İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURKULMA ESNASINDAKİ DIŞ YÜK DAVRANIŞININ HESABA KATILDIĞI DEĞİŞKEN KESİTLİ DAİRESEL ÇUBUKLARIN TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİYLE DÜZLEM İÇİ BURKULMA YÜKÜ HESABI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Özgür ÖZÇIKRIKÇI

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2003

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURKULMA ESNASINDAKİ DIŞ YÜK DAVRANIŞININ HESABA KATILDIĞI DEĞİŞKEN KESİTLİ DAİRESEL ÇUBUKLARIN TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİYLE DÜZLEM İÇİ BURKULMA YÜKÜ HESABI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Özgür ÖZÇIKRIKÇI
(501001220)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Mayıs 2003

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Necla KADIOĞLU (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.Ü.)

HAZİRAN 2003

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince, araştırma konusunun ve kapsamının oluşturulmasında beni yönlendiren ve sürekli destek veren hocam Sayın Prof. Dr. Reha ARTAN'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu tezin hazırlanması süresince, çizimleri yapan Tuncay ACAR ve İnş. Müh. Nesrin TARLACI'ya, yüksek lisans yapmama önayak olan ve gerekli bütün olanakları sağlayan Yük. Müh. Göncer AYALP'e ve GAMB Müh. Müş. Ltd. Şti. çalışanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2003 Özgür ÖZÇIKRIKÇI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ **ii**
TABLO LİSTESİ **iv**
ŞEKİL LİSTESİ **v**
SEMBOL LİSTESİ **vi**
ÖZET **vii**
SUMMARY **ix**

1. GİRİŞ **1**
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı 1
2. KABULLER VE TEMEL DENKLEMLER **2**
2.1. Kabuller 2
2.2. Genel Esaslar 2
2.2.1. Dış Yüklerin Davranışı 4
2.2.2. Burkulma Yükünün Elde Edilişi 6
2.3. Uniform Radyal Yüke Maruz Dairesel Çubuk İçin Temel Denklemler 8
2.3.1. Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması 9
2.3.2. Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması 10

3. SABİT KESİTLİ ÇUBUKLAR İÇİN TAŞIMA MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ **11**
3.1. Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması Durumu İçin Taşıma Matrisi 11
3.2. Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması Durumu İçin Taşıma Matrisi 13

4. YAKLAŞIK YÖNTEM İLE TAŞIMA MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ **15**
4.1. Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması İçin Yaklaşık Taşıma Matrisi 17
4.2. Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması İçin Yaklaşık Taşıma Matrisi 24

5. YAKLAŞIK YÖNTEMİN DEĞİŞKEN KESİTLİ RADYAL YÜKLÜ DAİRESEL KEMERLERE UYGULANMASI **27**
5.1. Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması İçin Burkulma Yükü 30
5.2. Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması İçin Burkulma Yükü 37

6. BURKULMA YÜKÜNÜ HESAPLAYAN PROGRAM **39**

7. SONUÇ **42**

KAYNAKLAR **43**
EKLER **44**
ÖZGEÇMİŞ **62**

TABLO LİSTESİ

		Sayfa No
Tablo 4.1	Burkulma katsayıları - Timoshenko.....	23
Tablo 4.2	Burkulma katsayıları - Özbek	23
Tablo 4.3	Burkulma katsayıları - Yaklaşık yöntem ile bulunan.....	24
Tablo 5.1	İki ucu mafsallı ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları.....	34
Tablo 5.2	İki ucu ankastre ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları.....	35
Tablo 5.3	Tip 1 – Tip 3 kemerleri için burkulma katsayıları.....	36
Tablo 5.4	Tip 2 – Tip 4 kemerleri için burkulma katsayıları.....	36
Tablo 5.5	İki ucu mafsallı ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları.....	37
Tablo 5.6	İki ucu ankastre ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları.....	37

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Burkulmuş çubuk üzerindeki dış yükler....3
Şekil 2.2 : Radyal yüklü dairesel çubuk....8
Şekil 2.3 : Dış yüklerin burkulma anındaki durumu....9
Şekil 3.1 : Taşıma matrisi....13
Şekil 4.1 : Elde edilen yaklaşık taşıma matrisi....20
Şekil 4.2 : Bölüm 3.1'de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi....20
Şekil 4.3 : Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark....20
Şekil 4.4 : Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....21
Şekil 4.5 : Lamda değerleri....22
Şekil 4.6 : Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....22
Şekil 4.7 : Lamda değerleri....23
Şekil 4.8 : Elde edilen yaklaşık taşıma matrisi....26
Şekil 4.9 : Bölüm 3.2'de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi....26
Şekil 4.10 : Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark....26
Şekil 5.1 : Radyal yüklü dairesel iki ucu mafsallı çubuk....27
Şekil 5.2 : Tip 1 Perspektif ve plan....28
Şekil 5.3 : Tip 2 Perspektif ve plan....29
Şekil 5.4 : Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....32
Şekil 5.5 : Lamda değerleri....33
Şekil 5.6 : Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....33
Şekil 5.7 : Lamda değerleri....33
Şekil 5.8 : Radyal yüklü dairesel iki ucu ankastre çubuk....34
Şekil 5.9 : Sabit kesitli kemer (Tİp 3, Tip 4)....36
Şekil 6.1 : Diferansiyel geçiş matrisinin programa giriliş şekli....39
Şekil 6.2 : Ara taşıma matrisinin oluşturulması....39
Şekil 6.3 : λ değerine bağlı olarak ilgili minörün determinantının hesaplanması....40
Şekil 6.4 : Determinant sonuçlarının tablo haline getirilmesi....41
Şekil 6.5 : Lamda değerinin belirlenmesi....41

SEMBOL LİSTESİ

D_b : Eğilme rijitliği
D : Diferansiyel geçiş matrisi
ds : Birim çubuk boyu
F : Taşıma matrisi
M_b : Eğilme momenti
M^o : Kolon eğilme momenti
m^o : Başlangıç konumundaki dış moment
M^* : Şekil değiştirmiş haldeki moment vektörü
m^* : Şekil değiştirmiş haldeki dış moment vektörü
n : Merkez açısını belirleyen katsayı
p^o : Başlangıç konumundaki dış kuvvet
p^* : Şekil değiştirmiş haldeki dış kuvvet
R : Yarıçap
T^o : Başlangıç konumundaki kuvvet vektörü
t^o : Şekil değiştirmemiş çubuktaki teğet vektör
T^* : Şekil değiştirmiş haldeki kuvvet vektörü
t^* : Şekil değiştirmiş çubuktaki teğet vektörü
T_t : Teğet doğrultusundaki iç kuvvet
T_n : Normal doğrultusundaki iç kuvvet
U_t : Teğet doğrultudaki yer değiştirme
U_n : Normal doğrultudaki yer değiştirme
u : İncelenen noktanın yer değiştirme vektörü
Ω : Kesitin dönme vektörü
Ω_b : Binormal etrafındaki dönme
β : Merkez açı
φ : Aranan kesitin açısı
λ : Dış yükleri içeren boyutsuz parametre (2.26)
X : Sistem koordinatları (4.16)

BURKULMA ESNASINDAKİ DIŞ YÜK DAVRANIŞININ HESABA KATILDIĞI DEĞİŞKEN KESİTLİ DAİRESEL ÇUBUKLARIN TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİYLE DÜZLEM İÇİ BURKULMA YÜKÜ HESABI

ÖZET

Bu çalışmada değişken kesitli, radyal yüklü dairesel çubukların düzlem içi burkulması incelenmiştir. Çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu kısaca açıklanmıştır.

İkinci bölümde, eğri eksenli uzaysal çubukların temel denklemleri verilmiş, çubuğa etkiyen dış yüklerin burkulma sırasındaki konum değişiklikleri incelenmiş ve son olarak dairesel çubukların düzlem içi burkulma yüklerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan temel denklemler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir başlangıç değer yöntemi olan taşıma matrisi metodu kullanılarak sabit kesitli dairesel çubukların düzlem içi burkulma yüklerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan taşıma matrisi kapalı bir şekilde elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, değişken kesitli dairesel çubukların düzlem içi burkulma yüklerini hesaplayabilmek için Picard iterasyonu kullanılarak yaklaşık bir yöntem oluşturulmuştur. Oluşturulan bu yöntemin sabit kesitli çubuklara uygulanmasıyla elde edilen taşıma matrisleri, üçüncü bölümde kapalı yöntem ile elde edilen taşıma matrisleriyle karşılaştırılarak kontrol edilmiştir. Ayrıca her iki yöntemle sabit kesitler için elde edilen burkulma yüklerinin, literatürdeki kaynaklarda elde edilmiş değerlerle çakıştığı gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, bölüm dörtte oluşturulan yaklaşık yöntem kullanılarak aşağıda görülen seçilmiş fonksiyonlar ile tanımlanan değişken kesitli radyal yüklü dairesel çubukların düzlemleri içerisindeki burkulma yükleri elde edilmiş ve bunlar belirli açılar için tablo haline getirilmiştir.

$$f(\varphi) = 2 + \mathrm{Sin}(n\varphi)$$
$$f(\varphi) = 2 - \mathrm{Sin}(n\varphi)$$

Yapılan bu işlem bölüm iki de anlatılan dış yüklerin burkulma sonrasındaki konum değişikliklerinden seçilen iki tip için ayrı ayrı yapılmıştır. Sonuçlar karşılaştırıldığında, dış yüklerin bu iki konumu için elde edilen burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Son bölümde, yukarıda yapılan işlemlerin gerçekleştirildiği Mathematica adındaki matematiksel yazılım programında yazılmış olan program açıklanarak verilmiştir.

THE CALCULATION OF BUCKLING LOADS OF PLANE CIRCULAR BARS WITH VARIABLE CROSS-SECTION BY USING INITIAL VALUE METHOD CONSIDERING THE BEHAVIOUR OF EXTERNAL LOADS DURING BUCKLING

SUMMARY

In this thesis the buckling of radialy loaded plane circular bars have been studied. This thesis consists of six parts.

In the first part, the subject of the study has been explained briefly.

In the second part, by considering the basic equations for curved space bars, the behaviour of external loads during bukcling and in relation with it the necessary equations to calculate buckling loads of circular plane bars have been examined and results given.

The third part is devoted to obtain the carry-over matrix necessary for the calculation of plain circular bars with constant cross-section by applying initial value method.

In the fourth part, an approximation method has been introduced by using Picard iteration to calculate buckling load of plane circular bars with variable cross-section. The results obtained by applying the developed method to the constant cross-section bars have been controlled by comparing with the carry-over matrixes calculated as in the third part. In addition to that, the buckling loads calculate by both approximation method and the results obtained from the present literature coincides with each other has been shown.

In the fifth section, the buckling loads of radialy loaded plane circular bars which sections are determined by applying the following functions have been calculated by using approximation method explained as in fourth part and a table has been formed for selected angles.

$$f(\varphi) = 2 + \mathrm{Sin}(n\varphi)$$
$$f(\varphi) = 2 - \mathrm{Sin}(n\varphi)$$

As it is explained in the second part, two behaviour types of external load during buckling have been selected and above-mentioned method of calculation repeated for both types. When obtained results are compared, it has been found that buckling loads for the two types are very close to each other.

In this thesis, a computer programme is developed by using a software named Mathematica. In the last part, this computer programme has been explained.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada radyal yüklü dairesel çubukların, kendi düzlemi içerisinde burkulma yükleri, literatürde çok kullanılan kapalı bir yöntemle elde edilen taşıma matrisi yardımıyla hesaplanacaktır. Bu işlem yapılırken dış yüklerin burkulma esnasındaki davranışları iki ayrı durum için göz önünde tutulacaktır. Daha sonra değişken kesitli ve radyal yüklü dairesel çubukların düzlemi içerisindeki burkulma yüklerinin hesaplanabilmesi için yaklaşık bir taşıma matrisi elde edilecektir. Elde edilen bu yaklaşık taşıma matrisi bir önceki adımda kapalı yöntemle elde edilen taşıma matrisiyle sabit kesitli kesitler için karşılaştırılacaktır. Son olarak bu yaklaşık yöntem yardımıyla, yukarıda bahsedilen dış yüklerin davranışları da göz önünde tutularak, değişken kesitli dairesel çubuklarda düzlemi içerisindeki burkulma yükü elde edilecektir.

2. KABULLER VE TEMEL DENKLEMLER

2.1 Kabuller

- Çubuk malzemesi elastik, homojen ve izotrop kabul edilmektedir. Hook kanunu geçerlidir.
- Çubuk enkesitinin boyutları çubuk boyu ve eğriliği yanında küçük kabul edilmektedir.
- Çubuk merkezinin kayma merkezi ağırlık merkezi ile çakışmaktadır.
- Yükleme sebebiyle çubukta meydana gelecek ilkel deformasyonlar ihmal edilmektedir.
- Normal ve kesme kuvvetinin burkulmaya etkisi ihmal edilecektir.

2.2 Genel Esaslar

Bu çalışmanın konusu düzleminde radyal yüklü dairesel çubukların burkulmasıdır. Bu halin en genel durumu olan 3 boyutlu uzayda herhangi bir uzay eğrisine ait çubuğun genel denklemlerinin çıkarılış yöntemi burada anlatılmayacaktır.[2,3] Ancak, bu çalışma içerisinde dış yüklerin burkulma esnasındaki çeşitli konumları da gözönüne alındığı için genel denklemlerin çıkarılışı esnasında dış yüklerin ne şekilde denklemlere girdiğinden kısaca bahsedilecektir.

Şekil değiştirmemiş durumdaki denge denklemleri [2]:

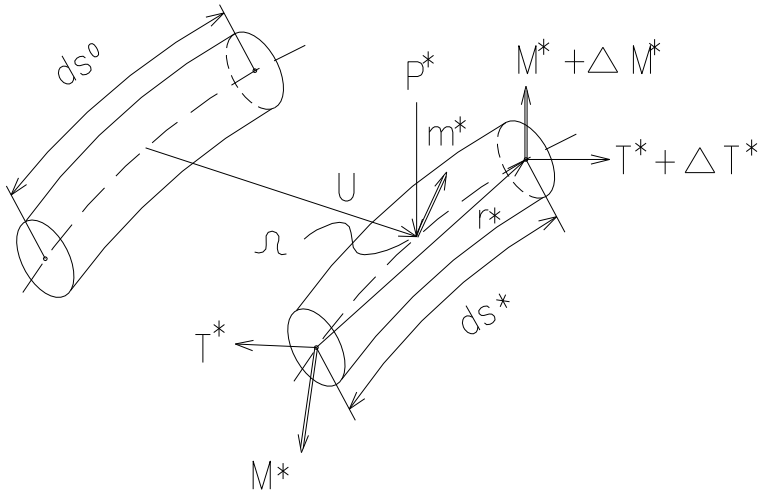
$$\frac{d\mathbf{M}^o}{ds} + \mathbf{t}^o x \mathbf{T}^o + \mathbf{m}^o = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{T}^o}{ds} + \mathbf{p}^o = 0 \tag{2.2}$$

Burada $\mathbf{M}^0$ ve $\mathbf{T}^0$ başlangıç konumundaki iç kuvvetler, $\mathbf{m}^o$ ve $\mathbf{p}^o$ başlangıç konumundaki dış kuvvetler, $\mathbf{t}^o$ da şekil değiştirmemiş çubuk eksenindeki teğet vektörüdür. Şimdi benzer denklemleri burkulmadan sonraki Şekil 2.1 de görüldüğü üzere sonsuz küçük şekil değiştirmiş hal üzerinde yazarsak ve çubuğun boy kısalması ihmal edildiği için $ds^o=ds^*=ds$ eşitliğini gözönünde tutarsak

$$\frac{d\mathbf{M}^*}{ds} + \mathbf{t}^* x \mathbf{T}^* + \mathbf{m}^* = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d\mathbf{T}^*}{ds} + \mathbf{p}^* = 0 \tag{2.4}$$



Şekil 2.1 Burkulmuş çubuk üzerindeki dış yükler

Burada $\mathbf{M}^*$ ve $\mathbf{T}^*$ şekil değiştirmiş haldeki iç kuvvetler, $\mathbf{m}^*$ ve $\mathbf{p}^*$ dış kuvvetler ve $\mathbf{t}^*$ de şekil değiştirmiş çubuk eksenindeki teğet vektörü, $\mathbf{u}$ vektörü incelenen noktanın yerdeğiştirmesi, $\boldsymbol{\Omega}$ vektörü de kesitin dönmesini göstermektedir.

Kesit tesirlerinde ve teğet vektörlerinde meydana gelen değişimin iki kısımdan

oluştuğu kabul edilebilir:

1. Başlangıçtaki vektörlerin şiddetlerini değiştirmeden çubuk enkesiti ile birlikte dönmeleri.

2. Dönmüş vektörlerin şiddet ve doğrultuca sonsuz küçük değişmeleri

Herhangi bir **A** vektörünün **Ω** dönmesi sonucundaki değeri **A+ΩxA** olduğu bilinerek aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\mathbf{M}^{*} = \mathbf{M}^{o} + \mathbf{\Omega} x \mathbf{M}^{o} + \mathbf{M} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{T}^{*} = \mathbf{T}^{o} + \mathbf{\Omega} x \mathbf{T}^{o} + \mathbf{T} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{t}^{*} = \mathbf{t}^{o} + \mathbf{\Omega} x \mathbf{t}^{o} \tag{2.7}$$

(2.5)-(2.7) denklemleri (2.3) ve (2.4) de yerine konursa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa [3], aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} x \mathbf{M}^{o} + \mathbf{t}^{o} x \mathbf{T} + \mathbf{m} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \boldsymbol{\omega} x \mathbf{T}^{o} + \mathbf{p} = 0 \tag{2.9}$$

Burada

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{*} - (\mathbf{m}^{o} + \mathbf{\Omega} x \mathbf{m}^{o}) \tag{2.10}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{*} - (\mathbf{p}^{o} + \mathbf{\Omega} x \mathbf{p}^{o}) \tag{2.11}$$

değerlerini göstermekte ve dış yüklerin burkulma sırasındaki davranışları ile ilgili olarak farklı değerler almaktadırlar. Ayrıca ω birbirine birim uzaklıktaki iki kesitin relatif dönmesini göstermektedir. Şimdi bunları ayrıntılı olarak inceliyelim.

2.2.1 Dış Yüklerin Davranışı

(2.3) ve (2.4) denge denkleminin çıkarılışında $\mathbf{m}^{*}$ ve $\mathbf{p}^{*}$ dış yüklerinin burkulma esnasında çubuk ile birlikte hareket ederek burkulmuş çubuğun eksenine etkidikleri

kabul edilmiştir. Bu her zaman bu şekilde meydana gelmediği gibi dış yükler çubuğun çubuk enkesitinin dönmesine katılır veya katılmazlar. Böylece dış yüklerin burkulma sırasında çok çeşitli davranışları söz konusu olur. Mesela bunlardan üç tanesi aşağıdaki şekildedir.

I. Dış yüklerin çubuk eksenine dik kaldığı durum. Bu durumda dış yükler çubukla birlikte hareket eder ve çubuk kesitinin dönmesine katılırlar, yani burkulma sırasında çubuk enkesitine göre konumlarını değiştirmezler. Hidrostatik basınca maruz kemerler bu duruma örnek olarak gösterilebilir. Bu durumda burkulmuş eleman üzerindeki kuvvetler:

$$\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m}^{o} + \mathbf{\Omega} \mathrm{x} \mathbf{m}^{o} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{p}^{*} = \mathbf{p}^{o} + \mathbf{\Omega} \mathrm{x} \mathbf{p}^{o} \tag{2.13}$$

Bu nedenle (2.10), (2.11) denkleminde **m** ve **p** değerleri yerine sıfır konur.

$$\mathbf{m} = 0 \tag{2.14}$$

$$\mathbf{p} = 0 \tag{2.15}$$

II. Dış yüklerin ilk doğrultusuna paralel kaldığı hal. Bu durumda dış yükler çubukla birlikte hareket eder ancak doğrultularını değiştirmezler. Düşey yüklü bir kemerin kendi düzlemi içinde burkulmasını bu duruma örnek olarak verebiliriz. Bu halde burkulmuş eleman üzerindeki kuvvetler

$$\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m}^{o} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{p}^{*} = \mathbf{p}^{o} \tag{2.17}$$

değerlerini alır. Bunun durumda (2.10), (2.11) denklemlerindeki **m** ve **p** değerleri aşğıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{m} = -\mathbf{\Omega} \mathrm{x} \mathbf{m}^{o} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{p} = -\mathbf{\Omega} \mathrm{x} \mathbf{p}^{o} \tag{2.19}$$

III. Bir üçüncü halde dış yüklerin hem ilkel konumlarını hem de doğrultularını koruması durumudur. Bu durumda burkulmuş eleman üzerindeki kuvvetler:

$$\mathbf{m}^{*} = \mathbf{m}^{o} - \mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{p}^{o} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{p}^{*} = \mathbf{p}^{o} \tag{2.21}$$

Burada **u** yer değiştirme vektörü Şekil 2.1 de görülmektedir. Bu halde **m** ve **p** değerleri:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{p}^{o} - \boldsymbol{\Omega}\mathrm{x}\mathbf{m}^{o} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{p} = -\boldsymbol{\Omega}\mathrm{x}\mathbf{p}^{o} \tag{2.23}$$

(2.22) denklemleri yukarıda bahsedilen üç halide içerdiği için bundan sonra kullanılacak temel denklemler bu **m** ve **p** değerlerine göre çıkarılacak, diğer haller bu denklemlerde **u** ve **Ω** yerine sıfır konarak elde edilecektir.

2.2.2 Burkulma Yükünün Elde Edilişi

Burkulma yükünün elde edilmesi için gerekli olan denge denklemleri, şekil değiştirme denklemleri ve bünye denklemlerinden oluşan denklem takımı [3] aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{ds}} + \boldsymbol{\omega}\mathrm{x}\mathbf{M}^{\mathrm{o}} + \mathbf{t}^{\mathrm{o}}\mathrm{x}\mathbf{T} + \mathbf{m} = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{ds}} + \boldsymbol{\omega}\mathrm{x}\mathbf{T}^{\mathrm{o}} + \mathbf{p} = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{ds}} + \mathbf{t}^{\mathrm{o}}\mathrm{x}\boldsymbol{\Omega} = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{ds}} - \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}^{-1}.\mathbf{M} \tag{2.28}$$

Buradaki denklemlerde normal kuvvet ve kesme deformasyonlarının burkulma deformasyonuna katlmadığı kabul edildiği için γ=O olduğu gözönünde tutulmalıdır. Burada γ çubuğun birim boyunun relatif şekil değiştirmesidir. Bünye denklemlerinden gelen ω diğer denklemlerde yerine konursa:

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + (\mathbf{D}^{-1}.\mathbf{M}) x \mathbf{M}^{o} + \mathbf{t}^{o} x \mathbf{T} + \mathbf{m} = 0 \tag{2.29}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + (\mathbf{D}^{-1}.\mathbf{M}) x \mathbf{T}^{o} + \mathbf{p} = 0 \tag{2.30}$$

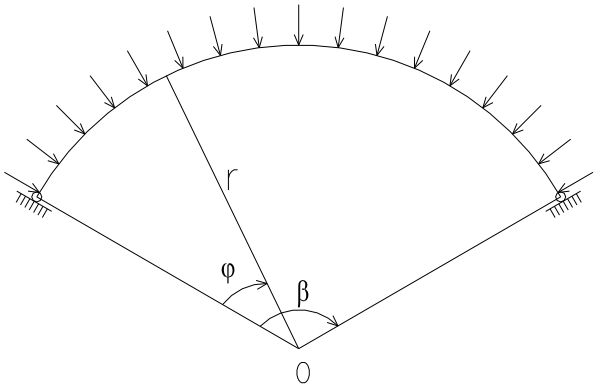
$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t}^{o} x \mathbf{\Omega} = 0 \tag{2.31}$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - (\mathbf{D}^{-1}.\mathbf{M}) = 0 \tag{2.32}$$

Böylece dört adet diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Bu denklemlerde bilinmeyenler **u**, **Ω**, **M** ve **T** vektörleri olmak üzere dört adettir. (2.29)-(2.32) denklemlerinde geçen **m** ve **p** vektörleri dış yükleri değil, dış yüklerin değişimini ifade etmekte olup bunlar bölüm 2.2.1 de açıklanmıştır. Bilinmeyenlerin sıfır olması halinde diferansiyel denklemlerin bütün terimleri sıfır eder, bu da (2.29)-(2.32) diferansiyel denklem takımının lineer homojen bir denklem takımı olduğunu gösterir.

Sınır şartları ise çubuğun s=0 ve s=s_1 için her bir ucunda ikişerden dört vektörel şart yazmak mümkündür. Böylece (2.29)-(2.32) denklem takımı homojen sınır şartları ile bir karakteristik değer problemi teşkil eder ve **u**, **Ω**, **M** ve **T** bilinmeyenlerinin sıfır olmaları hali trivial çözüme karşı gelir. Öyle ise karakteristik değer probleminin çözümü, (2.29)-(2.32) homojen diferansiyel denklem takımının, homojen sınır şartları altında trivial olmayan çözümlerinin bulunabilmesi için katsayılarının sağlaması gereken şartların belirlenmesi olacaktır. Bu katsayılarda dış yüklere bağlı olduklarına göre dış yüklerin bağlanabiliceği bir λ parametresinin oluşturulup bunun en küçük değerinin bulunması mümkün olacaktır.

2.3 Uniform Radyal Yüke Maruz Dairesel Çubuk İçin Temel Denklemler



Şekil 2.2 Radyal yüklü dairesel çubuk

Burada (2.29)-(2.32) denklemlerinden aşağıda verilecek denklemlere nasıl geçildiği anlatılmayacak, sadece referans verilmekle yetinilecektir, [3]. Ancak denklemlerin elde edilişi esnasında kullanılan birkaç eşitlik verilecektir. Şekil 2.2 de görüldüğü üzere, dairesel çubuk için eğrilik yarıçapı ρ=R sabittir ve d/ds=(1/R)(d/dφ) olarak alınırsa ilgili denklem takımı:

$$\frac{dU_t}{d\varphi} - U_n = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{dU_n}{d\varphi} + U_t - r\Omega_b = 0 \tag{2.34}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\varphi} - \frac{r}{D_b} M_b = 0 \tag{2.35}$$

$$\frac{dM_b}{d\varphi} + rT_n = 0 \tag{2.36}$$

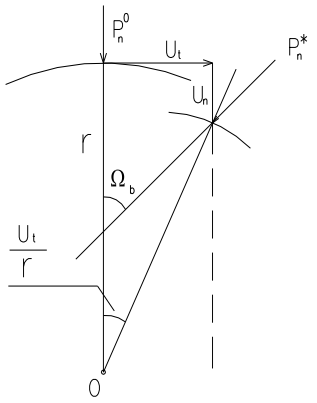
$$\frac{dT_n}{d\varphi} + T_t - \frac{p_n r^2}{D_b} M_b = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{dT_t}{d\varphi} - T_n + p_n r\Omega_b = 0 \tag{2.38}$$

Burada U_t teğet doğrultudaki yerdeğiştirmeyi, U_n normal doğrultudaki yerdeğiştirmeyi, Ω_b binormal etrafındaki dönmeyi, T_t, T_n ve M_b kesit tesirlerini D_b eğilme rijitliğini göstermektedir. Şimdi bu denklem takımını dış yüklerin burkulma esnasındaki davranışına göre, Bölüm 2.2.1 de anlatılanlardan ilk iki hal için (I, II) tekrar oluşturalım.

2.3.1 Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması

Dış yükler çubuk eksenine dik kalıyorsa, bakınız Bölüm 2.2.1 madde I, dış yükler Ω_b dönmesini çubukla birlikte yapacak ve yüklerin Ω_b dönmesinden dolayı (Şekil 2.3) oluşan etkiler ortadan kalkacaktır, dolayısıyla yukarıdaki $p_n r\Omega_b$ terimi sıfır olacaktır.



Şekil 2.3 Dış yüklerin burkulma anındaki durumu

Bu durumda U_t'yi temel bilinmeyen olarak seçersek diğer denklemleri U_t cinsinden aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$U_n = \frac{dU_t}{d\varphi} \tag{2.39}$$

$$\Omega_b = \frac{1}{r}(U_t + \frac{d^2U_t}{d\varphi^2}) \tag{2.40}$$

$$M_b = \frac{D_b}{r^3}\left(\frac{dU_t}{d\varphi} + \frac{d^3U_t}{d\varphi^3}\right) \tag{2.41}$$

$$T_n = -\frac{D_b}{r^3}\left(\frac{d^2U_t}{d\varphi^2} + \frac{d^4U_t}{d\varphi^4}\right) \tag{2.42}$$

$$T_t = \frac{D_b}{r^3}\left(\frac{d^3U_t}{d\varphi^3} + \frac{d^5U_t}{d\varphi^5}\right) + p_n\left(\frac{dU_t}{d\varphi} + \frac{d^3U_t}{d\varphi^3}\right) \tag{2.43}$$

Bu durumda U_t nin sağlayacağı diferansiyel denklem; (2.40), (2.42) ve (2.43) denklemlerinin, (2.38)'da yerine konmasıyla elde edilir.

$$\frac{d^6U_t}{d\varphi^6} + (1+\lambda^2)\frac{d^4U_t}{d\varphi^4} + \lambda^2\frac{d^2U_t}{d\varphi^2} = 0 \tag{2.44}$$

Burada

$$\lambda^2 = 1 + \frac{p_n r^3}{D_b} \tag{2.45}$$

denklemiyle ifade edilen λ boyutsuz parametresi Bölüm 2.2.2 de bahsi geçen dış yüke bağlı boyutsuz terimdir.

2.3.2 Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması

Dış yükler ilk doğrultularına paralel kalıyorsa, Ω_b dönmesine iştirak etmediklerinden Ω_b terimi aynen kalacaktır. Böylece yukarıdaki temel denklemlerde yalnızca (2.38) değişecek ve Bölüm 2.3.1'deki diğer denklemler aynı kalmak kaydıyla sadece (2.44) aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\frac{d^6U_t}{d\varphi^6} + (1+\lambda^2)\frac{d^4U_t}{d\varphi^4} + (2\lambda^2-1)\frac{d^2U_t}{d\varphi^2} + (\lambda^2-1)U_t = 0 \tag{2.46}$$

3. SABİT KESİTLİ ÇUBUKLAR İÇİN TAŞIMA MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

Taşıma matrisinin elde edilme yönteminin açıklanması, bu konuyla ilgili literatürde birçok kaynak, bkz.[1], olduğu için bu tez kapsamına alınmamıştır. Ancak elde edilen taşıma matrisi bir sonraki bölümde elde edilecek yaklaşık matris ile karşılaştırılacağından, matrisin elde edilmesi için gerekli işlemler aşağıda basitçe verilecektir. Bu bölümde anlatılan yöntem dairesel çubuk kesitinin sabit olduğu durum için geçerlidir, kesitin değişken olması durumu Bölüm 4 de anlatılacaktır.

3.1 Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması Durumu İçin Taşıma Matrisi

(2.44) diferansiyel denklemi çözülürse:

$$U_t(\varphi) = C_1 \sin\varphi - C_2 \cos\varphi - C_3 \frac{e^{-i\lambda\varphi}}{\lambda^2} - C_4 \frac{e^{i\lambda\varphi}}{\lambda^2} + C_5 + C_6\varphi \tag{3.1}$$

denklemi elde edilir. Burada U_t nin genel değişken olarak seçilip (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) ve (2.43) denklemlerinde yerine konulmasıyla:

$$U_n = C_3 \frac{ie^{-i\lambda\varphi}}{\lambda} - C_4 \frac{ie^{i\lambda\varphi}}{\lambda} + C_6 + C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi \tag{3.2}$$

$$\Omega_b = \frac{e^{-i\lambda\varphi}}{r\lambda^2}\left\{C_3(\lambda^2-1) + e^{i\lambda\varphi}(C_4 e^{i\lambda\varphi}(\lambda^2-1) + \lambda^2(C_5 + \varphi C_6))\right\} \tag{3.3}$$

$$M_b = \frac{e^{-i\lambda\varphi} D_b}{r^2}\left\{-C_3 i(\lambda^2-1) + C_4 ie^{2i\lambda\varphi}(\lambda^2-1) + C_6 e^{i\lambda\varphi}\lambda\right\} \tag{3.4}$$

$$T_n = \frac{e^{-i\lambda\varphi}(\lambda^2-1)D_b}{r^3}\left\{C_3 + e^{2i\lambda\varphi}C_4\right\} \tag{3.5}$$

$$T_t = \frac{e^{-i\lambda\varphi}}{r^3\lambda}\left\{pr^3(-i(\lambda^2-1)C_3 + ie^{2i\lambda\varphi}(\lambda^2-1)C_4 + e^{i\lambda\varphi}\lambda C_6) + i\lambda^2(\lambda^2-1)(C_3 - e^{2i\lambda\varphi}C_4)D_b\right\} \tag{3.6}$$

bütün bilinmeyenler C_i (i=1,2..6) integrasyon sabitleri cinsinden elde edilmiş olur. Hesap kolaylığı için boyutsuz büyüklere geçelim.

$$U_t^{'} = \frac{1}{r} U_t \tag{3.7}$$

$$U_n^{'} = \frac{1}{r} U_n \tag{3.8}$$

$$\Omega_b^{'} = \Omega_b \tag{3.9}$$

$$M_b^{'} = \frac{r}{D_b} M_b \tag{3.10}$$

$$T_n^{'} = \frac{r^2}{D_b} T_n \tag{3.11}$$

$$T_t^{'} = \frac{r^2}{D_b} T_t \tag{3.12}$$

Yukarıdaki 6 denklemde φ=0 konulup başlangıçtaki değerlere ulaşılır. Bu değerler "$_o$" alt indisiyle gösterilirse ve 6 adet C sabiti bu 6 denklemden çözülerek aşağıda gösterildiği şekilde başlangıç değerlerine bağlı olarak elde edilir.

$$C_1 = -\frac{(-pr^4 M_{bo}^{'} - rD_b M_{bo}^{'} + r\lambda^2 D_b M_{bo}^{'} + rD_b T_{to}^{'} + rD_b U_{no}^{'} - r\lambda^2 D_b U_{no}^{'})}{(\lambda^2 - 1)D_b} \tag{3.13}$$

$$C_2 = -\frac{1}{(\lambda^2 - 1)}(rT_{no}^{'} - rU_{to}^{'} + r\lambda^2 U_{to}^{'} + r\Omega_{bo}^{'} - r\lambda^2 \Omega_{bo}^{'}) \tag{3.14}$$

$$C_3 = \frac{i(pr^4 M_{bo}^{'} - ir\lambda D_b T_{no}^{'} - rD_b T_{to}^{'})}{2\lambda(\lambda^2 - 1)D_b} \tag{3.15}$$

$$C_4 = -\frac{ir(pr^3 M_{bo}^{'} + i\lambda D_b T_{no}^{'} - D_b T_{to}^{'})}{2\lambda(\lambda^2 - 1)D_b} \tag{3.16}$$

$$C_5 = -\frac{rT_{no}^{'} - r\lambda^2 \Omega_{bo}^{'}}{\lambda^2} \tag{3.17}$$

$$C_6 = -\frac{pr^4 M_{bo}^1 - r\lambda^2 D_b M_{bo}^1 - r D_b T_{to}^1}{\lambda^2 D_b} \qquad (3.18)$$

Bulunan C sabitleri (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) denklemlerinde yerine konduktan sonra herhangi bir φ açısındaki aranan değerler φ=0 başlangıç değerleri cinsinden elde edilir. Bu 6 denklem matris formunda yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} U_t \\ U_n \\ \Omega_b \\ M_b \\ T_n \\ T_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 1-\cos\varphi & \frac{\lambda\varphi-\sin(\lambda\varphi)}{\lambda^3} & -\frac{\lambda^2-1-\lambda^2\cos\varphi+\cos(\varphi\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda(\lambda^2-1)\varphi-\lambda^3\sin\varphi+\sin(\varphi\lambda)}{\lambda^3(\lambda^2-1)} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi & \frac{1-\cos(\lambda\varphi)}{\lambda^2} & \frac{\sin(\varphi\lambda)-\lambda\sin\varphi}{\lambda^3-\lambda} & \frac{\lambda^2-1-\lambda^2\cos\varphi+\cos(\varphi\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda\varphi+(\lambda^2-1)\sin(\varphi\lambda)}{\lambda^3} & \frac{\cos(\varphi\lambda)-1}{\lambda^2} & \frac{\lambda\varphi-\sin(\varphi\lambda)}{\lambda^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+(\lambda^2-1)\cos(\varphi\lambda)}{\lambda^2} & -\frac{\sin(\varphi\lambda)}{\lambda} & \frac{1-\cos(\varphi\lambda)}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda^2-1)\sin(\varphi\lambda)}{\lambda} & \cos(\varphi\lambda) & \frac{-\sin(\varphi\lambda)}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(\lambda^2-1)\sin^2(\lambda\varphi/2)}{\lambda^2} & \frac{\sin(\lambda\varphi)}{\lambda} & \frac{\lambda^2-1+\cos(\varphi\lambda)}{\lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{to} \\ U_{no} \\ \Omega_{bo} \\ M_{bo} \\ T_{no} \\ T_{to} \end{pmatrix}$$

Şekil 3.1 Taşıma matrisi

yukarıdaki şekilde elde edilir. Şekil 3.1 denkleminde görülen 6x6 boyutundaki matris aradığımız taşıma matrisidir. Yalnız bu denklemde sağ ve sol kolon matrislerde boyutsuzlaştırılmış denklemler yerine aranan ilk değerler yazılmıştır, bu durum denklemde hiçbir değişiklik yaratmaz. Şekil 3.1 da görülen taşıma matrisi [1] de verilen taşıma matrisiyle aynıdır.

3.2 Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması Durumu İçin Taşıma Matrisi

(2.46) diferansiyel denklemi çözülürse:

$$U_t = e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 + e^{-\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_2 + \left(C_3 + \varphi C_4\right)\mathrm{Cos}(\varphi) + (C_5 + \varphi C_6)\mathrm{Sin}(\varphi) \qquad (3.19)$$

elde edildikten sonra Bölüm 3.1'de belirtilen yöntem izlenerek taşıma matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir. Bu durumda başlangıç değerleri cinsinden elde edilen diferansiyel denklem sabitleri çok uzun ifadeler olarak çıktıklarından burada

gösterilmemiş, sadece sonuçların verilmiştir. Elde edilen taşıma matrisi EkA da verilmiştir.

$$U_n = e^{-\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}\sqrt{1-\lambda^2}\left(e^{2\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 - C_2\right) + \left(C_4 + C_5 + \varphi C_6\right)\mathrm{Cos}(\varphi) - \left(C_3 + \varphi C_4 - C_6\right)\mathrm{Sin}(\varphi) \tag{3.20}$$

$$\Omega_b = \frac{e^{-\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}}{r}\begin{Bmatrix}\left(2-\lambda^2\right)\left(e^{2\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 + C_2\right) + 2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_6\mathrm{Cos}(\varphi)\\ -2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_4\mathrm{Sin}(\varphi)\end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

$$M_b = -\frac{e^{-\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}}{r^2}\begin{Bmatrix}\left(\sqrt{1-\lambda^2}(-2+\lambda^2)\left(e^{2\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 - C_2\right) + 2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_4\mathrm{Cos}(\varphi)\right)D_b\\ +2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_6\mathrm{Sin}(\varphi)\end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

$$T_n = -\frac{e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}}{r^3}\begin{Bmatrix}(2-2\lambda^2+\lambda^4)\left(e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 + C_2\right) - 2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_6\mathrm{Cos}(\varphi)\\ +2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_4\mathrm{Sin}(\varphi)\end{Bmatrix}D_b \tag{3.23}$$

$$T_t = \frac{e^{-\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}}{r^3}\begin{Bmatrix}-2e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}(C_4\mathrm{Cos}(\varphi) + C_6\mathrm{Sin}(\varphi))(pr^3 - D_b) +\\ \sqrt{1-\lambda^2}(\lambda^2-2)(e^{\sqrt{1-\lambda^2}\varphi}C_1 - C_2)(-pr^3 + (\lambda^2-1)D_b)\end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

4. YAKLAŞIK YÖNTEM İLE TAŞIMA MATRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

Bölüm3'de taşıma matrisi sabit kesitli kemerler için elde edilmişti, ancak bu yöntem değişken kesitli kemerler için uygun değildir. Dolayısıyla bu bölümde değişken kesitli çubukların taşıma matrisini elde edebilmek için yaklaşık bir yöntem kullanılacak ve bu yöntemin sabit kesitli hali Bölüm3 de bulunan taşıma matrisleriyle karşılaştırılacak ve bu yöntemle elde edilen burkulma yükleri daha önce çeşitli kaynaklarda bulunanlarla karşılaştırılarak kontrol edilecektir. Şimdi yaklaşık taşıma matrisini elde edelim.

Sistem koordinatları x_i (i=1,2,3..,n) matris notasyonunda **X** ile gösterilecek olursa, diferansiyel geçiş matrisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\frac{dX}{dt} = D.X \tag{4.1}$$

Bu denklem n'inci mertebeden bir diferansiyel denklemi göstermektedir. Bu diferansiyel geçiş notasyonu aynen F ile gösterilen taşıma matrisi için de geçerli olduğu [1] de gösterilmiştir.

$$\frac{dF}{dt} = D.F \tag{4.2}$$

Burada D matrisinin sabit olduğu durumlarda taşıma matrisinin çözümü

$$F = e^{Dt} \tag{4.3}$$

den ibarettir. Ancak D matrisinin sabit olmaması için çözüm bu kadar basit değildir. Bu durum için taşıma matrisinin elde edilmesi için birçok yöntem vardır. Biz burada Picard İterasyon yöntemini kullanacağız. Bu yöntemde taşıma matrisi adım adım hesaplanır. Adım aralığı nekadar küçükse elde edilen matris o kadar doğru olacaktır. Bu durumda taşıma matrisinin F_{k-1} değeri belli ise daha iyi bir değere geçmek için rekürrans formülü:

$$\frac{dF_k}{dt} = D.F_{k-1} \tag{4.4}$$

Taşıma matrisinin t=0 için birim matrise eşit olduğuna göre yukarıdaki denklem integre edilirse;

$$F_k = I + \int_0^t F_{k-1} D(\tau_0) d\tau_0 \tag{4.5}$$

(4.5) elde edilir. Başlangıç değeri olarak F_o=I seçilip (4.5) yardımıyla iterasyona başlanırsa

$$\begin{aligned}
&F_o = I \\
&F_1 = I + \int_o^t D(\tau_0) d\tau_o \\
&F_2 = I + \int_o^t D(\tau_1) \left[I + \int_o^t D(\tau_0) d\tau_o \right] d\tau_1 \\
&. \\
&. \\
&F = I + \int_o^t D(\tau_0) d\tau_o + \int_o^t D(\tau_1) \int_o^{\tau_1} D(\tau_0) d\tau_o d\tau_1 + \int_o^t D(\tau_2) \int_o^{\tau_2} D(\tau_1) \int_o^t D(\tau_0) d\tau_o d\tau_1 d\tau_2 + ...
\end{aligned} \tag{4.6}$$

serisi elde edilir. D matrisinin elemanlarının sürekli olması durumunda (4.6) serisinin sürekli olduğu [5] de gösterilmiştir. D nin sabit olması halinde seri

$$F = I + P.t + \frac{(Pt)^2}{2!} + \frac{(Pt)^3}{3!} + ... = e^{Pt} \tag{4.7}$$

olarak bulunur.

Taşıma matrisinin ileride kullanılacak bir özelliğinden bahsedelim:

$0 \le t_1 \le t_2 \le ..... \le t_n \le t$ olmak kaydıyla;

$$F_o^t = F_{t_n}^t . F_{t_{n-1}}^{t_n} .....F_{t_0}^{t_1} \tag{4.8}$$

ifadesi geçerlidir. Burada

$$F_{t_i}^{t_k} = I + \int_{t_i}^{t_k} D(\tau_0)d\tau_o + \int_{\tau_1}^{t_k} D(\tau_1)\int_{t_i}^{\tau_1} D(\tau_0)d\tau_o d\tau_1 + ... \qquad (4.9)$$

ifadesini göstermektedir.

Bir sonraki adımda Bölüm3 de her iki dış yük durumu için oluşturulan taşıma matrisleri (4.8) denklemi kullanarak seçilen bir adım aralığı için tekrar oluşturulacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.

4.1 Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması Durumu İçin Yaklaşık Taşıma Matrisi

Burada önce (4.1) de görülen diferansiyel geçiş matrisini elde etmek gerekmektedir. Bu işlem için öncelikle (2.33)→(2.38) denklemlerini, bu denklemlerde Ω_b yi içeren terimin sıfır olduğunu, (3.7)→(3.12) boyutsuzlaştırma işlemini ve (2.45) eşitliğini göz önünde tutarak aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\frac{dU_t^1}{d\varphi} = U_n^1 \qquad (4.10)$$

$$\frac{dU_n^1}{d\varphi} = -U_t^1 + \Omega_b^1 \qquad (4.11)$$

$$\frac{d\Omega_b^1}{d\varphi} = M_b^1 \qquad (4.12)$$

$$\frac{dM_b^1}{d\varphi} = -T_n^1 \qquad (4.13)$$

$$\frac{dT_n^1}{d\varphi} = -T_t^1 + (\lambda^2 - 1)M_b^1 \qquad (4.14)$$

$$\frac{dT_t^1}{d\varphi} = T_n^1 \qquad (4.15)$$

(4.1) de görülen X matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$X = \begin{pmatrix} U_t \\ U_n \\ \Omega_b \\ M_b \\ T_n \\ T_t \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Bu durumda D matrisi:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir.

Artık elimizde D matrisi olduğuna göre aradığımız taşıma matrisini elde edebiliriz.

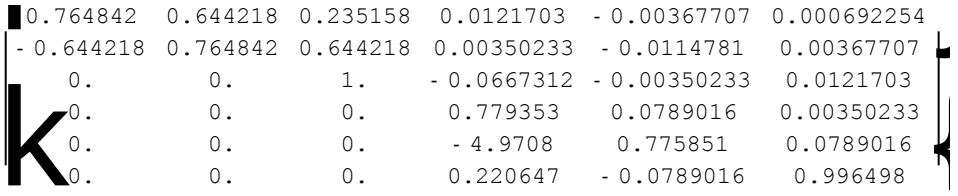
Öncelikle (4.9) ifadesi $t_i=\alpha$ ve $t_k=\varphi$ başlangıç ve bitiş değerleri için ilk 6 terim alınarak hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha}^{\varphi} = \Bigg[\Bigg\{ & \frac{1}{720}(720-(360+(-30+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2, -\frac{1}{120}(120+(-20+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \\
& \frac{1}{720}(360+(30+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2, \frac{1}{120}(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^3, \frac{1}{720}(-30+ \\
& (1+\lambda^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^4, -\frac{1}{120}(\alpha-\varphi)^5 \Bigg\}, \Bigg\{ \frac{1}{120}(120+(20+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \frac{1}{720}(720- \\
& (360+(-30+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2), -\frac{1}{120}(120+(-20+(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \\
& \frac{1}{720}(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2, -\frac{1}{120}(-20+(1-\lambda^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^3, \\
& -\frac{1}{720}(-30+(1+\lambda^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^4 \Bigg\}, \Bigg\{ 0,0,1,-\frac{1}{120}(120+(\lambda^2-1)(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2) \\
& (\alpha-\varphi), -\frac{1}{720}(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2, \frac{1}{120}(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^3 \Bigg\}, \\
& \Bigg\{ 0,0,0,\frac{1}{720}(720-(\lambda^2-1)(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2), \frac{1}{120}(120+\lambda^2(-20+ \\
& \lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \frac{1}{720}(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2 \Bigg\}, \Bigg\{ 0,0,0,-\frac{1}{120} \\
& (\lambda^2-1)(120+\lambda^2(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \frac{1}{720}(720-\lambda^2(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2) \\
& (\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2), \frac{1}{120}(120+\lambda^2(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi) \Bigg\}, \Bigg\{ 0,0,0,\frac{1}{720}(\lambda^2-1)(360 \\
& +\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2, -\frac{1}{120}(120+\lambda^2(-20+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi), \\
& \frac{1}{720}(720-(360+\lambda^2(-30+\lambda^2(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2)(\alpha-\varphi)^2) \Bigg\} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Bu işlemden sonra belirlenen bir adım aralığı ile, mesela 0,1 rad, (4.8) ifadesi yardımıyla istenen bir açı (φ) için taşıma matrisi elde edilecektir. Bu bölümdeki gaye daha önce Bölüm 3.1 de bulunan taşıma matrisiyle karşılaştırmak olduğu için bu işlem gösterim kolaylığından dolayı belirli bir λ değeri için yapılacaktır. Burada λ=8 seçilmiştir. Şimdi adım aralığı 0.1 radyan ve ulaşılmak istenen açı ise 0.7 radyan seçilirse yapılacak işlem:

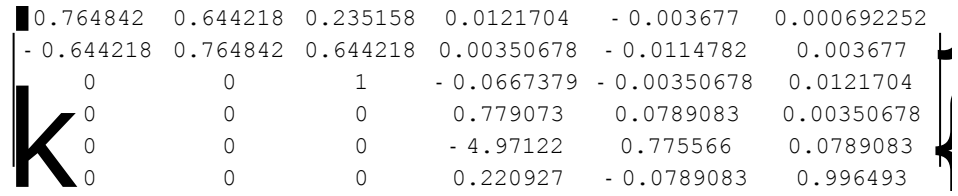
$$
F_0^{0.7} = F_{0.6}^{0.7}.F_{0.5}^{0.6}.F_{0.4}^{0.5}F_{0.3}^{0.4}.F_{0.2}^{0.3}.F_{0.1}^{0.2}.F_0^{0.1} \tag{4.19}
$$

olarak gösterilebilir. Bu işlemin ara adımları çok uzun ifadeler olduğu için burada sadece bulunan sonuç gösterilecektir.



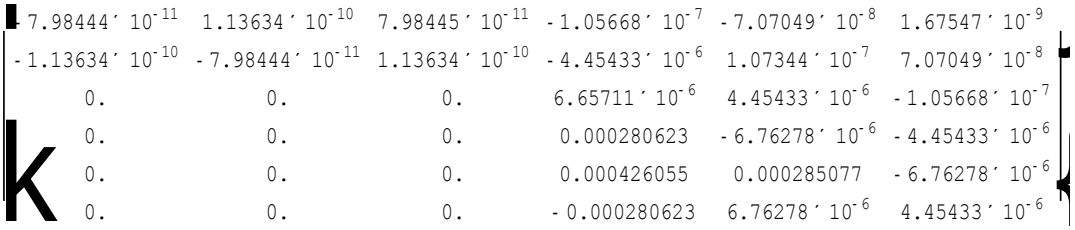
Şekil 4.1 Elde edilen yaklaşık taşıma matisi

Aynı λ ve φ değerleri Şekil 3.1 de görülen taşıma matrisinde yerine konursa:



Şekil 4.2 Bölüm 3.1 de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi

ifadesi bulunur. İkisi arasındaki fark ise:



Şekil 4.3 Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark

olarak bulunur. Burada farkın en büyük olduğu elemanda bile binde 4 mertebesindedir. Bu yaklaşıklık yeterlidir ancak, daha yaklaşık çözümler aranıyorsa (4.18) ifadesindeki terim sayısı arttırılmalı ve (4.19) ifadesindeki adım aralığı daraltılmalıdır. Şimdi bu yaklaşık yöntemin iyi çalıştığını göstermek için literatürde daha önce hesaplanmış burkulma yüklerini, bu yöntemle hesaplayacağımız değerlerle karşılaştıralım.

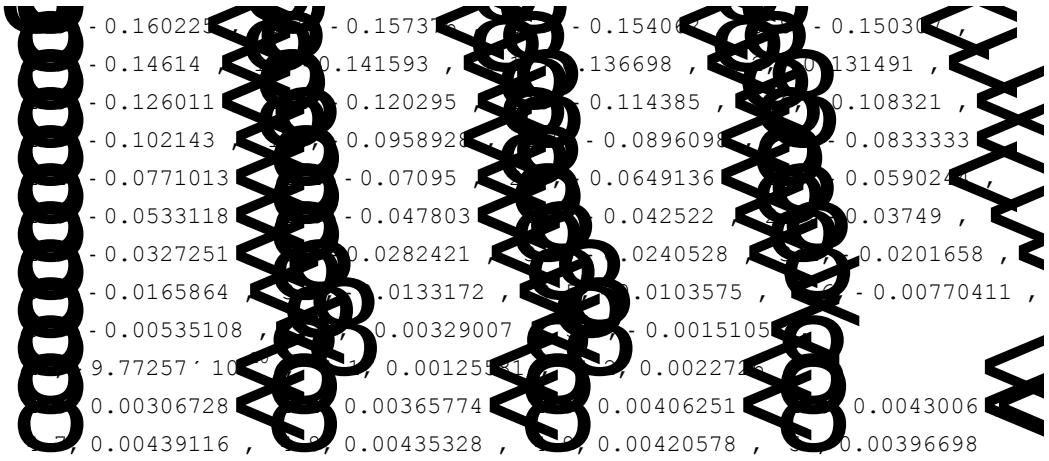
Burkulma yükleri nümerik yöntemle hesaplanacaktır. Bunun nedeni Bölüm 5.1 de detaylı olarak anlatılacaktır. Şimdi bu nümerik yöntemi kısaca anlatalım.

Bu yöntemde ilk olarak lamdaya değer verilecek, bu lamda değeri için (4.18) matrisi oluşturulacak ve bu matris denklem (4.8) de yerine konarak taşıma matrisi

oluşturulacaktır. Bu işlemden sonra [1] ve [3] de verilen yöntemle sınır şartlarına göre ilgili minörler oluşturularak bunun determinantı alınacaktır. Bu işlem sonucunda belirli bir lamda değeri için taşıma matrisinin ilgili minörünün determinantı elimizde olacaktır. Bunu bilgisayar yardımıyla istediğimiz aralıkta ve istediğimiz sıklıkta lamda değeri için yapabiliriz. Elde ettiğimiz bu lamda değerleri ve determinant değerlerini bir grafikte gösterirsek determinantı sıfır yapan lamda değerini belirlemiş oluruz. Gerekli kesinliği sağlayabilmek için başta kabaca belirlenen bu bölgede lamda aralığını sıklaştırırsak aranan lamda değerini istenen yaklaşıklıkta elde ederiz.

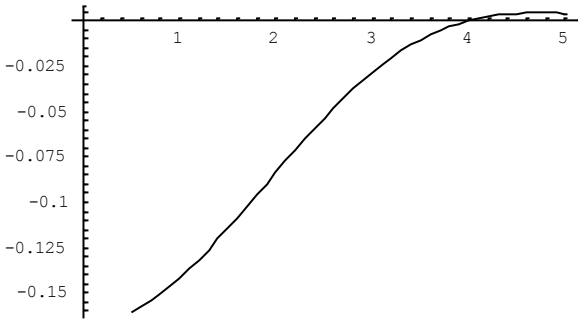
Burada hesap adımlarına örnek olarak Şekil 5.1 de görülen ve (4.18) de geçiş taşıma matrisi verilen iki ucu mafsallı kemerin, $\beta=\pi/2$ merkez açısı için burkulma yükünü hesaplayalım. Kemerin sabit eğilme rijitliği $D_b=D_{bo}$ olsun.

Şekil 4.4 de yukarıda anlatıldığı şekilde, belirlenen aralıktaki lamda değerleri için hesaplanan determinant sonuçları görülmektedir



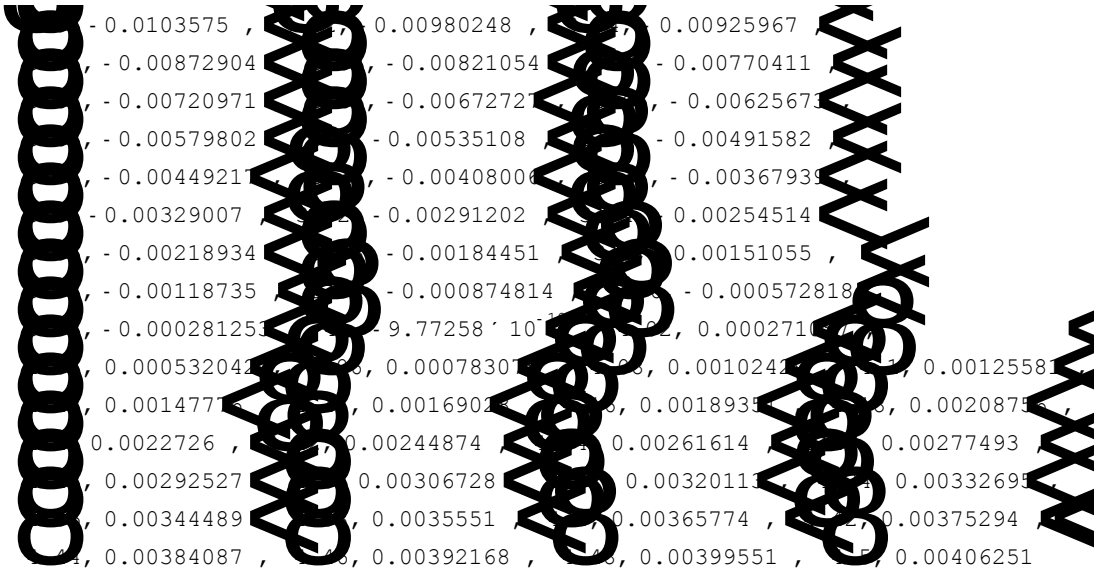
Şekil 4.4 Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri

Yukarıdaki ifade de parantez içindeki değerlerden ilki lamda ikincisi ise taşıma matrisinin ilgili türevinin determinantıdır. Burada lamda değerleri 0.5 ile 5 arasında 1/10 artımla alınmıştır. Bu değerleri düşey ekseni determinant değerlerini, yatay ekseni ise lamda değerlerini gösteren bir grafikte gösterirsek:



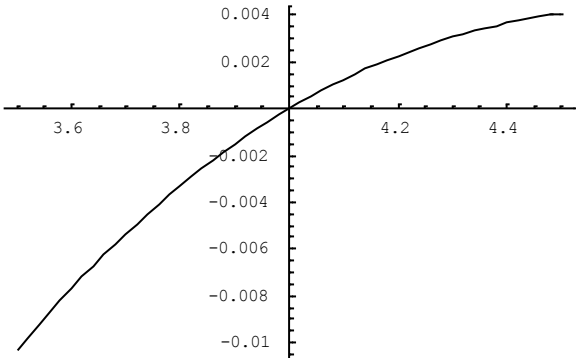
Şekil 4.5 Lamda değerleri

Determinantın yaklaşık 3.5 ile 4.5 arasında ilk defa sıfır olduğu görülür. Şimdi lamdanın kesin değerine yeterince yaklaşabilmek için lamda aralığı 3.5 ile 4.5 arası seçersek ve artış aralığını 1/50 olarak alırsak:



Şekil 4.6 Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri

ve tekrar lamda-determinant grafiği çizilirse:



Şekil 4.7 Lamda değerleri

Böylece determinantı sıfır yapan değerlerlerin yeterli yaklaşıklıktaki değerleri bulunmuş olur. Burada Bölüm 6 da anlatılan şekilde Şekil 4.2 deki grafikten faydalanarak aranan lamda değeri 4 olarak bulunur. Bu yöntemle belirli açılar için hesap edilen lamda ve lamdaya bağlı olarak (5.25) formülünden elde edilen burkulma katsayıları (α) Tablo 4.3 de verilmiştir. Literatürde yer alanlar ise, Tablo 4.1 de Timoshenko'nun, Tablo 4.2 de ise Özbek'in bulduğu değerler verilmiştir.

Tablo 4.1 Burkulma Katsayıları-Timoshenko [4]

α	İki Ucu Ankastre	İki Ucu Mafsallı
30	294	143
60	73,32	35
90	32,4	15

Tablo 4.2 Burkulma Katsayıları-Özbek [3]

α	İki Ucu Ankastre	İki Ucu Mafsallı
30	-	141,90
60	73,334	35,008
90	32,432	15,005

Tablo 4.3 Burlulma katsayıları-Yaklaşık Yöntem ile Bulunan

α	İki Ucu Ankastre	İki Ucu Mafsallı
30	294,2589	143
60	73,3275	35
90	32,430946	15

Yukarıdaki tablolardan da görüldüğü üzere yaklaşık yöntem literatürdeki sonuçları tam olarak tutmaktadır.

4.2 Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması Durumu İçin Yaklaşık Taşıma Matrisi

Burada da aynen bölüm 4.1 de yapıldığı şekilde önce (4.1) de görülen diferansiyel geçiş matrisini elde etmek gerekmektedir. Bu işlem için öncelikle (2.33)→(2.38) denklemlerini, (3.7)→(3.11) boyutsuzlaştırma işlemini ve (2.45) eşitliğini göz önünde tutarak aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\frac{dU_t^{'}}{d\varphi} = U_n^{'} \tag{4.20}$$

$$\frac{dU_n^{'}}{d\varphi} = -U_t^{'} + \Omega_b^{'} \tag{4.21}$$

$$\frac{d\Omega_b^{'}}{d\varphi} = M_b^{'} \tag{4.22}$$

$$\frac{dM_b^{'}}{d\varphi} = -T_n^{'} \tag{4.23}$$

$$\frac{dT_n^{'}}{d\varphi} = -T_t^{'} + (\lambda^2 - 1)M_b^{'} \tag{4.24}$$

$$\frac{dT_t^{'}}{d\varphi} = T_n^{'} - (\lambda^2 - 1)\Omega_b^{'} \tag{4.25}$$

(4.1) de görülen X matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$X = \begin{pmatrix} U_t \\ U_n \\ \Omega_b \\ M_b \\ T_n \\ T_t \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Bu durumda D matrisi:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

olarak elde edilir.

Artık elimizde D matrisi olduğuna göre aradığımız taşıma matrisini elde edebiliriz. Öncelikle (4.9) ifadesi aynen bölüm 4.1 deki şekilde 6 terim alınarak hesaplanır. Bu ifade Ek B de verilmiştir.

Bu işlemden sonra belirlenen bir adım aralığı ile mesela 0,1rad, (4.8) ifadesi yardımıyla istenen bir açı (φ) değerindeki taşıma matrisi elde edilecektir. Bu bölümdeki gaye daha önce Bölüm 3.1 de bulunan taşıma matrisiyle karşılaştırmak olduğu için bu işlem gösterim kolaylığından dolayı belirli bir λ değeri için yapılacaktır.Burada λ=15 seçilmiştir. Şimdi adım aralığı 0.1radyan ve ulaşılmak istenen açı ise 0.7 radyan seçilirse yapılacak işlem:

$$F_0^{0.7} = F_{0.6}^{0.7}.F_{0.5}^{0.6}.F_{0.4}^{0.5}F_{0.3}^{0.4}.F_{0.2}^{0.3}.F_{0.1}^{0.2}.F_0^{0.1} \tag{4.28}$$

olarak gösterilebilir. Bu işlemin ara adımları çok uzun olduğu için burada sadece bulunan sonuç gösterilecektir.

$$k = \begin{bmatrix} 0.764842 & 0.644218 & 0.226462 & 0.00314884 & -0.000985755 & 0.000229889 \\ -0.644218 & 0.764842 & 0.592723 & 0.00565286 & -0.00291895 & 0.000985755 \\ 0. & 0. & 0.770495 & -0.057973 & -0.00565286 & 0.00314884 \\ 0. & 0. & -0.705339 & -0.495745 & 0.0611218 & 0.00565286 \\ 0. & 0. & 1.26624 & -12.9859 & -0.501397 & 0.0611218 \\ 0. & 0. & -144.305 & -3.10516' 10^{-16} & 0.644218 & 0.764842 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.8 Elde edilen yaklaşık taşıma matisi

Aynı λ ve φ değerleri için Ek A da görülen taşıma matrisi çözülürse:

$$k = \begin{bmatrix} 0.764842 & 0.644218 & 0.226462 & 0.00314904 & -0.000985751 & 0.000229888 \\ -0.644218 & 0.764842 & 0.592723 & 0.0056538 & -0.00291916 & 0.000985751 \\ 0 & 0 & 0.770496 & -0.058019 & -0.0056538 & 0.00314904 \\ 0 & 0 & -0.705386 & -0.495954 & 0.061168 & 0.0056538 \\ 0 & 0 & 1.26645 & -12.9963 & -0.501608 & 0.061168 \\ 0 & 0 & -144.305 & 0 & 0.644218 & 0.764842 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.9 Bölüm 3.2 de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi

ifadesi bulunur. İkisi arasındaki fark ise:

$$k = \begin{bmatrix} 1.11022' 10^{-14} & -1.56541' 10^{-14} & 4.22087' 10^{-9} & -2.06368' 10^{-7} & -4.22092' 10^{-9} & 9.25417' 10^{-10} \\ 1.56541' 10^{-14} & 1.11022' 10^{-14} & -2.07293' 10^{-7} & -9.41266' 10^{-7} & 2.07293' 10^{-7} & 4.22092' 10^{-9} \\ 0. & 0. & -9.41266' 10^{-7} & 0.0000460201 & 9.41266' 10^{-7} & -2.06368' 10^{-7} \\ 0. & 0. & 0.0000462264 & 0.000209902 & -0.0000462264 & -9.41266' 10^{-7} \\ 0. & 0. & -0.000210844 & 0.0103085 & 0.000210844 & -0.0000462264 \\ 0. & 0. & 3.49587' 10^{-12} & -3.10516' 10^{-16} & -1.4877' 10^{-14} & 1.12133' 10^{-14} \end{bmatrix}$$

Şekil 4.10 Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark

olarak bulunur. Burada farkın en büyük olduğu elemanda bile on binde 2 mertebesindedir. Bu yöntemle ilgili olarak literatürde daha önce yapılmış bir çalışma olmadığı için, Bölüm 4.1 de yapıldığı gibi burkulma yükleri hesaplanmamış, taşıma matrislerinin çok yakın değerler vermesi yeterli görülmüştür.

5. YAKLAŞIK YÖNTEMİN DEĞİŞKEN KESİTLİ RADYAL YÜKLÜ DAİRESEL KEMERLERE UYGULANMASI

Kesitin değişim fonksiyonuna f(φ) dersek kesitin eğilme rijitliğini

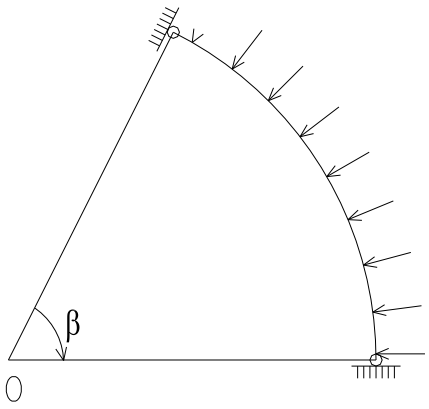
$$D_b = \frac{D_{bo}}{f(\varphi)} \tag{5.1}$$

olarak tanımlayalım. Burada D_{bo} kemerin belirli bir kesitinin düzlemi içindeki eğilme rijitliğidir. Şimdi eğilme rijitliği için uygun bir değişim fonksiyonu seçelim. Bu seçimi yaparken genel olarak iki tip belirleyebiliriz.

Tip1: Kemerin ortasında minimum, mesnetlerde maksimum eğilme rijitliği.

Tip2: Kemerin mesnetlerinde minimum, ortasında maksimum eğilme rijitliği.

Bu seçimlerin dışında kemer rijitliği değişimi için yükleme durumuna ve bu yüklemeler altında oluşan değişik kesit tesirlerinin gerektireceği birçok alternatif fonksiyon düşünülebilir, ancak biz burada sadece yukarıda verilenleri inceleyeceğiz.



Şekil 5.1 Radyal yüklü dairesel iki ucu mafsallı çubuk

Tip1 için kemerin merkez açısının (β), Şekil 5.1, değişken olmasını da göz önünde tutarak aşağıdaki fonksiyon seçilmiştir.

$$f(\varphi) = 2 + \mathrm{Sin}(n\varphi) \tag{5.2}$$

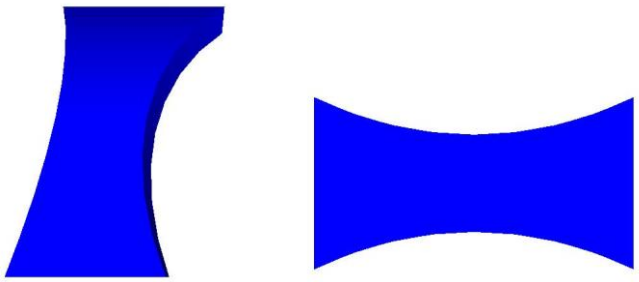
Burada n merkez açısını belirleyen katsayıdır, şöyle ki; $\beta=\pi/n$. Mesela n=3 için merkez açı $\alpha=\pi/3$, fonksiyon $f(\varphi)=2+\mathrm{Sin}(3\varphi)$ olur. (5.2) fonksiyonu için kemerin rijitlik değişimi şöyle olur.

$$\varphi = 0 \rightarrow f(\varphi) = 2 \rightarrow D_b = \frac{D_{bo}}{2} \tag{5.3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} \rightarrow f(\varphi) = 3 \rightarrow D_b = \frac{D_{bo}}{3} \tag{5.4}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \rightarrow f(\varphi) = 2 \rightarrow D_b = \frac{D_{bo}}{2} \tag{5.5}$$

Seçilen Tip1 fonksiyonu için oluşan kemer Şekil 5.2 de görülmektedir.



Şekil 5.2 Tip1 Perspektif ve plan

Tip2 için seçilen fonksiyon ise:

$$f(\varphi) = 2 - \mathrm{Sin}(n\varphi) \tag{5.6}$$

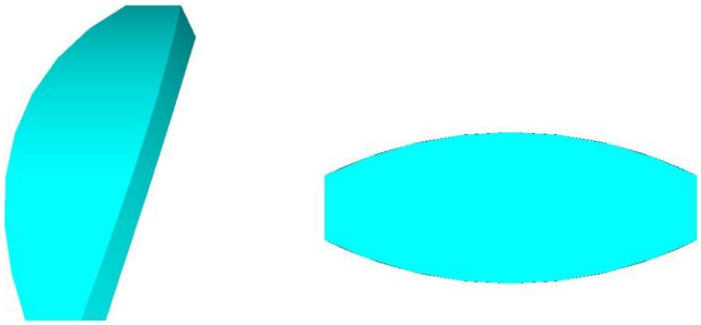
(5.6) fonksiyonu için rijitlik değişimi:

$$\varphi = 0 \rightarrow f(\varphi) = 2 \rightarrow D_b = \frac{D_{bo}}{2} \tag{5.7}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} \rightarrow f(\varphi) = 1 \rightarrow D_b = D_{bo} \tag{5.8}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \rightarrow f(\varphi) = 2 \rightarrow D_b = \frac{D_{bo}}{2} \tag{5.9}$$

Seçilen Tip2 fonksiyonu için oluşan kemer Şekil 5.3 de görülmektedir.



Şekil 5.3 Tip2 Perspektif ve plan

Şimdi yukarıda seçmiş olduğumuz fonksiyonları kullanarak burkulma yüklerini hesaplayalım. Denklem (4.1) de görülen diferansiyel geçiş matrisini elde etmek için önce (2.33)-(2.38) denklemlerinde (5.1) denklemini yerine koyarsak

$$\frac{dU_t}{d\varphi} = U_n \tag{5.10}$$

$$\frac{dU_n}{d\varphi} = -U_t + r\Omega_b \tag{5.11}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\varphi} = f(\varphi)\frac{r}{D_b}M_b \tag{5.12}$$

$$\frac{dM_b}{d\varphi} = -rT_n \tag{5.13}$$

$$\frac{dT_n}{d\varphi} = -T_t + f(\varphi)\frac{p_n r^2}{D_b}M_b \tag{5.14}$$

$$\frac{dT_t}{d\varphi} = T_n - p_n r\Omega_b \tag{5.15}$$

yukarıdaki denklemler elde edilir. Bu işlemden sonra (3.7)-(3.12) boyutsuzlaştırma

işlemini yaparsak ve (2.45) eşitliğini hesaba katarsak:

$$\frac{dU_t^1}{d\varphi} = U_n^1 \tag{5.16}$$

$$\frac{dU_n^1}{d\varphi} = -U_t^1 + \Omega_b^1 \tag{5.17}$$

$$\frac{d\Omega_b^1}{d\varphi} = f(\varphi) M_b^1 \tag{5.18}$$

$$\frac{dM_b^1}{d\varphi} = -T_n^1 \tag{5.19}$$

$$\frac{dT_n^1}{d\varphi} = -T_t^1 + f(\varphi)(\lambda^2 - 1) M_b^1 \tag{5.20}$$

$$\frac{dT_t^1}{d\varphi} = T_n^1 - (\lambda^2 - 1)\Omega_b \tag{5.21}$$

Bu durumda diferansiyel geçiş matrisi:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 - 1) f(\varphi) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(\lambda^2 - 1) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Bir sonraki bölümde dış yüklerin davranışlarına göre burkulma yükleri hesap edilecektir.

5.1 Dış Yüklerin Çubuk Eksenine Dik Kalması Durumu İçin Burkulma Yükü

(5.22) formülünde D matrisi genel durum için elde edilmişti, ancak dış yüklerin çubuk eksenine dik kalması durumunda, aynen Bölüm 2.3.1 de yapıldığı şekilde, dış yükler Ω_b dönmesine katıldıkları için $p_n r \Omega_b$ terimi sıfır olur. Bu nedenle (5.21) denkleminin son terimi olan $(\lambda^2\text{-}1)\,\Omega_b$ terimi sıfır olarak alınırsa, D matrisi:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 - 1)f(\varphi) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

şeklini alır. Burada taşıma matrisi aynen Bölüm 4.1 deki yöntemle elde edilecektir, ancak Bölüm4.1 den farklı olarak burada farklı β açıları için, farklı f(φ) fonksiyonları kullanılacağı için her açı değeri için taşıma matrisi farklı olacaktır. Oluşturulan bu matris değerleri çok uzun olduğu için sadece bir β değeri için denklemler verilecek, diğer açılar için sadece sonuçlar verilecektir.

Örnek olarak Tip1 fonksiyonu için, $\beta=\pi/2$ değeri verilecektir. Burada $f(\varphi)=2+\text{Sin}(2\varphi)$ olur. Bu fonksiyon D matrisinde yerine konur ve bu matriste $t_i=\alpha$ ve $t_k=\varphi$ başlangıç ve bitiş değerleri için (4.9) ifadesinde yerine konursa Ek C de verilen geçiş matrisi elde edilir.

Bundan sonraki adımda Ek C de elde edilen bu matris belirli α ve φ değerleri ile (4.8) denkleminde yerine konarak taşıma matrisi oluşturulacaktır. Ancak burada amacımız burkulma yükünün belirlenmesi, yani taşıma matrisinin sınır şartlarına bağlı ilgili minörünün determinantını sıfır yapacak lamda değerini aramaktır. Bunu bulabilmek için normalde ilgili minörün karakteristik denklemi bulunup, bunun köklerinin bulunması gerekmektedir. Fakat ara taşıma matrisinin boyutları Ek C de görülmektedir. Bugün için elimizdeki bilgisayar programları, bu matrisi denklem (4.8)'e sokup taşıma matrisini belirsiz bir lamda değeri için oluşturamamaktadır. Dolayısıyla burada nümerik bir yöntemle burkulma yükü hesaplanacaktır.

Bölüm 4.1'de de açıklandığı gibi, burada ilk olarak lamdaya değer verilecek, belirli bu lamda değeri için Ek C de görülen matrisi oluşturulacak ve bu matris denklem (4.8) de yerine konarak taşıma matrisi oluşturulacaktır. Bu işlemden sonra [1] ve [3] de verilen yöntemle sınır şartlarına göre ilgili minörler oluşturularak bunun determinantı alınacaktır. Bu işlem sonucunda belirli bir lamda değeri için taşıma matrisinin ilgili minörünün determinantı elimizde olacaktır. Bunu bilgisayar yardımıyla istediğimiz aralıkta ve istediğimiz sıklıkta lamda değeri için yapabiliriz.

Elde ettiğimiz bu lamda değerleri ve determinant değerlerini bir grafikte gösterirsek determinantı sıfır yapan lamda değerini belirlemiş oluruz. Gerekli kesinliği sağlayabilmek için başta kabaca belirlenen bu bölgede lamda aralığını sıklaştırırsak aranan lamda değerini istenen yaklaşıklıkta elde ederiz.

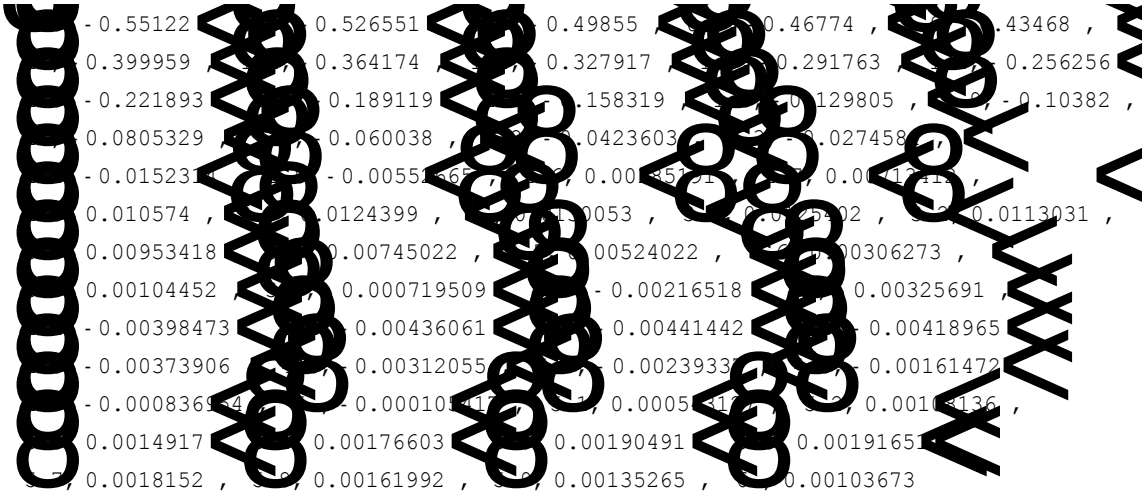
Yukarıda anlatılan işlemler Mathematica programında bir program yazılarak gerçekleştirilmiştir. İlgili program Bölüm6 da detaylı olarak anlatılacaktır.

Yukarıda anlatılan yöntem Şekil 5.1 de görülen iki ucu mafsallı kemer için uygulanacaktır. Hesap adımları bütün tipler için yapılmayacak sadece ara taşıma matrisi Ek C de verilen, değişim fonksiyonu Tip1 ve merkez açısı $\beta=\pi/2$ olan kemer için yapılacaktır. Diğer açı ve tipler için sadece sonuçlar verilecektir.

Tip1, $\beta=\pi/2$ değişim fonksiyonu:

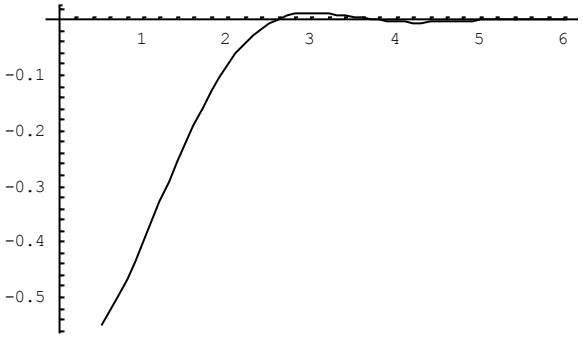
$$f(\varphi) = 2 + \mathrm{Sin}(2\varphi) \tag{5.24}$$

Şekil 5.4 de, yukarıda anlatıldığı şekilde, belirlenen aralıktaki lamda değerleri için hesaplanan determinant sonuçları görülmektedir.



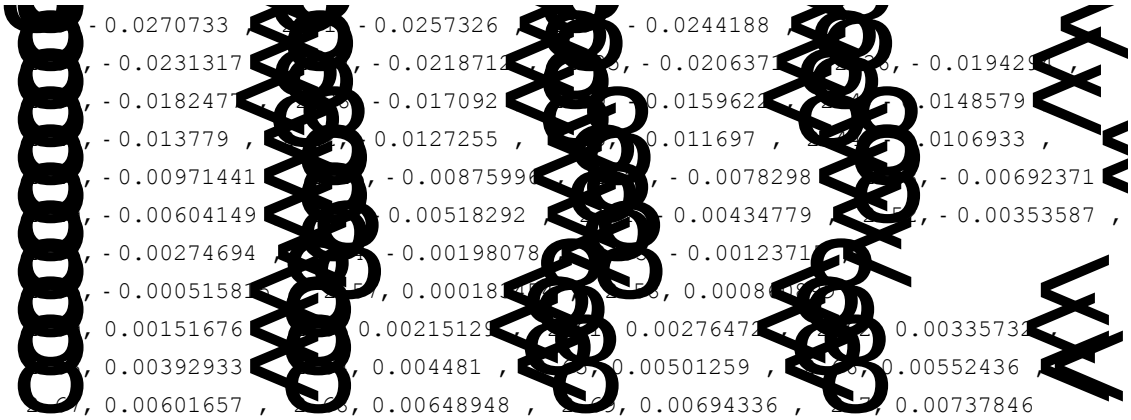
Şekil 5.4 Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri

Yukarıdaki ifade de parantez içindeki değerlerden ilki lamda ikincisi ise taşıma matrisinin ilgili türevinin determinantıdır. Burada lamda değerleri 0.5 ile 6 arasında 1/10 artımla alınmıştır. Bu değerleri düşey ekseni determinant değerlerini, yatay ekseni ise lamda değerlerini gösteren bir grafikte gösterirsek:



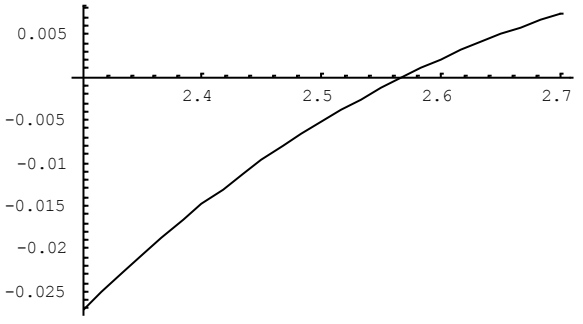
Şekil 5.5 Lamda değerleri

Determinantın yaklaşık 2.3 ile 2.7 arasında ilk defa sıfır olduğu görülür. Şimdi lamdanın kesin değerine yeterince yaklaşabilmek için lamda aralığı 2.3 ile 2.7 arası seçersek ve artış aralığını 1/100 olarak alırsak:



Şekil 5.6 Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri

ve tekrar lamda-determinant grafiğini çizersek



Şekil 5.7 Lamda değerleri

yukarıdaki grafik elde edilir. Artık determinantı sıfır yapan lamda değerinin yeterli yaklaşıklıktaki değeri bulunmuş olur. Burada Bölüm 6 da anlatılan şekilde Şekil 5.7 grafiğinden faydalanarak aranan lamda değeri 2.567 olarak bulunur. Bu değerin yeterli yaklaşıklıkta olduğu daha küçük aralıklar seçilmesi sonucunda, bulunan yeni değerin bir önceki adımda bulunan ile karşılaştırılması yoluyla belirlenmiştir.

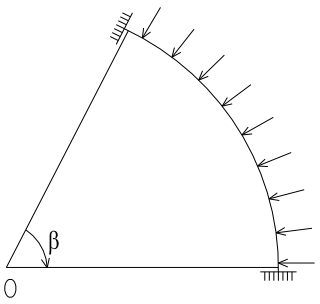
Bazı açılar için bulunan lamda değerleri ve burkulma katsayıları Tablo 5.1 de özetlenmiştir.

Tablo 5.1 İki Ucu Mafsallı ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları

Merkez Açı: β	Kemer Tipi	Fonksiyon: f(φ)	λ	α
30	Tip1	2+Sin(6φ)	7,3690	53,30
60	Tip1	2+Sin(3φ)	3,7476	13,04
90	Tip1	2+Sin(2φ)	2,5670	5,59
30	Tip2	2-Sin(6φ)	10,4125	107,42
60	Tip2	2-Sin(3φ)	5,2240	26,29
90	Tip2	2-Sin(2φ)	3,5032	11,27

Yukarıdaki tabloda kemer tipi; Bölüm 5 in ikinci paragrafında açıklanan tipleri göstermektedir. λ ise (2.45) formülünde verilmiştir, son sütundaki α ise aşağıda verilmiş olan burkulma katsayısıdır.

$$p_n = (\lambda^2 - 1)\frac{D_{bo}}{r^3}$$
$$\alpha = (\lambda^2 - 1) \qquad (5.25)$$



Şekil 5.8 Radyal yüklü dairesel iki ucu ankastre çubuk

Aynı tabloyu Şekil 5.8 de görülen ankastre kemer için oluşturalım.

Tablo 5.2 İki Ucu Ankastre ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları

Merkez Açı: β	Kemer Tipi	Fonksiyon: $f(\varphi)$	λ	α
30	Tip1	$2+\sin(6\varphi)$	10,6168	111,72
60	Tip1	$2+\sin(3\varphi)$	5,3730	27,87
90	Tip1	$2+\sin(2\varphi)$	3,6530	12,34
30	Tip2	$2-\sin(6\varphi)$	14,8962	220,90
60	Tip2	$2-\sin(3\varphi)$	7,4810	54,96
90	Tip2	$2-\sin(2\varphi)$	5,0250	24,25

Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 de görülen değişken kesitli kemer tiplerinin en kalın kesitinin eğilme rijitliğine sahip olan sabit kesitli kemerlerin burkulma katsayılarını hesaplayarak, değişken kesitli kemer için hesaplanan burkulma katsayılarıyla karşılaştıralım. Bu karşılaştırma yapılan kesit değişimlerinin burkulmaya ne mertebede etkidiği hakkında bir fikir sahibi olmak için yapılacaktır.

Tip1 için maksimum kesit Şekil 5.2 ve formül (5.3) de görüldüğü üzere mesnetlerdedir ve değeri $D_{bo}/2$ dir. Tip2 için ise maksimum kesit ortada ve değeri, formül (5.8), D_{bo} dır.

Bu durumda Tip1 e eşdeğer sabit kemere Tip3, Tip2 ye eşdeğer sabit kemere Tip 4 dersek, bunların rijitliklerini değişim fonksiyonuna sabit sayılar koyarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \text{Tip3} &\rightarrow f(\varphi) = 2(\text{sabit}) \\ \text{Tip4} &\rightarrow f(\varphi) = 1(\text{sabit}) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Bu kemerlerin ifade eden şekil aşağıda görülmektedir.



Şekil 5.9-Sabit kesitli kemer(Tip3, Tip4)

Böylece bu kemerlerin D matrisleri, (5.26) sabit fonksiyonların (5.23) ifadesinde yerine konulmasıyla hesaplanır. Bu işlemden sonra aynı hesap adımları takip edilerek burkulma yükleri hesaplanır.

Tablo 5.3 Tip1–Tip3 Kemerleri İçin Burkulma Katsayıları

β	Mesnet Tipi	α (Tip1)	α (Tip3)
30	Uçlar Mafsal	53,30	71,42
60	Uçlar Mafsal	13,04	17,50
90	Uçlar Mafsal	5,59	7,50
30	Uçlar Ankastre	111,72	147,10
60	Uçlar Ankastre	27,87	36,66
90	Uçlar Ankastre	12,34	16,22

Tablo 5.4 Tip2–Tip4 Kemerleri İçin Burkulma Katsayıları

β	Mesnet Tipi	α (Tip2)	α (Tip4)
30	Uçlar Mafsal	107,42	143
60	Uçlar Mafsal	26,29	35
90	Uçlar Mafsal	11,27	15
30	Uçlar Ankastre	220,90	294,26
60	Uçlar Ankastre	54,96	73,33
90	Uçlar Ankastre	24,25	32,43

Hesaplanan bu değerler Tip3 için Tablo 5.3 de, Tip4 için Tablo 5.4 de benzerleri değişken kesitli kemerlerin değerleri ile karşılaştırmalı olarak görülmektedir.

5.2 Dış Yüklerin İlk Doğrultularına Paralel Kalması Durumu İçin Burkulma Yükü

(5.22) formülünde oluşturulan D matrisi burada aynen kullanılabilir. D matrisi belirli iken, Bölüm 5.1 de verilen yolla ve verilen kemer tipleri için burkulma yükleri hesaplanır. Burada bu hesap adımları tekrar verilmeyecek, yapılan işlemler sonucunda oluşan tablolar verilecektir. Şekil 5.1 de görülen mafsallı ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları:

Tablo 5.5 İki Ucu Mafsallı ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları

Merkez Açı: β	Kemer Tipi	Fonksiyon: f(φ)	λ	α
30	Tip1	2+Sin(6φ)	7,3936	53,67
60	Tip1	2+Sin(3φ)	3,7940	13,39
90	Tip1	2+Sin(2φ)	2,6290	5,91
30	Tip2	2-Sin(6φ)	10,4478	108,16
60	Tip2	2-Sin(3φ)	5,2911	26,99
90	Tip2	2-Sin(2φ)	3,5928	11,91

Şekil 5.8 da görülen ankastre ve değişken kesitli kemer için burkulma katsayıları:

Tablo 5.6 İki Ucu Ankastre ve Değişken kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları

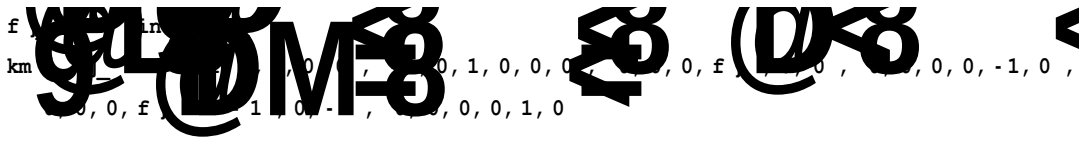
Merkez Açı: β	Kemer Tipi	Fonksiyon: f(φ)	λ	α
30	Tip1	2+Sin(6φ)	10,6452	112,32
60	Tip1	2+Sin(3φ)	5,4275	28,46
90	Tip1	2+Sin(2φ)	3,7300	12,91
30	Tip2	2-Sin(6φ)	14,9404	222,20
60	Tip2	2-Sin(3φ)	7,5667	56,25
90	Tip2	2-Sin(2φ)	5,1459	25,48

Yukarıdaki tablolardaki burkulma değerleri ile Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 deki değerler karşılaştırıldığında, bunların birbirine çok yakın olduğu görülür. Bu durum hesaplarda kullanılan tarzdaki kemerler için Bölüm 2.2.1 deki davranış farkının, kemerlerin burkulma yüklerine büyük bir etkisinin olmadığını göstermiştir.

6. BURKULMA YÜKÜNÜ HESAPLAYAN PROGRAM

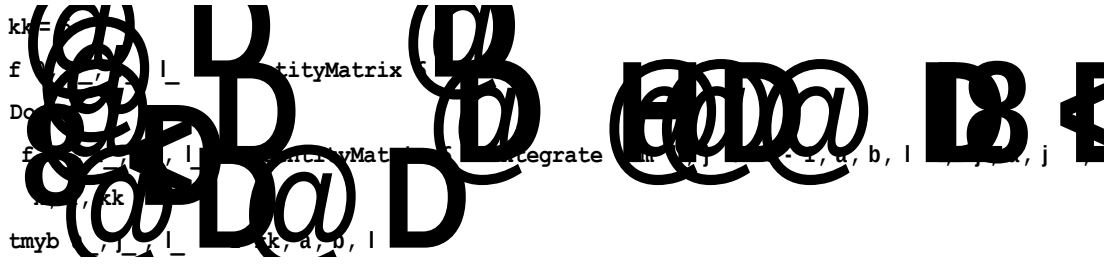
Bölüm 4 ve Bölüm 5 de burkulma yükünün nasıl çözüldüğü ana hatlarıyla anlatılmıştı. Bu bölümde Mathematica'da yazılmış olan programın çalışma mantığı, nasıl veri girileceği, sonuçların nasıl alınacağı ve programın yazılımı tam olarak verilecektir. Anlatım tarzı olarak programın tümünü bir kerede vermek yerine parça parça verilecek, ardından bu bölümler anlatılacaktır.

Programın ilk bölümünde değişim fonksiyonu f(φ) ve diferansiyel geçiş matrisi D aşağıda görüldüğü şekilde programa girilir.



Şekil 6.1 Diferansiyel geçiş matrisinin programa giriliş şekli

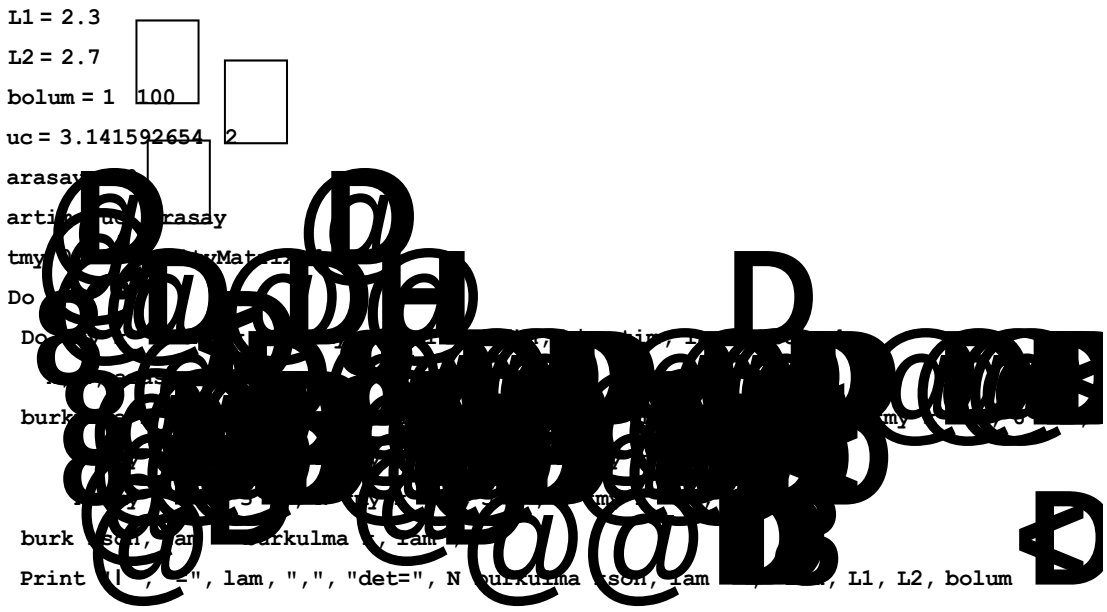
Burada km[λ_,φ_] diferansiyel geçiş matrisini ifade etmektedir. Bu kısımda veri olarak değişim fonksiyonu f(φ) ve km[λ,φ] istenen şekilde tanımlanabilir. Programın ikinci kısmında (4.8) formülünde görülen ifade aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



Şekil 6.2 Ara taşıma matrisinin oluşturulması

Bu bölümde bir DO çevrimi görülmektedir. DO çevrimi Mathematica programında aynen Basic ve Fortran programlarındaki şekilde çalışmaktadır. Burada çevrim değişkeni **k,** 1 den başlayıp **kk** değerine kadar ardışık tamsayı olarak artmaktadır. **f[0,α,β,λ]** birim matrisi **f[k,α,β,λ]** da (4.5) eşitliğinin sol tarafını ifade etmektedir.

Buradaki çalışma mantığı aynen (4.6) ifadesindeki şekilde k için hesaplanan fonksiyonları tekrar aynı süreçte yerine konmasıdır. Burada en son bulunan fonksiyon **tmyb[α,φ,λ]** olarak belirlenmiştir. α, φ ve λ ya bağlı (4.9) ifadesi **tmyb[α,φ,λ]** olarak elde edilmiştir. Bir sonraki adımda Bölüm4.1 ve Bölüm5.1 de anlatıldığı şekilde belirli λ değerleri için taşıma matrisinin ilgili minörünün determinantı hesaplanmaktadır:



Şekil 6.3 λ değerine bağlı olarak ilgili minörün determinantının hesaplanması

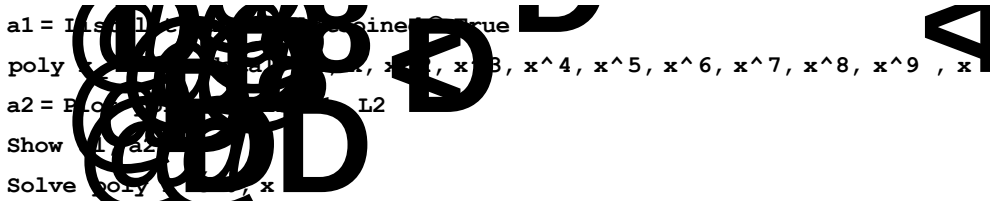
Burada iç içe geçmiş iki adet DO çevrimi görülmektedir. Bunlardan ilki, dışta olan, λ değerini **L1** den başlayarak **L2**'ye kadar **bolum** ile tanımlanan adım aralığı ile döndürmektedir. İkincisi ise, içte olan, (4.8) de görülen işlemi gerçekleştirmekte ve çevrim sonucunda elde edilen taşıma matrisinin ilgili minörünü oluşturup bunun determinantını **burk[kson, lam]** değerine eşitlemektedir. Burada **uc** =π/n ile ifade edilen ve Şekil 5.1 de görülen β açısını göstermektedir. **artim** ise (4.8) formülündeki açı artışını göstermektedir. **tmy[k]** taşıma matrisini, **burkulma[k,lam]** ise elde edilen taşıma matrisinin ilgili minörünün determinantını göstermektedir.

Bu işlem sonucu her adımda belirli bir lamda değeri için elde edilen determinant sonuçları aşağıdaki komut yardımıyla tablo haline dönüştürülür.



Şekil 6.4 Deteminant sonuçlarının tablo haline getirilmesi

Oluşturulan bu tabloda determinantlar ve determinantın hesaplanmasında kullanılan lamda değerleri, bakınız Şekil 4.4, birlikte görülür.



Şekil 6.5 Lamda değerinin belirlenmesi

Bu bölümde **ListPlot** işlemiyle yapılan bir önceki adımda **data1** adı ile oluşturulan listedeki λ ve bunlara karşı gelen determinant değerlerini, düşey aks determinantları ve yatay aks da λ ları göstermek üzere bir grafik haline dönüştürmektir. Bu grafik **a1** olarak isimlendirilmiştir. Bu işlemden sonra **Fit** komutu yardımıyla **data1** de verilen verilere uygun olarak, tanımlanan mertebedeki polinom elemanlarını kullanarak bir polinom fonksiyonu olan **poly[x]** oluşturulur. **a2** işleminde, oluşturulan **poly[x]** fonksiyonunun garafiği çizdirilir. Ve **Show** komutuyla **a1** ve **a2** grafikleri birlikte çizdirilerek yaklaşımın ne kadar üst üste geldiği görülür. Son olarak da, oluşturulan **poly[x]** fonksiyonun kökleri bulunarak bunların içerisinden en küçük gerçek kök olan λ değeri belirlenir.

7. SONUÇ

Bu tez kapsamında sabit kesitli radyal yüklü dairesel çubuklar için taşıma matrisi, dış yüklerin burkulma esnasındaki davranışları da gözönünde tutularak oluşturulmuştur. Daha sonra yaklaşık bir yöntemle aynı taşıma matrisi aynı şartlardaki çubuklar için oluşturulmuş ve her iki yöntemle elde edilen matrisler arasında yapılan karşılaştırmada sonuçların birbiriyle aynı olduğu gözlenmiştir. Ayrıca bulunan sonuçların literatürde daha önce bulunmuş sonuçları da sağladığı gösterilmiştir.

Yapılan bu kontrollerin ışığı altında, aşağıda değişim fonksiyonları görülen

$$f(\varphi) = 2 + \mathrm{Sin}(n\varphi)$$
$$f(\varphi) = 2 - \mathrm{Sin}(n\varphi)$$

değişken kesitli dairesel çubuklar için yukarıda bahsedilen yaklaşık taşıma matrisi oluşturulmuş ve bu matris kullanılarak, dış yüklerin burkulma esnasındaki davranışları da gözönünde tutularak, belirli açılar için burkulma yükleri elde edilmiştir. Ayrı karakterde davranış gösteren dış yükler için elde edilen burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Bu durumda, dış yüklerin burkulma esnasındaki davranış farkının, kemerlerin burkulma yüklerine büyük bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Ayrıca Bölüm6 da, Mathematica isimli yazılım programında yazılmış, düzlemi içinde radyal yüklü dairesel çubukların sabit kesitli ve değişken kesitli olması durumu için taşıma matrisini oluşturarak burkulma yükünü hesaplayan bir program verilmiştir.

Tablo 4.1 Burkulma Katsayıları-Timoshenko [4].....23
Tablo 4.2 Burkulma Katsayıları-Özbek [3].....23
Tablo 4.3 Burlulma katsayıları-Yaklaşık Yöntem ile Bulunan 24
Tablo 5.1 İki Ucu Mafsallı ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları 34
Tablo 5.2 İki Ucu Ankastre ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları....35
Tablo 5.3 Tip1–Tip3 Kemerleri İçin Burkulma Katsayıları.....36
Tablo 5.4 Tip2–Tip4 Kemerleri İçin Burkulma Katsayıları.....36
Tablo 5.5 İki Ucu Mafsallı ve Değişken Kesitli Kemer İçin Burkulma Katsayıları 37
Tablo 5.6 İki Ucu Ankastre ve Değişken kesitli Kemer İçin Burkulma katsayıları.....37

Şekil 2.1 Burkulmuş çubuk üzerindeki dış yükler....3
Şekil 2.2 Radyal yüklü dairesel çubuk....8
Şekil 2.3 Dış yüklerin burkulma anındaki durumu....9
Şekil 3.1 Taşıma matrisi....13
Şekil 4.1 Elde edilen yaklaşık taşıma matisi....20
Şekil 4.2 Bölüm 3.1 de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi....20
Şekil 4.3 Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark....20
Şekil 4.4 Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....21
Şekil 4.5 Lamda değerleri....22
Şekil 4.6 Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri22
Şekil 4.7 Lamda değerleri....23
Şekil 4.8 Elde edilen yaklaşık taşıma matisi....26
Şekil 4.9 Bölüm 3.2 de anlatılan yöntemle elde edilen taşıma matrisi....26
Şekil 4.10 Farklı yöntemlerle elde edilen iki matris arasındaki fark....26
Şekil 5.1 Radyal yüklü dairesel iki ucu mafsallı çubuk....27
Şekil 5.2 Tip1 Perspektif ve Plan....28
Şekil 5.3 Tip2 Perspektif ve Plan....29
Şekil 5.4 Belirli lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri....32
Şekil 5.5 Lamda değerleri....33
Şekil 5.6 Daha küçük aralıklı lamda değerleri için hesaplanan determinant değerleri33
Şekil 5.7 Lamda değerleri....33
Şekil 5.8 Radyal yüklü dairesel iki ucu ankastre çubuk....34
Şekil 5.9-Sabit Kesitli Kemer(Tip3, Tip4)....36
Şekil 6.1 Diferansiyel geçiş matrisinin programa giriliş şekli....39
Şekil 6.2 Ara taşıma matrisinin oluşturulması....39
Şekil 6.3 λ değerine bağlı olarak ilgili minörün determinantının hesaplanması....40
Şekil 6.4 Deteminant sonuçlarının tablo haline getirilmesi....41
Şekil 6.5 Lamda değerinin belirlenmesi....41

KAYNAKLAR

[1] **İnan, M.,** 1964. Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi, İTÜ İnş. Fak. Yayınları, İstanbul.

[2] **İnan, M.,** 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İTÜ İnş. Fak. Yayınları, İstanbul.

[3] **Özbek, T.,** 1966. Eğri Eksenli Elastik Çubukların Genel burkulma Teorisi Hakkında, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[4] **Timoshenko, S. ve Gere, J. M.,** 1961. Theory of Elastic Stability, McGraw Hill, New York.

[5] **Gantmacher, F. R.,** 1960. The Theory of Matrices, Chelsea Pub. Co. New York.

EK A. BÖLÜM 3.2 DE ELDE EDİLEN TAŞIMA MATRİSİ

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{pmatrix}$$

$$f_{11} = \mathrm{Cos}(\varphi)$$

$$f_{12} = \mathrm{Sin}(\varphi)$$

$$f_{13} = \frac{-\mathrm{Cos}(\varphi) + 2\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right) + (2-3\lambda^2+\lambda^4)\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{14} = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi) - \frac{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{\sqrt{1-\lambda^2}}}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{15} = -\frac{-2\mathrm{Cos}(\varphi) + 2\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right) + (-2+\lambda^2)\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{16} = \frac{-(-2+\lambda^2)\varphi\mathrm{Cos}(\varphi) + (-4+\lambda^2)\mathrm{Sin}(\varphi) + \frac{2\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{\sqrt{1-\lambda^2}}}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{21} = -\mathrm{Sin}(\varphi)$$

$$f_{22} = \mathrm{Cos}(\varphi)$$

$$f_{23} = \frac{(2-3\lambda^2+\lambda^4)\varphi\mathrm{Cos}(\varphi) + (4-3\lambda^2+\lambda^4)\mathrm{Sin}(\varphi) + 2\sqrt{1-\lambda^2}\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{24} = \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) - \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{25} = -\frac{(-2+\lambda^2)\varphi\mathrm{Cos}(\varphi) + \lambda^2\mathrm{Sin}(\varphi) + 2\sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{26} = \frac{-2\mathrm{Cos}(\varphi) + 2\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right) + (-2+\lambda^2)\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)}{2(-2+\lambda^2)^2}$$

$$f_{31} = 0$$

$$f_{32} = 0$$

$$f_{33} = \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) - \lambda^2\mathrm{Cos}(\varphi) + \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{2-\lambda^2}$$

$$f_{34} = \frac{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$f_{35} = \frac{-\mathrm{Cos}(\varphi) + \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{36} = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi) - \dfrac{\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{\sqrt{1-\lambda^2}}}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{41} = 0$$

$$f_{42} = 0$$

$$f_{43} = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi) - \lambda^2\mathrm{Sin}(\varphi) - \sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{44} = \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)$$

$$f_{45} = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi) + \sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{46} = \frac{\mathrm{Cos}(\varphi) - \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{51} = 0$$

$$f_{52} = 0$$

$$f_{53} = \frac{(-1+\lambda^2)\left(\mathrm{Cos}(\varphi) - \mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{54} = -\sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)$$

$$f_{55} = \frac{-\mathrm{Cos}(\varphi) + (-1+\lambda^2)\mathrm{Cosh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{56} = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi) + \sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{Sinh}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\varphi\right)}{-2+\lambda^2}$$

$$f_{61} = 0$$

$$f_{62} = 0$$

$$f_{63} = -(-1+\lambda^2)\mathrm{Sin}(\varphi)$$

$$f_{64} = 0$$

$$f_{65} = \mathrm{Sin}(\varphi)$$

$$f_{66} = \mathrm{Cos}(\varphi)$$

EK B. BÖLÜM 4.2 DE ELDE EDİLEN ARA TAŞIMA MATRİSİ

$$F_{\alpha}^{\varphi}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{pmatrix}$$

$$f_{11}=\frac{1}{40320}\left(40320+\left(-20160+\left(1680+\left(-56+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)$$

$$f_{12}=\frac{1}{5040}\left(-5040+\left(840+\left(-42+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)$$

$$f_{13}=\frac{1}{40320}\left(20160+\left(-1680+\left(-56\left(-2+\lambda^2\right)+\left(2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2$$

$$f_{14}=-\frac{1}{5040}\left(840+\left(-42\lambda^2+\left(1-\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^3$$

$$f_{15}=-\frac{1}{40320}\left(-5040+\left(840+\left(-42+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)$$

$$f_{16}=\frac{1}{5040}\left(-42+(1+\lambda^2)(\alpha-\varphi)^2(\alpha-\varphi)^5\right)$$

$$f_{21}=-\frac{1}{5040}\left(-5040+\left(840+\left(-42+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)$$

$$f_{22}=\frac{1}{40320}\left(40320+\left(-20160+\left(1680+\left(-56+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)$$

$$f_{23}=-\frac{1}{5040}\left(5040+\left(-840+\left(42\left(2+\lambda^2\right)+\left(-2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)$$

$$f_{24}=-\frac{-20160+\left(1680\lambda^2+\left(-56+\lambda^2\left(-56\left(-1+\lambda^2\right)+\left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2}{40320}$$

$$f_{25} = \frac{1}{5040}\left(840 + \left(42\left(1+\lambda^2\right) + \left(2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^3$$

$$f_{26} = \frac{1}{40320}\left(1680 + \left(-56\left(1+\lambda^2\right) + \left(2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^4$$

$$f_{31} = 0$$

$$f_{32} = 0$$

$$f_{33} = \frac{1}{40320}\left(40320\left(-1+\lambda^2\right)\left(1680 + \left(-56\lambda^2 + \left(1-\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^4\right)$$

$$f_{34} = \frac{\left(-5040 + \left(\lambda^2-1\right)\left(840 + \left(\lambda^2-1\right)\left(-42 + \left(\lambda^2-1\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)}{5040}$$

$$f_{35} = \frac{\left(-20160 + \left(680\lambda^2 + \left(-56 + \lambda^2\left(-56\left(-1+\lambda^2\right) + \left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2}{40320}$$

$$f_{36} = -\frac{1}{5040}\left(840 + \left(-42\lambda^2 + \left(1-\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^3$$

$$f_{41} = 0$$

$$f_{42} = 0$$

$$f_{43} = \frac{1}{5040}\left(-1+\lambda^2\right)\left(840 + \left(-42\lambda^2 + \left(1-\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^3$$

$$f_{44} = 1 + \frac{\left(\lambda^2-1\right)\left(-20160 + \left(\lambda^2-1\right)\left(1680 + \left(\lambda^2-1\right)\left(-56 + \left(\lambda^2-1\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2}{40320}$$

$$f_{45} = -\frac{\left(-5040 + \left(840\lambda^2 + \left(-42 + \lambda^2\left(-42\left(\lambda^2-1\right) + \left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)}{5040}$$

$$f_{46} = -\frac{\left(-20160+\left(1680\lambda^2+\left(-56+\lambda^2\left(-56\left(\lambda^2-1\right)+\left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2}{40320}$$

$$f_{51} = 0$$

$$f_{52} = 0$$

$$f_{53} = -\frac{\left(\lambda^2-1\right)\left(-20160+\left(1680\lambda^2+\left(-56+\lambda^2\left(-56\left(\lambda^2-1\right)+\left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2}{40320}$$

$$f_{54} = \frac{\left(\lambda^2-1\right)\left(-5040+\left(\lambda^2-1\right)\left(840+\left(\lambda^2-1\right)\left(-42+\left(\lambda^2-1\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)}{5040}$$

$$f_{55} = \frac{1}{40320}(40320+(\alpha-\varphi)^2(-20160\lambda^2+(\alpha-\varphi)^2(1680(1-\lambda^2+\lambda^4)+\alpha^4(1-2\lambda^2+4\lambda^4-3\lambda^6+\lambda^8)+112\alpha\lambda^2(2-2\lambda^2+\lambda^4)\varphi-4\alpha^3(1-2\lambda^2+4\lambda^4-3\lambda^6+\lambda^8)\varphi-56\lambda^2(2-2\lambda^2+\lambda^4)-4\alpha(1-2\lambda^2+4\lambda^4-3\lambda^6+\lambda^8)\varphi^3+(1-2\lambda^2+4\lambda^4-3\lambda^6+\lambda^8)\varphi^4+2\alpha^2(3\varphi^2+\lambda^2(2-2\lambda^2+\lambda^4)(-28+3(-1+\lambda^2)\varphi^2)))))$$

$$f_{56} = -\frac{\left(-5040+\left(840\lambda^2+\left(-42+\lambda^2\left(-42\left(\lambda^2-1\right)+\left(2-2\lambda^2+\lambda^4\right)(\alpha-\varphi)^2\right)\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)}{5040}$$

$$f_{61} = 0 \qquad f_{62} = 0$$

$$f_{63} = -\frac{1}{5040}\left(\left(\lambda^2-1\right)\left(-5040+\left(840+\left(-42+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)\right)$$

$$f_{64} = 0$$

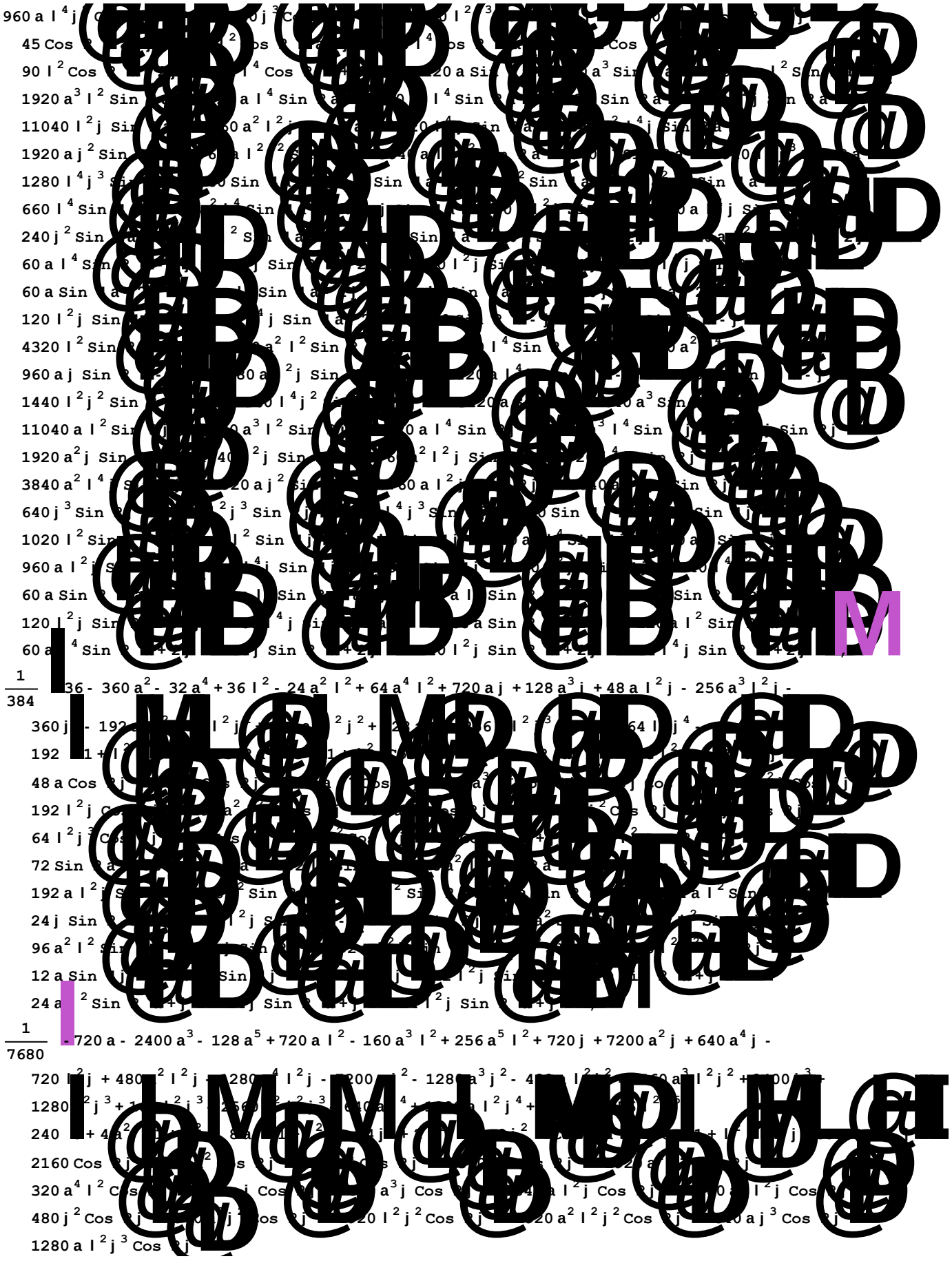
$$f_{65} = \frac{1}{5040}\left(-5040+\left(8410+\left(-42+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)$$

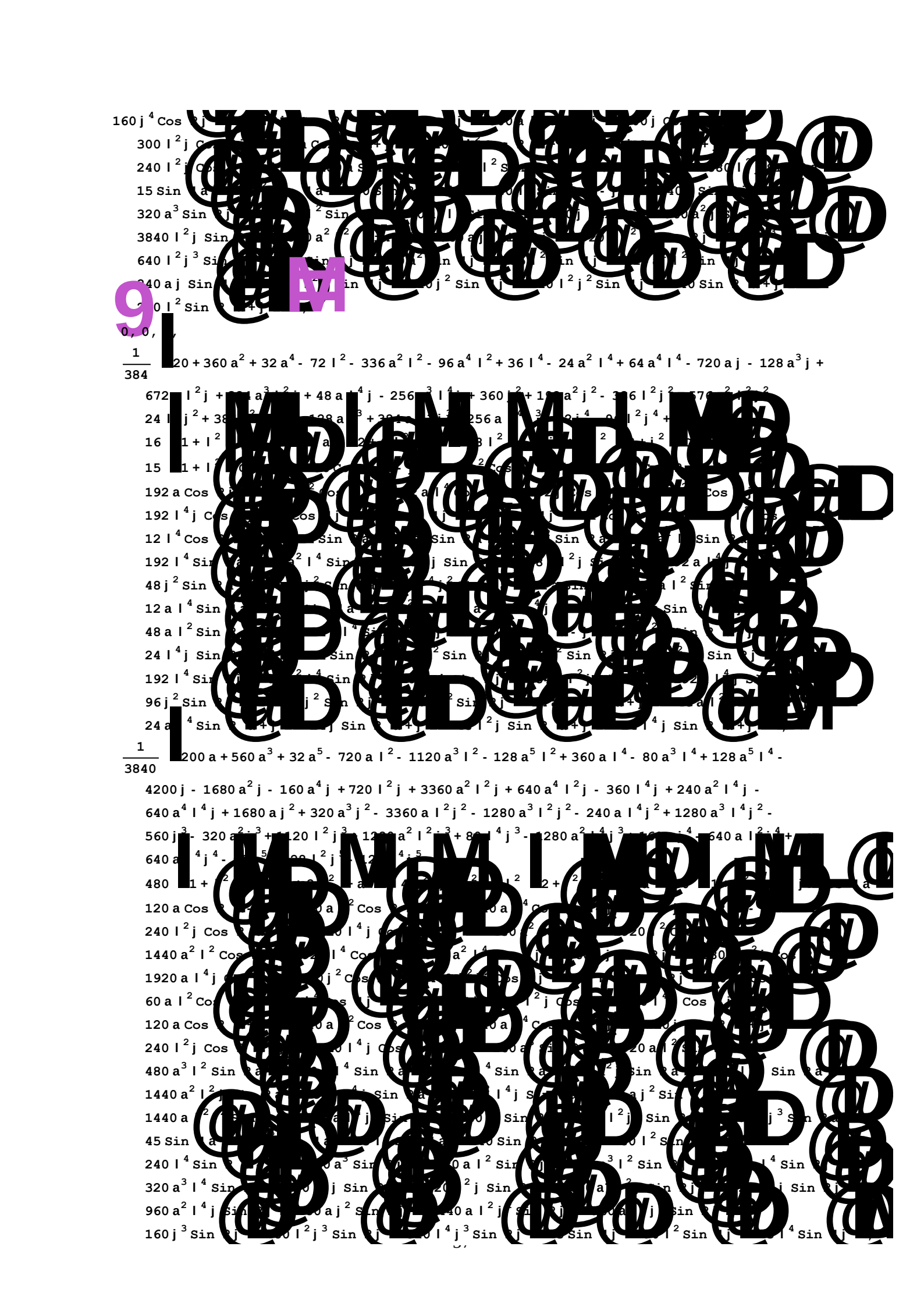
$$f_{66} = \frac{1}{40320}\left(40320+\left(-20160+\left(1680+\left(-56+(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)(\alpha-\varphi)^2\right)$$

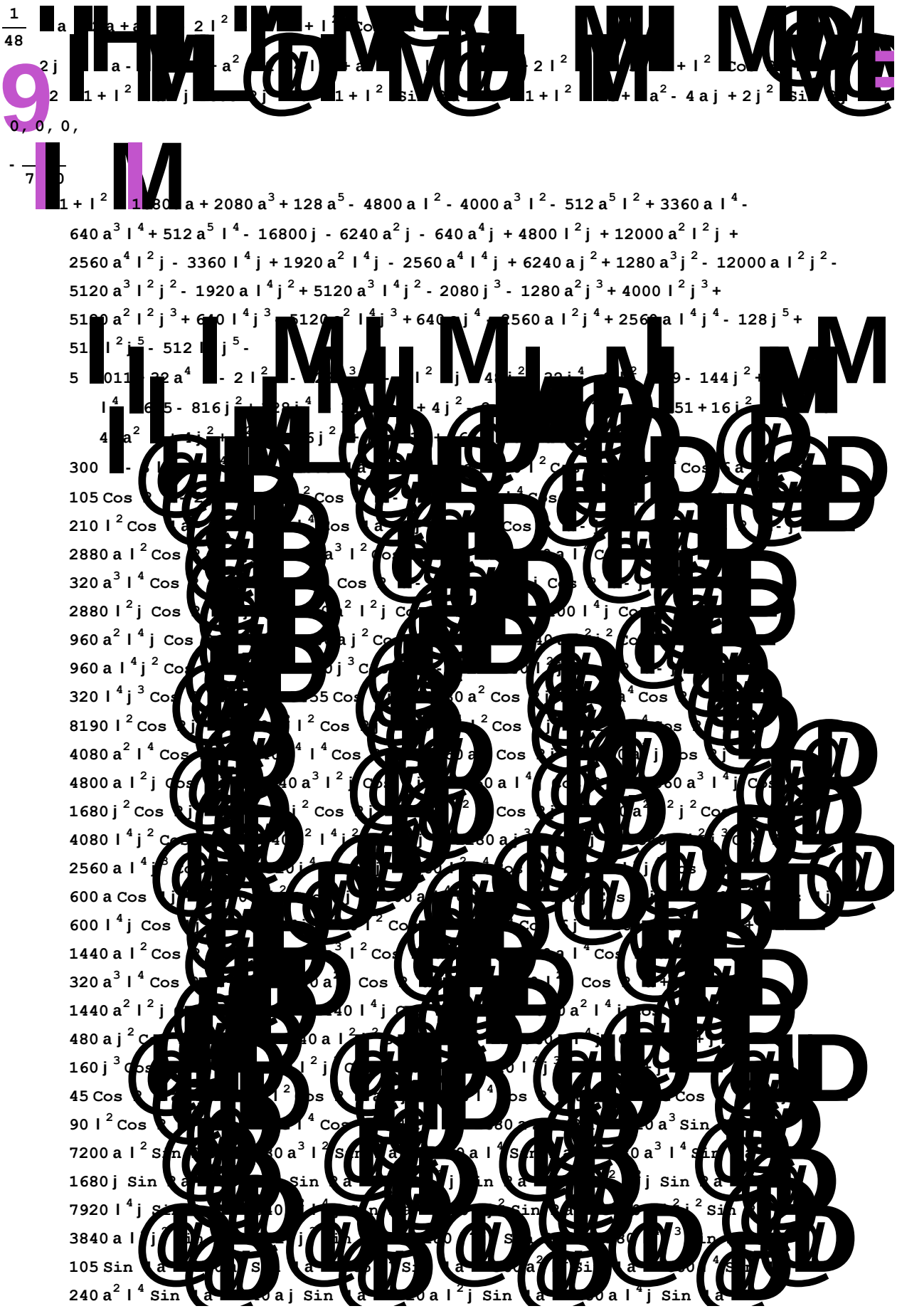
EK C. BÖLÜM 5.1 DE ELDE EDİLEN ARA TAŞIMA MATRİSİ

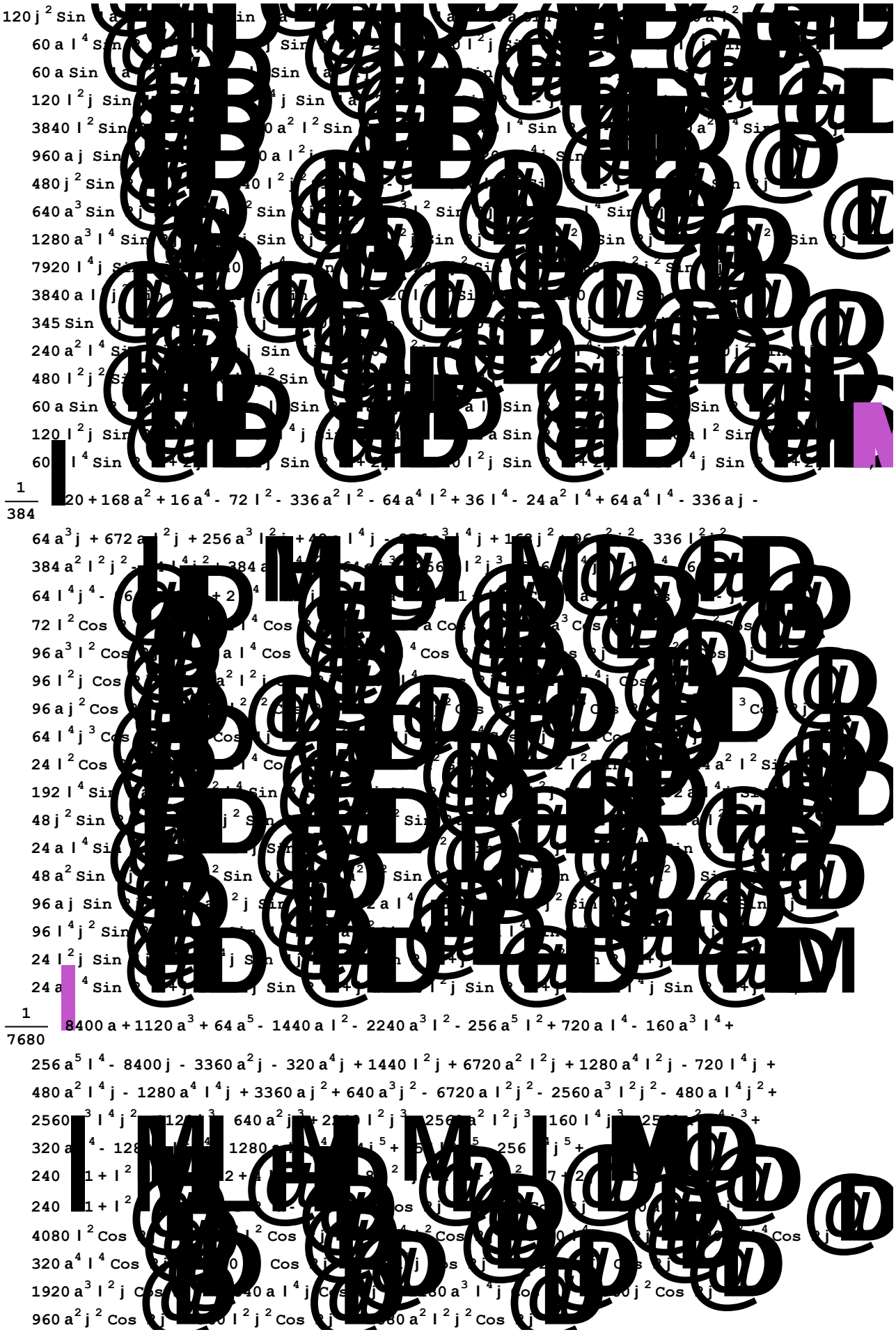


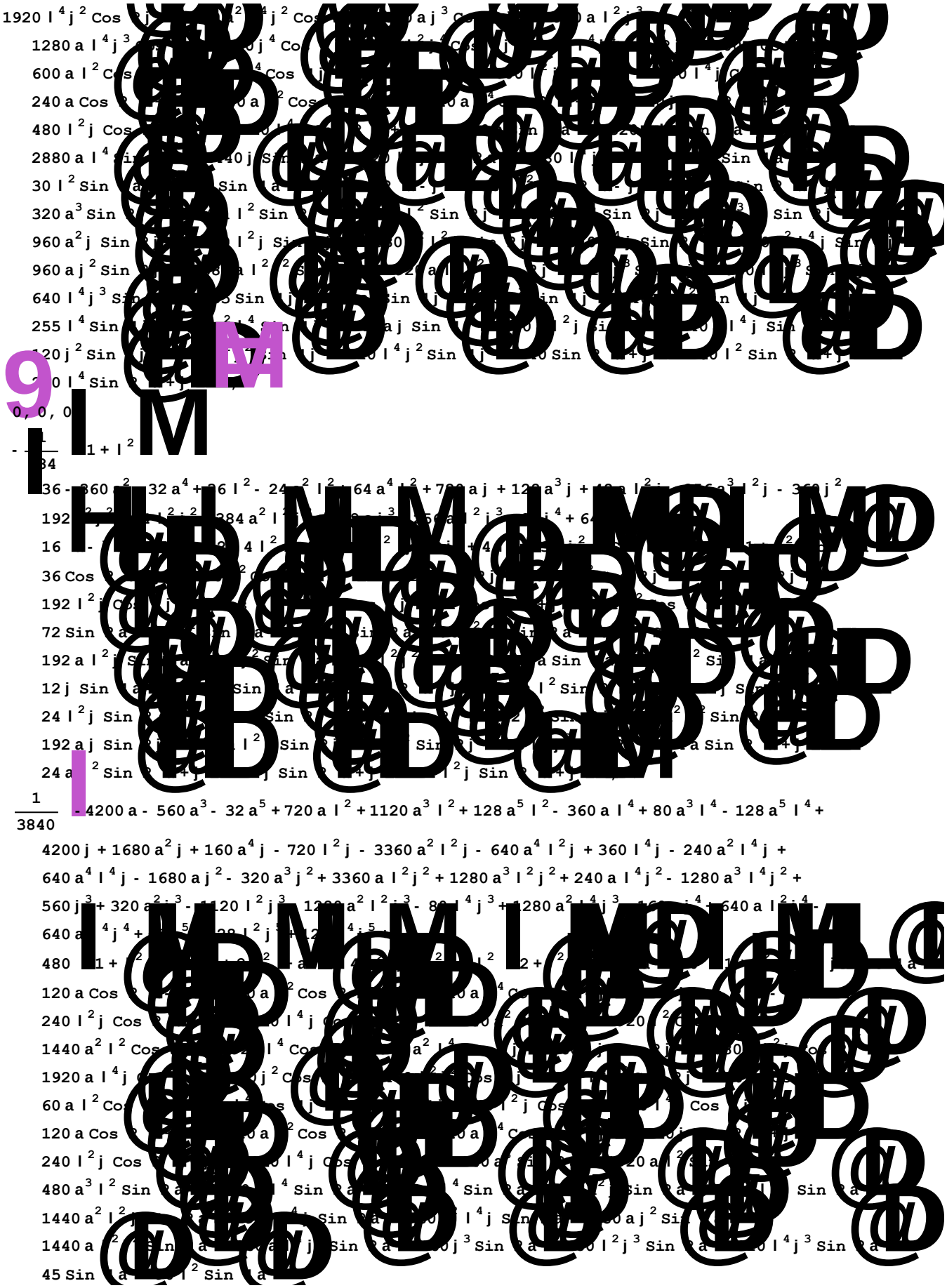


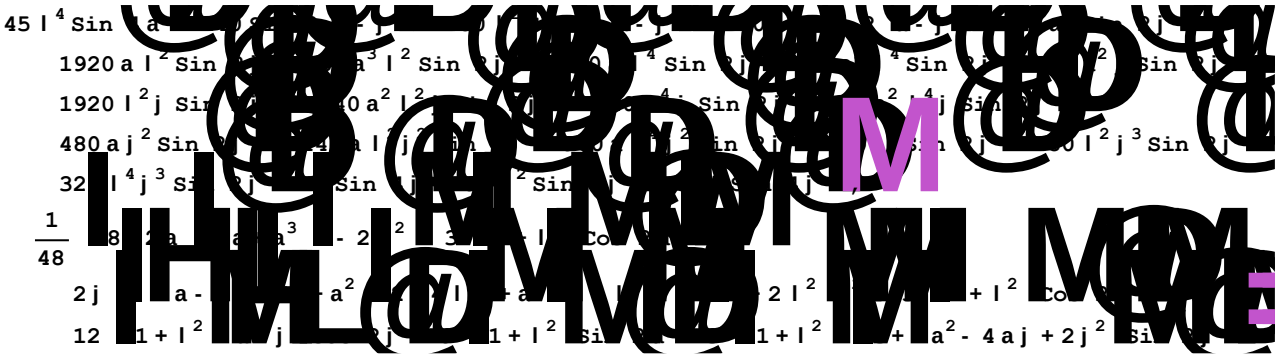












ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Manisa'da doğan Özgür ÖZÇIKRIKÇI ilk, orta ve lise eğitimini Söke'de tamamlamıştır. Söke Lisesi'nden 1995 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi'ne girmiştir. Lisans eğitimini 1999 yılında tamamlamıştır. Bir yıl sonra İTÜ'de yüksek lisans öğrenimine başlamış ve 2002 yılında derslerini tamamlamıştır. Halen özel bir şirkette proje mühendisi olarak çalışmaktadır.