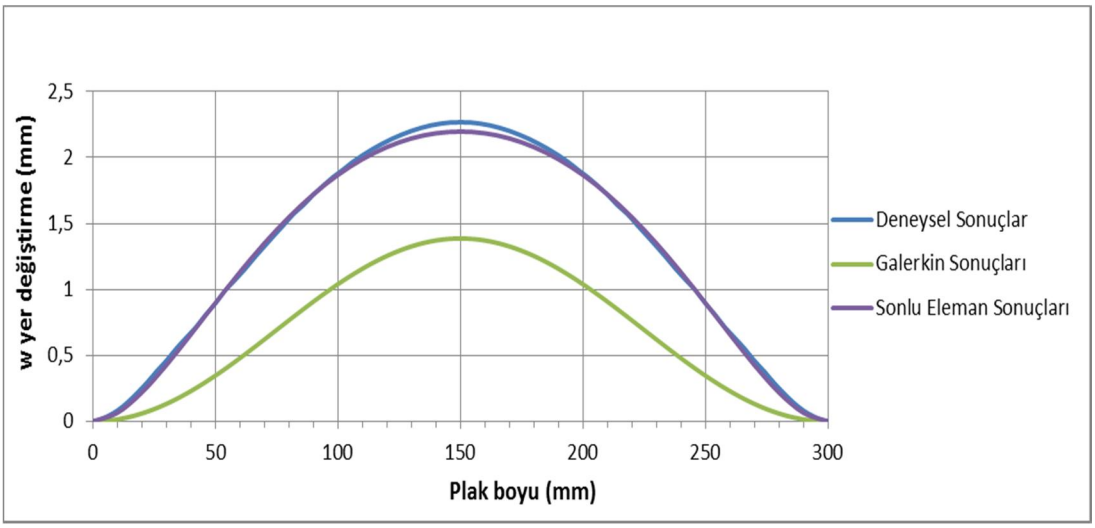
Şekil 5.35 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.2



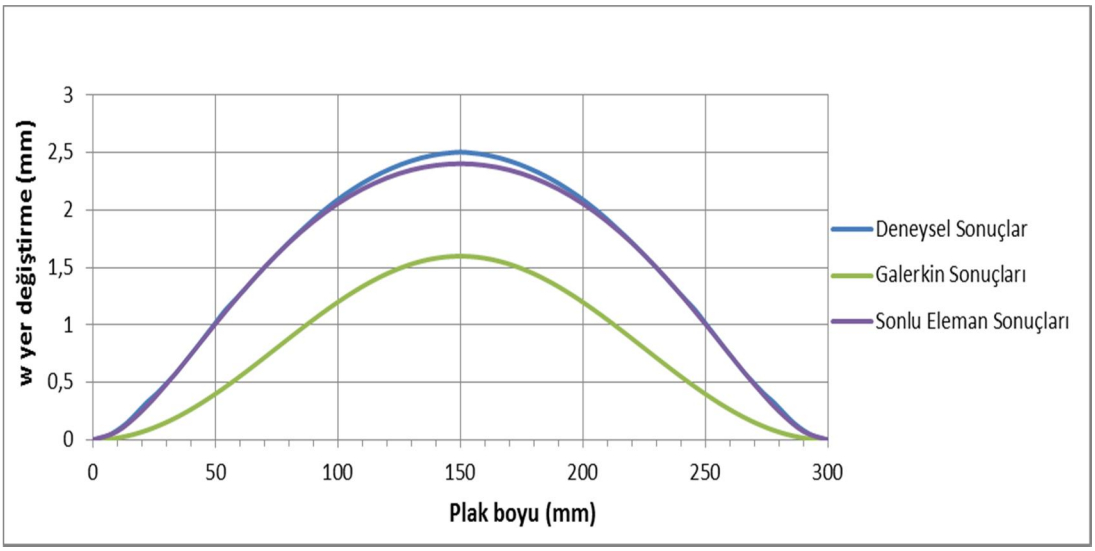
Şekil 5.36 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.2



Şekil 5.37 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.2



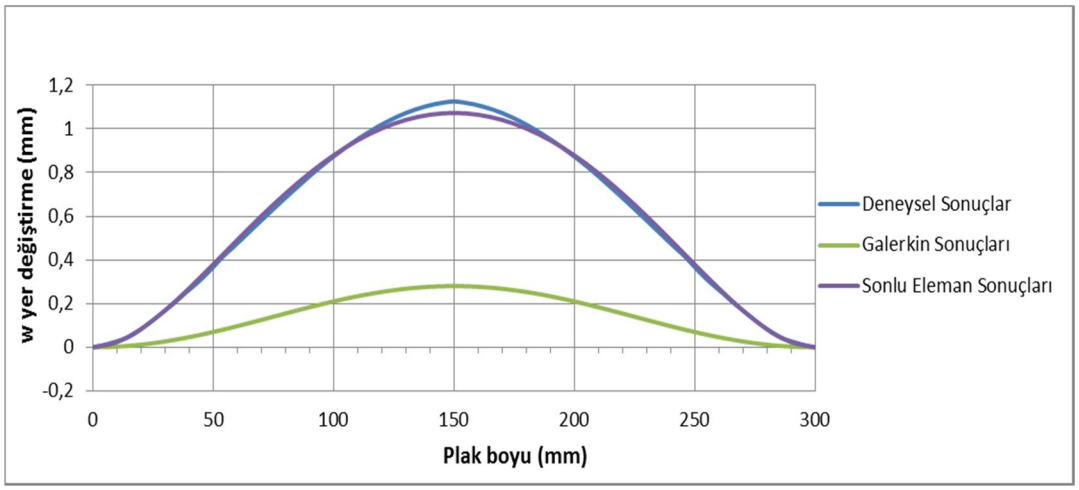
Şekil 5.38 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.2



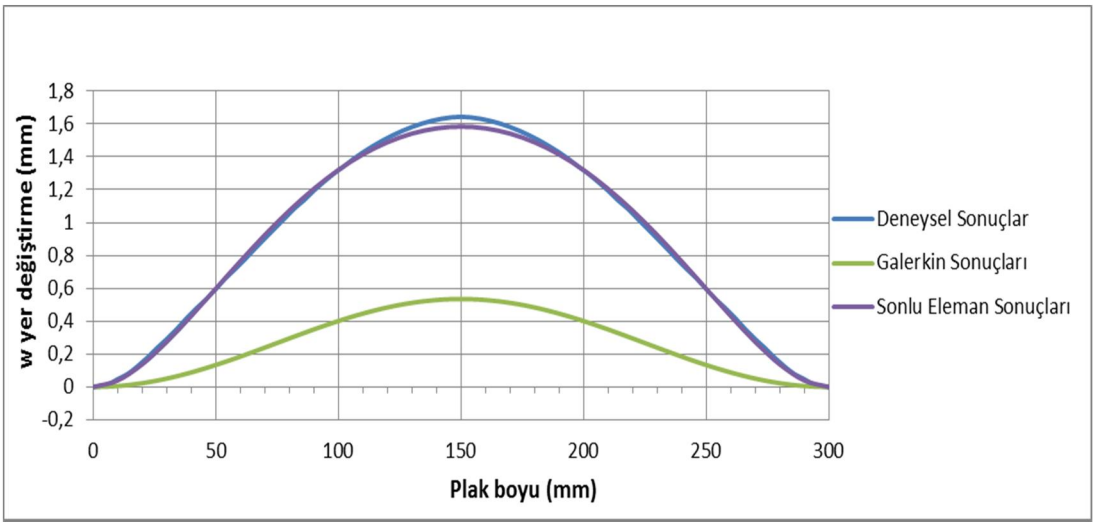
Şekil 5.39 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.2

Çizelge 5.6 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w bir terim, k=0.2.

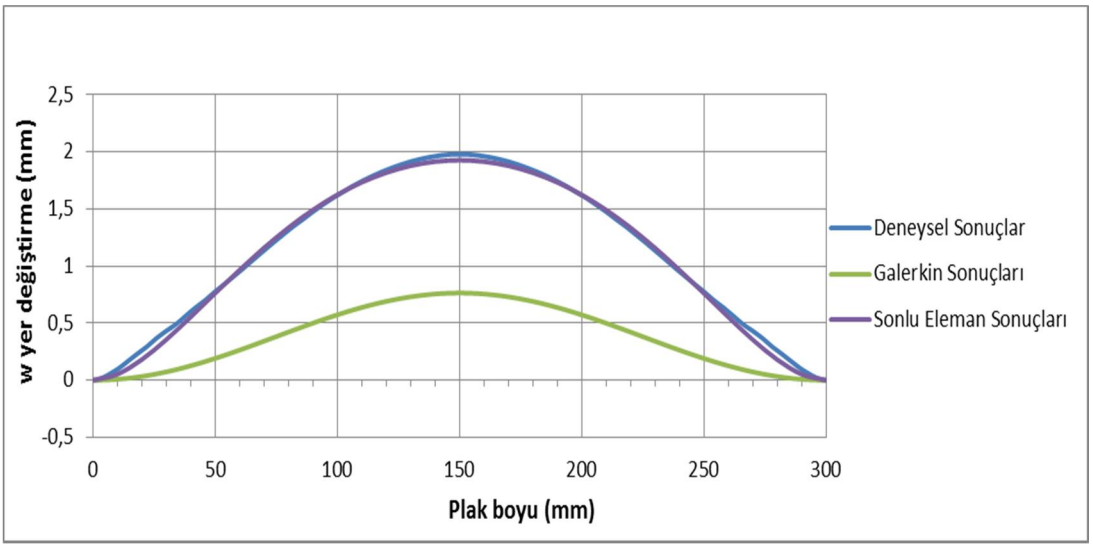
Yük (N)	FEA Sonuçları(mm)		Deneysel Sonuçlar (mm)	Galerkin Sonuçları (mm)	Hata Oranı (%)		
	Doğrusal Olmayan	Doğrusal			Deneysel-FEA	FEA - Galerkin	Deneysel-Galerkin
50	0,65	0,74	-	0,25	-	61,54	-
100	1,07	1,49	1,13	0,47	5,31	56,07	58,41
150	1,37	2,23	1,42	0,66	3,52	51,82	53,52
200	1,58	2,97	1,64	0,84	3,66	46,84	48,78
250	1,78	3,72	1,83	0,99	2,73	44,38	45,90
300	1,93	4,46	1,98	1,14	2,53	40,93	42,42
350	2,07	5,2	2,13	1,27	2,82	38,65	40,38
400	2,2	5,95	2,27	1,39	3,08	36,82	38,77
450	2,31	6,69	2,38	1,5	2,94	35,06	36,97
500	2,4	7,43	2,5	1,6	4,00	33,33	36,00



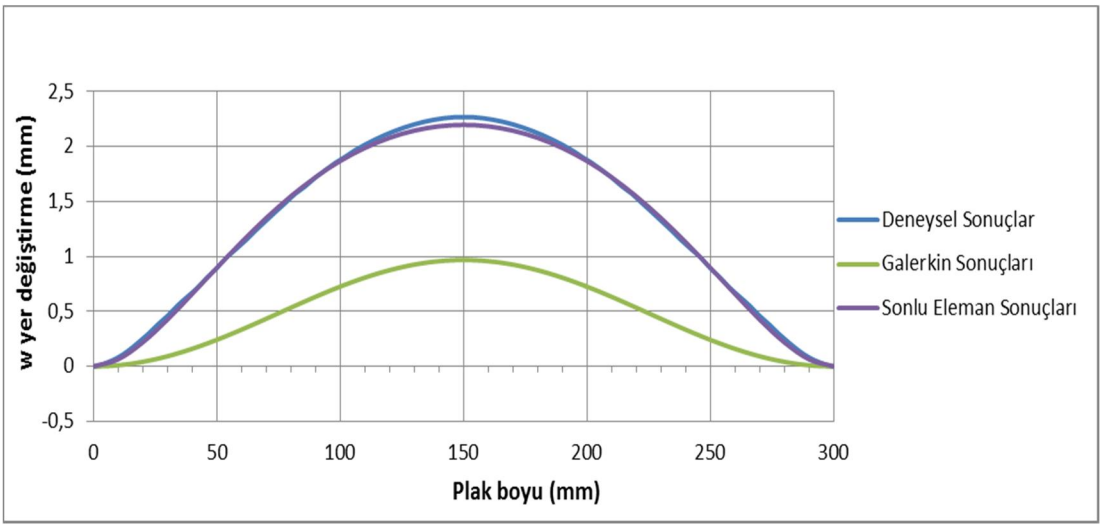
Şekil 5.40 : 100 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.3



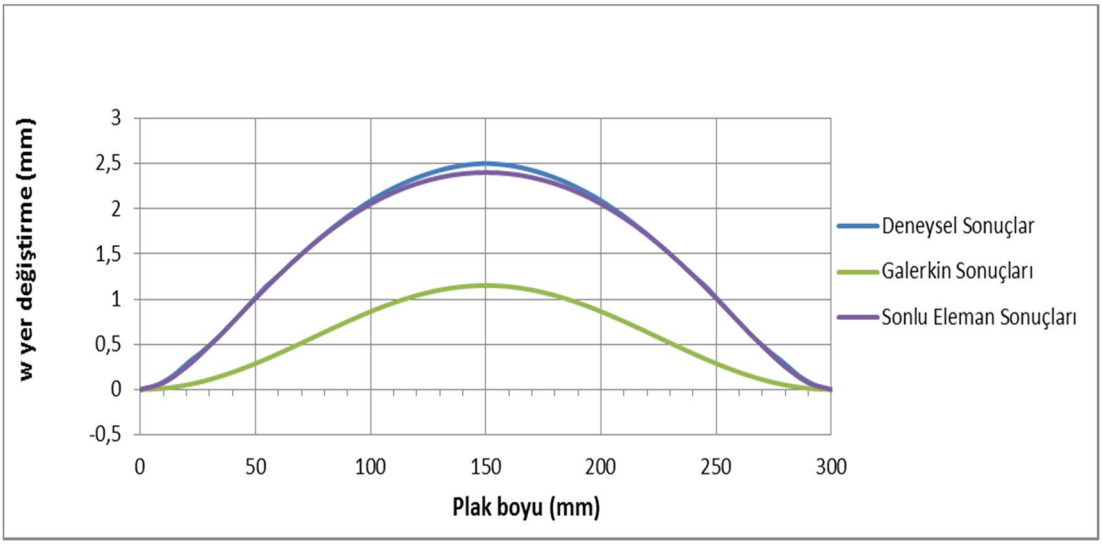
Şekil 5.41 : 200 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.42 : 300 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.43 : 400 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.44 : 500 N yük etkisi altında plağın yer değiştirmesi,u-v-w bir terim, k=0.3

Çizelge 5.7 : Sehim sonuçlarının karşılaştırılması, u-v-w birterim, k=0.3.

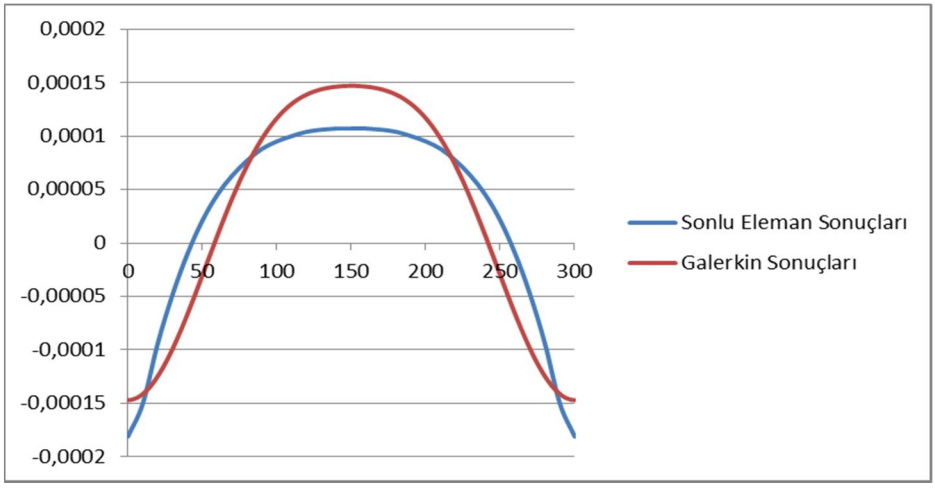
Yük (N)	FEA Sonuçları(mm)		Deneysel Sonuçlar (mm)	Galerkin Sonuçları (mm)	Hata Oranı (%)		
	Doğrusal Olmayan	Doğrusal			Deneysel-FEA	FEA - Galerkin	Deneysel-Galerkin
50	0,65	0,74	-	0,14	-	78,46	-
100	1,07	1,49	1,13	0,28	5,31	73,83	75,22
150	1,37	2,23	1,42	0,41	3,52	70,07	71,13
200	1,58	2,97	1,64	0,54	3,66	65,82	67,07
250	1,78	3,72	1,83	0,65	2,73	63,48	64,48
300	1,93	4,46	1,98	0,76	2,53	60,62	61,62
350	2,07	5,2	2,13	0,87	2,82	57,97	59,15
400	2,2	5,95	2,27	0,97	3,08	55,91	57,27
450	2,31	6,69	2,38	1,06	2,94	54,11	55,46
500	2,4	7,43	2,5	1,15	4,00	52,08	54,00

5.4 Sonlu Eleman Analizi ve Galerkin Gerinim Sonuçları

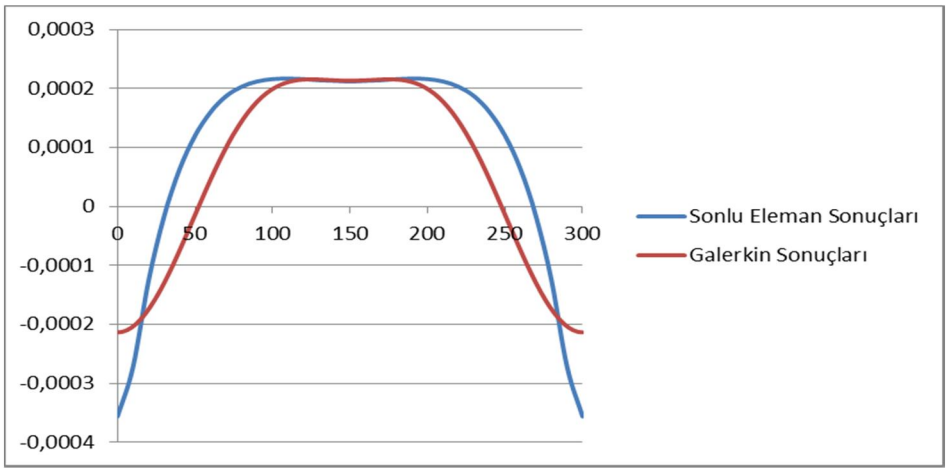
Önerilen bir terimli çökme fonksiyonunun deneysel sonuçlara daha iyi uyumunu sağlayacak bir deneme fonksiyonu sonuçlarda daha iyi bir yakınsama olmasını sağlamıştır. Çok terim alınması bu tür doğrusal olmayan ve bağlı denklemlerin analitik çözümünü pratik olmaktan çıkaran çok sayıda terimle sonuçlandırabileceği gibi daha iyi sonuç elde etmekte mümkün olabilmektedir. Ancak, bir terim çözümlerinde sadece geometrik sınır şartlarının sağlanması sağlıklı çözümler elde etmek için yeterli olmayabileceği düşüncesiyle iki terimli çözümlerde sonuçlar karşılaştırılmış ve istenen yakınsama sağlanamamakla beraber daha iyi bir yakınsama elde edilmiştir.

Gerinim sonuçları, sehim sonuçlarında kullanılan, aynı şekilde sınır şartlarına göre seçimi yapılan yaklaşım fonksiyonlarının beş farklı çeşidinden elde edilen sonuçlar bu bölümde ele alınmıştır. Bu sonuçlar sırasıyla; u^0, v^0, w^0 bir terim kullanılarak elde edilen yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını, u^0 ve v^0 için bir terim, w^0 için iki terim alınan yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını ve son olarak çözüm fonksiyonunun bölge içindeki değişiminin de mümkün mertebe sağlanması amacıyla u^0 ve v^0 için yine bir terim, w^0 fonksiyonu için ise belirlenen k=0.1, k=0.2 ve k=0.3 katsayılı tek terim yaklaşım fonksiyonlarının sonuçlarını kapsamaktadır.

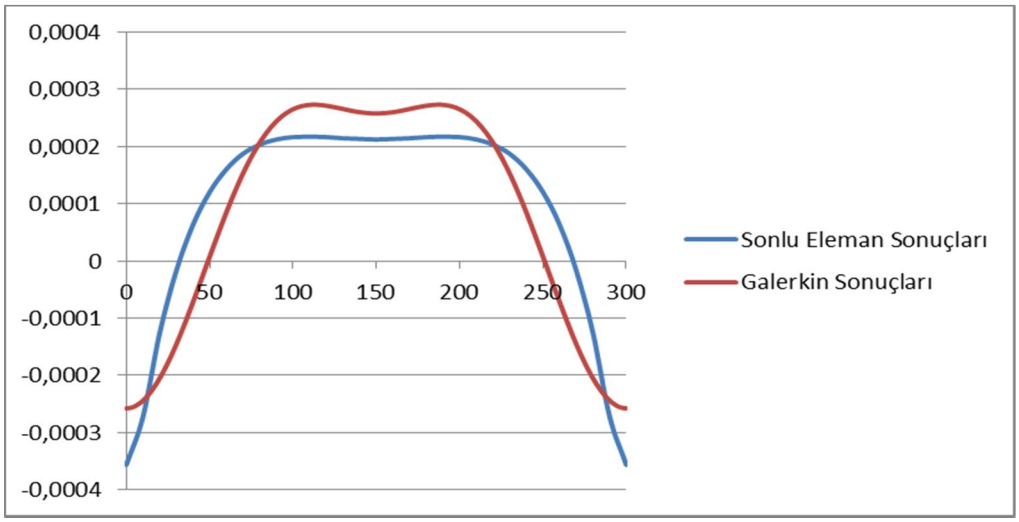
Şekil 5.45-Şekil 5.69'da 100 N'dan 500 N'a kadar 100'er N artışlarla çeşitli yükler için plak ortasından geçen yatay çizgi boyunca gerinim değerlerinin değişimi için sonuçlar verilmiş, son olarak sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.



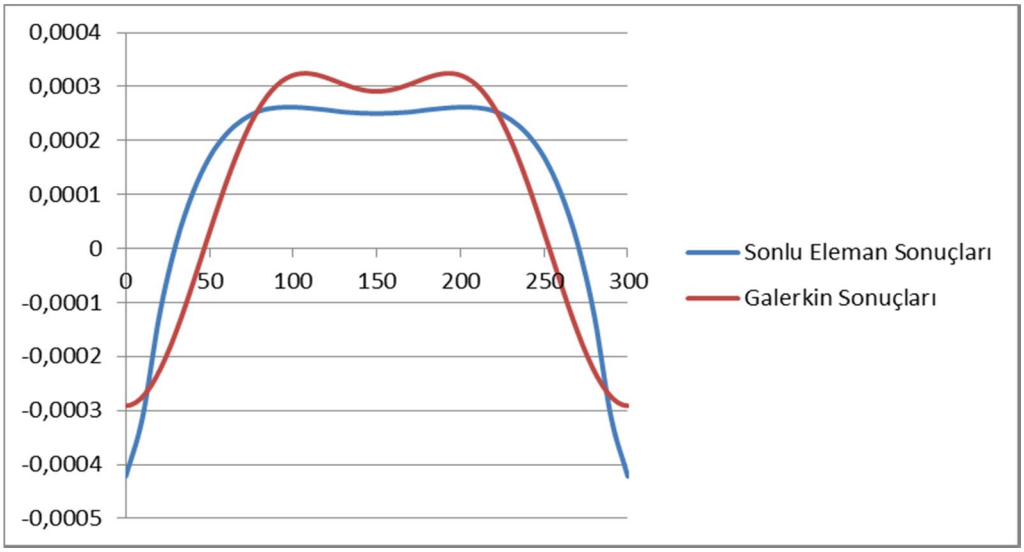
Şekil 5.45 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim.



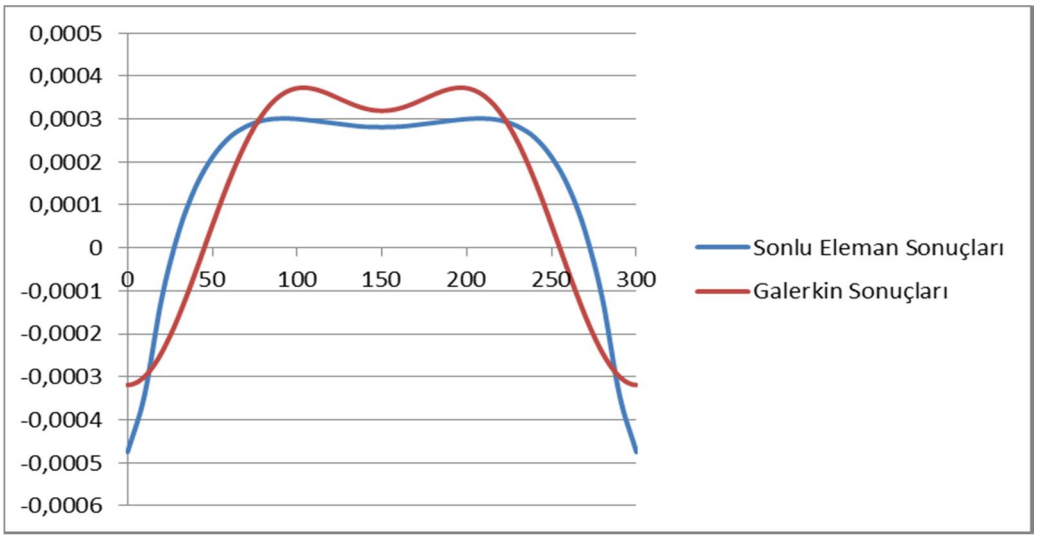
Şekil 5.46 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim.



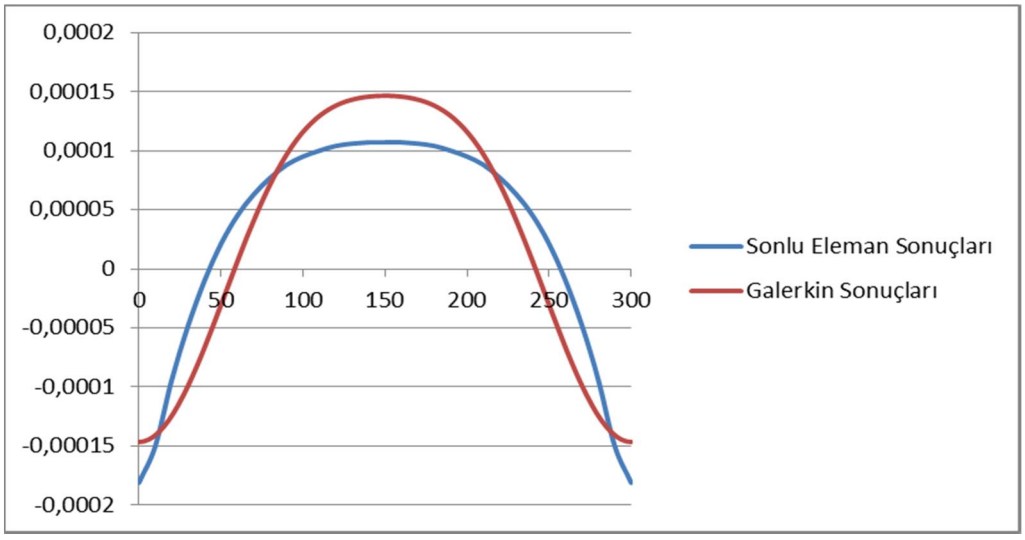
Şekil 5.47 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim.



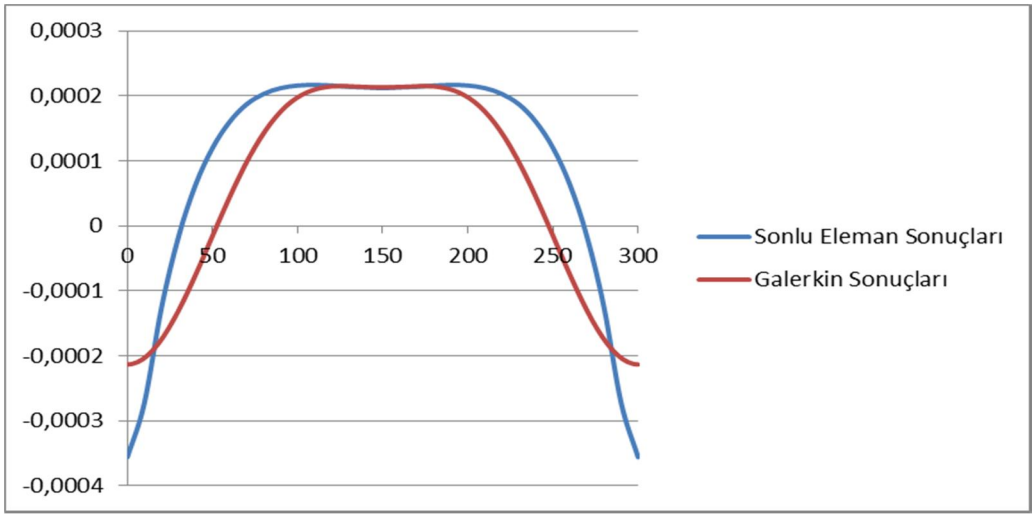
Şekil 5.48 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim.



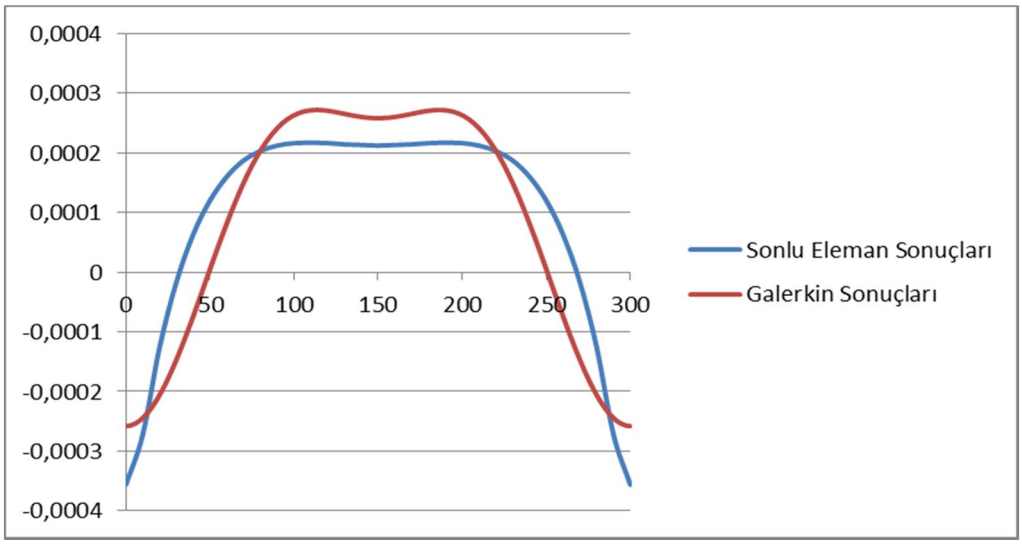
Şekil 5.49 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim.



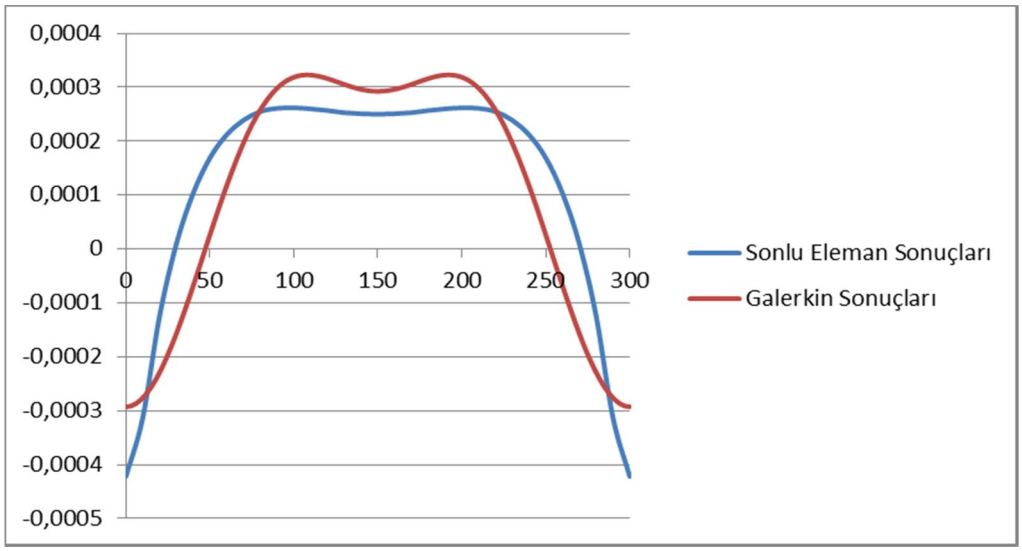
Şekil 5.50 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.



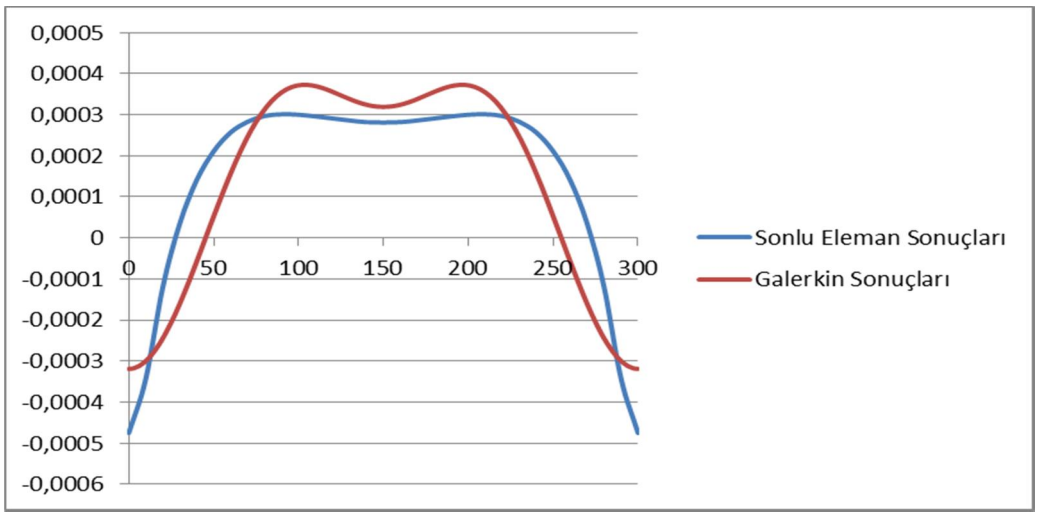
Şekil 5.51 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.



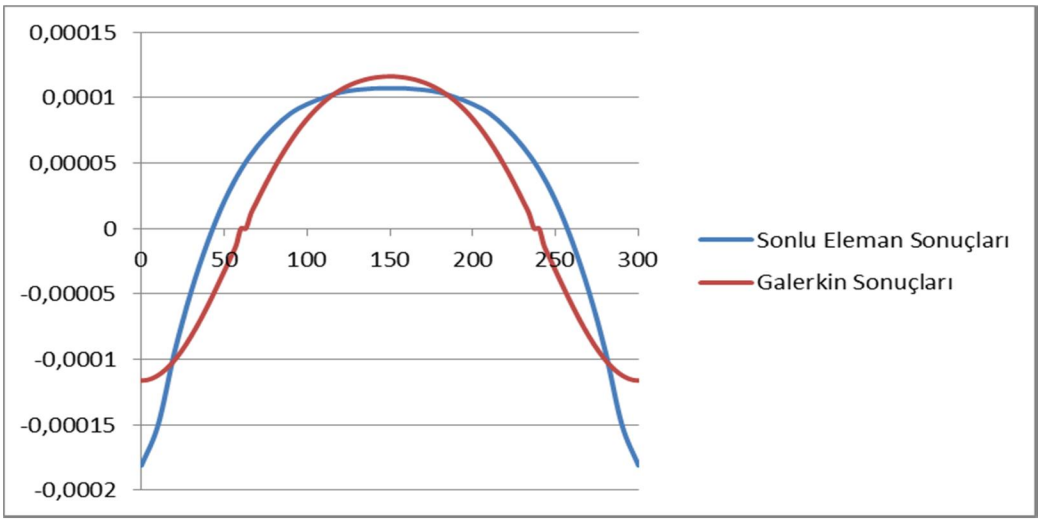
Şekil 5.52 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.



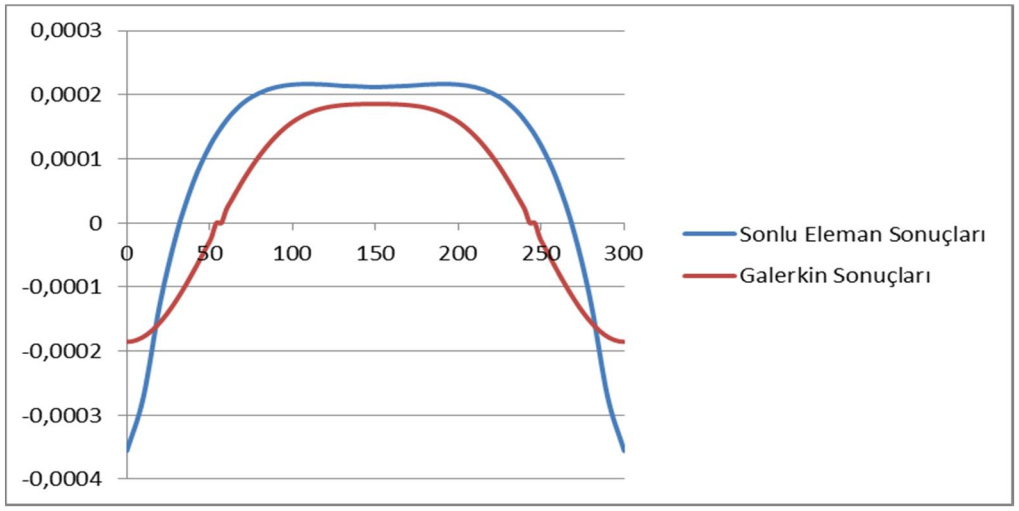
Şekil 5.53 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.



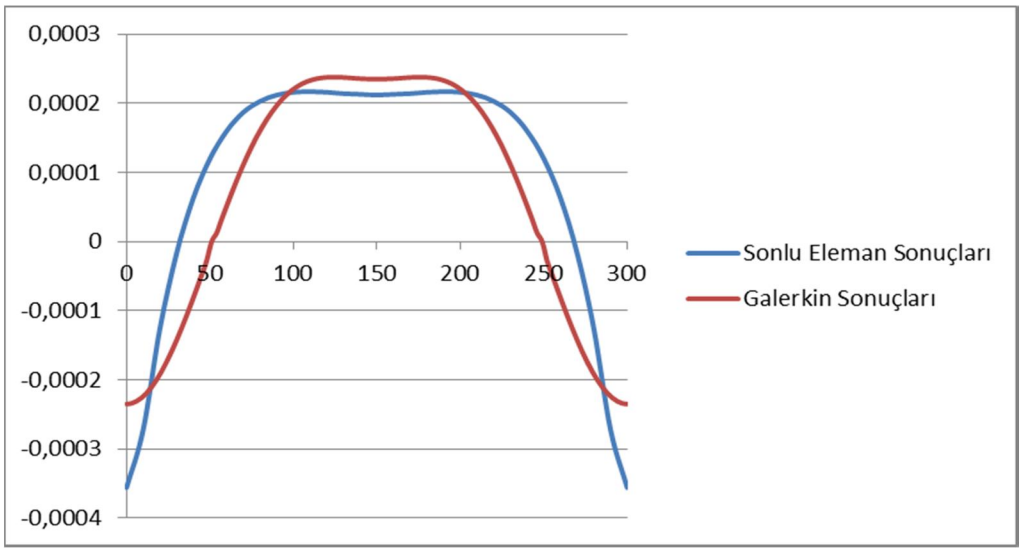
Şekil 5.54 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v bir, w iki terim.



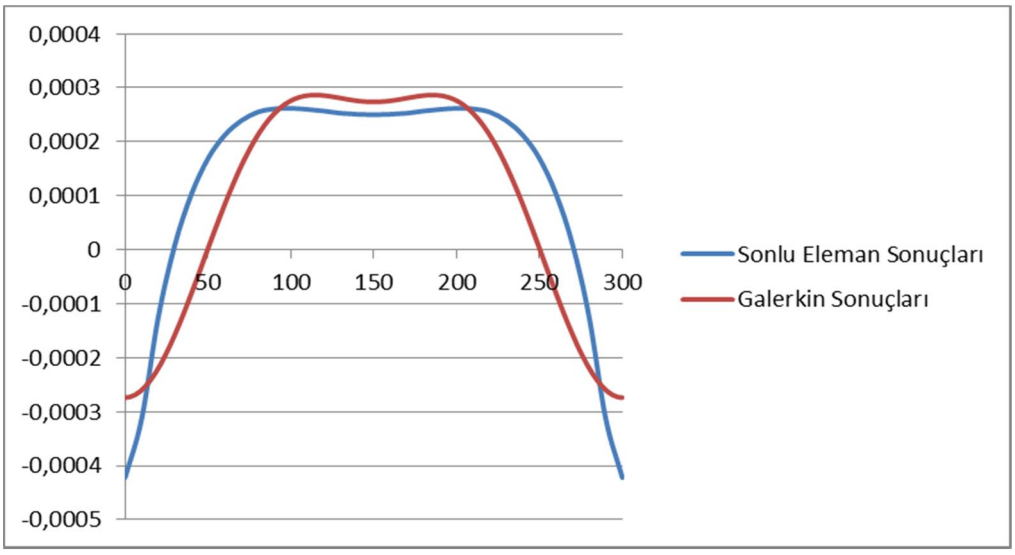
Şekil 5.55 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1



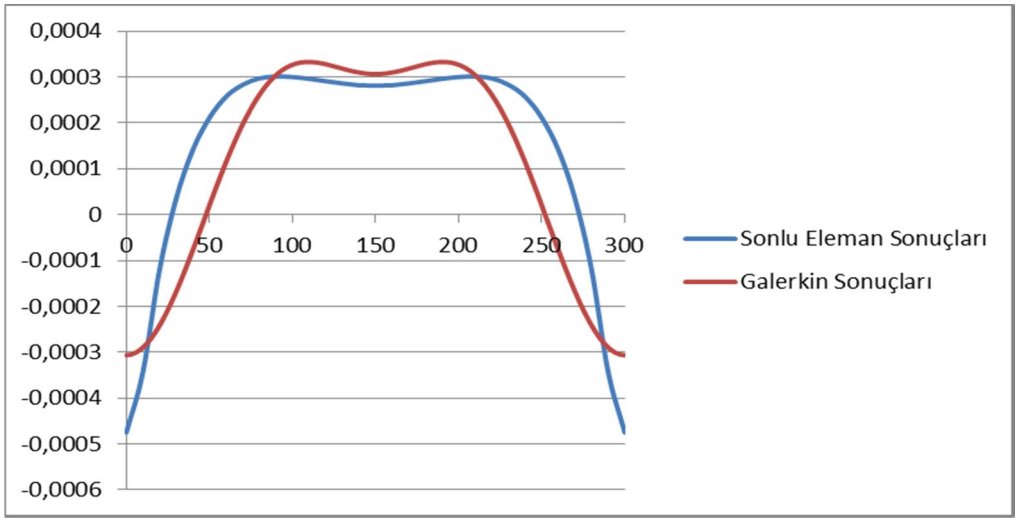
Şekil 5.56 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1



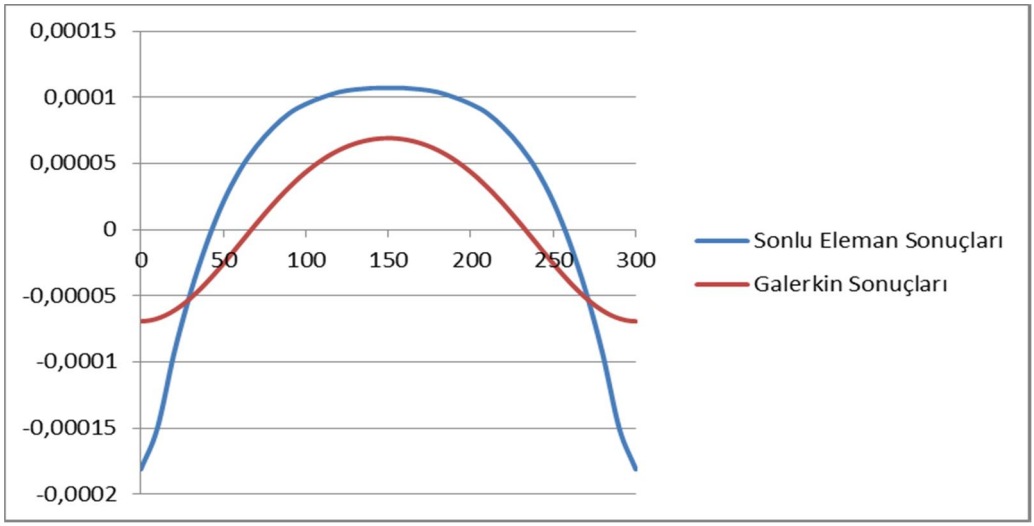
Şekil 5.57 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1



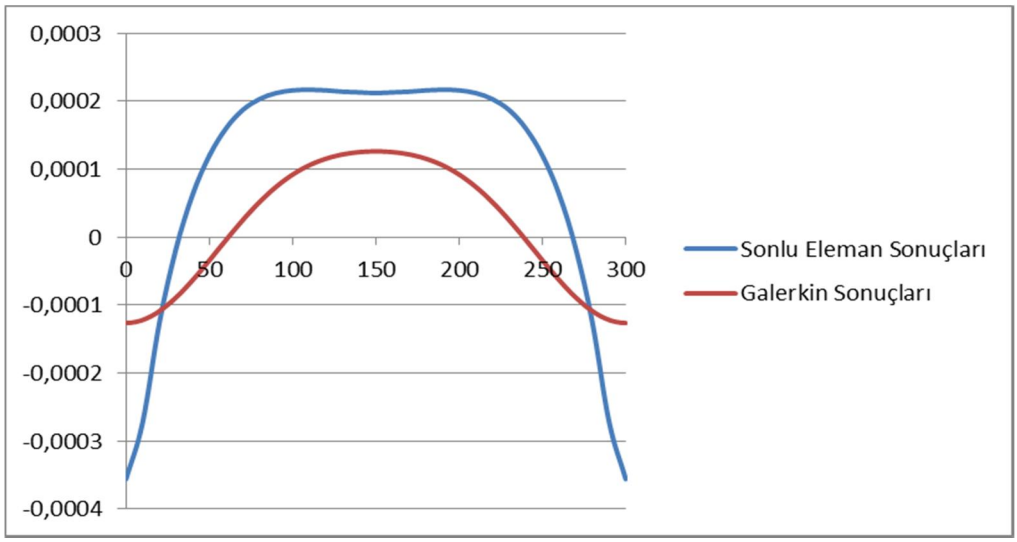
Şekil 5.58 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1



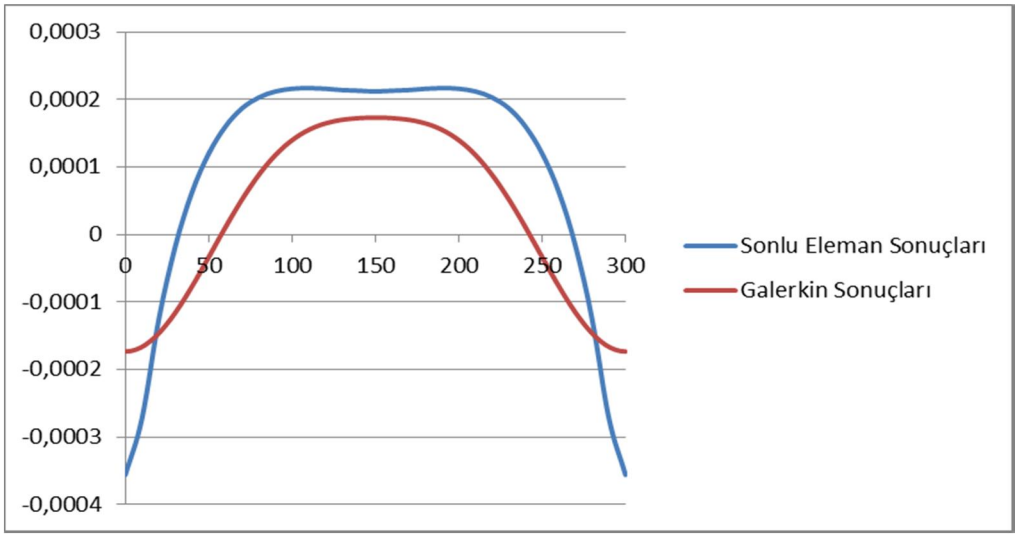
Şekil 5.59 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.1



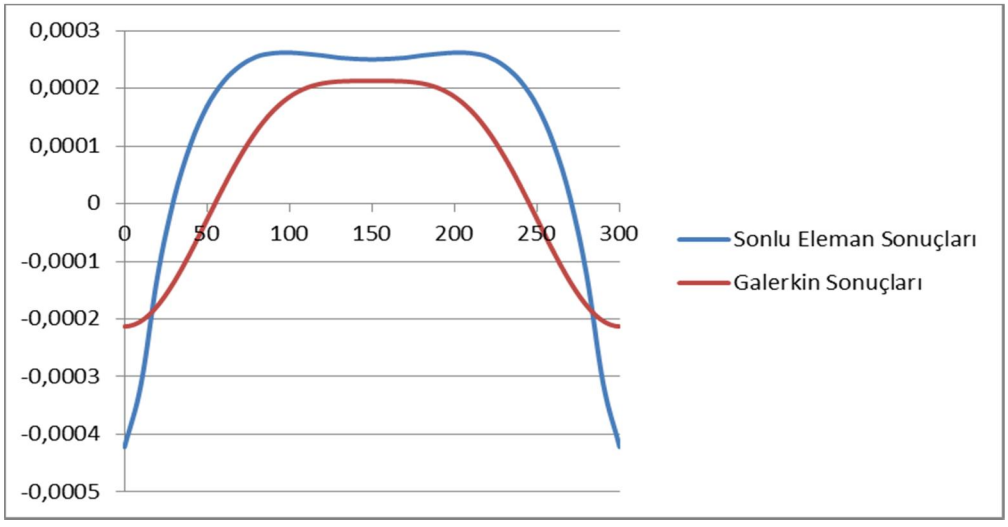
Şekil 5.60 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2



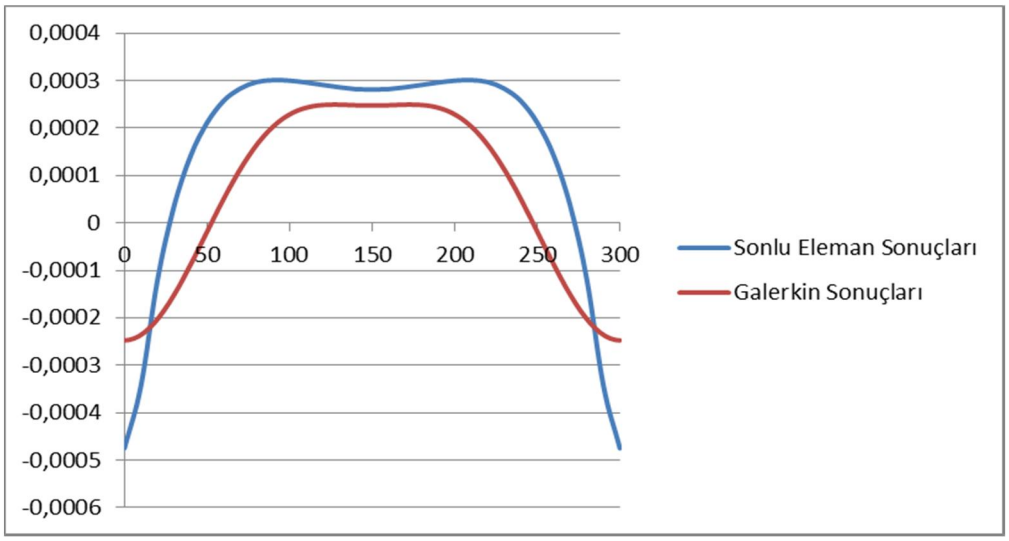
Şekil 5.61 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2



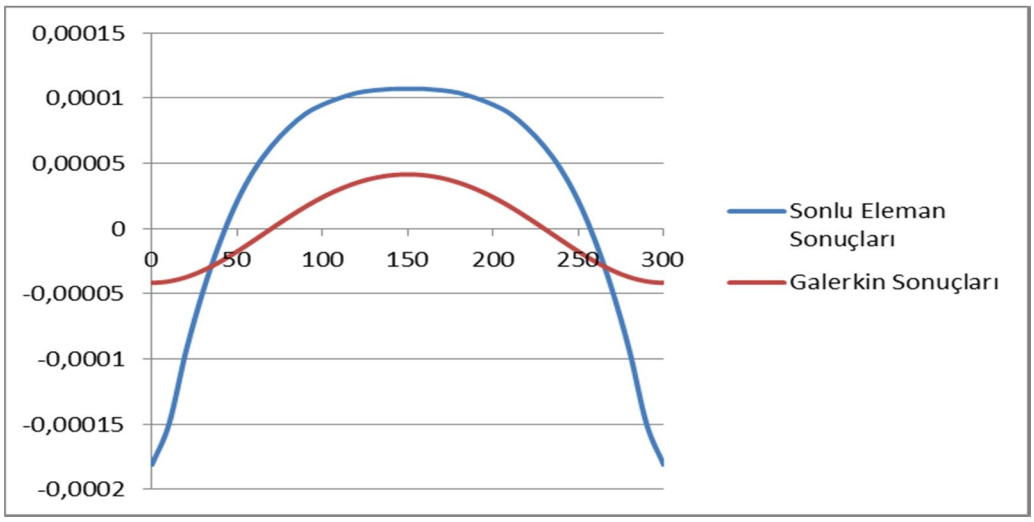
Şekil 5.62 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2



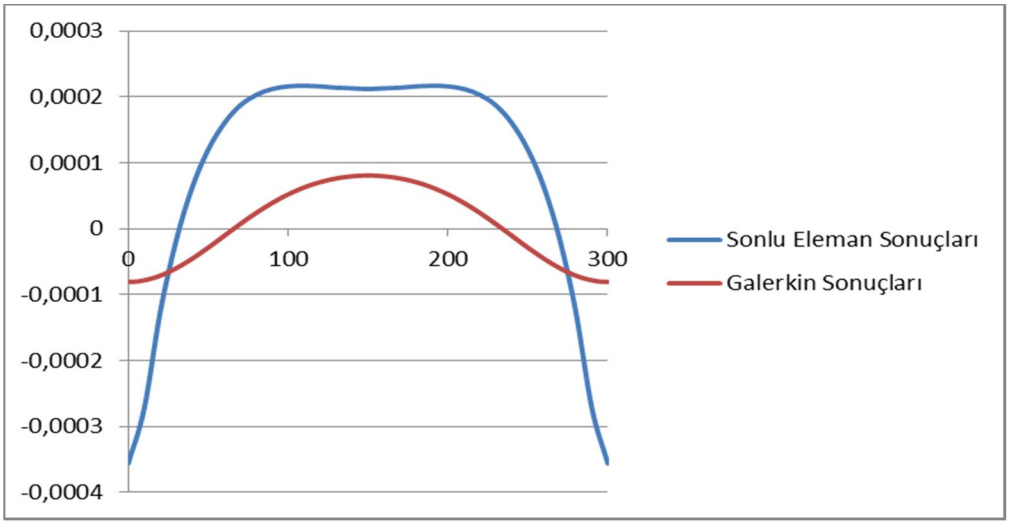
Şekil 5.63 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2



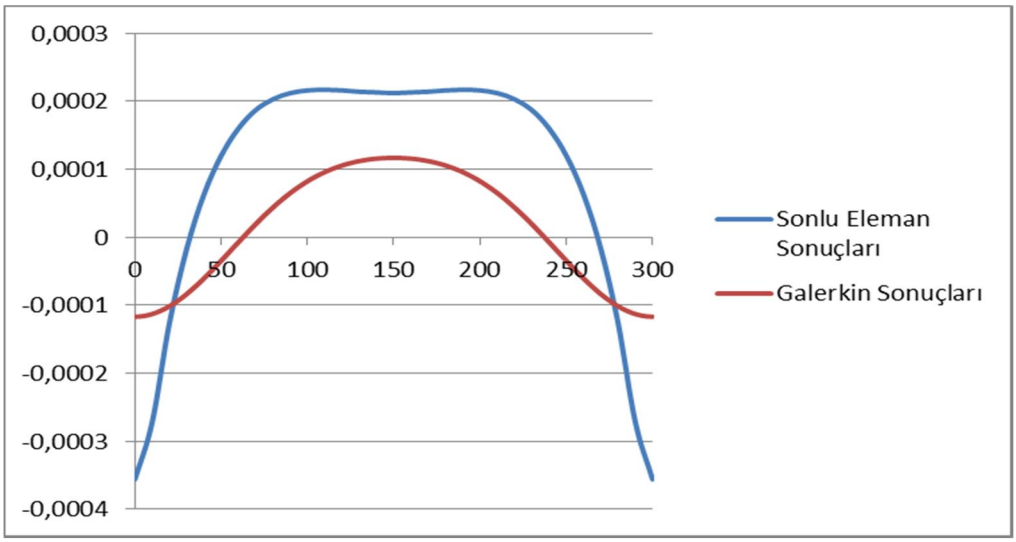
Şekil 5.64 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.2



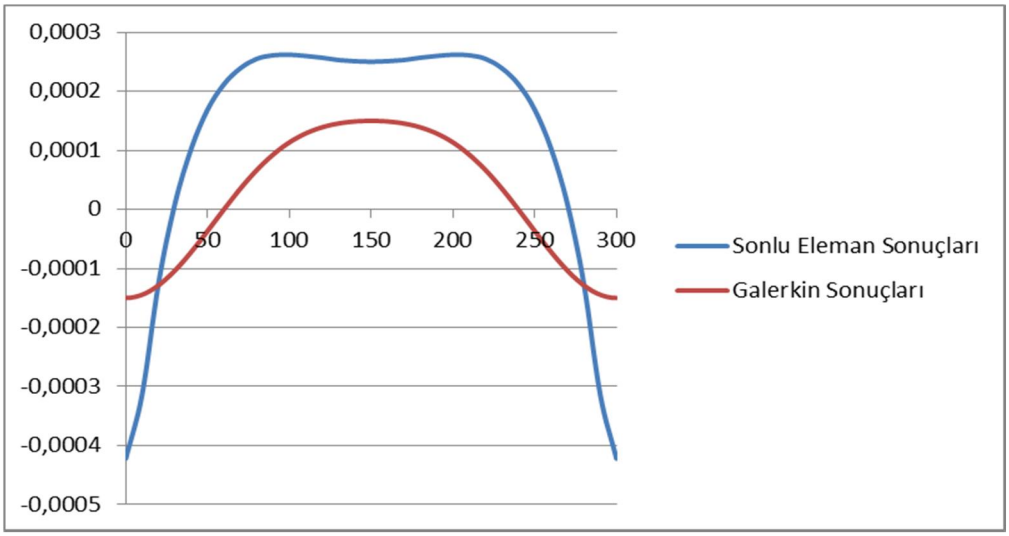
Şekil 5.65 : 100 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3



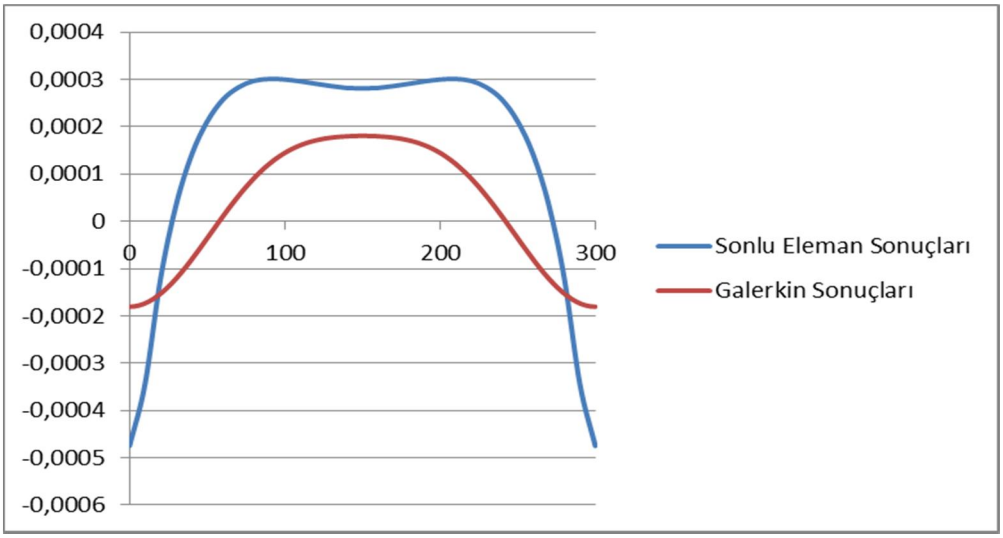
Şekil 5.66 : 200 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.67 : 300 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.68 : 400 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3



Şekil 5.69 : 500 N yük etkisi altında plağın gerinimi, u-v-w bir terim, k=0.3

u ve v yer değiştirmelerine bir terimle yaklaşım yapıldığı için Galerkin yöntemiyle elde edilen gerinimler plak kenarlarında sonlu eleman sonuçları ile uyumsuzluk göstermektedirler.

u, v ve w için bir terim alınarak elde edilen sonuçlar, u, v bir terim w iki terim alınarak elde edilen sonuçlara çok yakın çıkmıştır. Dolayısıyla w için iki terim almanın önemli bir faydası görülmemektedir.

Genel olarak x yönündeki normal gerinimin plak açıklığı boyunca değişimi değerlendirildiğinde plak orta bölgesinde Galerkin yöntemi ile elde edilen gerinim değerlerinin sonlu eleman yöntemi ile elde edilen gerinim değerlerinden bir miktara daha yüksek oldukları görülmektedir.

Sonlu eleman yöntemi ile elde edilen çökme sonuçları yük değeri arttıkça ve geometrik doğrusal olmayış etkin olmaya başladığında plağın çökme fonksiyonunun daha yayvan hale geldiği belirlenmiştir. Dolayısıyla Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların sonlu eleman sonuçlarına daha yakın çıkması için çökme fonksiyonunu yayvanlaştırmak üzere w için tek terim yaklaşım fonksiyonunun yanına k katsayılı ikinci bir terim ilave edilmiştir. Bu durumda çeşitli k katsayıları denendiğinde k = 0.1 değerinin gerinim sonuçlarının sonlu eleman sonuçları ile daha uyumlu hale getirdiği bulunmuştur. Ancak yer değiştirme değerleri sonlu eleman sonuçlarından bir miktar uzaklaşmıştır.

k katsayısının 0.2 ve 0.3 gibi daha büyük değerleri de denenmiş; fakat bu durumda gerek gerinimlerde gerek yer değiştirmelerde uyum durumu bozulmuştur.

6. DEĞERLENDİRMELER

Katmanlı kompozit bir plağın düzgün yayılı yük altındaki doğrusal olmayan davranışı için yönetici denklemleri virtüel iş ilkesi ile elde edilmiştir. Denklemler Galerkin yöntemiyle çözülmüştür. Ayrıca sonlu eleman yöntemi ile modelleme ve analizler yapılarak sonuçlar elde edilmiştir. Çeşitli yük seviyeleri için yer değiştirme ve gerinim sonuçları elde edilerek karşılaştırılmıştır. Sonuçların iyi bir uyum gösterdiği bulunmuştur. Plak kenarlarında görülen nisbi uyumsuzlukların u ve v yer değiştirmeleri için tek terim alınmasından kaynaklandığı değerlendirilmektedir.

Galerkin yöntemiyle yapılan çözümlerde u ve v için daima tek terim alınırken w için bir ve iki terim alınarak çözüm yapılmıştır. w çökme fonksiyonu için terimler seçilirken, geometri ve yüklemenin simetrik olmasından dolayı simetrik fonksiyonlar seçilmiştir. Ancak w için iki terim alınması yer değiştirme ve gerinim sonuçlarında önemli bir olumlu değişiklik sağlamamıştır.

u, v, w için tek terim alarak, w fonksiyonunu daha yayvan hale getirmek üzere k katsayılı ikinci bir fonksiyonun ilave edilmesinin yer değiştirme ve gerinim sonuçlarına etkisi incelenmiştir. Böyle bir k katsayılı terimin katsayının 0.1 gibi belirli bir değeri için gerinim sonuçlarını sonlu eleman sonuçlarına daha yakın hale getirdiği bulunmuştur. Bu yaklaşım yer değiştirme sonuçlarında bir miktar uzaklaşmaya yol açmıştır. Ancak sonuçta mühendislik hesaplarında gerinim ve gerilmeler tasarım açısından daha önemlidirler.

KAYNAKLAR

Al-Obeid, A., & Cooper, J. (1995). *A Rayleigh-Ritz approach for the estimation of the dynamic properties of symmetric composite plates with general boundary conditions.* Composites Science and Technology.

Dickinson, S., & Di Blasio, A. (1986). *On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates.* Journal of Sound and Vibration.

Eduard Venstel, T. K. (2001). *Thin Plates and Shells.* Newyork, Basel: Marcel Dekker Inc.

Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of Composite Materials, Second Edition.* Boca Raton, FL, United States of America: CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC.

Kazancı, Z., & Mecitoğlu, Z. (2005). Nonlinear Dynamic Behavior of A Laminated Composite Plate Subject to Blast Load for Different Boundary Conditions. Ankara: AIAC 2005.

Kazancı, Z., Hacıoğlu, A., & Mecitoğlu, Z. (2004). Kompozit Bir Plağın Anlık Basınç Yükü Altındaki Davranışının Parametrik Olarak İncelenmesi. (s. 23-29). İstanbul: HİTEK-2004.

Kazancı, Z., Mecitoğlu, Z., & Hacıoğlu, A. (2004). *Effect of In-Plane Stiffnesses and Inertias on Dynamic Behavior of A Laminated Composite Plate Under Blast Load.* Houston,Texas, USA: ASCE Earth&Space-2004.

Leissa, A. (1973). *The free vibration of rectangular plates.* Journal Sound and Vibration.

Ömercikoğlu, A. (2009). *Metal Katmanlar İçeren Hibrit Katmanlı Kompozit Plakların Anlık Basınç Yükü Altındaki Dinamik Cevabının İncelenmesi.* İstanbul: İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.

Reddy, J., & Phan, N. (1985). *Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory.* Journal Sound and Vibration.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Kemal GÜNDOĞAN

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 20.04.1985

Adres: Sümer Mah. 24/4 Sokak No:18 Çiğdem Apt. D:50 Zeytinburnu/İstanbul

E-Posta: gundogank@itu.edu.tr

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak Uzay Bilimleri Fakültesi, Uzay Müh.

Yayın ve Patent Listesi:

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Gündoğan K**., Mecitoğlu Z., Balkan D. and Süer M., 2012: Experımental And Numerıcal Investıgatıon Of Nonlınear Statıc Behavıour Of A Lamınated Composıte Plate Subjected To Unıform Pressure Load. Society of Engineering Science-2012, October 10-12, 2012 Atlanta, USA.