T. C.

ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKIN KÜMELER VE BCI/BCK-CEBİRLERİ

İclal ÇELİK SİNER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN KÜMELER VE BCI/BCK-CEBİRLERİ

İclal ÇELİK SİNER

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 11/09/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Murat CANDAN
Yrd. Doç. Dr.
BAŞKAN

Mustafa UÇKUN
Yrd. Doç. Dr.
ÜYE

Mehmet Ali ÖZTÜRK
Yrd. Doç. Dr.
ÜYE (DANIŞMAN)

Doç. Dr. Ramazan GÜRBÜZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN KÜMELER VE BCI/BCK-CEBİRLERİ

İclal ÇELİK SİNER

Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Yıl: 2015, Sayfa Sayısı: 39+iv
Jüri : Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN
: Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Birinci bölümde, BCK-cebirleri kavramının ortaya çıkışı ile ilgili bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, BCK-cebirleri hakkında temel bilgiler, konu ile ilgili teoremler ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yakın küme ve yakın yaklaşım uzayı hakkında genel bilgi ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise yakın yaklaşım uzayında yakın BCK-cebirleri tanımı verilmiştir ve ayrıca yakınlık BCK-cebirlerinin bazı özellikleri verilerek orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: BCK-cebiri, Yakın küme, Yakınlık yaklaşım uzayı, Yakınlık BCK-cebiri.

ABSTRACT

MSc THESIS

NEAR SETS AND BCI/BCK-ALGEBRAS

İclal ÇELİK SİNER

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Year: 2015, Number of pages: 39+iv
Jury : Asst. Prof. Dr. Murat CANDAN
: Asst. Prof. Dr. Mustafa UÇKUN
: Asst. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

In the first chapter, information about the emergence of the concept of BCK-algebra are given.

In the second chapter, basic information about BCK-algebra, the theorem about the issues and examples are given.

In the third chapter, general information of about the nearness sets and nearness approach space was given.

In the fourth chapter, nearness BCK-algebra on nearness approximation spaces was introduced and we also obtained original results given the proximity of some of the features BCK-algebra.

Key words: BCK-algebras, Near sets, Nearness approximation spaces, Nearness BCK-algebras.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen, bilgi ve tecrübesiyle bu çalışmayı yönlendiren ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK' e içten teşekkürlerimi sunarım.

Her konuda sabırla yardımcı olan eşim Müjdat SİNER'e de desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ediyorum.

İclal ÇELİK SİNER

Adıyaman, 2015

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÖZET……i

ABSTRACT……ii

TEŞEKKÜR…….....iii

İÇİNDEKİLER……..……iv

1. GİRİŞ……..1

2. BCI/BCK-CEBİRLERİ…….……..2

2.1. Tanımlar ve BCK-Cebirlerinin Temel Özellikleri ……...….....2

3. YAKIN KÜME VE YAKINLIK YAKLAŞIM UZAYI…….…….....8

3.1. Yakın Kümeler……...……..8

3.2. Temel Yaklaşım Uzayı……...……10

3.3. Yakınlık Yaklaşım Uzayı……...……13

4. YAKINLIK BCK-CEBİRLERİ…….……..….16

4.1. Yakınlık BCK-Cebirleri ve Örnekleri……...……16

4.2. Bazı Yakınlık BCK-Cebirleri……...……..29

KAYNAKLAR……..38

ÖZ GEÇMİŞ…..……...……39

1. GİRİŞ

$BCK-cebirleri$ kavramı ilk olarak 1966 yılında K. Iseki tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavram iki farklı konudan doğmuştur. Birincisi küme teorisi, ikincisi matematiksel lojiktir. Küme teorisinde; L. Kantoroviç ve E. Livenson tarafından temel olan kesişim, birleşim ve fark işlemleri tanımlanmış ve bu işlemin özelliklerinin genelleştirilmesi yapılarak Boolean cebiri kavramı çalışılmıştır. Kümelerle ilgili olarak aşağıdaki bağıntılar bilinmektedir.

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \subset C \setminus B,$$

$$A \setminus (A \setminus B) \subset B.$$

Bu bağıntılar temel alınarak $BCK-cebiri$ kavramı ortaya atılmıştır ve bu konuda birçok çalışmalar yapılmıştır.

Şimdi, $BCK-cebirleri$ hakkında temel bilgiler verelim. Bu bilgiler kaynak [5] ten alınmıştır ve dolayısıyla daha ayrıntılı bilgi için kaynak [5] e bakınız.

2. BCI/BCK-CEBİRLERİ

2.1. Tanımlar ve BCK-Cebirlerinin Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. X bir küme, "$*$", X üzerinde bir ikili işlem ve 0, X kümesinin bir elemanı olsun. $(X; *, 0)$ üçlüsü için aşağıdaki koşullar sağlanırsa X e bir $BCK-cebiri$ denir. Her $x, y, z \in X$ için

$BCI-1$: $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$,

$BCI-2$: $(x * (x * y)) * y = 0$,

$BCI-3$: $x * x = 0$,

$BCI-4$: $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$,

$BCK-5$: $0 * \mathrm{x} = 0$.

Her $x, y \in X$ için "$x \leq y$ dir ancak ve ancak $x * y = 0$" bağıntısı tanımlansın. Bu durumda $(X; *, 0)$ $BCK-cebiri$, yeniden aşağıdaki gibi verilir.

Her $x, y, z \in X$ için

$BCI-1'$: $((x * y) * (x * z)) \leq (z * y)$,

$BCI-2'$: $(x * (x * y)) \leq y$,

$BCI-3'$: $x \leq x$,

$BCI-4'$: $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,

$BCK-5'$: $0 \leq x$,

$BCK-6'$: $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0$

dır.

Örnek 2.1.2. $X = \{0, 1, 2\}$,

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

Tablo 2.1

ise $(X; *, 0)$, $BCK-5$ i sağlamadığından $BCK-cebiri$ değildir. Çünkü;

$0 * x = 0 * 2 = 2 \neq 0$ dır.

Teorem 2.1.3. $(X; *, 0)$ bir $BCK-cebiri$ olsun.

i) $x \leq y \, ise \, z * y \leq z * x$,

ii) $x \leq y \, ve \, y \leq z \, ise \, x \leq z$

dir.

Teorem 2.1.4. $(X; *, 0)$ bir $BCK-cebiri$ olsun. Her $x, y, z \in X$

$$(x * y) * z = (x * z) * y$$

dir.

Teorem 2.1.5. $(X; *, 0)$ bir $BCK-cebiri$ olsun. Buna göre; her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşullar geçerlidir.

i) $x * y \leq z \, ise \, x * z \leq y$,

ii) $(x * z) * (y * z) \leq x * y$,

ii) $x \leq y \, ise \, x * z \leq y * z$,

iv) $x * y \leq x$,

v) $x * 0 = x$.

Herhangi $x, y \in X$ için $x \wedge y = y * (y * x)$ ile gösterelim. Bu durumda $x \wedge x = x$, $x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0$ ve $x \wedge y$; x ile y den daha küçük sınır olduğu açıktır.

Teorem 2.1.6. Herhangi bir $BCK-cebirinde$ $x * (y \wedge x) = x * y$ dir.

Örnek 2.1.7. X boştan farklı bir küme, $P(X), X$ in kuvvet kümesi olmak üzere $A, B \in P(X)$ için

$$A * B = \begin{cases} \varnothing, & A \subseteq B \; ise \\ A - B, & diğer \; durumda \end{cases}$$

ikili işlem ile $(P(X);\ *,\ \varnothing)$ bir $BCK - cebiridir.$

Çözüm:

$BCK - 5: \varnothing * B = \varnothing, (\varnothing \subseteq B)$

$BCI - 4: A * B = \varnothing \; ve \; B * A = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B \; ve \; B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$BCI - 3: A * A = \varnothing, \ (A \subseteq A)$

$BCI - 2: \big(A * (A * B) \big) * B = (A * \varnothing) * B = (A - \varnothing) * B = A * B = \varnothing, (A \subseteq B).$

$(A * (A * B)) * B = (A * (A - B)) * B = (A - (A - B)) * B = (A \cap B) * B = \varnothing, (B \subset A , diğer \; durum)$

$BCI - 1:$ $A \subseteq B$ ise $((A * B) * (A * C)) * (C * B) = \varnothing$

$B \subset A$ ise $C \subset B \subset A , B \subset C \subset A$ ve $B \subset A \subset C$ durumları ayrı ayrı incelenir.

Tanım 2.1.8. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebir$i ve X_0 , X in boş olmayan alt kümesi olsun.

Eğer her $x, y \in X_0$ için $x * y \in X_0$ olursa X_0 kümesine X in bir alt cebiri denir [5].

Teorem 2.1.9. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ ve X_0 , X in alt cebiri olsun. Bu durumda

i) $0 \in X_0$,
ii) $(X_0;\ *\ ,\ 0)$ bir $BCK - cebiri$,
iii) $X,\ X$ in bir alt cebiri,
iv) $\{ 0 \},\ X$ in bir alt cebiri

dir.

Teorem 2.1.10. $(X; *,\ 0)$ bir $BCK - cebiri$ ve $0 \neq x_0 \in X$ ise $(\{ 0, x_0 \};\ *,\ 0);\ X$ in bir alt cebiridir.

Lemma 2.1.11. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ ve her $x, y, z \in X$

$\boldsymbol{i})$ $x * y = 0$ olduğunda $x \neq y$ ise $y * x \neq 0$,

$\boldsymbol{ii})$ $x * y = z$ ise $z * x = 0$

dır.

Tanım 2.1.12. Her $x, y, z \in X$ için

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$$

eşitliğini sağlayan $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebirine$ pozitif anlamlı $BCK - cebiri$ denir.

Lemma 2.1.13. X bir $BCK - cebiri$ olsun. Her $x, y, z \in X$

$$\big(x * (x * y)\big) * (y * x) \leq x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)$$

dir.

Teorem 2.1.14. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

$\boldsymbol{i})$ X pozitif anlamlı,

$\boldsymbol{ii})$ $x * y = (x * y) * y$,

$\boldsymbol{iii})$ $\big(x * (x * y)\big) * (y * x) = x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)$,

$\boldsymbol{iv})$ $x * y = (x * y) * \big(x * (x * y)\big)$,

$\boldsymbol{v})$ $x * (x * y) = \big(x * (x * y)\big) * (x * y)$,

$\boldsymbol{vi})$ $\big(x * (x * y)\big) * (y * x) = \big(y * (y * x)\big) * (x * y)$

dır.

Teorem 2.1.15. $(X; *, 0)$ (2, 0) tipinde bir $BCK - cebiri$ olsun. Bu durumda X pozitif anlamlı bir $BCK\ cebiridir \iff BCI - 1,\ BCK - 5$ ve

$\boldsymbol{vii})$ $\big(x * (x * y)\big) * (y * x) = \big(y * (y * x)\big) * (x * y)$,

$\boldsymbol{viii})$ $x * 0 = x$

koşulları sağlamasıdır.

Teorem 2.1.16. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i) X pozitif anlamlı,

ii) $(x * y) * z = 0$ ise $(x * z) * (y * z) = 0$,

iii) $(x * y) * y = 0$ ise $x * y = 0$

dır.

Örnek 2.1.17. $X = \{ 0, a, b, 1 \}$ olmak üzere;

*	0	a	b	1
0	0	0	a	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
1	1	1	1	0

$Tablo$ 2.2

Her $x, y \in X$ için $x * y = (x * y) * y$ sağlanır ve dolayısıyla Teorem 2.1.14. den $(X; *, 0)$ pozitif anlamlı bir $BCK - cebiridir$.

Tanım 2.1.18. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$x \wedge y = y \wedge x$$

ise yani $y * (y * x) = x * (x * y)$ ise X' e komütatif $BCK - cebiri$ denir.

Teorem 2.1.19. $(X; *, 0)$ bir $BCK - cebiri$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

i) X komütatif bir $BCK - cebiri$,

ii) $x * (x * y) \leq y * (y * x)$,

iii) $\big(x * (x * y)\big) * \big(y * (y * x)\big) = 0$

dır.

Örnek 2.1.20. $X = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$,

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
3	3	1	1	0	0
4	4	3	2	1	0

$Tablo$ 2.3

ise $(X;*,0)$ komütatif $BCK-cebiri$ değildir. Çünkü; $2 \wedge 3 = 3 * (3 * 2) = 3 * 1 = 1$ ve $3 \wedge 2 = 2 * (2 * 3) = 2 * 0 = 2$ olur. Böylece; $2 \wedge 3 \neq 3 \wedge 2$ dir.

Tanım 2.1.21. $(X;*,0)$ bir $BCK-cebiri$ olsun. Her $x,y \in X$ için

$$x = x * (y * x)$$

ise X e anlamlı $BCK-cebiri$ denir.

Örnek 2.1.22. $X=\{0,1\}$ olsun. $0*0=0,\ 0*1=0,\ 1*1=0,\ 1*0=1$ biçimindeki " $*$ " ikili işlemi ile $(X;*,0)$ anlamlı $BCK-cebiridir$. Çünkü;

$0 = 0 * (1 * 0),\ 0 = 0 * (0 * 0),\ 1 = 1 * (0 * 1),\ 1 = 1 * (1 * 1)$

dir.

Teorem 2.1.23. Bir $BCK-cebiri$ anlamlıdır gerekli ve yeter şart $BCK-cebiri$ hem komütatif hem de pozitif anlamlıdır.

3. YAKIN KÜME VE YAKINLIK YAKLAŞIM UZAYI

Bu bölümde, temel olarak; kaynak [9] dikkate alınmış ve yakın küme, yakınlık yaklaşım uzayı kavramları hakkında bazı temel özellikler verilmiştir.

3.1. Yakın Kümeler

Yakın küme teorisi, dijital görüntüler arasındaki benzerliklerin karşılaştırılması probleminden ortaya çıkmıştır. Genel olarak yakın kümeler nesnelerin kendisi ile veya başka bir küme ile benzer tanımlamalar taşıması ile belirlenir.Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden elde edilen benzer bilgilerin metot olarak kullanabilmesini sağlar, yani nesnelerin gözlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır.

Tanım 3.1.1. (Çıkarım Fonksiyonu) Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.

Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları, bir nesneden gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır. Örneğin elmalar karşılaştırıldığında, bir elmanın kırmızılığı (gözlemlenen nesne) renkleri temsil eden bir çıkarım fonksiyonu ile tanımlanabilir. Bu fonksiyonun değerleri kırmızılığın derecesine karşılık gelen bir reel sayı olabilir.

Nesneler ancak tanımlamalar yardımıyla algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonların yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan

$$\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)),$$

nesne tanımlaması elde edilir.

Sembol	*Anlamı*
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{O}$	Algılanabilir nesneler kümesi
X	$X \subset \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi
x	$x \in X \subset \mathcal{O}$, örnek nesne
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonların kümesi
B	$B \subset \mathcal{F}$
L	Tanım uzunluğu
φ_i	$\varphi_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu
Φ	$\Phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^L, \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$ nesne tanımlaması

Tablo 3.1

ve ayrıca aşağıdaki tablo ile konuyu özetleyebiliriz.

Sembol	*Anlamı*
B	$B \subseteq F$
r	$\binom{\lvert B \rvert}{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu
B_r	$r \leq \lvert B \rvert$
$\sim_{B_r}$	B_r, yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı
$[x]_{B_r}$	$\left\{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\right\}$, benzerlik denklik sınıfı
$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$	$\left\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\right\}$, bölüm kümesi
ξ_B	$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$, ayrışım

Tablo 3.2

Tanım 3.1.2. $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere

$$\{(x, x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid |\varphi_i(x') = \varphi_i(x)| = 0, \forall \in B\}$$

şeklinde tanımlanan "$\sim_B$" bağıntısına $\mathcal{O}$ da ayırt edilemezlik bağıntısı denir [9].

Yakın küme yaklaşımında nesnelerin tanınması için temel fikir, nesne tanımlamalarının karşılaştırılmasıdır. X, X' kümeleri kısmi olarak aynı tanımlamalara sahip nesneler içeriyorsa birbirine yakındır.

Tanım 3.1.3. $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$, $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır denir.

Tanım 3.1.4. (Yakın kümelerin hiyerarşisi) $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $X', X'' \subseteq X$ olsun. Bu durumda X', X'' yakın kümeler ise X bir yakın kümedir. Bu duruma yakın kümelerin hiyerarşisi denir.

Tanım 3.1.5. (Kalıtımsal yakınlık) Yakın kümelerin hiyerarşisi kavramı dikkate alınırsa, yakın küme içeren herhangi bir küme yakın kümedir. Bu duruma kalıtımsal yakınlık denir.

Teorem 3.1.6. Yakın küme içeren kümenin kendisi de yakın kümedir.

İspat: X kümesin bir yakın küme içerdiğini kabul edelim. Yakın kümelerin hiyerarşisi ve kalıtımsal yakınlık dikkate alınırsa, X bir yakın kümedir.

3.2. Temel Yaklaşım Uzayı

$\mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\sim_B$, $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$ ayrılışını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere; temel yaklaşım uzayı ($\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$, $\sim_B$) şeklindedir. Temel yaklaşım uzayı, yaklaşımlı küme teorisinin temeli olarak dikkate alınır. Aynı zamanda bir yaklaşım uzayı, var olan algılarımızın yapısal karşıtları olarak gözlemlenebilir [8-9].

Yaklaşım uzayı kavramı, $\mathcal{O}$ nesnelerin kümesinin $\sim_B$ ayırt edilemezlik bağıntısı yardımıyla ξ_B ayrılışının inşası ile başlar. Bunun yanında herhangi bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin yaklaşımları için $x \in \mathcal{O}$ olmak üzere; X ile $[x] \in \xi_B$ sınıflarının arasındaki bazı durumlar dikkate alınır. Bu durumu yakından görebilmek için bir kümenin alt ve üst kavramları incelenmelidir.

3.2.1. Bir kümenin alt yaklaşımı

Sembol	*Anlamı*
$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$	*Temel yaklaşım uzayı,* $B \subseteq \mathcal{F}$
$B_* X$	$\bigcup_{[x]_B \subseteq X} B$, X in $B-$*alt yaklaşımı*
$B^* X$	$\bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset}$, X *in* $B-$*üst yaklaşımı*
$Bnd_B X$	$B_* X / B^* X = \{x \mid x \in B^* X \text{ ve } x \notin B_* X\}$

Tablo 3.3

$X \subseteq \mathcal{O}$ daki nesneler ile ξ_B ayrılışı arasındaki ilişkiler, X ile ortak nesnelere sahip olan sınıfların belirlenmesi ile tespit edilir. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin bir yaklaşımı, X kümesinin alt kümesi olan $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X kümesinin B- alt yaklaşımı denir ve

$$B_* X = \bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B$$

ile gösterilir. Sonuç olarak $B_* X$ boştan farklı ise $B_* X$ in her bir sınıfındaki nesneler, X deki nesnelerin tanımlamaları ile eşleşen tanımlamalara sahiptir.

Lemma 3.2.2. X kümesinin B-alt yaklaşımı $B_* X$ bir yakın kümedir.

Teorem 3.2.3. X kümesi boştan farklı bir $B_* X$ alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.

3.2.4. Bir kümenin üst yaklaşımı

$X \subseteq \mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi ve B kümesi de, $\mathcal{O}$ daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X kümesi ile arakesiti boştan farklı olan $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X kümesinin B-üst yaklaşımı denir ve

$$B^* X = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B$$

ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle B^*X üst yaklaşımı, X deki bir nesnenin tanımıyla eşleşen en az bir nesne tanımı içeren $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. B_*X alt yaklaşımı, B^*X üst yaklaşımının alt kümesidir. B^*X üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $[x]_B \in \mathcal{O} / \sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 3.2.5. B^*X üst yaklaşımı ile X kümesi yakın kümelerdir.

İspat: Yakın kümelerin hiyerarşisi kavramı dikkate alınırsa, B^*X üst yaklaşımı bir veya birden fazla yakın küme sınıfları içerdiğinden bir yakın kümedir. Üst yaklaşımın tanımından, B^*X ve X bir veya birden fazla ortak nesne içerir ve bu ortak nesneler eşleşen tanımlara sahiptir. Böylece B^*X ve X yakın kümelerdir.

3.2.6. Bir kümenin sınır bölgesi

Bir yaklaşımın sınır bölgesi,

$$Bnd_B X = B^*X \setminus B_*X = \{x \mid x \in B^*X \; ve \; x \notin B_*X\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bir yaklaşımın sınırı boştan farklı olduğunda X kümesi yaklaşımlı küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X, yaklaşımlı ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkilidir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda X yaklaşımlı kümedir.

3.3. Yakınlık Yaklaşım Uzayı

Sembol	*Anlamı*
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
r	$\binom{\lvert B \rvert}{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu
B_r	$r \leq \lvert B \rvert$
$\sim_{B_r}$	B_r, yardımıyla tanımlanan ayırt edilmezlik bağıntısı
$[x]_{B_r}$	$\{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$, yakınlık denklik sınıfı
$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$	$\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$, ayrışım
$N_r B$	$\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$, ayrılışların kümesi
ν_{N_r}	$\nu_{N_r} : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \times \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to [0,1]$, yakınlık fonksiyonu
$N_r(B)_* X$	$\bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$, alt yaklaşım
$N_r(B)^* X$	$\bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$, üst yaklaşım
$Bnd_{N_{r(B)}}(X)$	$N_r(B)^* X / N_r(B)_* X = \{x \in N_r(B)^* X \mid x \notin N_r(B)_* X\}$, sınır bölgesi

Tablo 3.4

Yakınlık yaklaşım uzayı $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{Nr})$ şeklinde tanımlıdır. Burada $\mathcal{O}$ kümesinin, algılanabilen nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesinin de nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi; r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; " $\sim_{B_r}$ " yaklaşımlı küme teorisindeki tanımlanışından $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, " $\sim_{B_r}$ " ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesinin farklı bir ayrılışını tanımlamasına yol açar. Bu seçim $|B|, B$ deki fonksiyonların sayısı ve r de B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere; $\binom{|B|}{r}$ farklı şekilde yapılabilir.

" $\sim_{B_r}$ " ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ denklik sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$dir. Ayrışımların bir küme ailesi $N_r(B) = \left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\right\}$ dir. Ayrıca, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $\nu_{N_r}: \mathcal{P}(\mathcal{O}) \times \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to [0,1]$ şeklinde tanımlıdır. Yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $B_r \subseteq B$ deki fonksiyonlar yardımıyla özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder.

Nesne özelliklerini temsil eden $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümelerinin her biri $\binom{|B|}{r}$ farklı seçimi, birer farklı $\sim_{B_r} = \{(x,x') \in \mathcal{O}\text{x}\mathcal{O} \mid \varphi_i(\text{x}) = \varphi_i(\text{x}'), \forall\ \varphi_i \in B_r\}$, ayırt edilemezlik bağıntısı, $[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$ denklik sınıfları, $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı, $N_r(\text{B}) = \left\{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\right\}$ kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $(x,x') \in B_r$ ise x ve x' ne B_r deki tüm çıkarım fonksiyonlara göre $B-$ayırt edilemezdir, denir.

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi " $\sim_{B_r}$ ", $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı, " $\cdot$ ", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda; her $x,y \in X$ için $[x]_{B_r} \cdot [y]_{B_r} \subseteq [x \cdot y]_{B_r}$ dır.

Tanım 3.3.1. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi " $\sim_{B_r}$ ", $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı, " $\cdot$ ", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda; her $x,y \in X$ için $[x]_{B_r} \cdot [y]_{B_r} = [x \cdot y]_{B_r}$ ise o zaman " $\sim_{B_r}$ " ayırt edilemezlik bağıntısına $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Teorem 3.3.2. Ayrışımların kümesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

İspat: $\xi_{\mathcal{O},B_r} \in N_r(\text{B})$ ayrılışı $[x]_{B_r}$ sınıflarını içerdiğinden ve bu sınıflar birer yakın küme olduklarından $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ bir yakın kümedir. Böylece $N_r(\text{B})$ kümesi bir yakın kümedir.

Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin, $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)$ – alt yaklaşımı,

$$N_r(B)_*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin, $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)$ – üst yaklaşımı da,

$$N_r(B)^*X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.3.3. Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin $N_r(B)_*X$ alt yaklaşımı bir yakın kümedir.

İspat: Alt yaklaşımın tanımı dikkate alınırsa $N_r(B)_*X \subseteq X$ ve $N_r(B)_*X$, X in alt kümeleri olan $[x]_{B_r}$ sınıflarından oluşur. $[x]_{B_r}$ sınıfları yakın küme olduklarından $N_r(B)_*X$ alt yaklaşımı da yakın kümedir.

Teorem 3.3.4. Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin $N_r(B)^*X$ üst yaklaşımı bir yakın kümedir.

Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin sınır bölgesi,

$$Bnd_{N_r(B)}(X) = N_r(B)^*X \setminus N_r(B)_*X = \{x \in N_r(B)^*X \mid x \notin N_r(B)_*X\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 3.3.5. Bir X kümesinde $|Bnd_{N_r(B)}(X)| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.

Teorem 3.3.6. Her yaklaşımlı küme bir yakın kümedir.

İspat: Yukarıdaki teorem dikkate alındığında X kümesi bir yakın kümedir ancak ve ancak $|Bnd_{N_r(B)}(X)| \geq 0$ dır. $|Bnd_{N_r(B)}(X)| > 0$ ise X kümesi yaklaşımlı yaklaşımlara sahiptir yani X kümesi yakın küme olduğu gibi aynı zamanda bir yaklaşımlı kümedir. $|Bnd_{N_r(B)}(X)| = 0$ ise X yakın küme olarak dikkate alınabilir ancak yaklaşımlı küme olamaz. Sonuç olarak, her yaklaşımlı küme bir yakın kümedir ancak her yakın küme bir yaklaşımlı küme değildir.

4. YAKINLIK BCK-CEBİRLERİ

Yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde tanımlanan yakın $BCK-cebirleri$ veya kısaca yakınlık $BCK-cebirleri$ konu alan bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, yakınlık $BCK-cebirleri$ ve alt yakınlık $BCK-cebirleri$ ele alınmıştır. İkinci kısımda ise çeşitli yakınlık $BCK-cebirlerinin$ tanımlarına ve örneklerine yer verilmiştir.

4.1. Yakınlık BCK-Cebirleri ve Örnekler

Tanım 4.1.1. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r(B), V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı; $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{O}$, $" * "$; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem ve 0; $\mathcal{O}$ da bir sabit olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$\boldsymbol{YBCI-1}$: $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de geçerli,

$\boldsymbol{YBCI-2}$: $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de geçerli,

$\boldsymbol{YBCI-3}$: $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de geçerli,

$\boldsymbol{YBCI-4}$: $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de geçerli,

$\boldsymbol{YBCK-5}$: $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği X de geçerli

özellikleri sağlanırsa X e yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde bir yakın $BCK-cebiri$ veya kısaca yakınlık $BCK-cebiri$ denir.

$\mathcal{O}$ üzerinde bir $" \leq "$ bağıntısı, her $x, y, z \in \mathcal{O}$ için

$$x \leq y :\Leftrightarrow x * y = 0$$

ile tanımlansın. Bu bağıntıya göre; $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde $yakın\ BCK-cebiri$ yeniden aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\boldsymbol{YBCI-1'}$: $(x * y) * (x * z) \leq (z * y)$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlansın,

$\boldsymbol{YBCI-2'}$: $x * (x * y) \leq y$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlansın,

$\boldsymbol{YBCI-3'}$: $x \leq x$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlansın,

$\boldsymbol{YBCI-4'}$: $0 \leq x$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlansın,

$\boldsymbol{YBCK-5'}$: $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ özelliği X de sağlansın,

$\boldsymbol{YBCK-6'}$: $x \leq y \iff x * y = 0$ özelliği $N_r(B)\ ^{*}\ X$ de sağlansın.

Örnek 4.1.2. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c, d\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları;

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

biçiminde tanımlansın. Yani;

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_2	α_1	α_3
a	α_3	α_2	α_1
b	α_2	α_1	α_3
c	α_2	α_2	α_3
d	α_1	α_1	α_4

$Tablo$ 4.1

olsun. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde " $*$ " işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	a	0	a	0
c	c	c	c	0	0
d	d	d	d	d	0

$Tablo$ 4.2([5])

Bu durumda $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi, " $*$ " işlemi ile bir $BCK-cebiridir$.

$X = \{a, c\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; $X \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde " $*$ " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın;

$*$	a	c
a	0	0
c	c	0

$Tablo$ 4.3

Bu durumda;

$$[0]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(0) = \alpha_2\} = \{0, b, c\} = [b]_{\{\varphi_1\}} = [c]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_3\} = \{a\},$$

$$[d]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_1\} = \{d\}$$

olur ve dolayısıyla $\varepsilon_{\{\varphi_1\}} = \{[0]_{\{\varphi_1\}}, [a]_{\{\varphi_1\}}, [d]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir.

$$[0]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(0) = \alpha_1\} = \{0, b, d\} = [b]_{\{\varphi_2\}} = [d]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_2\} = \{a, c\} = [c]_{\{\varphi_2\}}$$

o zaman $\varepsilon_{\{\varphi_2\}} = \{[0]_{\{\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_2\}}\}$ dir. Son olarak;

$$[0]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(0) = \alpha_3\} = \{0, b, c\} = [b]_{\{\varphi_3\}} = [c]_{\{\varphi_3\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_1\} = \{a\},$$

$$[d]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(d) = \alpha_4\} = \{d\}$$

bulunur. Buradan $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [a]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}$ dür. Böylece; $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ dür. Bu durumda;

$$N_1(B) * X = \bigcup_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap X \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0, b, c\} \cup \{a\} \cup \{a, c\} = \{0, a, b, c\}$$

elde edilir. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in X$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B) * X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI-2}$: Her $x, y \in X$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI-3}$: Her $x \in X$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI-4}$: Her $x \in X$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK-5}$: Her $x, y \in X$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği X de sağlanır.

O halde; $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin X alt kümesi bir yakınlık $BCK-cebiridir$.

Örnek 4.1.3. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. Bu durumda $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$$

olmak üzere;

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_1	α_2	α_3
a	α_2	α_1	α_3
b	α_3	α_3	α_2
c	α_2	α_2	α_3

$Tablo\ 4.4$

biçiminde tanımlansın. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$*$" işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	a	0
c	c	c	c	0

$Tablo\ 4.5$

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi bir $BCK-cebiri$ değildir. Çünkü; $b \in \mathcal{O}$ için $b * b = a \neq 0$ olduğundan $BCI-3$ koşulu sağlanmaz.

$X = \{0, c\} \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Böylece; X üzerinde " $*$ " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlı olur.

$*$	0	c
0	0	0
c	c	0

$Tablo$ 4.6

Bu durumda; X bir $BCK-cebiridir$. Şimdi, X in bir yakınlık $BCK-cebiri$ olduğunu gösterelim.

$$[0]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(0) = \alpha_1\} = \{0\},$$

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} = \{a, c\} = [c]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_3\} = \{b\}$$

elde edilir. O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_1\}} = \{[0]_{\{\varphi_1\}}, [a]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir.

$$[0]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(0) = \alpha_2\} = \{0, c\} = [c]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} = \{a\},$$

$$[b]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_3\} = \{b\}$$

olur ve dolayısıyla $\varepsilon_{\{\varphi_2\}} = \{[0]_{\{\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_2\}}\}$ dir. Ayrıca;

$$[0]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(0) = \alpha_3\} = \{0, a, c\} = [a]_{\{\varphi_3\}} = [c]_{\{\varphi_3\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_2\} = \{b\}$$

dir. O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}\}$ olur. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ olarak elde edilir. Bu durumda;

$$N_1(B) \overset{*}{} X = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap X \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0\} \cup \{a, c\} \cup \{0, a, c\} \cup \{0, c\}$$

$$= \{0, a, c\}$$

olur ve ayrıca $N_r(B)$ * X bir $BCK - cebiridir$. Böylece;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in X$ için $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)$ * X de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y \in X$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)$ * X de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x \in X$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)$ * X de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x \in X$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)$ * X de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK - 5}$: Her $x, y \in X$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği X de sağlanır. O halde; $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin X alt kümesi bir yakınlık $BCK - cebiridir$.

Örnek 4.1.4. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c, d\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları;

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

olmak üzere;

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_1	α_3	α_2
a	α_2	α_4	α_3
b	α_1	α_3	α_2
c	α_1	α_1	α_2
d	α_3	α_3	α_1

$Tablo$ 4.7

olarak tanımlansın. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde " $*$ " işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	b
b	b	a	0	0	0
c	c	a	a	0	0
d	d	c	b	a	0

$Tablo$ 4.8

Bu durumda; $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi bir $BCK-cebiri$ değildir. Çünkü; Her $a,c,d\in\mathcal{O}$ $((a*d)*(a*c))*(c*d)=(b*0)*0=b*0=b\neq 0$ dır. Yani; $BCI-1$ koşulu sağlanmaz.

$X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; X üzerinde " $*$ " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlanabilir.

$*$	a	b	c
a	0	0	0
b	a	0	0
c	a	a	0

$Tablo$ 4.9

Böylece $0\notin X$ olduğundan X, $BCK-cebiri$ değildir. Bu durumda;
$[0]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(0)=\alpha_1\}=\{0,b,c\}=[b]_{\{\varphi_1\}}=[c]_{\{\varphi_1\}}$,

$[a]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(a)=\alpha_2\}=\{a\}$,

$[d]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(d)=\alpha_3\}=\{d\}$.

O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_1\}}=\{[0]_{\{\varphi_1\}},[a]_{\{\varphi_1\}},[d]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir.

$[0]_{\{\varphi_2\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(0)=\alpha_3\}=\{0,b,d\}=[b]_{\{\varphi_2\}}=[d]_{\{\varphi_2\}}$,

$[a]_{\{\varphi_2\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(a)=\alpha_4\}=\{a\}$,

$[c]_{\{\varphi_2\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(c)=\alpha_1\}=\{c\}$

ve buradan $\varepsilon_{\{\varphi_2\}}=\{[0]_{\{\varphi_2\}},[a]_{\{\varphi_2\}},[c]_{\{\varphi_2\}}\}$ dir.

$[0]_{\{\varphi_3\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_3(x')=\varphi_3(0)=\alpha_2\}=\{0,b,c\}=[b]_{\{\varphi_3\}}=[c]_{\{\varphi_3\}}$,

$[a]_{\{\varphi_3\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_3(x')=\varphi_3(a)=\alpha_2\}=\{a\}$,

$$[d]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \,|\varphi_3(x') = \varphi_3(d) = \alpha_1\} = \{d\}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [a]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}$ olur. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ dir. Bu durumda;

$$N_1(B)^* X = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap G \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0, b, c\} \cup \{a\} \cup \{0, b, d\} \cup \{c\}$$

$$= \{0, a, b, c, d\}$$

$$= \mathcal{O}$$

dur. $\mathcal{O}$, $BCK - cebiri$ olmadığından $N_r(B)^* X$ de $BCK - cebiri$ değildir. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in X$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y, z \in X$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x \in X$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x \in X$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK - 5}$: Her $x, y \in X$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği X de sağlanır. O halde $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin X alt kümesi bir yakınlık $BCK - cebiridir$.

Uyarı 4.1.5. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı, $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{O}$ ve "*"; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem ve 0, $\mathcal{O}$ da bir sabit olsun. Bu durumda; X in bir yakınlık $BCK - cebiri$ olması için $0 \in N_r(B)^* X$ ve "*"; $N_r(B)^* X$ de bir ikili işlem olmalıdır.

Şimdi yakınlık $BCK - cebirinin$ temel özelliklerini verelim.

Teorem 4.1.6. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı, " $*$ "; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem, X; bir yakınlık $BCK - cebiri$ ve $0 \in N_r(B)^* X$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$\boldsymbol{i})$ $x \leq y$ ise $z * y \leq z * x$,

ii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

dir.

İspat: ***i***) $x \leq y$ olsun. Bu durumda; $YBCI - 1'$ den $((z * y) * (z * x)) \leq x * y$ dir. $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0$ olduğundan $(z * y) * (z * x) \leq 0$ ve $YBCI - 4'$ den $0 \leq (z * y) * (z * x)$ olur. Buradan $(z * y) * (z * x) = 0$ elde edilir. Böylece; $YBCI - 6'$ den $(z * y) \leq (z * x)$ tir.

ii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsun. (i) den $y \leq z \Rightarrow x * z \leq x * y$ dir. Eğer $x \leq y$ ise o zaman $x * y = 0$ olur ve böylece $x * z \leq 0$ elde edilir. Öte yandan $YBCI - 4'$ den $0 \leq x * z$ dir. Buradan $x * z = 0$ elde edilir. Böylece; $x \leq z$ olur ve ispat biter.

Teorem 4.1.7. X bir yakınlık $BCK - cebiri$ ve $0 \in N_r(B)^* X$ olsun. Buna göre her $x, y, z \in X$ için $(x * y) * z = (x * z) * y$ dir.

İspat: $YBCI - 2'$ den $0 \leq x * (x * z) \leq z$ dir. Teorem 4.1.6 (i) kullanılırsa, $(x * y) z \leq (x * y) * (x * (x * z))$ dir. $YBCI - 1'$ den $(x * y) * z \leq (x * z) * y$ dir. $x, y, z \in X$ keyfi elemanlar olduğundan bu son ifadede y ve z nin yerleri değiştirilirse o zaman $(x * z) * y \leq (x * y) * z$ elde edilir. Böylece $YBCK - 5'$ den $(x * y) * z = (x * z) * y$ olur ve ispat biter.

Teorem 4.1.8. X bir yakınlık $BCK - cebiri$ ve $0 \in N_r(B)^* X$ olsun. Buna göre her $x, y, z \in X$ için

i) $x * y \leq z$ ise $x * z \leq y$,
ii) $(x * z) * (y * z) \leq x * y$,
iii) $x \leq y$ ise $x * z \leq y * z$,
iv) $x * y \leq x$

koşulları sağlanır.

İspat: ***i***) $x * y \leq z$ olsun. Teorem 4.1.7 den $(x * y) * z = (x * z) * y = 0$ dır. Bu durumda $YBCK - 6'$ den $x * z \leq y$ olur.

ii) $YBCI - 1'$ den $((x * y) * (x * z)) \leq (z * y)$ ve (i) den $((x * y) * (z * y)) \leq (x * z)$ elde edilir. Bu ifade de de y nin yerine z ve z nin yerine y yazılırsa $((x * z) * (y * z)) \leq z * y$ elde edilir.

iii) $x \leq y$ olsun. $x * y = 0$ dır. (ii) den $(x * z) * (y * z) \leq x * y = 0$ dır. Ayrıca $YBCI - 4'$ den $0 \leq (x * z) * (y * z)$ ve dolayısıyla $(x * z) * (y * z) = 0$ olup $(x * z) \leq (y * z)$ dır.

iv) Teorem 4.1.7 den $(x * y) * z = (x * z) * y$ idi. Bu ifadede de z nin yerine x yazılırsa $(x * y) * x = (x * x) * y = 0 * y = 0 \implies (x * y) * x = 0 \implies x * y \leq x$ olur.

Teorem 4.1.9. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde X bir yakın $BCK - cebiri$ olsun. Bu durumda her $x, y, z \in X$ için

i) $x * y = 0$ olduğunda $x \neq y$ ise $y * x \neq 0$,

ii) $x * y = z$ ise $z * x = 0$

dır.

İspat: ***i***) $x * y = 0$ ve $x \neq y$ olsun. $y * x = 0$ olsaydı $YBCK - 5'$ den $x = y$ olması gerekirdi. Bu da $x \neq y$ olması ile çelişir. O halde; $y * x \neq 0$ dır.

ii) $x * y = z$ olsun. $(x * y) * x = z * x$ olarak alınırsa Teorem 4.1.8 (iv) den $(x * y) * x = z * x = 0$ elde edilir.

Tanım 4.1.10. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı, "*"; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem ve $0, \mathcal{O}$ da bir sabit eleman olmak üzere; X bir yakınlık $BCK - cebiri$ ve H; X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in H$ için $x * y \in N_r(B)^* H$ ve $0 \in N_r(B)^* H$ oluyorsa H ye yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde X in alt yakın $BCK - cebiri$ veya kısaca yakınlık alt $BCK - cebiri$ denir.

X bir yakınlık $BCK - cebiri$ olsun. $\{0\}$, X in yakınlık alt $BCK - cebiri$ olmayabilir. $0 \in X$ olursa o zaman $\{0\}$ ve X in kendisi X in yakınlık alt $BCK - cebirleridir$.

Örnek 4.1.11. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq F$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları;

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$Tablo$ 4.10 daki gibi tanımlansın.

	0	a	b	c
φ_1	α_1	α_2	α_2	α_1
φ_2	α_2	α_3	α_3	α_2
φ_3	α_1	α_3	α_2	α_2

$Tablo$ 4.10

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir " $*$ " ikili işlemi $Tablo$ 4.11 deki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	a
c	c	c	c	0

$Tablo$ 4.11([5])

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir " $*$ " ikili işlemi ile bir $BCK-cebiridir.$ $A = \{0, a, c\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; A üzerinde " $*$ " işlemi $Tablo$ 4.12 deki gibi olur.

$*$	0	a	c
0	0	0	0
a	a	0	a
c	c	c	0

$Tablo$ 4.12

Bu durumda;

$$[0]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(0) = \alpha_1\} = \{0, c\} = [c]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} = \{a, b\} = [b]_{\{\varphi_1\}}$$

olur. O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_1\}} = \{[0]_{\{\varphi_1\}}, [a]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir.

$$[0]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(0) = \alpha_2\} = \{0, c\} = [c]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_3\} = \{a, b\} = [b]_{\{\varphi_2\}}$$

bulunur ve buradan $\varepsilon_{\{\varphi_2\}} = \{[0]_{\{\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_2\}}\}$ olur. Ayrıca;

$$[0]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(0) = \alpha_1\} = \{0\},$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} = \{a\},$$

$$[b]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_2\} = \{b, c\} = [c]_{\{\varphi_3\}}$$

dür. O halde; $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [a]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}\}$ olarak bulunur. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ olur. Bu durumda;

$$N_1(B)^* A = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap A \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0, c\} \cup \{a, b\} \cup \{0\} \cup \{a\} \cup \{b, c\}$$

$$= \{0, a, b, c\}$$

$$= \mathcal{O}$$

elde edilir. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in A$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^* A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y \in A$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^* A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x \in A$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x, y, z \in A$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^* A$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK - 5}$: Her $x, y \in A$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği A da sağlanır.

O halde; $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin A alt kümesi bir yakınlık $BCK - cebiridir$.

$A = \{0, a, c\}$ yakınlık $BCK - cebirinin$ alt kümeleri $H = \{0, a\}$ ve $K = \{a, c\}$ olsun. H ve K üzerinde " $*$ " işlemi sırasıyla $Tablo$ 4.13 ve $Tablo$ 4.14 deki gibi tanımlansın.

$*$	0	a
0	0	0
a	a	0

$Tablo$ 4.13

ve

$*$	a	c
a	0	a
c	c	0

$Tablo$ 4.14

Buna göre; $N_1(B) * H = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap H \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$

$= \{0, c\} \cup \{a, b\} \cup \{0\} \cup \{a\}$

$= \{0, a, b, c\}$

$= \mathcal{O}$

elde edilir. Bu durumda; her $x, y \in H$ için $x * y \in N_r(B) * H$ olduğundan H, A nın bir yakınlık alt $BCK - cebiridir$.

Benzer biçimde; $N_1(B) * K = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap K \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$

$= \{0, c\} \cup \{a, b\} \cup \{a\} \cup \{b, c\}$

$= \{0, a, b, c\}$

$= \mathcal{O}$

elde edilir. Bu durumda; her $x, y \in K$ için $x * y \in N_r(B) * K$ olduğundan K, A nın bir yakınlık alt $BCK - cebiridir$.

Önerme 4.1.12. H ve K, X yakınlık $BCK - cebirinin$ boştan farklı iki alt kümesi olsun. Buna göre;

i) $(N_r(B) * \mathrm{H}) * \left(N_r(B) * \mathrm{K}\right) \subseteq N_r(B) * (\mathrm{H} * \mathrm{K})$,

ii) " $\sim_{B_r}$ ", tam ayırt edilemezlik bağıntısı ise $\left(N_r(B)_{*} H\right) * \left(N_r(B)_{*} K\right) \subseteq N_r(B)_{*} (H * K)$ dır.

İspat: $\boldsymbol{i}$) $z \in (N_r(B)^* H) * (N_r(B)^* K)$ alalım. Bu durumda $x \in (N_r(B)^* H)$ ve y $\in (N_r(B)^*$ K) olmak üzere; z $=$ x $*$ y dir. Buradan $h \in [x]_{B_r} \cap H$ ve $k \in [y]_{B_r} \cap K$ olacak şekilde $h \in H$ ve $k \in K$ vardır. Ayrıca; $h \in [x]_{B_r}$ ve $k \in [y]_{B_r}$ olduğundan $h * k \in [x]_{B_r} * [y]_{B_r}$ dır. " $\sim_{B_r}$ ", ayırt edilemezlik bağıntısından her $x, y \in X$ için $[x]_{B_r} * [y]_{B_r} \subseteq [x * y]_{B_r}$ dır. Böylece; $h * k \in [x * y]_{B_r}$ olur ve dolayısıyla $h * k \in [x * y]_{B_r} \cap (H * K)$ dır. O halde; z $=$ x $*$ y $\in N_r(B)^*$ (H $*$ K) elde edilir.

$\boldsymbol{ii}$) $z \in (N_r(B)_{*} H) * (N_r(B)_{*} K)$ olsun. Bu durumda $x \in (N_r(B)^* H)$ ve y $\in (N_r(B)^*$ K) olmak üzere; z $=$ x $*$ y dir. Buradan $[x]_{B_r} \subseteq K$ ve $[y]_{B_r} \subseteq K$ olur ve dolayısıyla hipotezden $[x * y]_{B_r} = [x]_{B_r} * [y]_{B_r} \subseteq (H * K)$ elde edilir. O halde; $z \in N_r(B)_{*} (H * K)$ olur.

4.2. Bazı Yakınlık BCK-Cebirleri

Tanım 4.2.1. ($\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r}$) yakınlık yaklaşım uzayı, $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{O}$ ve "*"; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem ve $0, \mathcal{O}$ da bir sabit olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$$

eşitliği sağlanırsa X yakın $BCK - cebirine$ yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde pozitif anlamlı yakın $BCK - cebiri$ veya kısaca yakınlık pozitif anlamlı $BCK - cebiri$ denir.

Lemma 4.2.2. ($\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r}$) yakınlık yaklaşım uzayı, "*"; $\mathcal{O}$ da bir ikili işlem, X; $bir\ yakınlık\ BCK - cebiri$ ve $0 \in N_r(B)^* X$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$\big(x * (x * y)\big) * (y * x) \leq x * (x * \big(y * (y * x)\big))$$

dir.

İspat: $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0$ olduğundan

$$\big[\big(x * (x * y)\big) * (y * x)\big] * \Big[x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)\Big]$$

$$= \Big[\big(x * (x * y)\big) * \Big(x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)\Big)\Big] * (y * x)$$

$$= [\Big(x * \Big(x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)\Big) * (x * y)\Big] * (y * x)$$

$$= \Big(x * \big(y * (y * x)\big) * (x * y)\Big) * (y * x)$$

$$\leq \Big(y * \big(y * (y * x)\big)\Big) * (y * x)$$

$$= \big(y * (y * x)\big) * \big(y * (y * x)\big)$$

$$= 0$$

dır. Diğer yandan $YBCI - 4'$ kullanılarak; buradan

$$\big(x * (x * y)\big) * (y * x) * \Big[x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)\Big] = 0$$

elde edilir. Böylece; $YBCI - 6'$ den

$$\big(x * (x * y)\big) * (y * x) \leq x * \Big(x * \big(y * (y * x)\big)\Big)$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ve $\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$

olmak üzere;

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_1	α_2	α_3
a	α_1	α_1	α_3
b	α_2	α_1	α_1
c	α_3	α_2	α_3

$Tablo$ 4.15

biçiminde tanımlansın. $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$*$" işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
c	c	c	c	0

$Tablo$ 4.16([5])

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi " $*$ " işlemi ile bir pozitif anlamlı $BCK-cebiridir$.

$A=\{a,b,c\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $A\subseteq\mathcal{O}$ üzerindeki " $*$ " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlanabilir;

$*$	a	b	c
a	0	a	0
b	b	0	0
c	c	c	0

$Tablo$ 4.17

Bu durumda;

$$[0]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(0)=\alpha_1\}=\{0,a\}=[a]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1(b)=\alpha_2\}=\{b\},$$

$$[c]_{\{\varphi_1\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_1(x')=\varphi_1c(c)=\alpha_3\}=\{c\}$$

dir ve buradan $\varepsilon_{\{\varphi_1\}}=\{[0]_{\{\varphi_1\}},[b]_{\{\varphi_1\}},[c]_{\{\varphi_1\}}\}$ olur. Böylece;

$$[0]_{\{\varphi_2\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(0)=\alpha_2\}=\{0,c\}=[c]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_2\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_2(x')=\varphi_2(a)=\alpha_1\}=\{a,b\}=[b]_{\{\varphi_2\}}$$

elde edilir. O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_2\}}=\{[0]_{\{\varphi_2\}},[a]_{\{\varphi_2\}}\}$ dir. Ayrıca;

$$[0]_{\{\varphi_3\}}=\{x'\in\mathcal{O}|\varphi_3(x')=\varphi_3(0)=\alpha_3\}=\{0,a,c\}=[a]_{\{\varphi_3\}}=[c]_{\{\varphi_3\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_3\}}=\{x'\in\mathcal{O}\,|\varphi_3(x')=\varphi_3(b)=\alpha_1\}=\{b\}$$

bulunur ve dolayısıyla $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}\}$ dür. Böylece; $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ tür.

Bu durumda;

$$N_1(B)^*A = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap A \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0, a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{0, c\} \cup \{a, b\} \cup \{0, a, c\}$$

$$= \{0, a, b, c\} = \mathcal{O}$$

olarak bulunur. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in A$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^*A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y \in A$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^*A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x \in A$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x \in A$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*A$ da sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK - 5}$: Her $x, y \in A$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği A da sağlanır. Aynı zamanda her $x, y, z \in A$ için $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$ olduğundan $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin A alt kümesi yakınlık pozitif anlamlı $BCK - cebiridir$.

Tanım 4.2.4. $(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r})$ yakınlık yaklaşım uzayı; $\emptyset \neq K \subseteq \mathcal{O}$ ve K de yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde yakın $BCK - cebiri$ olsun. Her $x, y \in K$ için $x \wedge y = y \wedge x$ ise yani;

$$y * (y * x) = x * (x * y)$$

ise K ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde komütatif yakın $BCK - cebiri$ veya kısaca yakınlık komütatif $BCK - cebiri$ denir.

Örnek 4.2.5. $\mathcal{O} = \{0, a, b, c, d\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları;

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$\varphi_2: \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$\varphi_3: \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$$

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_1	α_2	α_3
a	α_1	α_2	α_3
b	α_2	α_3	α_4
c	α_4	α_4	α_4
d	α_3	α_2	α_3

$Tablo$ 4.18

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$*$" işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	a	0	0	0
c	c	a	a	0	0
d	d	c	b	a	0

$Tablo$ 4.19([5])

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi "$*$" bir komütatif $BCK-cebiri$ değildir. Çünkü; $b \wedge c = c * (c * b) = c * a = a,\ c \wedge b = b * (b * c) = b * 0 = b$ olup $b \wedge c \neq c \wedge b$ dir.

$K = \{0, a\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; $K \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde "$*$" ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlanabilir;

$*$	0	a
0	0	0
a	a	0

$Tablo$ 4.20

Bu durumda;

$$[0]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(0) = \alpha_1\} = \{0, a\} = [a]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_2\} = \{b\},$$

$$[c]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(c) = \alpha_4\} = \{c\},$$

$$[d]_{\{\varphi_1\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_4\} = \{d\}$$

olur ve buradan $\varepsilon_{\{\varphi_1\}} = \{[0]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}, [c]_{\{\varphi_1\}}, [d]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir.

$$[0]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(0) = \alpha_2\} = \{0, a, d\} = [a]_{\{\varphi_2\}} = [d]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_3\} = \{b\},$$

$$[c]_{\{\varphi_2\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(c) = \alpha_4\} = \{c\}$$

bulunur. O halde; $\varepsilon_{\{\varphi_2\}} = \{[0]_{\{\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_2\}}\}$ dir. Son olarak;

$$[0]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(0) = \alpha_3\} = \{0, a, d\} = [a]_{\{\varphi_3\}} = [d]_{\{\varphi_3\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_3\}} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_4\} = \{b, c\} = [c]_{\{\varphi_3\}},$$

elde edilir. Buradan; $\varepsilon_{\{\varphi_3\}} = \{[0]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}\}$ olur. Böylece $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımların kümesi $N_1(B) = \{\varepsilon_{\{\varphi_1\}}, \varepsilon_{\{\varphi_2\}}, \varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ dür. Bu durumda;

$$N_1(B)^*K = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap K \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{0, a\} \cup \{0, a, d\}$$

$$= \{0, a, d\}$$

elde edilir. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in K$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^*K$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y, z \in K$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^*K$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x, y, z \in K$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*K$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x, y, z \in K$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*K$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK-5}$: Her $x,y,z \in K$ için $x*y=0$ ve $y*x=0$ ise $x=y$ özelliği K de sağlanır.

O halde; $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin K alt kümesi bir yakınlık $BCK-cebiridir$. Aynı zamanda her $x,y \in K$ için $x \wedge y = y \wedge x$ olduğundan K, yakın yaklaşım uzayı üzerinde komütatif yakın $BCK-cebiridir$.

Tanım 4.2.6. $\left(\mathcal{O}, F, \sim_{B_r}, N_r, V_{N_r}\right)$ yakınlık yaklaşım uzayı; $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{O}$ ve X de yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde yakın $BCK-cebiri$ olsun. Her $x,y \in X$ için $x = x*(y*x)$ ise X e yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde anlamlı yakın $BCK-cebiri$ denir.

Örnek 4.2.7. $\mathcal{O}$= $\{0,a,b,c\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ çıkarım fonksiyonları;

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \to V_1 = \{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \to V_2 = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \to V_3 = \{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$$

	φ_1	φ_2	φ_3
0	α_1	α_2	α_3
a	α_3	α_2	α_4
b	α_4	α_4	α_2
c	α_1	α_3	α_2
d	α_4	α_1	α_2

Tablo 4.21

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$*$" işlemi aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

$*$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	0	0
b	b	a	0	a	0
c	c	c	c	0	0
d	d	d	d	d	0

Tablo 4.22([5])

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "$*$" işlemi ile bir $BCK-cebiridir.$

$X=\{a\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $X \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde "$*$" ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlanabilir;

$*$	a
a	0

$Tablo$ 4.23

$0 \notin X$ olduğu için X bir $BCK-cebiri$ değildir.

Bu durumda;

$$[0]_{\{\varphi_1\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x')=\varphi_1(0)=\alpha_1\}=\{0,c\}=[c]_{\{\varphi_1\}},$$

$$[a]_{\{\varphi_1\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x')=\varphi_1(a)=\alpha_3\}=\{a\},$$

$$[b]_{\{\varphi_1\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x')=\varphi_1(b)=\alpha_4\}=\{b,d\}=[d]_{\{\varphi_1\}}$$

elde edilir. O zaman $\varepsilon_{\{\varphi_1\}}=\{[0]_{\{\varphi_1\}},[a]_{\{\varphi_1\}},[b]_{\{\varphi_1\}}\}$ dir. Ayrıca;

$$[0]_{\{\varphi_2\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x')=\varphi_2(0)=\alpha_2\}=\{0,a\}=[a]_{\{\varphi_2\}},$$

$$[b]_{\{\varphi_2\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x')=\varphi_2(b)=\alpha_4\}=\{b\},$$

$$[c]_{\{\varphi_2\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x')=\varphi_2(c)=\alpha_3\}=\{c\},$$

$$[d]_{\{\varphi_2\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x')=\varphi_2(d)=\alpha_1\}=\{d\}$$

bulunur. O halde; $\varepsilon_{\{\varphi_2\}}=\left\{[0]_{\{\varphi_2\}},[b]_{\{\varphi_2\}},[c]_{\{\varphi_2\}},[d]_{\{\varphi_2\}}\right\}$ dir. Son olarak;

$$[0]_{\{\varphi_3\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x')=\varphi_3(0)=\alpha_3\}=\{0\},$$

$$[a]_{\{\varphi_3\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x')=\varphi_3(a)=\alpha_4\}=\{a\},$$

$$[b]_{\{\varphi_3\}}=\{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x')=\varphi_3(b)=\alpha_2\}=\{b,c,d\}=[c]_{\{\varphi_3\}}=[d]_{\{\varphi_3\}}$$

olur ve $\varepsilon_{\{\varphi_3\}}=\left\{[0]_{\{\varphi_3\}},[a]_{\{\varphi_3\}},[b]_{\{\varphi_3\}}\right\}$ elde edilir. Böylece $r=1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B)=\{\varepsilon_{\{\varphi_1\}},\varepsilon_{\{\varphi_2\}},\varepsilon_{\{\varphi_3\}}\}$ dür. Bu durumda;

$$N_1(B)^*X = U_{[x]_{\{\varphi_i\}} \cap X \neq \emptyset} [x]_{\{\varphi_i\}}$$

$$= \{a\} \cup \{0, a\}$$

$$= \{0, a\}$$

dır. Ayrıca;

$\boldsymbol{YBCI - 1}$: Her $x, y, z \in X$ için $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$ özelliği $N_r(B)^*X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 2}$: Her $x, y, z \in X$ için $(x * (x * y)) * y = 0$ özelliği $N_r(B)^*X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 3}$: Her $x, y, z \in X$ için $x * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCI - 4}$: Her $x, y, z \in X$ için $0 * x = 0$ özelliği $N_r(B)^*X$ de sağlanır,

$\boldsymbol{YBCK - 5}$: Her $x, y, z \in X$ için $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ özelliği X de sağlanır.

O halde; $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin X alt kümesi bir yakınlık $BCK - cebiridir$. Aynı zamanda her $x, y \in X$ için $x = x * (x * y)$ olduğundan X, yakınlık yaklaşım uzayı üzerinde anlamlı yakın $BCK - cebiridir$.

KAYNAKLAR

1. İnan, E. and Öztürk, M. A.; Near groups on nearness approximation spaces, Hacet. J. Math. Stat. 41(4)(2012), 545-558.

2. İnan, E. and Öztürk, M. A.; Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces, Hacet. J. Math. Stat. 43(2)(2014), 279-281.

3. İnan, E.; Yakın yaklaşım uzaylarında cebirsel yapılar, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.

4. İnan, E. and Öztürk, M. A.; Nearness semigroups on nearness approximation spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 10(2), (2015), 287-297.

5. Meng, J. and Jun, Y. B.; BCK-Algebras, Kyung Moon Sa Co., Seoul-Korea, 1994.

6. Öztürk, M. A., Uçkun, M. and İnan, E.; Near group of weak cosets on nearness approximation spaces, Fund. Inform. 133 (2014), 433-448.

7. İnan, E. and Öztürk, M. A.; Nearness rings on nearness approximation spaces, (dergiye gönderildi.)

8. Pawlak, Z.; Classification of objects by means of attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report 429, 1981.

9. Peters, J. F.; Near sets: General theory about nearness of objects, Appl. Math. Sci. 1(53-56)(2007), 2609-2629.

10. Peters, J. F.; Near sets: Special theory about nearness of objects, Fund Inform, 75(1–4)(2007), 407–433.

11. Peters, J. F. and Wasilewski, P.; Foundations of near sets, Inform. Sci., 179(2009), 3091-3109.

12. Peters, J. F. and Naimpally, S. A.; Applications of near sets, Notices Amer. Math. Soc., 59(4)(2012), 536–542.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : İclal ÇELİK SİNER

Doğum Yeri ve Tarihi: Adana, 30/09/1988

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dil : İngilizce

İletişim Adresi : Doğankent Anadolu Lisesi- Adana

E-Posta Adresi : iclalcelik19@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durum

Lise : Adana Erkek Lisesi YDA, 2006

Lisans : Çukurova Üniversitesi, 2010

Formasyon: Mersin Üniversitesi, 2011

İş Tecrübesi

MEB: Matematik Öğretmeni, 2012-