ESTADISTICA ESPAÑOLA
núm. 107, 1985, págs. 63 a 71

# Contraste de ruido blanco de la perturbación aleatoria

por ANTONIO AZNAR GRASA
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza

RESUMEN

En este trabajo se lleva a cabo un análisis de los diferentes contrastes de autocorrelación paramétricos y no paramétricos. Se propone un nuevo contraste no paramétrico.

*Palabras clave:* Ruido Blanco, Residuos ELIO, Contraste no paramétrico.

## 1. INTRODUCCION

El típico modelo lineal general puede escribirse como:

$$y = X\beta + U$$

y la observación i–ésima

$$y_i = X_i\,\beta + U_i$$

Una de las hipótesis importantes es que $U_i$ es un ruido blanco. Pero ¿qué es un ruido blanco?. Granger (1980) aporta tres definiciones diferentes:

*i)* Una serie temporal $U_t$ es un ruido blanco si:
Correlación $(U_t, U_{t-k}) = 0$ para todo $k \neq 0$

*ii)* $U_t$ es un ruido blanco puro si $U_t$ y $U_{t-k}$ son independientes.

*iii)* $U_t$ es un ruido blanco empírico si el autocorrelograma estimado coincide con el del ruido blanco.

Como indica este autor, estas definiciones van parejas a que la consideración del pasado de la propia serie que es ruido blanco no ayuda a mejorar su predicción. Esto no quiere decir que ampliando la base informativa e incluyendo en ella otras variables además del pasado del propio ruido blanco no pueda mejorarse la predicción; Granger demuestra lo contrario con numerosos ejemplos.

Una forma alternativa de presentar la definición anterior de ruido blanco es la que hacen Hendry-Richard (1982); sea $I_{t-1}$ la base informativa en la que se incluye sólo el pasado de la serie $U_t$; entonces $U_t$ es un ruido blanco si

$$E(U_t/I_{t-1}) = EU_t.$$

La relevancia del carácter de ruido blanco de la perturbación aleatoria es grande y su contraste suele ser un primer paso necesario en toda estrategia de selección de modelos como puede verse, por ejemplo, en las propuestas realizadas por Hendry-Richard (1982) y Aznar (1983-a).

Como las $U_t$ son entidades no observables para llevar a cabo los contrastes se utilizan estimaciones de las perturbaciones que son los residuos. Según sean las propiedades de aquellas así serán las de los residuos. Lo que se quiere destacar en este trabajo es que no hay un sólo tipo de residuos y que puede tener interés el utilizar unos residuos u otros según el contraste que se utilice.

La estructura del trabajo es como sigue; en la sección 2 se estudian los diferentes tipos de residuos; en la sección 3 se consideran contrastes no paramétricos y en la 4 contrastes paramétricos.

## 2. ANALISIS DE RESIDUOS

El punto de partida suele consistir en calcular los residuos MCO definidos como:

$$\hat{U} = MU \quad M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

Las propiedades de este vector son:

$$E\hat{U} = 0$$

$$var\,(\hat{U}) = \sigma^2\, M$$

bajo el supuesto de que las perturbaciones son ruido blanco.

Este tipo de residuos plantea dos problemas importantes:

*a)* Su matriz de varianzas y covarianzas no es escalar, del tipo $\sigma^2$ I, bajo la hipótesis nula de ruido blanco de las perturbaciones. Esto hace difícil la interpretación de los residuos MCO, pues bajo la hipótesis nula debería de ser un proceso con varianzas y covarianzas diferentes para los diferentes períodos de difícil determinación.

*b)* Dicha matriz depende de los valores concretos de las variables explicativas lo cual puede llevar a grandes problemas de cálculo si para toda muestra se hace necesario calcular la distribución de algunos estadísticos.

Para obviar algunos de estos problemas se han propuesto alternativas que podemos agrupar en dos líneas diferentes – un tratamiento más amplio puede verse en Aznar (1983-b)

– Una primera línea ha consistido en definir vectores de residuos que tienen una matriz escalar; así, los residuos ELIO y los recursivos que, como muestra Aznar (1984), en realidad son un miembro más de la familia ELIO.

Pero la restricción de que la matriz de covarianzas sea escalar lleva a unos residuos inferiores a los MCO, inferioridad que puede afectar a la potencia de los contrastes que se definan a partir de los mismos. Esto hace que algunos autores piensen en suavizar esa restricción y obtener residuos con otro tipo de restricciones menos penalizadoras. Veamos, por ejemplo, lo que dicen Abrahamse y Koerts (1971):

"Estrictamente hablando, el requisito de que la matriz de covarianzas sea escalar no es necesario para lo que tenemos in mente. Es suficiente que la matriz de covarianzas no dependa de los regresores" (p. 71).

Estas reflexiones han llevado a una segunda línea en que se ha pretendido definir un vector de residuos con una matriz de covarianzas que no depende de los regresores. Ejemplos de estos residuos pueden verse en Durbin (1970), Abrahamse y Koerts (1971), Abrahamse y Louter (1971), Dubbelman (1972) y Sims (1975). En general, lo que subyace a todos estos contrastes es el encontrar una especie de "matriz media" de los regresores a partir de la cual definir la matriz de covarianzas de los residuos. Muchos de los trabajos citados ha girado en torno a los vectores característicos de la matriz. A que se emplea en la definición del contraste de Durbin Watson.

## 3. CONTRASTES NO PARAMETRICOS

Se puede pensar en un estadístico que contraste la hipótesis de ruido blanco sin considerar ninguna alternativa concreta.

Algunos intentos de este tipo pueden verse en libros de texto y otros trabajos con base en los residuos MCO. Se analizan estos residuos y si son ruido blanco se concluye con que las perturbaciones también lo son. Pero, como ya hemos visto, los residuos MCO no tienen una matriz de covarianzas escalar cuando las perturbaciones la tienen. Por lo tanto, no parecen muy justificadas estas prácticas basadas en el análisis del carácter de ruido blanco de los residuos MCO. Solamente desde el punto de vista asintótico podían estar justificadas pues, como puede verse en Theil (1971), en este caso el residuo MCO si que tiende su probabilidad a la correspondiente perturbación aleatoria.

La propuesta que se hace en este papel es la de analizar el carácter de ruido blanco de los residuos ELIO en lugar de los residuos MCO. Ya hemos visto que si las perturbaciones son ruido blanco, los residuos ELIO también lo son. Y, aunque del carácter de ruido blanco de los residuos ELIO no pueda reducirse en todos los casos que se derive el carácter de ruido blanco de las perturbaciones esto será así con bastante probabilidad como vamos a ver. Por lo tanto, el contraste propuesto consiste en obtener un vector de $n-k$ residuos ELIO, contrastar el carácter de ruido blanco de estos residuos y aceptar esta hipótesis para las perturbaciones en el caso en que se acepte para los residuos ELIO.

Suponer que definimos un vector de residuos recursivos de la siguiente manera:

$$\hat{U}_R = C_R Y = C_R U$$

teniendo en cuenta que $C_R X = O$ (insesgadez) y $C_R C'_R = I_{n-k}$ (matriz de covarianzas escalar). Los vectores de $C_R$ son los vectores característicos de M correspondientes a sus raíces unidad. Esta claro que si $Var(U) = \sigma^2 I_n$, entonces se cumple que $Var(\hat{U}_R) = \sigma^2 I_{n-k}$. Pero también se puede obtener esta matriz de varianzas y covarianzas en el caso en que $Var(U) = \Sigma$ y se cumpla que:

$$C_R \Sigma C'_R = I_{n-k}$$

Teniendo en cuenta que, como hemos dicho, los vectores de $C_R$ son vectores característicos de M la matriz $\Sigma$ tendría que tener algún tipo de relación con la matriz M, lo cual a priori parece poco probable.

A la hora de determinar el carácter de ruido blanco del vector de residuos ELIO, se pueden utilizar diferentes procedimientos alternativos bien conocidos en muchos textos,

especialmente los dedicados a los métodos de series temporales. Veamos una breve enumeración de algunos de estos métodos:

— Análisis gráfico de los residuos.
— Análisis de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.
— Análisis del espectro.
— Utilización de alguno de los contrastes estudiados por Kendall (1976): puntos giro, longitud de fase, diferencia de signo y rango. Este autor proporciona una definición de cada uno de estos conceptos y obtiene los valores esperados para cada uno de ellos bajo la hipótesis de que la serie es ruido blanco. El contraste se basa en la comparación del valor obtenido para el vector concreto de residuos ELIO con esos valores esperados.

## 4. CONTRASTES PARAMETRICOS

La mayor parte de los contrastes paramétricos propuestos hasta fechas recientes han sido propuestos para contrastar la hipótesis nula de independencia serial en las perturbaciones frente a la alternativa de un proceso autoregresivo de primer orden.

El más conocido y utilizado de estos contrastes es el de Durbin–Watson:

$$d = \frac{\hat{U}' \; A \; \hat{U}}{\hat{U}' \; \hat{U}} = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\hat{U}_i - \hat{U}_{i-1})^2}{\hat{U}_i^2}$$

en donde $\hat{U}$ es el vector de residuos MCO y A es la matriz $n \times n$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

A la hora de utilizar este contraste hay tres cuestiones que merecen atención:

*a*) Solo permite tener en cuenta una alternativa muy restringida.

*b*) La distribución de probabilidad de este contraste depende de los valores concretos tomados por los regresores lo que obliga a recalcular y obtener la distribución del contraste para cada aplicación.

c) Las propiedades del contraste no están, en general, bien perfiladas. Solamente en el caso en que se acepte una aporximación a la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones y cuando los regresores sean combinaciones lineales de un subconjunto de los vectores característicos de A se puede decir que el contraste de Durbin–Watson es el contraste uniformemente más poderoso. Pero este es un marco muy restringido.

Para resolver los problemas que iban surgiendo dentro de cada uno de estos apartados se han propuesto nuevos desarrollos que pasamos a analizar.

Para tener en cuenta otro tipo de alternativas que el proceso autorregresivo de primer orden, una línea importante ha girado alrededor del uso del test del Multiplicador de Lagrange. Así, por ejemplo, otra alternativa es un proceso autorregresivo de orden $m$ que podemos escribir:

$$U_t = \rho_1 U_{t-1} + \rho_2 U_{t-2} + \ldots + \rho_m U_{t-m} + \varepsilon_t$$

Como puede verse en Breusch y Pagan (1980), el contraste del Multiplicador de Lagrange puede escribirse como:

$$n \sum_{i=1}^{n} \hat{\rho}_i^2$$

en donde $\hat{\rho}_i$ son los coeficientes de autocorrelación respectivos. Se ve que sigue una distribución $\chi^2$ con $m$ grados de libertad. También demuestra Godfrey (1980) que los contrastes frente a alternativas de AR($m$) y MA($m$) son idénticos, y que ambos se basan simplemente en el contraste de la significatividad conjunta de los primeros $m$ coeficientes de autocorrelación de los residuos MCO.

En lo que respecta al contenido del segundo apartado, ha habido varios desarrollos de interés. Un primero ya realizado por Durbin y Watson (1950 y 1951) en el que definieron dos distribuciones límite, $d_U$ y $d_L$, dentro de las cuales se encontraba la verdadera distribución del contraste. Como estas dos distribuciones no dependían de los valores de los regresores podían calcularse los puntos críticos independientes de los regresores y utilizarse para cualquier regresión. Solamente quedaba un problema y era el de la existencia de una zona de indefinición entre los puntos críticos de ambas distribuciones, lo cual llevaba a que el contraste no pueda concluir con la existencia o inexistencia de autocorrelación.

Otros desarrollos dentro de este segundo apartado han consistido en definir contrastes utilizando residuos cuya distribución no depende de los regresores, tal como se ha visto en la sección 2. Ejemplos de estos trabajos pueden verse en Abrahamse y Koerts (1969),

Abrahamse y Louter (1971), y Dubbelman (1972) para residuos con una matriz de covarianzas fijada a priori pero no escalar y en Theil (1971) para residuos con matriz de covarianzas escalar.

La ventaja de estos contrastes es que su distribución no depende de los regresores y pueden obtenerse puntos críticos con carácter general. Pero el inconveniente es que su potencia es inferior a la del contraste Durbin–Watson. Como puede verse en algunos de los trabajos mencionados y en los de L'Esperance y Taylor (1975) y Dubbelman et al. (1978), las diferencias de potencia pueden ser sustanciales. Por lo tanto, si las restricciones de cálculo no son muy grandes, no parece muy justificado el uso de estos contrastes frente al contraste de Durbin–Watson.

En lo que respecta al tercer apartado, se ha tratado de concretar más la potencia del contraste de Durbin–Watson y se han propuesto nuevos contrastes que podían tener mayor potencia. Durbin y Watson (1971) demuestran que su contraste es localmente uniformemente más poderoso. Es decir, lo es para valores de $\rho$ muy próximos a cero, siendo $\rho$ el parámetro del proceso autorregresivo de primer orden.

Esto hacía pensar que, para valores de $\rho$ distantes de cero, podrán definirse otros contrastes con mayor potencia. En esta dirección pueden enmarcarse los trabajos de Berenblut y Webb (1973), King (1980) y (1985). Veamos brevemente la propuesta de estos autores.

Para contrastar la hipótesis nula $H_o$: $\rho = 0$ frente a la alternativa $H_1$: $\rho = \rho_1 = 0$, o equivalentemente, $H_o$: Var $(U) = \sigma^2 I_n$ frente a $H_1$: Var $(U) = \Sigma(\rho_1)$, King demuestra que el contraste basado en el estadístico

$$S(\rho_1) = \frac{\hat{U}'_G \Sigma^{-1}(\rho_1) \hat{U}_G}{\hat{U}'\hat{U}}$$

en donde $\hat{U}_G$ es el vector de residuos generalizados, es el contraste uniformemente más poderoso. Pero si la alternativa es $\rho \neq \rho_1$, ya no podemos decir que sea el contraste uniformemente más poderoso. Solo podemos decir que para valores próximos de $\rho_1$ lo será. Por ello, podía pensarse en utilizar el contraste $S(\rho_1)$ para varios valores de $\rho$; en concreto, King (1985) analiza $\rho$=0,5 y $\rho$=0,75. El contraste de Berenblut–Webb coincide con el $S(\rho_1)$ para $\rho = 1$.

En los estudios de Monte Carlo que llevan a cabo estos autores se obtiene que la potencia de estos contrastes es superior a la del contraste de Durbin–Watson para valores de $\rho$ superiores a 0,5.

## 5. CONCLUSION

A la vista de lo comentado, la propuesta que parece más satisfactoria para contrastar la hipótesis de ruido blanco de las perturbaciones aleatorias es la siguiente:

— Utilización del contraste no paramétrico descrito en este trabajo para obtener una primera conclusión sin considerar ningún tipo de alternativa.

— Utilización de los contrastes de Durbin–Watson y $S(\rho_1)$ para 0,5 y 1, pensados para la alternativa de un proceso autorregresivo de primer orden.

— Utilización del contraste de Lagrange para alternativas AR($m$) y MA($m$).

La conclusión última acerca de si las perturbaciones son o no ruido blanco habrá de derivarse del análisis de los valores de toda esta batería de contrastes.

Conviene destacar que todos estos resultados se han obtenido para un modelo con regresores no estocásticos. Para modelos con regresores estocásticos, habría que pensar en otro tipo de contrastes pero esto ya queda fuera del objetivo del presente trabajo.

## BIBLIOGRAFIA

ABRAHAMSE, A. P. J. and J. KOERTS (1971): *"New Estimators of Disturbances in Regression Analysis"*. JASA, Vol. 66, n.º 333, 71–74.

ABRAHAMSE, A. P. J. and A. S. LOUTER (1971): *"On a New Test for Autocorrelation in Least Squares Residuals"*. Biometrika, 58, 1, 53–60.

AZNAR, A. (1983): *"Estudio de Residuos"*. Cuaderno de Apuntes n.º 1. Departamento de Econometría. Zaragoza.

AZNAR, A. (1984–a): *"Propuesta de Estrategia para la Selección de Modelos Econométricos"*. Ponencia presentada al IX Simposio de Teoría Económica y Econometría. Barcelona 25–27. Septiembre.

AZNAR, A. (1984–b): *"Residuos Recursivos"*. Estadística Española, m.º 105, pp. 117–121.

BERENBLUT, I. I. and G. J. WEBB (1973): *"A New Test for Autocorrelated Errors in the Linear Regression Model"*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 35, 33–50.

BREUSCH, T. S. and A. R. PAGAN (1980): *"The Lagrange Multiplier Test and its Applications to Model Specification in Econometrics"*. Review of Economic Studies XLVII, 239–253.

DUBBELMAN, C. (1972): *"A Priori Fixed Covariance Matrices of Disturbance Estimators"*. European Economic Review, 3 - 413–436.

DUBBELMAN, C., A. S. LOUTER and A. P. ABRAHAMSE (1978): *"On Typical Characteristics of Economic Time Series and the Relative Qualities of Five Autocorrelation Tests"*. Journal of Econometrics, Vol. 8, n.º 3.

DURBIN, J. (1970): *"An Alternative to the Bounds Test for Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression."* Econométrica, Vol. 38, n.º 3, 422–429.

DURBIN, J. and WATSON, G. S. (1950): *"Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, I."* Biometrika, 37, 409–428.

DURBIN, J. and WATSON, G. S. (1951): *"Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, II."* Biometrika, 38, 159–178.

DURBIN, J. and WATSON, G. S. (1971): *"Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, III."* Biometrika, 58, 1, 1–19.

GODFREY, L. G. (1978): *"Testing Against General Autorregressive and Moving Average Error Models when the regressors include Logged. Dependent Variables"*. Econométrica - Vol. 46 - n.º 6 - 1293–1303.

GRANGER, C. W. J. (1980): *"Forecasting White Noise"*. Discussion Paper 80–31.

HENDRY, D. F. and J. F. RICHARD (1982): *"On the Formulation of Empirical Models in Dynamic Econometrics"*. Journal of Econometrics, 20, 3–33.

KENDALL, M. (1976): *"Time–Series"*. Charles Griffin.

KING, M. L. (1980): *"Robust Tests for Spherical Symmetry and their Application to Least Squares Regression"*. Annals of Statistics 8, 1265–1271.

KING, M. L. (1985): *"A Point Optimal Test for Autoregressive Distur bances"*. Journal of Econometrics 27 (1985), 21–37.

L'ESPERANCE, L. and D. TAYLOR (1975): *"The Power of Four Tests of Autocorrelation in the Linear Regression Model"*. Journal of Econometrics, 3, 1–21.

SIMS, G. A. (1975): *"A Note on Exact Tests for Serial Correlation"*. JASA. Vol. 70, n.º 349, 162–165.

## SUMMARY

### WHITE NOISE CONTRAST OF THE RANDOM DISTURBANCE

This paper contains a survey of parametric and non–parametric autocorrelation tests. A new non–parametric test is proposed.

*Key words:* White Noise, BLUS Residuals, Non–Parametric Test.

AMS 1980. Subject classification: 62M10.