İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ VE KISITLAMALI DAYANIKLI KONTROL SİSTEM TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Yücel AYDIN

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

OCAK 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ VE KISITLAMALI DAYANIKLI KONTROL SİSTEM TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Yücel AYDIN
(504922009)

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. M.Kemal SARIOĞLU

OCAK 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 504922009 numaralı Doktora Öğrencisi **Yücel AYDIN** ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"ÇOK DEĞİŞKENLİ VE KISITLAMALI DAYANIKLI KONTROL SİSTEM TASARIMI "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. M.Kemal SARIOĞLU** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Atilla BİR** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Elbrus CAFEROV .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Cingiz HACİYEV
.....

Prof. Dr. Yorgo İSTEFANOPULOS .....
Işık Üniversitesi

Teslim Tarihi : **17 Eylül 2012**
Savunma Tarihi : **24 Ocak 2013**

Babama, anneme, eşime ve çocuklarıma,

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmalarım esnasında öneri ve yönlendirmelerinden dolayı değerli danışman hocam Prof. Dr. M.Kemal SARIOĞLU'na teşekkür ederim. Tez başlangıcından bu yana katkı ve desteklerini esirgemeyen tez izleme jürimdeki Prof.Dr. Atilla Bir ve Prof.Dr. Yorgo İstefanopulos hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca tezi düzenlememde ve tez çalışmamı bir uçak sistemine uygulamamda büyük yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr. Elbrus Caferov hocama da içtenlikle teşekkür ederim.

Eylül 2012 Yücel Aydın

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	**vii**
İÇİNDEKİLER	**ix**
KISALTMALAR	**xi**
ÇİZELGE LİSTESİ	**xiii**
ŞEKİL LİSTESİ	**xv**
ÖZET	**xvii**
SUMMARY	**xix**
1. GİRİŞ	**1**
2. DAYANIKLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNDE LİNEER MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ 7	
2.1 Temel Kavramlar	**17**
2.2 En Basit Kapalı Çevrim Kontrol Sisteminin Blok Diyagramının H_2 , H_∞ Blok Diyagramına dönüştürülmesi	**18**
2.3 Karma Problem Gösterimi 23	
2.4 Yardımcı Teorem I : Schur Tamlayanı	**24**
2.5 Lineer Matris Eşitsizlikleri 24	
2.5.1 Bir Lineer Matris Eşitsizliği : Lyapunov Eşitsizliği 25	
2.6 LMI ile H_∞ Problemlerinin Çözülebilirliği	**28**
2.6.1 Yardımcı teorem I I : sınırlı gerçel yardımcı teorem	**28**
2.6.2 Yardımcı teorem III	**29**
2.6.3 Teorem 30	
2.6.4 Teorem 30	
2.7 Kutup Atama Kısıtlamasının LMI ile modellenmesi	**33**
2.7.1 LMI bölgeleri	**34**
2.7.2 Teorem	**35**
2.7.3 Sonuç	**35**
2.7.4 Bazı kutup atama bölgeleri	**35**
2.7.5 Kutup atama kısıtlaması	**38**
2.8 Kontrol Girişi Kısıtlaması	**38**
2.9 Tasarım Kısıtlarının LMI 'larla Modellenmesi	**40**
2.9.1 H_∞ norm kısıtlamasının LMI 'larla modellenmesi	**40**
2.9.2 H_2 norm kısıtlamasının LMI'larla modellenmesi	**42**
2.9.3 Teorem	**43**
2.10 Karma H_2/H_∞ LPV Kontrol edicinin Statik Geribesleme Durumunda Optimizasyonu	**43**
2.11 Karma H_2/H_∞ LPV Kontrol edicinin Dinamik Geribesleme Durumunda Optimizasyonu	**45**
3. KARMA H_2 / H_∞ PDL (PARAMETRE DEĞİŞİMLİ LİNEER) OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ	**49**
3.1 Dayanıklı LPV Optimal Kontrol Problemi	**50**

3.2 Teorem (Köşe özelliği) 53
3.3 Bölgesel Kutup Atama Kısıtının LMI 'larla Modellenmesi 55
3.4 Kontrol Girişinin Kısıtlanması 56
3.4.1. Özellik 56
3.4.2. Teorem 56
3.4.3. Teorem 56
3.5 Karma H_2 / H_∞ LPV Optimal Kontrol Problemi 59
3.5.1 Karma H_2 / H_∞ LPV kontrol edicinin statik geribesleme durumunda optimizasyonu 60
3.5.2 Karma H_2 / H_∞ LPV kontrol edicinin dinamik geribesleme durumunda optimizasyonu 62
4. F-16 UÇAĞININ DİNAMİK MODELİ 67
4.1 Uçağın Uçuş Eksenleri 67
4.2 Uçak Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler 71
4.3 Uçağın Lineer Olmayan Hareket Denklemleri 73
4.4 Rüzgar yada Kararlılık Eksen Takımı Uçuş Denklemleri 78
4.4.1 Rüzgar yada kararlılık eksen takımı uçuş denklemleri 79
4.4.2 Rüzgar eksen takımı moment denklemleri 80
4.5 Lineer Olmayan Uçuş Denklemlerinin Ayrıştırılması 82
4.6 Sürekli Uçuş durumu 84
4.7 Lineer Uçuş Denklemlerinin Bulunması 85
4.8 Uçağın Ana Kontrol Yüzeyleri ve Uçuş Modları 89
5. F-16 UÇAK KONTROL SİSTEM TASARIMI 91
5.1 F16 Uçağın Yanlamasına Hareket Modeli 91
5.2 F16 Uçak Modeli Üzerinde Statik ve Dinamik Kontrol Tasarım Sonuçları 96
5.2.1 Sonuçların değerlendirilmesi 96
5.2.2 Tasarım sonuçları 97
5.2.2.1 Statik karma H_2 / H_∞ ve LPV kontroluna ilişkin sonuçlar 97
5.2.2.2 Dinamik karma H_2 / H_∞ ve LPV kontroluna ilişkin sonuçlar 111
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 121
KAYNAKLAR 123
ÖZGEÇMİŞ 131

KISALTMALAR

LMI	:	Lineer(Doğrusal) Matris Eşitsizliği (Linear Matrix Inequality)
LME	:	Lineer Matris Eşitliği (Linear Matrix Equation)
QMI	:	Karesel(Kuadratik) Matris Eşitsizliği (Quadratic Matrix Inequality)
ARI	:	Cebirsel Riccati Eşitsizliği (Algebraic Riccatti Inequality)
LI	:	Lyapunov Eşitsizliği (Lyapunov Inequality)
ARE	:	Cebirsel Riccati Eşitliği (Algebraic Riccatti Equation)
LFT	:	Lineer Bölmeli Dönüştürme (Linear Fractional Transformation)
LTI	:	Lineer Zamanla Değişmeyen (Lineer Time Invariant)
LPV	:	PDL Parametreleri Değişen Lineer (Linear Parameter Varying)

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : F16 uçağının nominal parametre değerleri..... 94

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Genel H_2 , H_∞ kontrol problemine ilişkin blok diyagramı..... 7
Şekil 2.2: En basit çok giriş ve çok çıkışlı kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı.....18
Şekil 2.3: (Şekil 2.1.)' de gösterilen en basit blok diyagramının H_2 , H_∞ genel blok diyagramına dönüştürülmesi. 19
Şekil 2.4: Çok giriş ve çok çıkışlı kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı. 19
Şekil 2.5: Şekil 2.3. 'de gösterilen basit blok diyagramının H_2 , H_∞ genel blok diyagramına dönüştürülmesi.....19
Şekil 2.6: Karma H_2 / H_∞ kontrol problemine ilişkin blok diyagramı.....23
Şekil 2.7: (-q,0) merkezli, r yarıçaplı LMI bölgesi.....35
Şekil 2.8: Sol yarım karmaşık düzlemde dikey şeritli LMI bölgesi.....36
Şekil 2.9: Sol yarım karmaşık s düzleminde konik LMI bölgesi..... 37
Şekil 2.10 : Bölge S(α ,r,θ): Sol yarım s-düzleminde bir LMI Bölgesi.....37
Şekil 3.1: Dayanıklı optimal LPV kontrol problemine ilişkin genel bir kapalı . çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı.....50
Şekil 3.2: Karma H_2 / H_∞ LPV kontrol problemine ilişkin blok diyagramı.....59
Şekil.4.1: Uçağın uçuş eksenleri (Lewis, 2003).....68
Şekil 4.2 : Bir uçağa etki eden kuvvet, moment, hız ve açısal hız gösterimi (Blakelock,1994).....69
Şekil 4.3: Uzunlamasına harekete ilişkin eksen sistemi (Adams ve diğ.,1994)....69
Şekil 4.4: Yanlamasına harekete ilişkin eksen sistemi (Adams ve diğ.,1994).....69
Şekil 5. 1: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t), r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$:yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).100
Şekil 5.2: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t), r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t):siyah) 100
Şekil 5.3: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah)..... 101
Şekil 5.4: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....101
Şekil 5.5: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....102
Şekil 5.6: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah) 102
Şekil 5.7: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin u1(t) kontrol işareti.....103
Şekil 5.8: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.....103
Şekil 5.9: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$

ve $u_2(t)$ kontrol işaretleri..... 104
Şekil 5.10: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).107
Şekil 5.11: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r durum değişkenleri ($\phi(t)$:yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah)...107
Şekil 5.12: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....108
Şekil 5.13: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....108
Şekil 5.14: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....109
Şekil 5.15: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....109
Şekil 5.16: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.....110
Şekil 5.17: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.....110
Şekil 5.18: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ ve $u_2(t)$ kontrol işaretleri.....111
Şekil 5.19: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).113
Şekil 5.20: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r durum değişkenleri ($\phi(t)$:yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t):mavi, r(t):siyah).....113
Şekil 5.21: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....114
Şekil 5.22: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....114
Şekil 5.23: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....114
Şekil 524: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).....115
Şekil 5.25: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.....115
Şekil 5.26: Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.....116
Şekil 5.27: Belirsizlik durumunda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).....116
Şekil 5.28: Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı)..... 118
Şekil 5.29: Belirsizlik durumunda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.....119
Şekil 5.30: Belirsizlik durumunda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.....119

ÇOK DEĞİŞKENLİ VE KISITLAMALI DAYANIKLI KONTROL SİSTEM TASARIMI

ÖZET

Dayanıklı genel optimal kontrol problemleri çok değişik amaçlı kısıtlamalar altında tanıtılmıştır. Çok amaçlı kontrol probleminden zaman ve frekans tanım bölgeleri özelliklerinin bir karması, H_2 ve H_∞ performansının sağlanması, kapalı çevrim sisteminin bölgesel kutup atanması ve kontrol girişinin sınırlanması gibi kısıtların bir arada göz önüne alınması ile birlikte olmaktadır.

Karma H_2 / H_∞ dayanıklı optimal kontrol problemi son yıllarda dikkat çeken bir konu olmuştur. Karma H_2 / H_∞ kontrol probleminde amaç, dayanıklı kararlılık kısıtlaması altında, karma bir H_2 / H_∞ amaç ölçütünü en küçükleyen ve kararlılığı sağlayan bir kontrol edici bulmaktır.

Karma H_2 / H_∞ kontrol probleminin ana amacı, belirli bir kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin H_2 normunun diğer bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 / H_∞ normu üzerine konan bir kısıtlama altında en küçüklenmesidir. Karma H_2 / H_∞ kontrol kuramı, H_∞ normu ile garanti edilen çıkışta bozucu etkisinin azaltılması ve H_2 normu ile ölçülen karesel başarımların birleştirilmesini sağlayan çok güçlü bir sentez yöntemi verir. Böyle bir karma H_2 / H_∞ kontrol edici tasarımı, kapalı çevrim sisteminin istenilen dinamik karakteristiği ile ilgili başka deyişle, geçici durum davranış karakteristiği ile ilgili arzu edilen özellikleri sağlamaz. Geçici durum özellikleri için geçici yanıt karakteristiğine ilişkin bir kısıtlama tasarımda gözönüne alınmalıdır. Bu karakteristik, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının yerleştirilmesiyle şekillenir.

Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) kapalı çevrim sistemi üzerinde birkaç kısıtlamayı bir arada kullanmada daha çok esneklik sağlar. Bu sebeple, bölgesel kutup kısıtlamalı H_2 / H_∞ kontrol sentezi LMI'larla ifade edilen dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilebilir. LMI tekniklerinin sözü edilen bu avantajlarından dolayı, kontrol problemlerinde LMI yaklaşımları, araştırmacılar tarafından son yıllarda çok önemli ölçüde kullanılmaktadır.

Modern kontrol sistemleri tasarımında gözönüne alınması gerekli pratik özelliklerden birisi, kapalı çevrim kontrol sisteminin geçici ve sürekli durum davranışlarıdır. Kararlılık yanı sıra, istenilen bir davranış, kapalı çevrim kutuplarının karmaşık düzlemde verilen bir bölgeye atamayla sağlanır. Bunun için de yapılması gereken dayanıklı kutup atama tasarımıdır. Bu tasarımda, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bölgesel yeri üzerinde bazı kısıtlamaların konulması amaçtır. Kapalı

çevrim sistemlerinin atanacak kutupları için sol yarı karmaşık düzlemde seçilen bölgeler, geçici cevap karakteristikleri için bir gösterge olarak değerlendirilir. Bu yüzden kapalı çevrim kutupları üzerine bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir.

D LMI bölgesi (istenilen bölgesel kutup atama bölgesi) birkaç matris eşitsizlikleriyle gösterilebilir. Bazı durumlarda kutup atama bölgesi D seçilen birkaç bölgenin arakesiti olabilir. Bu LMI bölgeleri, söz konusu kontrol problemlerinin birçok pratik gereksinimlerini karşılar. Karma H_2 / H_∞ kontrol tasarımı ile birlikte bölgesel kutup kısıtlaması ve de kontrol girdi kısıtlamasını sağlayan kontrol edicilerin gerçeklenebilirliği fiziksel kontrol problemlerinde çok büyük bir önem kazanmıştır.

Lineer kontrol sistemlerinin kontrol edici tasarımında karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü, H_∞ performans kısıtlaması ve kontrol girişi kısıtlamasını sağlayacak bir çok kısıtlamalar altında en küçükleyerek gerçekleştirilmelidir. Tüm bu kısıtlar ayrı ayrı yada bir ikisi birada bulunuan tasarımlar mevcuttur. Tüm kısıtları içeren karma bir optimizasyon problemi olarak bu tezde sistematik incelenmiştir.

Birinci bölümde temel tanımlar tanıtılmış ve dayanıklı kontrol ile ilgili bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde kaynak taraması verilmiş, dayanıklı bir optimal kontrol sistemi tanıtılmış ve LMI modelleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, çoklu kısıtlar ve belirsizlik altında karma H_2 / H_∞ tasarımı statik ve dinamik geribesleme durumlarında gösterilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde, çok değişkenli F16 uçağın yanlamasına hareket modelinin incelenmesi yapılmıştır. Tezin beşinci bölümünde, çok değişkenli F16 uçak yanlamasına hareket modeli üzerinde dayanıklı kontrol tasarımı ile elde olunan sonuçlar özetlenmiş ve tartışılmıştır. Bu bölümde karma bir amaç ölçütünün karma optimizasyonu; çoklu kısıtlar altında ve belirsizlik durumu da ele alınarak kontrol edici tasarımı yapılmıştır. F16 uçak yanlamasına hareket için amaçlanan bu özgün durum ulaşılan sonuçlar ile gösterilmiştir. Tezin altıncı bölümünde, elde olunan sonuçlar özetlenmiş ve tartışılmıştır. Bu bölümde karma bir amaç ölçütünün optimizasyonu; çoklu kısıtlar altında ve belirsizlik durumlarında çok girdi çok çıktılı bir sistem içinde yapılabildiği sonucuna varılmıştır. Ele alınan model için amaçlanan bu özgün durum ulaşılan sonuçlar ile gösterilmiştir.

ROBUST MULTIVARIABLE AND CONSTRAINED CONTROL SYSTEM DESIGN

SUMMARY

The developments in H_∞ optimal control systems analysis and design have provided a framework in which it is possible to tackle the robust stabilization problem. A wide variety of H_∞ control problems may be solved and controllers may be synthesized in a unified setting commonly referred to as the 'generalized regulator' framework. The inputs to the generalized regulator problem are either references or disturbances, while the outputs are signals which are required to be small. Many important control problems can be shown to be equivalent to the problem of finding a dynamical controller K(s) such that the feedback system is internally stable, and the closed loop map T_{zw} is small in a suitable defined sense. Theories such as H_2 , H_∞ optimal control are some of the concrete and well-known examples of this point of view. In these theories, the goal is to find a controller that minimizes or maintains below a desirable level, a given norm on T_{zw}. Such a formulation of the synthesis problem not only captures many practical disturbance rejection /tracking specifications, but also some robust stability specifications.

The necessary mathematical tools, Algebraic Riccati Equations (AREs) and Linear Matrix Inequalities (LMIs) is reviewed. The state space optimization theory is almost always related to the quadratic Lyapunov fuction in some way. A controller is usually designed by first computing a Lyapunov matrix and then using a formula in terms of the plant data and Lyapunov matrix. If the the plant is LTI, the Lyapunov matrix is constant and can be found by solving algebraic Riccati equations (AREs) or Linear Matrix Inequalities (LMIs). An ARE has an analytical solution based on The Hamiltonian technique, while an LMI can be solved efficiently via finite dimensional convex programming. Thus, the state-space method show a computational advantage over the transfer function approach. The resulting controller order is usually equal to the plant, which may still be too high for practical implementation.

In the past few years, LMI solvers have emerged as powerful tools to solve convex optimization problems that arise in many analysis and design applications, such as control. An LMI is affine inequality constraint on the design variables. Specifications such as regional pole placement, robust stability, LQG performance or RMS gain attenuation can be expressed as LMIs. For instance, a Lyapunov inequality is an LMI expressing stability. Combining these specifications defines a multi-objective design problem that can be solved numerically via convex optimization. LMI formulation have three advantages. First, reasoning in terms of design constraints is often more intuitive and flexible. Second, the feasibility of a design can be assessed numerically even when the problem is analytically untractable. And third, with LMIs we can mix various specifications and objectives, which is an improvement over classical LQG or H_∞ techniques.

Linear Matrix Inequalities (LMIs) offer more flexibility for combining several constraints on the closed-loop system. Therefore, H_2 / H_∞ control synthesis with regional pole constraints can be formulated as a convex optimization problem involving linear matrix inequalities. Because of this important advantage of LMI techniques, LMI approaches in control problems have recently been attractive for researchers.

The mixed H_2 / H_∞ control problem has attracted much attention in recent years. Much effort has been devoted to the study of the so called mixed H_2 / H_∞ control problem. A mixed H_2/H_∞ performance measure is an upper bound on the H_2 norm of a transfer function matrix and can also be regarded as an upper bound on the robust H_2 norm of a transfer function matrix with H_∞ norm bounded uncertainities. Therefore the mixed H_2 / H_∞ control problem is important as not only multi-objective control problem but also robust performance problem. Linear matrix inequality approach is powerful and useful for H_∞ control problem. The advantage of this approach are as follows. The solvability conditions can be given by elementary algebraic derivation. Many efficient algorithms are available to solve linear matrix inequalities. Futhermore, it is possible to treat both regular and singular H_∞ control problems, i.e., no assumptions are needed on the plant matrices. The mixed H_2 / H_∞ controller synthesis problem can be reduced to a finite-dimensional convex optimization problem over a bounded subset of symmetric real matrices.

The main objective of the mixed H_2 / H_∞ control problem is to minimize H_2 norm of a certain closed loop transfer function under a constraint on the H_2 / H_∞ norm of some other transfer function. Mixed H_2 / H_∞ control theory, therefore, offers a method of combining disturbance attenuation guaranteed by H_∞ norm and quadratic performance measured by H_2 norm. Such a mixed H_2 / H_∞ controller design , however, does not directly deal with the desired dynamic characteristic of the closed loop system which is commonly expressed in terms of transient response characteristic. This characteristic is generally reshaped by the location of the closed-loop system poles.

In general robust optimal control problems with multi constraints, specifications and objectives include H_2, H_∞ performance, regional pole placement and control input constraint. General multi-objective control problems are difficult and remain mostly open to this date. A LMI characterizaton of general convex subregions of the complex left-half plane has been introduced and its usefulness for H_∞ synthesis with closed-loop pole clustering constraints has been demonstrated.

One of the practical concerns of control design is its time domain performance. A reasonable performance level has to be guaranteed in the time domain. Many of the time domain (transient as well as steady state) performance specifications are determined or influenced by the closed -loop system zeros and poles. Besides stability, a satisfactory performance is achieved by forcing the controlled closed-loop poles to belong to a given region of the complex plane. One of the most common ways to implement this task is to put some constraints on the locations of the closed loop system which leads to robust pole location design. It is well known that the locations of the closed-loop poles serve as an indicator of transient response

characteristics. In literature only a few papers consider the design of H_∞ controllers with additional specifications on the closed-loop poles. Moreover, most papers on this topic are restricted to the state-feedback case. This can be explained by the difficulty of incorporating pole placement constraints in the standart state space approach to H_∞ synthesis.

The LMI region D could be represented by several inequalities. For some special cases, D may consist of several disjoint subregions. The concept of an LMI region is a convenient LMI-based representation of general stability regions. By stability region, it means any subregion of the open left half of complex plane. LMI regions include a wide variety of typical clustering regions that are symmetric with respect to the real axis. In other words, LMI regions cover most practical needs for control purposes. A class of LMI regions includes all polygonal regions that are convex and symmetric with respect to real axis. Indeed, any such region can be obtained as the intersection of conic sectors, vertical strips and/or horizontal strips. Since any convex region can be approximated by a convex polygone to any desired accuracy, LMI regions are dense in the set of convex regions that are symmetric with respect to the real axis.

Control input constraint has been discussed in this thesis. It is quite possible that the output of the controller may become so large that it may not be applied to the plant. Besides the realizability of the controller to satisfy mixed H_2 / H_∞ control law and regional pole constraints on the closed-loop dynamic the limitations of the peak amplitude of the control vector become very important in physical control problems. The constraint on the control vector in this thesis is expressed as the infinity norm of the control vector. Choosing the control vector as one of the output vectors of the controlled plant, this constraint imposed on the peak amplitude of control signal can be satisfied. In this work, H_2 performance is minimized, under the constraints of H_∞ performance and regional pole placement, in a such a way that the infinity norm of the control vector is equal or less than a specified constant value.

The main purpose of the robust optimal Linear Parameter Varying (LPV) control is to parameterize a controller via a linear convex combination of all controllers minimizing mixed H_2 / H_∞ norm of the closed loop transfer function matrix under parametric uncertainities and multi constraints. Mixed H_2 / H_∞ performance index is minimized under the constraints of H_2 performance, H_∞ performance, control input constraints and the regional pole placement. The static output feedback LPV control design with multi constraints is formulated as a convex optimization problem involving Linear Matrix Inequalities(LMIs). This paper presents the design of a robust optimal static feedback conrol of Linear Parameter Varying(LPV) system with multi-constraints. The design problem is based on a problem of static feedback, mixed H_2 / H_∞ parameter dependent control systems with multi constraints and parametric uncertainities. In this paper, static and dynamic feedback linear parameter varying (LPV) control design example is presented and the design examples present the potential of the static and dynamic feedback LPV controller design approach.

1. GİRİŞ

Modern geribeslemeli dinamik kontrol sistemlerinin tasarımında önemli sistemin iki önemli davranış özelliği ile ilgilenilir. Bunlar optimallik ve dayanıklılıktır. Bir kapalı çevrimli sistemde bozucuların varlığında dayanıklı kararlılaştırma problemi, son yıllarda üzerinde çalışılan önemli bir konudur. Kontrol sistemleri tasarımında göz önüne alınması gerekli pratik özelliklerden birisi, kapalı çevrim kontrol sisteminin geçici ve sürekli durum davranışlarıdır. Zaman tanım bölgesi performans özelliklerinden çoğu (geçici ve de kalıcı durum) kapalı çevrim sisteminin sıfır ve kutuplarının sol yarım s düzlemindeki yeriyle belirlenir ve etkilenir. Kararlılık yanında, istenilen bir davranış, kapalı çevrim kutupları karmaşık düzlemde verilen bir bölgeye atamayla sağlanır. Bunun için de yapılması gereken dayanıklı kutup atama tasarımıdır. Bu tasarımda, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bölgesel yeri üzerinde bazı kısıtlamaların konulması amaçtır. Kapalı çevrim sistemlerinin atanacak kutupları için sol yarı karmaşık düzlemde seçilen bölgeler, geçici cevap karakteristikleri için bir gösterge olarak değerlendirilir. Bu yüzden kapalı çevrim kutupları üzerine bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir. Bu konuda çoğu makaleler kutup atama problemini durum geribeslemesi yaparak incelemiştir (Bambang ve diğ., 1993), (Yedavalli ve Liu, 1993).

Son birkaç yılda, LMI yaklaşımı ile çözüm yöntemleri, birçok analiz ve tasarım uygulamalarında, özellikle kontrol alanında çok büyük bir önem arzetmektedir ve geniş çapta kullanılmaktadır. Dışbükey optimizasyon problemlerini çözmede LMI, güçlü bir araçtır. Bir LMI, tasarım değişkenleri üzerinde kuvvetli bir dışbükey özelliği olan eşitsizlik kısıtlamasıdır. Bölgesel kutup atama, dayanıklı kararlılık, norm davranış ölçütleri ve kazanç zayıflatması şeklinde özellikler LMI'larla ifade edilebilir. Tüm bu özelliklerin birleştirilmesi ise çok amaçlı bir tasarım problemidir ve dışbükey optimizasyon aracılığıyla sayısal olarak çözülebilir. LMI gösterimi bazı üstünlüklere sahiptir. Birincisi, tasarım kısıtlamasına bağlı incelemelerde daha esnek ve sezgiseldir. İkincisi bir tasarımın gerçeklenebilirliği, problemin analitik olarak ele alınması mümkün olmadığı zaman bile sayısal olarak sağlanabilir. Üçüncüsü ise

klasik LQG ve H_∞ teknikleri üstünde bir ilerleme sağlayan ve yenilik getiren çeşitli özellikleri ve amaçları birleştirebilir (Gahinet ve diğ., 1995).

Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) kapalı çevrim sistemi üzerinde birkaç kısıtlamayı bir arada kullanmada daha çok esneklik sağlar. Bu sebeple, bölgesel kutup kısıtlamalı H_2/H_∞ kontrol sentezi LMI'larla ifade edilen dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilebilir (Chilali ve Gahinet, 1996), (Gahinet ve Apkarian, 1994), (Liu ve Yedavalli, 1993). LMI tekniklerinin sözü edilen bu üstünlüklerinden dolayı, kontrol problemlerinde LMI yaklaşımları, araştırmacılar tarafından son yıllarda çok önemli ve dikkat çekici bulunmaktadır. LMI yaklaşımı zamanla değişen lineer (LPV, Linear Parameter Varying) sistemlere uygulanmıştır.

H_2, H_∞ ve karma H_2/H_∞ optimal kontrol problemleri incelenmiştir. H_2 optimal kontrol problemi, belirgin bir temelde incelenir. H_2 optimal kontrol probleminde, dış girişlerle kontrol edilen çıkışlar arasında tanımlanan bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 normu kararlılığı sağlayacak bir kontrol edicinin kullanımıyla en az yapılır. Bir H_2 optimal kontrol problemine durum ve ölçme geribeslemesi uygulanması halinde problemin çözümünün var olması için gerek ve yeter koşullar Stoorvogel ve diğ. (1992) 'de verilmiştir. H_2 optimal kontrol edicin elde edilmesi, pratikte kontrol sistem tasarımında her zaman tek bir amaç değildir. H_2 norm davranış ölçütü yanında ikinci diğer birkaç özellik kontrol edici tasarımının sonuç aşamalarında değerlendirilir. Bu özelliklerden biri sol yarım karmaşık s düzleminde istenilen bir bölgeye, kapalı çevrim kutuplarının atanmasındaki gerçeklenebilirliği gösterilebilir. H_2 optimal kontrol kuralları genelde tek değildir. Tüm H_2 optimal kontrol kuralları parametrelerinin belirlenmesi ve tanımlanması ikincil amaçları düşünmemizi gerektirir. H_2 ve H_∞ normlarının davranış ölçütleri olarak alındığı bazı karma optimizasyon problemlerinde dayanıklı kararlılık yanında H_2 optimal davranış ölçütleri de kullanılmıştır (Saberi ve diğ., 1995).

Karma H_2 / H_∞ kontrol edici sentezi problemi sonlu boyutlu dışbükey optimizasyon problemine indirgenebilir. Bu tür kontrol problemlerinde LMI yaklaşımı güçlü ve kullanışlıdır. Çözülebilirlik koşulları, basit cebirsel işlemlerle verilebilir. Böylece problem, simetrik gerçel matrislerin sınırlı bir alt kümesi üzerinde bir optimizasyon probleminden başka bir şey değildir. Karma H_2 / H_∞ kontrol probleminin ana

amacı, belirli bir kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin H_2 normunun diğer bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 / H_∞ normu üzerine konan bir kısıtlama altında minimize edilmesidir. Karma H_2 / H_∞ kontrol kuramı, H_∞ normu ile garanti edilen çıkışta bozucu etkisinin azaltılması ve H_2 normu ile ölçülen karesel davranışın birleştirilmesini sağlayan çok güçlü bir sentez yöntemi verir. Böyle bir karma H_2 / H_∞ kontrol edici tasarımı, kapalı çevrim sisteminin istenilen dinamik karakteristiği ile ilgili, başka deyişle, geçici durum davranış karakteristiği ile ilgili arzu edilen özellikleri sağlamaz. Geçici durum özellikleri için geçici cevap karakteristiğine ilişkin bir kısıtlama, tasarımda gözönüne alınmalıdır. Bu karakteristik, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının yerleştirilmesiyle şekillenir (Bambang ve diğ., 1993), (Chilali ve Gahinet, 1996; Haddad ve Bernstein, 1992; Liu ve Yedavalli , 1993).

LPV sistemleri dahil çeşitli yapılardaki sistemlerin analiz ve tasarım uygulamalarında geniş çapta kullanılan Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar), kapalı çevrim sistemi üzerinde çoklu kısıtları gerçeklemede oldukça esneklik sağlamaktadır; ayrıca sistem ve kontrol alanındaki uygulamalarda kullanışlı ve güçlü bir matematiksel araçtır. Parametreleri zamanla Değişen Lineer (LPV) sistemlere ilişkin çoklu kısıtlar altında dayanıklı optimal LPV kontrol edici tasarımı, LMI ' lar ile gerçeklendiğinden teorem ve tanımlamalar, LMI 'ların özelliklerinden yararlanarak verilmiştir.

Dayanıklı optimal, parametre değişimli lineer (LPV-Linear Parameter Varying) kontrolun ana amacı, parametre belirsizlikleri ve çoklu kısıtlar altında kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin karma normunu en az yapan tüm kontrol edicilerin lineer bileşimi aracılığıyla bir kontrol edici belirlemektir. Karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü; H_2 sonsuz norm davranışı kısıtı, H_∞ norm davranışı kısıtı, kontrol girişi kısıtı ve bölgesel kutup atama kısıtı vb. kısıtlar altında en az yapılır. Çoklu kısıtlar altında, statik geribeslemeli LPV kontrol tasarımı, lineer matris eşitsizlikleri içeren dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilir. Tasarım problemi, çoklu kısıtlara ve parametre belirsizliklere sahip statik ve dinamik geribeslemeli, karma H_2 / H_∞ parametre bağımlı kontrol sistemine ilişkin bir probleme dayanır. Çoklu kısıtlar altında karma H_2 / H_∞ kontrol tasarımının gerçeklenebilirliği, fiziksel kontrol problemlerinde önemli bir konudur. Bir LPV kontrol edicinin tasarımı, karma H_2 / H_∞ performans ölçütünün kontrol girişi kısıtı vb. çoklu kısıtlar altında en az

yapılacak şekilde gerçekleştirilmesine ilişkin bir yöntemle tanıtılmıştır. Bu çalışmada, bir sistemin kontroluna ilişkin statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarım örneği verilmekte ve tasarım örneği, LPV kontrol edici tasarımı yaklaşımının üstünlüğünü göstermektedir.

H_2 / H_∞ LPV tasarımı kutup yerleştirme ile birlikte kontrol vektörünün, çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistemin çıkışlarındaki vektörlerden biri olarak seçilmesi ile kontrol girişinin maksimum genliği üzerinde kısıtlamanın nasıl sağlanacağı bir teoremle kanıtlanmıştır. Burada, lineer kontrol sistemlerinin kontrol edici tasarımında karma H_2 / H_∞ LPV davranış ölçütü, H_∞ norm davranış kısıtı ve kontrol girişi kısıtlamasını sağlayacak bir çok kısıtlar altında en az yapılarak gerçekleştirilmelidir. Böylece literatürde var olan kontrol edici tasarım yöntemlerine ilave olarak kontrol vektörü genliğinin sınırlandırılması dahil çoklu kısıtlar altında bir kontrol edici tasarımı önerilmiş olmaktadır. Bu çalışmada; parametre belirsizliği durumunda H2 norm davranışı, genelleştirilmiş H_2 norm davranışı ve H∞ norm davranışına ait kısıtlar ile bölgesel kutup atama kısıtlaması koşulları altında karma H_2 / H_∞ norm davranışına ilişkin davranış ölçütünün en az yapılması sağlanmıştır. Ele alınan model üzerinde kontrol edici tasarımına ait örnekler verilmiştir. Bu örneklerde, karma H_2 / H_∞ LPV statik ve dinamik geribeslemeli kontrol tasarımında çoklu kısıtlar gözönüne alınmıştır. Bu yolla tüm kısıtlamaları sağlayan karma bir H_2 / H_∞ kontrol edici tasarlanmıştır. Statik ve dinamik geribesleme durumunda, ele alınan karma optimizasyon probleminin çeşitli kısıtlar altındaki Lineer Matris Eşitsizlik modelleri verilerek statik ve dinamik LPV kontrol edici tasarım yöntemi tanıtılmıştır. Dayanıklı optimal, zamanla değişen lineer kontrolun ana amacı, parametre belirsizlikleri ve çoklu kısıtlar altında kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin karma normunu en az yapan tüm kontrol edicilerin bir lineer bileşimini belirlemektir. Karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü; H_2 norm davranışı kısıtı, H_∞ norm davranışı kısıtı, kontrol girişi kısıtı ve bölgesel kutup atama kısıtı gibi çoklu kısıtlar altında en az yapılmıştır. Çoklu kısıtlar altında, statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarımı, lineer matris eşitsizlikleri içeren dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilmiştir. Bu çalışma, çoklu kısıtlı LPV sistemin dayanıklı optimal, statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrolunu gösterir. Tasarım problemi, çoklu kısıtlara ve parametre belirsizliklere sahip statik ve dinamik geribeslemeli,

karma H_2 / H_∞ parametre bağımlı kontrol sistemine ilişkin verilen yöntemle çözülmüştür. Bu çalışmada, bir sistemin kontroluna ilişkin statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarım örneği verilmiştir ve tasarım örneği, LPV kontrol edici tasarımı yaklaşımının etkin gücünü göstermektedir.

İkinci bölümde kaynak taraması ve temel tanımlar verilmiş, dayanıklı kontrol ile ilgili bir giriş ile dayanıklı bir optimal kontrol tasarımı tanıtılmış ve ayrıca LMI modelleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, H_2 / H_∞ tasarımı kutup yerleştirme ile birlikte kontrol vektörünün, kontrol edilen sistemin çıkışlarındaki vektörlerden biri olarak seçilmesi ile kontrol girişinin maksimum genliği üzerinde kısıtlamanın nasıl sağlanacağı bir teoremle kanıtlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, çok değişkenli F16 uçak yanlamasına hareket modelinin çıkarılması gösterilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, çok değişkenli F16 uçak yanlamasına hareket modeli üzerinde dayanıklı kontrol tasarımı sonucu elde olunan sonuçlar özetlenmiş ve tartışılmıştır. Bu bölümde karma bir amaç ölçütünün karma optimizasyonu; çoklu kısıtlar altında ve belirsizlik durumu da ele alınarak kontrol edici tasarımı yapılmıştır. F16 uçağın yanlamasına hareketi için amaçlanan bu özgün durum gösterilmiştir.

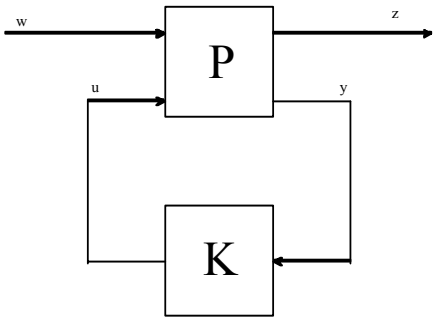
Tezin altıncı bölümünde, elde olunan sonuçlar özetlenmiş ve tartışılmıştır. Bu bölümde karma bir amaç ölçütünün optimizasyonu; çoklu kısıtlar altında ve belirsizlik durumlarında da çok girdi çok çıktılı bir sistem içinde yapılabildiği sonucuna varılmıştır. Ele alınan sistemdeki belli sayıda parametre belirsizliği için amaçlanan bu özgün durum ulaşılan sonuçlar ile gösterilmiştir.

2. DAYANIKLI OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNDE LİNEER MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ

Dayanıklı kontrol ve H_∞ optimizasyonu Zames'in 1979 'da yazdığı konferans makalesi ile başlar. Bu makalede, bir girdi-bir çıktılı lineer geribeslemeli sistemin duyarlılık fonksiyonuna ilişkin H_∞ normunun en az yapılması amaçlanır. H_∞ normunun en az yapılması, bozucu girişlerin kontrol edilen çıkışlar üzerindeki etkisinin en az yapılması anlamına gelir.

H_2 ve H_∞ fonksiyon uzayları, Hilbert uzaylarının bir alt uzayıdır. İngiliz matematikçi, G.H.Hardy (1877-1947) 'den bu uzaylara Hardy uzaylarının özel durumları olarak tanımlanmışlardır. Başka deyişle, H_2 ve H_∞ fonksiyon uzayları, Hardy uzayları ailesinin üyeleridir. H_2 fonksiyon uzayı, analitik olan ve $\|\cdot\|_2$ normu alınabilen tüm matris fonksiyonlarının oluşturduğu bir uzaydır. H_∞ fonksiyon uzayı ise, açık sağ yarı düzlem üzerinde analitik olan ve $\|\cdot\|_\infty$ normu alınabilen tüm fonksiyonların uzayıdır.

H_2 ve H_∞ kontrol problemlerinde kullanılan blok diyagramının genel yapısı aşağıdaki blok diyagramı ile verilir (Boyd ve diğ., 1994).



Şekil 2.1 : Genel H_2 , H_∞ kontrol problemine ilişkin blok diyagramı.

Burada w dış girdileri gösterir. Dış girişler bozucular ve referanslardan oluşur. z, kontrol edilen çıkış vektörü, u ise kontrol giriş vektörü, y 'de ölçülen yada algılanan çıkış vektörüdür. T_{zw} ise w dış girişinden z kontrol edilen çıkışa olan kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyon matrisini ifade eder.

Genel olarak $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normları aşağıdaki şekilde tanımlanır (Gahinet ve diğ., 1995)

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_2 \leq \gamma \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\|T_{zw}\|_2 \triangleq \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_\infty}{\|w\|_2} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty \leq \nu \qquad \textbf{(2.2)}$$

Öte yandan Banach ve Hilbert uzaylarıda şu şekilde tanımlanır:
L_∞ (Banach) uzayları, sanal eksende kutupları olmayan, düzgün fonksiyon matrislerinin oluşturduğu bir uzaydır.
L_2 (Hilbert) uzayları, sanal eksende kutupları olmayan, kesin düzgün fonksiyon matrislerinin oluşturduğu bir uzaydır.
H_∞ optimal kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı,dayanıklı kararlılık probleminin çözümünde önem taşır. Kullanılan çeşitli yaklaşımlarda yukarıdaki blok diyagramı gözönüne alınmaktadır. Verilen çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistem için H_∞ sentez probleminde amaç, dış girişlerden kontrol edilen çıkışlara enerji aktarımını en az yapacak bir kontrol edici tasarlamaktır. Önemli kontrol problemlerinin çoğu H_∞ sentez probleminin alışılmış genel yapısına dönüştürülerek çözülebilir. H_∞ teknikleri dayanıklılık açısından H_2 yöntemlerine göre bozuculara karşı daha dayanıklıdır. H_∞ kontrol kuramı, dayanıklılık konusunda iki ölçüt kullanılır. Bu ölçütler,

-Sınırlı enerjili kontrol ya da bozucu girişlerin varlığında en büyük hata enerjisinin en aza indirilmesi,

-Bozucular altında kapalı çevrim sisteminin kararlılığının sağlanması şeklindedir.

Bölüm 2'de gerekli matematiksel yöntem ve araçlar diğer bir deyişle Cebirsel Riccati Denklemleri (ARE'ler), Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) gözden geçirilmiştir. Durum uzayı optimizasyon kuramı, bir şekilde karesel Lyapunov fonksiyonlarıyla

ilişkilidir. Bu yaklaşımda bir Lyapunov matrisi belirlenir ve sonra da çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistem parametrelerine ve Lyapunov matrisine bağlı bir formül kullanarak, bir kontrol edici tasarlanır. Eğer kontrol edilen sistem çok girdili çok çıktılı lineer zamanla değişmeyen (LTI) bir sistem ise Lyapunov matrisi sabittir ve Cebirsel Riccati Denklemleri (ARE) yada Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) çözülerek bu Lyapunov matrisi belirlenir. Bir ARE, Hamiltonian tekniğine dayanan analitik bir çözüme sahiptir. Oysa bir LMI sonlu boyutlu dışbükey programlama yardımı ile çözülebilir. Böylece durum uzayı yöntemleri, transfer fonksiyonu yaklaşımlarına göre hesaplama üstünlüklerine sahiptir. Elde edilen kontrol edici derecesi, genellikle çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sisteminkine eşittir. Bazen bu derece, pratik gerçeklemelerde çok yüksek olabilmektedir (Skelton ve Iwasaki, 1995).

Son birkaç yılda, LMI yaklaşımı ile çözüm yöntemleri, birçok analiz ve tasarım uygulamalarında, özellikle kontrol alanında çok büyük bir önem arzetmektedir ve geniş çapta kullanılmaktadır. Dışbükey optimizasyon problemlerini çözmede LMI, güçlü bir araçtır. Bir LMI, tasarım değişkenleri üzerinde kuvvetli bir dışbükey özelliği olan eşitsizlik kısıtlamasıdır. Bölgesel kutup atama, dayanıklı kararlılık, norm davranış ölçütleri ve kazanç zayıflatması şeklinde özellikler LMI'larla ifade edilebilir. Tüm bu özelliklerin birleştirilmesi ise çok amaçlı bir tasarım problemidir ve dışbükey optimizasyon aracılığıyla sayısal olarak çözülebilir. LMI gösterimi bazı üstünlüklere sahiptir. Birincisi, tasarım kısıtlamasına bağlı incelemelerde daha esnek ve sezgiseldir. İkincisi bir tasarımın gerçeklenebilirliği, problemin analitik olarak ele alınması mümkün olmadığı zaman bile sayısal olarak sağlanabilir. Üçüncüsü ise klasik LQG ve H_∞ teknikleri üstünde bir ilerleme sağlayan ve yenilik getiren çeşitli özellikleri ve amaçları birleştirebilir (Gahinet ve diğ., 1995).

H_∞ kontrol edicilerinin belirleneblirliğinin gerek ve yeter koşulları LMI'larla verilir. LMI'ların kesin artı çözümleri dışbükey bir küme oluşturur. Kontrol edici derecesi, LMI'ların çözümleri üzerine rank koşulu getirilerek istenilen bir değerde tutulabilir. Bu rank koşulu, dışbükeyliği bozabilir. Bazı durumlarda dışbükeyliği bozma pahasına kontrol edici derecesi istenen bir değerde sabit tutulabilir. LMI formülasyonunun ana üstünlüğü, hesaplama kolaylıklarına dayanır (Doyle ve diğ., 1989; Willems, 1971). Kontrol edici, derecesi için öncelikle bir değer

öngörülmüyorsa belirli bir çözüm kümesinden belirlenir, bir ilave koşulun sağlanması gerekmez. Böylece çözülecek problem dışbükey olur (Gahinet, 1992). LMI'ların tüm kesin artı çözümlerine ait kümenin dışbükeyliği, güçlü sayısal algoritmalarının etkin kullanımını sağlar. Bu algoritmalar çözüm kümeleri üzerinde belirli optimizasyon problemlerini çözmekte kullanılır (Beck, 1991). LMI varlık koşullarına ilişkin artı çözümler üzerine ilave rank koşulu getirerek kontrol edicinin derecesi belli bir değerde tutulur. Ancak bu durumda kontrol edici tasarım probleminin dışbükeyliği bozulur. Böylece elde edilen dışbükey olmayan optimizasyon problemine uygulanan bazı hesaplama yaklaşımları, problemin çözümünü daha da güçleştirebilir.

Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) kapalı çevrim sistemi üzerinde birkaç kısıtlamayı bir arada kullanmada daha çok esneklik sağlar. Bu sebeple, bölgesel kutup kısıtlamalı H_2/H_∞ kontrol sentezi LMI'larla ifade edilen dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilebilir (Chilali ve Gahinet, 1996; Gahinet ve Apkarian, 1994; Liu ve Yedavalli, 1993). LMI tekniklerinin sözü edilen bu üstünlüklerinden dolayı, kontrol problemlerinde LMI yaklaşımları, araştırmacılar tarafından son yıllarda çok önemli ve dikkat çekici bulunmaktadır. LMI yaklaşımı zamanla değişen lineer (LPV, Linear Parameter Varying) sistemlere uygulanmıştır.

H_2, H_∞ ve karma H_2/H_∞ optimal kontrol problemleri incelenmiştir. H_2 optimal kontrol problemi, belirgin bir temelde incelenir. H_2 optimal kontrol probleminde, dış girişlerle kontrol edilen çıkışlar arasında tanımlanan bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 normu kararlılığı sağlayacak bir kontrol edicinin kullanımıyla en az yapılır. H_2 opimal kontrol problemi iki ana gruba ayrılabilir. Birinci grup, tekil olmayan H_2 optimal kontrol problemleridir. Bu problemlerde iki temel varsayım sağlanır.

1) Dış girişlerden ölçme çıkışlarına olan alt sistemin sanal eksen üzerinde değişmez sıfırlarının olmaması gerekir. ve direk ileri besleme matrisinin sürjektif olması gerekir.

2) Kontrol girişinden kontrol edilen çıkışlara ilişkin alt sistem, sanal eksen üzerinde hiçbir değişmez sıfıra sahip olmamalıdır ve direk ileri besleme matrisi injektif olmalıdır. İkinci gruptaki H_2 optimal kontrol problemleri ise tekil kontrol problemlerdir. Geçmişteki araştırmaların çoğu tekil olmayan problemler üzerinedir. Bir H_2 optimal kontrol problemine durum ve ölçme geribeslemesi uygulanması

halinde problemin çözümünün var olması için gerek ve yeter koşullar Stoorvogel ve diğ. (1992) 'de verilmiştir. H_2 optimal kontrol edicin elde edilmesi, pratikte kontrol sistem tasarımında her zaman tek bir amaç değildir. H_2 norm davranış ölçütü yanında ikinci diğer birkaç özellik kontrol edici tasarımının sonuç aşamalarında değerlendirilir. Bu özelliklerden biri sol yarım karmaşık s düzleminde istenilen bir bölgeye, kapalı çevrim kutuplarının atanmasındaki gerçeklenebilirliği gösterilebilir. H_2 optimal kontrol kuralları genelde tek değildir. Tüm H_2 optimal kontrol kuralları parametrelerinin belirlenmesi ve tanımlanması ikincil amaçları düşünmemizi gerektirir. H_2 ve H_∞ normlarının davranış ölçütleri olarak alındığı bazı karma optimizasyon problemlerinde dayanıklı kararlılık yanında H_2 optimal davranış ölçütleri de kullanılmıştır (Saberi ve diğ., 1995).

Karma H_2 / H_∞ kontrol problemi son yıllarda dikkat çekici bir konu olmuştur. Bu problem önce Benstein ve Haddad (1989) tarafından ele alınmıştır. Diğer bir H_2 / H_∞ karma problemi Doyle ve diğ. (1994), Zhou ve diğ. (1994), Khargonekar ve Rotea (1991) tarafından makalelerinde incelenmiştir. Khargonekar ve Rotea (1991), bu problem için dışbükey optimizasyona dayanan algoritmik bir çözüm vermiştir. Karma H_2 / H_∞ kontrol probleminde amaç, dayanıklı kararlılık kısıtlaması altında, karma bir H_2 / H_∞ davranış ölçütünü minimize eden ve iç kararlılığı sağlayan bir kontrol edici bulmaktır. Karma H_2 / H_∞ performans ölçütü, bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 normu üzerinde bir üst sınırdır. Ayrıca bu, H_∞ normunun sınırlı belirsizliklere sahip bir transfer fonksiyon matrisinin H_∞ normunun dayanıklı H_2 norm üzerinde de bir üst sınır olarak da ele alınabilir (Zhou ve diğ., 1994). Bu yüzden karma problem sadece çok amaçlı kontrol problemi olarak değil, aynı zamanda dayanıklı davranış problemi olarak da önem taşır. Bernstein ve Haddad (1989), Doyle ve diğ. (1994), birbirine bağlı iki Riccati denklemleriyle ifade edilen çözülebilirlik koşullarını elde etmişlerdir. H_∞ kontrol problemlerinde LMI yaklaşımı güçlü ve kullanışlıdır (Iwasaki ve Skelton, 1991; Gahinet ve Apkarian, 1994). Çözülebilirlik koşulları, basit cebirsel işlemlerle verilebilir. LMI'ları çözmek için çok kapsamlı algoritmalar kullanılabilir (Boyd ve diğ., 1994). Hem düzgün hem de tekil H_∞ kontrol problemlerini incelenebilir. Bunun için çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistem matrisleri üzerinde hiçbir varsayım yapmaya gerek yoktur. Karma H_2 / H_∞ kontrol edici tasarım problemi sonlu boyutlu dışbükey optimizasyon problemine indirgenebilir. Bu problem ise simetrik gerçel matrislerin sınırlı bir alt kümesi

üzerinde bir optimizasyon probleminden başka bir şey değildir (Fujisaki ve Yoshida, 1996).

Karma H_2 / H_∞ performans ölçütü, Cebirsel Riccati Denklemleriyle ifade edilen daha klasik bir ifade yerine Karesel Matris Eşitsizlikleri (QMI'lar) yada Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar) kullanılarak hesaplanabilir. Kesin düzgün H_2 / H_∞ kontrol edicin varlığında gerek ve yeter koşullar, LMI'lara bağlı olarak verilir. Elde edilen kontrol edicilerin derecesi genelleştirilmiş çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistemin derecesine eşit olarak verilir. Karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü, birbirine bağlı iki matris eşitsizliği ile belirlenir (Khargonekar ve Rotea, 1991; Iwasaki ve Skelton, 1994; Gahinet ve Apkarian , 1994).

Karma H_2 / H_∞ kontrol probleminin ana amacı, belirli bir kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin H_2 normunun diğer bir transfer fonksiyon matrisinin H_2 / H_∞ normu üzerine konan bir kısıtlama altında minimize edilmesidir. Karma H_2 / H_∞ kontrol kuramı, H_∞ normu ile garanti edilen çıkışta bozucu etkisinin azaltılması ve H_2 normu ile ölçülen karesel davranışın birleştirilmesini sağlayan çok güçlü bir sentez yöntemi verir. Böyle bir karma H_2 / H_∞ kontrol edici tasarımı, kapalı çevrim sisteminin istenilen dinamik karakteristiği ile ilgili, başka deyişle, geçici durum davranış karakteristiği ile ilgili arzu edilen özellikleri sağlamaz. Geçici durum özellikleri için geçici cevap karakteristiğine ilişkin bir kısıtlama, tasarımda gözönüne alınmalıdır. Bu karakteristik, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının yerleştirilmesiyle şekillenir (Bambang ve diğ., 1993; Chilali ve Gahinet, 1996; Haddad ve Bernstein, 1992; Liu ve Yedavalli , 1993).

Dayanıklı genel optimal kontrol problemleri çok değişik amaçlı kısıtlamalar altında tanıtılmıştır. Çok amaçlı kontrol probleminden zaman ve frekans tanım bölgeleri özelliklerinin bir karması, H_2 ve H_∞ davranışlarından, kapalı çevrim sisteminin bölgesel kutup atanması ve kontrol girişinin sınırlanması gibi kısıtların bir arada göz önüne alınması anlaşılır (Chilali ve diğ., 1996). Ayrıca karmaşık sol yarı *s*-düzleminde genel dışbükey alt bölgelerinin bir LMI ile belirlenebilirliği açıklanmıştır ve bölgesel kutup atama kısıtlamalı H_∞ sentezindeki yaklaşımın üstünlüğü de gösterilmiştir.

Modern kontrol sistemleri tasarımında göz önüne alınması gerekli pratik özelliklerden birisi, kapalı çevrim kontrol sisteminin geçici ve sürekli durum davranışlarıdır. Zaman tanım bölgesi performans özelliklerinden çoğu (geçici ve de kalıcı durum) kapalı çevrim sisteminin sıfır ve kutuplarının sol yarım s düzlemindeki yeriyle belirlenir ve etkilenir. Kararlılık yanında, istenilen bir davranış, kapalı çevrim kutupları karmaşık düzlemde verilen bir bölgeye atamayla sağlanır. Bunun için de yapılması gereken dayanıklı kutup atama tasarımıdır. Bu tasarımda, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bölgesel yeri üzerinde bazı kısıtlamaların konulması amaçtır. Kapalı çevrim sistemlerinin atanacak kutupları için sol yarı karmaşık düzlemde seçilen bölgeler, geçici cevap karakteristikleri için bir gösterge olarak değerlendirilir. Bu yüzden kapalı çevrim kutupları üzerine bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir. Bu konuda çoğu makaleler kutup atama problemini durum geribeslemesi yaparak incelemiştir (Bambang ve diğ., 1993; Yedavalli ve Liu, 1993). H_∞ sentez problemlerinin çözümlerinde kullanılan durum uzayı yaklaşımlarında, kutup atama kısıtlaması getirilmesi halinde karşılaşılan çözüm zorluğu bu durumu açıklar (Doyle ve diğ., 1989).

İstenilen kısıtlama bölgesi D, birkaç matris eşitsizliğiyle gösterilebilir. Bazı durumlarda kutup atama bölgesi D, seçilen birkaç bölgenin arakesiti olabilir. Bu LMI bölgeleri, sözkonusu kontrol problemlerinin birçok pratik gereksinimlerini karşılar (Chilali ve Gahinet, 1996). Bundan başka kontrol işareti genliğine ilişkin kısıt ve modelleme Bölüm 2'de gösterilmiştir. Bugüne dek kontrol sistemleri tasarımında, kuramsal yada alışılmış pratik tasarım yöntemleri kontrol edici çıkışındaki işaretin genliğinin kısıtlanması yönünde bir koşul getirmemiştir. Bu işaretin genliği uygulamada üretilmeyecek kadar büyük olabilir. Üretilebilse de çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sisteme kararlılık gibi nedenlerle uygulanamayabilir. Karma H_2 / H_∞ kontrol tasarımı ile birlikte bölgesel kutup kısıtlaması ve de kontrol giriş kısıtlaması (kontrol giriş vektörünün en büyük genlik sınırlaması)'nı sağlayan kontrol edicilerin gerçeklenebilirliği fiziksel kontrol problemlerinde önem taşır. Özellikle kontrol girişinin en büyük bir genlikle sınırlandırılması, uygulama yönünden çok önemlidir.

D LMI bölgesi (istenilen bölgesel kutup atama bölgesi) birkaç matris eşitsizlikleriyle gösterilebilir. Bazı durumlarda kutup atama bölgesi D seçilen birkaç bölgenin

arakesiti olabilir. Bu LMI bölgeleri, söz konusu kontrol problemlerinin birçok pratik gereksinimlerini karşılar. Tezin getirdiği önemli bir yenilik olan kontrol işareti genliği kısıtlaması yaklaşımı sunulmuştur. Bugüne dek kontrol sistemleri tasarımında, kuramsal yada alışılmış pratik tasarım yöntemleri kontrol edici çıkışındaki işaretin genliğinin kısıtlanması yönünde bir koşul getirmemiştir. Bu işaretin genliği pratikte üretilmeyecek kadar büyük olabilir. Üretilebilse de kararsızlık problemi ve sistemin korunması açısından kontrol edilen sisteme uygulanamaz olabilir. Karma H_2 / H_∞ kontrol tasarımı ile birlikte bölgesel kutup kısıtlaması ve de kontrol giriş kısıtlaması (kontrol giriş vektörünün maksimum genlik sınırlaması)'nı sağlayan kontrol edicilerin gerçeklenebilirliği fiziksel kontrol problemlerinde çok büyük bir önem kazanmıştır. Özellikle kontrol girişinin maksimum bir genliğe sınırlaması, pratik açıdan büyük bir önem kazanmaktadır.

Hem H_2 optimal kontrol hem de H_∞ optimal kontrol probleminde, farklı türden cebirsel denklemler ya da cebirsel eşitsizlikler yer alır. Cebirsel Riccati denklemi (Algebraic Riccati Equation, ARE), adını (1676-1754) yılları arasında yaşamış Venedikli bir matematikçi olan Count Jacope Francesco Riccati 'den alır. Bu denklem, 1960 'lı yılların başlarında, R.E. Kalman 'ın kontrol kuramında çok geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bunun sonucunda, H_2 ve H_∞ optimal kontrol kuramı; kararlılık kuramı, stokastik süzgeçleme, stokastik kontrol ve diferansiyel oyun kuramında kullanılmaya başlamıştır. Bu problemlerde ARE 'lerin, kapalı çevrim sistemleri kararlı kılan optimal çözümlerinin bulunması amaçlanır (Saberi ve diğ., 1995).

Lineer Zamanla Değişmeyen (Lineer Time-Invariant, LTI) sistemlerin kararlılığında, kontrol kuramında en yaygın Lineer Matris Eşitsizliği (Linear Matrix Inequality, LMI) olarak Lyapunov Eşitsizliği ile karşılaşılır. Durum uzayında optimizasyon kuramı, karesel Lyapunov fonksiyonu ile ilişkili olarak ele alınır (Boyd ve diğ., 1994). Kontrol edici, Lyapunov matris hesabı ve kontrol edilen sistem verisi ve Lyapunov matrisine bağlı bir ilişkiden yararlanılarak tasarlanır. Kontrol edilen sistem, lineer zamanla değişmeyen (LTI) bir sistem ise Lyapunov matris sabittir ve bir ARE ya da LMI 'nin çözümünden elde edilir. Bir ARE, Hamiltonian tekniklerine dayanan analitik bir çözüme sahiptir. Bir LMI, sonlu boyutlu dışbükey programlamayla çözülebilir. Böylece, durum uzayı yöntemleri,

transfer fonksiyonları yaklaşımı üzerinde bir hesaplama üstünlüğü sağlar. Elde edilen kontrol edicinin mertebesi, genellikle kontrol edilen sistemin (kontrol edilen sistemi içeren ve mertebesi kontrol edilen sistemin mertebesine eşit yada büyük olan çok giriş çok çıkışlı bir sistem) derecesine eşittir. Ancak bu mertebe, pratik gerçekleştirmeler için çok büyük olabilir. Bir H_∞ kontrol edicinin varlığı için gerek ve yeter koşullar, LMI'lar cinsinden ifade edilir. LMI'ların kesin artı çözümleri, dışbükey bir küme oluşturur. LMI çözümleri üzerine dışbükeyliği bozma pahasına ilave bir rank koşulu getirmekle kontrol edicinin derecesi istenen bir değerde tutulabilir. Tüm H_∞ kontrol edicilerin kümesi,tamamıyla durum uzayında betimlenir. LMI ifadesinin temel üstünlüğü, hesaplamaya dayanan kavramlarla ilgilidir (Doyle ve diğ., 1991; Willems, 1971). Kontrol edicinin derecesi için istenen sabit bir değer yoksa belirli bir kümenin belirlenmesinde rank koşulu kaldırılabilir ve böylece hesaplama problemi standart durumda dışbükey olur (Gahinet,1992). LMI'ların tüm kesin artı çözüm kümesinin dışbükeyliği, bu küme üzerinde belirli optimizasyon problemlerini çözecek güçlü sayısal algoritmaların gerçeklemesini kolaylaştırır (Beck, 1991; Geromel ve diğ., 1991). LMI yaklaşımının diğer bir üstünlüğü LMI varlık koşullarının artı sonuçları üzerine bir rank koşulu getirmekle kontrol edicinin derecesi istenen bir değerde tutulabilmesidir Skelton ve Iwasaki (1995). Ancak, bu ilave rank koşulu kontrol edici tasarımının dışbükeyliğini bozabilir. Bu konveks olmayan probleme bazı hesaplama yaklaşımları, problemi daha zor hale getirir (Gahinet, 1992; El Ghaoui ve Gahinet , 1993; Iwasaki ve Skelton, 1993; Iwasaki ve Skelton, 1994).

Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI) ve LMI teknikleri, kontrol mühendisliğinden tüm alanlarında güçlü tasarım araçları olarak çok önem taşıdıkları görülür.

-Tasarım özellikleri ve kısıtlamalarının bir kısmı, Lineer Matris Eşitsizlikleri olarak tanımlanabilir.

-Problem, Lineer Matris Eşitsizlikleriyle formüle edildiğinde etkili dışbükey optimizasyon algoritmaları ile çözülebilir.

-Çoklu kısıtlamalı yada amaçlı problemler, genellikle matris denklemlerine bağlı analitik çözülemezken bunun, LMI yapısında mümkün olduğu görülür. LMI temelli tasarım, klasik analitik yöntemlere karşı iyi bir seçenek oluşturur (Gahinet ve diğ., 1995). Son yıllarda uygulamaya konan LMI çözücüleri, kontrol alanındaki birçok analiz ve tasarım problemlerinde karşılaşılan dışbükey optimizasyon problemini

çözen hesap araçları olarak önem taşır. Bir LMI, tasarım değişkenlerini kuvvetli bir dışbükey eşitsizlik kısıtlaması olarak etkiler. Bölgesel kutup atama, dayanıklı kararlılık, LQG (Linear Quadratic Gaussian), kazanç zayıflatması gibi davranışlar, LMI'larla ifade edilebilir. Bir Lyapunov eşitsizliği kararlılığı ifade eden bir LMI 'a örnek olarak verilebilir. Belirtilen özelliklerin tümünü bünyesinde barındıran bu problem, bir çok amaçlı dışbükey optimizasyon yöntemiyle çözülebilir. LMI ifadeleri üç avantaja sahiptir. Birincisi, tasarım kısıtlamalarına bağlı değerlendirme, diğerlerine göre daha esnek ve sezgiseldir. İkincisi, problem analitik olarak ifade edilemediğinde tasarım sayısal olarak gerçekleştirilebilir. Üçüncüsü, klasik LQG ve H_∞ teknikleri LMI'larla karma uygulanabilir (Gahinet ve diğ., 1995). Bir başka deyişle kapalı çevrimli kontrol sistemi üzerine birkaç kısıtlama aynı anda LMI'lara yeterince esnek uygulanabilir. Bu yüzden, bölgesel kutup atama kısıtlamalı karma H_2 / H_∞ kontrol sentezi LMI'ları içeren bir dışbükey optimizasyon problemi olarak ifade edilir. LMI tekniklerinin bu önemli üstünlüğünden dolayı, kontrol probleminde LMI yaklaşımları, son yıllarda araştırmalar için son derece ilgi çekmektedir. Sistem ve kontrol kuramında birçok problem, LMI 'larla modellenerek ve dışbükey optimizasyon problemleri olarak ele alınarak etkili sayısal algoritmalarla çözülür. 'LMI Control Toolbox', Gahinet ve diğ. (1995) 'da bu amaçla geliştirlmiş olan bir tasarım programıdır. Tezde ele alınan sistemlerin çözümünde yararlanılmıştır.

H_2 / H_∞ LPV tasarımı kutup yerleştirme ile birlikte kontrol vektörünün, çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistemin çıkışlarındaki vektörlerden biri olarak seçilmesi ile kontrol girişinin maksimum genliği üzerinde kısıtlamanın nasıl sağlanacağı bir teoremle kanıtlanmıştır. Burada, lineer kontrol sistemlerinin kontrol edici tasarımında karma H_2 / H_∞ LPV davranış ölçütü, H_∞ norm davranış kısıtı ve kontrol girişi kısıtlamasını sağlayacak bir çok kısıtlar altında en az yapılarak gerçekleştirilmelidir. Böylece literatürde var olan kontrol edici tasarım yöntemlerine ilave olarak kontrol vektörü genliğinin sınırlandırılması dahil çoklu kısıtlar altında bir kontrol edici tasarımı önerilmiş olmaktadır.

Statik ve dinamik geribesleme durumunda, ele alınan karma optimizasyon probleminin çeşitli kısıtlar altındaki Lineer Matris Eşitsizlik modelleri verilerek LPV kontrol edici tasarım yöntemi tanıtılmıştır. Dayanıklı optimal, zamanla değişen

lineer kontrolun ana amacı, parametre belirsizlikleri ve çoklu kısıtlar altında kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin karma normunu en az yapan tüm kontrol edicilerin bir lineer bileşimini belirlemektir. Karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü; H_2 norm davranışı kısıtı, H_∞ norm davranışı kısıtı, kontrol girişi kısıtı ve bölgesel kutup atama kısıtı gibi çoklu kısıtlar altında en az yapılmıştır. Çoklu kısıtlar altında, statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarımı, lineer matris eşitsizlikleri içeren dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilmiştir. Bu çalışma, çoklu kısıtlı LPV sistemin dayanıklı optimal, statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrolunu gösterir. Tasarım problemi, çoklu kısıtlara ve parametre belirsizliklere sahip statik ve dinamik geribeslemeli, karma H_2 / H_∞ parametre bağımlı kontrol sistemine ilişkin verilen yöntemle çözülmüştür. Bu çalışmada, bir sistemin kontroluna ilişkin statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarım örneği verilmiştir ve tasarım örneği, geribeslemeli LPV kontrol edici tasarımı yaklaşımının etkin gücünü göstermektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Tezde yer alan H sembolü, İngiliz Matematikçi G. H. Hardy (1902-1955) 'nin soyadının ilk harfinden gelmektedir. Hardy çalıştığı Hilbert uzaylarının bir alt uzayında yaptığı önemli çalışmalarının sonucu, çalıştığı bu uzaya; ölümünden sonra Hardy uzayları adı verilmiştir. Kontrol edici tasarımlarının yapıldığı H Hardy uzaylarının özel bir anlamı vardır. Francis (1987) , Boyd ve diğ. (1994)' da yer alan bazı temel kavramlara ait tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.1 H_∞ uzayı, Re(s) >0 ile tanımlanan sağ yarı s düzlemiyle sınırlı ve analitik tüm karmaşık değişkenli T_{zw} (s) fonksiyonlarını kapsar. Fonksiyonun bu tanım bölgesinde tanımlı olması $\left|T_{zw}(s)\right| < \alpha$ demektir. Burada α sabit bir gerçel sayıdır.

Tanım 2.1.2 H_∞ uzayında bulunan herhangi bir $T_{zw}(s)$ fonksiyonunun genliğinin en küçük üst sınırı olan sayıya $T_{zw}(s)$ 'in H_∞ normu adı verilir.

$$\left\|T_{zw}(s)\right\|_\infty := \sup_w \left\{ T_{zw}(s) : \mathrm{Re}(s) > 0 \right\} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Tanım 2.1.3 $T_{zw}(s) \in H_\infty$ olmak üzere katsayıları reel olan rasyonel bir fonksiyon olsun. Eğer $T_{zw}(s)$ düzgün ve kararlı ise $T_{zw}(s) \in RH_\infty$ demektir. Burada RH_∞ uzayı, H_∞ uzayının bir transfer matris alt uzayıdır.

Tanım 2.1.4 $T_{zw}(s) \in RH_\infty$ olmak üzere en büyük modül,

$$\left\|T_{zw}(s)\right\|_s := \sup_w \left\{ \left|T_{zw}(jw)\right| : w \in R \right\} \qquad \textbf{(2.4)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5 $T_{zw}(s) \in RH_\infty$ transfer fonksiyonları matrisi şu şekilde tanımlanır.

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty := \sup_w \{\sigma_{\max}(T_{zw}(jw))\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Burada σ_{max}, maksimum tekil değerdir.

Tanım 2.1.6 $A \in C^{mxn}$ ise λ, A matrisinin özdeğeri olmak üzere $\sigma(A)$; A matrisinin tekil değeridir.

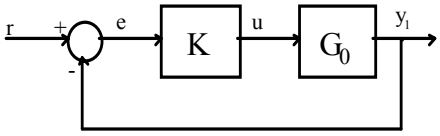
$$\sigma(A) = \lambda^{1/2}[A^H A] \ , \ \sigma_i > 0 \qquad \textbf{(2.6)}$$

Tanım 2.1.7 $T_{zw}(s)$ 'in H_2 normu, g(t) $T_{zw}(s)$'nin impuls yanıt fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

$$\|T_{zw}(s)\|_2 := \left(\int_0^\infty Trace\left[g^T(\tau)g(\tau)\right] d\tau \right)^{1/2} \qquad \textbf{(2.7)}$$

2.2 En Basit Kapalı Çevrim Kontrol Sisteminin Blok Diyagramının H_2 , H_∞ Blok Diyagramına dönüştürülmesi

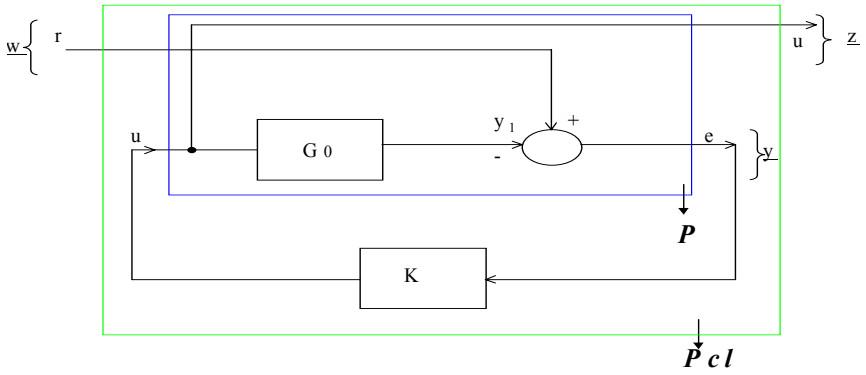
En basit bir kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı Şekil 2.2.'de gösterilmiştir.



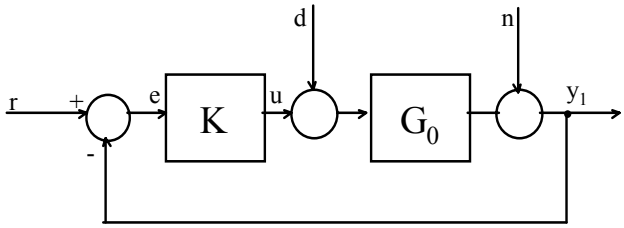
Şekil 2.2: En basit çok giriş ve çok çıkışlı kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı.

Burada; r referans girdi, e hata vektörü, K kontrol edici, u kontrol işareti vektörü, G_o kontrol edilen sistem ve y_1 kontrol sistemi çıkış vektörünü ifade eder.

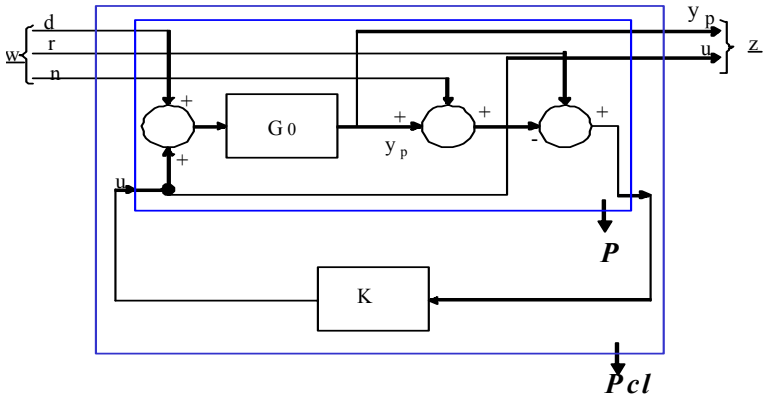
Kuramsal ve genel incelemeler için bu blok diyagramı daha genel bir eşdeğer blok diyagramına dönüştürülebilir. Şekil 2.2'deki alışılmış blok diyagramı, Şekil 2.3'deki genel H_2 , H_∞ blok diyagramı dönüştürülebilir. w dış girdi, sadece r referans girdisinden, z kontrol edilen çıktısı ise sadece u kontrol işaretinden oluşsun. Buna ilişkin blok diyagramı, Şekil (2.3)'te verilmiştir. Sürekli zaman bir kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyon matrisi ise T_{zw} ile göstersin.



Şekil 2.3: (Şekil 2.1.)' de gösterilen en basit blok diyagramının H_2, H_∞ genel blok diyagramına dönüştürülmesi.



Şekil 2.4: Çok giriş ve çok çıkışlı kapalı çevrim kontrol sistemi blok diyagramı.



Şekil 2.5: Şekil 2.3. 'de gösterilen basit blok diyagramının H_2, H_∞ genel blok diyagramına dönüştürülmesi.

Şekil 2.1' de verilen bir kapalı çevrim kontrol sisteminde w dış girdi vektörünü, u kontrol vektörünü, bir girdili bir çıktılı P kontrol edilen sistemi içeren P sistemi, çok girdi çok çıktılı kontrol edilen sistemi, z ve y çıkış vektörlerini ve K da çıkış geribeslemesi kontrol ediciyi ifade eder. P çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistem ve kontrol ediciyi tanımlayan parametre matrislerini tanımlayalım.

P Kontrol edilen sistem:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$
$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$
$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \qquad \textbf{(2.8)}$$

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$u = Ky$, P sistemi $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$ ilişkisini sağlar.

Kontrol edilmek istenen sistem, sınırlı boyutlu lineer zamanla değişmeyen (LTI) bir sistemdir. Buna göre,

$$P(s) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.9)}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadedeki matrisler uygun boyutlu matrislerden oluşur:

Kontrol edilen sistem ve kontrol edicinin durum uzayı denklemleri ve matrisel gösterimleri aşağıda verilmiştir. Daha sonraki ayrıtta, çok kullanılan karma H_2 / H_∞ optimizasyon probleminin çözümünü, u(t) kontrol işareti genliğini sınırlandıran bir kuramla kanıtlanmıştır. Verilecek özelliklerin tanıtında, Şekil 2.5'daki genel blok diyagramı kullanılacaktır.

K Statik Kontrol edici ise :

u(t)=Kx(t) , K: Kazanç Matrisi **(2.10)**

K Dinamik kontrol edici ise :

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_k y(t) \\ u(t) &= C_k x_k(t) + D_k y(t) \end{aligned} \quad \text{yada} \quad \mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_K} & \mathrm{B_K} \\ \mathrm{C_K} & \mathrm{D_K} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.11)}$$

şeklinde verilir.

Tzw , w vektör girişlerinden z vektörü çıkışlarına ilişkin transfer fonksiyonu matrisi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}x_{cl} + B_{cl}y \\ z &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl}y \end{aligned} \qquad \textbf{(2.12)}$$

yada buna eşdeğer diğer bir gösterim ise aşağıdaki şekilde verilir.

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Burada,

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.14)}$$

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k \end{bmatrix}$$

$$D_{cl} = D_{12} D_k D_{21}$$

şeklinde verilir ve kısaltmalar,

$$A_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0_k & 0_k \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_0 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.15)}$$

$$D_{21}^{\ T} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{12}^{\ T} \end{bmatrix},\ D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

A_k, B_k, C_k, D_k ise kontrol ediciye ait parametreler olmak üzere tüm parametreleri içeren K kontrol edici matrisi,

$$K_b = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \in R^{(n+k)(n+k)} \qquad \textbf{(2.16)}$$

şeklinde gösterilir.

Bu matrisler kullanılarak da kapalı çevrim matrisleri,

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + BK_bC \quad , \quad B_{cl} = B_0 + BK_bD_{21} \\ C_{cl} &= C_0 + D_{12}K_bC \quad ve \quad D_{cl} = D_{12}K_bD_{21} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.17)}$$

şeklinde yazılır (Gahinet ve Apkarian, 1996; Bambing ve diğ., 1991).

Görüldüğü üzere kapalı çevrim sisteminin parametreleri, kontrol ediciye ilişkin K_b matris değişkenine bağlıdır (Gahinet, 1993; Scherer, 1990).

H_∞ optimal kontrol problemi dört varsayım altında incelenir:

1) (A, B_2, C_2) matris üçlüsü kararlılaştırılabilir ve sezilebilir. Bu varsayım çıkış geribeslemesi ile P çok girdili çok çıktılı kontrol edilen sistem G ' nin kararlılaştırılabilmesi için gereklidir.

2) D_{12} tam sütun ranklı ve D_{21} tam satır ranklı olmalıdır.

3)

$$rank\begin{bmatrix} A-jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n+m_2 \ , \ rank\begin{bmatrix} A-jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n+p_2$$ olmalıdır.

4) D_{22}=0 olmalıdır.

Bu varsayımlar, H_∞ kontrol probleminde elde edilen iki Riccati denkleminin çözülebilmesi için gereklidir Doyle ve diğ. (1993),(1994).

Genel H_∞ optimal kontrol problemini daha basit hale getirmek için yukarıdaki dört varsayıma iki varsayım daha ilave edilir Bu durumda genel problem, alışılmış genel probleme dönüşür:

5) $D_{11} = 0$

6) $D_{12}{}^T[D_{12} \quad C_1] = [I \quad 0]$ *ve* $D_{21}[D_{21}{}^T \quad B_1{}^T] = [I \quad 0]$ ilişkileri sağlanmalıdır.

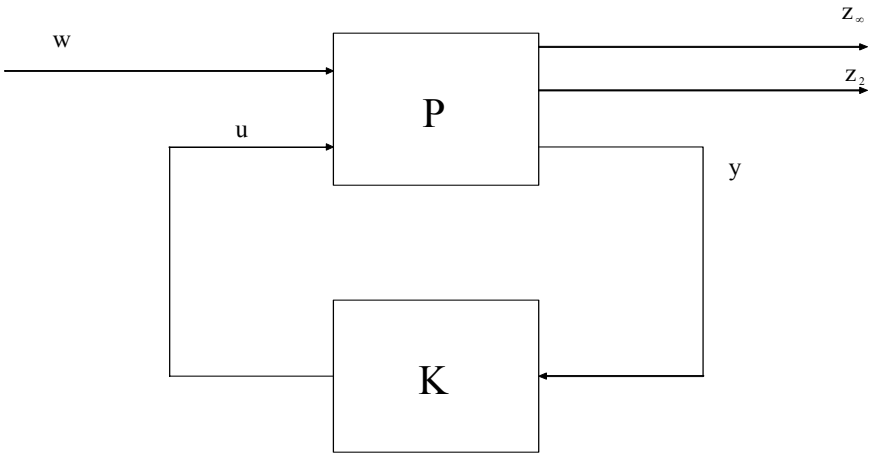
Kontrol problemine Lineer Matris Eşitsizliği (LMI) yaklaşımı, altı adet varsayımdan sadece birkaçını kullanmayı gerektirir.

Sınırlı boyutlu bir LTI sistemi için, gerekli olan bu varsayımlar şunlardır.

1) *(A, B_2, C_2)* kararlılaştırılabilir ve sezilebilir olmalıdır.

2) D_{22}=0 basitlik açısından alınabilir ancak zorunlu değildir. Görüldüğü üzere LMI yaklaşımında varsayım sayısı, en fazla ikiyi geçmez (Gahinet, 1993; Chilali ve Gahinet, 1994).

2.3 Karma Problem Gösterim



Şekil 2.6: Karma H_2 / H_∞ kontrol problemine ilişkin blok diyagramı.

Kontrol edilen sistem ve kontrol edicinin durum uzayı denklemleri ve matrisel gösterimleri aşagıda verilmiştir. z kontrol edilen değişken vektörü, z=[z_∞ z_2] ^{T} şeklinde z_1 ve z_2 çıktılarından oluşmaktadır. z_1 ve z_2 çıktıları, sırasıyla H_∞ *ve* H_2 davranış ölçütlerine ait çıktılardır.

$z_\infty(t) \in R^{p_1}$, $z_2(t) \in R^{p_2}$, $z_{2g}(t) \in R^{p_3}$, $w(t) \in R^{m_1}$, $u(t) \in R^{m_2}$ olmak üzere modelde yer alan matrisler uygun boyutlu matrislerdir.

P çok girdi çok çıktılı kontrol edilen sistem, şu şekillerde gösterilir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_1 &= C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y &= C_y x + D_{y1} w + D_{y2} u \end{aligned} \qquad \textbf{(2.18a)}$$

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_\infty & D_{\infty 1} & D_{\infty 2} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \\ C_y & D_{y1} & D_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.18b)}$$

T_{zw} kapalı çevrim kontrol sistemi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z_\infty &= C_{cl_1} x + D_{cl_1} w \\ z_2 &= C_{cl_2} x + D_{cl_2} w \end{aligned} \qquad \textbf{(2.19)}$$

şeklinde durum değişkenleri gösterimi verilir.

2.4 Yardımcı Teorem I : Schur Tamlayanı

Blok matrislerin kesin eksi ve kesin artı olmasına ilişkin koşullar, şu şekildedir.

Blok matris olarak tanımlanan

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Z 'nin kesin eksi olması için gerek ve yeter koşul; Z_3 , tersi alınabilir ise

$$\begin{aligned} Z_3 &< 0 \\ Z_1 - Z_2 Z_3^{-1} Z_2^T &< 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

matris eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. $(Z_1-Z_2Z_3^{-1}Z_2^T)$, Z_3 'ün Schur tamlayanı olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, Schur tamlayanı (2.7) şeklinde sağlanırsa, sözkonusu Z<0 blok matris eşitsizliği mevcuttur (Gahinet, 1994).

Z 'nin kesin artı olması durumu için tüm '<'işaretleri yerine '>' işareti konularak elde edilen koşullar geçerlidir. Bu özellikten yararlanarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} Z_3 < 0 \\ Z_1 - Z_2 Z_3^{-1} Z_2^T < 0 \end{cases} \\ Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 < 0 \\ Z_3 - Z_2^T Z_1^{-1} Z_2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} Z_3 > 0 \\ Z_1 - Z_2 Z_3^{-1} Z_2^T > 0 \end{cases} \\ Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^T & Z_3 \end{bmatrix} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 > 0 \\ Z_3 - Z_2^T Z_1^{-1} Z_2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.5 Lineer Matris Eşitsizlikleri

Bir LMI, (2.7) ifadesi biçiminde bir matris eşitsizliğidir.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{2.23}$$

Burada, $x \in R^m$ bir değişkendir, i=0….,m simetrik $F_i = F_i^T \in R^{nxn}$ matrisler için (2.7) eşitsizliği, F(x) 'in kesin artı olduğu anlamına gelmektedir.

Değişkenlerin matris olduğu problemlerde kullanılan matris eşitsizliklerinin her biri, (2.7) yapısında yazılabilir. Bunlardan biri olan Lyapunov eşitsizliği,

$$A^T X + XA < 0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

şeklindedir. Burada, A verilen bir sistem matrisidir ve $X = X^T$ simetrik bir değişken matristir.

2.5.1 Bir Lineer Matris Eşitsizliği : Lyapunov Eşitsizliği

Herhangi bir Lineer Matris Eşitsizliği (LMI) aşağıda belirtien kanonik şekilde ifade edilebilir.

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2\ F_2\ + ... + x_N F_N < 0 \qquad \textbf{(2.25)}$$

Burada $F_0, F, ..., F_N$ 'ler bilinen matrisler ve $x_1, x_2, ... x_N$ belirlenecek olan skalar değişkenlerdir. x_i skalar değişkenleri $x = [x_1, x_2, ... x_N]^T \in R^N$ şeklinde tanımlanan vektörün bileşenleri olarak da düşünülebilir.

Bu değişkenler, teknik yazımda, bazen tasarım değişkenleri, bazen karar ve bazen de optimizasyon değişkenleri olarak adlandırılır.

Kanonik ifade genel olmasına rağmen, LMI kontrol uygulamalarında bu biçimdeki matris eşitsizliklerine rastlanır. Örnek olarak aşağıda verilen Lyapunov Eşitsizliği (LI)'yı düşünelim:

$$A^T X + XA < 0 \qquad \textbf{(2.26)}$$

Burada, $A \in R^{nxn}$ bilinen matris ve X bilinmeyen simetrik bir matristir (Gahinet ve diğ., 1995; Boyd ve diğ., 1994).

Bilinen A ve X matrisini,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = X^T > 0$$

olduğunu varsayalım. Buradaki optimizasyon değişkenleri : X değişken matrisinde yer alan x_1, x_2, x_3 'dür ve R_1=R=I için bir Lyapunov eşitsizliği, özel bir lineer matris eşitsizliğidir.

Lyapunov türü fonksiyonlar, karesel ifadesiyle $V(x)=x^TXx$ şeklinde verilir. X, gerçel, simetrik, artı tanımlı matrisdir. J davranış ölçütündeki integrali alınan karesel ifade, u=Kx statik geribesleme durumunda $x^TR_1x+ u^TR_2u = x^TR_1x+ (Kx)^TR_2Kx$ şeklindedir. Lyapunov fonksiyonu , J davranış ölçütü ile aynı olacak şekilde tanımlanabilir. $dV/dt=1/2(x^TR_1x+ u^TR_2u =1/2 (x^TR_1x+ (Kx)^TR_2Kx))$ şeklinde olur. $V(x)=x^TXx$ 'in türevi alınır ve elde edilen eşitlikler kullanılır ve de J 'nin K'ya göre türevinde optimal K ifadesi belirlenir (Anderson ve Moore ,1990). Tüm bunlar kullanıldığında,

$$A^T X + XA - XB (R_1)^{-1} B^T X + R_2 = 0 \qquad \textbf{(2.28)}$$

şeklinde cebirsel Riccati eşitliği bulunur.
Eşitsizlik durumunda,

$$A^T X + XA - XB (R_1)^{-1} B^T X + R_2 < 0 \qquad \textbf{(2.29)}$$

şeklinde yazılır. Burada, A, B matrisleri ile R_1, R_2 simetrik matrisleri verilen uygun boyutlu matrisler ve X ise simetrik bir değişken matristir. (2.29) eşitsizliği, X değişken matrisine göre karesel matris eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik Lineer Matris Eşitsizliği (LMI) olarak tanımlanabilir. $X = X_{cl}$ olmak üzere X, kapalı çevrimli sisteme ilişkin LMI ifadesinde bir değişkendir.

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + R_2 & -XB \\ -B^T X & -R_1 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{yada}$$

$$\begin{bmatrix} -A^T X - XA - R_2 & XB \\ B^T X & R_1 \end{bmatrix} > 0 \qquad \textbf{(2.30)}$$

Gerek Lyapunov Eşitsizliği (LI) ve gerekse ARI şeklindeki kısıtlamaların çözüm matrisleri, simetrik matrislerdir. Bilinmeyen simetrik X matrisinin $\frac{n(n+1)}{2}$ tane

serbest değişkeni vardır. Bu değişkenlerden oluşan x vektörü, karar yada optimizasyon vektörüdür. Bu vektör yukarıda açıklanan genel LMI probleminde gösterilen x vektörüne karşı düşer. Böylece optimal kontrol problemlerinde sıkça kullanılan ve büyük önem arzeden LI ve ARI 'lar daha önce açıklanan genel problemlere dönüştürülebilir.

Amaç ölçütü olarak,

$$J = Trace\ (X) \tag{2.31}$$

olsun. Lyapunov matris eşitsizliğinde kullanılan parametre değişkenlerinden oluşturulan X matrisi simetrik olduğundan, bu matris simetrik ve kesin artı olduğundan, $X = X^T > 0$ olarak yazılır. LMI optimizasyon problemi, J amaç ölçütlerini LMI kısıtlaması altında minimize ederek belirlenmesi olarak tanımlanabilir. Bu amaç için 'LMI Control Toolbox'' programları geliştirilmiştir (Gahinet ve diğ., 1995).

A matrisinin boyutu n=3x3 olduğundan optimizasyon değişkenleri sayısı, $N = \frac{n(n+1)}{2} = 6$ 'dir. n=3 ise ve Lyapunov matris eşitsizliğinde kullanılan parametre değişkenlerinden oluşturulan X matrisi simetrik olduğundan, bu matris ise

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = X^T > 0 \tag{2.32}$$

şeklinde yazılır. n=3 için matriste nxn=3x3=9 eleman olacaktır. Ancak simetriden dolayı, X matrisinde N=6 olduğundan 6 farklı optimizasyon elemanı bulunur. Böylece, ele alınan örnekte optimizasyon değişkenlerinin tanımladığı x vektörü ve LMI, $x = [x_1, x_2, ..., x_6]^T$ olmak üzere (2.28) matris eşitsizliği şeklinde belirlenir.

Diğer bir matris eşitsizliği, (2.29) ifadesinde verilen Cebirsel Riccati Eşitsizliği (Algebraic Riccati Inequality, ARE) yada Karesel Matris Eşitsizliği (Quadratic Matrix Inequality, QMI) dir.

2.6. LMI ile H_∞ Problemlerinin Çözülebilirliği

LMI ile H_∞ problemlerinin çözülebilirliği için gerekli koşullar aşağıdaki yardımcı teoremlerle verilmiştir. H_∞ optimale yakın çözümlerin sağladığı kısıtlar, matris eşitsizliklerine sınırlı gerçel yardımcı teorem yardımı ile dönüştürülür. Kapalı çevrim parametreleri, kontrol edici parametrelerine ait matris değişkenine bağlıdır.

2.6.1 Yardımcı Teorem I I : Sınırlı Gerçel Yardımcı Teorem

Sınırlı Gerçel Yardımcı Teorem, H_∞ norm kısıtlamalarını bir LMI'ya çeviren bir yardımcı teoremdir. Bu teorem, aşağıdaki ifadeler arasındaki eşdeğerliği kanıtlar. Bundan yararlanarak γ üst sınırlı olan karesel H_∞ norm davranış ölçütüne ilişkin LMI eşdeğeri ifade edilebilir. Böylece dayanıklı kararlılık ölçütünü tanımlayan H_∞ normu üzerindeki kısıtlamalar, bir LMI'ya dönüştürülmüş olur.

A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} , D_{cl} kapalı çevrim sistemine ilişkin uygun boyutlu, sabit elemanlı matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i) A_{cl}, kararlı bir matris ise

$$T_{zw} = \left\| C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} + D_{cl} \right\|_\infty < \gamma \qquad \textbf{(2.33)}$$

dir.

ii) $\gamma^2 I - D_{cl}^T D_{cl} > 0$ ise

$$A_{cl}^T X + XA_{cl} + (XB_{cl} + C_{cl}^T D_{cl})(\gamma^2 I - D_{cl} D_{cl}^T)^{-1}(B_{cl}^T X + D_{cl}^T C_{cl}) + C_{cl}^T C_{cl} < 0 \qquad \textbf{(2.34)}$$

eşitsizliğini sağlayan kesin artı ve simetrik bir X matrisi vardır.

Bu yardımcı teoremin kanıtı, Zhou ve Khargonekar (1988) tarafından verilmiştir. Scherer (1990) 'ın makalesindeki yardımcı teorem kullanılarak üçüncü eşdeğer ifade verilebilir.

iii) Aşağıdaki Lineer Matris Eşitsizliğini (LMI) 'yı sağlayan

$$\begin{bmatrix} A_{cl}{}^{T} X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}{}^{T} \\ B_{cl}{}^{T} X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}{}^{T} \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(2.35)}$$

simetrik bir $X_{cl} > 0$ matrisi vardır.

Bu yardımcı teorem kullanılarak, Şekil 2.1 'de verilen kapalı çevrim kontrol sisteminin T_{zw} transfer matrisine ilişkin (A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} ve D_{cl}) parametre matrisleri belirlenebilir. Böylece, (2.35) matris eşitsizliğini sağlayan simetrik $X_{cl}>0$ ve $X_{cl} \in R^{(n+k)(n+k)}$ matrisinin bulunması ile kontrol ediciler belirlenir.

Bir sonraki yardımcı teorem, LMI 'lerle kontrol edici tasarımı yaklaşımında bir anahtar görevini üstlenir.

2.6.2 Yardımcı Teorem III

$W_P = KerX_P$ ve $W_Q = KerX_Q$ olacak şekilde W_P ve W_Q matrisleri sırasıyla P ve Q 'nın sıfır uzaylarının tabanlarını, sütunlarıyla oluşturan birer matris olsun. K_p kontrol edici matrisini belirlemek amacı ile aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu K_p matrislerini bulmak için aşağıdaki koşul kullanılır.

$$\Psi + X_P{}^{T} X_K X_Q + X_Q{}^{T} X_K{}^{T} X_P < 0 \qquad \textbf{(2.36)}$$

(2.36) matris eşitsizliğindeki X_K'nın çözülebilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned} W_P^T \Psi W_P < 0 \\ W_Q^T \Psi W_Q < 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.37)}$$

matris eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. Bu yardımcı teoremin kanıtı, Gahinet ve Apkarian (1994)'da verilmiştir.

2.6.3 Teorem

γ kısıt değeri , uygun seçilen bir pozitif sayı olsun. Kontrol edicinin mertebesi k, sistemin mertebesi n 'e eşit yada küçük olması halinde kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlı ve $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki matris eşitsizliklerini sağlayan $R > 0$ ve $S > 0$ kesin artı matrislerin var olmasıdır (Gahinet, 1993).

$$\begin{aligned} &\theta_R{}^T \Omega_R \theta_R < 0 \\ &\theta_S{}^T \Omega_S \theta_S < 0 \\ &\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.38)}$$

2.6.4 Teorem

Sürekli zaman kontrol sistemlerinde γ kısıtlı H_∞ LPV kontrol problemi, ancak ve ancak (2.39), (2.40) ve (2.41) matris eşitsizliklerini sağlayan R ve S matrislerinin var olması halinde çözülebilir.

$$\begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i R + R A_i^T & R C_{i1}^T & B_{1i} \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1,2,....,N \qquad \textbf{(2.39)}$$

$$\begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i{}^T S + S A_i & S B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{i1} & D_{11} i & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1,2,....,N \qquad \textbf{(2.40)}$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \textbf{(2.41)}$$

Burada, N_R ve N_S; (B_2^T, D_2^T) *ve* (C_2, D_{21}) 'in sırasıyla sıfır uzaylarının tabanlarını verir (Gahinet ve Apkarian, 1994).

İspat:

Zamanda sürekli sistemlerde $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ kısıtını sağlayan γ kısıtlı H_∞ kontrol problemi, ancak ve ancak yukarıdaki matris eşitsizliklerini sağlayan simetrik R, S matrislerinin var olması halinde çözülebilirdir. Başka bir deyişle, k<n indirgenmiş mertebeli olan ve $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ kısıtını sağlayan kontrol edicilerin varlığı ancak ve ancak *rank(I-SR) < k* eşitsizliğini sağlayan *R,S* simetrik matrislerinin (2.23)-(2.24) matris eşitsizliklerini de sağlaması ile mümkündür. Böylece indirgenmiş *k* boyutlu bütün *K* kontrol edicilerinin parametreleri aşağıda verilen matris eşitsizlikleri yardımı ile belirlenir.

İkinci bölümdeki yardımcı kuramlardan aşağıdaki matris eşitsizliği

$$\Psi X_{cl} + Q^T \Theta^T P D X_{cl} + D X_{cl} P^T Q < 0 \qquad \textbf{(2.42)}$$

şeklinde elde edilir.

Burada, eğer *k = 0* ise $X_{cl} = S$ dir. *k > 0* ise

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} S & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}{}^T & \Psi_{22} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.43)}$$

ψ_{12} ve ψ_{22} ise aşağıdaki eşitlikten çıkarılır. Bazı $\psi_{22} > 0$ için $\Psi_{12}\Psi_{22}{}^{-1}\Psi_{12}{}^T = S - R^{-1}$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} &P := \begin{bmatrix} B^T & 0 & D_{12}^T \end{bmatrix} \ , \ Q := \begin{bmatrix} C & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ &DX_{cl} = Diag\begin{bmatrix} X_{cl} & I & I \end{bmatrix} = DX_{cl}{}^T \ , \ DX_{cl}P^T = DX_{cl}{}^T P^T = (DX_{cl}P)^T \end{aligned} \qquad \textbf{(2.44)}$$

ve

$$\Psi x_{cl} = \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.45)}$$

şeklindedir (Gahinet,1993).

Sadece X_{cl} 'yi içeren koşullar elde etmek istenirse kontrol edici değişkeni K, yardımcı teoremler kullanılarak yok edilebilir. W_p ve W_q sütunları sırası ile *p* ve *q*

nin sıfır uzaylarını tarayan matris olsun. PDX_{cl} 'nin sıfır uzayı, $DX_{cl}^{-1}W_p$ olduğundan

$$\Psi X_{cl} + Q^T K^T P D x_{cl} + D X_{cl} P^T X Q < 0$$

(2.46)

ifadesi, aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $X_{cl}>0$ matrisinin varlığı durumunda (2.29) ifadeleri şeklinde iki koşula indirgenir.

$$W_Q^T \psi_{X_{cl}} W_Q < 0$$

(2.47)

Bu, iki koşulu basitleştirmek için, X_{cl} ve X_{cl}^{-1} ayrışımı aşağıdaki bağıntıyla gösterilebilir.

$$X_{cl} := \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & * \end{bmatrix} \quad , \quad X_{cl}^{-1} := \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & * \end{bmatrix}$$

(2.48)

Burada, $R,S \in R^{nxn}$ ve $M,N \in R^{nxk}$ 'dir. (B_2^T, D_{12}^T) ' nın sıfır uzayının $N_R=[W_1 \quad W_2]^T$ dik normal bir tabanı olarak alınarak ve Ker P sıfır uzayının bir tabanı, bu durumda

$$W_P = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{m1} \\ W_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.49)

olduğu görülerek (2.15) ifadesindeki eşitsizlik, aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür (Gahinet,1994).

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i R + R A_i^T & R C_{i1}^T & B_{1i} \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \ , \ i = 1,2,....,N$$

(2.50)

2.7 Kutup Atama Kısıtlamasının LMI ile modellenmesi

LMI 'lar yardımı ile kutup atama bölgeleri tanımlanarak LMI bölgeleri belirlenir. Bu yaklaşım yeni bir Lyapunov tanımı getirir. D LMI bölgesinin, karmaşık sol yarı düzlemde bir alt bölge olduğunu varsayalım. Sistemin tüm kutupları D 'de ise, bu sisteme D-kararlı bir sistem denir. Başka deyişle, bu durumda sistem matrisi A'nın tüm özdeğerleri D bölgesinde yer alır. Sistem matrisi A 'da D kararlıdır. D alt bölgesi, tüm sol yarı karmaşık düzlem ise, D kararlılığı LMI terimleriyle tanımlanan klasik kararlılığa diğer bir deyişle, D- kararlılık tanımı Lyapunov kuramının LMI terimleri ile asimptotik kararlılığa indirgenmiş olur. Özellikle, A matrisinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned} A^T X + XA < 0 \\ X > 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.51)}$$

olan Lyapunov matris eşitsizliğini sağlayan simetrik bir X matrisinin var olmasıdır. Bu şekilde, kararlılığın Lyapunov kuramıyla tanımı Gutman (1981)'in çeşitli kararlılık bölgelerine genişletilebilir. Bu bölgeler, aşağıdaki biçimde çok terimli ifadelerle tanımlanan bölgelerdir.

$$D = \left\{ z \in C;\ \sum_{0 \le k,l \le m} c_{kl} (z)^k (\bar{z})^l < 0 \right\} \qquad \textbf{(2.52)}$$

Burada, c_{kl} katsayıları gerçeldir ve $c_{kl} = c_{lk}$ özelliğini sağlar. Çok terimli ifadelerle tanımlanan bölgeler en genel bölgeler değildir. Çünkü bazı bölgeler bu çokterimli biçimde gösterilemez. Çok terimlilerle ifade edilen bölgelerde Gutman (1980) 'ın temel kuramı geçerlidir:

Bir sistemin A matrisinin D kararlılığı, ancak ve ancak

$$\sum_{k,l} c_{kl} A^k X (A^T)^l < 0 \qquad \textbf{(2.53)}$$

eşitsizliğini sağlayan X matrisinin var olması ile mümkündür.

Burada (2.34) 'de $(z)^k(\bar{z})^l$ çarpanı, $A^k X (A^T)^l$ ile değiştirerek (2.35) ifadesi elde edilir. Lyapunov kuramı, bu teoremin özel bir durumuna karşı düşer. Özel birkaç

durum haricinde (2.35) ifadesini LMI 'ya dönüştürmenin sistematik bir yolu yoktur. Bu yüzden D- kararlılık bölgesinin alternatif bir LMI tabanlı bir gösterimini aramak gerekir.

2.7.1. LMI bölgeleri

D kararlılık bölgesi, $\alpha = [\alpha_{k,l}] \in R^{mxn}$ ve $\beta = [\beta_{k,l}] \in R^{mxn}$ simetrik matrisler olmak üzere

$$D = \{z \in C : f(z) < 0\} \quad \textbf{(2.54)}$$

olarak tanımlanır ve karmaşık düzlemin bir alt kümesidir. Burada, karakteristik fonksiyon $f_d(z)$,

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl} z + \beta_{lk} \bar{z}]_{1 \le k,l \le m} \quad \textbf{(2.55)}$$

olarak tanımlanır. Karakteristik fonksiyon nxn boyutlu Hermit matrisleri uzayından değer alır.

Başka deyişle bir LMI bölgesi, z ve $\bar{z}$ 'ye bağlı olarak yada x=Re(z) ve y=Im(z)'ye bağlı olarak bir LMI 'la gösterilen karmaşık düzlemin bir alt kümesidir. LMI bölgeleri dışbükeydir. Her z $\in$ D için $f_D(\bar{z}) = \overline{f_D(z)} < 0$ olduğundan LMI bölgeleri gerçel eksene göre simetriktir. $\otimes$ sembolü Kronecker çarpımını belirtmek üzere, özellikle verilen bir LMI bölgesine kutup yerleştirme yöntemi, mxm boyutlu blok matrisleriyle şu şekilde ifade edilir:

$$M_D(A,X) := \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T = [\alpha_{kl} X + \beta_{kl} AX + \beta_{lk} AX^T]_{1 \le k,l \le m} \quad \textbf{(2.56)}$$

2.7.2 Teorem

Bir sistem matrisi A, ancak ve ancak

$$M_D(A,X) < 0, \quad X > 0 \quad \textbf{(2.57)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir X matrisinin varlığı halinde D kararlıdır. Chilali ve Gahinet (1996), $M_D(A,X)$ ile $f_D(z)$ birbirinden elde edilebilir. $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$ yer değiştirmek suretiyle birbirlerine bağlantılıdır. Bir LMI bölgesinin karakteristik fonksiyonu biliniyorsa buradan bu bölgeye ait LMI tanımlaması yapılabilir. LMI

bölgeleri, kontrol amaçlı bir çok pratik gereksinimleri karşılar. Daha karmaşık bölgeleri, LMI bölgeleri olarak tanımlayabiliriz. LMI bölgeleri küme arakesitleri altında değişmezdir. Özel olarak verilen iki LMI bölgesi, D1 ve D2 ve ilgili karakteristik fonksiyonları f_{D1} ve f_{D2} olsun. $D=D_1 \cap D_2$ arakesit bölgesi, yine bir LMI bölgesidir. Karakteristik fonksiyonu ise $f_{D1 \cap D2} = \text{diag}\,(f_{D1}, f_{D2})$ şeklindedir.

2.7.3 Sonuç

Verilen iki LMI bölgesi D_1 ve D_2 olsun. $M_{D1}(A,X) < 0$ ve $M_{D2}(A,X) < 0$ matris eşitsizliklerini sağlayan ancak ve ancak kesin pozitif bir X matrisinin var olması halinde A matrisi, hem D_1 kararlı hem de D_2 kararlıdır.

Tanım olarak,

$$f_D(z) \leftrightarrow M_D(A,X) \text{ ve } (1, z, \bar{z}) \leftrightarrow (X, AX, XA^T) \qquad \textbf{(2.58)}$$

şeklinde yazılır.

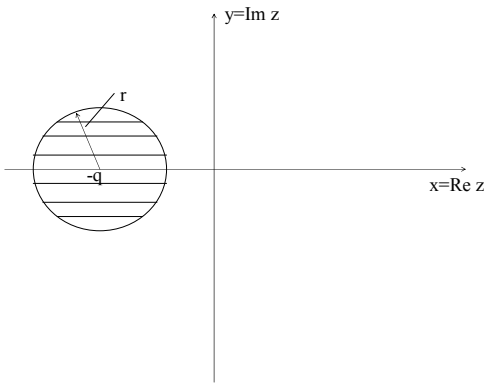
Buradan da

$$\left[\alpha_{kl} + \beta_{kl} z + \beta_{lk} \bar{z}\right]_{1 \le k,l \le m} \leftrightarrow \left[\alpha_{kl} X + \beta_{kl} AX + \beta_{lk} AX^T\right]_{1 \le k,l \le m} \qquad \textbf{(2.59)}$$

şeklinde olduğu görülür.

2.7.4 Bazı basit LMI bölgeleri

a) (-q,0) merkezli ve r yarıçaplı dairesel bir LMI bölgesi:



Şekil 2.7 : (-q,0) merkezli, r yarıçaplı LMI bölgesi.

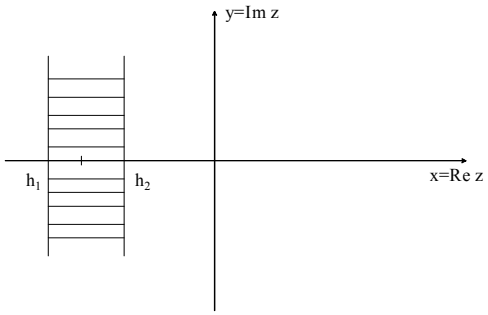
Bu bölgeyi LMI ile ifade etmek için önce karakteristik fonksiyonu $f_D(z)$ bulunur.

r yarıçaplı bir dairenin ifadesi, $(x+q)^2 + y^2 < r^2$ şeklindedir. $z=x+jy$ ve $\bar{z}=x-jy$ oluşturacak şekilde bu ifade düzenlenirse, $(z+q)(\bar{z}+q) - r^2 < 0$ eşitsizliği matris eşitsizliği olarak karşılığı yazıldığında $f_D(z)$,

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -r & \bar{z}+q \\ z+q & -r \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(2.60)}$$

şeklinde bulunur.

b) Dikey bölgesel şerit: h_1 ve h_2 dikmeleri arasındaki bir LMI bölgesi,



Şekil 2.8 : Sol yarım karmaşık düzlemde dikey şeritli LMI bölgesi.

h_1 ve h_2 dikmeleri,

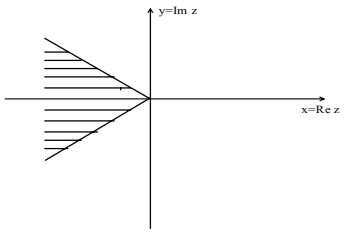
$$h_1\text{-}x<0$$
$$x\text{-}h_2<0 \qquad \textbf{(2.61)}$$
$$z=x+jy \text{ ve } \bar{z}=x-jy$$

eşitsizlikleri ile tanımlanır. Matris eşitsizliği olarak yazıldığında bu bölgeye ait karakteristik fonksiyon $f_D(z)$,

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} 2h_2 - (z+\bar{z}) & 0 \\ 0 & (z+\bar{z}) - 2h_2) \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(2.61)}$$

olarak elde edilir.

c) Konik Bölge : (0,0) merkezli ve θ açılı bir LMI bölgesi



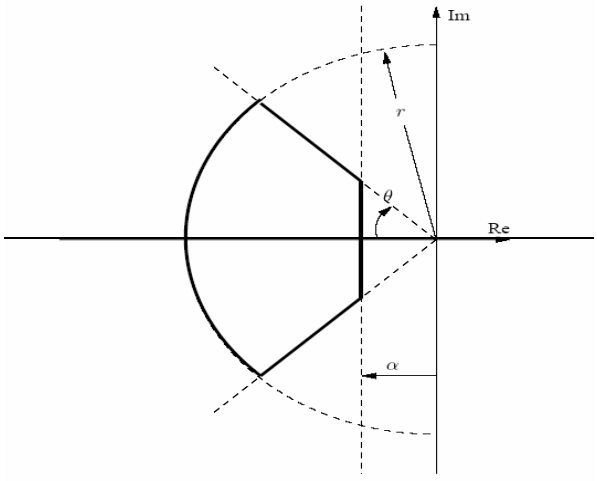
Şekil 2.9 : Sol yarım karmaşık s düzleminde konik LMI bölgesi.

Konik sektörde doğruların belirlediği alanların arakesiti olan bölge olarak elde edilir. Bu doğruların belirlediği bölgelere ait ifadeler yazılır, arakesiti olan bölgeye ait ifade çıkarılır ve de z ve $\bar{z}$ 'ye göre düzenlenirse: konik sektöre ait karakteristik fonksiyon $f_D(z)$,

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} (z+\bar{z})\sin\frac{\theta}{2} & -(z-\bar{z})\cos\frac{\theta}{2} \\ (z-\bar{z})\cos\frac{\theta}{2} & (z+\bar{z})\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(2.62)}$$

şeklinde bulunur.

Herhangi bir LMI bölgesi, konik sektörler, dikey şeritler ve yatay şeritlerin bir arakesiti olabilir. Seçilen LMI bölgesi, birkaç LMI bölgesinin arakesitiyle oluşturulan kutup atama bölgesi olarak şu şekildedir.



Şekil 2.10 : Bölge S(α ,r,θ): sol yarım s-düzleminde bir LMI bölgesi.

Kontrol amaçlı ilginç bir bölge, karmaşık sayılar z=x+jy 'nin S(α ,r,θ) kümesidir. Bölge, $x < -\alpha < 0$, $|x+jy| < r$, $\tan\theta x < -|y|$ eşitsizliklerini sağlar. Bu eşitsizliklerin ortak noktaları LMI bölgesini tanımlar. Seçilen bölge özelliğinden sistem çıkış davranışının istenilen bir sönüm $\xi = \cos\theta$, azalma hızı ve $w_n = r\sin\theta$ doğal açısal frekansı sağlayacağı görülmektedir. Böylece klasik kontrol kuramında, birim basamak girişine çıkış davranışından istenilen; yükselme zamanı, aşım, yerleşme zamanı, gecikme zamanı gibi geçici hal davranış özellikleri sağlanmış olur. Seçilecek LMI kararlılık bölgesi, bazı basit LMI bölgelerinin arakesiti olarak seçilebilir. Sistem ise tüm bu alt bölgelerin gerçekleşmesi halinde D-kararlı olur.

2.7.5 Kutup atama kısıtlaması

Bir kapalı çevrim kontrol sisteminin matrisi A_{cl} , olarak verilmiş olsun. Sistem kutuplarının $D = \{ z \in C : L + Mz + M^T \bar{z} < 0 \}$ olarak tanımlanan D LMI bölgesi içinde olması için gerek ve yeter koşul,

$$\left[\lambda_{ij} X_{pol} + \mu_{ij} A_{cl} X_{pol} + \mu_{ij} X_{pol} A_{cl}^T \right]_{1 \le i,j \le m} < 0 \qquad \textbf{(2.63)}$$

matris eşitsizliğini sağlayan simetrik X matrisinin var olmasıdır. Burada, $L = L^T = \left[\lambda_{ij} \right]_{1 \le i,j \le m}$, $M = \left[\mu_{ij} \right]_{1 \le i,j \le m}$ şeklindedir (Gahinet ve diğ., 1995).

2.8. Kontrol Girişi Kısıtlaması

Literatürde kontrol edici tasarımı çalışmalarında, diğer kısıtlar yanında kontrol işareti genliğinin sınırlanması belirgin bir şekilde ele alınmamıştır. Kontrol edilen sisteme uygulanan u(t) kontrol girişinin büyük olmasını önlemek için, kontrol işareti kısıtlaması gereklidir. Amaç, u kontrol genliği kısıtlamalı bir optimal kontrol edici tasarlamaktır. Kontrol işareti genliği kısıtlamasında H_2 normu kullanılır.

H_2, H_∞ kontrol kuramı, belirli özellikte girişleri olan kontrol sistemlerinin davranışlarıyla ilşkilidir. Belirli özellikte olan girişler, belirli bir giriş kümesinin elemanlarıdır. W ile gösterilen bu küme, Lebesque anlamında karesi integre

edilebilen ve $\infty < t < \infty$ aralığında tanımlanan fonksiyonların kümesidir (Desoer ve Vıdyasagar, 1975). Bu fonksiyonlar kümesi,

$$\forall\, w(t) \in W,\ \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^{T} w(t)\, dt < \infty \qquad \textbf{(2.64)}$$

ifadesini sağlar. Burada W lineer bir uzaydır. Bu uzaydaki, her elemanın büyüklüğünü ölçmek için w üzerinde L_2 normu,

$$\|w(t)\|_2^{\,2} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)^{T} w(t)\, dt < \infty \qquad \textbf{(2.65)}$$

olarak tanımlanır. Hardy uzayları ise bu uzayların $t > 0$ için tanımlanır. Özellikle w(t) 'nin H_2 normu,

$$\|w(t)\|_2^{\,2} = \int_{0}^{\infty} w(t)^{T} w(t)\, dt < \infty \qquad \textbf{(2.66)}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $T_{zw} = [A,B,C,D]$ parametre matrisleri ile tanımlanan ve kararlı olan kapalı çevrimli bir kontrol sisteminin transfer fonksiyonu matrisi olduğunu varsayalım. Z uzayı W giriş uzayına ilişkin T_{zw} 'nin çıkış işareti uzayıdır. Bu uzayda, Z uzayı da lineer bir uzaydır. Bu uzayda H_2 normu tanımlanabilir (Desoer ve Vidyasagar, 1975).

$$\|T_{zw}\|_2 \triangleq \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_2} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z(t)\|_\infty \leq \nu$$

$$\|z(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |z(t)| \qquad \textbf{(2.67)}$$

z 'nin L_∞ normu ise şu şekilde tanımlıdır.

$$\sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z(t)\|_\infty = \sup_{\|w\|_2} \sup_{t \geq 0} |z(t)| \qquad \textbf{(2.68)}$$

Burada, z(t) $\in$ Z 'dir. Buna göre z 'nin L_∞ normu, $z_{\max} = \sup_{t \geq 0} |z(t)| < \nu$ ile

$$\sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z(t)\|_\infty = \sup_{\|w\|_2} \sup_{t \geq 0} |z(t)| \leq \nu \qquad \textbf{(2.69)}$$

şeklinde ifadesi elde edilir. Neticede z çıkış vektörünün en büyük genliği üzerine bir kısıtlama elde edilir.

2.9 Tasarım Kısıtlarının LMI'larla Modellenmesi

Bir kapalı çevrim kontrol sistemin Şekil 2.1'deki genel gösteriminde, kontrol edilen sistem ve kontrol edicinin durum uzayı denklemleri ve matrisel gösterimleri aşagıdaki şekilde verilmiştir.

P : Kontrol edilen sistem, şu şekilde gösterimleri vardır.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= Cx + D_1 w + D_2 u \\ y &= C_y x + D_y w \end{aligned} \qquad \textbf{(2.70)}$$

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \\ C_y & D_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.71)}$$

K: Statik kontrol edici ise,

u(t)=Kx(t) , K: Kazanç Matrisi **(2.72)**

K : Dinamik kontrol edici ise,

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k x_k(t) + B_k y(t) \\ u(t) &= C_k x_k(t) + D_k y(t) \end{aligned} \quad \text{yada} \quad \mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_K} & \mathrm{B_K} \\ \mathrm{C_K} & \mathrm{D_K} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.73)}$$

şeklinde verilir.

T_{zw} , w vektör girişlerinden z vektörü çıkışlarına ilişkin transfer fonksiyonu matrisi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}x_{cl} + B_{cl}y \\ z &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl}y \end{aligned} \qquad \textbf{(2.74)}$$

şeklindedir.

Kapalı çevrim kontrol sisteminin tasarım amacını, üç kısıtlama altında açıklanabilir.

1) H_∞ -norm kısıtlaması: Kapalı çevrim sisteminin H_∞ davranışını ifade eder. Sistemin dayanıklı kararlılık derecesini belirler.

2) H_2-norm kısıtlaması: Kapalı çevrim sisteminin H_2 davranışını ifade eder. Bu kısıtlama, minimize edilecek amaç ölçütüne de bir üst sınır vermemizi sağlar. Özellikle bu durum kontrol işaretinin sınırlanmasında, kontrol edilen uygun bir çıkışın seçimi ile pratik bir öneme sahiptir.

3) Kutup atama kısıtlaması: Kapalı çevrim kutuplarının sistemden beklenen geçici cevaplarını da karşılayan bir LMI kararlılık bölgesine atanmasını sağlar. Bu tasarım kısıtlamaları, LMI 'larla modellenebilir.

2.9.1 H_∞ norm kısıtlamasının LMI 'larla modellenmesi

Yukarıda verilen yardımcı teoremden yararlanarak, kapalı çevrim kontrol sistemlerinin transfer fonksiyonları matrisi $\|.\|_\infty$ üzerine bir üst sınır getirmek olanağı vardır. Bir kapalı çevrim kontrol sisteminde w giriş vektöründen z çıkış vektörüne ilişkin transfer matrisi T_{zw} olsun. Kapalı çevrim kontrol sisteminin parametre matrisleri A_{cl}, B_{cl}, C_{cl} ve D_{cl} olsun. Aşağıda verilen

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \ , \quad X > 0 \qquad \textbf{(2.75)}$$

LMI'nın ancak ve ancak simetrik bir X matris çözümü olması halinde

$$T_{zw} = \left\| D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} \right\|_\infty \le \gamma \qquad \textbf{(2.76)}$$

şeklindedir (Chilali ve Gahinet , 1996).

2.9.2 H_2 norm kısıtlamasının LMI'larla modellenmesi

Kapalı çevrim sisteminin w 'den z 'ye transfer matrisi T_{zw} 'nin H_2 normunun ifadesi (D_{cl}=0) olması halinde

$$\|T_2\|_2^2 = Trace(C_{cl} X C_{cl}^T) \quad \textbf{(2.77)}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada X matrisinin sağladığı Lyapunov denklemi, aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A_{cl} X + X A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T = 0 \quad \textbf{(2.78)}$$

Böylece,

$$A_{cl} X + X A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T < 0 \quad \textbf{(2.79)}$$

'nı sağlayan $X > 0$ olan bir X matrisi varsa H_2 performans eşitsizliği, $Y > C_{cl} X C_{cl}^T$ için

$$\|T_{zw}\|_2^2 < Trace(C_{cl} X C_{cl}^T) \quad \textbf{(2.80)}$$

eşitsizliğini sağlar.

Eşdeğer olarak, $\|T_{zw}\|_2^2 < Trace(Y)$ şeklindedir.

$$A_{cl} X + X A_{cl}^T + B_{cl} B_{cl}^T < 0 \ , \ Y > C_{cl} X C_{cl}^T \quad \textbf{(2.81)}$$

matris eşitsizliklerinin Schur tamlayanı özelliği kullanarak Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI) eşdeğerleri yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} A_{cl} X + X A_{cl}^T & B_{cl} \\ B_{cl}^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_{cl} X \\ X C_{cl}^T & X \end{bmatrix} > 0 \quad \textbf{(2.82)}$$

şeklinde elde edilir. Bu LMI 'ları sağlayacak bir X>0 , Y>0 ve ν, seçilen bir sabit olmak üzere, $\|T_{zw}\|_2 < \sqrt{Trace(C_{cl} X C_{cl}^T)} < \sqrt{Trace(Y)} < \nu$ kısıtlamasını garanti eder (Gahinet ve diğ., 1995). Kontrol sistemlerinin kontrol edici tasarımında kullanılan Chilali ve Gahinet (1996) tarafından tanımlanan bir teoremi verelim.

2.9.3 Teorem

Kapalı çevrim kontrol sistemi parametre matrisleri; A_{cl},B_{cl},C_{cl} ve D_{cl}=0 olsun. Kapalı çevrim kontrol sisteminin w giriş vektöründen z çıkış vektörüne transfer matrisi T_{zw} olmak üzere, T_{zw}'nin H_2 normunun seçilen X ve Y simetrik matrislerinin, şu şekilde verilen Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI)'nin çözümleri olması halinde mümkündür (Chilali ve Gahinet,1996).

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & B_{cl} \\ B_{cl}^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_{cl}X \\ XC_{cl}^T & X \end{bmatrix} > 0 \qquad \textbf{(2.83)}$$

$$\sqrt{\text{Trace(Y)}} < \nu$$

2.10 Karma H_2/H_∞ LPV Kontrol Edicinin Statik Geribesleme Durumunda Optimizasyonu

Burada amaç, dinamik olmayan durum geribeslemesi u=Kx halinde LPV H_2/H_∞ kontrol edicinin aşağıda verilen amaç ölçütü ve kısıtlar altında optimal olarak belirlenmesidir.

Karma performans ölçütü,

$$J = \alpha\|T_\infty\|_\infty^2 + \beta\|T_2\|_2^2 \qquad \textbf{(2.84)}$$

olarak tanımlanır. α ve β artı gerçel (pozitif reel) sayılardır. Bu amaş ölçütü, şu üç kısıtlama altında minimize edilir.

1) H_∞ kararlılık kriterini belirleyen $\|T_\infty\|_\infty < \gamma$ eşitsizlik kısıtlaması (γ kısıtlaması)

2) Sol yarım s bölgelerine kutup yerleştirme kısıtlaması

3) H_2 performans normunun $\|T_2\|_2 < \nu$ 'den küçük olması (ν kısıtlaması)

1) ve 2) ' de verilen H_∞ ve H_2 kısıtlamaları,

$$\|T_\infty\|_\infty := \|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma \quad \|T_2\|_2 := \|T_{z_2 w}\|_2 = \sqrt{Trace(Q)} < \nu \qquad \textbf{(2.85)}$$

şeklinde tanımlanır.

Bölüm 2 'de her bir kısıtlamanın LMI modellenmesi verilmiştir. Bu LMI eşitsizliklerinin tümü aynı anda gerçekleneceğinden $X := X_\infty = X_2 = X_{pol}$ alınır. Bu LMI sisteminde $Y=KX$ değişken dönüşümü yapılırsa, çok kısıtlı ve durum geribeslemeli kontrol edici tasarım problemini şu şekilde tanımlanabilir.

H_2/H_∞ kontrol edicinin u=Kx statik durum geribeslemesi halinde matris eşitsizlikleri yardımı ile optimal tasarımı;

$$J = \alpha\|T_\infty\|_\infty^{\ 2} + \beta\|T_2\|_2^{\ 2} \qquad \textbf{(2.86)}$$

amaç ölçütünün, Y, X, Q ve γ^2 üzerinde aşağıda verilen matris eşitsizliklerini sağlamak üzere minimize edilmesiyle gerçekleştirilir. Bu kısıtlamalar,

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_1Y + Y^TB_2^{\ T} & B_1 & XC_1^{\ T} + Y^TD_{12}^{\ T} \\ B_1^{\ T} & -I & D_{11}^{\ T} \\ C_1X + D_{12}Y & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(2.87)}$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2^{\ T}X + D_{22}Y \\ XC_2^{\ T} + Y^TD_{22}^{\ T} & X \end{bmatrix} > 0 \qquad \textbf{(2.88)}$$

$$\left[\lambda_{ij} + \mu_{ij}(AX + B_2Y) + \mu_{ji}(XA^T + Y^TB^T)\right]_{1\le i,j\le m} < 0 \qquad \textbf{(2.89)}$$

$$Trace(Q) < \nu_0^{\ 2} \qquad \textbf{(2.90)}$$

$$\gamma^2 < \gamma_0^2 \qquad \textbf{(2.91)}$$

olarak verilebilir. γ_0 , seçilen bir üst değerdir. Böylece tanımlanan kontrol edici tasarım problemini (X,Y,Q,γ) optimal çözümlerini elde ederek, geribesleme kazancı,

$$K = Y(X)^{-1} \qquad \textbf{(2.92)}$$

ilişkisi ile belirlenebilir. Neticede, dinamik olmayan kontrol edici K tasarlanmış olur (Gahinet ve diğ., 1995).

2.11 Karma H_2 / H_∞ LPV Kontrol Edicinin Dinamik Geribeslenmesi Durumunda Optimizasyonu

Bu problemin amacı, dinamik çıkış geribeslemeli (u=K(s)y) karma $\mathrm{H}_2 / \mathrm{H}_\infty$ kontrol edicinin, aşağıda belirtilen kısıtlaması altında, karma performans ölçütünün minimize edilmesini sağlayacak şekilde belirlenmesidir.

Matematiksel olarak, K(s) 'in

$$J = \alpha \left\| T_\infty \right\|_\infty^2 + \beta \left\| T_2 \right\|_2^2 \qquad \textbf{(2.93)}$$

ölçütünün *R, S, Q, A_k, B_k, C_k, D_k* ve γ^2 üzerinde aşağıdaki kısıtlar altında en az yapılarak gerçeklenmesidir. Kısıtlar,

1) H_∞ davranışı γ kısıtı
2) H_2 davranışı ν kısıtı
3) Bölgesel kutup atama kısıtlaması 'dır.

Tüm bu kısıtlamaların LMI karşılıkları verilmiştir. Anılan LMI sisteminin aynı amaç altında sağlanması için $X := X_\infty = X_2 = X_{pol}$ alınır ve LMI 'lar yeniden düzenlenirse optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\mathrm{J} = \alpha\gamma^2 + \beta \mathrm{Trace}\,(\mathrm{Q})^2$ amaç ölçütünün aşağıdaki LMI kısıtlamaları altında en az yapılması, aşağıdaki kısıtlar altında sağlanır. *K*ontrol ediciye ait sistem parametreleri aşağıdaki ifadelerde A_k, B_k, C_k, D_k olarak alınmıştır.

R, S, Q, A_k, B_k, C_k, D_k ve γ^2 üzerinde matris eşitsizlikleri,

$$\begin{bmatrix} AR+RA^T+B_2C_k+C_k{}^TB_2{}^T & A_k{}^T+A+B_2D_kC_y & B_1B_2D_kD_{y_1} & * \\ * & A^TS+SA+B_kC_y+C_y{}^TB_k{}^T & SB_1+B_kD_{y_1} & * \\ * & * & -I & * \\ C_\infty R+D_{\infty 2}C_k & C_\infty+D_{\infty 2}D_kC_y & D_{\infty 1}D_{\infty 2}D_kD_{y_1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \textbf{(2.94)}$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2R+D_{22}C_k & C_2+D_{22}D_kC_y \\ * & R & I \\ * & I & S \end{bmatrix} > 0 \quad \textbf{(2.95)}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{ij}\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix}+\mu_{ij}\begin{bmatrix} AR & B_2C_k \\ A_k & SA+B_kC_y \end{bmatrix} & \\ +\mu_{ji}\begin{bmatrix} RA^T & A_kT \\ (A+B_2D_kC_y)^T & A^TS+C_y{}^TB_k{}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{1\le i,j\le m} < 0 \quad \textbf{(2.96)}$$

$$Trace(Q) < \nu_0{}^2 \quad \textbf{(2.97)}$$

$$\gamma^2 < \gamma_0{}^2 \quad \textbf{(2.98)}$$

şeklinde verilir. γ_0 , seçilen bir üst değerdir.

X, $X = X_1 X_2{}^{-1}$ olarak ayrıştırılırsa, şu şekilde bulunur.

$$X_1 := \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 := \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & N^T \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.99)}$$

Değiştirilmiş yeni kontrol edici değişkenleri, A_K, B_K, C_K, D_K

$$\begin{aligned} B_K &:= NB_k + SB_2D_k \\ C_K &:= C_kM^T + D_kC_yR \\ A_K &:= NA_kM^T + NB_KC_yR + SB_2C_kM^T + S(A+B_2D_kC_y)R \end{aligned} \quad \textbf{(2.100)}$$

optimizasyon değişkenleri olarak kontrol edici parametreleri belirlenir. Buradan da dinamik kontrol edicinin K(s) transfer fonksiyon matrisi yazılırsa

$$K(s) := D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K \qquad \textbf{(2.101)}$$

olur. H_2 ve H_∞ kontrol problemleri, karma H_2 / H_∞ probleminin özel halleridir. $z_2 = z_\infty$ alınarak (2.60) 'taki karma performans ölçütünde seçilen α ,β sabitlerinin değerlerine göre özel hal olan H_2 ve H_∞ kontrol problemleri elde edilir (Gahinet ve diğ., 1995; Chilali ve Gahinet, 1996).

3. KARMA H_2 / H_∞ PDL (PARAMETRE DEĞİŞİMLİ LİNEER) OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

LPV sistemleri dahil çeşitli yapılardaki sistemlerin analiz ve tasarım uygulamalarında geniş çapta kullanılan Lineer Matris Eşitsizlikleri (LMI'lar), kapalı çevrim sistemi üzerinde çoklu kısıtları gerçeklemede oldukça esneklik sağlamaktadır; ayrıca sistem ve kontrol alanındaki uygulamalarda kullanışlı ve güçlü bir matematiksel araçtır. PDL (Parametreleri Değişimli Lineer-LPV Linear Parameter Varying) sistemlere ilişkin çoklu kısıtlar altında dayanıklı optimal LPV kontrol edici tasarımı, LMI ' lar ile gerçeklendiğinden teorem ve tanımlamalar, LMI 'ların özelliklerinden yararlanarak verilmiştir.

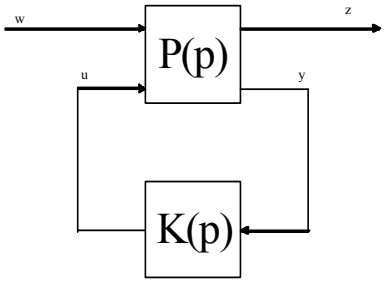
Çoklu kısıtlar altında karma H_2 / H_∞ kontrol tasarımının gerçeklenebilirliği, fiziksel kontrol problemlerinde önemli bir konudur. Bir LPV kontrol edicinin tasarımı, karma H_2 / H_∞ performans ölçütünün kontrol girişi kısıtı vb. çoklu kısıtlar altında en az yapılacak şekilde gerçekleştirilmesine ilişkin bir yöntemle tanıtılmıştır. Bu çalışmada; parametre belirsizliği durumunda H_2 norm davranışı, genelleştirilmiş H_2 norm davranışı ve H_∞ norm davranışına ait kısıtlar ile bölgesel kutup atama kısıtlaması koşulları altında karma H_2 / H_∞ norm davranışına ilişkin davranış ölçütünün en az yapılması sağlanmıştır. Ele alınan bir sisteme ait benzetim sonuçları verilmiştir.

Dayanıklı optimal, parametre değişimli lineer (LPV-Linear Parameter Varying) kontrolun ana amacı, parametre belirsizlikleri ve çoklu kısıtlar altında kapalı çevrim transfer fonksiyon matrisinin karma normunu en az yapan tüm kontrol edicilerin lineer bileşimi aracılığıyla bir kontrol edici belirlemektir. Karma H_2 / H_∞ davranış ölçütü; H_2 sonsuz norm davranışı kısıtı, H∞ norm davranışı kısıtı, kontrol girişi kısıtı ve bölgesel kutup atama kısıtı vb. kısıtlar altında en az yapılır. Çoklu kısıtlar altında, statik geribeslemeli LPV kontrol tasarımı, lineer matris eşitsizlikleri içeren dışbükey bir optimizasyon problemi olarak ifade edilir. Tasarım problemi, çoklu kısıtlara ve parametre belirsizliklere sahip statik ve dinamik geribeslemeli, karma H_2 / H_∞

parametre bağımlı kontrol sistemine ilişkin bir probleme dayanır. Bu çalışmada, bir sistemin kontroluna ilişkin statik ve dinamik geribeslemeli LPV kontrol tasarım örneği verilmekte ve tasarım örneği, LPV kontrol edici tasarımı yaklaşımının üstünlüğünü göstermektedir.

3.1 Dayanıklı LPV Optimal Kontrol Problemi

Genel dayanıklı optimal kontrol problemine ilişkin blok diyagramı Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 3.1 : Dayanıklı optimal LPV kontrol problemine ilişkin genel bir kapalı çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı.

Dayanıklı optimal kontrolda H_∞ norm davranış ölçütü kısıtı, kapalı çevrim kontrol sisteminin H_∞ performansını ifade eder. Başka deyişle, dayanıklı optimal kontrolda H_∞ norm kısıtlaması, kapalı çevrim kontrol sisteminin H_∞ norm davranışını ifade eder. Ayrıca, sistemin dayanıklı kararlılık derecesini belirleyen bir kararlılık ölçütüdür. H_2 norm kısıtlaması ise, kapalı çevrim kontrol sisteminin H_2 norm davranışını ifade eder. Bu tasarım kısıtlarının LMI 'larla ifade edilmesi mümkündür.

Amaç, çıkış geribeslemeli karma H_2/H_∞ LPV kontrol edicinin, aşağıda belirtilen kısıtlar altında, karma performans ölçütünün minimize edilmesini sağlayacak şekilde belirlenmesidir. $\beta=1-\alpha$ olmak üzere α ve β sabit katsayıları, karma amaç ölçütündeki lineer bileşimin ağırlık katsayılarıdır.

LPV kontrol edicinin;

$$\begin{aligned} &\left\|T_\infty\right\|_\infty := \left\|T_{zw}\right\|_\infty < \gamma \ , \ \left\|T_2\right\|_2 := \left\|T_{zw}\right\|_2 \ , \\ &J = \alpha\left\|T_\infty\right\|_\infty^{\ 2} + \beta\left\|T_2\right\|_2^{\ 2} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde verilen davranış ölçütü, optimizasyon değişkenleri üzerinde aşağıdaki kısıtlar altında minimize edilerek gerçeklenmesidir. Kısıtlar,

1) H_∞ davranışı γ kısıtı
2) H_2 davranışı ν kısıtı
3) Bölgesel kutup atama kısıtı
4) Kontrol girişi kısıtı , $|u| < u_{\max}$

Tüm bu kısıtların LMI karşılıkları ile LMI optimizasyon problemi oluşturulur. Anılan LMI sisteminin aynı amaç altında sağlanması için $X := X_\infty = X_2 = X_{pol} = X_g$ alınır ve ele alınan problem türüne göre LMI 'lar yeniden düzenlenerek optimizasyon problemi oluşturulur.

P(p) çok girdi çok çıktılı kontrol edilen LPV sistem ve K(p) LPV kontrol edicinin durum uzayı gösterimleri aşağıda verilmiştir. Bu gösterimler, parametre belirsizliklerine ilişkin çok yerlilik yapıda gösterimdir.

p parametre vektörü , $p(t)=(p_1(t),p_2(t),\ldots\ldots p_l(t))$ ve V parametre çok yerliliği $V := co\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_l\}$ şeklinde gösterilir. co{.}, çok yerlilik köşelerinin dışbükey bileşimlerine ilişkin dışbükey kabuktur. v_i ise parametre çok yerliliğinin köşeleridir. p, V parametre çok yerliliğinde bir nokta olarak değişir.

$p_{imin} \le p_i \le p_{imaks}$ olmak üzere;

P(p): Kontrol edilen sistem,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z(t) &= C_1(p)x + D_{11}(p)w + D_{12}(p)u \\ y(t) &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2a)}$$

$$\begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2(p) \\ C_1(p) & D_{11}(p) & D_{12}(p) \\ C_2(p) & D_{21}(p) & D_{22}(p) \end{bmatrix} \in S := co\left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad i = 1,2,..,N = 2^l \quad \textbf{(3.2b)}$$

S matris çokyerliliği, p parametre vektörünün çok yerlilik köşelerine ait sistem matrisleri kümesinin dışbükey bileşimlerine ilişkin dışbükey kabuğu ifade eder. *l* ise belirsizliğe sahip sistemin parametre sayısıdır. Bu gösterim nedeniyle, herhangi bir, i=1,2,....,N politop köşeleri için ifadelerdeki X_i yazılışı, bunların dışbükey birleşimi olarak X(p) 'ye karşılık olduğu düşünülecektir.

LPV Kontrol edici, K(p):

u=K(p)y =K(p,s)y dinamik geribesleme durumunda, tasarlanacak LPV kontrol edicinin durum uzayı gösterimi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_K(p)x_k + B_K(p)y \\ u(t) &= C_K(p)x_k + D_K(p)y \end{aligned} \quad \textbf{(3.3)}$$

şeklindedir.

Parametre kutusunun köşeleri p_j 'lerde (j=1,2,...,N=2^l , *l*=belirsizliğe sahip sistemin parametre sayısı),

$$\begin{bmatrix} A_K(p) & B_K(p) \\ C_K(p) & D_K(p) \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.4)}$$

matrisinin değerleri, şu şekilde ifade edilir. v parametre çok yerlilikteki v_i köşe noktalara ilişkin K_{vi} kontrol ediciler belirlenir ve bunların bileşimindeki bileşim katsayıları α'lar ve aralarındaki ilişki,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_j = 1 \quad \textbf{(3.5)}$$

şeklinde alınırsa,

1) Bu katsayıların lineer bileşimi olarak p(t);

$$p(t) = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + ... + p_N\alpha \quad \textbf{(3.6)}$$

2) K_{vi} köşe kontrol edicilerin bir lineer bileşimi olarak çok yerli LPV kontrol edicinin durum uzayı matrisleri,

$$\begin{bmatrix} A_K(p) & B_K(p) \\ C_K(p) & D_K(p) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_{vi} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \tag{3.7}$$

şeklinde hesaplanır.

Burada, $A_K(v_i), B_K(v_i), C_K(v_i), D_K(v_i)$ kontrol edicinin çok yerlilik köşelerindeki sistem matrisleri olmak üzere

$$K_{vi} = \begin{bmatrix} A_K(v_i) & B_K(v_i) \\ C_K(v_i) & D_K(v_i) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır.

w vektörü dış girişlerinden z vektörü kontrol çıkışlarına olan kapalı çevrim kontrol sisteminin T_{zw} transfer fonksiyon matrisine ilişkin durum uzayı gösterimi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}(p)x_{cl} + B_{cl}(p)w \\ z &= C_{cl}(p)x_{cl} + D_{cl}(p)w \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir (Apkarian ve diğ. , 1995).

3.2 Teorem (Köşe özelliği)

V parametre çok yerliliğinde köşe noktalar v_i'ler , (i=1,2,...,N)olmak üzere N adet sistem matrisi,

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v_i) & B(v_i) \\ C(v_i) & D(v_i) \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, N = 2^l \tag{3.10}$$

şeklinde gösterilsin. S matris çok yerliliği, N adet S_i matrisinin dışbükey kabuğu olarak

$$S = S(p) := co\{S_i\} = co\left\{\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}\right\} = co\left\{\begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix}\right\} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \ , \alpha_i \geq 0$$
$$, \ i = 1,2,.., N = 2^l \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlansın.

Parametreye bağlı sistem matrisleri,

$$\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2(p) \\ C_1(p) & D_{11}(p) & D_{12}(p) \\ C_2(p) & D_{21}(p) & D_{22}(p) \end{bmatrix} := co\left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix} \right\} \quad , \; i = 1,2,..,N = 2^l \tag{3.12}$$

şeklinde çok yerlilik yapıda gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z(t) &= C_1(p)x + D_{11}(p)w + D_{12}(p)u \\ y(t) &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde matematik modeli durum uzayında verilen LPV sistemini ele alalım. LPV sistemi, γ üst sınırında H_∞ norm davranış ölçütüne sahip olacak şekilde sistemi kararlı kılan LPV kontrol edici belirlenebilir ise aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i) S matris çok yerliliğindeki tüm $\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \in S$ şeklinde LPV sistemleri için

$$\begin{bmatrix} A(p)^T X + XA(p) & X_{cl}B(p) & C(p)^T \\ B(p)^T X & -\gamma I & D(p)^T \\ C(p) & D(p) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.14}$$

sınırlı gerçel yardımcı teoremi sağlayan X>0 kesin artı bir tek matris vardır.

ii) Kapalı parametre uzayındaki N adet köşe noktasına ilişkin

$$\begin{bmatrix} A_i^T X + XA_i & XB_i & C_i^T \\ B_i^T X & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,N \tag{3.15}$$

sınırlı gerçel yardımcı teoremi sağlayan X>0 kesin artı bir tek matris vardır.

İspat

$$\begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \, , \alpha_i \geq 0 \quad , i = 1,2,..,N = 2^l \qquad \textbf{(3.16)}$$

özelliğinin bir sonucu olarak (3.13) ve (3.14) ifadelerinin eşdeğer olacağı açıktır (Apkarian ve diğ. , 1995).

3.3 Bölgesel Kutup Atama Kısıtının LMI 'larla Modellenmesi

Bir kapalı çevrim kontrol kutuplarının aşağıda tanımlanan LMI bölgesi D içinde olması istenir.

$$D = \left\{ z \in C : f_D(z) = L_i + M_i z + M_i^T \bar{z} < 0 \right\}, \quad i = 1,2,...,N \qquad \textbf{(3.17)}$$

$f_D(z)$ kompleks z düzleminin bir alt kümesi olan D LMI bölgesinin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada, L_i , λ reel elemanlı matris olmak üzere simetrik bir matris, M_i ise μ reel elemanlı bir matris olmak üzere

$$L_i = L_i^T = \left[\lambda_{kj}\right]_{1 \leq k,j \leq m} \in R^{mxm}, \; M_i = \left[\mu_{kj}\right]_{1 \leq k,j \leq m} \in R^{mxm} \quad , \quad i = 1,2,...,N \qquad \textbf{(3.18)}$$

şeklinde gösterilir.

Bir kapalı çevrim kontrol kutuplarının aşağıda tanımlanan LMI bölgesi D içinde olması için gerek ve yeter koşul,

$$\left[\lambda_{kj} X_{pol} + \mu_{kj} A_{cli} X_{pol} + \mu_{kj} X_{pol} A_{cli}^T \right]_{1 \leq k,j \leq m} < 0 \quad , \quad i = 1,2,...,N \qquad \textbf{(3.19)}$$

matris eşitsizliğini sağlayan simetrik X matrisinin var olmasıdır.

Kutup atama bölgesine ait seçilen LMI Bölgesi, r yarıçaplı dairesel bölge ile θ açılı konik bölge ve α <dikeyinin sol bölgesi arasındaki arakesittir. Seçilen LMI Bölgesi, birkaç LMI bölgesinin arakesiti olarak seçilen kutup atama bölgesi olmak üzere Şekil 2.10'de verilmiştir.

Kontrol girişi kısıtı , $|u| < u_{\max}$ olmak üzere bu kısıtın LMI karşılığı ise bir teoremle aşağıda verilmiştir.

3.4 Kontrol Girişinin Kısıtlanması

Kontrol edilen sisteme uygulanan u(t) kontrol girişinin fiziksel sisteme uygulanamayacak kadar büyük yada sistemin kabul edilemez ölçüde davranmasına neden olacak kadar büyük olmamalıdır. Bunu önlemek için, kontrol işaretinin kısıtlanması gereklidir. Genelleştirilmiş H_2 Kontrol kısıtı kullanılarak $z_{2g}=u$ seçimi ile kontrol girişi kısıtına dönüştürülmüştür.

Statik geribesleme durumunda, genelleştirilmiş H_2 Kontrol kısıtı ($z_{2g}=u$ için Kontrol girişi kısıtı) 'na ilişkin teorem aşağıdadır.

3.4.1 Özellik

Bir sistemin genelleştirilmiş H_2 normu,

$$\|T_{zw}\|_{gH_2}{}^2 := \lambda_{\max}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_{zw}(jw)T_{zw}{}^*(jw)dw\right] \qquad \textbf{(3.20)}$$

şeklinde ifade edilir (Rotea, 1993).

3.4.2 Teorem

Statik geribesleme durumunda, $\|T_{zw}\|_{gH_2}$ genelleştirilmiş H_2 normunun,

$$\|T_{zw}\|_{gH_2} = \sup_{w}\frac{\|z\|_\infty}{\|w\|_2} = \sup_{\|w\|_2=1}\|z\|_\infty \le z_{\max} = \sqrt{\alpha} \qquad \textbf{(3.21)}$$

olması ancak ve ancak,

$$\begin{bmatrix} Y & C_{g2i}{}^T \\ C_{g2i} & z_{\max}{}^2 I \end{bmatrix} > 0 \qquad \textbf{(3.22)}$$

eşitsizliğini sağlayan Q matrisinin var olmasıyla mümkündür (Scherer, 1997,1999; Boyd ve diğ., 1994).

$$\left\| T_{2(2)i} \right\|_{gH_2} < u_{\max} \quad (\text{ i=1,2,...,N=2}^1 \text{ }) \tag{3.23}$$

davranış ölçütüne ilişkin LMI kısıtı, z_{2g}=u(t) için

$$\begin{bmatrix} Q & C_{g2i}{}^T \\ C_{g2i} & u_{\max}{}^2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{3.24}$$

şeklinde elde edilir.

3.4.3 Teorem

Dinamik geribesleme durumunda, genelleştirilmiş H_2 Kontrol kısıtı (z_{2g}=u için kontrol girişi kısıtı) 'na ilişkin teorem şu şekildedir:

z_{2g} kontrol edilen çıkış vektörü, u ise kontrol edilen sistemin kontrol girişi yada giriş vektörü olsun ve Sınıflandırılan z çıkışlarından biri olan $z_{2(2)}$ kontrol edilen çıkış vektörü, sadece kontrol girişini yada girişlerini içersin. u_{max} gerçel bir sayı olmak üzere, kontrol girişi genliğinin maksimum değerinin, seçilen bir u_{max} değerinden küçük olması (kontrol girişi kısıtı $| u | < u_{max}$) başka deyişle

$$\left\| T_{2(2)i} \right\|_{gH_2} < u_{\max} \text{ (i=1,2,...,N=2}^l) \tag{3.25}$$

olması için gerek ve yeter koşul, P sistemi asimptotik kararlı ve D_{cl2}=0 olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(p)^T X_g + X_g A_{cl}(p) & X_g B_{cl}(p) \\ B_{cl}(p)^T X_g & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}{}^2 I & C_{cl(2)}(p)^T \\ C_{cl(2)}(p) & X_g \end{bmatrix} > 0 \tag{3.26}$$

olarak verilen LMI'ları sağlayacak $X_g = X_g{}^T > 0$ kesin artı matrisidir. Bu teoremin referanslardan yararlanarak genişletilmiş kanıtı aşağıdadır.

İspat: w 'den z_{2g}'e olan alt sistemin transfer fonksiyonu T_{2g} olsun. T_{2g} nin genelleştirilmiş H_2 normu (gH_2 normu), 3.4.1 özelliğini kullanarak i=1,2,....,N için

$$\left\| T_{2gi} \right\|_{gH_2}{}^2 := \lambda_{\max} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{2gi}(jw) T_{2gi}{}^*(jw) dw \right] \tag{3.27}$$

şeklinde yazılabilir.

$D_{cl2}=0$ için yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde olur.

$$\left\|T_{2gi}\right\|_{gH_2}^{\ 2} := \lambda_{\max}\left[C_{cl_{2i}} Y_0 C_{cl_{2i}}^{\ T}\right] \tag{3.28}$$

Burada; Y_0 , Lyapunov denklemini sağlar ve Lyapunov denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$A_{cli}Y_0 + Y_0 A_{cli}^{\ T} + B_{cli}B_{cli}^{\ T} = 0 \tag{3.29}$$

$$A_{cli}Y + YA_{cli}^{\ T} + B_{cli}B_{cli}^{\ T} < 0 \tag{3.30}$$

matris eşitsizliğini sağlayan herhangi bir Y için $Y>Y_0$ şeklinde olur.

Elde edilen sonuçlara göre, $\left\|T_{2(2)i}\right\|_{gH_2} < u_{\max}$ (i=1,2,...,N=2^l) olması ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanmasıyla mümkündür.

$$\begin{aligned} &Y > 0 \\ &A_{cli}Y + YA_{cli}^{\ T} + B_{cli}B_{cli}^{\ T} < 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\lambda_{\max}\left[C_{cl_{2i}} Y C_{cl_{2i}}^{\ T}\right] < u_{\max}^{\ 2} \tag{3.32}$$

$Y=X_g^{-1}$tanımı ile, (3.31) ve (3.32) ifadeleri aşağıdaki şekilde olur.

$$A_{cli}X_g^{\ -1} + X_g^{\ -1}A_{cli}^{\ T} + B_{cli}B_{cli}^{\ T} < 0 \tag{3.33}$$

$$\lambda_{\max}\left[C_{cl_{2i}} X_g^{\ -1} C_{cl_{2i}}^{\ T}\right] < u_{\max}^{\ 2} \Leftrightarrow C_{cl_{2i}} X_g^{\ -1} C_{cl_{2i}}^{\ T} < u_{\max}^{\ 2} I \tag{3.34}$$

X_g 'ye göre düzenlendikten sonra Schur tamlayanı ile elde edilen LMI 'lar, (Xg>0)

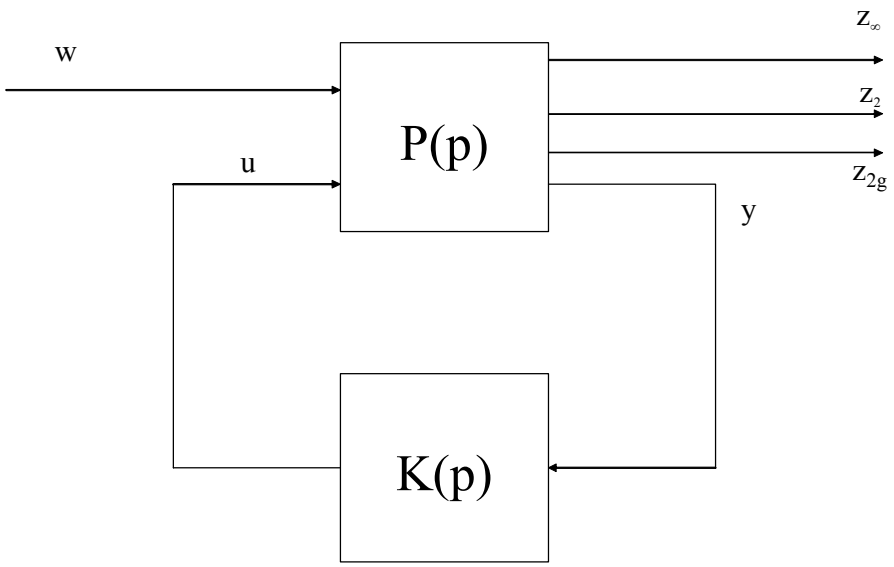
$$\begin{bmatrix} A_{cli}^{\ T}X_g + X_g A_{cli} & X_g B_{cli} \\ B_{cli}^{\ T}X_g & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.35}$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^{\ 2} I & C_{cl(2)i}^{\ T} \\ C_{cl(2)i} & X_g \end{bmatrix} > 0 \ , \ i = 1,2,....,N \tag{3.36}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç, Scherer (1997) makalesinde verilen sonuçla aynı şekildedir ve kontrol girişi kısıtı için LMI modeli olarak verilebilir.

3.5 Karma H_2 / H_∞ LPV Optimal Kontrol Problemi

Genel H_2/H_∞ optimal kontrol problemine ilişkin blok diyagramı Şekil 1 de verilmiştir. Bu blok diyagramında, w dış giriş vektörünü, u giriş kontrol vektörünü, ayrı birer çıkış kanalı olarak ayrıştırılan z yi oluşturan çıkış vektörleri, çeşitli norm davranışlarını sağlayan kontrol edilen çıkışları, y ise ölçülebilen büyüklüklere ilişkin çıkış vektörlerini , P(p) çok girdi çok çıktı kontrol edilen sistemi ve K(p) de LPV kontrol ediciyi gösterir.



Şekil 3.2: Karma H_2 / H_∞ LPV kontrol problemine ilişkin blok diyagramı.

$z_\infty(t) \in R^{p_1}$, $z_2(t) \in R^{p_2}$, $z_{2g}(t) \in R^{p_3}$, $w(t) \in R^{m_1}$, $u(t) \in R^{m_2}$ olmak üzere matrisler uygun boyutlu matrislerdir. Bu blok diyagramında w giriş vektörüne karşı düşen z çıkışlarını üç sınıfta toplamak mümkündür. $z=[z_\infty\ z_2\ z_{2g}]^T$ olur. Burada, z_∞ H_∞ norm kısıtlamasına ilişkin davranış değişkeni, z_2 H_2 norm kısıtlamasına ilişkin davranış değişkenidir, z_{2g} ise genelleştirilmiş H_2 norm kısıtlamasına ilişkin davranış değişkenidir.

Kontrol edilen çıkış vektörü; $z=[\ z_\infty^T\ \ z_{2(1)}^T\ \ z_{2(2)}^T]^T = [\ z_\infty^T\ \ z_2^T\ \ z_{2g}^T]^T$ biçiminde, norm kısıtlarıyla ifade edilen H_2 , H_∞ ve genelleştirilmiş H_∞ norm davranışlarına ilişkin çıkış vektörlerine ayrıştırılır. Şekil (3.2)'de gösterilen ayrıştırılmış kontrol edilen çıkışlar; sistem davranışına ilişkin ilgili kısıtları sağlayacak şekilde düzenlenir.

Burada; z_∞ , sistemin H_∞ norm davranışını, z_2 sistemin H_2 norm davranışını, z_{2g} ise genelleştirilmiş H_2 norm davranışını sağlayacak çıkış vektörlerini gösterir. z_{g2} , kısıtlama koşulu olan durum, kontrol işareti ve çıktılardan oluşan vektördür. $z_{2g,}$ sadece u(t) olarak seçildiğinde sistemin bu genelleştirilmiş H_2 norm davranışı; kontrol girişi kısıtına ilişkin LMI modelinin sağlanmasına karşı düşer.

$\|T_\infty\|_\infty := \|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, $\|T_{2g}\|_2 := \|T_{uw}\|_{2g} < u_{maks}$ olduğuna göre karma genelleştirilmiş H_2/H_∞ amaç
ölçütü,

$$J = \alpha\|T_\infty\|_\infty^{\ 2} + \beta\|T_{2g}\|_{2g}^{\ 2} = \alpha\|T_{z_\infty w}\|_\infty^{\ 2} + \beta\|T_{z_{2g}w}\|_{2g}^{\ 2} \qquad \textbf{(3.37)}$$

şeklinde yazılır.

3.5.1 Karma H_2 / H_∞ LPV kontrol edicinin statik geribesleme durumunda optimizasyonu

P çok girdi çok çıktılı kontrol edilen sistem ve K kontrol edici tanımları statik geribesleme durumunda aşağıda verilmiştir.

P çok girdi çok çıktılı kontrol edilen sistem,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z_\infty &= C_\infty(p)x + D_{\infty 1}(p)w + D_{\infty 2}(p)u \\ z_2 &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \\ z_{2g} &= C_{g2}(p)x + D_{g21}(p)w + D_{g22}(p)u \\ y &= C_y x \end{aligned} \qquad \textbf{(3.38)}$$

$D_1=[D_{\infty 1}\ D_{21}\ D_{g21}]^T$, $D_2=[D_{\infty 2}\ D_{22}\ D_{g22}]^T$, $C_1=[C_\infty\ C_2\ D_{g2}]^T$ olmak üzere tüm matrisler, uygun boyutlu matrislerdir.

Statik geribesleme LPV kontrol edici, K(p) :

$$u=K(p)y=Ky \qquad \textbf{(3.39)}$$

şeklindedir.
$T_{zw}(p)$ kapalı çevrim kontrol sistemi,

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_{cl}(t) &= A_{cl}(p)x_{cl}(t) + B_{cl}(p)w(t)\\ z_{\infty} &= C_{cl1}(p)x(t) + D_{cl1}(p)w(t)\\ z_2 &= C_{cl2}(p)x + D_{cl2}(p)w\\ z_{2g} &= C_{cl2g}(p)x + D_{cl2g}(p)w\end{aligned}\right\} z(t) \qquad \textbf{(3.40)}$$

u=Kx dinamik olmayan durum geribeslemesi halinde LPV H_2/H_∞ kontrol edicinin aşağıda verilen amaç ölçütü ve kısıtlar altında optimal olarak belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu LMI probleminde, Y=KX değişken tanımı yapılarak çok kısıtlı ve durum geribeslemeli kontrol edici tasarımı yapılır.

H_2/H_∞ kontrol edicinin u=Kx statik durum geribeslemesi halinde matris eşitsizlikleri yardımı ile optimal olarak tasarımı, $J = \alpha\left\|T_{z_\infty w}\right\|_\infty^{\ 2} + \beta\left\|T_{z_{2g} w}\right\|_{2g}^{\ 2}$ amaç ölçütünün Y,X,Q ve γ^2 üzerinde aşağıda verilen matris eşitsizliklerini sağlamak üzere en az yapılması ile gerçekleştirilir.

Bu kısıtlar,

$$m_i := blockdiag(f_i, g_i, h_i, l_i) = \begin{bmatrix} f_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & g_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & h_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & l_i \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(3.41)}$$

$m_i := m_i(\gamma^2, Q, Y, X, u_{\max}) < 0$ şeklinde bir tek LMI yapısında ifade edilebilir. Burada,

$$f_i = blockdiag\left\{\begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B_{1i} Y + Y^T B_{2i}^{\ T} & B_{1i} & XC_{\infty i}^{\ T} + Y^T D_{\infty 2i}^{\ T}\\ B_{1i}^{\ T} & -I & D_{\infty 1i}^{\ T}\\ C_{\infty i} X + D_{\infty 2i} Y & D_{\infty 1i} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, [\gamma - \gamma_0]\right\} \qquad \textbf{(3.42)}$$

$$g_i = blockdiag\left\{-\begin{bmatrix} Q & C_{2i}^{\ T} X + D_{22i} Y\\ XC_{2i}^{\ T} + Y^T D_{22i}^{\ T} & X \end{bmatrix}, [Trace\ (Q) - \vartheta_0^{\ 2}]\right\} \qquad \textbf{(3.43)}$$

$$h_i = \left[\lambda_{ij} + \mu_{ij}(A_i X + B_{2i} Y) + \mu_{ji}(XA_i^T + Y^T B_{2i}^T)\right]_{1\le i,j\le m} \qquad \textbf{(3.44)}$$

$$l_i = blockdiag\left\{-\begin{bmatrix} Q & C_{g2i}^T \\ C_{g2i} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix}, [u_{\max} - u_{\max_0}]\right\} \qquad \textbf{(3.45)}$$

şeklindedir.

Statik yapıda LPV kontrol edici, şu şekilde bulunur.

$$K_i = Y(X)^{-1} \quad , \quad i = 1,....,N \qquad \textbf{(3.46)}$$

$$K(p) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i K_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \qquad \textbf{(3.47)}$$

3.5.2 Karma H_2/H_∞ LPV kontrol edicinin dinamik geribesleme durumunda optimizasyonu

Dinamik geribesleme durumunda, LPV çok giriş çok çıkışlı bir sistemve LPV kontrol edicinin(kontrolörün) durum uzayı denklemleri ve matrisel gösterimleri aşağıda verilmiştir. p=p(t) olmak üzere,

P(p) çok girdi çok çıktılı kontrol edilen sistem :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z_\infty &= C_\infty(p)x + D_{\infty 1}(p)w + D_{\infty 2}(p)u \\ z_2 &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \\ z_{g2} &= C_{g2}(p)x + D_{g21}(p)w + D_{g22}(p)u \\ y &= C_y(p)x + D_{y1}(p)w + D_{y2}(p)u \end{aligned} \qquad \textbf{(3.48)}$$

LPV Kontrol Edici, K(p) :

u=K(p,s)y=K(p)y dinamik geribesleme durumunda, tasarlanan LPV kontrol edicinin durum uzayı gösterimi, şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(p)x_K + B_K(p)y \\ u &= C_K(p)x_K + D_K(p)y \end{aligned} \qquad \textbf{(3.49)}$$

Kapalı parametre uzayına ait geometrideki köşeler, p_j (j=1,2,...,N=2^l) olarak ifade edilir. A_{cli}, B_{cli}, C_{cli} ve D_{cli} kapalı çevrim LPV sisteme ilişkin uygun boyutlu, çok yerlilik köşelerindeki sabit elemanlı matrisler olmak üzere çok yerli LPV sistemlere ilişkin teorem ve modeller verilmiştir.

w dış girişlerinden, z kontrol edilen çıkışlarına ait kapalı çevrim kontrol sisteminin transfer fonksiyon matrisi T_{zw} 'ye ilişkin durum uzayı gösterimi, şu şekildedir.
$T_{zw}(p)$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{cl}(t) &= A_{cl}(p)x_{cl}(t) + B_{cl}(p)w(t) \\ z_{\infty} &= C_{cl1}(p)x(t) + D_{cl1}(p)w(t) \\ z_{2(1)} &= C_{cl2(1)}(p)x + D_{cl2(1)}(p)w \\ z_{2(1)} &= C_{cl2(2)}(p)x + D_{cl2(2)}(p)w \end{aligned}\right\} z(t) \qquad \textbf{(3.50)}$$

Bu yöntemin amacı, dinamik çıkış geribeslemeli (u=K(p)y) karma H_2/H_∞ LPV kontrol edicinin, aşağıda belirtilen kısıtlar altında, karma performans ölçütünün minimize edilmesini sağlayacak şekilde belirlenmesidir.

Matematik olarak, K(p) 'in $J = \alpha\left\|T_{z_\infty w}\right\|_\infty^{\ 2} + \beta\left\|T_{z_{2g} w}\right\|_{2g}^{\ 2}$ ölçütünün *R, S, Q,* u_{max}, $\underline{A}_{Ki}$, $\underline{B}_K$, $\underline{C}_{Ki}$, $\underline{D}_{Ki}$, γ üzerinde aşağıdaki kısıtlar altında minimize edilerek gerçeklenmesidir. Kısıtlar,

1) H_∞ kararlılık kriterini başka deyişle H_∞ norm davranışını belirleyen γ eşitsizlik kısıtlaması (γ kısıtlaması)

2) H_2norm davranışını belirleyen ν 'den küçük olması (ν kısıtlaması)

(1) ve (2) 'de verilen kısıtlar, i=1,2,.....,N için

$$\left\|T_{\infty i}\right\|_\infty := \left\|T_{z_\infty w i}\right\|_\infty \le \gamma$$

$$\left\|T_{2i}\right\|_2 := \left\|T_{z_2 w i}\right\|_2 \le \sqrt{Trace(Q)} < \nu$$

şeklinde tanımlanır.

3) Bölgesel Kutup Atama Kısıtı

4) Kontrol girişi kısıtı , $|u| < u_{\max}$

X optimizasyon değişkeni,

$$X = X_1 X_2^{-1}\ ,\ X_1 := \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix},\ \ X_2 := \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.51)}$$

şeklinde ayrıştırılmak üzere, R,S,Q, $\underline{A}_{Ki}$, $\underline{B}_{Ki}$, $\underline{C}_{Ki}$, $\underline{D}_{Ki}$ ve γ üzerinde (1), (2), (3), (4) kısıtlarına ilişkin lineer matris eşitsizlikleri (LMI'lar),

$$\begin{aligned} f_i &:= f(\gamma^2, R, S, \underline{A}_{K_i}, \underline{B}_{K_i}, \underline{C}_{K_i}, \underline{D}_{K_i}) < 0 \\ g_i &:= g(Q, R, S, \underline{A}_{K_i}, \underline{B}_{K_i}, \underline{C}_{K_i}, \underline{D}_{K_i}) < 0 \\ h_i &= h(R, S, \underline{A}_{K_i}, \underline{B}_{K_i}, \underline{C}_{K_i}, \underline{D}_{K_i}) < 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.52)}$$

ve dördüncü kısıt, (4) kontrol girişi kısıtına ilişkin LMI ise yeni düzenlemeye göre,

$$l_i := i(u_{\max}, R, S, \underline{A}_{K_i}, \underline{B}_{K_i}, \underline{C}_{K_i}, \underline{D}_{K_i}) < 0 \qquad \textbf{(3.53)}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tüm kısıtlar, blok diyagonal yapısında aşağıdaki notasyonla

$$m_i := blockdiag(f_i, g_i, h_i, l_i) = \begin{bmatrix} f_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_i \end{bmatrix} < 0 \qquad \textbf{(3.54)}$$

gösterilirse, şu şekilde yazılır.

$$m_i := m_i(\gamma^2, Q, R, S, \underline{A}_{K_i}, \underline{B}_{K_i}, \underline{C}_{K_i}, \underline{D}_{K_i}, u_{\max}) < 0 \qquad \textbf{(3.55)}$$

Burada,

$$f_i = blockdiag\left\{ \begin{bmatrix} A_i R + R A_i^T + B_{2_i} \underline{C}_K + \underline{C}_K{}^T B_2^T & \underline{A}_{Ki} + A_i + B_{2i} \underline{D}_{Ki} C_{yi} & B_{1i} + B_{2i} \underline{D}_{Ki} D_{y1i} & * \\ * & \mathrm{Ai}^{\mathrm{T}}\mathrm{S} + S\mathrm{Ai} + \underline{B}_{Ki}\mathrm{C}_{\mathrm{yi}} + \mathrm{C}_{\mathrm{yi}}{}^{\mathrm{T}} \underline{B}_{Ki}{}^{\mathrm{T}} & SB_{i1} + \underline{B}_{Ki} D_{y1i} & * \\ * & * & I & * \\ C_{1i} R + D_{\infty 2i} \underline{C}_K & C_{1i} + D_{\infty 2i} \underline{D}_{Ki} C_{yi} & D_{11i} + D_{\infty 2i} \underline{D}_{Ki} D_{y1i} & \gamma^2 I \end{bmatrix}, [\gamma - \gamma_0] \right\}$$

(3.56)

$$g_i = blockdiag\left\{ -\begin{bmatrix} \mathrm{Q} & (C_{2(1)i} R + D_{22(1)i} \underline{C}_K) & (C_{2(1)i} + D_{22(1)i} \underline{D}_{Ki} C_{yi}) \\ * & R & I \\ * & I & S \end{bmatrix}, [Trace\ (Q) - \vartheta_0] \right\}$$

(3.57)

$$\lambda ij\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} + \mu ij\begin{bmatrix} AiR + B_{2i}\underline{C}_{Ki} & Ai + B_{2i}\underline{D}_{Ki}C_{yi} \\ \underline{A}_{Ki} & SAi + \underline{B}_{Ki}C_{yi} \end{bmatrix} + \mu ij\begin{bmatrix} RAi + \underline{C}_{Ki}B_{2i}{}^{T} & \underline{A}_{Ki}{}^{T} \\ (Ai + B_{2i}\underline{D}_{Ki}C_{yi})^{T} & Ai^{T}S + C_{yi}{}^{T}\underline{B}_{Ki}{}^{T} \end{bmatrix}$$

(3.58)

$$l_i = blockdiag\left\{ -\begin{bmatrix} \mathrm{u}_{\max}{}^{2} I & (C_{2(2)i}R + D_{22(2)i}\underline{C}_K) & (C_{2(2)i} + D_{22(2)i}\underline{D}_{Ki}C_{yi}) \\ * & R & I \\ * & I & S \end{bmatrix}, [u_{\max} - u_{\max_0}] \right\}$$

(3.59)

şeklinde verilir.

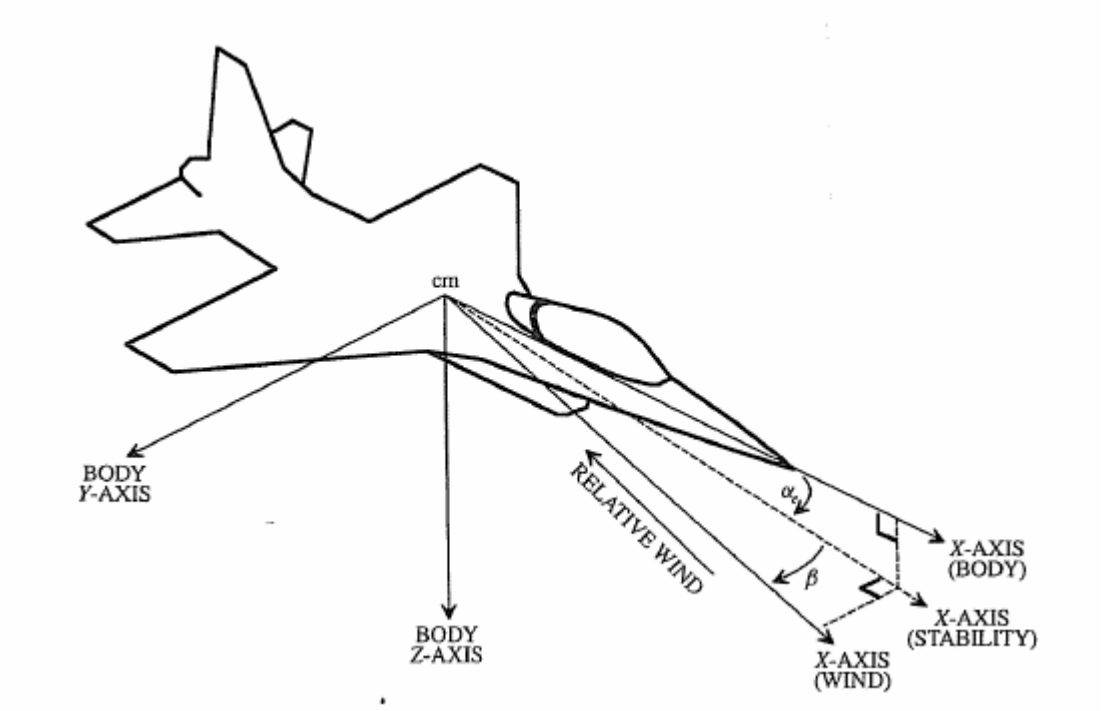
4. F-16 UÇAĞININ DİNAMİK MODELİ

Bir uçak uçuş esnasında iken kaldırma (taşıma), yerçekimi(ağırlık), itki(çekme) ve sürükleme kuvveti şeklinde dört temel kuvvet etki eder. Taşıma, kanatlar ve gövde yapısı ile oluşturulan, uçağı havada tutan kuvvet yani kaldıran kuvvettir. Yerçekimi kuvveti, uçağın ağırlığı nedeniyle yer çekimi yönünde aşağı doğru hareket etmesini sağlayan kuvvettir. İtki yada çekme kuvveti, uçağı öne doğru hareket etmesini motorlar aracılığıyla sağlayan kuvvettir. Sürükleme kuvveti ise ileri harekete karşı uçağın hava ortamında sürüklenmesiyle oluşan harekete karşı kuvvettir. Şekil ’de uçağa etki eden kuvvetler gösterilmektedir

4.1 Uçağın Uçuş Eksenleri

Uçağın ağırlık merkezinden geçen üç adet uçuş ekseni vardır. Uçuş esnasında bir uçak, durumunu değiştirdiğinde bu eksenlerden birinin veya birden fazla eksen etrafında hareket eder. Uçak uçuş eksenlerinin kesiştiği ağırlık merkezi etrafında dengede olmakta ve uçağın davranışı ağırlık merkezi etrafında gerçekleşmektedir. Bir uçağın ağırlık merkezinden geçerek; burun kısmından kuyruğuna kadar uzanan eksene, uzunlamasına eksen, bir kanat ucundan diğer kanat ucuna doğru uzanan eksene, yanlamasına eksen ve gövde üst kısmından gövde alt kısmına uzanan eksene de dikey eksen denir. Uçağın uçuş esnasında uzunlamasına eksen, yanlamasına eksen ve düşey eksen şeklinde üç eksen etrafında hareket yapar. Uçuş esnasında bir uçak, hareket halini değiştirdiğinde bu eksenlerden birinin veya birden fazlasının etrafında hareket eder. Uçağın üç eksen etrafında yaptığı hareketlere yuvarlanma, yunuslama ve sapma adı verilir (Lewis, 2003).

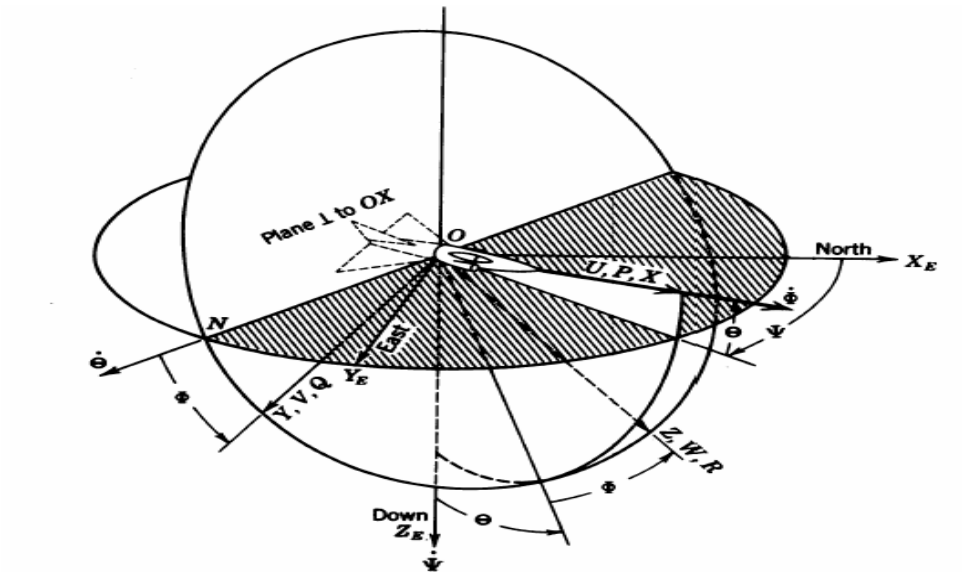
Uçuş dinamiğinin belirlenmesinde uçak üzerindeki noktaların birbirlerine göre uzaydaki konumları her zaman için sabit olduğu kabul edilir başka deyişle uçaklar katı cisim şeklinde varsayılır (Lewis, 2003).



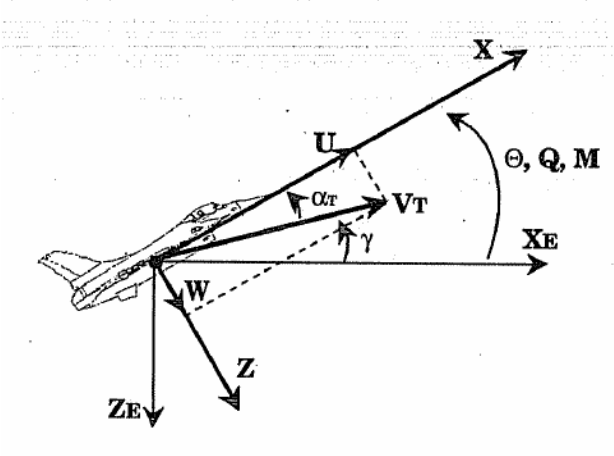
Şekil.4.1 : Uçağın uçuş eksenleri (Lewis, 2003).

Uçağın hareket denklemlerinin belirlenmesinde bir eksen takımı tanımlanır ve tanımlandığı eksen takımına bağlı olarak hareket denklemlerinin ifadesi farklı şekillerde olur. Orijinlerine göre de eksen takımlarının türleri verilir. Orijini uçağın ağırlık merkezi olan eksen takımları; gövde eksen takımı, karalılık eksen takımı ve rüzgar eksen takımı şeklinde adlandırılır. Orijini dünyanın merkezi olan eksen takımı ise dünya eksen takımıdır. Gövde vektörü, gövde eksen takımından kararlılık eksen takımına dönüşüm ve kararlılık eksen takımından rüzgar eksen takımına dönüşüm şeklinde koordinat dönüşümü ile rüzgar eksen takımına dönüştürülür (Lewis, 2003).

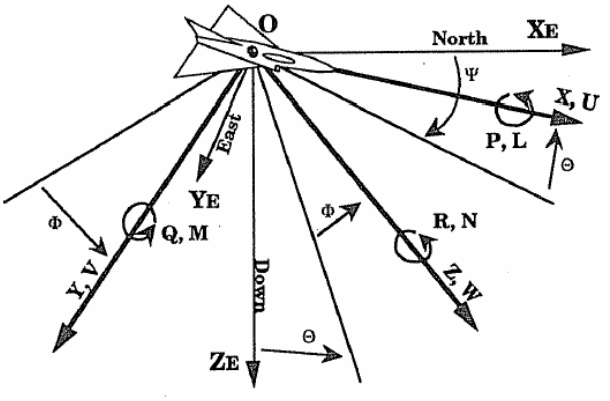
Bir uçak, uzunlamasına, yanlamasına ve düşey eksen şeklinde üç eksen etrafında hareket eder. Uçaklar; sağa sola yatış hareketini uzunlamasına eksende, burun aşağı-yukarı yunuslama hareketini yanlamasına eksende, sağa sola dönüş hareketini ise düşey eksende yapar. Uçağın hareket eksenleri ve belirtilen eksenlerdeki hareketleri Şekil 4.3 ’de gösterilmektedir. Bu bölümde, çoğunlukla Lewis (2003), Mc.Ruer ve diğ. (1973) kaynaklarından yararlanılmıştır.



Şekil 4.2 : Bir uçağa etki eden kuvvet, moment, hız ve açısal hız gösterimi (Blakelock,1994).



Şekil 4.3 : Uzunlamasına harekete ilişkin eksen sistemi (Adams ve diğ.,1994).



Şekil 4.4 : Yanlamasına harekete ilişkin eksen sistemi (Adams ve diğ.,1994).

Şekillerde U, V ve W; sırasıyla OX; OY ve OZ eksenleri hızları, P,Q ve R; sırasıyla OX; OY ve OZ eksenleri açısal hızları, X, Y ve Z; OX; OY ve OZ eksenleri dış kuvvetleri, L, M ve N; sırasıyla OX; OY ve OZ eksenleri toplam dış momentleri, $\theta(t)$, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$; sırasıyla OX; OY ve OZ eksenleri Euler açılarını gösterir.

ϕ, θ ve ψ Euler açıları ile p, q ve r açısal hızları arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ q &= \dot{\theta}\cos\phi - \dot{\psi}\sin\phi\cos\theta \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi \end{aligned} \qquad \textbf{(4.1)}$$

şeklindedir.

Gövde eksen takımından kararlılık eksen takımına dönüşüm, kararlılık eksen takımından rüzgar eksen takımına dönüşüm ve gövde eksen takımından rüzgar eksen takımına dönüşüm, sırasıyla $C_{s/b}$, $C_{w/s}$ ve $C_{w/b}$ dönüşüm matrisleri ile sağlanır. b, s ve w alt indisleri sırasıyla gövde, kararlılık ve rüzgar eksen takımlarını temsil eder.

$C_{s/b}$, $C_{w/s}$ ve $C_{w/b}$ dönüşüm matrisleri şu şekildedir.

$$C_{s/b} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_e & 0 & \sin\alpha_e \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_e & 0 & \cos\alpha_e \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$C_{w/s} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$C_{w/b} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_e\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha_e\cos\beta \\ -\cos\alpha_e\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha_e\sin\beta \\ -\sin\alpha_e & 0 & \cos\alpha_e \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Uçak gövde eksen takımındaki herhangi bir v_b vektörü rüzgar eksen takımındaki bir v_w vektörüne $v_w = C_{w/s}\, C_{s/b} v_b = C_{w/b} v_b$ şeklinde dönüştürülür.

4.2 Uçak Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Uçağın uçuşu esnasında üzerine etkiyen toplam kuvveti, aerodinamik, itki ve yerçekimi kuvvetleri oluşturur. Uçağa etkiyen aerodinamik kuvvet ve moment bileşenleri,

$$F_A^b = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \quad , \quad F_A^w = \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} = C_{w/b} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = C_{w/b} F_A^b \tag{4.5}$$

$$M_A^b = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad , \quad M_A^s = \begin{bmatrix} l_s \\ m_s \\ n_s \end{bmatrix} \quad , \quad M_A^w = \begin{bmatrix} l_w \\ m_w \\ n_w \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$(m_s = m \quad , \; n_w = n_s)$$

Uçağa etkiyen gövde ekseni itki kuvvet ve momenti bileşenleri,

$$F_T^b = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} \quad , \quad M_T^b = \begin{bmatrix} m_{x,T} \\ m_{y,T} \\ n_{z,T} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Uçağa etkiyen toplam kuvvet ve moment bileşenleri,

$$F^b = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A + X_T \\ Y_A + Y_T \\ Z_A + Z_T \end{bmatrix} = F_A^b + F_T^b \tag{4.8}$$

$$M^b = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l + m_{x,T} \\ m + m_{y,T} \\ n + n_{z,T} \end{bmatrix} = M_A^b + M_T^b \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Aerodinamik, itki ve yerçekimi kuvvetlerinin bileşkesi şeklinde toplam kuvvet uçuş esnasında uçağa etki eder. Aerodinamik kuvvet ve momentler, boyutsuz aerodinamik katsayılar ile verilir.

D sürükleme, L kaldırma, C çapraz rüzgar kuvveti, l_w yatış momenti, m_w yunuslama momenti, n_w sapma momenti, sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir. Bu ifadelerdeki $\bar{q}$, serbest hava akış dinamik basıncını, S kanat referans alanını, $\bar{c}$ kanat ortalama kord hattını tanımlar.

$$
\begin{aligned}
D &= \bar{q} S C_D \\
L &= \bar{q} S C_L \\
C &= \bar{q} S C_C
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.10)}
$$

$$
\begin{aligned}
l_w &= \bar{q} S C_l \\
m_w &= \bar{q} S C_m \\
n_w &= \bar{q} S C_n
\end{aligned}
$$

Burada, C_D sürükleme katsayısı, C_L kaldırma katsayısı, C_Y Yanal kuvvet katsayısı, C_l yatış momenti, C_M yunuslama momenti, C_N sapama momenti

Rüzgar eksen takımı için tanımlanmış C_D, C_L, C_Y, ..., C_N boyutsuz katsayılar, α ve β aerodinamik açılarına diğer değişkenlere göre daha çok bağlıdır ve uçağın kontrol yüzeyi hareketlerine de bağlı olması nedeniyle bu kontrol yüzeyleri aracılığıyla uçuş kontrolu yapılır. Boyutsuz kuvvet katsayıları, rüzgar eksen takımı için tanımlanmıştır. Aerodinamik katsayılara ilişkin denklemler, ilişkili olduğu parametrelere göre şu şekilde verilmiştir (Lewis, 2003).

$$
\begin{aligned}
C_D &= C_D(C_L) + \Delta C_D(el) + \Delta C_D(\beta) + \Delta C_D(M) + \ldots \\
C_L &= C_L(\alpha, T_C) + \Delta C_L(el) + \Delta C_L(M) + \Delta C_{L_{ST}}(\alpha, T_C) + \ldots \\
C_Y &= C_Y(\beta) + \Delta C_Y(rdr) + \ldots
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4. 11)}
$$

$$
\begin{aligned}
C_l &= C_l(\beta) + \Delta C_l(ail) + \Delta C_l(rdr) + \frac{b}{2V_T}\left[C_{lp}P + C_{lr}R\right] + \ldots \\
C_M &= C_M(C_L\alpha, T_C) + \Delta C_M(el) + \Delta C_{MST}(\alpha, T_C) + \Delta C_M(M) \\
&\quad + \frac{\bar{c}}{2V_T}\left[C_{mq}Q + C_{m\dot{\alpha}}\dot{\alpha}\right] + \frac{x_R C_L}{\bar{c}} + \ldots \\
C_N &= C_N(\beta) + \Delta C_N(rdr) + \Delta C_N(ail) + \Delta C_D(M) + \frac{b}{2V_T}\left[C_{np}P + C_{nr}R\right] + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

4.3 Uçağın Lineer Olmayan Hareket Denklemleri

Newton hareket yasasından yaralanarak uçağın lineer olmayan hareket denklemleri elde edilir. Bazı varsayımlar yapılarak hareket denklemleri daha kolay bir şekilde çıkartılabilir. Bu varsayımlar uçağın kütlesinin sabit olduğu ve zamanla değişmediği, uçağın bozucu bir etki verilmediğinde her zaman dengede olduğu, uçağın bir katı cisim olduğu, dünya düzleminin atalet düzlemi olduğudur. Bu varsayımlar altında, üç ağırlık merkezine göre, uçağın yer değiştirmesi ve dönüş hareketlerinden dolayı toplam altı hareketi vardır. Uçak gövdesinde zamanla oluşan lineer ve açısal momentum değişimi dikkate alınarak Newtonun 2. hareket yasası kullanılarak momentum korunum ilkesinden aşağıdaki ifadeler yazılır.

Doğrusal ve açısal monentum korunumu ilkesinden m uçağın kütlesi, V_T lineer hız vektörü, p lineer momentum ve h açısal momentum ise uçağa etki eden toplam aerodinamik, itki kuvvet ve momentler $F_{A,T}$ ve $M_{A,T}$, şu şekilde ifade edilir.

$$
\begin{aligned}
F^b_{A,T} &= {}^i\dot{p} \\
M^b_{A,T} &= {}^i\dot{h}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

şeklindedir.

Bu eşitlikler dönmediği kabul edilen dünya eksen takımı için yazıldığından gövde eksen takımına dönüştürülmesi gerekir. $F_{A,T}$ ve $M_{A,T}$'ler yer eksen takımı ve gövde eksen takımına göre ifadesi

$$\begin{aligned} F^b_{A,T} &= {}^i\dot{p} = \frac{d}{dt}(mV_T)_i = \frac{d}{dt}(V_T)_b + w_{b/i}\ x\ (mV_T) \\ M^b_{A,T} &= {}^i\dot{h} = {}^b\dot{h} + w_{b/i}\ x\ h \end{aligned} \qquad \textbf{(4.14)}$$

şeklinde verilir. Bu eşitliklerdeki $w_{b/i}$ açısal hız vektörünü, x vektörel çarpımı gösterir.

V_T mutlak hız ve $w^b_{b/i}$ açısal hız bileşenleri,

$$\begin{aligned} V_T &= \begin{bmatrix} U & V & W \end{bmatrix}^T \\ w^b_{b/i} &= \begin{bmatrix} P & Q & R \end{bmatrix}^T \end{aligned} \qquad \textbf{(4.15)}$$

şeklindedir.

$w_{b/i}\ x\ (V_T)$) vektörel çarpımı yapılır ve denklemlerdeki büyüklüklerin bileşenlerine göre $F^b_{A,T}$ denklemi düzenlenirse, kuvvet denklemleri,

$$\begin{aligned} \dot{U} &= RV - QW - g_D \sin\theta + (X_A + X_T)/m \\ \dot{V} &= -RU + PW - g_D \sin\phi\cos\theta + (Y_A + Y_T)/m \\ \dot{W} &= QU - PV + g_D \cos\phi\cos\theta + (Z_A + Z_T)/m \end{aligned} \qquad \textbf{(4.16)}$$

şeklinde elde edilir.

Gövde eksen sisteminde açısal momentum, J_b katı cisim eylemsizlik matrisi ile

$$h^b = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = J_b w^b_{b/i} \qquad \textbf{(4.17)}$$

şeklinde ifade edilir.

J_b eylemsizlik momenti matrisi, şu şekildedir.

$$J_b = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.18)}$$

Burada J_{xx}, J_{yy} ve J_{zz}, sırasıyla gövde eksenleri eylemsizlik momentleridir J_{xy}, J_{xz} ve J_{yz} ise sırasıyla gövde eksen takımlarında X-Y ekseni, X-Z ekseni ve Y-Z ekseni, eylemsizlik momenti çarpımlarını gösterir.

$\Omega^b_{b/i}$, $w^b_{b/i}$ 'ye ilişkin vektörel çarpım oduğuna göre $M^b_{A,T}$ şu şekilde yazılır.

$$M^b_{A,T} = J^b\ {}^b w^b_{b/i} + \Omega^b_{b/i} J^b\ w^b_{b/i} \qquad \textbf{(4.19)}$$

Buradan, açısal hıza ilişkin durum denklemi,

$${}^b w^b_{b/i} = (J^b)^{-1}\left[M^b_{A,T} - \Omega^b_{b/i} J^b\ w^b_{b/i}\right] \qquad \textbf{(4.20)}$$

şeklinde elde edilir (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

Euler hareket denklemleri ise şu şekildedir.

$$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{(J_y - J_z)QR}{J_x} + \frac{l}{J_x} \\ \dot{Q} &= \frac{(J_z - J_x)RP}{J_y} + \frac{l}{J_y} \\ \dot{R} &= \frac{(J_x - J_y)PQ}{J_z} + \frac{l}{J_z}\end{aligned} \tag{4.21}$$

Düzlem simetrisinden yaralanarak J eylemsizlik matrisi ve $\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^{\ 2}$ için J eylemsizlik matrisinin tersi,

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\Gamma}\begin{bmatrix} J_z & 0 & J_{xz} \\ 0 & \Gamma / J_y & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_x \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

şeklindedir.

Açısal hız durum denklemi ve bu son denklemlerin düzenlenmesiyle elde edilen moment denklemleri,

$$\begin{aligned}\Gamma\dot{P} &= J_{xz}\left[J_x - J_y + Jz\right]PQ - \left[J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^{\ 2}\right]QR + J_z l + J_{xz} n \\ J_y\dot{Q} &= (J_z - J_y)PR - J_{xz}(P^2 - R^2) + m \\ \Gamma\dot{R} &= \left[(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^{\ 2}\right]PQ - J_{xz}\left[J_x - J_y + J_z\right]QR + J_{xz} l + J_x n\end{aligned} \tag{4.23}$$

Kuvvet ve moment denklemleri ile altı eşitlik ifadesi elde edildi. Bunlara ilave olarak uçağın yere göre konumunu belirten üç adet kinematik denklem ve uçağın açısal konumunu belirten üç adet navigasyon denklemi şu şekilde verilebilir.

Uçağın yere göre konumunu belirten kinematik denklemler,

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= P + \tan\theta(Q\sin\theta + R\cos\phi)\\ \dot{\theta} &= Q\cos\phi - R\sin\phi\\ \dot{\psi} &= (Q\sin\phi + R\cos\phi)/\cos\theta\end{aligned} \qquad \textbf{(4.24)}$$

ve uçağın açısal konumunu belirten navigasyon denklemleri,

$$\begin{aligned}\dot{p}_N &= U\cos\theta\cos\psi + V(-\cos\theta\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi) + W(\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi)\\ \dot{p}_E &= U\cos\theta\sin\psi + V(\cos\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi) + W(-\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi)\\ \dot{h} &= U\sin\theta - V\sin\phi\sin\theta + W\cos\phi\cos\theta\end{aligned} \qquad \textbf{(4.25)}$$

şeklindedir. Böylece, uçağın uçuşundaki tüm hareketleri açıklayan toplam 12 adet lineer olmayan denklem elde edilir. Bu durumda, uçağın gövde eksen takımı denklemlerine ilişkin durum değişkenleri vektörü,

$$x^T = [\ p_N \quad p_E \quad h \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad U \quad V \quad W \quad P \quad Q \quad R\ ]^T \qquad \textbf{(4.26)}$$

şeklindedir. Burada U, V, W lineer hız vektörünün bileşenlerini, ϕ, θ, ψ Euler açılarını, P, Q, R açısal hız vektör bileşenlerini gösterir. p_N, p_E, h ise yer eksen takımı konum vektörünün kuzey, doğu ve irtifa bileşenlerini gösterir.

U, V, W lineer hız vektörünün bileşenlerinin α, β aerodinamik açılar ve V_T hızı arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix}U\\V\\W\end{bmatrix} = C_{b/w}\begin{bmatrix}V_T\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}V_T\cos\alpha\cos\beta\\V_T\sin\beta\\V_T\sin\alpha\cos\beta\end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.27)}$$

şeklindedir. Ayrıca, aerodinamik kuvvet ve moment denklemleri, α, β aerodinamik açılar ve V_T hızına bağlı olduğundan U, V ve W durum değişkenleri yerine V_T, α ve β durum değişkenlerinin alınması tercih edilir. Bunun için

$$\dot{\alpha} = \frac{U\dot{W} - W\dot{U}}{U^2 + W^2}$$
$$\dot{\beta} = \frac{\dot{V}V_T - V\dot{V}_T}{V_T(U^2 + W^2)^{1/2}} \qquad \textbf{(4.28)}$$
$$\dot{V}_T = \frac{U\dot{U} + V\dot{V} + W\dot{W}}{V_T}$$

denklemlerinden yararlanılır ve değiştirilmiş durum değişkenleri vektörü,

$$x^T = [\ p_N \quad p_E \quad h \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad V_T \quad \beta \quad \alpha \quad P \quad Q \quad R\ ]^T \qquad \textbf{(4.29)}$$

şeklinde elde edilir. Uçağın davranışı, altı serbestlik dereceli 12 adet lineer olmayan denklem ile modellenir. Bu uçak modelindeki kontrol girişleri, 3 temel kontrol yüzeyine ilişkin sapmalar olan irtifa dümeni, kanatçık ve yön dümeni ile motor ile üretilen itki kuvveti şeklinde dört kontrol değişkenidir. Böylece, kontrol giriş vektörü,

$$U^T = [\delta_t \quad \delta_e \quad \delta_a \quad \delta_r \quad]^T \qquad \textbf{(4.30)}$$

şeklindedir. Karalılık yada rüzgar eksen takımı durum değişkenleri gösterimi, gövde eksen takımı kullanılarak elde edilen gösterimden farklı olarak $\dot{\alpha}$ ve $\dot{\beta}$ aerodinamik açısal hızlara lineer bir şekilde bağlıdır. Bu nedenle, model açısından karalılık yada rüzgar eksen takımında elde edilen durum uzayı matematik modeli tercih edilir (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

4.4. Rüzgar yada Kararlılık Eksen Takımı Uçuş Denklemleri

Rüzgar yada karalılık eksen takımı kullanılarak elde edilen lineer olmayan modeldeki durum değişkenleri,

$$x^T = [V_T \quad \beta \quad \alpha \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad P_s \quad Q \quad R_s \quad]^T \qquad \textbf{(4.31)}$$

şeklindedir.

4.4.1. Rüzgar eksen takımı kuvvet denklemleri

Gövde eksen takımı kuvvet denklemleri bir dönüşüm ile rüzgar eksen takımı kuvvet denklemlerine aşağıdaki şekilde dönüştürülür. Rüzgar eksen takımı w indisi ile belirtilerek rüzgar eksen takımına ilişkin kuvet matris denklemi

$$\dot{v}_{ref}^{w} + \Omega_{w/b}^{w} v_{ref}^{w} = (1/m) F_{A,T}^{w} + C_{w/b} C_{b/n} g^{n} - \Omega_{b/e}^{w} v_{ref}^{w} \tag{4.32}$$

şeklindedir.

Eksen dönüşümleri, şu şekildedir.

$$w_{s/b}^{s} = w_{s/b}^{b} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix}^{T}$$
$$w_{w/s}^{w} = w_{w/s}^{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\beta} \end{bmatrix}^{T}$$

$$w_{w/b} = w_{w/s} + w_{s/b} \tag{4.33}$$

$$w_{w/b}^{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

Bu eşitlikleri kullanarak kuvvet denkleminin sol yanı,

$${}^{w}\dot{v}_{ref}^{w} + \Omega_{w/b}^{w} v_{ref}^{w} = \begin{bmatrix} \dot{V}_T \\ \dot{\beta} V_T \\ \dot{\alpha} V_T \cos\beta \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

şekline dönüşür.

$F_{A,T}^{w}$ aerodinamik ve itki kuvveti terimi şu şekilde hesaplanır.

$$F_{A/T}^{w} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \\ 0 \\ F_T \sin(\alpha + \alpha_T) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ C \\ L \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

ve rüzgar ekseni denklemlerindeki yerçekimi terimi ve bileşenleri,

$$g^w = C_{w/b}C_{b/n}g^n = C_{w/b}C_{b/n}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

$$g_1 = g_D(-\cos\alpha\cos\beta\ \sin\theta + \sin\beta\sin\phi\ \cos\theta + \sin\alpha\cos\beta\cos\phi\ \cos\theta) = -g_D\sin(\gamma)$$
$$g_2 = g_D(\cos\alpha\sin\beta\ \sin\theta + \cos\beta\sin\phi\ \cos\theta - \sin\alpha\sin\beta\cos\phi\ \cos\theta)$$
$$g_3 = g_D(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\phi\ \cos\theta)$$

şeklindedir.

$\Omega^{w}_{b/e}v^{w}_{ref}$ ifadesi,

$$\Omega^{w}_{b/e}v^{w}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & V_T R_w & -V_T Q_w \end{bmatrix}^T \tag{4.37}$$

$$\mathrm{R_w} = \mathrm{R_s} \quad \mathrm{Q_w} = (\text{-}\mathrm{P_s}\sin\beta + \mathrm{Q}\cos\phi)$$

şeklinde verilir. Tüm terimler yerine yazılırsa kuvvet denklemleri,

$$\begin{aligned} m\dot{V}_T &= F_T\cos(\alpha+\alpha_T)\cos\beta - D + mg_1 \\ m\dot{\beta}V_T &= -F_T\cos(\alpha+\alpha_T)\sin\beta - C + mg_2 - mV_T R_s \\ m\dot{\alpha}V_T\cos\beta &= -F_T\sin(\alpha+\alpha_T) - L + mg_3 + mV_T(Q\cos\beta - P_s\sin\beta) \end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklinde hesaplanır (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

4.4.2. Rüzgar eksen takımı moment denklemleri

Kararlılık eksen takımı açısal hıza ilişkin durum denklemi,

$${}^s\dot{w}^b_{b/e} + (w_{s/b}\ x\ w_{b/e})^b = (J^b)^{-1}\left[M^b_{A,T} - \Omega^b_{b/i}J^b w^b_{b/i}\right] \tag{4.39}$$

şeklindedir.

$\Omega^s_{s/b}$, $w^s_{b/e}$ 'ye ilişkin çapraz çarpım olduğuna göre ${}^s w^b_{b/e}$ şu şekilde yazılır.

$$ {}^s\dot{w}^b_{b/e} = -\Omega^s_{s/b}\, w^s_{b/e} + (J^s)^{-1}\left[M^s_{A,T} - \Omega^s_{b/e} J^b\, w^s_{b/e}\right] \qquad \textbf{(4.40)} $$

Gövde eksen takımı moment denklemleri bir dönüşüm ile kararlılık eksen takımı denklemlerine aşağıdaki şekilde dönüştürülür.

$J^s = C_{s/b} J^b C_{b/s}$ dönüşümü ile kararlılık ekseni eylemsizlik matrisi belirlenir.

$$ \begin{aligned} J_x^{'} &= J_x \cos^2\alpha + J_z \sin^2\alpha - J_{xz}\sin 2\alpha \\ J_y^{'} &= J_y \\ J_z^{'} &= J_x \sin^2\alpha + J_z \cos^2\alpha - J_{xz}\sin 2\alpha \\ J_{xz}^{'} &= \frac{1}{2}(J_x - J_z)\sin 2\alpha + J_{xz}\cos 2\alpha \end{aligned} \qquad \textbf{(4.41)} $$

ifadelerinin tanımlanmasıyla, kararlılık ekseninde tanımlı J^s eylemsizlik matrisi ve tersi,

$$ J^s = \begin{bmatrix} J_x^{'} & 0 & -J_{xz}^{'} \\ 0 & J_y^{'} & 0 \\ -J_{xz}^{'} & 0 & J_z^{'} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.42)} $$

$$ (J^s)^{-1} = \frac{1}{\Gamma}\begin{bmatrix} J_x^{'} & 0 & -J_{xz}^{'} \\ 0 & J_y^{'} & 0 \\ -J_{xz}^{'} & 0 & J_z^{'} \end{bmatrix} $$

şeklindedir. Moment denklemindeki diğer terimler, şu şekildedir.

$$ \begin{aligned} {}^s\dot{w}^s_{b/e} &= \begin{bmatrix} \dot{P}_s & \dot{Q} & \dot{R}_s \end{bmatrix}^T \\ w^s_{b/e} &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \qquad \textbf{(4.43)} $$

$$ \Omega^s_{s/b}\, w^s_{b/e} = \dot{\alpha}\begin{bmatrix} -R_s & 0 & P_s \end{bmatrix}^T $$

Denklemlerdeki terimlerin karşılıkları yerine yazılır ve denklemler düzenlenirse, kararlılık ekseni moment denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_s \\ \dot{Q} \\ \dot{R}_s \end{bmatrix} = -\dot{\alpha}\begin{bmatrix} -R_s \\ 0 \\ P_s \end{bmatrix} + \frac{1}{\Gamma}\begin{bmatrix} J_x^{'} & 0 & -J_{xz}^{'} \\ 0 & J_y^{'} & 0 \\ -J_{xz}^{'} & 0 & J_z^{'} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} l_s \\ m \\ n_s \end{bmatrix}\Omega_{b/e}^{s} J^{s}\right) \quad \textbf{(4.44)}$$

$$\Gamma = J_x^{'} J_z^{'} - J_{xz}^{'\,2}$$

şeklinde elde edilir (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

4.5. Lineer Olmayan Uçuş Denklemlerinin Ayrıştırılması

Kuvvet denklemlerindeki yerçekimi terimleri, ϕ yalpalama açısı sıfır alınırsa oldukça basitleşir.

$$\begin{aligned} g_1 &== -g_D \sin(\gamma) = -g_D \cos\beta \, \sin(\theta - \alpha) \\ g_2 &= g_D\left[\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha\right]\sin\beta = g_D \sin\beta \, \sin(\theta - \alpha) \\ g_3 &= g_D(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta) = g_D\cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad \textbf{(4.45)}$$

β küçük olduğu zaman, yerçekimi terimleri şu şekildedir.

$$\begin{aligned} g_1 &= -g_D \sin(\gamma) \\ g_2 &= g_D \sin\beta \, \sin(\theta - \alpha) \\ g_3 &= g_D \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad \textbf{(4.46)}$$

β çok küçük uygulaması ile, θ yunuslama açısı ve α hücum açısı kuzey doğu düzleminde aynı düşey düşey düzlem içindedir. Aralarındaki farka γ uçuş yolu açısı adı verilir. γ açısı ve kuvvet denklemleri,

$$\gamma_{|\phi=\beta=0} = \theta - \alpha \quad \textbf{(4.47)}$$

$$
\begin{aligned}
m\dot{V}_T &= F_T\cos(\alpha+\alpha_T) - D - mg_D\sin(\gamma) \\
m\beta\dot{V}_T &= -\beta F_T\cos(\alpha+\alpha_T) - C + \beta mg_D\sin\gamma - mV_T R_s \\
m\dot{\alpha}V_T &= -F_T\sin(\alpha+\alpha_T) - L + mg_D\cos\gamma + mV_T(Q-\beta P_s)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.48)}
$$

şeklindedir.

$\beta = 0$ uygulaması ile kuvvet denklemleri,

$$
\begin{aligned}
m\dot{V}_T &= F_T\cos(\alpha+\alpha_T) - D - mg_D\sin(\gamma) \\
m\beta\dot{V}_T &= -C + - mV_T R_s \\
m\dot{\alpha}V_T &= -F_T\sin(\alpha+\alpha_T) - L + mg_D\cos\gamma + mV_T Q
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.49)}
$$

şeklinde ifade edilir. $\beta = 0$ uygulaması ile, uzunlamasına harekete ilişkin birinci ve üçüncü denklemler, yanlamasına harekete ilişkin β, ϕ, ψ, P_s, R_s değişkenlerden bağımsız hale gelmiştir.

Kinematik denklemlerde, ϕ yalpa açısı sıfır alınırsa,

$$\dot{\theta} = Q \qquad \textbf{(4.50)}$$

şeklinde bulunur.

Gövde eksen takımı moment denklemelerinde P, R yalpalama ve sapma hızlarını çok küçük yada sıfır alınırsa, yunuslama şeklinde uzunlamasına harekete ilişkin moment denklemi, yanlamasına harekete ilişkin yalpalama ve sapma moment denklemlerindeki değişkenlerden bağımsız olur ve uzunlamasına harekete ilişkin son denklem elde edilir. Yunuslama şeklinde uzunlamasına harekete ilişkin moment denklemi,

$$J_Y\dot{Q} = m \qquad \textbf{(4.51)}$$

şeklinde elde edilir.

Son denklemlerinde eklenmesi ile ayrıştırılmış uzunlamasına hareket denklemleri,

$$\begin{aligned} m\dot{V}_T &= F_T\cos(\alpha+\alpha_T) - D - mg_D\sin(\gamma) \\ m\dot{\alpha}V_T &= -F_T\sin(\alpha+\alpha_T) - L + mg_D\cos\gamma + mV_TQ \\ \dot{\theta} &= Q \\ \dot{Q} &= m/J_Y \end{aligned} \qquad \textbf{(4.52)}$$

şeklinde olur. Uzunlamasına harekete ilişkin durum değişkenleri vektörü,

$$x^T = \begin{bmatrix} V_T & \alpha & \theta & Q \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(4.53)}$$

şeklinde alınır (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

4.6 Sürekli Uçuş Durumu

Sistemi denge noktası civarındaki davranışı, sistem değişkenlerinin bazıları az miktarda bozularak incelenir. Uçuş değişkenlerinin tümünün sabit yada sıfır olduğu diğer bir değişle lineer ve açısal hız bileşenleri sabit yada sıfır ve böylece tüm ivme bileşenlerinin sıfır olduğu uçuş koşuluna surekli uçuş durumu denir.

Lineer olman durum denklemlerinin genel gösterimi, $f(x, \dot{x}, u) = 0$ şeklindedir. Lineer olmayan durum denklemlerinin tekil noktaları yada denge noktaları, $f(x, \dot{x}, u) = 0$, $\dot{x} \equiv 0$, $u \equiv 0$ veya sabit şeklinde koşulu sağlayan $X=X_e$ çözüm vektörü ile belirlenir.

Sürekli kanat irtifa uçuşu: : $\phi(t), \dot{\phi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\psi}(t) \equiv 0 \quad (P, Q, R \equiv 0)$

Sürekli dönüş uçuşu: $\dot{\phi}(t), \dot{\theta}(t) \equiv 0 \quad \dot{\psi}(t)$ dönüş hızı

Sürekli tırmanış: $\phi(t), \dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t) \equiv 0 \quad \dot{\theta}(t)$ = tırmanış hızı

Sürekli yalpa: $\phi(t), \dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t) \equiv 0 \quad \dot{\phi}(t)$ = yalpa hızı

şeklinde tanımlanır (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

4.7. Lineer Uçuş Denklemlerinin Bulunması

Uçağa ilişkin lineer olmayan hareket denklemleri, sürekli durum uçuş koşullarının kuvvet ve momentleri denge durumundan,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} U & V & W \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} U_0 & V_0 & W_0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \\
\begin{bmatrix} P & Q & R \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} P_0 & Q_0 & R_0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} L & M & N \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} L_0 & M_0 & N_0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{4.54}$$

şeklinde saptırılarak lineerleştirilir. Burada sıfır indisli harflerle verilen değişkenler denge noktasındaki değerleri, küçük harflerle verilen değişkenler ise denge durumundan sapmayı gösterir. Uçaklarda denge durumu, trim koşulu denilen kararlı bir uçuş durumudur. Böylece, lineer olmayan denklemlerden, denge noktasından küçük sapmalar yaptırılarak sabit katsayılı lineer durum denklem takımı elde edilir.

Lineer olmayan uçuş denklemleri,

$$f(\dot{X}, X, u) = 0 \tag{4.55}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu vektör gösterimi 9 adet denklemi içerir ve rüzgar eksentakımı kuvvet eşitliklerinden, kinematik denklemlerden ve kararlılık ekseni moment denklemlerinden oluşturulur. Azaltılmış durum değişkenleri vektörü ve kontrol giriş vektörü,

$$\begin{aligned}
X^T &= \begin{bmatrix} V_T & \beta & \alpha & \phi & \theta & \psi & P_s & Q_s & R_s \end{bmatrix}^T \\
U^T &= \begin{bmatrix} \delta_t & \delta_e & \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{4.56}$$

şeklindedir

(4.55) ’de verilen lineer olmayan denklemler, denge noktası civarında Taylor serisine açılır ve yalnız birinci terimler alınır. Böylece durumlardaki, durumların türevlerindeki ve kontrol giriş vektörlerindeki denge noktalarından olan sapmaların ,

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.57}$$

şeklinde lineer durum denklemini sağlar. Küçük harflerle verilen x ve u değişkenleri, durum vektörü ve kontrol vektörünün denge noktalarından sapmasını gösterir.

Katsayı matrisleri, Jakobyen matrislerin denge noktalarındaki hesabından şu şekilde belirlenir.

$$E = -\begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\dot{X}} f_9 \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} X=X_0 \\ U=U_0 \end{pmatrix}} \qquad A = \begin{bmatrix} \nabla_{X} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{X} f_9 \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} X=X_0 \\ U=U_0 \end{pmatrix}} \qquad B = \begin{bmatrix} \nabla_{U} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{U} f_9 \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} X=X_0 \\ U=U_0 \end{pmatrix}} \tag{4.58}$$

Sürekli durum denge koşulları,

$$\beta,\ \phi,\ P,\ Q,\ R = 0 \text{ ve tüm türevler sıfır}$$

$$V_T = V_{T0e},\quad \alpha = \alpha_0,\ \theta = \theta_0,\quad \psi = 0 \tag{4.59}$$

şeklindedir. Verilen denge koşulları, lineerleştirmeyi ve uzunlamasına-yanlamasına olan hareket denklemlerin, basitleştirir.

Boylamasına harekete ilişkin durum ve kontrol vektörü,

x=[$\alpha(t)$ q(t) $v_T(t)$ $\theta(t)$]^T ve u=[$\delta_e(t)$ $\delta_{th}(t)$]^T olarak yazılabilir.

Boylamasına katsayı matrisleri,

$$E = \begin{bmatrix} V_{Te} - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 \\ -M_{\dot{\alpha}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & V_{T_{\alpha}} + Z_q & Z_V - X_{T_v}\sin(\alpha_e + \alpha_T) & -g_D \sin\alpha_e \\ M_{\alpha} + M_{T_{\alpha}} & M_q & M_V + M_{T_V} & 0 \\ X_{\alpha} & 0 & X_V + X_{T_v}\cos(\alpha_e + \alpha_T) & -g_D \cos\alpha_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.60)}$$

$$B = \begin{bmatrix} Z_{\delta e} & -M_{\delta t}\sin(\alpha_e + \alpha_T) \\ M_{\delta e} & M_{\delta t} \\ X_{\delta e} & M_{\delta t}\cos(\alpha_e + \alpha_T) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yanlamasına durum ve kontrol işaretleri, sırasıyla x=[β(t) $\phi(t)$ p(t) r(t)] ve u=[$\delta_a(t)$ $\delta_r(t)]^T$ şeklindedir.

Yanlamasına katsayı matrisleri,

$$E = \begin{bmatrix} V_{Te} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_{\beta} & g_D \cos\theta_e & Y_p & Y_r - V_{Te} \\ 0 & 0 & \cos\gamma_e \big/ \cos\theta_e & \sin\gamma_e \big/ \cos\theta_e \\ L_{\beta}' & 0 & L_p' & L_r' \\ N_{\beta}' & 0 & N_p' & N_r' \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.61)}$$

$$B = \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ L_{\delta a}' & L_{\delta r}' \\ N_{\delta a}' & N_{\delta r}' \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

Matrislerdeki elemanların ifadeleri şu şekilde verilmiştir.

$$L_\beta' = \mu L_\beta + \sigma_1 N_\beta \quad , \quad L_p' = \mu L_p + \sigma_1 N_p \quad , \quad L_r' = \mu L_r + \sigma_1 N_r$$
$$N_\beta' = \mu N_\beta + \sigma_2 L_\beta \quad , \quad N_p' = \mu N_p + \sigma_2 L_p \quad , \quad N_r' = \mu N_r + \sigma_2 L_r$$

(4.62)

$$L_{\delta_a}' = \mu L_{\delta_a} + \sigma_1 N_{\delta_a} \quad , \quad L_{\delta_r}' = \mu L_{\delta_r} + \sigma_1 N_{\delta_r}$$
$$N_{\delta_a}' = \mu N_{\delta_a} + \sigma_2 L_{\delta_a} \quad , \quad N_{\delta_r}' = \mu N_{\delta_r} + \sigma_2 L_{\delta_r}$$

Bir F-16 uçağını yanal modeline ilişkin tasarım örneğin, Lewis (2003), Adams ve diğ.(1994)'deki modellerden yararlanılmıştır. Adams ve diğ.(1994) 'deki F-16 modelindeki gösterimden yararlanılmış, Lewis (2003) 'teki F-16 modelindeki ψ(t) durum değişkenine ilişkin $\dot{\psi}(t) = 1.0561 r(t)$ denklemi ilave edilmiştir. Ayrıca, Adams ve diğ.(1994)'deki $\dot{\phi}(t) = p(t)$ yaklaşık denklemi yerine F-16 uçağına ilişkin $\dot{\phi}(t) = p(t) + 0.33976\, r(t)$ denklemi alınmıştır. Durum değişkenlerinin ise $x_1(t) = \beta(t)$, $x_2(t) = \phi(t)$, $x_3(t) = \psi(t)$, $x_4(t) = p(t)$, $x_5(t) = r(t)$ şeklinde sıralaması yapılmıştır. Lewis (2003), Adams ve diğ.(1994)'deki birbirine benzer yapıdaki modellerde belirtilen düzenlemeler ile F-16 uçağının yanlamasına hareketine ilişkin beşinci mertebeden genel dinamik modeli şu şekilde oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\beta & g/v & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.33976 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0561 \\ L_\beta & 0 & 0 & L_p & L_r \\ N_\beta & 0 & 0 & N_p & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \\ \psi(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a(t) \\ \delta_r(t) \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.63)}$$

Çıkış denklemi ise kontrol yöntemindeki amaç için durum değişkenlerinin bir yada birkaçı seçilmesine göre değişir. Çıkış matrisi, çeşitli davranış ölçütlerine ilişkin çıkışlara göre ayrıştırılır (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

Uçuş kontrol sisteminde çıkışlar için seçilen durum değişkenlerine göre çıkış matrisi,

$$z(t)=\begin{bmatrix} C_{\infty} \\ .. \\ C_{2} \\ .. \\ C_{2g} \end{bmatrix} x(t)+Bu(t)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \\ \psi(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a(t) \\ \delta_r(t) \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.64)}$$

$$y(t)=C_y x(t)=\beta(t) \quad \textbf{(4.65)}$$

şeklinde oluşturulur.

Burada β, p ve r indisli Y, L, N sistem matris elemanları yanlamasına kararlılık türevlerini, δ_a ve δ_r indisli Y, L, N giriş matris elemanları, yanlamasına kontrol türevlerini gösterir. Açılar derece, hızlar ise derece/saniye birimlidir.

4.8. Uçağın Ana Kontrol Yüzeyleri ve Uçuş Modları

Uçağın uzunlamasına eksen etrafında hareketlerini kanatçık, elevon veya kanat üzerine yerleştirilmiş ve kanatçık görevini gören spoiler ile kontrol edilir. Uçağın yanlamasına eksen etrafında yaptığı yunuslama hareketi; irtifa dümeni , hareketli yatay kararlaştırıcı ve elevonlar ile kontrol edilir. Uçağın düşey eksen etrafındaki hareketi, yön dümeni tarafından sağlanır. Kuyruk takımı, uçağın arka kısmıdır ve hareketli yatay, dikey kararlaştırıcılar ve bunlara bağlanmış uçuş kumanda yüzeylerinden oluşur (Lewis, 2003; Mc.Ruer ve diğ., 1973).

Uçağın uzunlamasına, enine, düşey eksenler etrafında havada uçuşu ana kontrol yüzeyleri ile sağlanır. Ana kontrol yüzeyleri, kanatçıklar (aileronlar), spoilerler,

kuyruk takımı, irtifa dümeni (elevator), hareketli yatay kararlaştırıcı (stabilizator), elevonlar (irtifa dümeni+ kanatçık), yön dümeni (rudder) şeklinde sıralanabilir. Beş temel hareket modlarının bileşimi şeklinde uçağın hareketleri incelenebilir. Uçağın boylamasına hareketini oluşturan modlar Kısa Periyod Modu ve Fügoid Modudur. Uçağın yanlamasına hareketini oluşturan modlar Yalmalama Modu, Düz-Yalpa Modu ve Spiral Modudur.

Kısa Periyod Modu ve Fügoid modu pilotun irtifa dümeni kumandasu sonucu gerçekleşen yunuslama şeklinde boylamasına harekettir. Kısa Periyod Modu, α ve q kısa periyod durumlarını doğrudan, V ve θ durumlarını dolaylı etkiler. Fügoid modu, V, h ve θ fügoid durumlarını doğrudan , α ve q kısa periyod durumlarını dolaylı şekilde etkiler. Bu modlara ilişkin kutuplar karmaşık düzlemde karmaşık eşlenik kutup çiftleri ile gösterilir. Fügoid Modu Kutupları, Kısa Periyod Modu kutuplarına göre orjine çok daha yakın olmaları ile ayırt edilir. Bu nedenle, Fügoid Modu yavaş sönümlenen ve oluşması istenmeyen bir moddur. Kısa Periyod modu ise boylammasına en hızlı sönümlenen ve oluşması istenen bir moddur.

Uçağın yanlamasına hareketini oluşturan modlar sırasıyla Yalpalama Modu, pilotun kanatçık kumandası sonucu, Düz-Yalpa ve Spiral Modu pilotun kanatçık veya yön dümeni kumandası sonucu gerçekleşen modlardır. Yalpalama Modu, p ve Φ durumlarını etkiler. Bu nedenle p ve Φ durumlarına, yalpalama modu durumları denir. Düz Yalpa Modu, β ve r durumlarına etki eder. Bu nedenle, β ve r durumlarına düz-yalpa modu durumları denir. Yanlamasına hareket modları olan Yalpalama Modu, Düz-Yalpa ve Spiral Modu sırasıyla karmaşık düzlemde gerçel bir kutup, karmaşık eşlenik bir kutup ve orjine çok yakın gerçel bir kutup ile gösterilir. Yalpalama Modu, Düz-Yalpa Modunun gerçel kısmına göre orjine daha uzaktır , yanlamasına harekette hızlı sönümlenen ve oluşması istenen bir moddur. Düz-Yalpa Modu kutupları, orjine fügoid modu kutuplarından daha uzak, kısa periyod kutuplarından daha yakındır ve sönümlü salınımlı hareket şeklinde uçağın aşırı sallanmasına neden olur. Bu nedenle, Yalpalama Moduna göre daha yavaş sönümlenen ve gerçekleşmesi istenmeyen bir moddur. Yalpalama Modu yanlamasına harekette en hızlı sönümlenen mod olmasına karşın Spiral Mod ise yanlamasına harekette en yavaş sönümlenen moddur. Çok yavaş sönümlenmesi sebebiyle sistem üzerinde olumsuz etkisi çok azdır.

5. F16 UÇAK KONTROL SİSTEM TASARIMI

5.1 F16 Uçağın Yanlamasına Hareket Modeli

Bir F16 uçağını yanal modeline ilişkin tasarım örneği, Stevens ve Lewis (2003), Adams ve diğ. (1994) 'den yararlanarak parametreli değişim modeli oluşturulmuştur. Kontrol edilen sistemin LPV modeli aşağıda şekilde verilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z &= C(p)x + D_1(p)w + D_2(p)u \\ y &= C_y x + D_{y1}u + D_{y2}u \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sistemin davranış ölçütlerine ilişkin z çıkışı, davranış amaçlarına göre ayrıştırılırsa, model şu şekilde tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ z_\infty &= C_\infty(p)x + D_{\infty 1}(p)w + D_{\infty 2}(p)u \\ z_2 &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \\ z_{g2} &= C_{g2}(p)x + D_{g21}(p)w + D_{g22}(p)u \\ y &= C_y(p)x + D_{y1}(p)w + D_{y2}(p)u \end{aligned} \tag{5.2}$$

Bu gösterime ilişkin A, B, C, D katsayı matrisleri,

$$\left[\begin{array}{c:c:c} A(p) & B(p) \\ \hdots & \hdots & \hdots \\ C(p) & D(p) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} A & B_1 & : & B_2 \\ \hdots & \hdots & \hdots & \hdots & \hdots \\ C_z & D_{11} & : & D_{12} \\ .. & .. & : & .. \\ C_y & D_{21} & : & D_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} A & B_1 & B_2 \\ \hdots & \hdots & \hdots & \hdots \\ C_\infty & D_{\infty 1} & D_{\infty 2} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \\ C_{g2} & D_{g21} & D_{g22} \\ .. & .. & .. & .. \\ C_y & D_{y1} & D_{y2} \end{array}\right] \tag{5.3}$$

şeklinde ayrıştırılır.

Bir uçaktaki değişkenler, β(t) yana kayma açısı [derece], $\phi(t)$ yalpa açısı [derece], p(t) yalpa hızı [derece / san.], ψ(t) sapma açısı, r(t) ise sapma hızı [derece / san.], $\delta_a(t)$ kanatçık yüzey sapması [derece], $\delta_r(t)$ dümen yüzey sapması [derece] şeklindedir. $z_\infty(t) = x_2(t) = \phi(t)$, $z_2(t)=[x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T=[\phi(t) \quad \psi(t) \quad p(t) \quad r(t)]^T$, $z_{2g}(t)=u(t)$ ve $y = \psi(t)$ eşitlikleri alınabilir.

Durum değişkenlerinin, $x_1(t)= \beta(t)$, $x_2(t)=\phi(t)$, $x_3(t)= \psi(t)$, $x_4(t)= p(t)$, $x_5(t)= r(t)$ seçimi için x durum vektörü, $x=[\beta(t) \quad \phi(t) \quad \psi(t) \quad p(t) \quad r(t)]^T$ ve $u=[\delta_a(t) \quad \delta_r(t)]^T$ kontrol giriş vektörü şeklinde alınmıştır. $\dot{x} = A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u$

Sistem parametrelerine bağlı olarak F-16 uçağını dinamik modelindeki $\dot{x} = A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u$ gösterimi,

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\beta & g/v & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.33976 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0561 \\ L_\beta & 0 & 0 & L_p & L_r \\ N_\beta & 0 & 0 & N_p & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \\ \psi(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a(t) \\ \delta_r(t) \end{bmatrix}$$

(5.4)

şeklinde elde edilir.

Çıkış denklemleri ise kontrol yöntemindeki amaç için durum değişkenlerinin bir yada birkaçı seçilmesine göre belirlenir. z çıkışı, çeşitli davranış ölçütlerine ilişkin çıkışlara göre ayrıştırılır.

Uçuş kontrol sisteminde çıkış denklemi şu şekildedir.

$$z = C(p)x + D_1(p)w + D_2(p)u \qquad \textbf{(5.5)}$$

Seçilen durum değişkenlerine göre çıkış denklemi,

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_\infty \\ .. \\ C_2 \\ .. \\ C_{2g} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{\infty 1} \\ .. \\ D_{21} \\ .. \\ D_{g21} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} D_{\infty 2} \\ .. \\ D_{22} \\ .. \\ D_{g22} \end{bmatrix} u(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \\ \psi(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ .. & .. \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \textbf{(5.6)}$$

şeklinde oluşturulur.

Ölçülebilen çıkışlara ilişkin $y = C_y(p)x + D_{y1}(p)w + D_{y2}(p)u$ çıkış denklemi,

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \\ \psi(t) \\ p(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.7)}$$

şeklinde seçilebilir.

F16 uçak modelinin parametre değişimli modeli, uçak parametrelerinin her birinin sistem matrisinin özdeğerlerinin değişimine olan etkisi dikkate alınarak uçağın en etkili üç parametresi belirlenmiştir. Üç parametrenin seçimi ise, özdeğer değişimine en etkili olan parametreler belirlenmiş, bunlardan birincisine ilave olarak sistem matrisinin esas ve ters köşegen üzerinde olanlardan özdeğer değişimine en etkili olan diğer ikisi seçilmiştir.. Verilen modelde, sinα , N_β ve Y_β sırasıyla, [0,03…0.4959], [(-0.99) … (-0.87)], [0,03…0.4959], değerler arasında değiştiği, Adams ve diğ. (1994) 'de yer alan F-16 uçağının uçuş esnasındaki gerçek parametre değişimlerinden belirlenmiştir.

Y_β , N_β and sinα belirsizlik aralıkları, $Y_\beta \in$ [(-0.1512) …(-0.11177)] , $N_\beta \in$ [0,069…1.29] , sinα ∈ [(-1.53309) … (-0.8255)] 'dır. Belirsizlik aralıkları, Adams ve diğ.(1994) 'daki gerçek uçuş koşullarındaki bu parametre değişimlerinin alt ve üst sınırları alınarak belirlenmiştir.

$z_\infty = x_3 = \psi(t)$, $z_2=[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4]^T = [\phi(t) \;\; \psi(t) \;\; p(t) \;\; r(t)]^T$ $z_{2g}=u(t)$ ve $y = x_3(t) = p(t)$ ve parametre vektorü $p = (Y_\beta , N_\beta , \sin\alpha)$ şeklinde seçilmiştir.

Modeldeki diğer parametrelerin nominal değerleri, tablo şeklinde aşağıda verilmiştir. ($\cos\alpha_0 = -0.93964$)

$Y_{\beta 0}$	$L_{\beta 0}$	$N_{\beta 0}$	g_0/v_0	L_{p0}	N_{p0}	L_{r0}
-0.13150	-10.614	0.99655	0.14858	-1.1793	-0.0018174	1.0023
N_{r0}	$Y_{\delta a0}$	$L_{\delta a0}$	$N_{\delta a0}$	$Y_{\delta r0}$	$L_{\delta r0}$	$N_{\delta r0}$
-0.25855	0.00012049	-0.1031578	-0.0021330	0.00032897	0.020987	-0.010715

Çizelge 5.1 : F16 uçağının nominal parametre değerleri.

Çıkış denklemlerine ilişkin model sistem parametrelerine bağlı alınmadığından çıkış matrisleri ve B_1 matrisi aynı kalmak üzere, parametreye bağlı A ve B_2 matrisleri, nominal parametre değerleri ve parametre belirsizliğine ilişkin sistem parametre sayısına göre değişik şekiller alır.

Uçak parametreleri $p = (Y_\beta , N_\beta , \sin\alpha)$ 'ye bağlı şekilde A ve B_2 matrisleri ,

$$A(p) = \begin{bmatrix} Y_\beta & g/v & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.33976 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0561 \\ L_\beta & 0 & 0 & L_p & L_r \\ N_\beta & 0 & 0 & N_p & N_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_\beta & 0.14858 & 0 & \sin\alpha & -0.93964 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.33976 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0561 \\ -10.614 & 0 & 0 & -1.1793 & 1.0023 \\ N_\beta & 0 & 0 & -0.0018174 & -0.25855 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.8)}$$

$$B_2(p) = B_2 = \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00012049 & 0.00032897 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.1031578 & 0.020987 \\ -0.0021330 & -0.010715 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.9)}$$

şeklinde gösterilir.

Diğer katsayı matrisleri şu şekildedir.

$$B_1(p) = B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} C_\infty \\ .. \\ C_2 \\ .. \\ C_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.10)}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{\infty 1} \\ .. \\ D_{21} \\ .. \\ D_{g21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} D_{\infty 2} \\ .. \\ D_{22} \\ .. \\ D_{g22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .. & .. \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ .. & .. \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p vektöründeki parametrelerin nominal değerleri için A matrisinin özdeğerleri yada sistemin açık çevrim kutupları, s_1=0, s_2=-0.4026+j2.01241, s_2=s_2*=-0.4026-

j2.01241, s4=-0.6957, s5=-0.0685 şeklindedir. Buradan uçuş modları olan düz yalpa, yalpa ve sapma modları kutupları ise şu şekilde belirlenir.

$$s_{düzyalpa1}=-0.4026+j2.01241$$

$$s_{düzyalpa2}=-0.4026-j2.01241$$

$$s_{yalpa}=-0.6957$$

$$s_{sapma}=-0.0685$$

F16 uçak modelinin parametre değişimli modeli, uçak parametrelerinin her birinin sistem matrisinin özdeğerlerinin değişimine olan etkisi dikkate alınarak uçağın üç parametresine göre oluşturulmuştur. Üç parametrenin seçimi, özdeğer değişimine en etkili olanlardan birincisi dışında sistem matrisinin esas ve ters köşegen üzerinde olanlardan özdeğer değişimine en etkili olanları belirlenerek yapılmıştır.

5.2. F16 Uçak Modeli Üzerinde Statik ve Dinamik Kontrol Tasarım Sonuçları

Ele alınan uçak modeli üzerinde, statik ve dinamik geribeslemeli kontrol tasarımı yapılmıştır ve beklenen sonuçlar elde edilmiştir.

5.2.1. Sonuçların değerlendirilmesi

Bu tezde yapılan çalışmada, çoklu kısıtlar altında parametreler değişmediği ve parametre değişimlerinin olduğu durumlarda kontrol tasarımı ele alınmıştır. Çok girdili çok çıktılı bir sistem olan F16 uçağı için tasarlanan karma kontrol ediciler ve karma LPV kontrol ediciler ile istenenler elde edilmiştir. Statik ve dinamik durumlarda elde edilen sonuçlar ile istenen kısıtların sağlandığı ve optimal davranış ölçütünün gerçeklendiği görülmüştür. Statik ve dinamik durumlarda elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçlar birbirine benzer olmasına karşılık dinamik kontrol edicili sistemlerin geçici haldeki davranışlarının daha hızlı olduğu görülmüştür.

Bu sonuçlarda görüldüğü üzere her iki durumda çoklu kısıtlar yanında belirsizlikler olduğu halde iyi sonuçlar alınmaktadır. Ancak belirsizliklerin sayısı üçten fazla olduğunda çoklu kısıtlar altında elde edilen başarılı sonuçlar elde edilememektedir.

Ancak ele alınan model için üç parametre değişimine kadar olan parametre belirsizliğinde elde edile sonuçlar, istenilen kısıtlamaları ve bunlara ilişkin performansları sağladığı görülmüştür. Böylece çoklu kısıtların olması yanında parametre değişimlerinin de etkisinde kontrol tasarımı, çok girdili çok çıktılı bir sistem olan F16 uçağı için yapılmış ve tasarlanan LPV kontrol ediciler ile istenenler aşağıda verilen sonuçlar şeklinde elde edilmiştir.

5.2.2. Tasarım sonuçları

Statik ve dinamik karma H_2/H_∞ ve karma H_2/H_∞ LPV kontroluna ilişkin sonuçlar, aşağıdadır. Aşağıda, optimizasyon değişkenleri, kesin artılık yada eksilik testi için matris değişkenlerinin özdeğerleri, LMI eşitsizliklerinin optimal değişkenler yerine konulduktan sonra elde edilen matrisin kesin artılık yada eksilik testi için bu matrislerin özdeğerleri ve kontrol ediciye ilişkin sonuçlar verilmiştir.

5.2.2.1 Statik karma H_2/H_∞ ve LPV kontroluna ilişkin sonuçlar

```
 gopt =
    0.1000

h2opt =
   16.6114
K =
   90.6635    9.5699   46.9480   37.5739   24.8773
   74.3695   -0.5163   50.8006   -1.5167   65.6562

X =
    0.0088    0.0161   -0.0011   -0.0218   -0.0027
    0.0161    0.3932    0.0222   -0.1337   -0.0233
   -0.0011    0.0222    0.0098   -0.0039   -0.0057
   -0.0218   -0.1337   -0.0039    0.2284    0.0100
   -0.0027   -0.0233   -0.0057    0.0100    0.0112

Y =
    0.0154    0.6616    0.2854    5.3832   -0.0789
    0.4488    0.7969    0.0402   -1.4475    0.2469
```

Q =

0.4701	0.0222	-0.1337	-0.0233	0.6615	0.7969
0.0222	0.0867	-0.0039	-0.0057	0.2854	0.0402
-0.1337	-0.0039	0.3053	0.0100	5.3832	-1.4475
-0.0233	-0.0057	0.0100	0.0881	-0.0789	0.2469
0.6615	0.2854	5.3832	-0.0789	221.5026	1.9555
0.7969	0.0402	-1.4475	0.2469	1.9555	53.4869

eigsLMIpole =

1.0e+003 *

-9.8398
-9.5596
-0.8919
-0.7518
-0.0378
-0.0278
-0.0074
-0.0059
-0.0003
-0.0002

eigslmihinf =

-309.2146
-112.1297
-9.2524
-1.4263
-0.9751
-0.0578
-0.0023

eigslmih2 =

1.0e+004 *

-4.0031
-2.4173
-0.3657
-0.3117
-0.3112
-0.3112
-0.0405
-0.0010

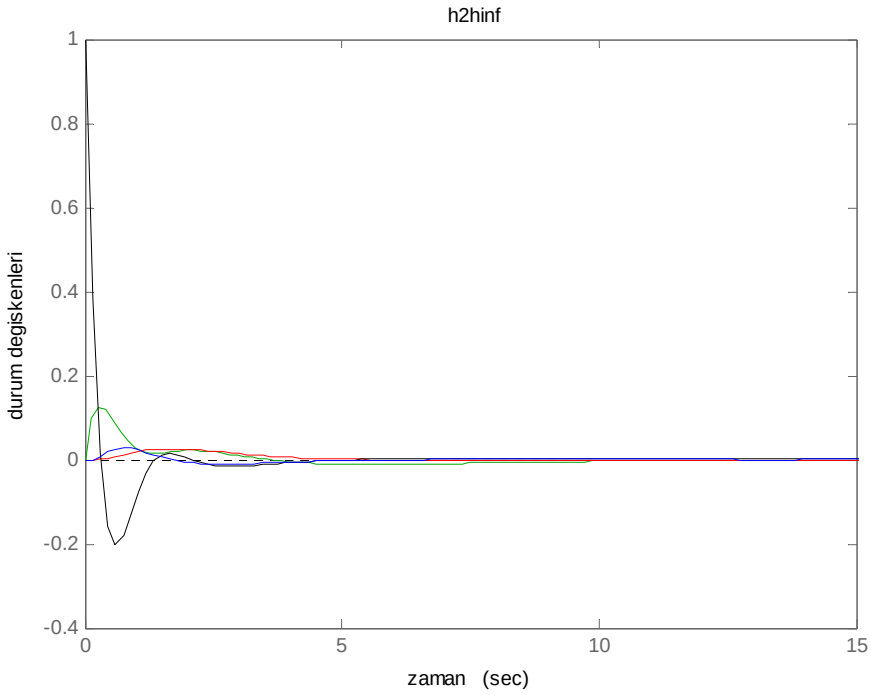
```
  -0.0001
  -0.0000
  -0.0000
X =
   0.0088   0.0161  -0.0011  -0.0218  -0.0027
   0.0161   0.3932   0.0222  -0.1337  -0.0233
  -0.0011   0.0222   0.0098  -0.0039  -0.0057
  -0.0218  -0.1337  -0.0039   0.2284   0.0100
  -0.0027  -0.0233  -0.0057   0.0100   0.0112

eig(X)
   0.0032
   0.0081
   0.0135
   0.1550
   0.4716

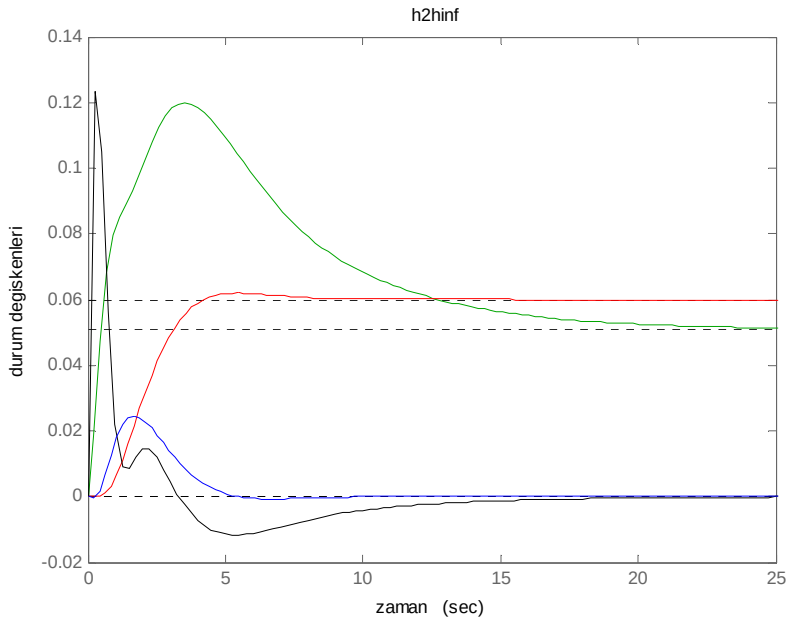
K =
  90.6635   9.5699  46.9480  37.5739  24.8773
  74.3695  -0.5163  50.8006  -1.5167  65.6562

 enom2=eig(a+b2*K)
enom2 =

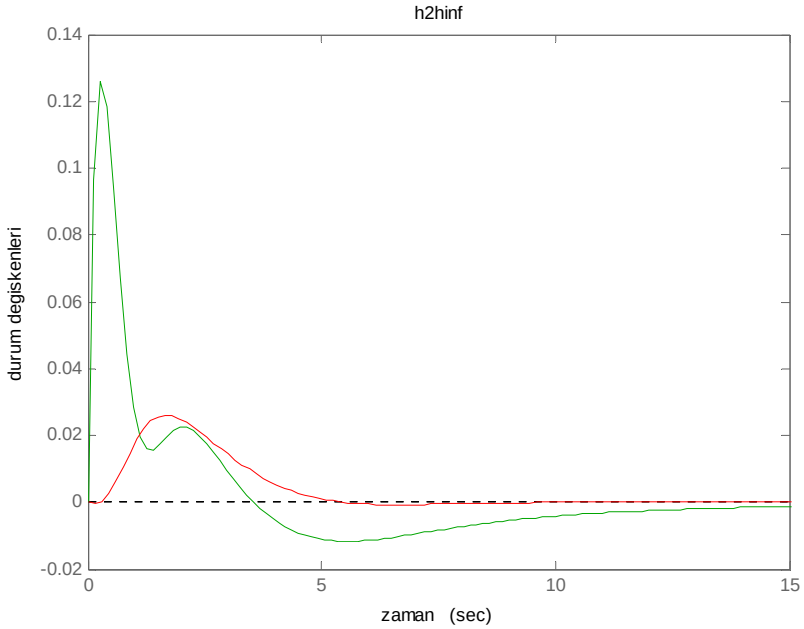
  -2.3117 + 2.5802i
  -2.3117 - 2.5802i
  -0.7363 + 0.6146i
  -0.7363 - 0.6146i
  -0.2340
```



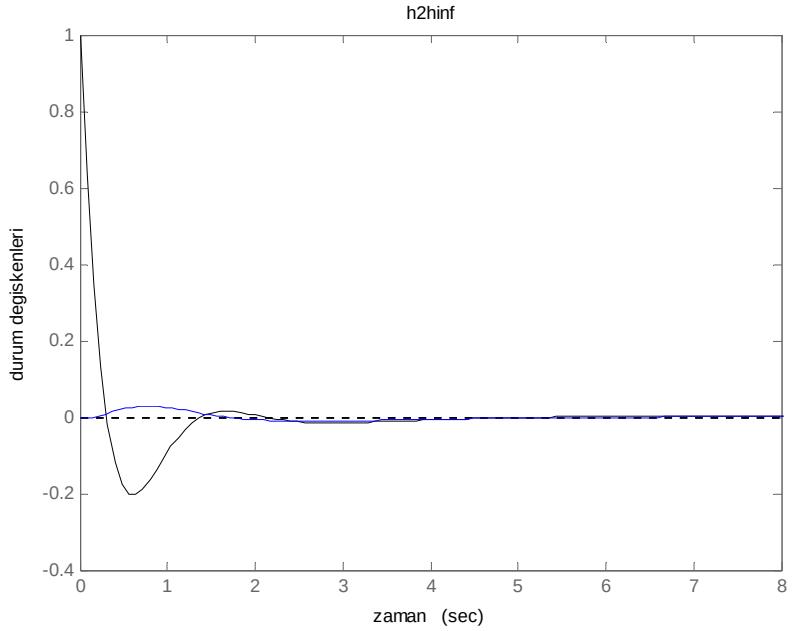
Şekil 5.1 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t),r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).



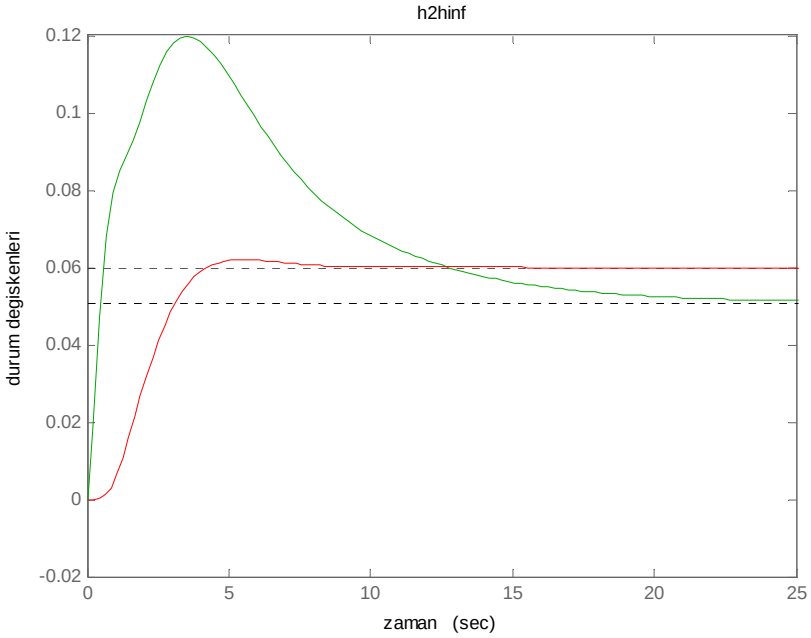
Şekil 5.2 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t), r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , (t):siyah).



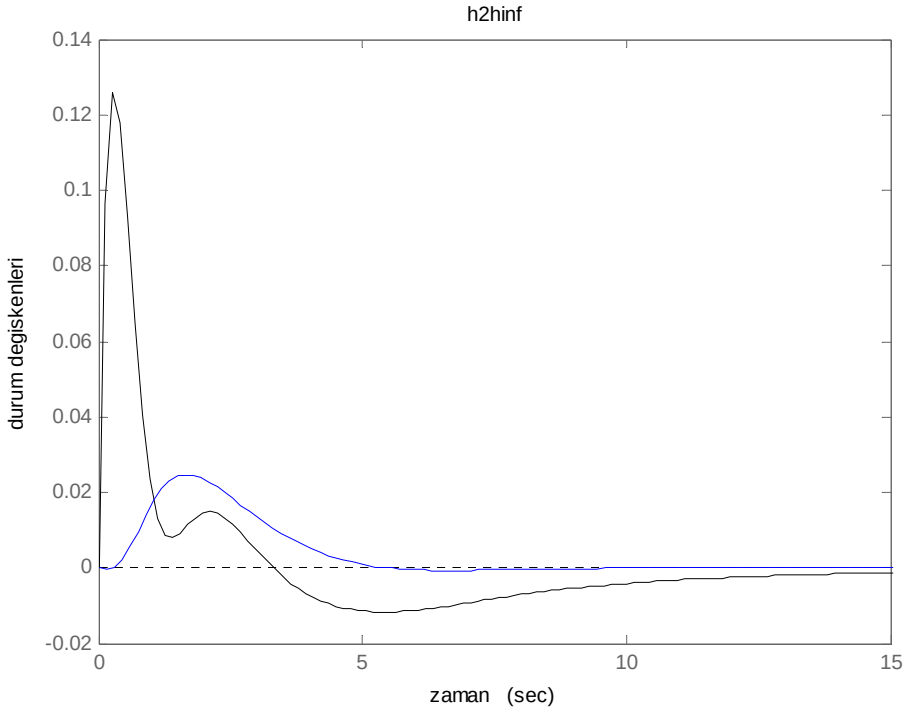
Şekil 5.3 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı)



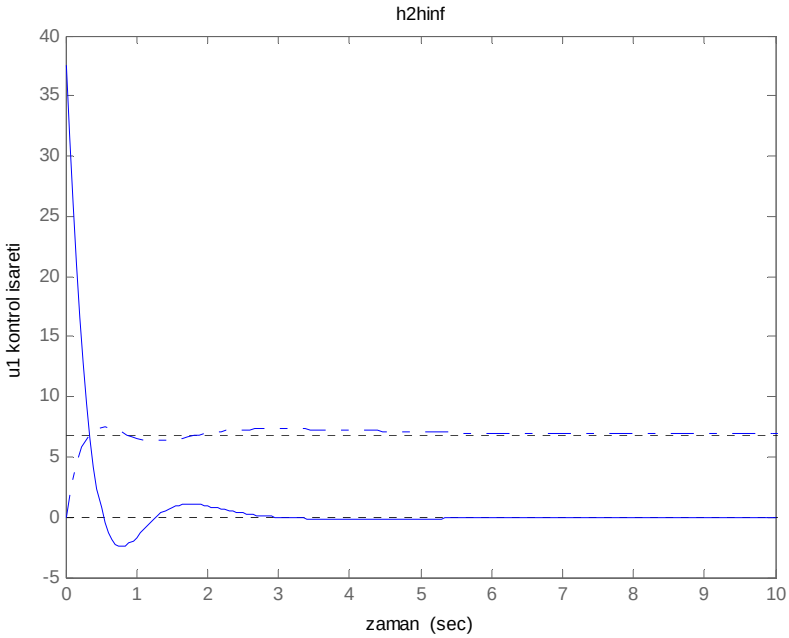
Şekil 5.4 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri (mavi , r(t): siyah)



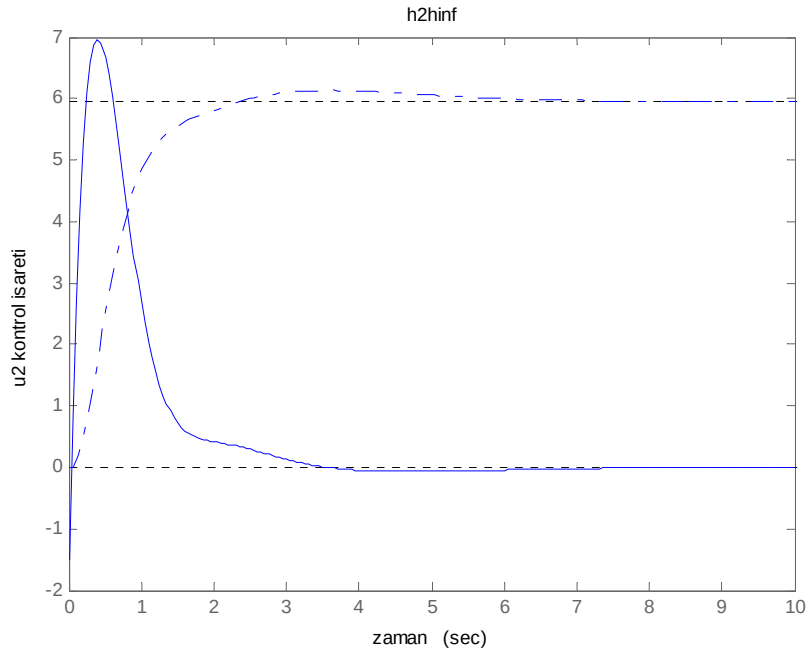
Şekil 5.5 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



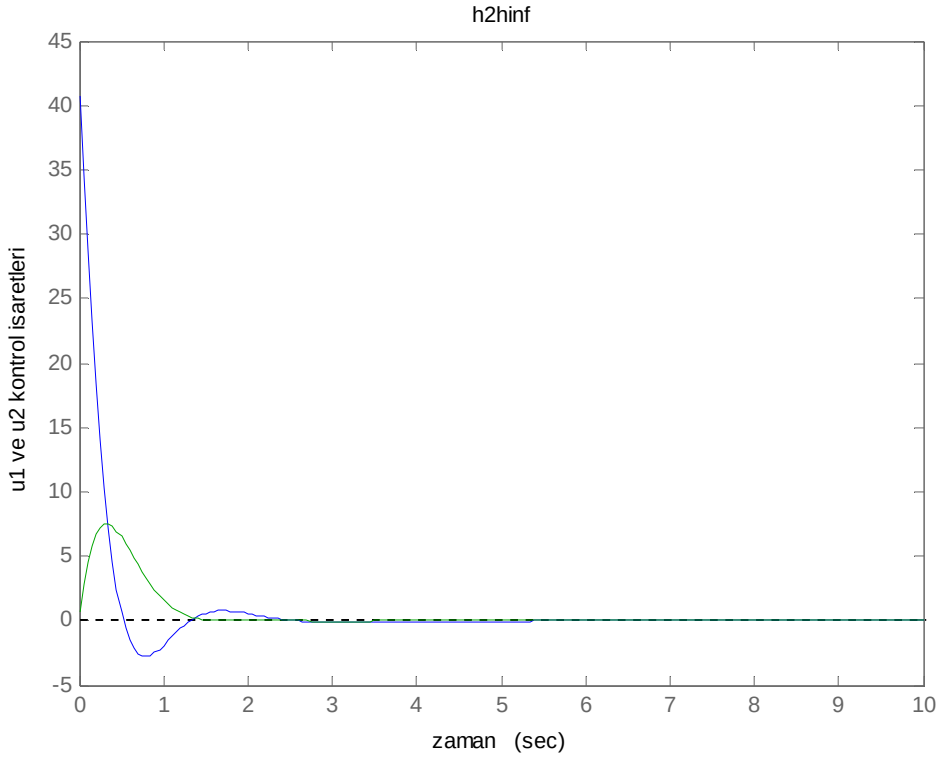
Şekil 5.6 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri (p(t): mavi , r(t): siyah)



Şekil 5.7 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.



Şekil 5.8 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.



Şekil 5.9 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ilişkin $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ kontrol işaretleri ($u_1(t)$: mavi, $u_2(t)$: yeşil).

Statik durum ve parametrelerin değiştiği duruma ilişkin sonuçlar,

```
gopt =
   0.1000

h2opt =
  39.6103

K =
  1.0e+003 *
   0.5767  -0.1052   0.7933   0.1687   0.1748
   1.4519  -0.6791   2.1053  -0.0158   0.5122

X =
   0.0032  -0.0014  -0.0030  -0.0008   0.0020
  -0.0014   0.0045   0.0028  -0.0024  -0.0023
  -0.0030   0.0028   0.0035  -0.0005  -0.0032
  -0.0008  -0.0024  -0.0005   0.0364   0.0003
   0.0020  -0.0023  -0.0032   0.0003   0.0070
```

Y =

-0.1159	0.1151	0.1033	5.5807	0.1668
0.4799	-0.3972	-0.5244	-1.0464	1.3882

Q =

0.9954	0.0028	-0.0024	-0.0023	0.1151	-0.3973
0.0028	0.9944	-0.0005	-0.0032	0.1033	-0.5244
-0.0024	-0.0005	1.0273	0.0003	5.5807	-1.0464
-0.0023	-0.0032	0.0003	0.9979	0.1668	1.3882
0.1151	0.1033	5.5807	0.1668	974.3790	-31.4589
-0.3973	-0.5244	-1.0464	1.3882	-31.4589	590.5800

eigsLMIpole =

-5.5736
-3.6419
-2.4899
-2.3207
-0.4606
-0.4446
-0.2256
-0.2118
-0.0081
-0.0078

eigslmihinf =

-2.0251
-0.9135
-0.1741
-0.0163
-0.0108
-0.0016
0.0001

eigslmih2 =

1.0e+003 *

-8.8780
-4.1337
-0.1539
-0.1539

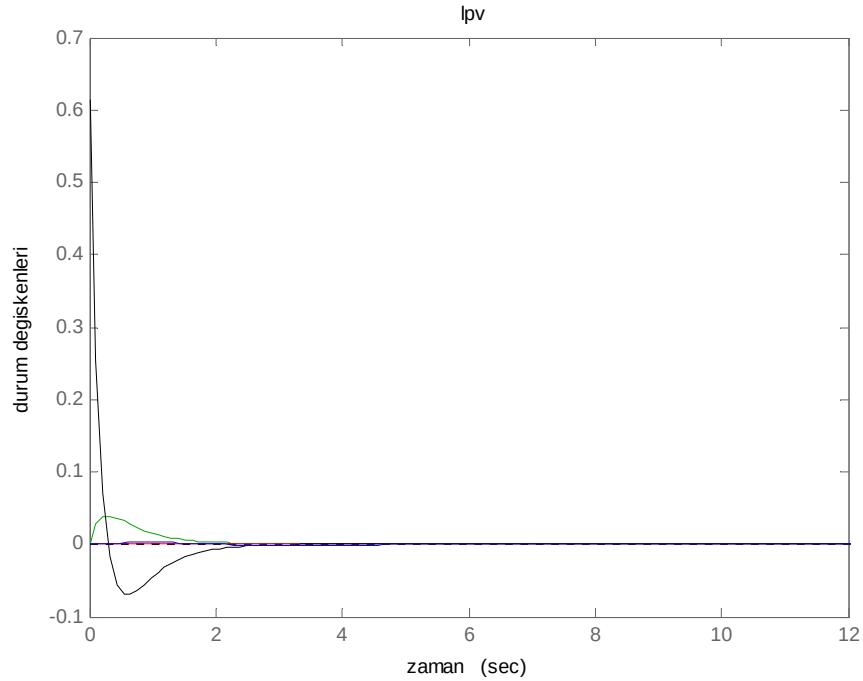
```
   -0.1539
   -0.1539
   -0.0001
   -0.0000
   -0.0000
   -0.0000
    0.0000

X =
    0.0032   -0.0014   -0.0030   -0.0008    0.0020
   -0.0014    0.0045    0.0028   -0.0024   -0.0023
   -0.0030    0.0028    0.0035   -0.0005   -0.0032
   -0.0008   -0.0024   -0.0005    0.0364    0.0003
    0.0020   -0.0023   -0.0032    0.0003    0.0070

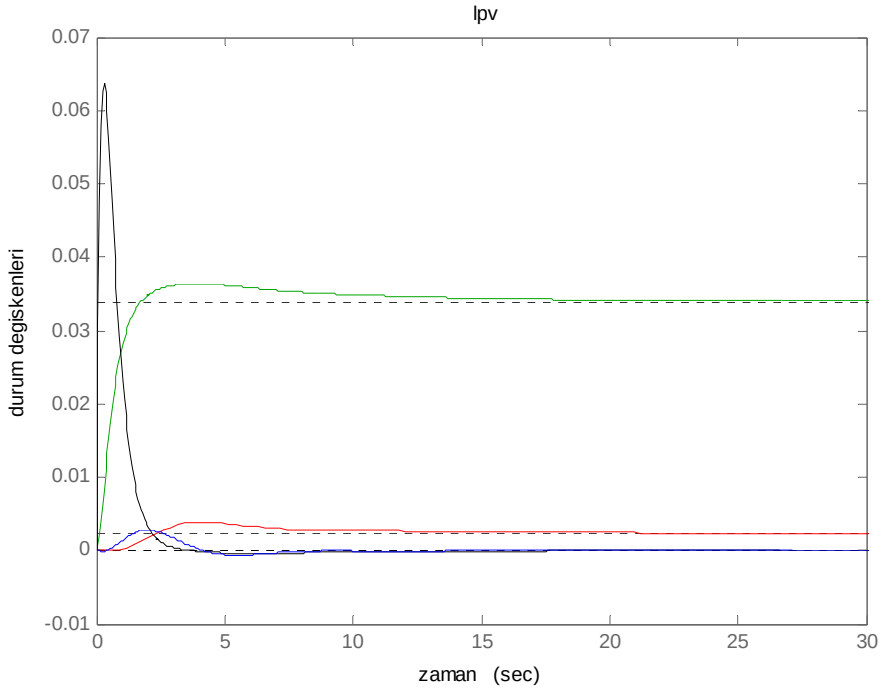
 eig(X)
    0.0000
    0.0024
    0.0034
    0.0122
    0.0366
K =
  1.0e+003 *
    0.5767   -0.1052    0.7933    0.1687    0.1748
    1.4519   -0.6791    2.1053   -0.0158    0.5122

enomlpv=eig(a+b2*K)

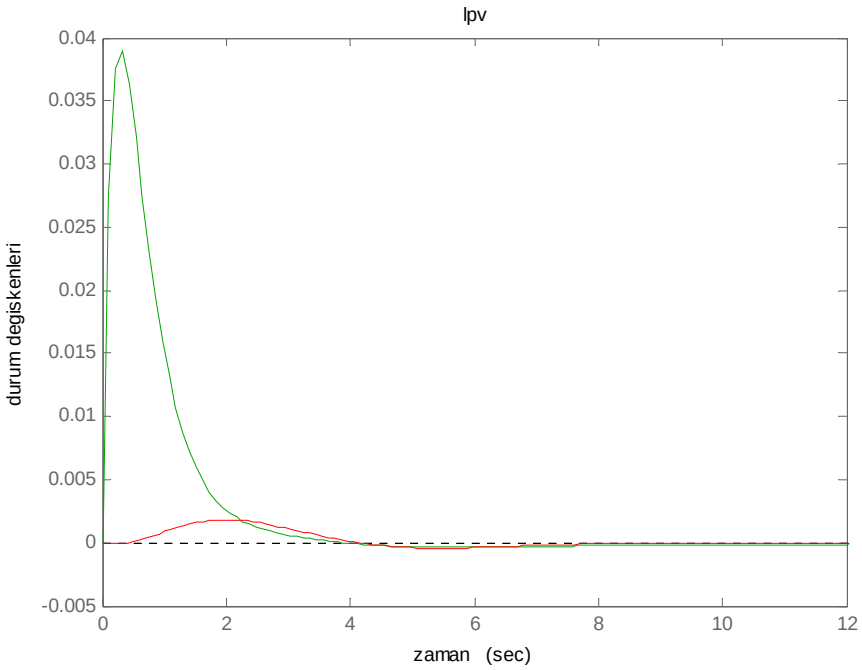
enomlpv =
 -17.2279
  -3.6560
  -0.6623
  -1.5993 + 0.9269i
  -1.5993 - 0.9269i
```



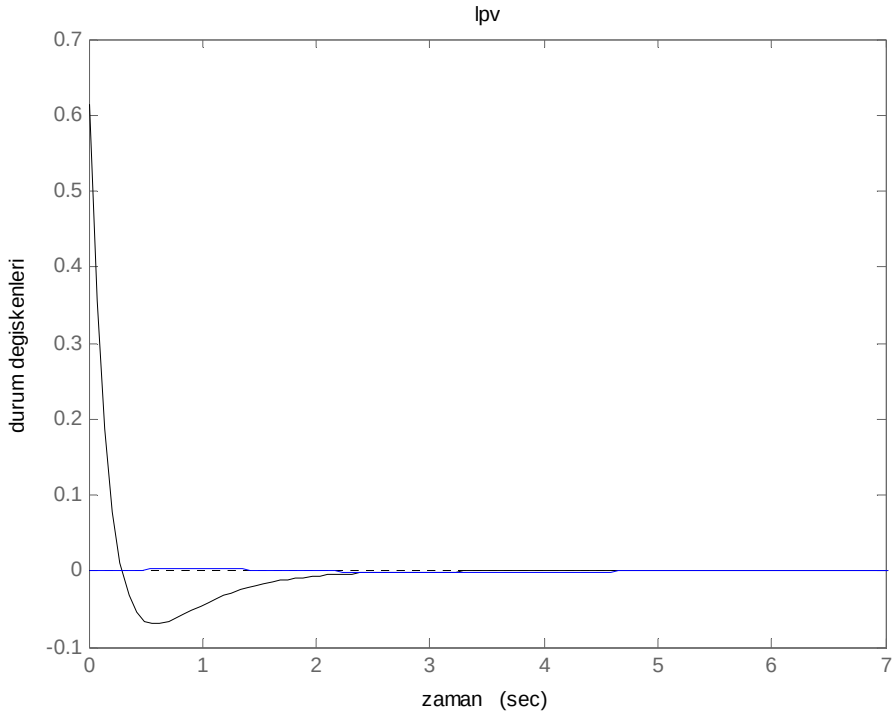
Şekil 5.10 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).



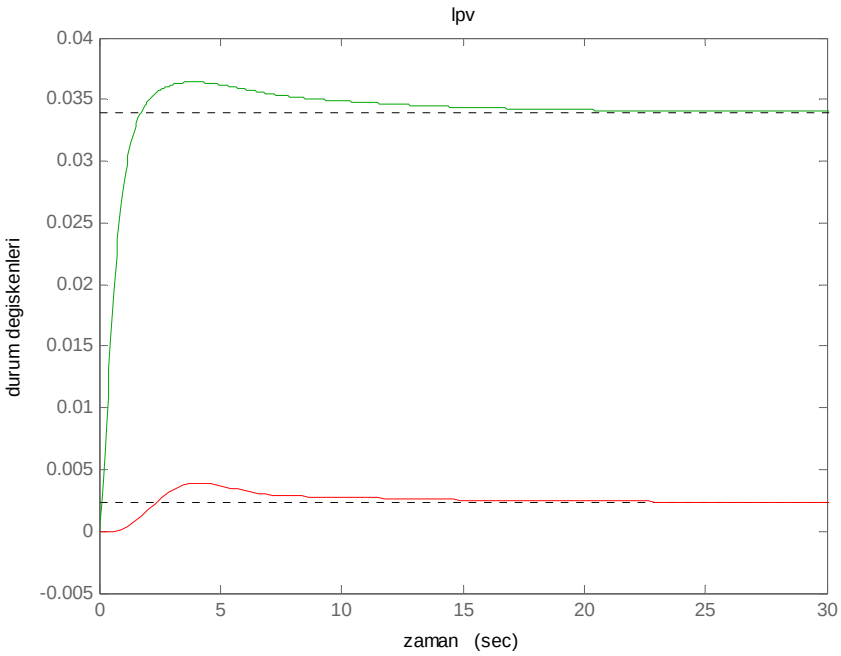
Şekil 5.11 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) , p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).



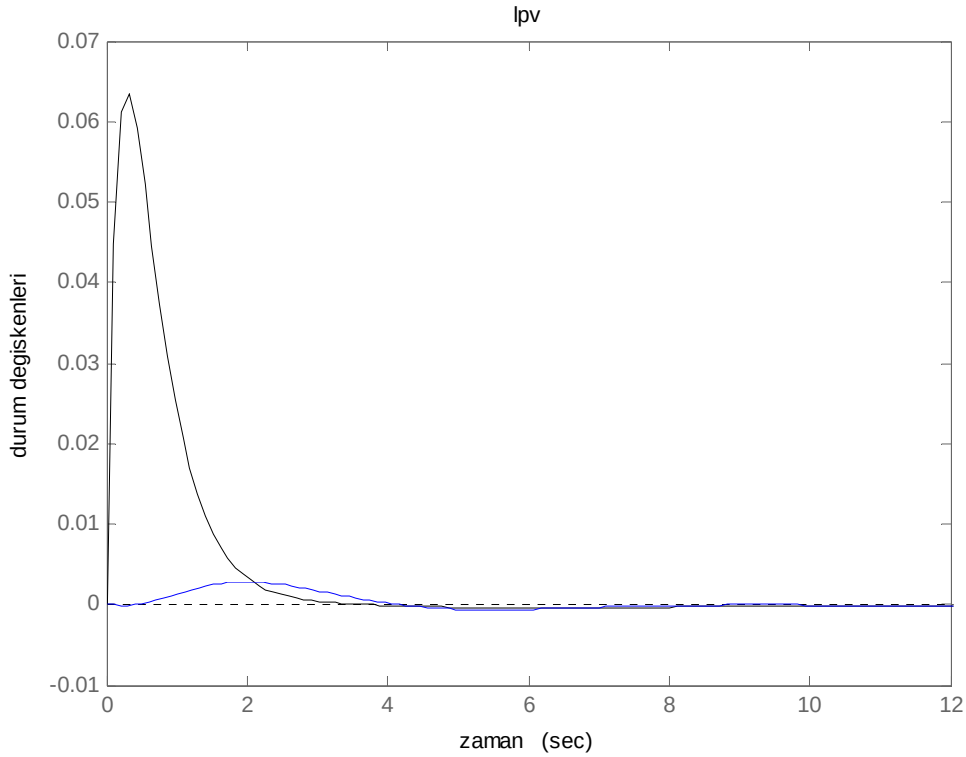
Şekil 5.12 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



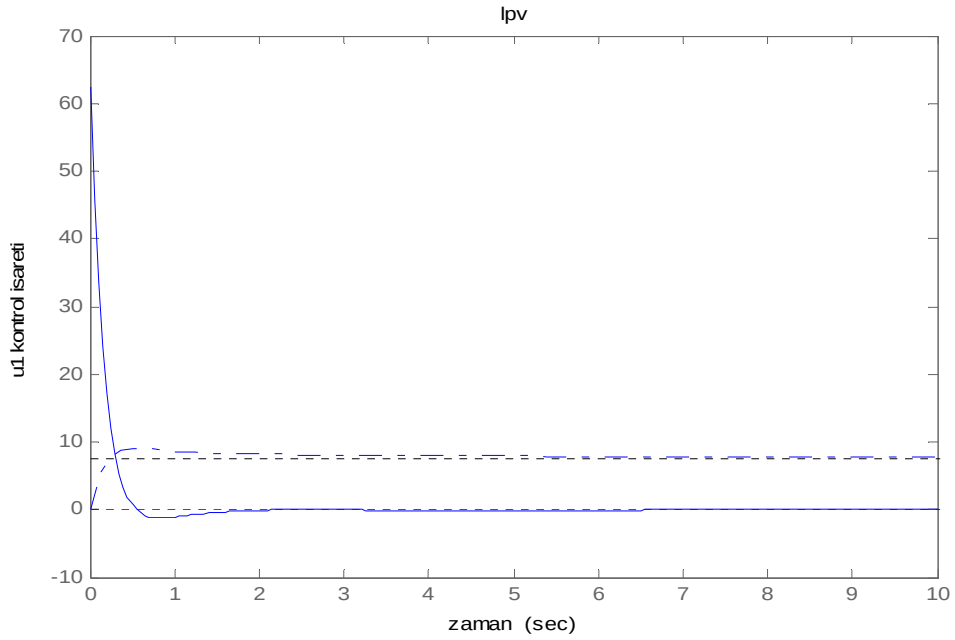
Şekil 5.13 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri (p(t): mavi , r(t): siyah).



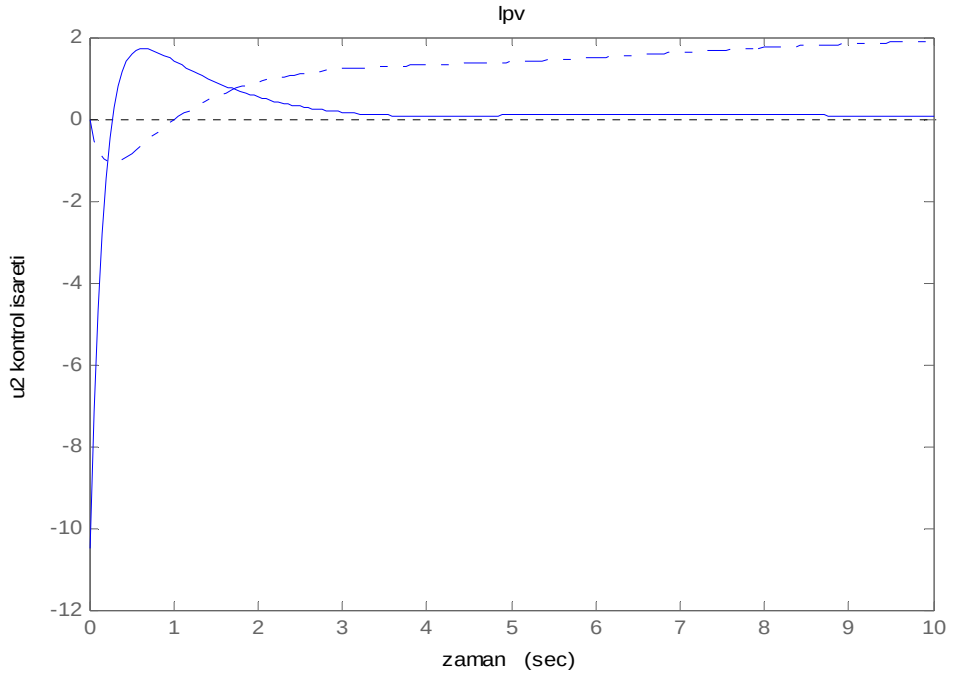
Şekil 5.14 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



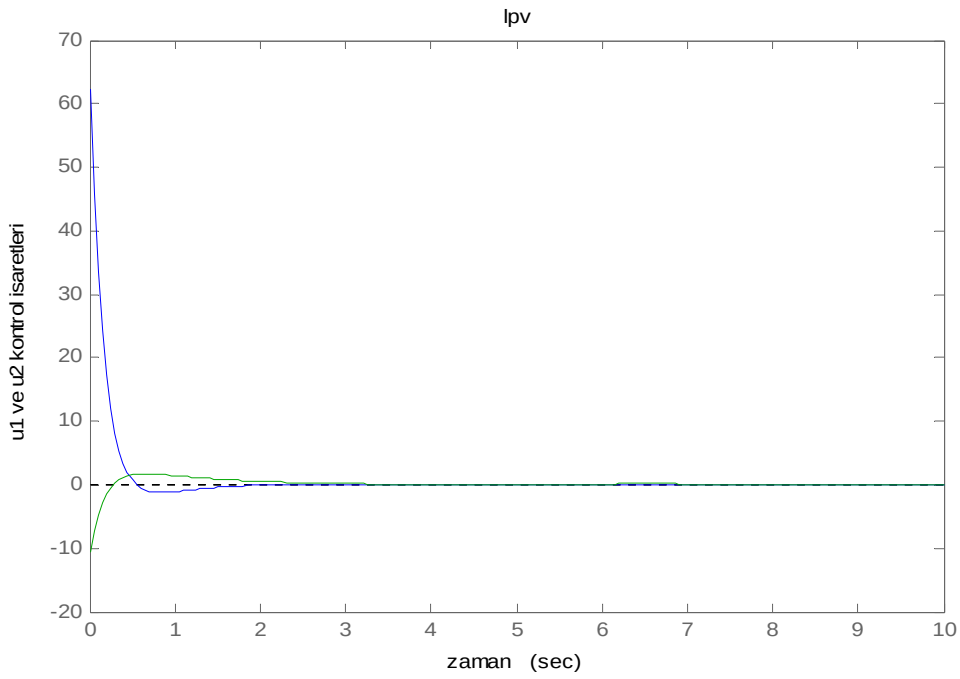
Şekil 5.15 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri (p(t): mavi , r(t): siyah).



Şekil 5.16 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.



Şekil 5.17 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.



Şekil 5.18 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ kontrol işaretleri ($u_1(t)$: mavi, $u_2(t)$: yeşil).

5.2.2.2 Dinamik karma H_2/H_∞ ve LPV kontroluna ilişkin sonuçlar

gopt =

0.1000

h2opt =

53.1649

R =

0.0240	0.0269	-0.0026	-0.0640	0.0048
0.0269	0.0467	0.0014	-0.1277	0.0028
-0.0026	0.0014	0.0021	-0.0094	-0.0018
-0.0640	-0.1277	-0.0094	1.0055	-0.0048
0.0048	0.0028	-0.0018	-0.0048	0.0053

S =

1.0e+007 *

0.3375	-0.2194	0.6061	0.0000	0.0114
-0.2194	0.1427	-0.3925	-0.0000	-0.0082
0.6061	-0.3925	2.2536	0.0002	-0.0420
0.0000	-0.0000	0.0002	0.0000	0.0000
0.0114	-0.0082	-0.0420	0.0000	0.0093

eig(R)

0.0005
0.0030
0.0089
0.0444
1.0268

eig(S)

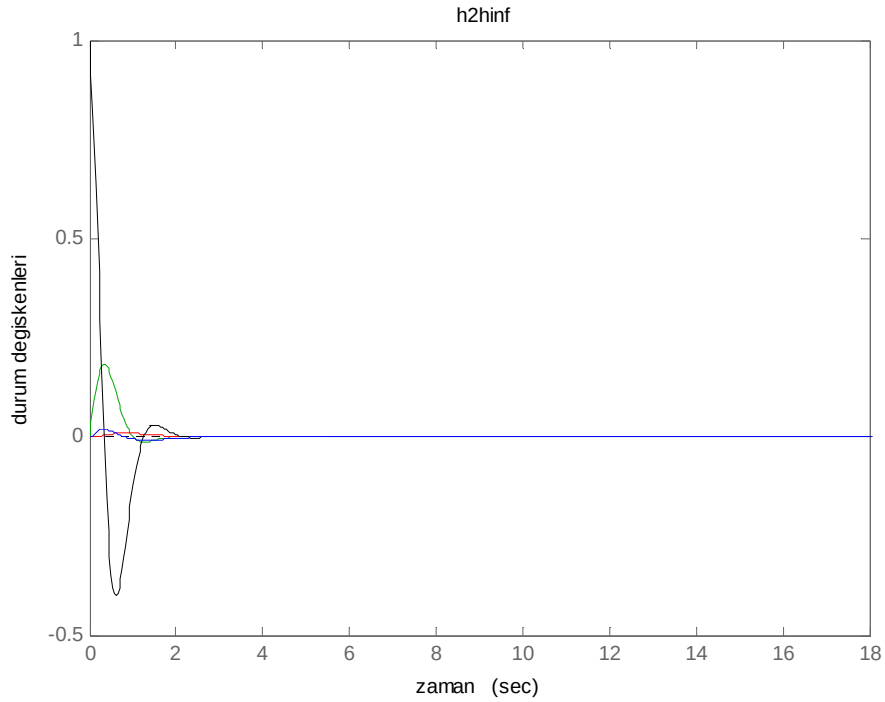
1.0e+007 *

0.0000
0.0000
0.0054
0.2267
2.5109

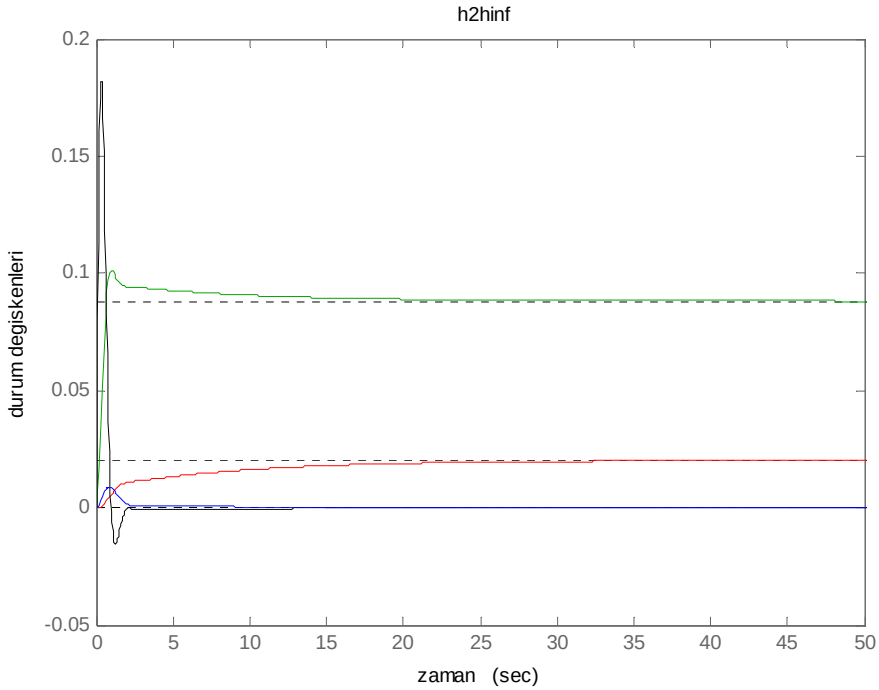
K =

1.0e+005 *

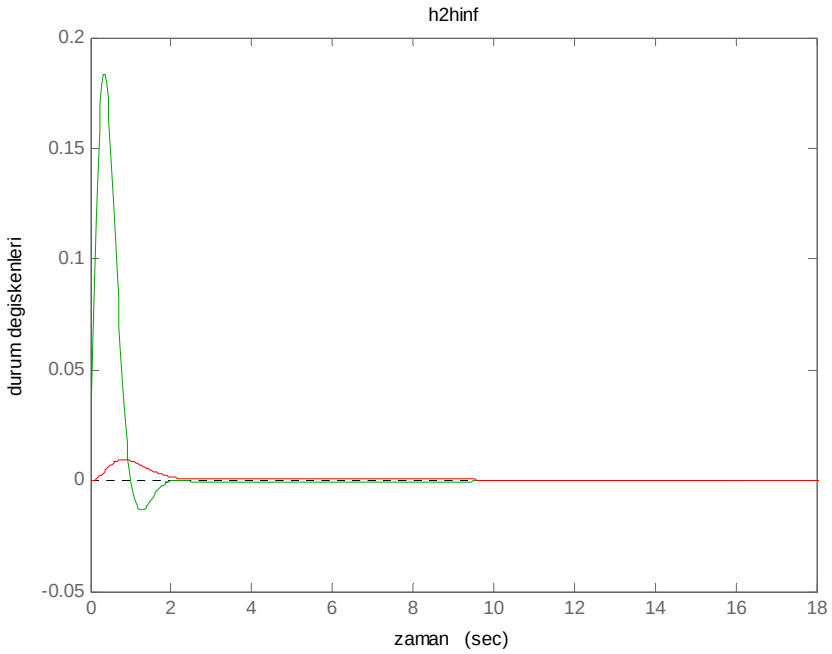
-0.0001	0.0000	0.0001	0.0005	-0.0009	2.9869	0.0001
0.0000	-0.0000	0.0001	0.0002	-0.0004	0.3479	0
0.0002	-0.0001	0.0000	0.0003	-0.0013	-6.3041	0
-0.0001	0.0000	-0.0000	-0.0002	0.0003	2.3953	0
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0001	-0.0001	-1.1201	0
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001	0.0009	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0002	0



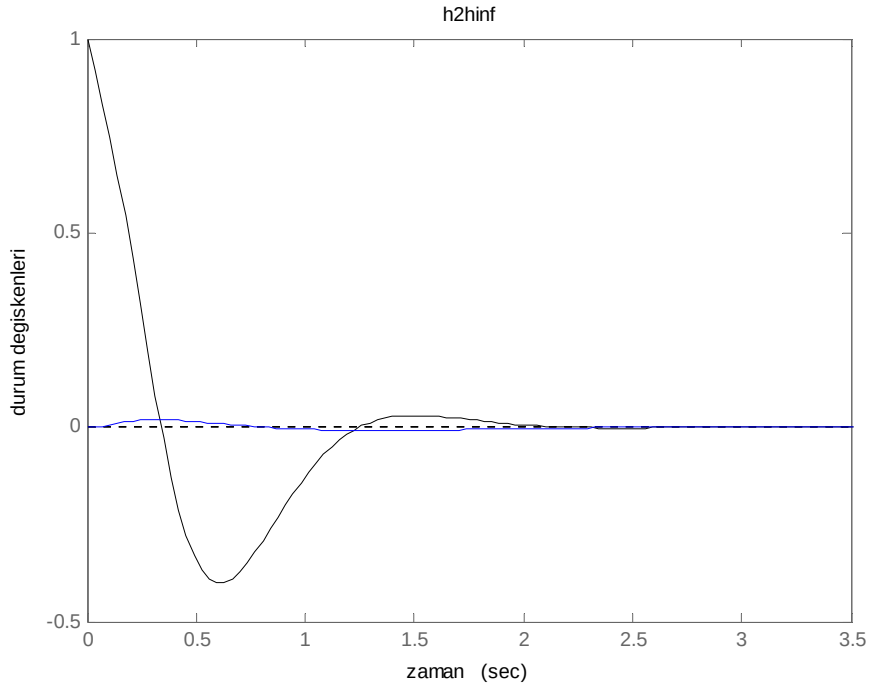
Şekil 5.19 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t): siyah).



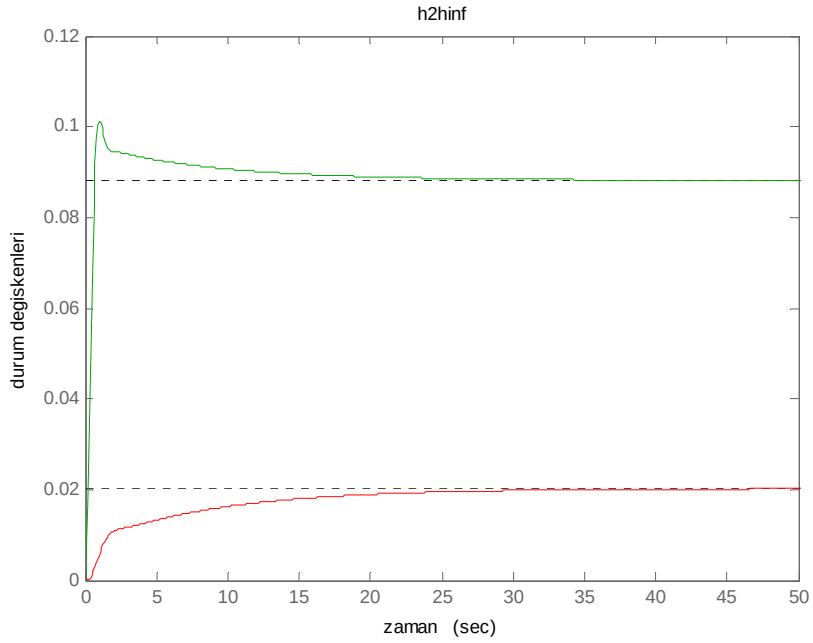
Şekil 5.20 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), p(t) , r(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı, p(t): mavi , r(t):siyah).



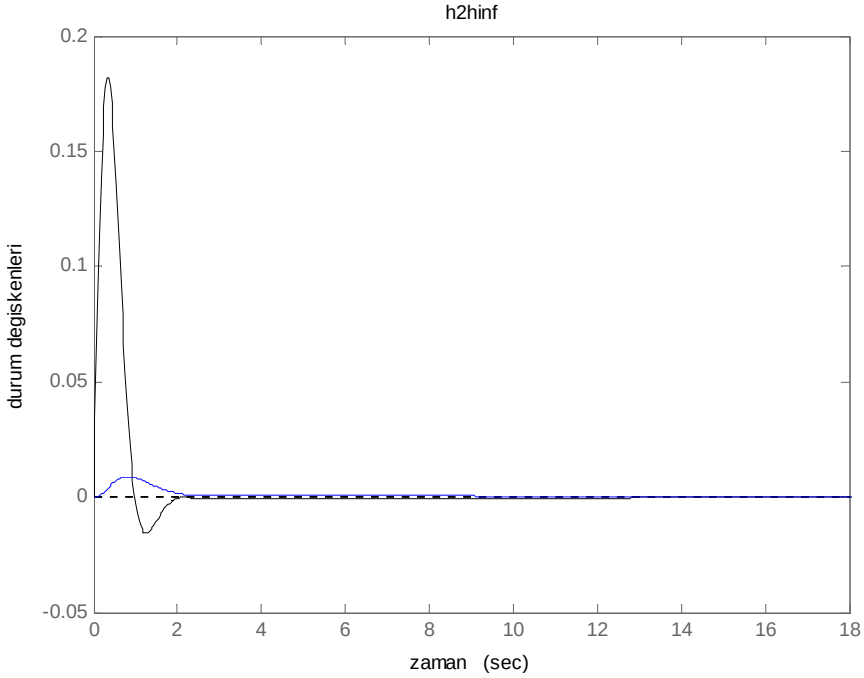
Şekil 5.21 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



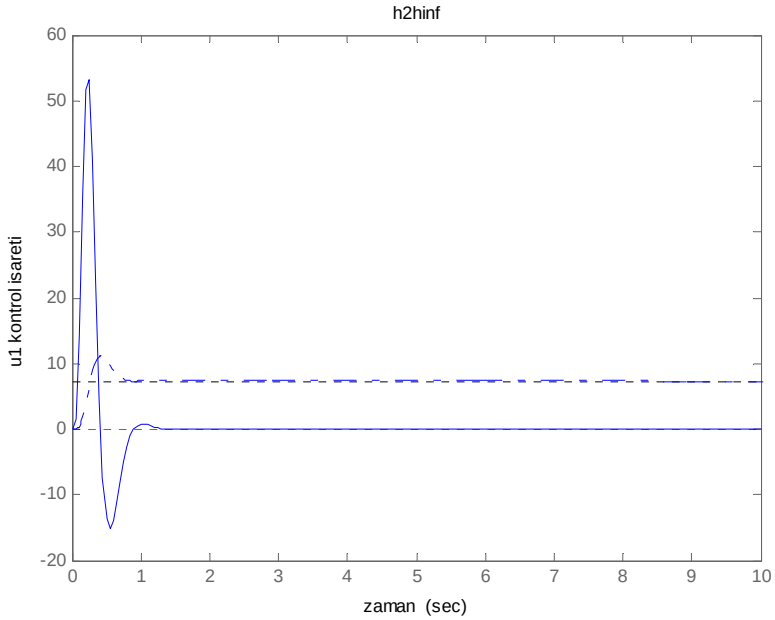
Şekil 5.22: Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri (p(t): mavi , r(t): siyah).



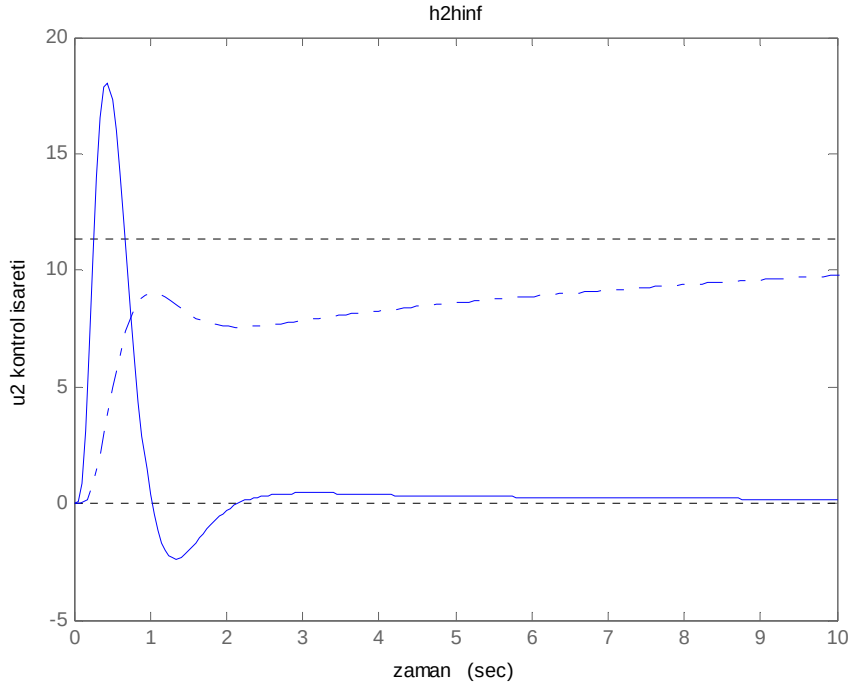
Şekil 5.23 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



Şekil 524 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin p(t) , r(t) durum değişkenleri (p(t): mavi , r(t): siyah).



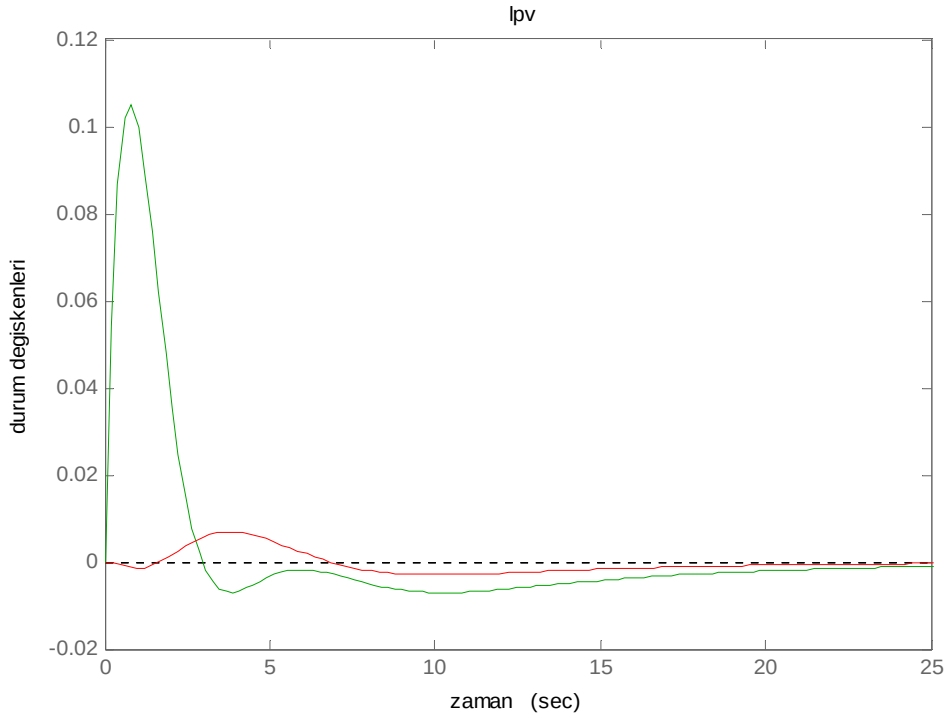
Şekil 5.25 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.



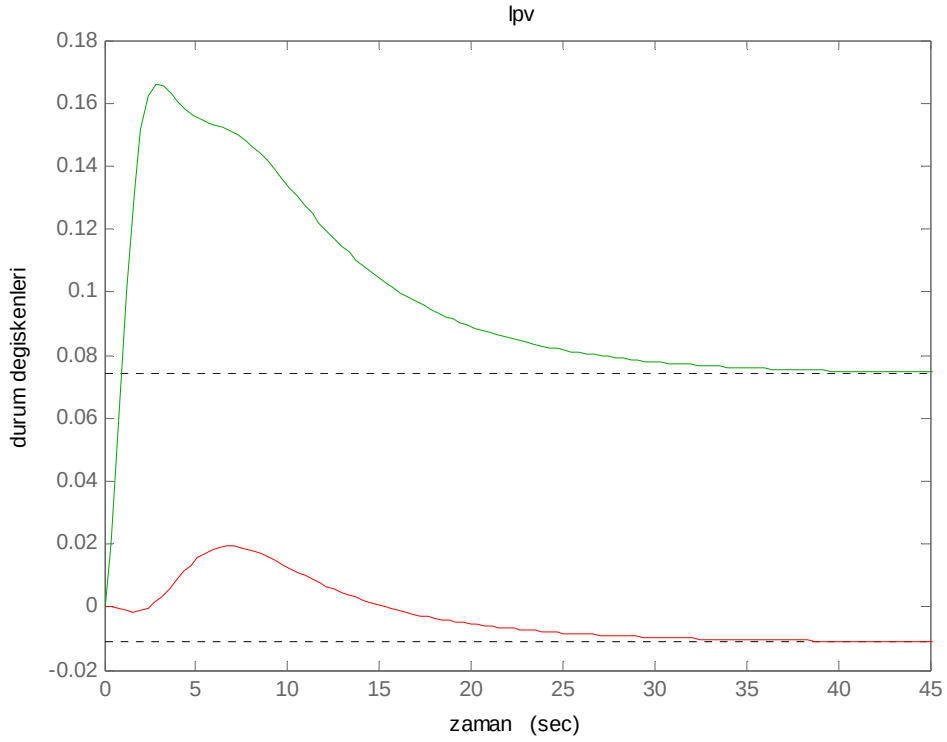
Şekil 5.26 : Belirsizlik olmadığı durumda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.

```
gopt =
    0.1
h2opt =
   14.2919
R =
    0.0312    0.0356   -0.0016   -0.0793   -0.0090
    0.0356    0.0558    0.0065   -0.0844   -0.0186
   -0.0016    0.0065    0.0052    0.0083   -0.0058
   -0.0793   -0.0844    0.0083    0.7121    0.0008
   -0.0090   -0.0186   -0.0058    0.0008    0.0214
S =
  1.0e+007 *
    0.4492   -0.3688    0.2547    0.0000   -0.1246
   -0.3688    0.3086   -0.2072   -0.0001    0.1024
    0.2547   -0.2072    1.1322   -0.0000   -0.3581
    0.0000   -0.0001   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.1246    0.1024   -0.3581    0.0000    0.1754
eig(R)
    0.0002
    0.0069
    0.0154
    0.0704
    0.7328
eig(S)
  1.0e+007 *
    0.0000
    0.0035
    0.0521
    0.5672
    1.4427

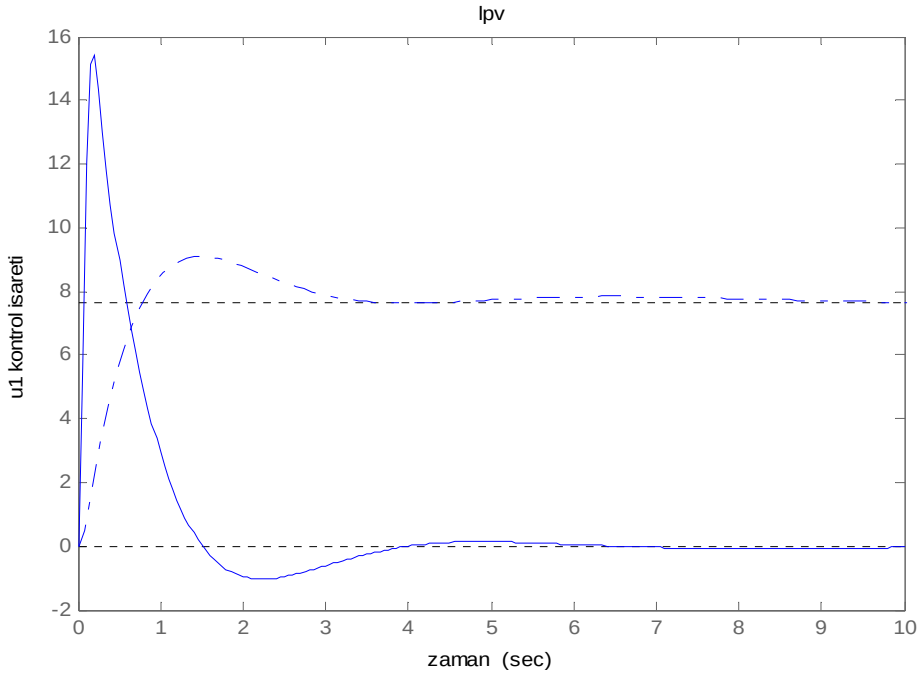
K =
  1.0e+005 *
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0005   -0.0162    0.4390    0.0001
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0005    0.0470    0.2303         0
   -0.0000   -0.0000   -0.0001    0.0000   -0.0000   -0.0906    0.4811         0
   -0.0001   -0.0000    0.0001   -0.0001    0.0000    0.1625    2.1901         0
    0.0000   -0.0000   -0.0002    0.0000   -0.0001   -0.1457   -0.1813         0
    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0010   -0.0000         0
   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0002    0.0002         0
```



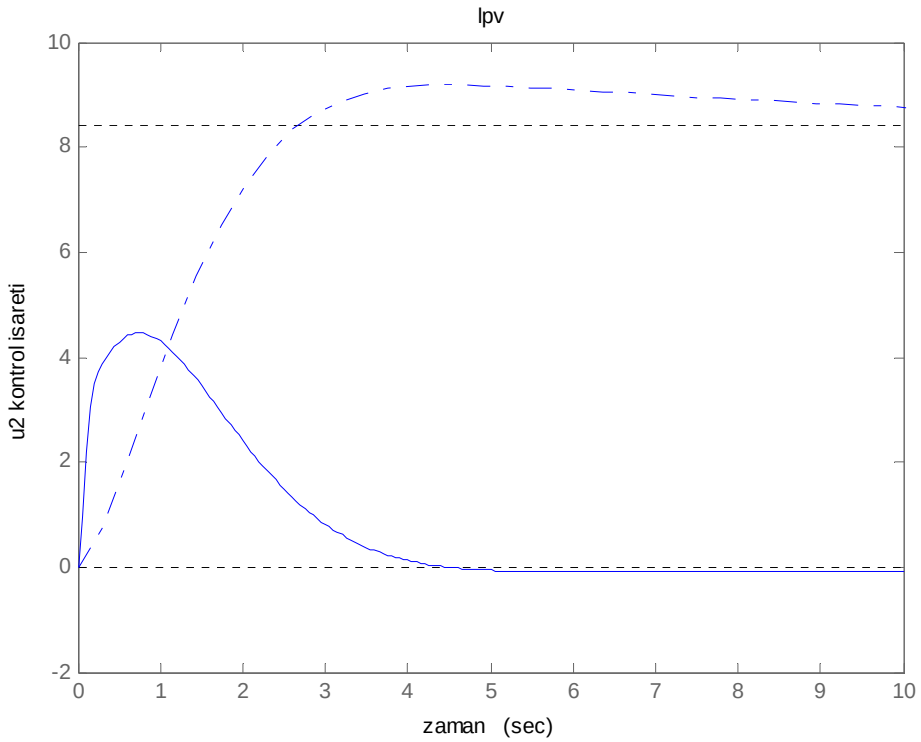
Şekil 5.27 : Belirsizlik durumunda impuls girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t), durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



Şekil 5.28 : Belirsizlik olmadığı durumda basamak girdisine ilişkin $\phi(t)$, ψ(t) durum değişkenleri ($\phi(t)$: yeşil, ψ(t):kırmızı).



Şekil 5.29 : Belirsizlik durumunda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_1(t)$ kontrol işareti.



Şekil 5.30 : Belirsizlik durumunda impuls ve basamak girdilerine ilişkin $u_2(t)$ kontrol işareti.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Dayanıklı genel optimal kontrol tasarımı, çoklu kısıtlar ve belirsizlikler altında ele alınmıştır. Çok amaçlı kontrol tasarımında karma H_2 / H_∞ performansının sağlanması, kapalı çevrim sisteminin bölgesel kutup atanması ve kontrol girişinin sınırlanması gibi kısıtların bir arada göz önüne alınması ile birlikte olmaktadır.

Modern kontrol sistemleri tasarımında gözönüne alınması gerekli pratik özelliklerden birisi, kapalı çevrim kontrol sisteminin geçici ve sürekli hal davranışlarıdır. Zaman tanım bölgesi performans özelliklerinden çoğu (geçici ve de kalıcı durum) kapalı çevrim sisteminin sıfır ve kutuplarının sol yarım s düzlemindeki yeriyle belirlenir ve etkilenir. Kararlılık yanında, istenilen bir performans, kapalı çevrim kutupları kompleks düzlemde verilen bir bölgeye atamayla sağlanır. Bunun için de yapılması gereken dayanıklı kutup atama tasarımıdır. Bu tasarımda, kapalı çevrim sisteminin kutuplarının bölgesel yeri üzerinde bazı kısıtlamaların konulması amaçtır. Kapalı çevrim sistemlerinin atanacak kutupları için sol yarı kompleks düzlemde seçilen bölgeler, geçici cevap karakteristikleri için bir gösterge olarak değerlendirilir. Bu yüzden kapalı çevrim kutupları üzerine bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir. İstenilen kısıtlama bölgesi D birkaç matris eşitsizlikleriyle gösterilebilir. Bazı durumlarda kutup atama bölgesi D seçilen birkaç bölgenin arakesiti olabilir. Bu LMI bölgeleri, sözkonusu kontrol problemlerinin birçok pratik gereksinimlerini karşılar.
Kontrol sistemleri tasarımında, teorik yada alışılmış pratik tasarım yöntemleri kontrol edici çıkışındaki işaretin genliğinin kısıtlanması yönünde bir koşul yada sınır genelde verilmemektedir. Bu işaretin genliği pratikte üretilmeyecek kadar büyük olabilir. Üretilebilse de kontrol edilen sisteme uygulanamaz olabilir. Bu nedenle kontrol girişinin maksimum genliğinin sınırlanması, pratik açıdan büyük bir önemdedir. Lineer kontrol sistemlerinin kontrol edici tasarımında karma H_2 / H_∞ performans ölçütü, H_∞ performans kısıtlaması ve kontrol girişi kısıtlaması vb. bir çok kısıtlar altında en az yapılarak gerçekleştirilmektedir. Karma H_2 / H_∞ kontrol

tasarımı, bölgesel kutup kısıtlaması ve kontrol giriş kısıtlaması vb çoklu kısıtları sağlayan kontrol edicilerin gerçeklenebilirliği gösterilmiştir.

Çoklu kısıtlar altında çok girdi çok çıktılı bir moldel olan F16 uçak modeli için bu tezde verilen kontrol edici tasarımı üzerine örnekler verilmiştir. Bu örneklerde, tüm kısıtlamaları sağlayan karma H_2/H_∞ LPV kontrol edicileri tasarlanmıştır. Tasarımlardaki optimizasyon matrislerinin kesin artı şeklinde gerekli koşulları sağladığı ve ayrıca optimizasyon değişkenleri matris eşitsizliklerini sağladığı 5.Bölüm 'de gösterilmiştir. F16 uçak modelinin parametre değişimli modeli, uçak parametrelerinin her birinin sistem matrisinin özdeğerlerinin değişimine olan etkisi dikkate alınarak uçağın üç parametresine göre oluşturulmuştur. Üç parametrenin seçimi, özdeğer değişimine en etkili olanlardan birincisi dışında sistem matrisinin esas ve ters köşegen üzerinde olanlardan özdeğer değişimine en etkili olanları belirlenerek yapılmıştır.

Çoklu kısıtlar altında LPV H_2 / H_∞ tasarımı, statik ve dinamik geribesleme durumları için F16 uçağının yanlamasına hareket modeline uygulanmış ve 5. Bölümde benzetim sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlarda görüldüğü üzere her iki durumda çoklu kısıtlar dışında belirsizlikler olduğu halde iyi sonuçlar alınmaktadır. Ancak belirsizliklerin sayısı üçten fazla olduğunda çoklu kısıtlar altında elde edilen başarılı sonuçlar elde edilememektedir. Ancak ele alınan model için üç parametre değişimine kadar olan parametre belirsizliğinde elde edile sonuçlar, istenilen kısıtlamaları ve bunlara ilişkin performansları sağladığı görülmüştür. Bu tezde yapılan çalışmada çoklu kısıtların olması yanında parametre değişimlerinin de etkisinde kontrol tasarımı ele alınmış, çok girdili çok çıktılı bir sistem olan F16 uçağı için tasarlanan LPV kontrol ediciler ile istenenler elde edilmiştir.

Statik ve dinamik durumlarda elde edilen sonuçlar, istenen kısıtların sağlandığı ve optimal davranış ölçütünün gerçeklendiği görülmüştür. Statik ve dinamik durumlarda elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçlar birbirine benzer olmasına karşılık dinamik kontrol edicilerin geçici haldeki davranışlarının daha hızlı olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

Apkarian, P. ve Tuan, H.D. (1998). Parameterized LMIs in control theory, *Proceedings on the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 152-157.

Anderson, B.D. ve Moore, J.B. (1990). *Optimal Control:Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, NewJersey

Blakelock, J. (1991). *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, John Wiley and Sons, New York, NY.

Adams, R.J., Buffington J.M., Sparks, A.G. ve Banda S.S. (1994). *Robust Multivariable Robust Control*, Springer.

Beck, C. (1991). Computational Issues in Solving LMIs, *Proc. of The 30th Conference on Decision and Control*, England, December, 1529-1530.

Bambang, R., Shimemura, E. ve Uchida, K. (1993). Mixed H2 / H∞ contro with pole placement: State-feedback case, *Proc. ACC (American Control Conference)*, 2777-2779.

Bambang, R., Shimemura, E. ve Uchida, K. (1994). Mixed H_2 / H_∞ control with pole placement in a Class of Regions,'' *Optimal Control Applications & Methods*, **15**, 151-173.

Bernstein, D.S. ve Haddad, W.M. (1989). LQG Control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **34**,293-305.

Boyd, S., Balakrishnan, V., Barratt C.H., Khraıshı N.M., Li, X., Meyer, D.G. ve Norman S.A. (1988). A New CAD Method and Associated Architectures for Linear Controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **33**, 268-283.

Boyd, S.P. ve Barratt, C.H. (1991). *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Boyd, S.P. ve El Ghaoui, L. (1993). Method of centers for mimimizing generalized eigenvalues, Linear Algebra and Applications, 63-111.

Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. ve El Gahoui, L. (1993). Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities, Proc American Control Conf., San Francisco, USA, 2147-2154.

Boyd, S., El Gahoui, L., Feron, E. ve Balakrishnan, V. (1994). *Lineer Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Philadelphia: SIAM.

Caferov E. (2009). *Variable Structure Control and Time Delay Systems*, ROBUST CONTROL: THEORY AND APPLICATIONS, WSEAS Press.

Chilali, M., Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**, No.12, 2257-2270.

Chilali, M. ve Gahinet, P. (1991). H_∞ design with an α-stability constraint, in *IFAC Proc.*

Chilali, M. ve Gahinet, P. (1996). H_∞ Design with Pole Placement: An LMI Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**, 359-367.

Chilali, M., Gahinet, P. ve Scherer, C. (1996). Multi-objective Output-feedback Control via LMI Optimization, *IFAC 13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA, 249-253.

Dorf, R.C. ve BISHOP, R.H. (1997). *Modern Control Systems*, Addison –Wesley.

Doyle, J.C. (1993) Synthesis of Robust Controllers and Filters, *Proc.22rd Conf. Decision Contr.*, December, 109-114.

Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P. ve Francis, B.A. (1989). State-space solutions to standart H_2 and H_∞ control problems, IEEE Trans. on Automatic Control, 34, 831-847.

Doyle, J.C., Francis, B.A. ve Tannenbaum A.R. (1992). Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Company, New York.

Doyle, J.C., Glover, K. ve Bodenheimer, B. (1994). Mixed H_2 and H_∞ performance objectives II: Optimal Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **39**, 1575-1587.

Doyle, J., Zhou, K., Glover K. ve Bodenheimer B. (1994). Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **39**, 1575-1587.

Doyle, J.C., Packard. A. ve Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs and μ, *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control,* 1227-1232.

Desoer, C.A. ve Vidyasagar, M. (1975). *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press.,NY.

Dullerud, G.E. ve Paganini, F. (2000). *A Course in Robust Control Theory, A Convex Approach*, Springer-Verlag.

Etkin, B. ve Reid, D.L. (1996). *Dynamics of Flight,Stability and Control*, John Wiley and Sons, New York

Feron, E., P. Apkarian, ve Gahinet P. (1996). Analysis and sythesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **41**, no. 7, pp. 1041–1046.

Francis, B.A. ve Doyle, J.C. (1987). Linear control theory with an H∞ optimality criterion, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **25**, No.4, 815-844.

Francis, B. (1987). *A course in H∞ control theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, New York.

Franklin, G.F., Powell, J.D. ve Emami-Naeini, A. (1987). Feedback Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley Publishing Company.

Fujisaki, Y. ve Yoshida, T. (1996). A Linear Matrix Inequality Approach to Mixed H_2 /H_∞ Control, *IFAC 13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA, 361-366.

Feron, E., Apkarian, P. ve Gahinet, P. (1996). Analysis and sythesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, **41** (7), *Mathematical Programming* ,1041–1046.

Gahinet, P. ve Nemirovski, A. (1997).The projective method for solving linear matrix inequalities, *Mathematical Programming*, **77**(2),163–190.

Gahinet, P., Apkarian, P. ve Chilali, M. (1997). Affine parameter dependent lyapunov functions and real parametric uncertainity, *IEEE Trans. Automatic Control*.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A.J. ve Chilali, M. (1995). LMI Control Toolbox for Use with MATLAB, The Matworks Inc.

Gahinet, P (1992). A Convex parametrization of H_∞ suboptimal controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*.

Gahinet, P. (1992). Reliable computation of H_∞ central controllers near the optimum, *Proc. ACC (American Control Conference)*, 738-742.

Gahinet, P. (1994).On the game Riccati equations arising in H_∞ control problems, *SIAM J.Contr. Opt.*, May.

Gahinet, P. (1996). Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis, *Automatica*, 32, 1007-1014.

Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1993). An LMI-based Parametrization of all H∞ Controllers with Applications, *Proc. of the 32nd Conference on Decision and Control*, Texas, USA, December, 656-661.

Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1994).A Linear Matrix Inequality approach **to** H∞ control, *Int.J. Robust Nonlinear Control*, 4, 421-448.

Gahinet,P, Nemirovski, A., Laub, A.J. ve Chilali, M. (1994). The LMI Control Toolbox, *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, Florida, USA, December, 2038-2041.

Gahinet,P.and Nemirovski, A., Laub, A.J. ve Chilali, M (1995). *LMI Control Toolbox*, The MathWorks. Inc., Natick.

Geromel, J.C. , Garcia, G. ve Bernussou B.. (1991).H_2 Robust Control with Pole Placement, *12 th IFAC World Congress Aut. Cont.*, Sidney, Australia, 283-288.

Gutman, S. ve Jury, E.I. (1981). A General Theory for Matrix Root Clustering in Subregions of the Complex Plane, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **26**, 853-863.

Glover, K. ve Doyle, J.C. (1988). State-space formula for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ - norm bound and relations to risk sensitivity, *Systems Control Letters*, **11**, 167-172.

Grimble, M.J. (1994).. *Robust Industrial Control. Optimization Design Approach for Plynomial Systems*, Prentice Hall International.

Haddad, W.M. ve Bernstein, D.S. (1992). Controller design with regional pole constraints, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **37**, 54-69.

Hung, Y.S. (1989).. H∞ optimal control part I, II, *International Journal of Control*, **49**, No.4, 1291-1359.

Iwasaki T. ve Skelton, R. (1994). All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State-Space Formulas, *Automatica*, **30**, 1307-1317.

Jamshihi, M., Tarokh,M ve Shafai, B. (1992).*Computer-Aided Analysis and Design of Linear Control Systems*, Prentice-Hall International Inc., London.

Khargonekar, P.P., Petersen, I.R. ve Rotea, M.A. (1988).H_∞ optimal control with state-feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**, No.8, 786-788.

Khargonekar,P.P. ve Rotea M.A. (1991). Mixed H_2 / H_∞ Control: A Convex Optimization Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **36**, 824-837.

Kuo, B.C. (1982). *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. NJ.

Kamali, J., Franklin, G.F. ve Feron, E. (1994). Stabilizing uncertain LTI systems using linear matrix inequalities: A relaxation algorithm, *Proceedings on American Control Conference*, 1420-1421.

Kamali, J. ve Franklin, G.F. (1995). Simultaneous controller design: A linear matrix inequalities approach, *Proceedings on the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*.

Laub, A.J. ve Gahinet,P.,1997, Numerical Improvements for Solving Riccati Equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **42**, 1303-1308.

Li X.P., Chang B.C., Banda S.S. ve Yeh H.H. (1992).Robust Control Systems Design Using H_∞ Optimization Theory, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15, 944-952.

Liu, Y. ve Yedavalli, R.K. (1993). Linear Quadratic Control with Stability Degree Constraint, *Systems Control Letters*, **21**, 181-187.

Löfberg, J. (2004).YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, Computer Aided Control Systems Design, *IEEE International Symposium* , 284–289.

McLean, D. (1992). *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall International, UK

Nelson, C.R. (1988). *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, NY.

Nesterov, Y. ve Nemirovskii, A. (1988). A general approach to polynomial-time algorithms design for convex programming, *Technical Report*, Cent. Econ. and Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, USSR.

Nesterov, Y. ve Nemirovskii, A. (1994). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

Nikoukhah, R., Delebecque, F. ve El Ghaoui, L. (1995). LMITOOL: A package for LMI optimization, *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control*.

Ogata, K. (1990). *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall International Inc., London.

Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2004). H_2 guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions, *International Journal Of System Science*, **35**(5), 305–315.

Oliveira, P.J., Oliveira, R.C.L.F., Leite, V.J.S., Montagner, V.F. ve Peres, P.L.D. (2004). H_∞ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions, Automatica, **40**(6),1053–1061.

Oliveira, R.C.L.F. ve Peres, P.L.D. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions, *Linear Algebra and Appl.,* **405**, 209–228.

Oliviera, R.C.L.F., de Oliveira, M.C. ve Peres, P.L.D. (2006). LMI relaxations for robust H_2 performance analysis of polytopic linear systems, Proc. *IEEE Conference on Decision ad Control*, San Diego, CA, USA, 2907–2912.

Oliveira, R.C.L.F. ve Peres, P.D. (2007). A convex optimization procedure to compute H_2 and H_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains, *Optimal Control Applications and Methods*.

Petersen, I.R., Anderson, B.D.O. ve Jonckheere, E.A. (1991). A first principles solution to the non-singular H_∞ control problem, *Int.J.Robust Nonlinear Control* ,**1**, 171-185.

Packard,A., Zhou, K., Pandey, P ve Becker, G. (1991). A collection of robust control problems leading to LMI's, *Proc.CDC (Conference on Control and Decision)* ,1245-1250.

Rotea M.A. **ve Khargonekar P.P.** (1991). H_2-Optimal Control with H_∞-constraint: The State Feedback Case, *Automatica*, **27**, No.2,pp.307-316.

Rotea M.A. (1993). The Generalized H_2 Control Problem, *Automatica*, **29**, 373-385.

Saberi, A., Chen, B.M. ve Lin, Z. (1994). Closed-form solutions to a class of H_∞ Optimization Problem, *Int.J.Robust Nonlinear Control* ,**60**, 41-70.

Stevens, L.B. ve Lewis, F.L. (2003). *Aircraft control and simulation*, John Wiley and Sons, NY.

Skelton, R.E. ve Iwasaki, T. (1995). Increased Roles of Linear Algebra in Control Education, *IEEE Control Systems*, 76-88.

Stoorvogel, A.A. (1992). The Singular H_2 Control Problem, *Automatica*, **28**, 627-631.

Stoorvogel, A.A. (1992). *The H_∞ Control Problem: A State-Space Approach*, Prentice-Hall, Hernell Hempstead, UK.

Stoorvogel, A.A., Saberi, A. ve Chen, B. (1991). A reduced-order observer-based controller design for H_∞ Optimization, *Proc.AIAA Guidance,Navigation and Control Conf.*

Stoorvogel, A.A. (1991). The singular H_∞ control problem with dynamic measurement feedback, *SIAM J.Contr. Opt.* , ***29***,160-184.

Scherer, C. (1992). H_∞ optimization without assumptions on finite or infinite zeros, SIAM J.Contr. Opt. , **30**,143-166.

Scherer, C. (1990). *The Riccati inequality and state-space H_∞ -optimal control*, Ph.D.Thesis, Universitat, Wurzburg, Germany.

Scherer, C. (2005). Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **27**, no. 2, pp. 365–395.

Scherer, C., Gahinet, P. ve Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, No.7, 895-911.

Sivashankar, N., Kaminer, I. ve Khargonekar, P.P. (1994). Optimal Controller Synthesis with D Stability, *Automatica*, **30**, 1003-1008.

Sznaier, M. (1994). An Exact Solution to Mixed H_2 / H_∞ Problems via Convex Optimization, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **39**, 2511-2517.

Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (1996). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley.

Thompson, P.M. (1995). Classical/ H_2 Solution for a Robust Control Design Benchmark Problem, *Journal of Guidance, Control and Dynamic,* **18**, 160-169.

Vanderberghe, L. ve Balakrishnan V. (1997). Algoritms and Software for LMI Problems in Control, *IEEE Control Systems*, October, 89-95.

Vidyasagar, M. (1986).Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **32**, 527-534.

Vidyasagar, M. (1985). *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, Cambridge, MA.

Willems, J.C. (1971). *The Analysis of Feedback Systems*, MIT Press, Cambridge.

Willems, J.C. (1971). Least Squares Stationary Optimal Control and Algebraic Riccati Equation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **16**, 612-615.

Yedavalli, R.K. ve Liu, Y. (1993). H_∞ Control with Regional Stability Constraints, *Automatica*, **31**, 611-615.

Zadeh, L. ve Desoer, C.(1963) *Linear Systems Theory: The State Space Approach*, Mc. Graw-Hill, New York, NY.

Zhou, K. ve Khargonekar, P.P. (1988). An Algebraic Riccati Equation Approach to H∞ Optimization, *System Control Letters*, **11**, 85-91.

Zhou, K., Glover K. ve Bodenheimer B. (1994). Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **39**, 1564-1574.

Zhou, K., Doyle J.C. ve Glover K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Yücel AYDIN

Doğum Yeri ve Tarihi: 02.09.1963

Adres: İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi

E-Posta: yucel.aydin@itu.edu.tr

Lisans: İTÜ

Yüksek Lisans: İTÜ

Yayın ve Patent Listesi:

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

▪ **Aydın**, **Y.,**2009. Robust Mixed H_2 / H_∞ LPV Control of Uncertain Linear Systems with Static Feedback, *6-th IFAC International Workshop DECOM-09*, 231-238, Ohrid, Republic of Macodenia, September 26-29.

▪ **Aydın**, **Y.,** İ. Genç, 2007. H_2 Optimal Control Design with Regional Pole Placement in Power Systems, *IASTED Int. Conf. on Control and Applications*, Montreal.

▪ İ. Genç, **Aydın**, **Y.,**2007. A Linear Optimal Controller Design with Regional Pole Placement for Power System Dynamics, *IASTED Int. Conf. on Control and Applications*,Montreal,Canada.

▪ **Aydın**, **Y.,**2003. Robust Mixed H_2/H_∞ Optimal Controller Design, *the 3rd IFAC Workshop DECOM-TT* İstanbul.

▪ **Aydın**, **Y.,**2008. Dayanıklı(Robust) Optimal Parametreleri Değişen Lineer(LPV), Dinamik Kontrol Edici Tasarımı, 263-268, TOK'08, *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, İstanbul Teknik Üniversitesi,Maslak, İstanbul.

▪ **Aydın**, **Y.,** 2006. H_2/H_∞ Dayanıklı (Robust) Optimal Kontrol Problemine Kontrol Girişi Kısıtlı Lineer Matris Eşitsizlikleri Yaklaşımı, *TOK'06 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, TOBB ETÜ Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara.

▪ **Aydın**, **Y.,**2002. H_2-Optimal Kontrolör Tasarımı, *ELECO'2002, Elektrik-Elektronik*-Bilgisayar Mühendisliği, Bursa.

▪ **Aydın**, **Y,** Sarıoğlu M.K.,2001. Dayanıklı(Robust) Optimal Kontrolda Lineer Matris Eşitsizlikleri, *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendis-liği, 9.Ulusal Kongresi*, s529-532, Kocaeli

▪ **Aydın**, **Y.,** Sarıoğlu M.K.,2001. Karma H_2 / H_∞ Dayanıklı(Robust) Optimal Kontrol I: Statik Durum Geribeslemeli Kontrol, *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği*, *9.Ulusal Kongresi*, 533-536, Kocaeli.

▪ **Aydın**, **Y.,** Sarıoğlu M.K.,2001. Karma H_2 / H_∞ Dayanıklı(Robust) Optimal Kontrol II: Dinamik Çıkış Geribeslemeli Kontrol, *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği*, *9.Ulusal Kongresi*, s537-540, Kocaeli.

▪ **Aydın**, **Y.,**2000. Sarıoğlu M.K., Dinamik Çıkış Geribeslemeli ve Bölgesel Kutup Atamalı H_∞ Optimal Kontrol, *ELECO'2000*, Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği,Bursa, s537-561.

▪ **Aydın**, **Y.,**1999. Sarıoğlu M.K., Bölgesel Kutup Atamalı H_∞ Optimal Kontrol, Elektrik-*Elektronik Bilgisayar Mühendisliği, 8.Ulusal Kongresi*, s531-535.