İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ DAİRESEL BOŞLUKLU YARIM DÜZLEM PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Arzu ARPACI

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2002

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ DAİRESEL BOŞLUKLU YARIM DÜZLEM PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Arzu ARPACI
(501991285)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mayıs 2002

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Hasan ENGİN**
Diğer Jüri Üyeleri **Doç.Dr. Necla KADIOĞLU (İ.T.Ü.)**
Yrd.Doç.Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)

MAYIS 2002

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yönlendirilmesi ve yürütülmesinde, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen gerekli tüm olanakları sağlayan sayın hocam Prof. Dr. Hasan Engin'e derin teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm eğitimim boyunca maddi, manevi destekleri ile yanımda olan annem Aynur Arpacı ağabeylerim İnş. Müh. M.Murat Arpacı, M.Vedat Arpacı ve eşim İnş. Müh. M.Emrah Şık'a teşekkür ederim. Sizi çok seviyorum.

Mayıs 2002 Arzu Arpacı

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **iv**
SEMBOL LİSTESİ **vi**
ÖZET **vii**
SUMMARY **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER **4**

3. ÇÖZÜM **8**

3.1. Problemin Formülasyonu 8
3.2. Çözüm 11
3.3. Sınır Koşullarının Sağlatılması 19
3.3.1. Silindirik boşluğun iç yüzeyindeki sınır koşulları 19
3.3.2. Serbest yüzeydeki sınır koşulları 23

4. SONUÇLAR **25**

4.1. Sayısal Veriler 25
4.2. Sayısal Sonuçlar 25

5. TARTIŞMA **28**

KAYNAKLAR **29**

EKLER **31**

ÖZGEÇMİŞ **51**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler……..4
Şekil 3.1 : Yarım düzlemde τ kayma gerilmesindeki silindirik oyuk…….……8
Şekil 3.3.1 : Serbest yüzeydeki sınır koşulları…….……9
Şekil A.1 : ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki σ_{xx} gerilmesi……..32
Şekil A.2 : ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki τ_{xy} gerilmesi……...32
Şekil A.3 : ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_x yer değiştirmesi….33
Şekil A.4 : ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_y yer değiştirmesi….33
Şekil A.5 : ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki σ_{rr} gerilmesi……34
Şekil A.6 : ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\tau_{r\theta}$ gerilmesi……34
Şekil A.7 : ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_r yer değiştirmesi…….35
Şekil A.8 : ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_θ yer değiştirmesi…….35
Şekil A.9 : ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\sigma_{r\theta}$ gerilmesi……....36
Şekil A.10 : ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\sigma_{r\theta}$ gerilmesi……....36
Şekil A.11 : ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki σ_{xx} gerilmesi……..37
Şekil A.12 : ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki τ_{xy} gerilmesi……...37
Şekil A.13 : ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_x yer değiştirmesi….38
Şekil A.14 : ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_y yer değiştirmesi….38
Şekil A.15 : ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_r yer değiştirmesi……..…...39
Şekil A.16 : ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_θ yer değiştirmesi……..…...39
Şekil A.17 : ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki σ_{xx} gerilmesi…..…..40
Şekil A.18 : ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki τ_{xy} gerilmesi…….....40
Şekil A.19 : ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_x yer değiştirmesi…41
Şekil A.20 : ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_y yer değiştirmesi...41
Şekil A.21 : ω=80 rad/sn, H=15 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_r yer değiştirmesi…….……42

Şekil A.22 : ω=100 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_θ yer değiştirmesi…….……42
Şekil A.23 : ω=100 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\sigma_{r\theta}$ gerilmesi……....43
Şekil A.24 : ω=120 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\sigma_{r\theta}$ gerilmesi……....43
Şekil A.25 : ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki σ_{xx} gerilmesi……44
Şekil A.26 : ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki τ_{xy} gerilmesi…….44
Şekil A.27 : ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_x yer değiştirmesi...45
Şekil A.28 : ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yuzeydeki u_y yer değiştirmesi...45
Şekil A.29 : ω=120 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_r yer değiştirmesi…….……46
Şekil A.30 : ω=120 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_θ yer değiştirmesi……....46
Şekil A.31 : ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yuzeydeki σ_{xx} gerilmesi……..47
Şekil A.32 : ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yuzeydeki τ_{xy} gerilmesi…….…..47
Şekil A.33 : ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yuzeydeki u_x yer değiştirmesi….48
Şekil A.34 : ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yuzeydeki u_y yer değiştirmesi.…48
Şekil A.35 : ω=80 rad/sn, H=15 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_r yer değiştirmesi…….……49
Şekil A.36 : ω=80 rad/sn, H=15 m için silindirik boşluk yuzeyindeki u_θ yer değiştirmesi…….49
Şekil A.37 : ω=80 rad/sn, H=15 m için silindirik boşluk yuzeyindeki $\sigma_{r\theta}$ gerilmesi……50

SEMBOL LİSTESİ

ω : Zorlama frekansı
t : Zaman
τ : Kayma gerilmesi
τ_0 : Kayma gerilmesi genliği
ρ : Yarı sonsuz ortamın kütle yoğunluğu
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$: Şekildeğiştirme bileşenleri
ε_{xy} : Kayma şekildeğiştirmesi
e : Düzlemsel hacim değiştirme oranı
E : Elastisite modülü
ν : Poisson oranı
λ, μ : Lamé sabitleri
n_x : Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün *x* bileşeni
n_y : Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün *y* bileşeni
$\hat{t}_x$: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin *x* bileşeni
$\hat{t}_y$: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin *y* bileşeni
$\underset{\downarrow}{U}$: Yerdeğiştirme vektörü
$\hat{U}_x$: Sınırdaki yerdeğiştirmenin *x* bileşeni
$\hat{U}_y$: Sınırdaki yerdeğiştirmenin *y* bileşeni
u_x : Yer değiştirmenin *x* bileşeni
u_y : Yer değiştirmenin *y* bileşeni
u_r : Yer değiştirmenin radyal doğrultudaki bileşeni
u_θ : Yer değiştirmenin açısal doğrultudaki bileşeni
φ, ψ : Yer değiştirme potansiyelleri
H : Silindirik oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği
a : Oyuk yarıçapı
r, θ : Kutupsal koordinatlar
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$: Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$: Kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
k_1 : Boyuna dalga sayısı
k_2 : Enine dalga sayısı
c_1 : Boyuna dalga hızı
c_2 : Enine dalga hızı
J_n : Birinci nevi Bessel fonksiyonu
Y_n : İkinci nevi Bessel fonksiyonu

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ DAİRESEL BOŞLUKLU YARIM DÜZLEM PROBLEMİ

ÖZET

Elastik ortam içindeki yapıların dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Bu yapılar arasında tüneller, yeraltı boru hatları, yeraltı santralları ve su altı boru hatları temel problemler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Elastik ortam araştırmaları ile ilgili literatür incelendiğinde, matematik modellemenin daha kolay olduğu sonsuz ortam ile ilgili çalışmaların oldukça eskiye dayandığı görülmektedir. Yarı sonsuz ortam modeli yeraltı yapıları için daha uygundur. Fakat sınır şartlarına bağlı olarak ortaya çıkan güçlükler yüzünden bu model geçmişte az kullanılmıştır.

Bu çalışmada elastik yarım uzay içinde bulunan silindirik boşluğun yüzeyinde harmonik zorlama etkisi göz önüne alınmıştır. Bu harmonik zorlama üniform yayılı kayma gerilmesi şeklindedir.

Birinci bölümde, konu ile ilgili çalışmalardan ve bu çalışmalarda kullanılan çözüm yöntemlerinden kısaca bahsedilmiştir. Ele alınan problem geniş olarak tanıtılmıştır. Çözüm yöntemi açıklanmış ve bulunan sonuçlardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çözüm için kullanılan temel denklemlerin elde edilişi açıklanmıştır. Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını, hareket denklemlerinde kullanılarak Navier denklemleri yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden yazılmıştır.

Üçüncü bölümde, çözüm yapılmıştır. Navier denklemlerinin çözümü için gerekli formülasyonlar verilmiştir. φ ve ψ yer değiştirme potansiyel fonksiyonlarının bilinen tanımları kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemi elde edilmiştir. φ ve ψ yer değiştirme potansiyelleri Bessel ve trigonometrik fonksiyonlar olarak elde edilmiştir. Sonsuz yarı düzlemin yüzeyinde ve silindirik dairesel boşluk içindeki sınır koşulları yazılmıştır. İntegrasyon sabitleri silindirik boşluğun iç yüzeyi ve serbest yüzeydeki sınır şartlarından hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, ω zorlama frekansı ve silindirik boşluğun merkezinin serbest yüzeyden olan derinliğine göre, silindirik boşluk ve serbest yüzey üzerindeki yer değiştirmeler ve gerilmelere ait analitik çözüm sonuçları gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

HALF PLANE WITH A CIRCULAR CAVITY UNDER THE EFFECT OF HARMONIC FORCE

SUMMARY

The behaviour of the structures in an elastic medium under the dynamic effects has been the subject of a lot of research in the past. Among those structures, underground tunnels, underground pipelines, underground reactors and underground pipelines are appeared to be main problems of this field.

When the literature related to the research about elastic medium has been examined, the research about the infinite medium whose mathematical modelling is easier, are seen to have dated back to very earlier era. The model of semi infinite medium is more suitable for underground structures. But in the past this model is less used because of the arising diffuculties related to baundary conditions.

In this study, the behaviour of the half space with cylindrical cavity under the harmonic forcing has been examined. The harmonic forcing is an uniformly distributed shearing stress.

In the first chapter, the research related to the subject and the methods for solutions have been noted shortly. Then the problem has been introduced. The solution method and some results have been shortly explained.

In the second chapter, it was mentioned about how to find basic equation, which were used for solution. Substituting stress-strain relations in equations of motion. Navier equations have been written in terms of the components of the displacement vector.

In the third chapter, solution has been performed. Necessary formulations have been given for the solution of Navier equations. By using the definitions of displacement potential functions of φ and ψ, two reduced wave equations in the polar coordinates have been obtained. The displacements potentials φ and ψ have been found out in terms of Bessel and trigonometric functions. Boundary conditions have been written on the surface of half space and inside the cylindrical circular cavity. The integration constants have been calculated from boundary conditions written on free surface and on the inner surface of the cylindrical cavity.

In the fourth chapter, the displacements and stresses over the free surface and the cylindrical cavity were shown with respect to ω forcing frequency and depth of the center of cylindrical cavity.

In the fifth chapter, the obtained results have been discussed.

1. GİRİŞ

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmaya konu olmuştur. Yeraltı tünelleri, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemi olmuştur.

Boşluk içeren elastik ortam ile ilgili geçmişte yapılan araştırmalar incelendiğinde, sonsuz ortam ile ilgili çalışmaların çok eskiye dayandığı görülmektedir. ERİNGEN ve ŞUHUBİ [1], GRAFF [2]. Buna karşılık yarı sonsuz ortam ile ilgili çalışmalar yakın zamana dayanmaktadır.

Yarı sonsuz ortam kabulünün, yeraltı yapıları için sonsuz ortam kabulüne göre daha uygun olmasına karşılık, analitik çözümlerde sınır koşullarının sağlatılmasının güçlüğünden dolayı daha ağırdır. Geçmişte bu tür çalışmalar daha çok laboratuar ölçümlerine bağlı kalmıştır. Ancak günümüzde bilgisayarın karmaşık matematik problemlerin çözümünde kullanılabilir olması ilginin yarı sonsuz ortam üzerinde yoğunlaşmasını sağlamıştır.

Silindirik boşluk, elastik silindirik kabuk v.s. gibi yapıları içeren elastik yarım uzayda P, S ve PH dalgaları altındaki davranışları DATTA [14] ve arkadaşlarının pek çok çalışmasına konu olmuştur. Bu çalışmalarda yarım uzayda bulunan silindirik kabuğun harmonik dalga altındaki davranışı, asimptotik açılımların birbiri ile uyuşturulması ve ardışık yansımalar metodları kullanılarak incelenmiştir.

Yarım düzlemde bulunan boru hattının etrafının farklı malzeme ile doldurulması halindeki dinamik davranışını DATTA, SHAH ve WONG [13,18] incelemişlerdir. Çözüm Bessel ve trigonometrik fonksiyonları yardımı ile temsil edilmiş, serbest yüzey ve dolgu bölgesi yüzeyinden dalgaların ardışık yansımaları göz önüne alınmıştır. WONG [13,18] geometrinin dairesel kabuktan farklı olması halini yaptığı bir çalışma ile incelemiştir. Bu çalışmada, iç bölgelerde sonlu eleman formülasyonu, dış bölgelerde ise analitik çözüm teknikleri kullanılmıştır.

Yeraltı tünellerindeki trenlerin hareketi nedeniyle yerüstü yapılarına etkilerini BALENDRA [10,11] ve arkadaşları incelemişlerdir. Ortamı viskoelastik, yerüstü yapısının temelini ve tüneli rijid cisim kabul etmişlerdir. Serbest yüzey üzerinde sonlu sayıda sınır şartları alınmış ve sınır şartları sayısı bilinmeyen sayısından fazla olduğu için Trefftz metodu uygulanmıştır.

LUCO ve BARROS [16,17] kabuk eksenine eğri bir açıdan gelen harmonik düzlem dalgaları etkisinde olan ve katmanlı viskoelestik yarı uzayda gömülmüş dairesel kesitli sonsuz uzunluktaki silindirik kabuğun üç boyutlu harmonik davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmada içteki boru hattı veya tünel için sadeleştirilmiş bir kabuk teorisi ile dıştaki zemin için dolaylı bir integral ifadesinin birleşmesinden elde edilen çözüm fonksiyonları kullanılmıştır.

Silindirik boşluk içeren yarım uzayda iç basınç etkisindeki titreşim problemi BAYIROĞLU [8] tarafından incelenmiştir. Çalışmada ortamın davranışı Bessel ve trigonometrik fonksiyon serilerin yardımı ile ifade edilmiştir. Serbest yüzeyde sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılmıştır. Analitik yoldan elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar yöntemi ile kontrol edilmiştir.

ENGİN ve COŞKUN [15] dairesel silindirik bir boşluk içeren elastik yarım uzayda harmonik titreşimleri incelemişlerdir. Kutupsal koordinatlarda yazılan hareket denklemleri, Helmholtz potansiyellerinin kullanılmasıyla iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonlar çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Elastisite teorisinde rastlanan bazı problemleri kesin olarak çözmek mümkün değildir. Bu elastisite denklemlerinin integrasyonunun güçlüğünden veya sınır koşullarının sağlatılmasının zorluğundan kaynaklanabilmektedir. Bu durumda probleme yaklaşık çözümler aramak daha uygun olur. Burada hareket denklemleri, yerdeğiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları, Hooke yasaları ve sınır koşulları kullanılarak çözüme gidilir.

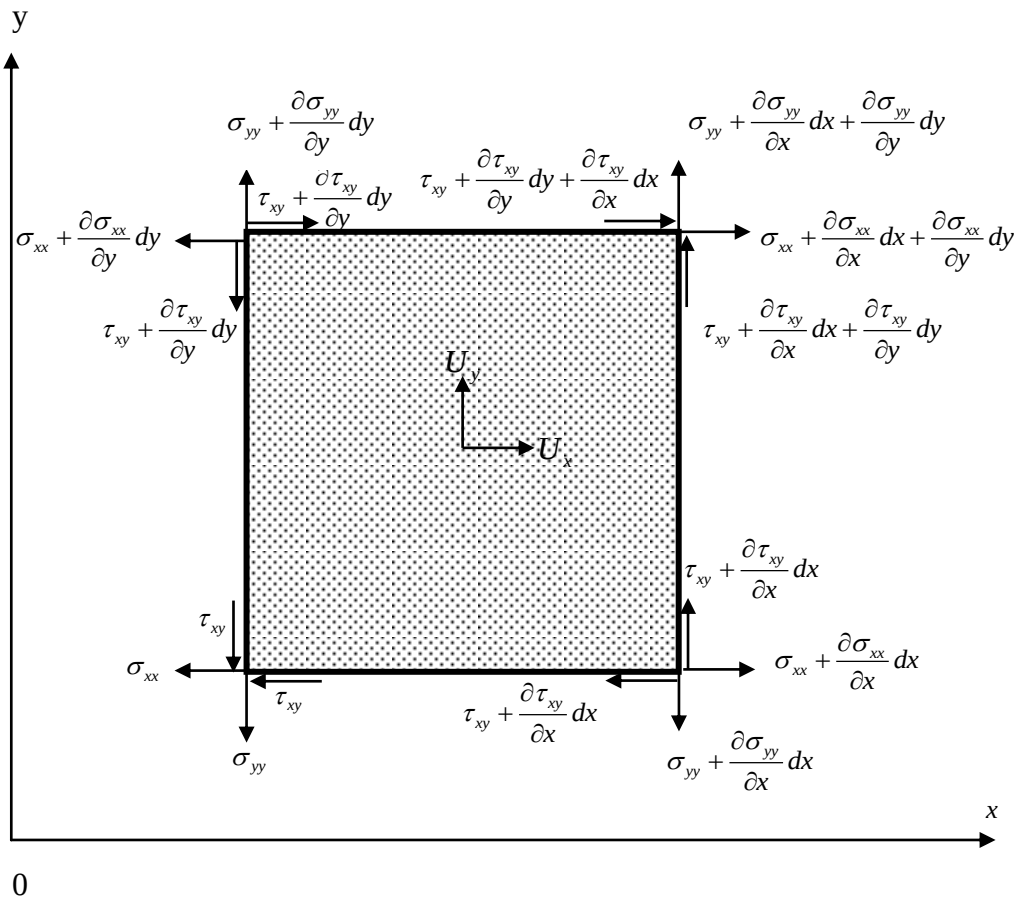
Bu çalışmada elastik bir yarım uzay içinde bulunan silindirik boşluğun yüzeyinde harmonik zorlama etkisi göz önüne alınmıştır. Bu harmonik zorlama uniform yayılı kayma gerilmesi şeklindedir. Yarı sonsuz düzlemdeki malzeme lineer elastik,

homojen ve izotrop olarak gözönüne alınmıştır. φ , ψ yer değiştirme potansiyellerinin bilinen tanımları kullanılarak silindirik koordinatlarda iki adet ayrık dalga denklemi elde edilmiştir. Bu denklemler Bessel ve trigonometrik fonksiyonlar serisi yardımı ile çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler, delik iç yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Delik iç yüzeyindeki iki sınır koşulundan bilinmeyenlerin yarısı, diğer yarısı cinsinden ifade edilmiştir. Serbest yüzeyin her noktasında normal gerilme ve kayma gerilmesi sıfıra eşittirler. Yüksek mertebelerde ikinci nevi Bessel fonksiyonlarının özellikle küçük argümanlarda ekstrem değerler alması nedeniyle seri sonlu sayıda terim alınarak kesilmiştir. Bu durumda özellikle serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları sayısı bilinmeyen sayısından çok fazla olmaktadır. Bunun için, serbest yüzeyde gerilmeler (dolayısıyla hata) minumum olacak şekilde En Küçük Kareler yöntemi kullanılmıştır.

Sayısal işlemlerde Mathematica 4.0 paket programı kullanılarak oyuk yüzeyindeki ve serbest yüzey boyunca yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre değişimleri grafiklerle gösterilmiştir.

2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER

Şekil 2.1. de görüldüğü gibi iki boyutlu lineer elastik bir cisim içinden alınan diferansiyel bir elemana etkiyen gerilme bileşenlerinin değişimi gösterilmiştir. Kütle kuvvetlerini ihmal ederek, bu eleman için x ve y eksenleri doğrultularında Newton'un ikinci hareket kanunu uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki hareket denklemler elde edilir.



Şekil 2.1 Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler

Hareket denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \qquad (2.1.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \qquad (2.1.b)$$

Burada $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ gerilme tansörünün bileşenleri, U_x ve U_y ise yer değiştirme vektörünün kartezyen koordinatlardaki bileşenleridir. ρ kütle yoğunluğunu, t ise zamanı göstermektedir.

Gerilmeler cinsinden sınır koşulları:

$$\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y = \hat{t}_x \qquad (2.2.a)$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = \hat{t}_y \qquad (2.2.b)$$

Burada n_x ve n_y sınır eğrisinin dış normal birim vektörüdür. $\hat{t}_x$ ve $\hat{t}_y$ ise sınırda etki eden yüzey gerilmesinin bileşenleridir.

Yer değiştirmeler cinsinden sınır koşulları:

$$U_x = \hat{U}_x \qquad (2.3.a)$$

$$U_y = \hat{U}_y \qquad (2.3.b)$$

Burada $\hat{U}_x$ ve $\hat{U}_y$ sınırdaki yer değiştirmelerin belirli olan bileşenleridir.

Lineer izotropik ortamlar için gerilme şekil değiştirme bağıntıları (Hooke yasası):

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx} \qquad (2.4.a)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} \qquad (2.4.b)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \qquad (2.4.c)$$

Burada λ ve μ Lamé sabitleridir. Hacim değiştirme oranı olan e ise düzlem şekil değiştirme için aşağıdaki gibidir.

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \qquad (2.5)$$

λ ve μ Lamé sabitleri, E elastisite modülü, υ Poisson oranı cinsinden,

$$\lambda = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad (2.6.a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad (2.6.b)$$

şeklinde yazılır.

Şekil değiştirme – Yer değiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \qquad (2.7.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \qquad (2.7.b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right] \qquad (2.7.c)$$

(2.7) denklemleri (2.4) denklemleri ile birlikte (2.1) denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa yer değiştirmeler cinsinden Navier denklemleri elde edilir.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\nabla^2 U_x=\rho\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \qquad (2.8.a)$$

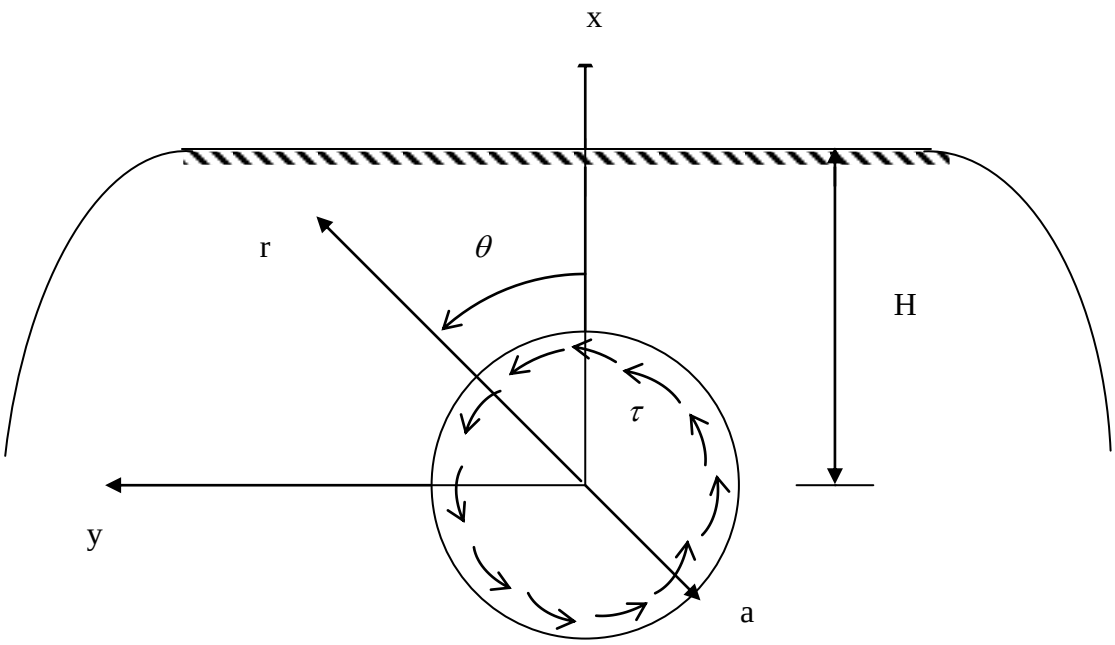
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\nabla^2 U_y=\rho\frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \qquad (2.8.b)$$

Burada ∇^2 kartezyen koordinatlarda Laplasyeni göstermektedir.

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (2.9)$$

3. ÇÖZÜM

3.1. Problemin Formülasyonu



Şekil 3.1. Yarım düzlemde τ kayma gerilmesi etkisindeki silindirik oyuk.

İncelemede kutupsal koordinatları kullanmak daha uygundur. z ekseni boyunca, oyuk geometrisi, malzeme ve yükleme değerlerinin değişmediği kabul edilirse problem düzlem şekil değiştirme hali olarak göz önüne alınabilir.

Yarı sonsuz ortamda bulunan $r=a$ yarıçaplı silindirik oyuk iç yüzey boyunca aşağıdaki gibi τ harmonik zorlaması ile zorlanmaktadır.

$$\tau = \tau_0 e^{-i\omega t} \qquad (3.1.)$$

Burada τ_0 harmonik zorlama genliğini, ω zorlama frekansını, t de zamanı göstermektedir. Birinci mertebe teorisi kullanıldığı için ortamın davranışı da aynı şekilde harmonik fonksiyonlarla ifade edilebilir. Buna göre kutupsal koordinatlarda yer değiştirme ve gerilme bileşenleri,

$$U_r(r,\theta,t) = u_r(r,\theta)e^{-i\omega t} \qquad (3.2.a)$$

$$U_\theta(r,\theta,t) = u_\theta(r,\theta)e^{-i\omega t} \qquad (3.2.b)$$

$$\sigma_{rr}(r,\theta,t) = \sigma_{rr}(r,\theta)e^{-i\omega t} \qquad (3.3.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,t) = \sigma_{\theta\theta}(r,\theta)e^{-i\omega t} \qquad (3.3.b)$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,t) = \tau_{r\theta}(r,\theta)e^{-i\omega t} \qquad (3.3.c)$$

olarak yazılabilir.

(3.2) ifadelerini (2.8) Navier denklemlerinde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki gibi vektör formunda ifade edlebilir.

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla.\underline{u} + \mu\nabla^2\underline{u} + \rho\omega^2\underline{u} = 0 \qquad (3.4)$$

Burada

$$\underline{u} = u_r\underline{e}_r + u_\theta\underline{e}_\theta \qquad (3.5)$$

şeklinde kutupsal koordinatlarda ifade edilebilir.

Helmholtz ayırma teoremi kullanılarak $\underset{\sim}{u}$ yerdeğiştirme vektörü $\varphi(r,\theta)$ skaler ve $\underset{\sim}{\psi}(r,\theta)=\psi(r,\theta)\underset{\sim}{e}_z$ vektörel potansiyel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki yapıda yazılabilir.

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{\nabla}\varphi+\underset{\sim}{\nabla}\times\left(\psi\underset{\sim}{e}_z\right) \qquad (3.6)$$

Burada tek çözüm elde edilebilmesi için $\underset{\sim}{\psi}$ vektörel potansiyelinin diverjansı sıfır olmalıdır.

$$\underset{\sim}{\nabla}\left(\psi\underset{\sim}{e}_z\right)=0$$

Potansiyel fonksiyonlarla yazılan yer değiştirme vektörüne ait (3.6) ifadesi (3.4) Navier denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki indirgenmiş dalga denklemleri elde edilir.

$$\nabla^2\varphi+k_1^2\varphi=0 \qquad (3.7.a)$$

$$\nabla^2\psi+k_2^2\psi=0 \qquad (3.7.b)$$

$k_1=\omega/c_1$ Boyuna dalga sayısı,

$k_2=\omega/c_2$ Enine dalga sayısı,

$c_1=\sqrt{\dfrac{(\lambda+2\mu)}{\rho}}$ Boyuna dalga hızı,

$c_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ Enine dalga hızı,

olarak tanımlanmaktadır.

Yer değiştirme vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri (3.6) ifadesi kullanılarak potansiyel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{3.8.a}$$

.

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3.8.b}$$

Gerilme yer değiştirme bağıntılarının kutupsal koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{3.9.a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\lambda + 2\mu)\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{3.9.b}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{3.9.c}$$

3.2. Çözüm

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla (3.7) hareket denklemlerinin çözümü Bessel –trigonometrik fonksiyonlar serisi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(\mathtt{A}_n J_n(k_1 r) + \mathtt{B}_n Y_n(k_1 r))\cos n\theta + (\mathtt{C}_n J_n(k_1 r) + \mathtt{D}_n Y_n(k_1 r))\sin n\theta\right]$$

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(\mathtt{E}_n J_n(k_2 r) + \mathtt{F}_n Y_n(k_2 r))\cos n\theta + (\mathtt{G}_n J_n(k_2 r) + \mathtt{H}_n Y_n(k_2 r))\sin n\theta\right]$$

n tam sayı olduğundan, $J_{-n}=(-1)^n J_n$, $Y_{-n}=(-1)^n Y_n$ Bessel fonksiyonlarının tanımları kullanılarak bu sonsuz serileri -∞ yerine sıfırdan başlatmak mümkündür. Böylece $\varphi(r,\theta)$ ve $\psi(r,\theta)$ fonksiyon serileri aşağıdaki şekli alır.

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(A_n J_n(k_1 r)+B_n Y_n(k_1 r))\cos n\theta+(C_n J_n(k_1 r)+D_n Y_n(k_1 r))\sin n\theta\right] \quad (3.10.a)$$

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(E_n J_n(k_2 r)+F_n Y_n(k_2 r))\cos n\theta+(G_n J_n(k_2 r)+H_n Y_n(k_2 r))\sin n\theta\right] \quad (3.10.b)$$

Burada $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n$ bilinmeyen değişmezler olup, sınır koşullarının sağlatılmasıyla elde edilecektir.

(3.10) ifadeleri (3.8) de yerine yazılırsa aşağıdaki yer değiştirme ifadeleri elde edilir.

$$\begin{aligned}u_r=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{&\Bigg[A_n\left(\frac{n}{r}J_n(k_1 r)-k_1 J_{n+1}(k_1 r)\right)+B_n\left(\frac{n}{r}Y_n(k_1 r)-k_1 Y_{n+1}(k_1 r)\right)\\&+G_n\frac{n}{r}J_n(k_2 r)+H_n\frac{n}{r}Y_n(k_2 r)\Bigg]\cos n\theta\\&+\Bigg[C_n\left(\frac{n}{r}J_n(k_1 r)-k_1 J_{n+1}(k_1 r)\right)+D_n\left(\frac{n}{r}Y_n(k_1 r)-k_1 Y_{n+1}(k_1 r)\right)\\&-E_n\frac{n}{r}J_n(k_2 r)-F_n\frac{n}{r}Y_n(k_2 r)\Bigg]\sin n\theta\Bigg\}\end{aligned} \quad (3.11.a)$$

$$u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[-A_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) - B_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - G_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) \right.\right.$$

$$\left. - H_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \sin n\theta$$

$$+ \left[C_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) + D_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - E_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) \right.$$

$$\left. \left. - F_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \cos n\theta \right\}$$

(3.11.b)

Yer değiştirmelere ait (3.11) bağıntılarını, (3.9) gerilme yer değiştirme bağıntılarında yerine yazarsak gerilmelerin kutupsal koordinatlardaki bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2{}^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right.\right.$$

$$+ B_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2{}^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right]$$

$$+ G_n \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right]$$

$$\left. + H_n \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r) - n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \cos n\theta$$

$$+ \left\{ C_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2{}^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right.$$

$$+ D_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2{}^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right]$$

$$+ E_n \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right]$$

$$\left. \left. + F_n \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r) + n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \right\} \sin n\theta \right] \qquad \text{(3.12.a)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\Big\{A_n\Big[\Big(-n^2+n+k_1^2r^2-0.5{k_2}^2r^2\Big)J_n(k_1r)-k_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+B_n\Big[\Big(-n^2+n+k_1^2r^2-0.5{k_2}^2r^2\Big)Y_n(k_1r)-k_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+G_n\Big[\Big(-n^2+n\Big)J_n(k_2r)+nk_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big]$$

$$+H_n\Big[\Big(-n^2+n\Big)Y_n(k_2r)+nk_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\cos n\theta$$

$$+\Big\{C_n\Big[\Big(-n^2+n+k_1^2r^2-0.5{k_2}^2r^2\Big)J_n(k_1r)-k_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+D_n\Big[\Big(-n^2+n+k_1^2r^2-0.5{k_2}^2r^2\Big)Y_n(k_1r)-k_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+E_n\Big[\Big(n^2-n\Big)J_n(k_2r)-nk_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big]$$

$$+F_n\Big[\Big(n^2-n\Big)Y_n(k_2r)-nk_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\sin n\theta\Bigg]$$

(3.12.b)

$$\tau_{r\theta} = \frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\Big\{A_n\Big[\Big(-n^2+n\Big)J_n(k_1r)+nk_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+B_n\Big[\Big(-n^2+n\Big)Y_n(k_1r)+nk_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+G_n\Big[\Big(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\Big)J_n(k_2r)-k_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big]$$

$$+H_n\Big[\Big(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\Big)Y_n(k_2r)-k_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\sin n\theta$$

$$+\Big\{C_n\Big[\Big(n^2-n\Big)J_n(k_1r)-nk_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+D_n\Big[\Big(n^2-n\Big)Y_n(k_1r)-nk_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+E_n\left[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)J_n(k_2r)-k_2rJ_{n+1}(k_2r)\right]$$

$$+F_n\left[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)Y_n(k_2r)-k_2rY_{n+1}(k_2r)\right]\Big\}\cos n\theta\Bigg] \qquad (3.12.c)$$

Yer değiştirmelerin ve gerilmelerin kartezyen koordinatlardaki değerleri kutupsal koordinatlardaki değerleri cinsinden aşağıdaki dönüşüm formülleri yardımıyla elde edilir.

$$u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta \qquad (3.13.a)$$

$$u_y = u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta \qquad (3.13.b)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos 2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta \qquad (3.14.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos 2\theta - \tau_{r\theta}\sin 2\theta \qquad (3.14.b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\sin 2\theta - \tau_{r\theta}\cos 2\theta \qquad (3.14.c)$$

(3.12) bağıntılarını (3.14) bağıntılarında yerine koyup gerekli düzenlemeler yapılırsa kartezyen koordinatlarında σ_{xx}, σ_{yy} ve τ_{xy} gerilmeleri için Bessel ve trigonometrik fonksiyonlara bağlı aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\sigma_{xx}=\frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left\{\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)+\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_{1r}\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\cos n\theta+\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_1r\right)+nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\Big\}$$

$$+B_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)+\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_{1r}\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\cos n\theta+\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_1r\right)+nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\Big\}$$

$$+G_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_2r\right)-nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.+\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+H_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_2r\right)-nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.+\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+C_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)+\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_{1r}\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\sin n\theta+\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_1r\right)-nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\Big\}$$

$$+D_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)+\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_{1r}\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\sin n\theta+\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_1r\right)-nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\Big\}$$

$$+E_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_2r\right)+nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.+\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right\}$$

$$+F_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_2r\right)+nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.+\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right\}$$

(3.15.a)

$$\sigma_{yy}=\frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left\{\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)-\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_{1r}\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\cos n\theta-\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_1r\right)+nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\Big\}$$

$$+B_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)-\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_{1r}\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\cos n\theta-\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_1r\right)+nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\Big\}$$

$$-G_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_2r\right)-nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$-H_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_2r\right)-nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+C_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)-\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_{1r}\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\sin n\theta-\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_1r\right)-nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\Big\}$$

$$+D_n\left\{\left[\left(0.5k_1^2r^2-0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)-\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_{1r}\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\cos 2\theta\right]\sin n\theta-\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_1r\right)-nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\Big\}$$

$$-E_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_2r\right)+nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right\}$$

$$-F_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_2r\right)+nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right\}$$

(3.15.b)

$$\tau_{xy}=\frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\ \left\{\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_1r\right)+nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+B_n\left\{\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_1r\right)+nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+G_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_2r\right)-nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+H_n\left\{\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_2r\right)-nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\cos n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\sin n\theta\right\}$$

$$+C_n\left\{\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)J_n\left(k_1r\right)+k_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(n^2-n\right)J_n\left(k_1r\right)-nk_1rJ_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right\}$$

$$+D_n\left\{\left[\left(n^2-n-0.5k_1^2r^2\right)Y_n\left(k_1r\right)+k_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(n^2-n\right)Y_n\left(k_1r\right)-nk_1rY_{n+1}\left(k_1r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right\}$$

$$+E_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)J_n\left(k_2r\right)+nk_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)J_n\left(k_2r\right)-k_2rJ_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right\}$$

$$+F_n\left\{\left[\left(-n^2+n\right)Y_n\left(k_2r\right)+nk_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\sin 2\theta\sin n\theta\right.$$

$$\left.-\left[\left(-n^2+n+0.5k_2^2r^2\right)Y_n\left(k_2r\right)-k_2rY_{n+1}\left(k_2r\right)\right]\cos 2\theta\cos n\theta\right\}$$

(3.15.c)

3.3.Sınır Koşullarının Sağlatılması

Çözümde kullanılan Bessel ve trigonometrik serilerindeki *n* sayısı sayısal işlemlerde sonlu bir *N* sayısına kadar alınabilir. Ayrıca ikinci neviden Bessel fonksiyonu olan Y_n özellikle küçük argümanlarda, büyük indisler için çok büyük değerler aldığından *N* sayısı belli bir değerin üzerinde alınamamaktadır.

3.3.1. Silindirik boşluğun iç yüzeyindeki sınır koşulları

Silindirik boşluğun iç yüzeyinde θ'nın her değeri için $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi, τ_0 kayma gerilmesine, σ_{rr} radyal gerilmesi de sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre,

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=a} = 0 \qquad \tau_{r\theta}\Big|_{r=a} = \tau_0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big\{ & A_n\Big[\left(n^2-n-0.5{k_2}^2r^2\right)J_n(k_1r)+k_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big] \\ & + B_n\Big[\left(n^2-n-0.5{k_2}^2r^2\right)Y_n(k_1r)+k_1rY_{n+1}(k_1r)\Big] \\ & + G_n\Big[\left(n^2-n\right)J_n(k_2r)-nk_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big] \\ & + H_n\Big[\left(n^2-n\right)Y_n(k_2r)-nk_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\cos n\theta \\ + \Big\{ & C_n\Big[\left(n^2-n-0.5{k_2}^2r^2\right)J_n(k_1r)+k_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big] \\ & + D_n\Big[\left(n^2-n-0.5{k_2}^2r^2\right)Y_n(k_1r)+k_1rY_{n+1}(k_1r)\Big] \\ & + E_n\Big[\left(-n^2+n\right)J_n(k_2r)+nk_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big] \\ & + F_n\Big[\left(-n^2+n\right)Y_n(k_2r)+nk_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\sin n\theta\Big] = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.16) denkleminin θ'nın her değerinde sağlanabilmesi için n'nin her değerinde $\cos n\theta$ ve $\sin n\theta$'nın çarpanı sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre (3.16) ifadesinden,

$n = 0$ için:

$$\left\{A_0\left[\left(-0.5k_2{}^2a^2\right)J_n(k_1a)+k_1aJ_1(k_1a)\right]+B_0\left[\left(-0.5k_2{}^2a^2\right)Y_n(k_1a)+k_1aY_1(k_1a)\right]\right\}=0$$

(3.17)

$n > 0$ için:

$$\left\{A_n\left[\left(n^2-n-0.5k_2{}^2a^2\right)J_n(k_1a)+k_1aJ_{n+1}(k_1a)\right]\right.$$

$$+B_n\left[\left(n^2-n-0.5k_2{}^2a^2\right)Y_n(k_1a)+k_1aY_{n+1}(k_1a)\right]$$

$$+G_n\left[\left(n^2-n\right)J_n(k_2a)-nk_2aJ_{n+1}(k_2a)\right]$$

$$\left.+H_n\left[\left(n^2-n\right)Y_n(k_2a)-nk_2aY_{n+1}(k_2a)\right]\right\}=0 \qquad n=1,2,..,N$$

(3.18)

$$+\left\{C_n\left[\left(n^2-n-0.5k_2{}^2a^2\right)J_n(k_1a)+k_1aJ_{n+1}(k_1a)\right]\right.$$

$$+D_n\left[\left(n^2-n-0.5k_2{}^2a^2\right)Y_n(k_1a)+k_1aY_{n+1}(k_1a)\right]$$

$$+E_n\left[\left(-n^2+n\right)J_n(k_2a)+nk_2aJ_{n+1}(k_2a)\right]$$

$$\left.+F_n\left[\left(-n^2+n\right)Y_n(k_2a)+nk_2aY_{n+1}(k_2a)\right]\right\}=0 \qquad n=1,2,..,N$$

(3.19)

2N+1 adet denklem elde edilir.

$$\tau_{r\theta}=\frac{2\mu}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big\{A_n\Big[\left(-n^2+n\right)J_n(k_1r)+nk_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+B_n\Big[\left(-n^2+n\right)Y_n(k_1r)+nk_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+G_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)J_n(k_2r)-k_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big]$$

$$+H_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)Y_n(k_2r)-k_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\sin n\theta$$

$$+\Big\{C_n\Big[\left(n^2-n\right)J_n(k_1r)-nk_1rJ_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+D_n\Big[\left(n^2-n\right)Y_n(k_1r)-nk_1rY_{n+1}(k_1r)\Big]$$

$$+E_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)J_n(k_2r)-k_2rJ_{n+1}(k_2r)\Big]$$

$$+F_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2r^2\right)Y_n(k_2r)-k_2rY_{n+1}(k_2r)\Big]\Big\}\cos n\theta\Big]=\tau_0 \qquad (3.20)$$

(3.20) denkleminin θ' nın her değerinde sağlanabilmesi için $\cos n\theta$' nın çarpanı olan ifade $n=0$ da τ_0' a eşit olmalı, n' nin diğer bütün değerlerinde $\cos n\theta$ ve $\sin n\theta$' nın çarpanı sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre (3.20) ifadesinden,

$n=0$ için:

$$+E_0\Big[\left(0.5{k_2}^2a^2\right)J_0(k_2a)-k_2aJ_1(k_2a)\Big]+F_0\Big[\left(0.5{k_2}^2a^2\right)Y_0(k_2a)-k_2aY_1(k_2a)\Big]\Big\}=\tau_0 \qquad (3.21)$$

$n > 0$ için:

$$\Big\{A_n\Big[\left(-n^2+n\right)J_n(k_1a)+nk_1aJ_{n+1}(k_1a)\Big]$$

$$+B_n\Big[\left(-n^2+n\right)Y_n(k_1a)+nk_1aY_{n+1}(k_1a)\Big]$$

$$+G_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2a^2\right)J_n(k_2a)-k_2aJ_{n+1}(k_2a)\Big]$$

$$+H_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2a^2\right)Y_n(k_2a)-k_2aY_{n+1}(k_2a)\Big]\Big\}=0 \qquad n=1,2,..,N$$

(3.22)

$$+\Big\{C_n\Big[\left(n^2-n\right)J_n(k_1a)-nk_1aJ_{n+1}(k_1a)\Big]$$

$$+D_n\Big[\left(n^2-n\right)Y_n(k_1a)-nk_1aY_{n+1}(k_1a)\Big]$$

$$+E_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2a^2\right)J_n(k_2a)-k_2aJ_{n+1}(k_2a)\Big]$$

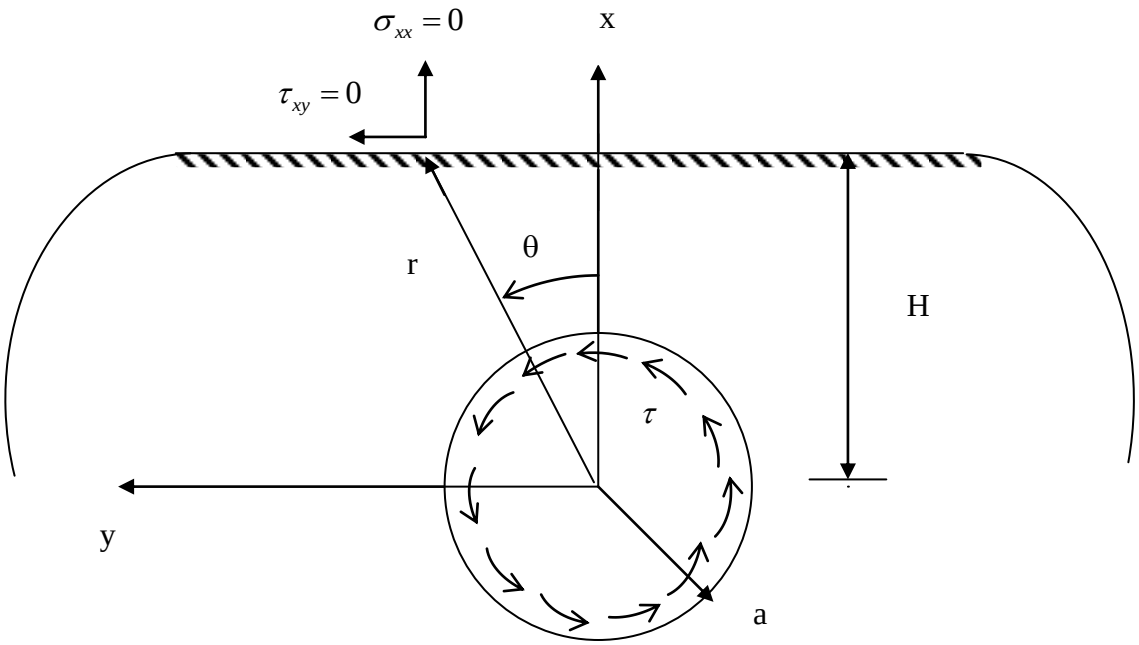
$$+F_n\Big[\left(-n^2+n+0.5{k_2}^2a^2\right)Y_n(k_2a)-k_2aY_{n+1}(k_2a)\Big]=0 \qquad n=1,2,..,N$$

(3.23)

2N+1adet denklem elde edilir.

Seri çözümlerde pratik olarak sonsuz terim alınması mümkün olmamaktadır. Bununla beraber ikinci nevi Bessel fonksiyonları Y_n özellikle büyük mertebelerinde küçük argüman olması halinde sayısal işlemlerde sorun çıkarmaktadır. Bu nedenle seriler N gibi sonlu bir sayıda kesilmiştir. Bu durumda toplam bilinmeyen sayısı $8N+4$ olmaktadır. Burada normal gerilmeye ait (3.16) ifadesinde $2N+1$ ve kayma gerilmesine ait (3.20) ifadesinde de $2N+1$ tane bağıntı yazılmaktadır. Böylece oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından $4N+2$ bilinmeyen geri kalan $4N+2$ adet bilinmeyen cinsinden elde edilmiş olur.

3.3.2. Serbest yüzeydeki sınır koşulları



Şekil 3.3.1. Serbest yüzeydeki sınır koşulları.

Serbest yüzey üzerinde,

$$\sigma_{xx}\Big|_{x=H} = 0 \qquad \tau_{xy}\Big|_{x=H} = 0 \tag{3.24}$$

olmalıdır.

Oyuk üzerindeki sınır koşulların sağlatılması sonucu geriye kalan $4N$+2 adet bilinmeyen serbest yüzey üzerindeki (3.24) koşullarından sağlatılarak bulunacaktır. Ancak sonlu sayıda koşula ihtiyacımız olduğundan bu durumda (3.24) sınır koşullarının yüzeyin her noktasında sağlatılması mümkün değildir. Buradaki sınır koşullarının yerine "En Küçük Kareler Yöntemi" kullanılacaktır. En küçük kareler yöntemine göre, serbest yüzey üzerinde hesapla elde edilen ve sınırda verilen gerilmelerin farkının karelerinin toplamının minimum olması gerekmektedir.

$$d = \sum_{k=1}^{M} \left[\left(\sigma_{xx}^{(k)} - \hat{\sigma}_{xx}^{(k)} \right)^2 + \left(\tau_{xy}^{(k)} - \hat{\tau}_{xy}^{(k)} \right)^2 \right] \qquad (3.25)$$

Burada *M* serbest yüzey üzerinde alınan nokta sayısını, $\sigma_{xx}^{(k)}$ ve $\tau_{xy}^{(k)}$ serbest yüzeyde herhangi bir *k* noktasında hesaplanan gerilme bileşenlerini, $\hat{\sigma}_{xx}^{(k)}$ ve $\hat{\tau}_{xy}^{(k)}$ ise serbest yüzeye herhangi bir *k* noktasında dışardan etkiyen gerilme bileşenlerini göstermektedir. Serbest yüzeyde gerilme etkimediği için $\hat{\sigma}_{xx}^{(k)}$ ve $\hat{\tau}_{xy}^{(k)}$ her ikisi de sıfırdır. Kutupsal koordinatlarda yazmış olduğumuz (3.12.a) (3.12.c) gerilme bağıntılarının (3.14) dönüşüm formüllerinde kullanılması sonucu serbest yüzeydeki gerilme bileşenlerinin ifadeleri elde edilmiş olur. Serbest yüzey üzerindeki bu toplamı minimize etmek için geri kalan serbest bilinmeyenlere göre türev alırsak, (3.25) koşuldan aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\frac{\partial d}{\partial A_n} = 2\sum_{k=1}^{M} \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial A_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial A_n} \right] = 0, \quad n = 0,1,2,...,N$$

$$\frac{\partial d}{\partial B_n} = 2\sum_{k=1}^{M} \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial B_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial B_n} \right] = 0, \quad n = 1,2,...,N$$

$$\frac{\partial d}{\partial E_n} = 2\sum_{k=1}^{M} \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial E_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial E_n} \right] = 0, \quad n = 0,1,2,...,N$$

$$\frac{\partial d}{\partial F_n} = 2\sum_{k=1}^{M} \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial F_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial F_n} \right] = 0, \quad n = 1,2,...,N$$

(3.25)

Yukarıdaki (3.25) bağıntılarından 4*N*+2 adet koşul elde edilir. Bu işlem sonunda *4N+2* bilinmeyen için *4N+2* denklem elde edilmiş olur. Bu cebirsel denklem takımının çözümü ile A_n, B_n, E_n, F_n bilinmeyenleri bulunur. (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) bağıntıları kullanılarak, C_n, D_n, G_n, H_n bilinmeyenlerinin hesabı ile çözüm tamamlanmış olur.

4.SONUÇLAR

4.1.SAYISAL VERİLER

Harmonik iç zorlama etkisindeki silindirik oyuk bulunduran elastik yarım uzay ile ilgili sayısal işlem sonuçları bilgisayar yadımı ile çizilen çeşitli grafikler yardımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

Sayısal uygulamalarda kullanılan malzeme sabitleri ve harmonik zorlama genliği,

$\rho = 2665\ kg/m^3$, $E = 7.567x10^9\ N/m^2$, $\nu = 0{,}25$, $\lambda = \mu = 30268x10^5\ N/m^2$

$\tau_0 = 100000\ N/m^2$

4.2. SAYISAL SONUÇLAR

Yukarıdaki veriler kullanılarak En Küçük Kareler yöntemi yardımı ve Mathematica 4.0 programı ile bilinmeyen katsayılar, ω zorlama frekansı, ve H oyuk merkezinin derinliğinin çeşitli değerleri için sayısal olarak hesaplanmıştır. Bu hesap sonunucunda yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimi aşağıdaki grafikler yardımı ile gösterilmiştir. Sayısal hesaplarda $N = 6$ ve $a = 5m$ olarak alınmıştır.

Şekil 4.1 ve 4.2 de ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenlerinin değişimi görülmektedir. Bu değerlerin sıfır olması gerekirken yapılan yaklaşık çözüm nedeniyle sıfırdan farklı sonuç elde edilmiştir. Ancak yapılan en büyük hata %13 mertebesindedir. Grafiklerden gerilmelerin en büyük değerlerinin delik çapının iki misli bir bölgede olduğu, uzaklaştıkça hızla söndüğü görülmektedir.

Şekil 4.3 ve 4.4 de ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde yer değiştirmelerin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.5 ve 4.6 da ω=60 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyinde σ_{rr} ve $\tau_{r\theta}$ gerilme bileşenlerinin değişimi verilmektedir. Grafiklerden sınır koşullarının tam olarak sağlatıldığı görülmektedir.

Şekil 4.7 ve 4.8 de ω=60 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki yer değiştirmelerin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.9 da ω=60 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.10 da ω=80 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.11 ve 4.12 de ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenlerinin değişimi görülmektedir. Burada da görüldüğü gibi hata en fazla %12 mertebesindedir.

Şekil 4.13 ve 4.14 de ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde yer değiştirmelerin değişimi verilmektedir. Görüldüğü gibi frekansın artması yer değiştirmeleri azaltmıştır.

Şekil 4.15 ve 4.16 de ω=80 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki yer değiştirmelerin değişimi verilmektedir. Burada da frekansın artmasıyla yer değiştirmeler azalmıştır.

Şekil 4.17 ve 4.18 de ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenlerinin değişimi görülmektedir. Burada görüldüğü gibi hata en fazla %13 mertebesindedir.

Şekil 4.19 ve 4.20 de ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde yer değtirmelerin değişimi verilmektedir. Frekansın artmasıyla yer değiştirmeler biraz daha azalmıştır.

Şekil 4.21 ve 4.22 de ω=100 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler verilmiştir. Frekansın artmasıyla yer değiştirmeler biraz daha azalmıştır.

Şekil 4.23 de ω=100 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.24 de ω=120 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmektedir.

Şekil 4.25 ve 4.26 da ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenlerinin değişimi görülmektedir. Burada görüldüğü gibi hata en fazla %14 mertebesindedir.

Şekil 4.27 ve 4.28 de ω=120 rad/sn, H=10 m için serbest yüzey üzerinde yer değtirmelerin değişimi verilmektedir. Frekansın artmasıyla yer değiştirmeler biraz daha azalmıştır.

Şekil 4.29 ve 4.30 da ω=120 rad/sn, H=10 m için oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler verilmiştir. Frekansın artmasıyla yer değiştirmeler biraz daha azalmıştır.

Şekil 4.31 ve 4.32 de ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenlerinin değişimi verilmektedir. Derinliğin artmasıyla hata azalmıştır. Görüldüğü gibi en fazla %6 mertebesindedir.

Şekil 4.33 ve 4.34 de ω=80 rad/sn, H=15 m için serbest yüzey üzerinde yer değiştirmelerin değişimi verilmektedir. Derinliğin artmasıyla yer değiştirmeler azalmıştır.

Şekil 4.35 ve 4.36 da ω=80 rad/sn, H=15 m için oyuk yüzeyindeki yer değiştirmeler verilmiştir. Derinliğin artmasıyla yer değiştirmeler azalmıştır.

Şekil 4.37 de ω=80 rad/sn, H=15 m için oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi değişimi verilmektedir.

5.TARTIŞMA

Bu çalışmada, serbest yüzeyden H kadar derinlikte, a yarıçaplı dairesel bir oyuk içeren yarım düzlemin, oyuk yüzeyinden harmonik zorlanması altındaki davranışı incelenmiştir. Bu harmonik zorlama uniform yayılı kayma gerilmesi şeklindedir.

Elde edilen kuple denklem takımı, Helmholtz yer değiştirme potansiyellerinin kullanılması ile ayrıklaştırılmış ve Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri ile kapalı çözüm yapılmıştır. Denklemlerin kapalı olarak çözülmesine karşılık sınır koşullarının sağlatılmasında zorluk ortaya çıkmaktadır. Kutupsal koordinatların kullanılması nedeniyle oyuk yüzeyindeki sınır koşulları tam olarak sağlatılmış, ancak serbest yüzey üzerinde sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılabilmiştir.

ω zorlama frekansı ve H derinliğini çeşitli değerlerine göre yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimi grafikler yardımı ile verilmiştir.

Serbest yüzey üzerinde her iki tarafta derinliğin ortalama olarak iki katı gibi bir bölgede oyuktan gelen dinamik etkilerin önemli olduğu bunun dışında etkilerin azaldığı gözlenmiştir. Yaklaşık çözüm nedeniyle en büyük hata %14 mertebesindedir. Çözüm serisinde terim sayısının arttırılması ile bu hatanın azalacağı tahmin edilmektedir. Ancak bilgisayarda çözüm süresinin çok uzun olması nedeniyle şimdilik 6 terim alınabilmiştir.

Bu problemin devamında olabilecek çalışmalar,

1. Zorlamanın rastgele olması (çevre ve zaman üzerinde)
2. Zorlamanın oyuk ekseni boyunca değişken olması
3. Ortamın homogen olmaması
4. Ortamın viskoelastik olması
5. Serbest yüzeyin herhangi bir şekilde olması
6. Oyuk çevresinin daireden farklı olması

olarak özetlenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Eringen, A.C., Suhubi, E.S., 1975. Elastodynamics, Vol II, Academic press, New York.

[2] Graff, K.F., 1975. Wave motion in elastic solids, Clarendron press, Oxford.

[3] Hildebrand, F.B., 1962. Advanced calculus for applications, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey.

[4] İnan, M., 1969. Düzlemde elastisite teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı:750, İstanbul.

[5] Tameroğlu, S., 1991. Elastisite teorisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi matbası, Sayı:1434 İstanbul.

[6] Timoshenko, S. and Goodier, J.N., 1951. Theory of elasticity, McGraw Hill Book Campany press, Sayı:757, New York.

[7] Tranter, C.J., 1968. Bessel functions with some physical aplications, The English Universty press, Londan.

[8] Bayıroğlu, H., 1995. Yarı düzlemde gömülü yapıların zorlanmış titreşimleri, *Doktora Tezi,* I.T.U. Fen Bilimleri Enstitüsü, Istanbul.

[9] Akpınar, M., 2000. Harmonik basınç etkisindeki yarım düzlem problemi, *Yüksek Lisans Tezi*, I.T.U. Fen Bilimleri Enstitüsü, Istanbul.

[10] Balendra, T., Chua, K.H., Lo, K.W. and Lee, S.K., 1989. Steady – state vibration of subway – soil-building system, *Journal of Engineering Mechanichs,* **115,** 145-162.

[11] Balendra, T., Koh, C.G., Ho, Y.C., 1991. Dynamics response of buildings due to trains in underground tunnels, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **20**, 275-291.

[12] Bravo, M.A. and Sanches-Sesma, F.J., 1987. Treffz's methodfor vibration of rigid plate, *Journal of Engineering Mechanichs* **113**, 885-892.

[13] Datta, S.K., Shah, A.H., Wong, K.C., 1984. Dynamic stress and displacements in buried pipe, *Journal of Engineering Mechanichs,* **110,** 1451-1466.

[14] El-Akıly, N., Datta, S.K.,1981. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **9,** 477-487.

[15] Engin, H., Coşkun, I., 2001. Boşluk içeren yarım uzayda zorlanmış titreşimler, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi,* 365-374.

[16] Luco, J.E. and De Barros, F.C.P., 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space-I: Formulation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **23,** 553-567.

[17] Luco, J.E. and De Barros, F.C.P., 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space-II: Formulation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **23,** 569-580.

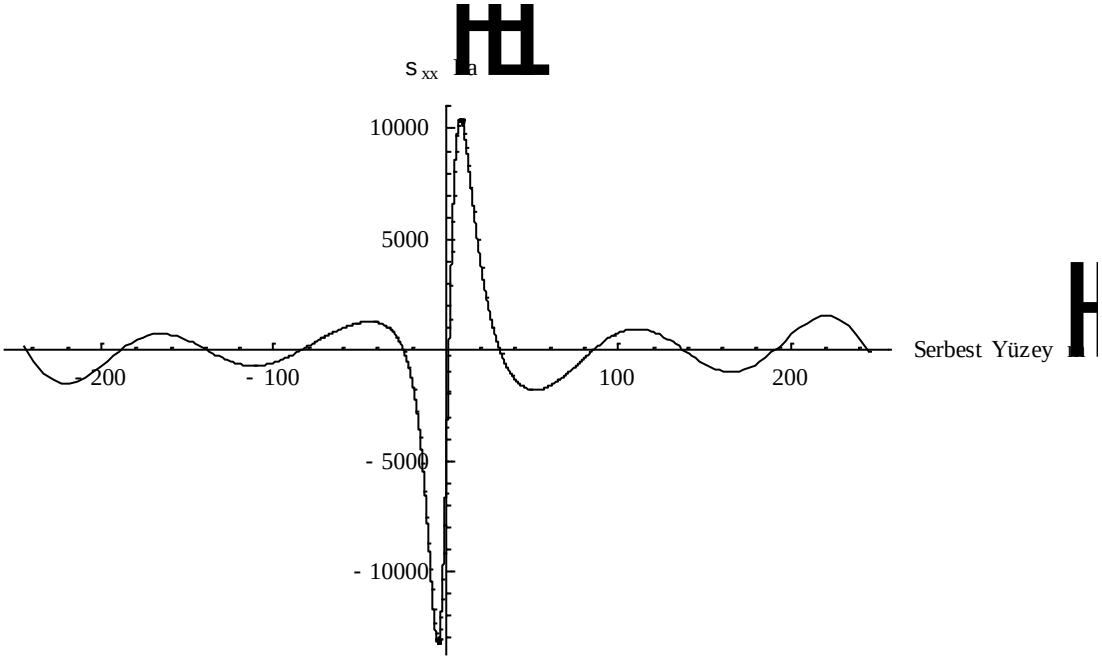
[18] Wong, K.C., Shah, A.H. and Datta, S.K., 1985. Dynamic stress and displacements in a buried tunnel, *Journal of Engineering Mechanichs,* **111,** 218-234.

EKLER

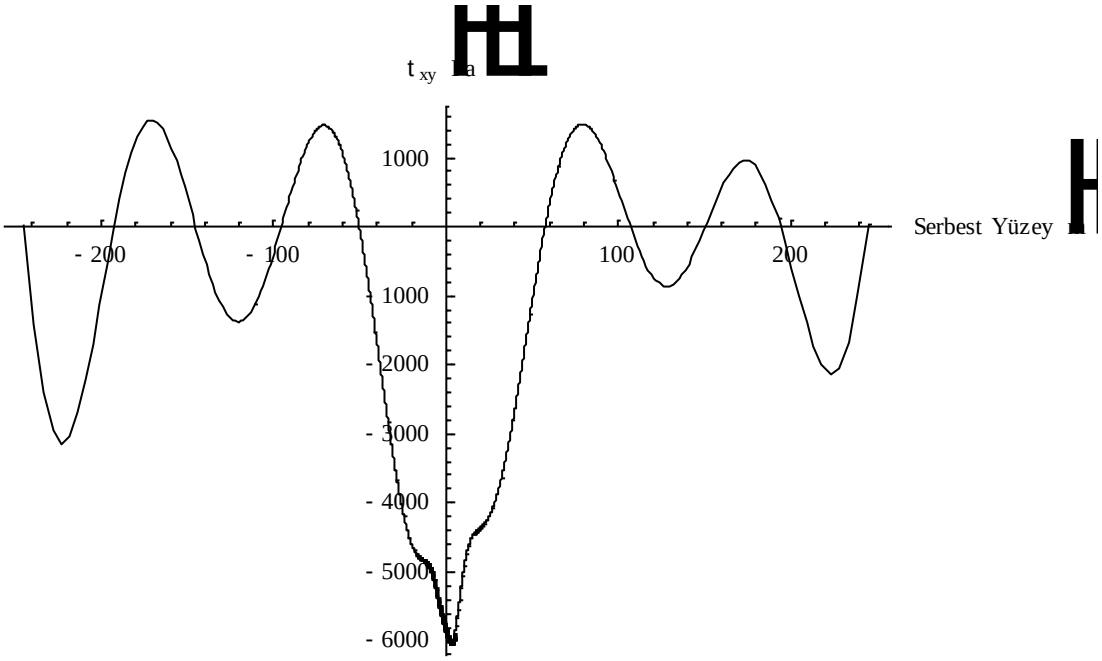
Sayfa No

EK A……...**32**

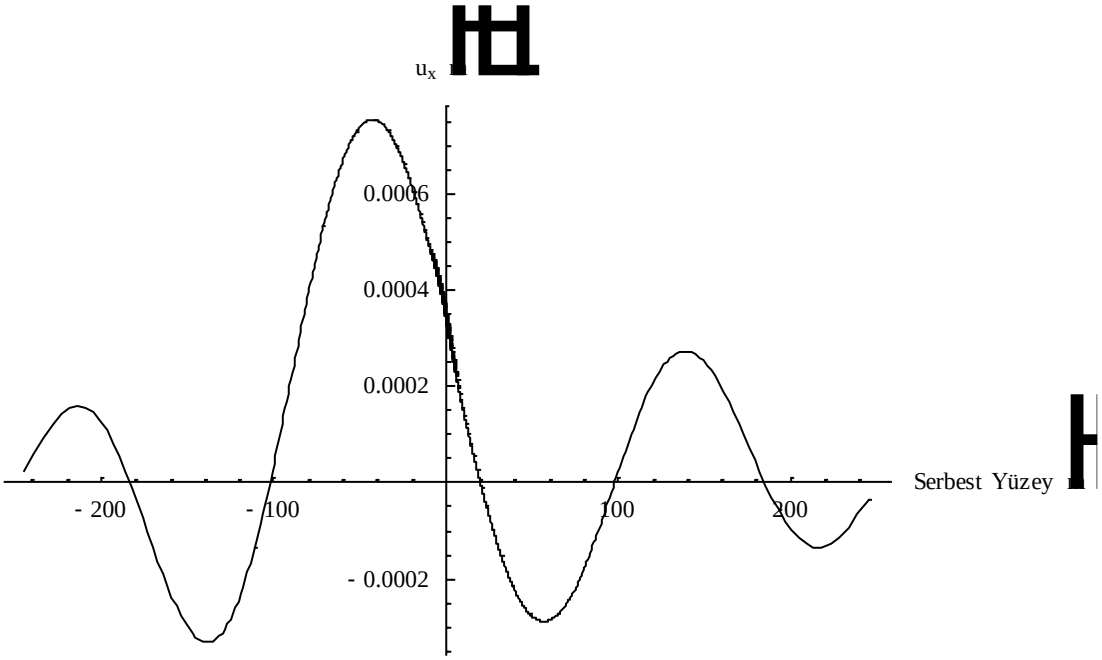
EK



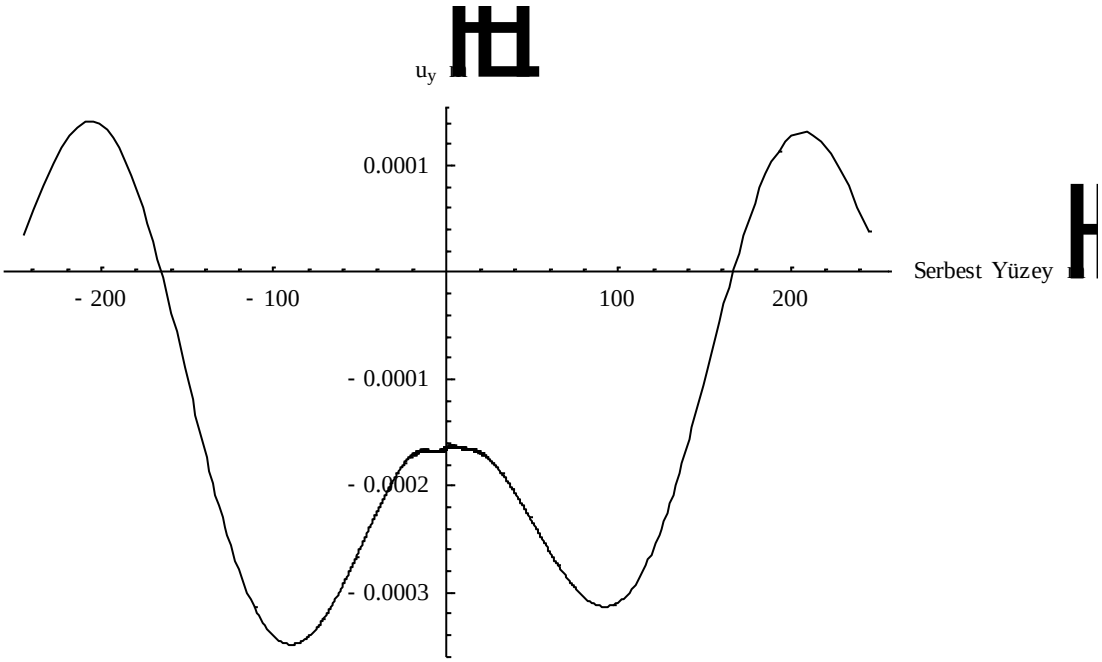
Şekil 4.1 ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki σ_{xx} gerilmesi.



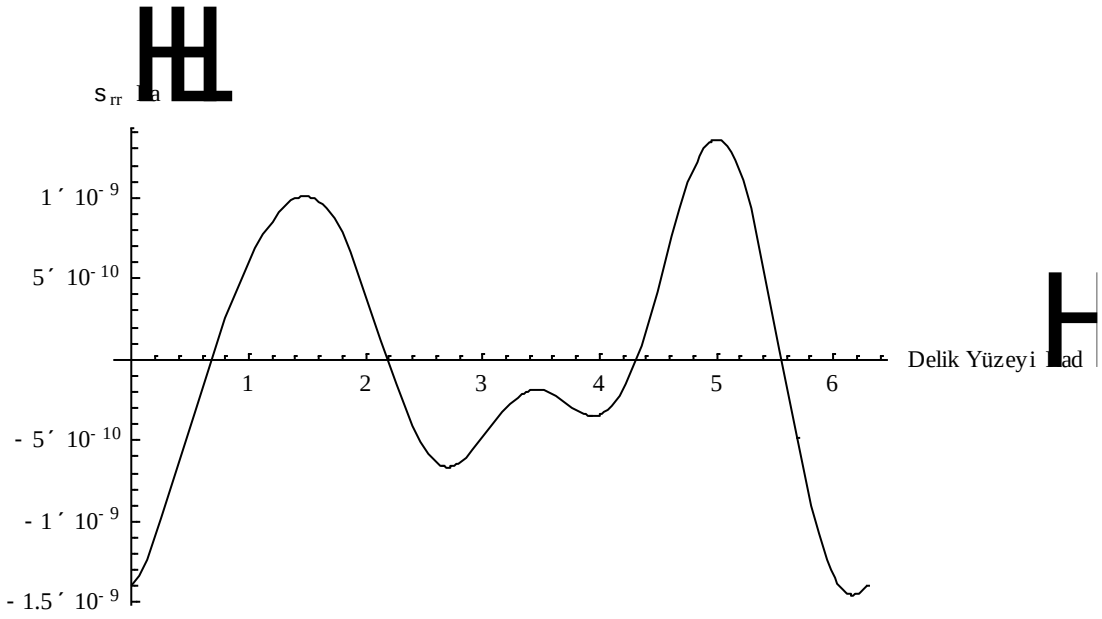
Şekil 4.2 ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki τ_{xy} gerilmesi.



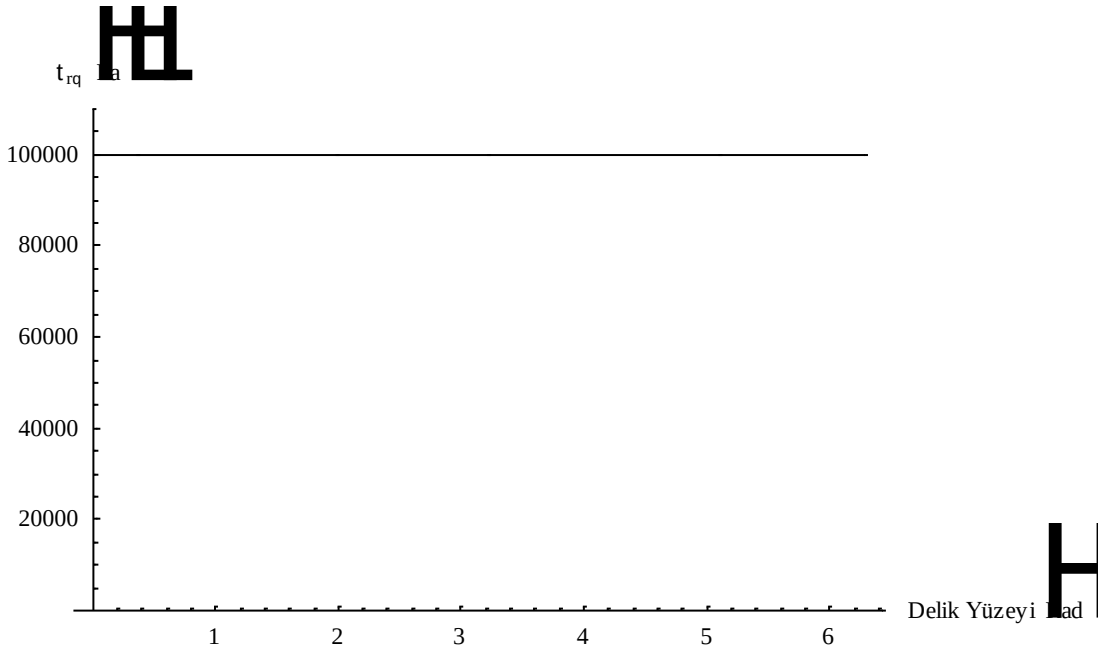
Şekil 4.3 ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_x yer değiştirmesi.



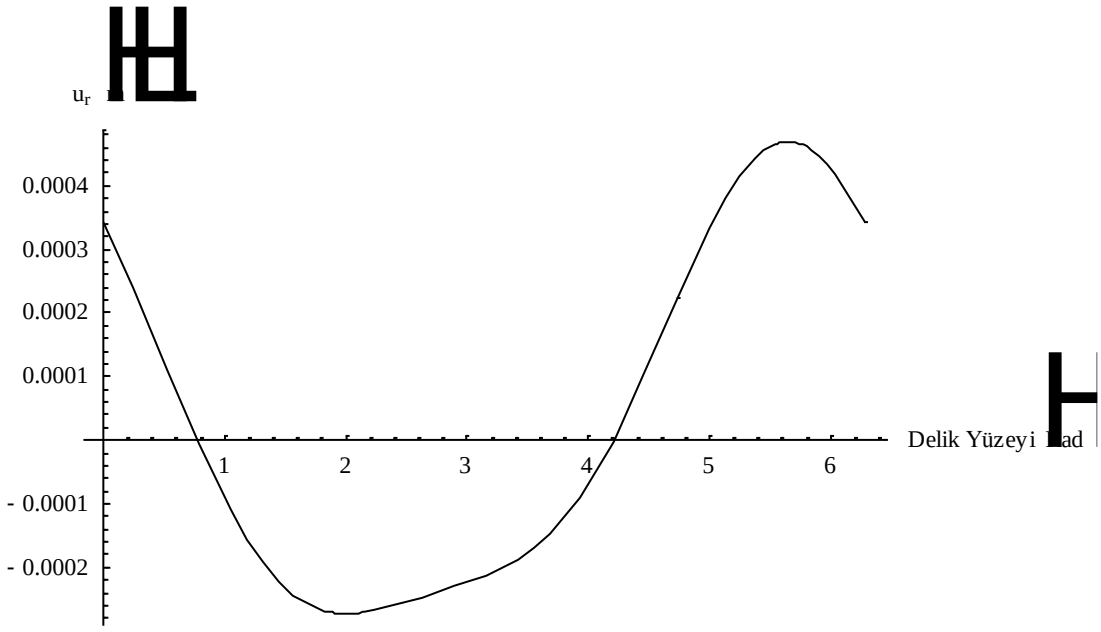
Şekil 4.4 ω=60 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_y yer değiştirmesi.



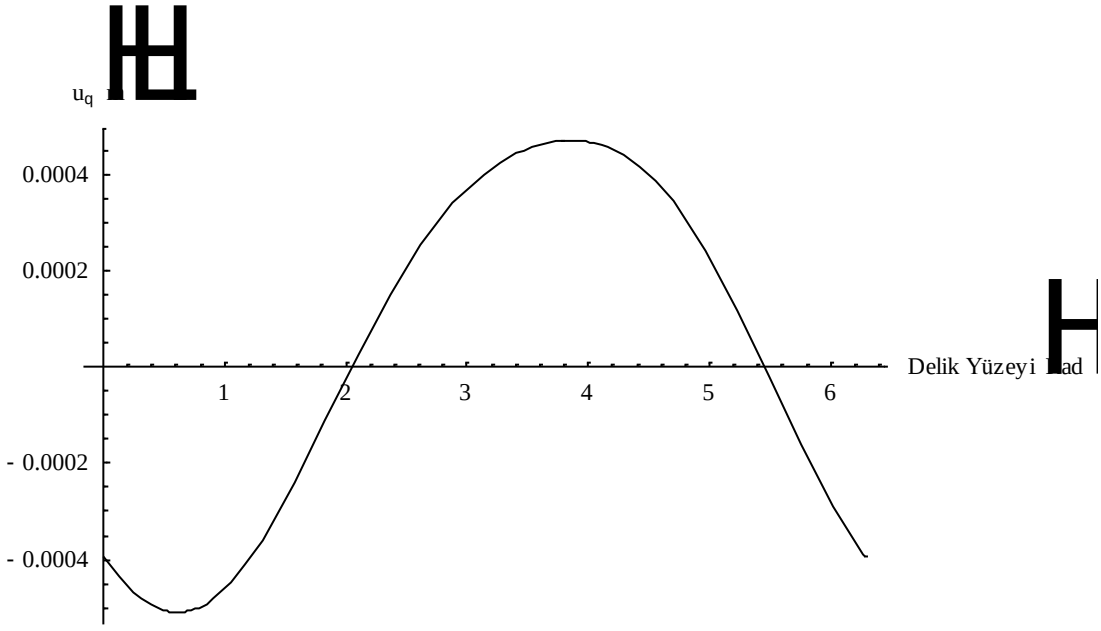
Şekil 4.5 ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki σ_{rr} gerilmesi.



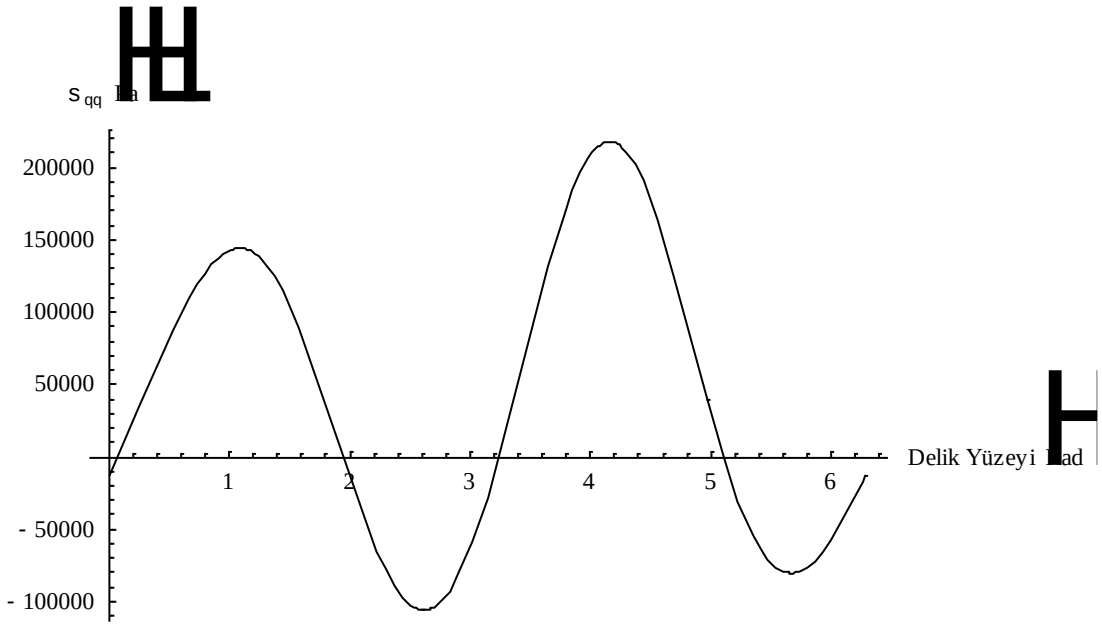
Şekil 4.6 ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ gerilmesi.



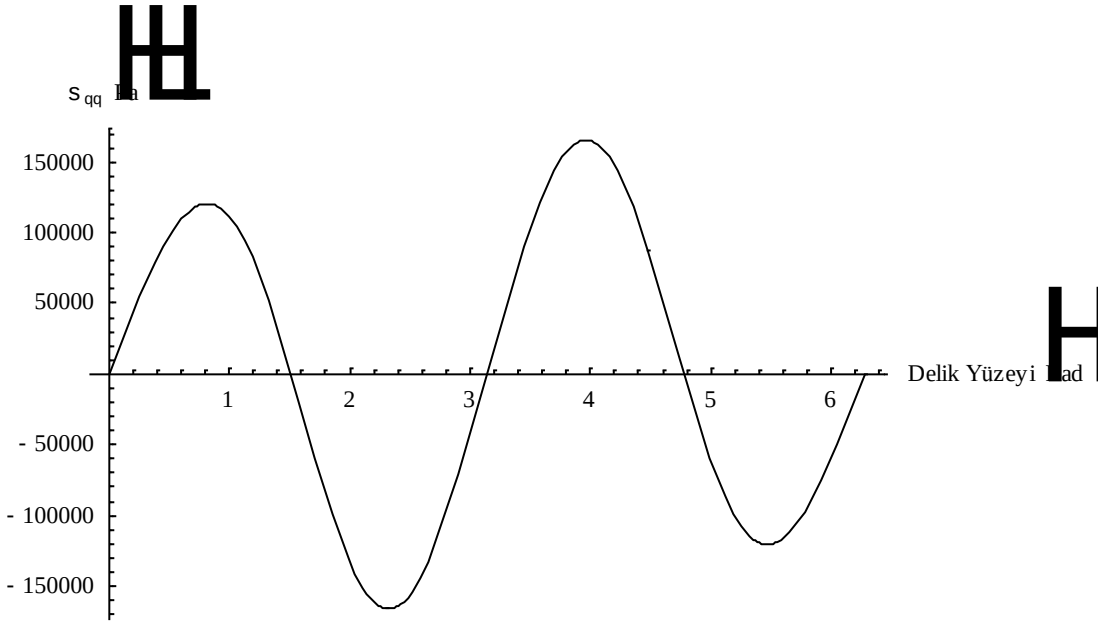
Şekil 4.7 ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_r yer değiştirmesi.



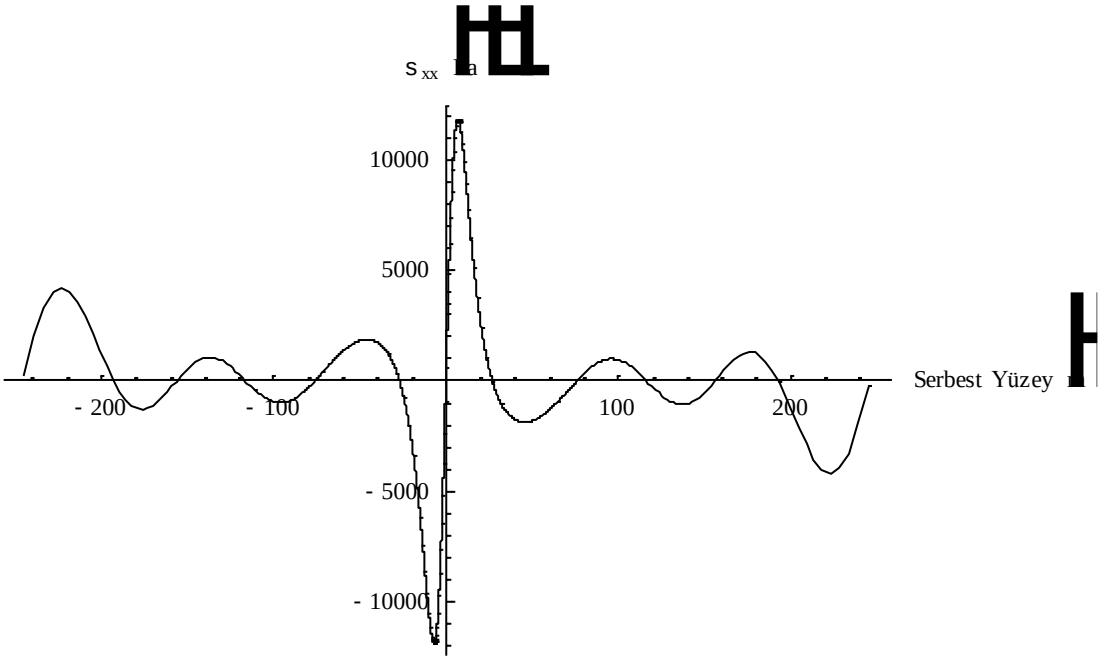
Şekil 4.8 ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_θ yer değiştirmesi.



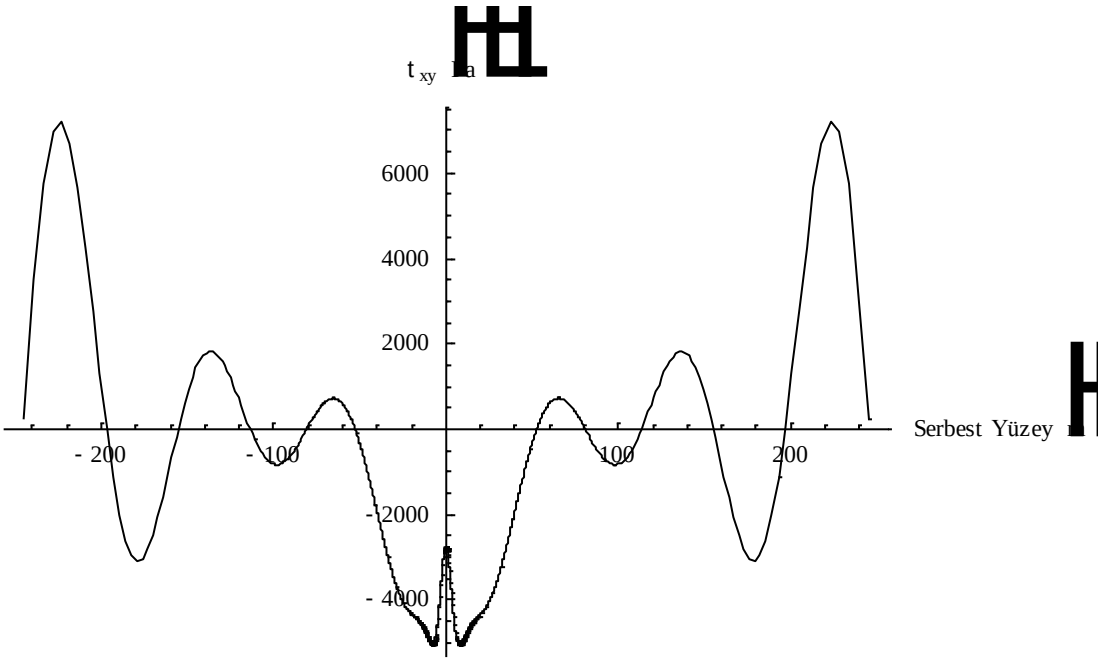
Şekil 4.9 ω=60 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi.



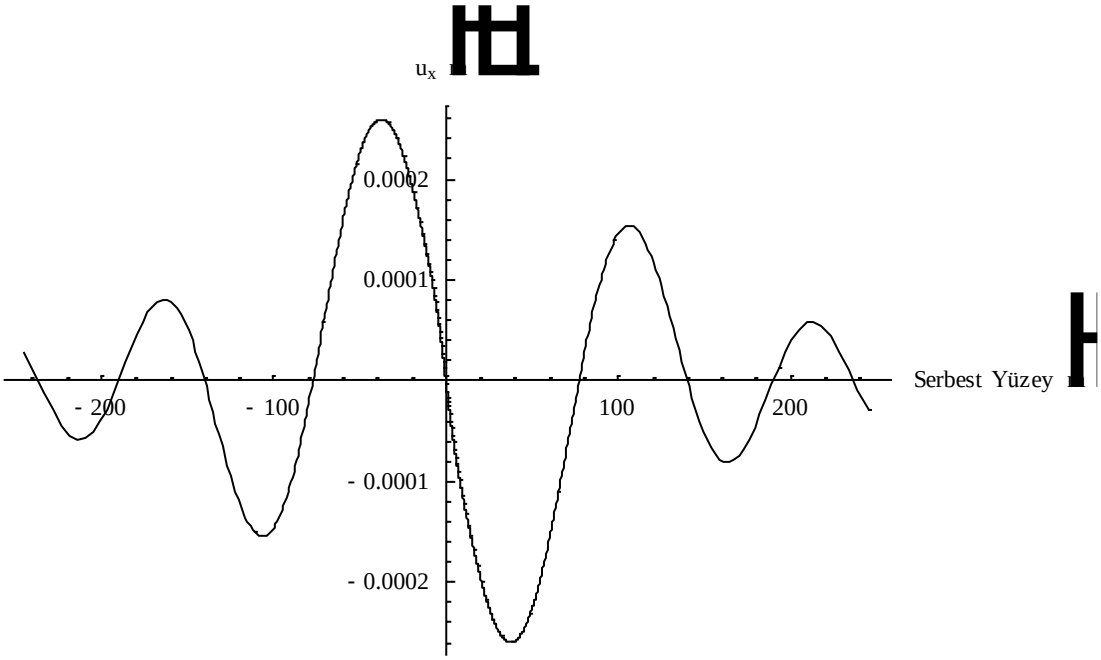
Şekil 4.10 ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi.



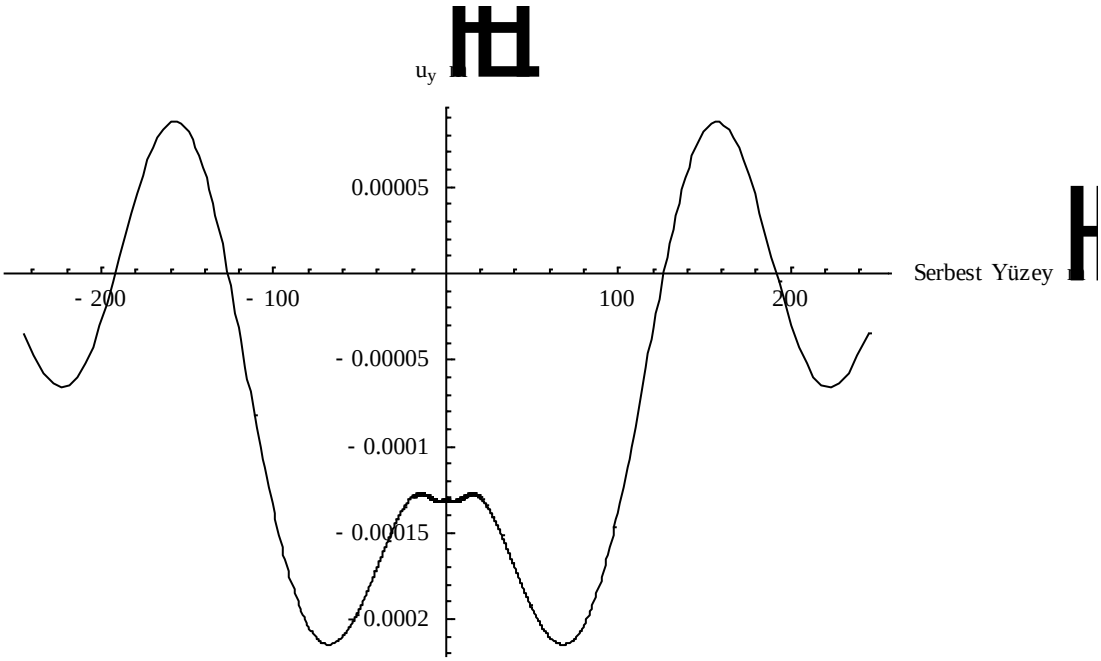
Şekil 4.11 ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki σ_{xx} gerilmesi.



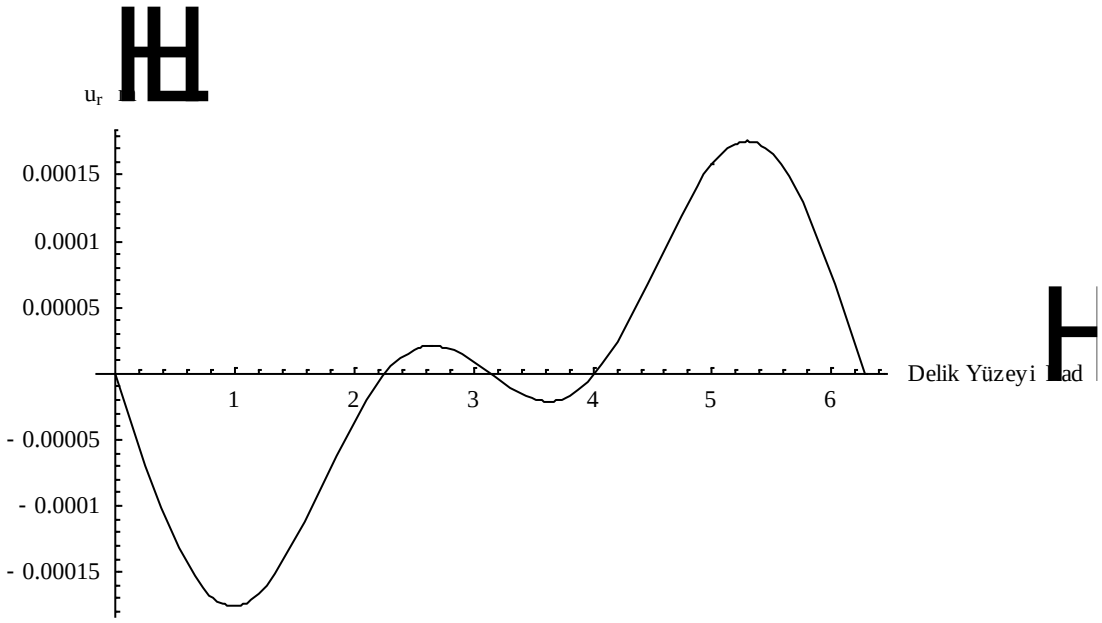
Şekil 4.12 ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki τ_{xy} gerilmesi.



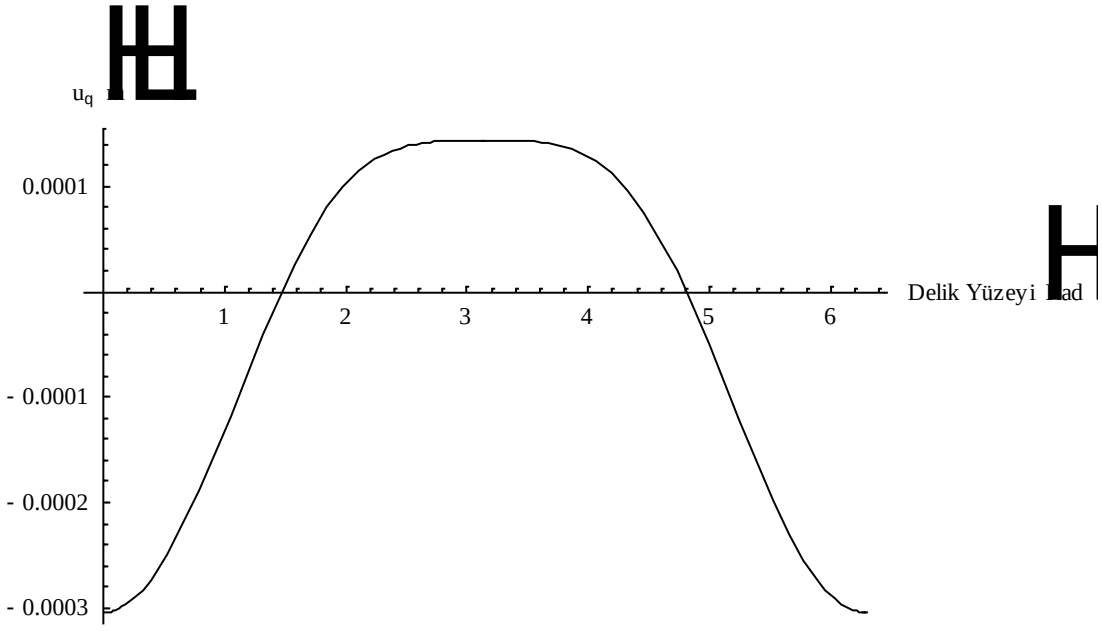
Şekil 4.13 ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_x yer değiştirmesi.



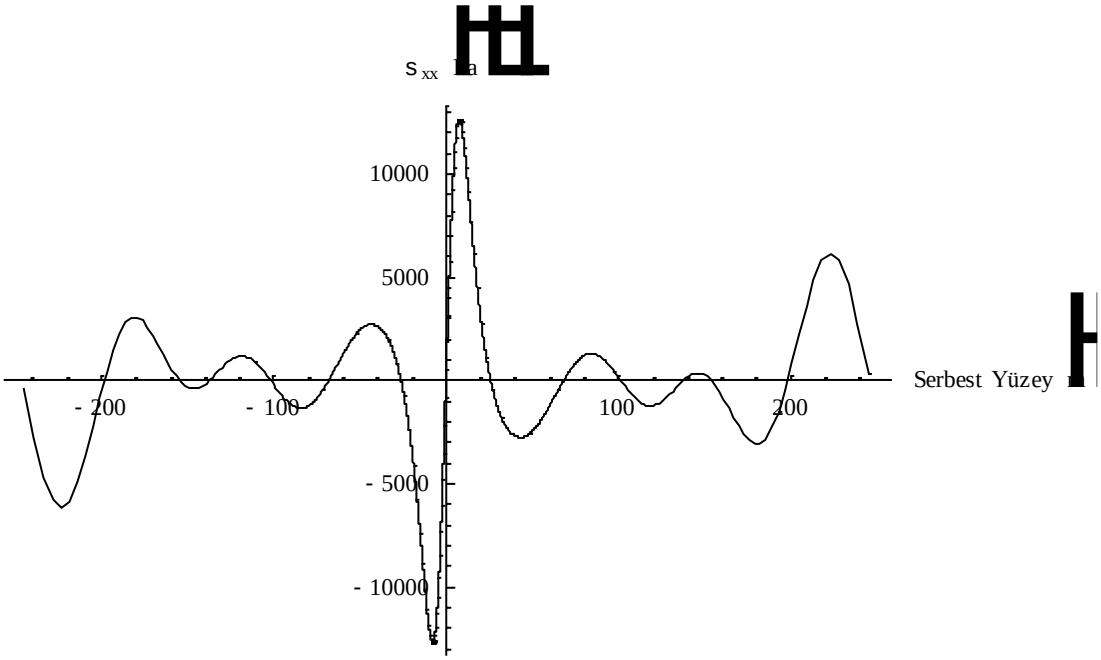
Şekil 4.14 ω=80 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_y yer değiştirmesi.



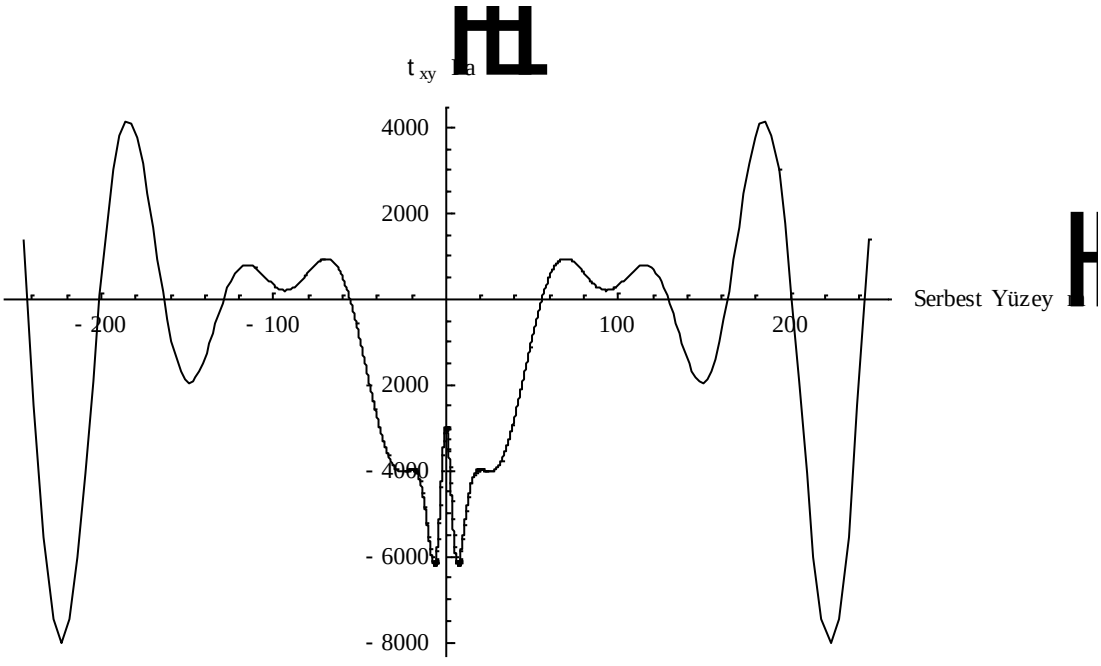
Şekil 4.15 ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_r yer değiştirmesi.



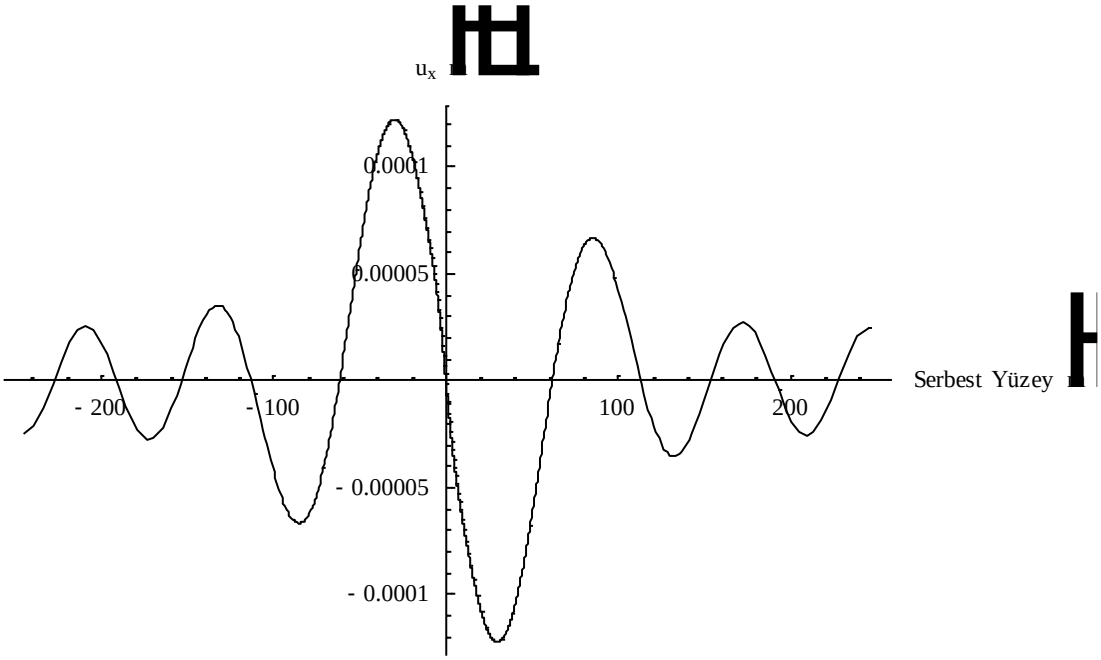
Şekil 4.16 ω=80 rad/sn, H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_θ yer değiştirmesi.



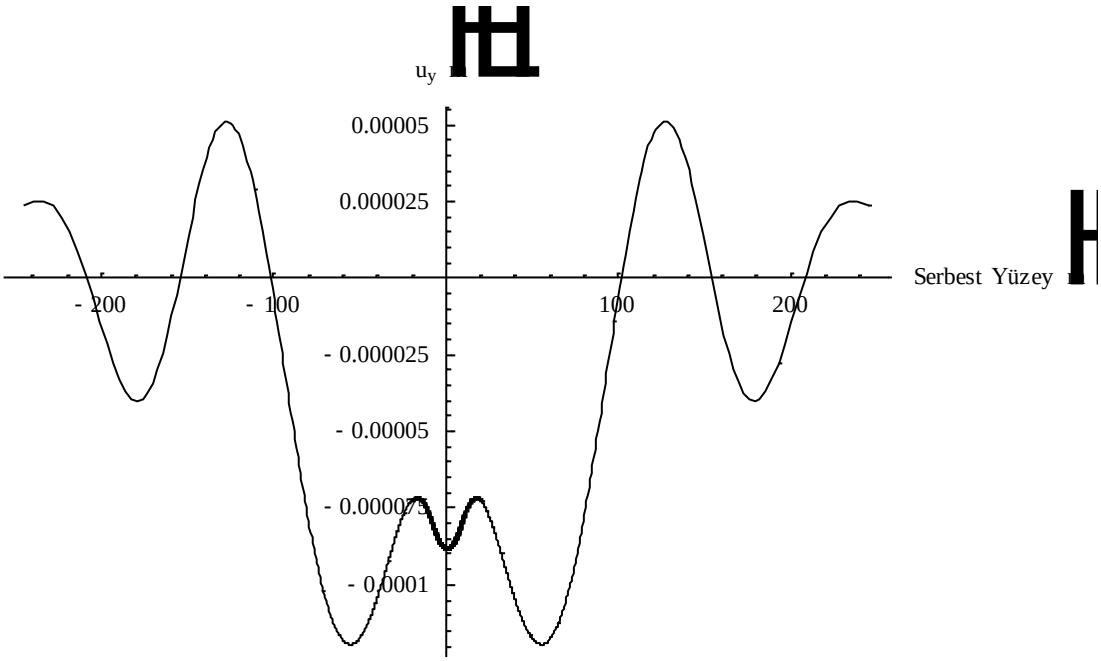
Şekil 4.17 ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki σ_{xx} gerilmesi.



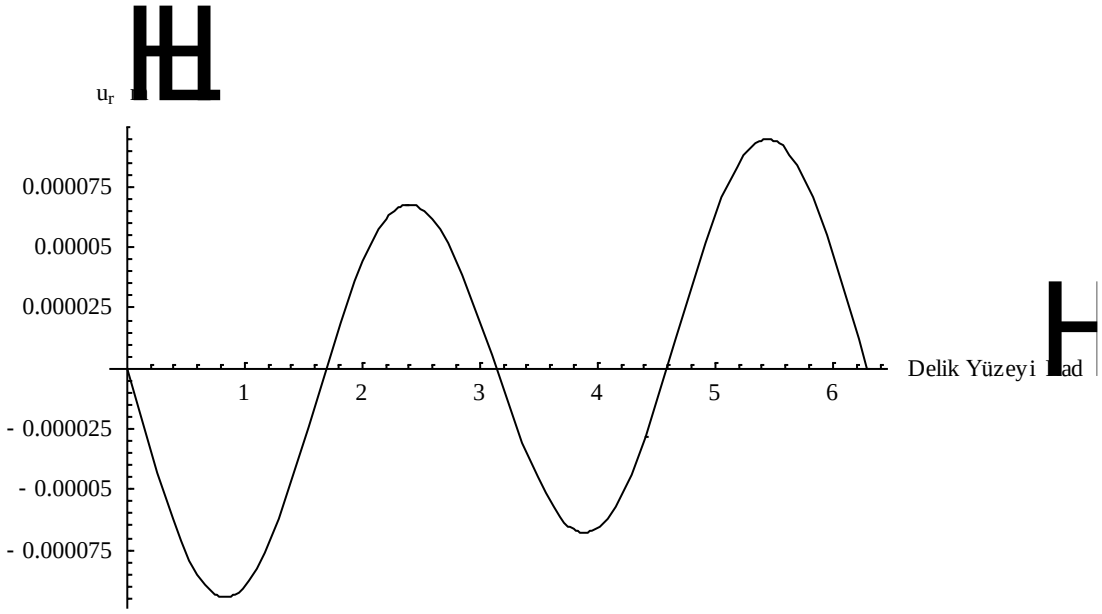
Şekil 4.18 ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki τ_{xy} gerilmesi.



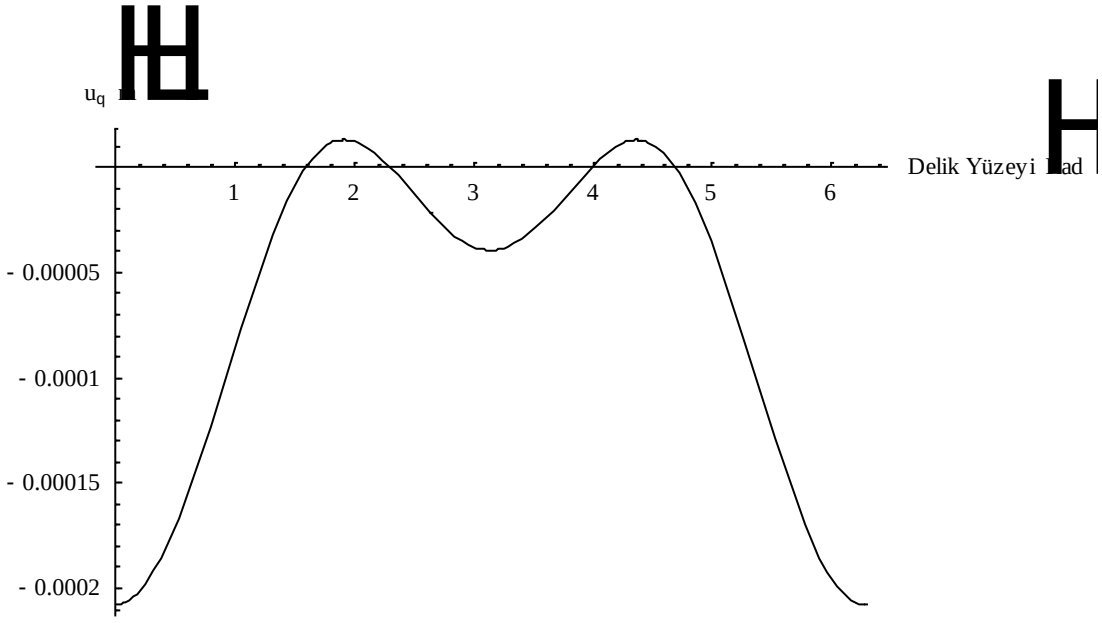
Şekil 4.19 ω=100 rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_x yer değiştirmesi.



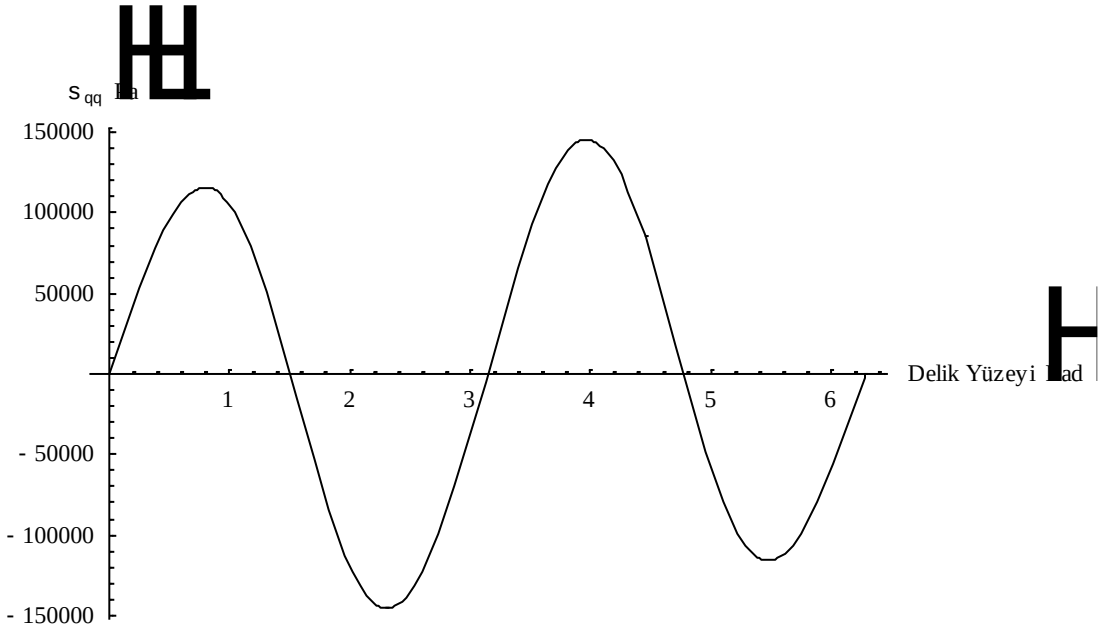
Şekil 4.20 $\omega = 100$ rad/sn, H=10 m için serbest yüzeydeki u_y yer değiştirmesi.



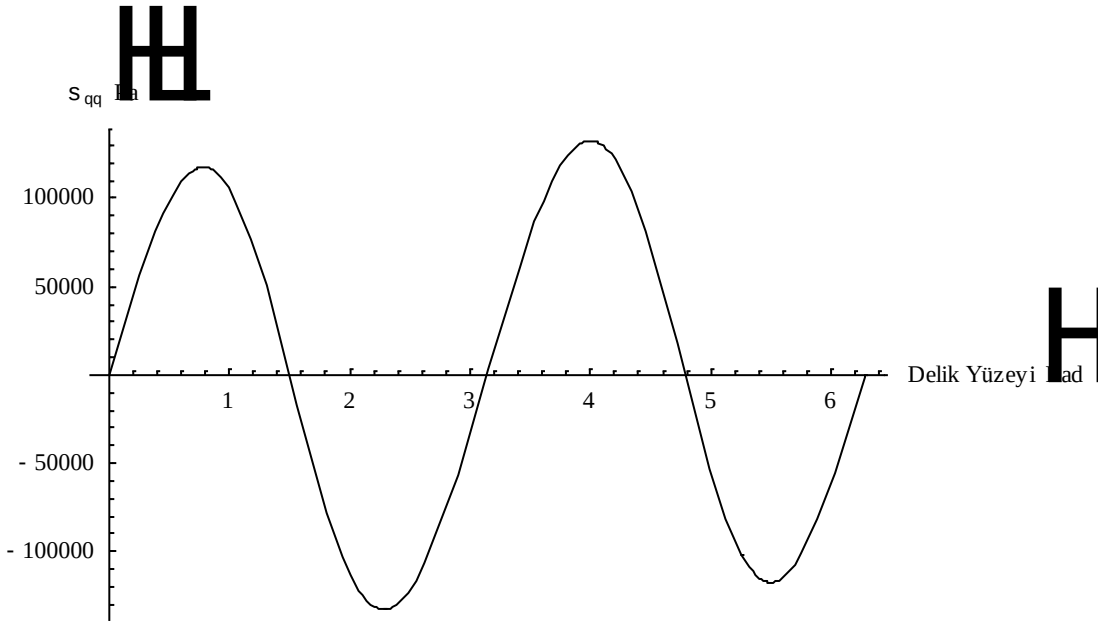
Şekil 4.21 ω=100 rad/sn H=10 m için silindirik boşluğun yüzeyindeki u_r yer değiştirmesi.



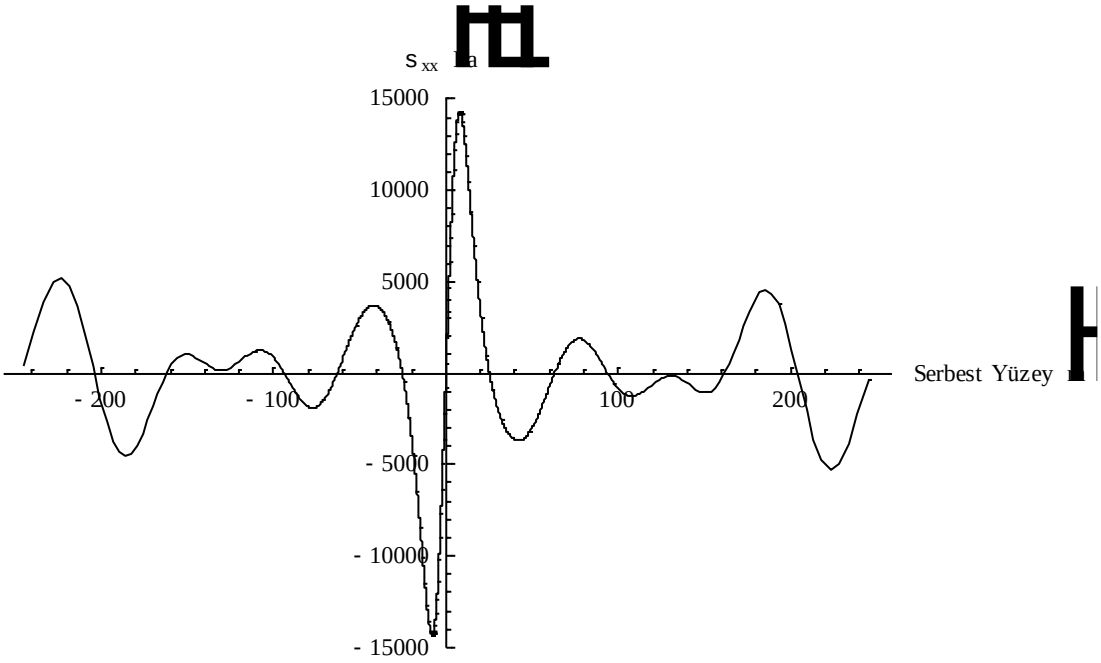
Şekil 4.22 ω=100 rad/sn H=10 m için silindirik boşluğun yüzeyindeki u_θ yer değiştirmesi.



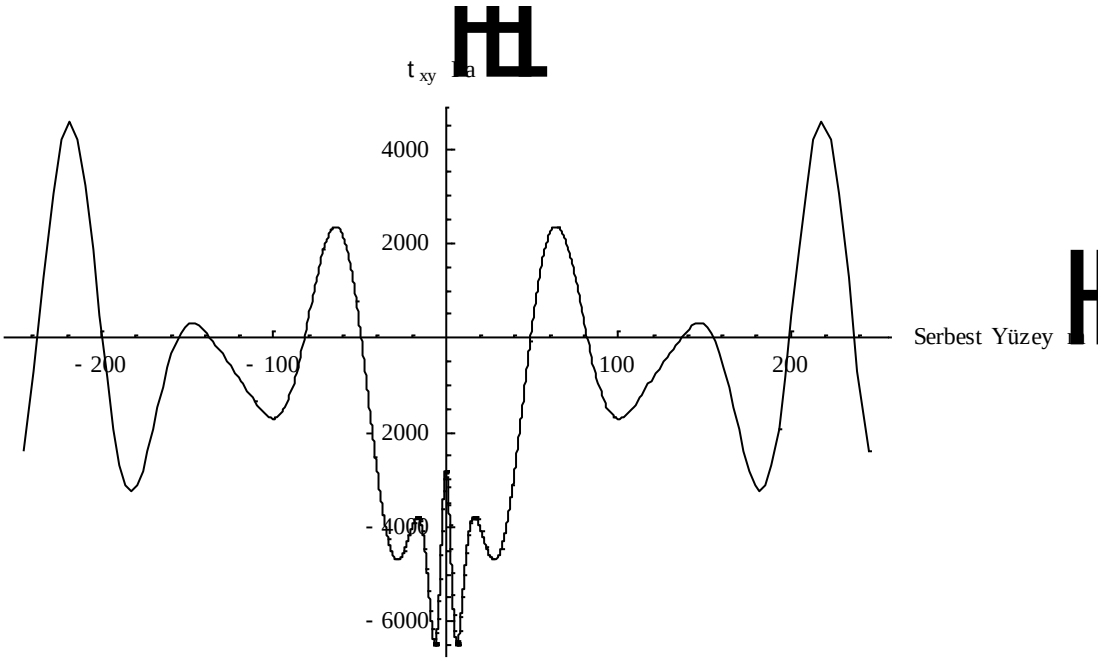
Şekil 4.23 ω=100 rad/sn H=10 m için silindirik boşluğun yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi.



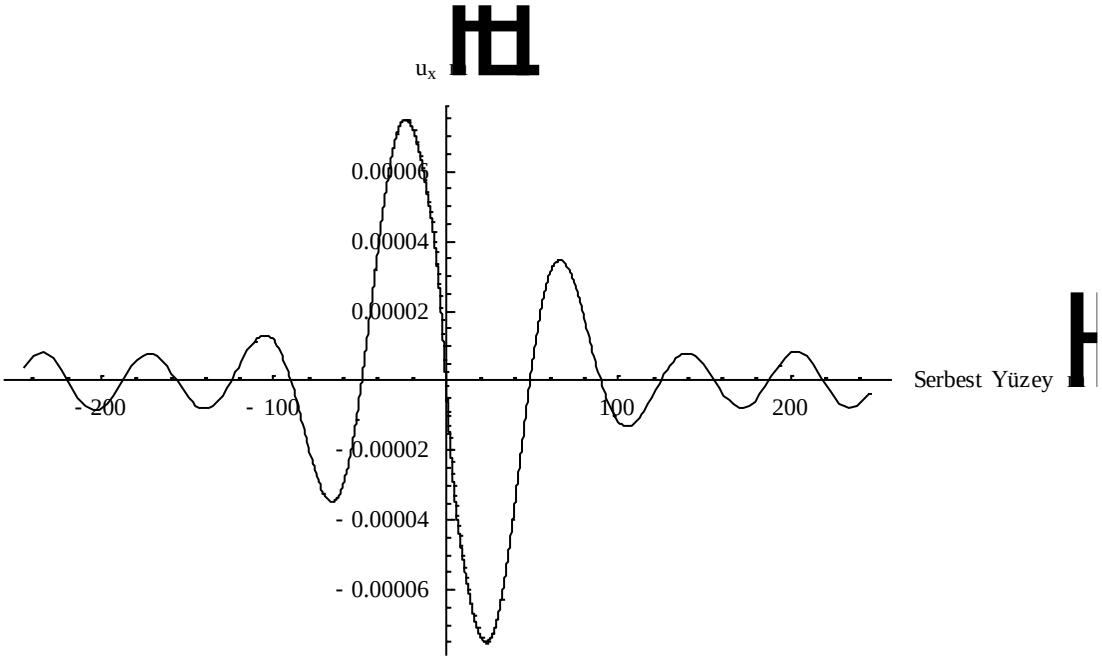
Şekil 4.24 ω=120 rad/sn H=10 m için silindirik boşluğun yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi.



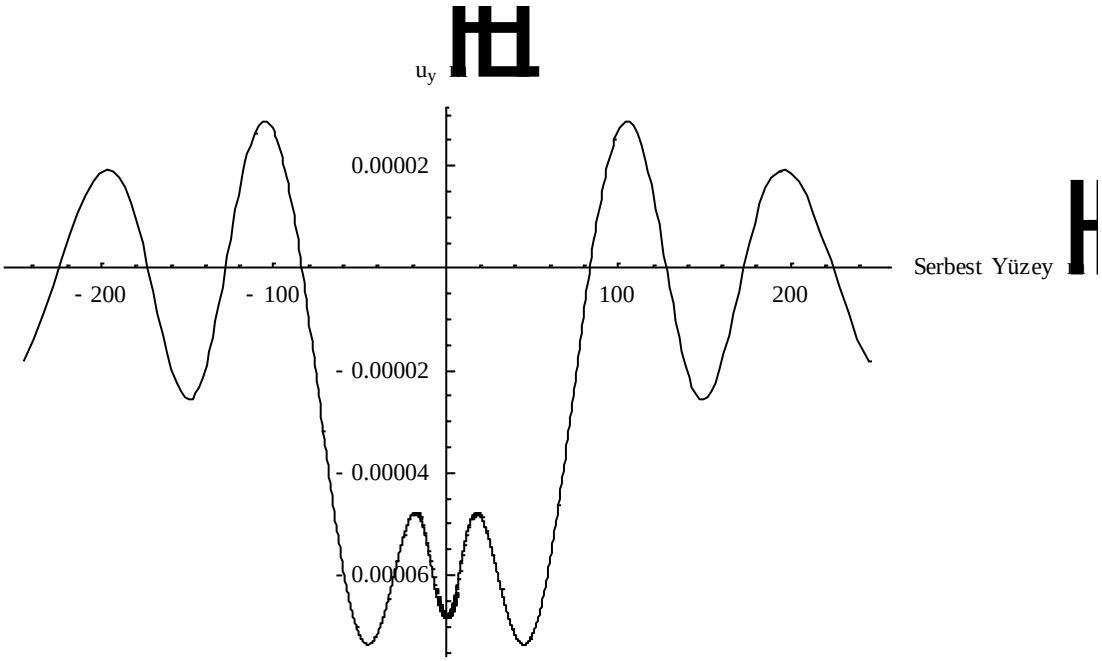
Şekil 4.25 ω=120 rad/sn H=10 m için serbest yüzeydeki σ_{xx} gerilmesi.



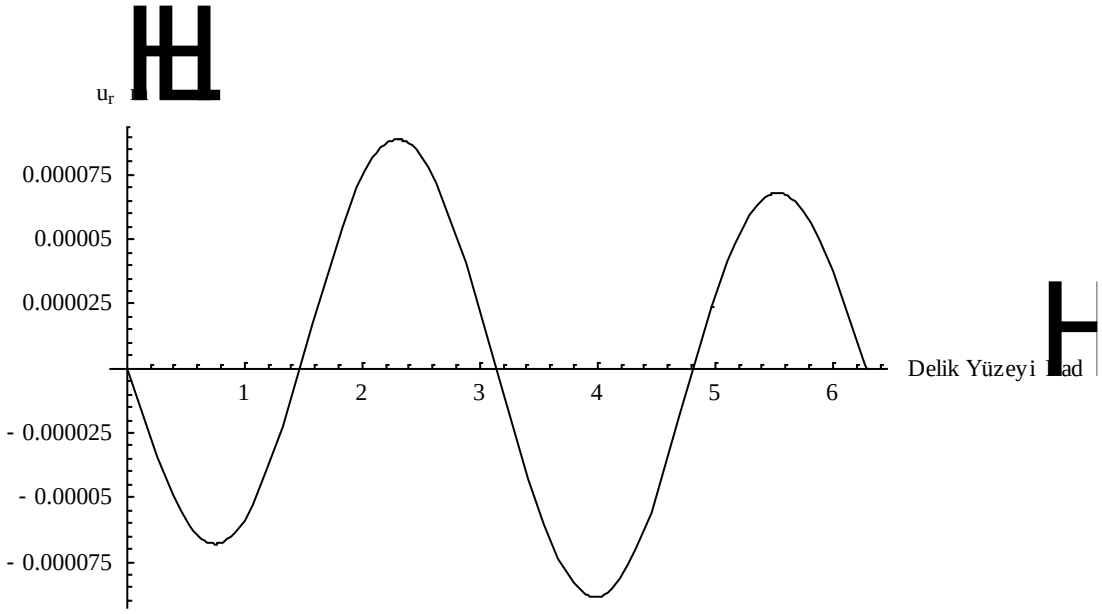
Şekil 4.26 ω=120 rad/sn H=10 m için serbest yüzeydeki τ_{xy} gerilmesi.



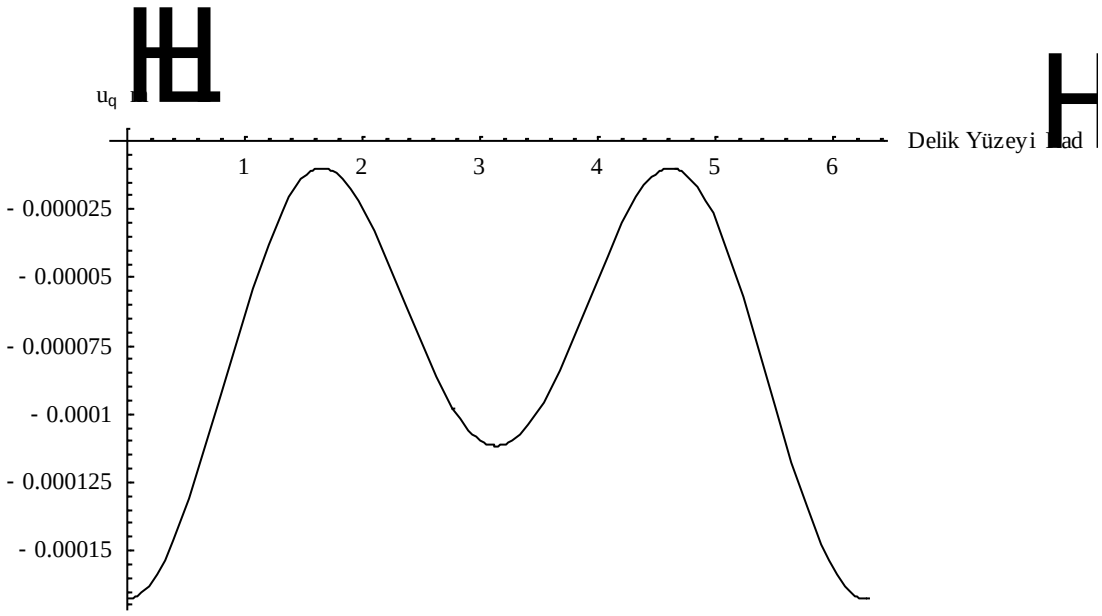
Şekil 4.27 ω=120 rad/sn H=10 m için serbest yüzeydeki u_x yer değiştirmesi.



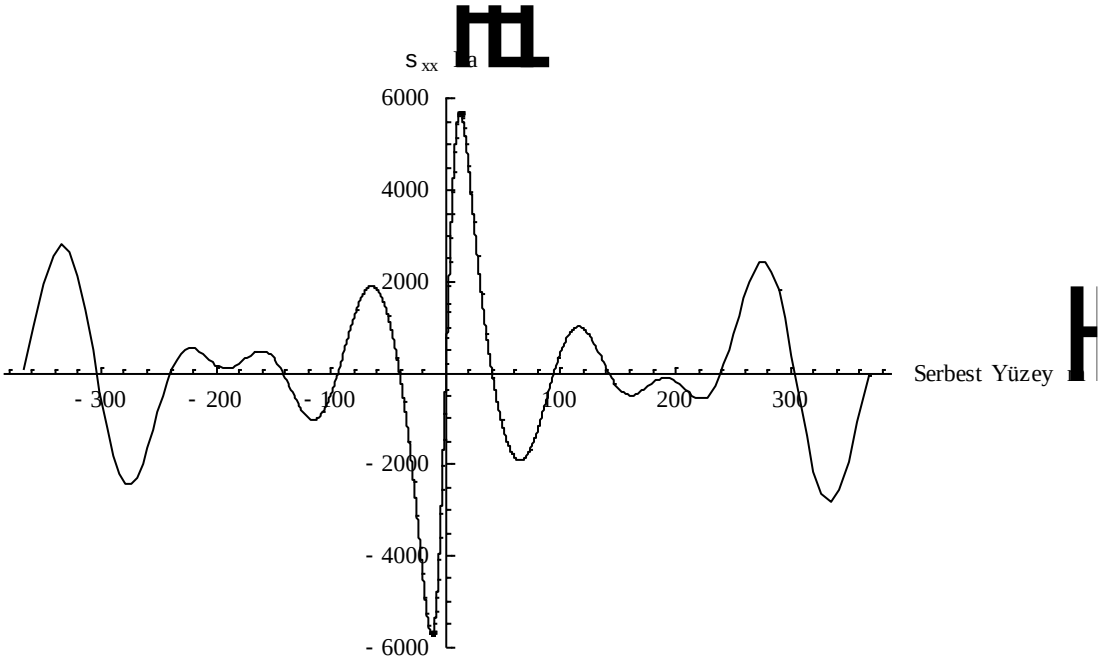
Şekil 4.28 ω=120 rad/sn H=10 m için serbest yüzeydeki u_y yer değiştirmesi.



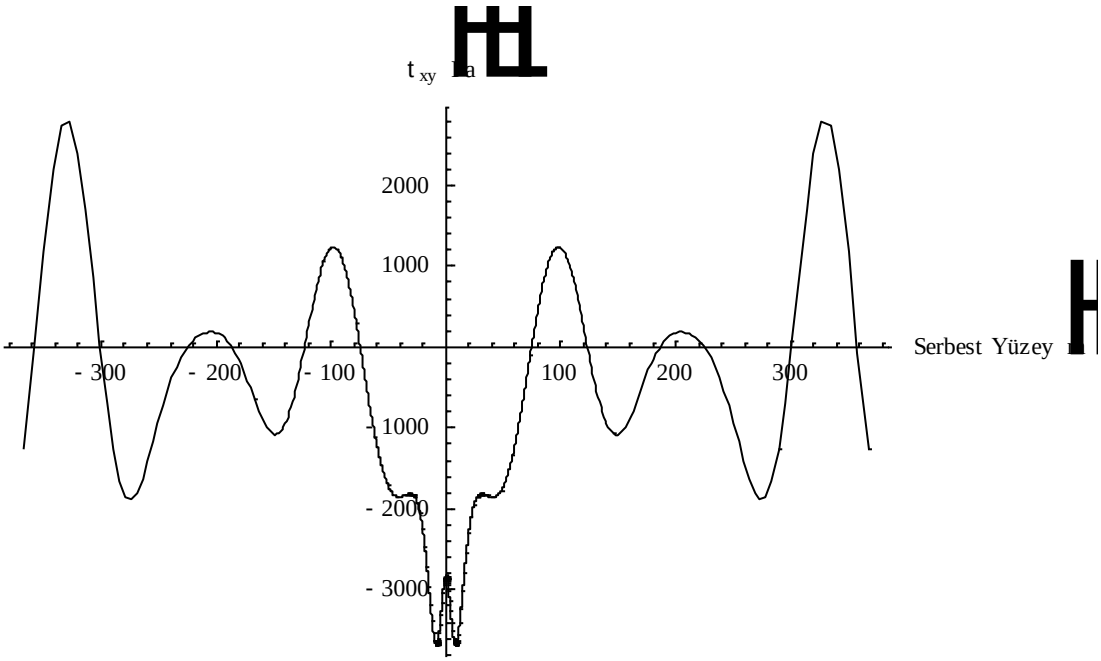
Şekil 4.29 ω=120 rad/sn H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_r yer değiştirmesi.



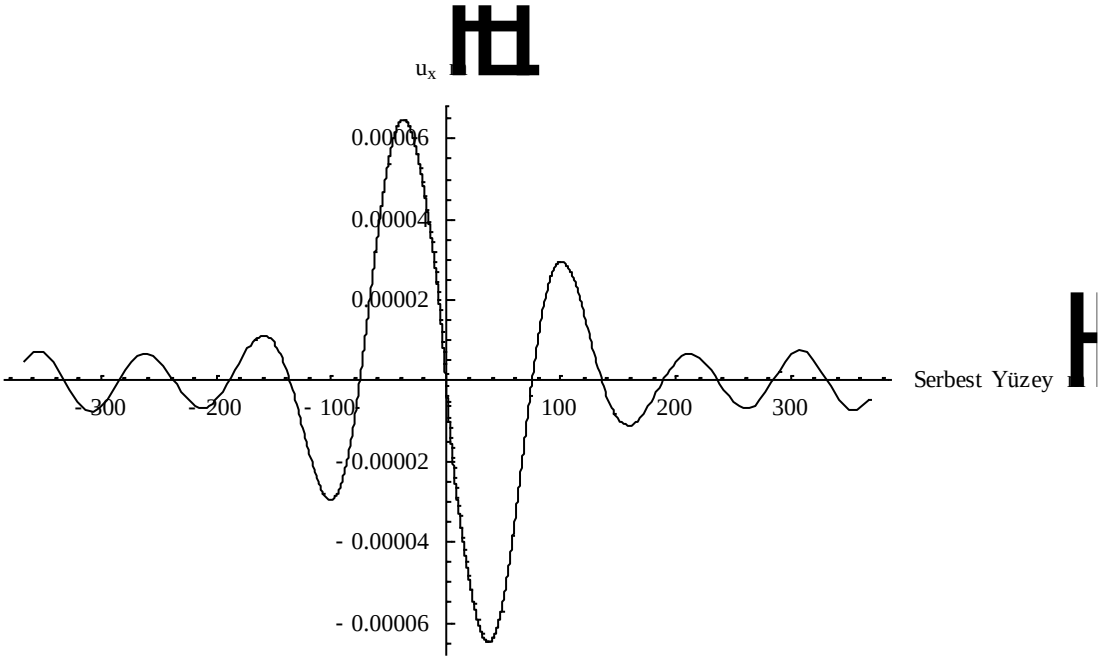
Şekil 4.30 ω=120 rad/sn H=10 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_θ yer değiştirmesi.



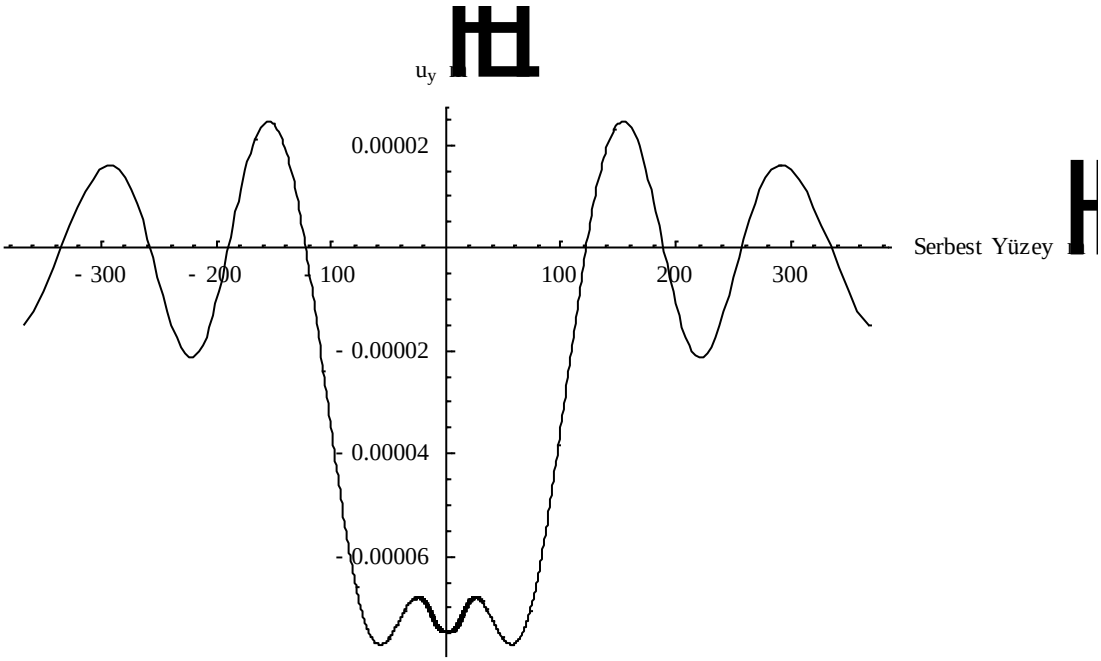
Şekil 4.31 ω=80 rad/sn H=15 m için serbest yüzeydeki σ_{xx} gerilmesi.



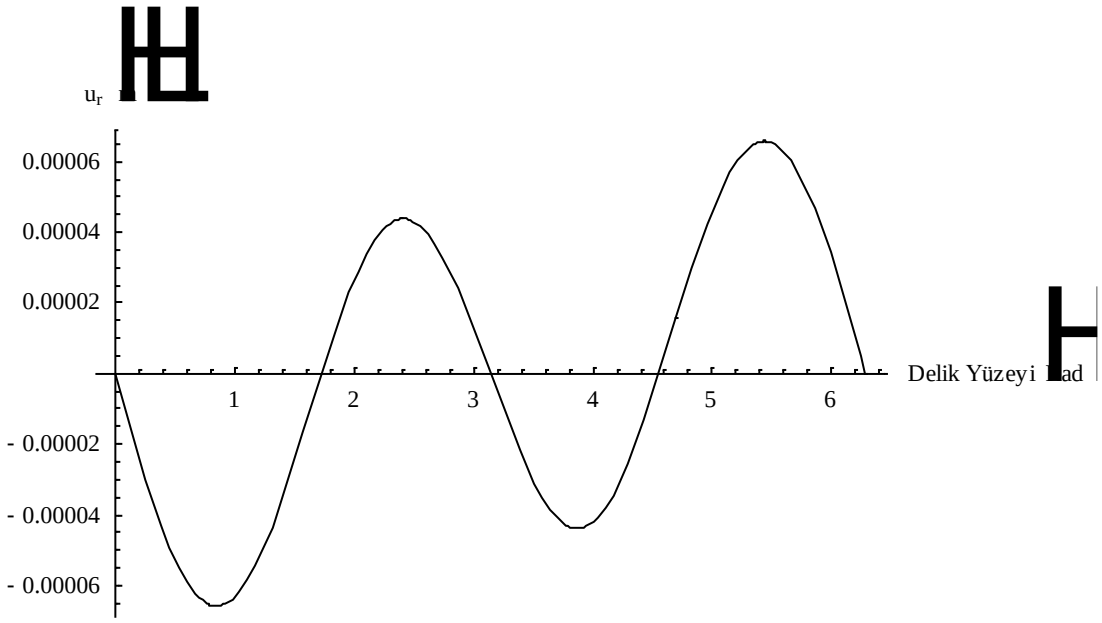
Şekil 4.32 ω=80 rad/sn H=15 m için serbest yüzeydeki τ_{xy} gerilmesi.



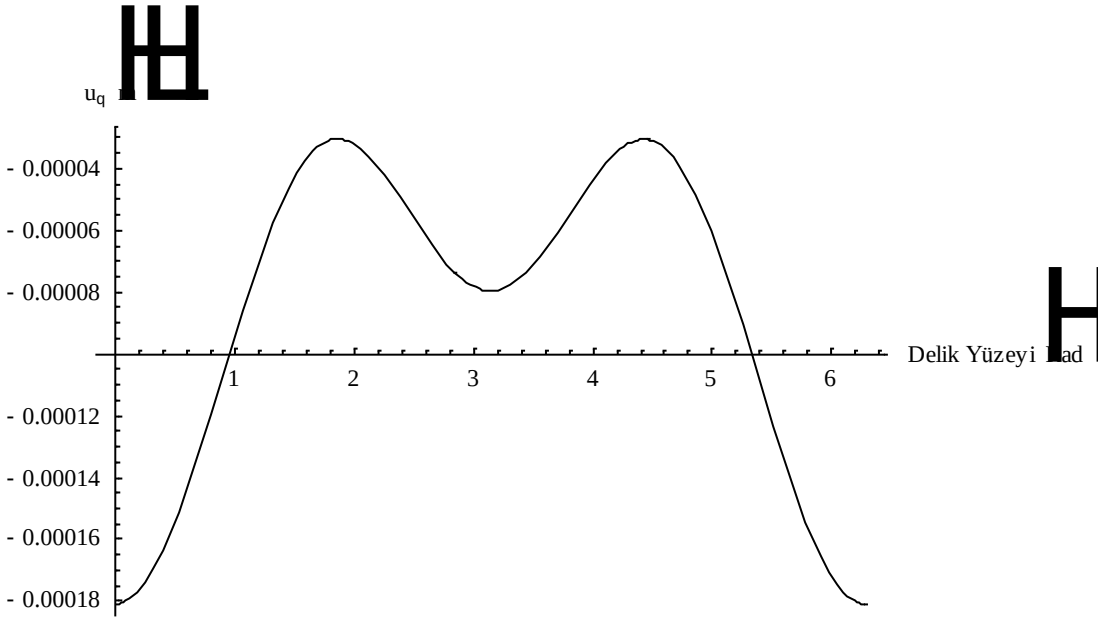
Şekil 4.33 ω=80 rad/sn H=15 m için serbest yüzeydeki u_x yer değiştirmesi.



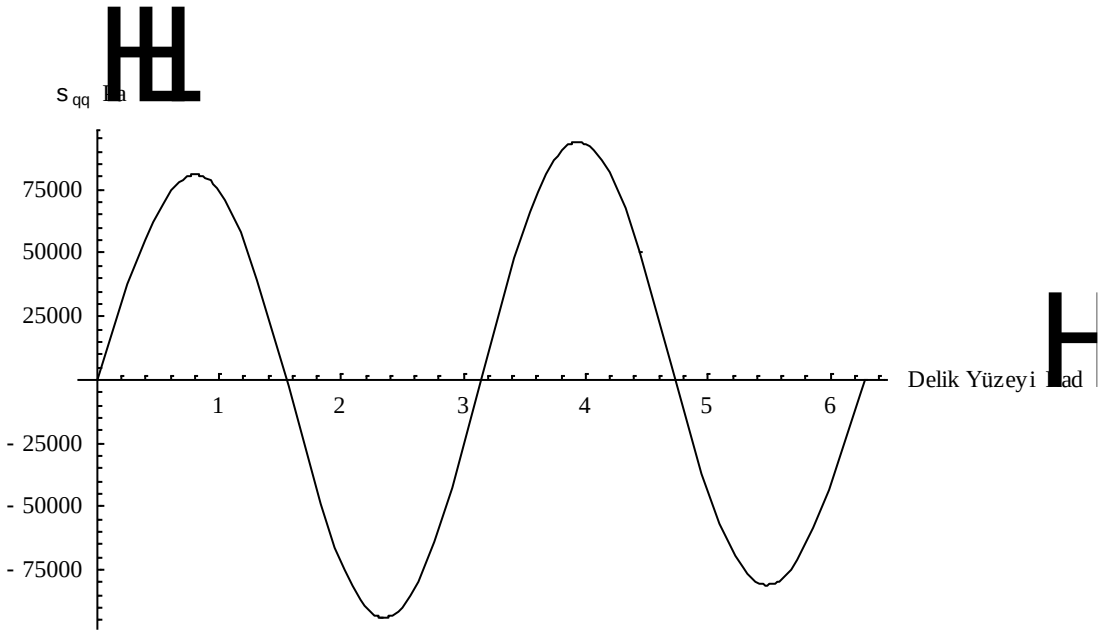
Şekil 4.34 ω=80 rad/sn H=15 m için serbest yüzeydeki u_y yer değiştirmesi.



Şekil 4.35 ω=80 rad/sn H=15 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_r yer değiştirmesi.



Şekil 4.36 ω=80 rad/sn H=15 m için silindirik boşluk yüzeyindeki u_θ yer değiştirmesi.



Şekil 4.37 ω=80 rad/sn H=15 m için silindirik boşluk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesi.

ÖZGEÇMİŞ

Arzu Arpacı 1976 yılında Kırıkkale'de doğmuştur. İlk öğrenimini Neslişah İlköğretiminde, orta öğrenimini Pertevniyal Lisesinde tamamlamış 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bolümüne girmiştir. 1999 yılında üniversiteden mezun olmuş aynı sene İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.