



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN ÖZEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN BAZI ORTOGONAL POLİNOMLAR YARDIMIYLA BULUNMASI

YÜCEL ÇENESİZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Yücel ÇENESİZ

14/05/2012

ÖZET

DOKTORA TEZİ

LİNEER OLMAYAN ÖZEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN BAZI ORTOGONAL POLİNOMLAR YARDIMIYLA BULUNMASI

Yücel ÇENESİZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

2012, 78 Sayfa

Jüri

Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Son yıllarda Adomian ayrışım metodu, Varyasonel iterasyon metodu, Homotopi perturbasyon metodu gibi yaklaşık çözüm yöntemleri, lineer, lineer olmayan, adi, kısmi veya kesirli türevli birçok diferensiyel denklemin çözümünde kullanılmaktadır. Bazı problemlerde bu yaklaşık çözüm yöntemleri istenen sonuca ulaşmada yetersiz kalmaktadır. Bu tür problemler için çeşitli modifikasyonlar önerilmiştir. Bu doktora tez çalışmasında yaklaşık çözüm yöntemlerinin modifikasyonu için $[-1,1]$ aralığında ortogonal, Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomlarının kullanımı verilmiştir. Yapılan bu modifikasyonların etkinliğini göstermek için, şekiller ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırmalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayrışım metodu, Chebyshev polinomları, Gegenbauer polinomları, Homotopi perturbasyon metodu, Jacobi polinomları, Legendre polinomları, Varyasyonel iterasyon yöntemi.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ORTHOGONAL POLYNOMIAL APPROACHES TO THE SOLUTIONS OF SOME SPECIAL NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yücel ÇENESİZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

2012, 78 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Assoc. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN

Recently approximate methods such as Adomian decomposition method, Variational iteration method and Homotopi perturbation method have been widely used to solve various, linear, nonlinear, ordinary, partial or fractional order differential equations. In such problems, these approximate solution methods are insufficient to ensure the desired accuracy in the solutions. Various modifications are proposed for such problems. In this PhD thesis, modification by orthogonal Chebyshev, Legendre, Gegenabuer and Jacobi polinomials, which are ortogonal at $[-1,1]$ interval, is presented. To show the efficiency of the proposed modification, comparisons are made between the results of modified and unmodified equations.

Keywords: Adomian decomposition method, Chebyshev polynomials, Gegenbauer polynomials, Homotopi perturbation method, Jacobi polynomials, Legendre polynomials, Variational iteration method.

ÖNSÖZ

Bu doktora tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne sunulmuştur.

Bu çalışmanın amacı, son yıllarda sıklıkla kullanılan yaklaşık çözüm metodlarından, Adomian ayrışım metodu, Varyasyonel iterasyon metodu ve Homotopi perturbasyon metodunun, ortogonal Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomları kullanılarak modifikasyonu ve çözümlerin iyileştirilmesidir. Tez, iki bölümde ele alınmıştır. İlk bölümde literatürde var olan ve tezimizde kullanacağımız yaklaşık çözüm yöntemleri ile bu yöntemlerin modifikasyonunda kullanacağımız ortogonal polinomlar hakkında temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm ise, ilk bölümde tanıtılan yaklaşık çözüm metodlarının ortogonal polinomlar ile modifikasyonuna ayrılmıştır. Yapılan modifikasyonların etkinliği, şekiller ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırmalar yapılarak gösterilmiştir.

Bu çalışmayı hazırlarken benden bilgi birikimini esirgemeyen, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanlarını bana ayıran tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Aydın Kurnaz'a, çok değerli vakitlerini ve bilgilerini benden esirgemeyen değerli tez izleme komitesi hocalarım Prof. Dr. Durmuş Bozkurt ve Doç. Dr. Mehmet Şahin'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışma süresince manevi desteğiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Yücel ÇENESİZ
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

GİRİŞ **1**

1. TEMEL BİLGİLER VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI **3**

1.1. Adomian Ayrışım Metodu 3
1.1.1. Adomian Ayrışım Metodunun Temel Esasları 3
1.1.2. Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi 5
1.1.3. Adomian Ayrışım Metodunun Yakınsaklığı 8
1.1.4. Adomian Ayrışım Metodunun Uygulanması 11
1.2. Varyasyonel İterasyon Metodu 13
1.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Temel Esasları 14
1.2.2. Varyasyonel İterasyon Metodunun Yakınsaklığı 18
1.3. Homotopi Perturbasyon Metodu 23
1.3.1. Homotopi Perturbasyon Metodunun Temel Esasları 23
1.3.2. Homotopi Perturbasyon Metodunun Kullanımı 24
1.3.3. Homotopi Perturbasyon Metodunun Yakınsaklığı 27
1.4. Ortogonal Polinomlar 31
1.4.1. Chebyshev Polinomları 31
1.4.1.1. Herhangi bir fonksiyonun Chebyshev serisine açılması 34
1.4.2. Legendre Polinomları 34
1.4.3. Hipergeometrik Fonksiyonlar 36
1.4.3.1. Pochhammer Sembolü 36
1.4.3.2. $F(a,b;c;x)$ Fonksiyonu 37
1.4.4. Jacobi Polinomları 39
1.4.5. Gegenbauer Polinomları 42

2. YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARININ ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE MODİFİKASYONU **44**

2.1. Gegenbauer ve Jacobi Polinomlarıyla Adomian Ayrışım Metodu 44
2.1.1. Metodun Uygulanması 46
2.2. Legendre Polinomlarıyla Homotopi Perturbasyon Metodu 55
2.2.1. Metodun Uygulanması 56
2.3. Legendre, Chebyshev ve Adomian Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu 65
2.3.1. Adomian Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu 65
2.3.2. Legendre ve Chebyshev Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu 66
2.3.3. Metodun Uygulanması 67

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 75

3.1 Sonuçlar 75
3.2 Öneriler 75

4. KAYNAKLAR 76

ÖZGEÇMİŞ 79

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A_n	: n. dereceden Adomian polinomu
H	: Hilbert uzayı
$\tilde{u}_n$	: Kısıtlanmış varyasyon
λ	: Lagrange çarpanı
L	: Lineer operatör
N	: Lineer olmayan (Nonlineer) operatör
$T_n(x)$	: Birinci tür Chebyshev polinomları
δ_{mn}	: Dirac-Delta Fonksiyonu
$\langle f, g \rangle$	: İç çarpım
$w(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$P_n(x)$	: Legendre polinomları
$(a)_n$	: Pochhammer sembolü
$F(a,b,c;x)$	: Hipergeometrik fonksiyon
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	: Jacobi polinomları
$C_n^{\alpha}(x)$	: Gegenbauer polinomları

Kısaltmalar

ADM	: (Adomian Decomposition Method) Adomian ayrışım metodu
VIM	: (Variational Iteration Method) Varyasyonel iterasyon metodu
HPM	: (Homotopy Perturbation Method) Homotopi perturbasyon metodu

GİRİŞ

Yaklaşık çözüm yöntemleri son yıllarda birçok lineer, lineer olmayan, adi, kısmi veya kesirli diferensiyel denklemin çözümü için kullanılmaktadır. Bu diferansiyel denklemler özellikle mühendislik bilimleri, doğa bilimleri ve ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde karşımıza çıkmaktadır.

Bu tezde kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinin temel esasları, bu metodların çözüm prosedürü ile ilgili örnekler ve elde edilen çözümlerin yakınsaklığı ile ilgili teoremler tezin ilk bölümünde verilmiştir. Yaklaşık çözüm yöntemlerinden en sık kullanılanlarından birisi Adomian ayrışım metodudur (ADM). George Adomian tarafından ilk olarak 1986 yılında tanıtılan bu metod özellikle uygulamalı bilimlerde kullanılan lineer, lineer olmayan (nonlineer) adi veya kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için oldukça uygundur. ADM özellikle lineer olmayan denklemlerin çözümü için kullanılan metodlardan birisidir. Bu metodla lineer olmayan denklemlerin çözümleri, terimleri kolayca hesaplanabilen sonsuz fonksiyon serileri olarak ele alınır. Bu serideki her terim Adomian polinomları olarak adlandırılan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanır. Elde edilen bu seri çözüm ise gerçek çözüme yakınsar. Bir diğer yaklaşık çözüm yöntemi olan Varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) ilk olarak Çinli matematikçi Ji-Huan He tarafından önerilmiştir (He, 1997, 1998). Lagrange çarpanı bulmayı temel alan metod, kolay hesaplanabilirliliği ve basitliği de beraberinde getirmektedir. Diğer geleneksel metodların aksine, VIM, lineerleştirme, dönüştürme, perturbasyon veya ayrıştırma gerektirmemektedir, ayrıca çözüme çok hızlı yakınsamakta veya birkaç adımda problemin çözümünü vermektedir. Ele aldığımız bir diğer yaklaşık çözüm yöntemi ise Homotopi perturbasyon metodudur (HPM). İlk olarak Çinli matematikçi Ji Huan He tarafından 1999 yılında önerilen bu metod, diferensiyel topolojide gördüğümüz homotopi tekniği ile perturbasyon tekniğinin birleştirilmesi ile oluşmuş bir tekniktir. Daha önce literatürde bulunan klasik perturbasyon teknikleri küçük parametreye ihtiyaç duymaktaydı. Bu metod ile beraber homotopi tekniğine göre, bir $p \in [0,1]$ gömülme parametresi ile birlikte bir homotopi kurulur. Buradaki gömülme parametresi küçük parametre olarak düşünülür ve böylece bu tekniğe Homotopi perturbasyon tekniği adı verilir. Yine ilk bölümde Ortogonal polinomlar ayrıntılı olarak ele alınmış, özellikle yaklaşık çözüm metodlarının modifikasyonu için kullandığımız, $[-1,1]$ aralığında ortogonal Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomları anlatılmıştır.

Yukarıda bahsedilen yaklaşık çözüm yöntemleri oldukça kullanışlı olmasına rağmen bazı problemlerin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Bu yetersizliği ortadan kaldırmak için yöntemlerde çeşitli modifikasyonlar önerilmiştir. Örneğin, Wazwaz (1999), Wazwaz ve El-Sayed (2001) çalışmalarında ADM'nin modifikasyonu için çeşitli yöntemler geliştirmişlerdir. Ayrıca Babolian ve Javadi (2003), Babolian ve ark. (2004) ise tekrar başlayan ADM'yi tanıtmışlardır. Mohyud-Din ve Noor (2008) HPM ile Pade yakınsamasını birlikte kullanmış, Odibat ve Momani (2008) kesirli mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümü için bazı modifikasyonlar yapmış, Javidi (2009) lineer Fredholm integral denklem sistemini çözmek için bazı modifikasyonlar yapmış, Darvishi ve ark. (2010) birçok lineer olmayan problemin çözümü için çözümü tahmin eden parametreler tanımlamış ve benzeri birçok çalışma HPM'nin modifikasyonu için yapılmıştır. Abbasbandy (2007) quadratik Riccati diferensiyel denklemini çözmek için VIM ile birlikte Adomian polinomlarını kullanmıştır, Abassy ve ark. (2007) VIM ile birlikte Pade yaklaşımını ve Laplace dönüşümünü kullanmıştır, Noor ve ark. (2009) doğrulama fonksiyonelinde bazı modifikasyonlar yapmıştır, Ghorbani ve Nadjafi (2009), VIM metodunda, başlangıçta bilinmeyen parametreler içeren bir deneme fonksiyonu kullanarak, Soltani ve Shirzadi (2010) çeşitli lineer olmayan denklemlerde lineer operatörün serbestçe seçimini sağlayarak modifikayon yapmışlardır.

Ortogonal polinomlar da son yıllarda yaklaşık çözüm metodlarının modifikasyonu için kullanılmaya başlanmıştır. Ortogonal polinomların ADM'nin modifikasyonu için kullanılması ise ilk olarak Hosseini tarafından yapılmıştır. Hosseini (2006) Chebyshev ortogonal polinomlarını ADM'nin çözüm prosedüründe kullanmıştır. Daha sonra Liu (2009), Tien ve Chen (2009) ADM'nin modifikasyonu içi Legendre ortogonal polinomlarını kullanmışlardır.

Biz bu çalışmada ise, ADM metodunu, Chebyshev ve Legendre polinomlarının en genel hali olarak adlandırabileceğimiz Gegenbauer ve Jacobi polinomlarını kullanarak modifiye ettik. Elde edilen sonuçların etkinliği grafikler ve çizelgeler yardımıyla karşılaştırmalar yapılarak gösterilmiştir. Ayrıca diğer yaklaşık çözüm yöntemlerinden HPM ve VIM, Chebyshev ve Legendre polinomları kullanılarak modifiye edilmiştir. VIM çözüm prosedüründe ortogonal polinomların yanı sıra ADM'de verilen Adomian polinomları da kullanılmıştır. Ortaya çıkan sonuçların etkinliği yine grafikler ve çizelgeler yardımıyla gösterilmiştir.

1. TEMEL BİLGİLER VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARI

Bu bölümde, ortogonal polinomlar ile ilgili temel kavramlardan bahsedilecek ve yine bu kısımda lineer olmayan denklem çözümleri için bazı sayısal yöntemler kısaca incelenecektir. Böylece, sonraki bölümde ele alacağımız, lineer olmayan denklemlerin çözümünde ortogonal polinom yaklaşımlarına hazırlık yapılmış olacaktır.

1.1. Adomian Ayrışım Metodu

Adomian ayrışım metodu (Adomian decomposition method-ADM) 1980'li yıllarda George Adomian tarafından bulunmuştur (Adomian, 1986, 1988, 1994). Bulunduğu tarihten itibaren birçok anabilim dalında kullanılan bu metod özellikle uygulamalı bilimlerde kullanılan lineer, lineer olmayan (nonlineer) adi veya kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için oldukça uygundur. ADM özellikle lineer olmayan denklemlerin çözümü için kullanılan metodlardan birisidir. Bu metodla lineer olmayan denklemlerin çözümleri, terimleri kolayca hesaplanabilen sonsuz fonksiyon serileri olarak ele alınır. Bu serideki her terim Adomian polinomları olarak adlandırılan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanır. Elde edilen bu seri çözüm ise gerçek çözüme yakınsar. Bu metodun yakınsaklığı ile ilgili ilk çalışma Cherrault (1989) tarafından yapılmış ve daha sonra benzer çalışmalar başka araştırmacılar tarafından da yapılmıştır Metodun yakınsaklığı ve Adomian polinomlarının elde edilişi de bu bölümde ele alınacaktır.

1.1.1. Adomian Ayrışım Metodunun Temel Esasları

Genel olarak Adomian ayrışım metodunun nasıl kullanıldığı bu bölümde ele alınacaktır. Bunun için

$$Lu + Ru + Nu = g, \tag{1.1}$$

genel denklemi ele alınsın. Burada L kolayca tersi bulunabilen lineer operatör, R geriye kalan lineer terim ve N 'de lineer olmayan operatörü belirtmektedir. Verilen bu denklemin genel çözümü

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1.2}$$

seri şeklinde yazılır. Buradaki u_0 çözümü $Lu = g$ denkleminin kesin çözümüdür. (1.1) denkleminden

$$Lu = g - Ru - Nu,$$

yazılabilir. L operatörü, tersi bulunabilen bir operatör olduğu için

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \tag{1.3}$$

eşitliği yazılabilir. Buradaki L operatörü $L = \frac{d^n}{dt^n}$ şeklinde *n.* dereceden bir türev operatörü olarak ele alınırsa L^{-1} operatörü de $[0,t]$ aralığında tanımlanmış *n* katlı bir integral operatörüdür. Örneğin L operatörü $L = \frac{d^2}{dt^2}$ ise, bu durumda $L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0)$ olacağından (1.3) denklemi

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \tag{1.4}$$

şeklinde yazılır. Sınır değer problemleri için (eğer istenirse başlangıç problemleri için de), belirsiz integral kullanılır ve katsayılar verilen koşullar yardımıyla hesaplanabilir. Yani sınır değer problemleri için verilen denklem

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \tag{1.5}$$

şeklinde yazılabilir. (1.4) veya (1.5) eşitliğinde verilen ilk üç terim $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin u_0 terimini elde etmek için kullanılmaktadır. Nu teriminin analitik olduğunu varsayarak $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, ..., u_n)$ olarak yazılabilir. Buradaki A_n polinomları $Nu = f(u)$ lineer olmayan fonksiyonuna bağlı olarak elde edilir. Bu polinomların elde edilişi Adomian tarafından verilmiştir. Adomian polinomların elde edilişi ile ilgili daha sonra birçok çalışma yapılmıştır. Bunların bazılarını ileride inceleyeceğiz. A_n polinomları, fonksiyonun nonlineer oluşuna bağlı olarak aşağıdaki formülle elde edebilebilir,

$$A_0 = f(u_0),$$
$$A_1 = u_1(d/du_0) f(u_0),$$
$$A_2 = u_2(d/du_0) f(u_0) + (u_1^2/2!)(d^2/du_0^2) f(u_0),$$
$$A_3 = u_3(d/du_0) f(u_0) + u_1u_2(d^2/du_0^2) f(u_0) + (u_1^3/3!)(d^3/du_0^3) f(u_0),$$
$$\vdots$$

Bu formül $n \geq 1$ için, aşağıdaki gibi genelleştirilebilir,

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} c(v,n) f^v(u_0).$$

Bu formülde $c(v,n)$ katsayıları formüldeki Adomian katsayılardır. Son olarak yukarıdaki denklemler kullanılarak ADM yardımıyla genel çözüm

$$u = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}Nu, \tag{1.6}$$

$$u = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{1.7}$$

şeklinde bulunur. Burada $u_0 = \phi + L^{-1}g$ ve $L\phi = 0$ olur. Böylece

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n,\ n \geq 0, \tag{1.8}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu denklemi ve bilinen u_0 değerini kullanarak, diğer $u_1, u_2, ..., u_n$ değerleri elde edilir. Böylece bu değerler (1.2) denkleminde yerine yazılarak u çözümü elde edilir (Ray ve Bera, 2006).

1.1.2. Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi

Adomian ayrışım metodunun en zor kısımlarından birisi Adomian polinomlarının elde edilmesidir. Her ne kadar, çoğunlukla, birkaç adımdan sonra çözüme bu metodla yaklaşılsa da bazen bu polinomların elde edilmesi oldukça güçtür. Adomian (1994), bu polinomların elde edilmesi için, problemin lineer olmayan kısmını

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, ..., u_n) \tag{1.9}$$

olarak ele almış ve Adomian polinomlarını

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0,1,2,..... \tag{1.10}$$

formülü ile vermiştir. Bu formül ile Adomian polinomlarının hesaplanmasının zor olduğunu düşünen araştırmacılar, bu polinomların pratik yönden bulunması üzerine çalışmalar yapmışlardır. Wazwaz (2000) çalışmasında Adomian polinomlarının bulunmasında cebirsel ve trigonometrik özelliklerinin yanı sıra Taylor seri açılımından da faydalanmıştır. Wazwaz çalışmasında iki önemli tespitte bulunmuştur. Bunlardan birincisi A_0 polinomu sadece u_0'a bağlıdır, A_1 polinomu sadece u_0 ve u_1'e bağlıdır, A_2 polinomu da sadece u_0, u_1 ve u_2'ye bağlıdır. Bu durum böylece devam eder. İkinci olarak ise (1.9) eşitliğiyle verilen her bir A_n polinomu n bileşenden oluşmaktadır. Böylece, yeni bir algoritma oluşturmada bu ikinci özellik önemli bir rol oynamaktadır.

Buradan açıkça anlaşılabilir ki A_0 polinomunun elde edilişi diğer $A_n\,(n\geq 1)$ polinomlarının elde edilişinden bağımsızdır ve

$$A_0 = F(u_0) \tag{1.11}$$

yazılabilir. A_0 tanımlandıktan sonra $F(u)$ nun geri kalan diğer terimleri cebirsel işlemler, trigonometrik açılımlar ve uygun şekilde Taylor seri açılımı kullanılarak genişletilir. Bu seri açılımdan sonra bütün terimler serinin kuvvetlerine göre bir araya toplanırlar. Böylece Adomian polinomlarının bulunması tamamlanmış olur. Wazwaz (2000), tarafından tanımlanan bu işlem bir örnek üzerinde aşağıdaki gibi açıklanmıştır.

Örnek 1.1.1. $F(u)=u^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için Adomian polinomlarını hesaplayalım. Öncelikle $u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ olarak yazılırsa $F(u)$ fonksiyonu

$$F(u) = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)^2 \tag{1.12}$$

şeklinde olur. Sağ taraftaki kare açılımı yapıldığında ise

$$F(u) = {u_0}^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + {u_1}^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_3 + \cdots \tag{1.13}$$

şeklinde bulunur. Bu seri açılım u_n ifadesinin aynı alt simgeli bileşenlerin toplamı olarak düşünülüp tekrar yazılırsa (1.13) ifadesi yeniden

$$\begin{aligned} F(u) = {} & \underbrace{{u_0}^2}_{A_0} + \underbrace{2u_0u_1}_{A_1} + \underbrace{2u_0u_2 + {u_1}^2}_{A_2} + \underbrace{2u_0u_3 + 2u_1u_2}_{A_3} \\ & + \underbrace{2u_0u_4 + 2u_1u_3 + {u_2}^2}_{A_4} + \underbrace{2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3}_{A_5} + \cdots \end{aligned} \tag{1.14}$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece $F(u)=u^2$ fonksiyonu için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= {u_0}^2 \\ A_1 &= 2u_0u_1 \\ A_2 &= 2u_0u_2 + {u_1}^2 \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2 \\ A_4 &= 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + {u_2}^2 \\ A_5 &= 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3. \end{aligned} \tag{1.15}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Adomian polinomlarını elde etme metodlarından bir diğeri de Abdelwahid (2003) tarafından verilmiştir. Abdelwahid (2003) herhangi bir lineer olmayan fonksiyonun Taylor açılımını

$$f(u)=f(u_0)+(u_1+u_2+\cdots)f'(u_0)+\frac{1}{2!}(u_1+u_2+\cdots)^2 f''(u_0)+\cdots \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu seri açılım,

$$f(u)=f(u_0)+\left[\left(\frac{1}{1!}\sum_{i_1=1}^{1}\delta_{1,i_1}u_{i_1}\right)f'(u_0)\right]+\left[\left(\frac{1}{1!}\sum_{i_1=1}^{2}\delta_{2,i_1}u_{i_1}\right)f'(u_0)+\left(\frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{1}\delta_{2,i_1+i_2}u_{i_1}u_{i_2}\right)f''(u_0)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{1}{1!}\sum_{i_1=1}^{3}\delta_{3,i_1}u_{i_1}\right)f'(u_0)+\left(\frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{2}\delta_{3,i_1+i_2}u_{i_1}u_{i_2}\right)f''(u_0)+\left(\frac{1}{3!}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{1}\delta_{3,i_1+i_2+i_3}u_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}\right)f'''(u_0)\right]+\cdots \tag{1.17}$$

şeklinde de yazılabilir. En genel haliyle bu açılım

$$f(u)=f(u_0)+\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{1}{v!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_v=1}^{n+1-v}\delta_{n,i_1+i_2+\ldots+i_v}u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_v}\right)f^{(v)}(u_0)+\cdots \tag{1.18}$$

olur. Buradan Adomian polinomları ise

$$\begin{aligned}A_0&=f(u_0)\\ A_n&=\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{1}{v!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_v=1}^{n+1-v}\delta_{n,i_1+i_2+\ldots+i_v}u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_v}\right)f^{(v)}(u_0)+\cdots,\ n=1,2,\ldots\end{aligned} \tag{1.19}$$

eşitlikleriyle hesaplanır. Bu formüldeki $\delta_{m,n}$ Kronecker delta çarpımıdır ve daima $n\geq v$ olmalıdır. Bu formüllerin hesaplanması için aynı makalede bir Mathematica programı algoritması verilmiştir.

Pourdarvish (2006) ise çalışmasında Wazwaz'ın verdiği formülü farklı bir şekilde ele alarak polinomların bulunmasını daha kolay hale getirmiştir. Pourdavish (2006), çalışmasında λ parametresini kullanarak çözümü ve lineer olmayan terimleri

$$U_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\lambda^n \text{ ve } G_\lambda(U)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(u_0,u_1,\ldots.,u_n)\lambda^n \tag{1.20}$$

şeklinde ele almış ve böylece verilen denklemde bu eşitlikleri yerine yazarak elde edilen eşitliği λ'nın bir kuvvet serisi olarak düşünmüştür. Buradaki λ'nın katsayıları ise Adomian polinomlarını vermektedir. Pourdavish (2006) çalışmasında aşağıdaki örneği vermiştir.

Örnek 1.1.2. Lineer olmayan terimler $F(U)=U^2U_x$ olarak verilsin. Öncelikle $U_\lambda=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\lambda^i, U_{\lambda_x}=\sum_{i=0}^{\infty}u_{i_x}\lambda^i$ olsun. U_λ ve U_{λ_x} ifadeleri $F(U)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F_\lambda(U) = {u_0}^2 u_{0_x} + (2u_0u_1u_{0_x} + {u_0}^2 u_{1_x})\lambda + ({u_1}^2 u_{0_x} + 2u_0u_2u_{0_x} + 2u_0u_1u_{1_x} + {u_0}^2 u_{2_x})\lambda^2$$
$$+(2u_1u_2u_{0_x} + 2u_0u_3u_{0_x} + {u_1}^2 u_{1_x} + 2u_0u_2u_{1_x} + 2u_0u_1u_{2_x} + {u_0}^2 u_{3_x})\lambda^3 + \ldots \quad (1.21)$$

elde edilir. Böylece Adomian polinomları

$$A_0 = {u_0}^2 u_{0_x},$$
$$A_1 = 2u_0u_1u_{0_x} + {u_0}^2 u_{1_x},$$
$$A_2 = {u_1}^2 u_{0_x} + 2u_0u_2u_{0_x} + 2u_0u_1u_{1_x} + {u_0}^2 u_{2_x}, \quad (1.22)$$
$$A_3 = 2u_1u_2u_{0_x} + 2u_0u_3u_{0_x} + {u_1}^2 u_{1_x} + 2u_0u_2u_{1_x} + 2u_0u_1u_{2_x} + {u_0}^2 u_{3_x}.$$

şeklinde olacaktır.

1.1.3. Adomian Ayrışım Metodunun Yakınsaklığı

Adomian Ayrışım metodunun yakınsaklığı ile ilgili ilk çalışma Cherruault (1989) tarafından yapılmıştır. Cherruault çalışmasında genel bir fonksiyonel denklemi

$$y - N(y) = f, \quad (1.23)$$

olarak ele almıştır. Burada $N : H \to H$, H Hilbert uzayında tanımlanmış bir lineer olmayan operatör formu, f fonksiyonu da H uzayında tanımlanmış bir fonksiyondur. Ulaşılmaya çalışılan ise $y \in H$ çözümüdür. (1.23) denkleminin bütün $f \in H$ için tek çözümü olsun. ADM'ye göre y çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n,} \quad (1.24)$$

şeklinde sonsuz bir seri toplamı ve $N(y)$ lineer olmayan fonksiyonu da

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (1.25)$$

şeklinde gösterilir. Buradaki A_n ifadesi, $y_{0,}y_1,\ldots,y_n$'in Adomian polinomlarıdır ve

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0,1,2,... \quad (1.26)$$

formülüyle hesaplanır. (1.25) ve (1.24) denklemi (1.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n = f, \quad (1.27)$$

eşitliği elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ serisindeki her terim

$$y_0 = f,$$
$$y_n = A_{n-1},\ n \geq 1 \quad (1.28)$$

rekürans bağıntısıyla bulunur. Pratik olarak, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sonsuz serisindeki tüm elemanlar elde edilemeyeceğinden, $\sum_{n=0}^{N} y_n$ sonlu yaklaşımı ile çözüm hesaplanabilir. Cherrault böylece metodu başka bir formülle

$$S_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \tag{1.29}$$

şeklinde ifade etmiş ve S_n serisinin basit iterasyon çözümüne

$$N(y_0 + S) = S \tag{1.30}$$

yakınsadığını ispatlamıştır. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.1.1. (Cherrauault 1989) Varsayalım ki N bir daralma $(N < 1)$ olsun. Eğer $\|N_n - N\| = \varepsilon_n \to_{n\to\infty} 0$ ise bu takdirde $\{S_n\}$ serisi $S_{n+1} = N(y_0 + S_n)$, $S_0 = 0$ şeklinde verilir ve $N(y_0 + S) = S$ eşitliğinin çözümü olan S çözümüne yakınsar.

Teoremden de görüleceği gibi ADM'nin yakınsak olduğunu ispatlamak için aşağıdaki iki koşul gereklidir.

- N bir kısıtlama olmalıdır. $(N < 1)$
- $\|N_n - N\| = \varepsilon_n \to 0,\ (n \to \infty)$

Bu iki koşul oldukça güçlü koşullardır. İkinci koşul $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ serisinin yakınsak olduğunu garanti eder ama yüksek mertebeden lineer olmayan denklemler için sağlaması oldukça zordur.

Babolian (2002) çalışmasında ise ADM'nin yakınsaklık mertebesi üzerine çalışmıştır. Çalışmasında ilk olarak aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 1.1.1. (Babolian ve Biazar, 2002) $\{S_n\}$ serisi S çözümüne yakınsasın. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{S_{n+1} - S}{(S_n - S)^p} \right| = C, \tag{1.31}$$

olacak şekilde p ve C gibi iki sabit bulunabiliyorsa bu p sayısına yakınsaklık mertebesi adı verilir. $\{S_n\}$ serisinin yakınsaklık mertebesini elde etmek için $N(y_0 + S_n)$ ifadesinin Taylor seri açılımı yapılırsa

$$N(y_0+S_n)=N(y_0+S)+\frac{N'(y_0+S)}{1!}(S_n-S)+\frac{N''(y_0+S)}{2!}(S_n-S)^2+\cdots \\ +\frac{N^{(k)}(y_0+S)}{k!}(S_n-S)^k+\cdots \tag{1.32}$$

elde edilir. $S_{n+1}=N(y_0+S_n),\ S_0=0$ ve $N(y_0+S)=S$ eşitlikleri kullanılarak

$$S_{n+1}-S=N'(y_0+S)(S_n-S)+\frac{N''(y_0+S)}{2!}(S_n-S)^2+\cdots+\frac{N^{(k)}(y_0+S)}{k!}(S_n-S)^k+\cdots \tag{1.33}$$

yazılır ve aşağıdaki Teorem ortaya çıkar.

Teorem 1.1.2. (Babolian ve Biazar, 2002) $N\in C^p[a,b]$ olsun. Eğer $N^p(y_0+S)\neq 0$ ve $k=1,2,...,p-1$ için eğer $N^k(y_0+S)=0$ oluyorsa bu takdirde $\{S_n\}$ serisinin yakınsaklık mertebesi p sayısıdır.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin Adomian metodu ile çözümünde yapılan hata ile ilgili bir çalışmayı da El-Kalla (2007) yapmıştır. El-Kalla çalışmasında

$$\frac{d^k}{dt^k}y(t)+\beta(t)f(y)=x(t) \tag{1.34}$$

diferensiyel denklemini,

$$y(0)=c_0,\ \frac{dy(0)}{dt}=c_1,\ \frac{d^2y(0)}{dt^2}=c_2,\ldots,\ \frac{d^{k-1}y(0)}{dt^{k-1}}=c_{n-1},\quad (c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}\ sabit) \tag{1.35}$$

başlangıç koşulları altında ele almıştır. Bu çalışmada, $x(t)$ fonskiyonu $\forall t\in J=[0,T]$ için sınırlı ve $\forall 0\le t\le T$ için $|\beta(\tau)|\le M$ (M sonlu bir sayı) şeklinde kabul edilmiştir. Lineer olmayan terimde Lipschit şartını $|f(y)-f(z)|\le L|y-z|$ sağlamaktadır. Bu denkleme Adomian metodunu uygulayarak

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(t), \tag{1.36}$$

şeklinde bir sonuca ulaşılır. El-Kalla bu çözümün tekliği, yakınsaklığı ve hata analizi ile ilgili aşağıdaki teoremleri vermiştir.

Teorem 1.1.3. (El-Kalla 2007) Başlangıç koşulları (1.35) şeklinde verilen (1.34) denkleminin $\alpha=\frac{LMT^k}{k!}$ olmak üzere $0<\alpha<1$ için tek bir çözümü vardır.

Teorem 1.1.4. (El-Kalla 2007) Başlangıç koşulları (1.35) şeklinde verilen (1.34) denkleminin Adomian metodu kullanılarak elde edilen (1.36) çözümü $|y_1| < \infty$ ve $0 < \alpha < 1$ koşulları altında her zaman yakınsaktır.

Teorem 1.1.5. (El-Kalla 2007) Başlangıç koşulları (1.35) şeklinde verilen (1.34) denkleminin Adomian metodu kullanılarak elde edilen (1.36) çözümünün maksimum kesme hatası $\max_{t\in J}\left|y(t)-\sum_{i=0}^{m} y_i(t)\right| \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\max_{t\in J}|y_1(t)|$ dir.

1.1.4. Adomian Ayrışım Metodunun Uygulanması

Bu bölümde ADM'nin bazı diferensiyel denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığı gösterilecektir. ADM lineer, lineer olmayan, başlangıç ve sınır değer problemlerinde, adi kısmi, kesirli türevli diferensiyel denklemlerde ve integro diferensiyel denklemlerin çözümlerinde oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu diferensiyel denklemlere ilişkin bazı örnekler aşağıdaki gibidir.

Örnek 1.1.3. (Biazar, 2005) Bu örnekte ADM, integro-differensiyel denklemlerin bir sisteminin çözümünde kullanılmıştır. Çözümü istenen sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 + x + x^2 - y_2 - \int_0^x (y_1(t) + y_2(t))dt, \\ y_2' &= -1 - x + y_1 - \int_0^x (y_1(t) - y_2(t))dt, \end{aligned} \tag{1.37}$$

şeklinde verilmiştir. Bu sistemin gerçek çözümü $y_1(x) = x + e^x$ ve $y_2(x) = x - e^x$ 'dir . Yaklaşık çözümünü elde etmek için sistem operatör formunda yazılarak her iki tarafa ters operatör olan $\int_0^x (.)dx$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(0) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y_2 dx - \int_0^x\int_0^x (y_1(t) + y_2(t))dtdx, \\ y_2 &= y_2(0) - x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x y_1 dx - \int_0^x\int_0^x (y_1(t) - y_2(t))dtdx, \end{aligned} \tag{1.38}$$

elde edilir. Adomian polinomlarını elde etmek için ise aşağıdaki rekürans bağıntısı kullanılabilir

$$\begin{cases} y_{1,0} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}, \\ y_{2,0} = -1 - x - \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1,n} = -\int_0^x y_{2,n}dx - \int_0^x \int_0^x (y_{1,n}(t) + y_{2,n}(t))dtdx, \\ y_{2,n} = \int_0^x y_1, ndx - \int_0^x \int_0^x (y_{1,n}(t) - y_{2,n}(t))dtdx. \end{cases}$$

Bu rekürans bağıntısından faydalanarak yedi terimli yaklaşık çözüm

$$y_1 = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{2520}x^7 + \cdots + \frac{1}{81729648000}x^{15},$$

$$y_2 = -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \cdots - \frac{1}{10897286400}x^{14},$$

şeklindedir. Dört terim alınarak bulunan yaklaşık çözüm ve bu çözümlerden ortaya çıkan hatalar Çizelge 1.1 de verilmiştir

Çizelge 1.1. Dört terim alınarak elde edilen yaklaşık çözümlerin hataları

x	$y_1(n=3)$	$e(y_1(n=3))$	$y_2(n=3)$	$e(y_2(n=3))$
0	1	0	-1	0
0.2	1.42133	0.717E-4	-1.02133	0.664E-4
0.4	1.89060	0.121E-2	-1.09077	0.104E-2
0.6	2.41565	0.646E-2	-1.21690	0.521E-2
0.8	3.00439	0.211E-1	-1.40952	0.160E-1
1.0	3.66546	0.528E-1	-1.68056	0.377E-1

Örnek 1.1.4. (Luo 2005) Bu örnekte iki boyutlu bir sınır değer problemi olan bir ısı denklemi ADM ile çözülmüştür. Ele alınan denklem

$$u_t = \frac{1}{2}(y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}),\ 0 < x,\ y < 1,\ t > 0, \tag{1.39}$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} &u_x(0,y,t) = 0,\ u_x(1,y,t) = 2\sinh t, \\ &u_y(x,0,t) = 0,\ u_y(x,1,t) = 2\cosh t, \end{aligned} \tag{1.40}$$

Neuman sınır koşullarına

$$u(x,y,0) = y^2 \tag{1.41}$$

başlangıç koşullarına sahiptir. Bu denklem operatör formunda yazılırsa

$$Lu = \frac{1}{2}(y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}),\ 0 < x,\ y < 1,\ t > 0, \tag{1.42}$$

olur ki burada $L=\frac{d}{dt}$ olup, ters operatör $L_t^{-1}=\int_0^t(.)dt$, (1.42) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa,

$$u_0(x,y,t)=y^2,$$

$$u_1(x,y,t)=\frac{1}{2}L_t^{-1}(y^2(u_0)_{xx}+x^2(u_0)_{yy})=x^2t,$$

$$u_2(x,y,t)=\frac{1}{2}L_t^{-1}(y^2(u_1)_{xx}+x^2(u_1)_{yy})=y^2\frac{t^2}{2!},$$

$$u_3(x,y,t)=\frac{1}{2}L_t^{-1}(y^2(u_2)_{xx}+x^2(u_2)_{yy})=x^2\frac{t^3}{3!},$$

$$u_4(x,y,t)=\frac{1}{2}L_t^{-1}(y^2(u_3)_{xx}+x^2(u_3)_{yy})=y^2\frac{t^4}{4!},$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ADM yardımıyla yaklaşık çözüm

$$u(x,y,t)=x^2(t+\frac{t^3}{3!}+\cdots)+y^2(1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)$$

şeklinde bulunur. Bu elde edilen çözümün kapalı hali ise

$$u(x,y,t)=x^2\sinh t+y^2\cosh t,$$

olup aranan analitik çözümdür.

1.2. Varyasyonel İterasyon Metodu

Çeşitli bilimsel alanlarda adi ve kısmi türevlerle ifade edilebilen birçok fiziksel olay bilinmektedir. Gerçek yaşamdaki problemlerin teorik veya nümerik çözümleri bugün bile kolay değildir. Bugün lineer olmayan modeller için gerçek veya yaklaşık, analitik veya nümerik, daha etkili çözüm metodlarını araştırmak çok önemli hale gelmiştir.

Varyasyonel İterasyon metodu (Variational Iteration Method-VIM) ilk olarak Çinli matematikçi Ji-Huan He tarafından önerilmiştir (He, 1997, 1998, 2000). O tarihten beri bu metod pek çok araştırmacı tarafından lineer veya lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. VIM birçok bilimsel veya mühendislik uygulamaları için oldukça kullanışlı ve etkili bir çözüm şeması önermektedir. Lagrange çarpanı bulmayı temel alan metod, kolay hesaplanabilirliliği ve basitliği de beraberinde getirmektedir. Diğer geleneksel metodların aksine VIM, lineerleştirme, dönüştürme, perturbasyon veya ayrıştırma gerekmemektedir, ayrıca çözüme çok hızlı yakınsamakta veya birkaç adımda yaklaşık çözüm elde edilebilmektedir (Odibat, 2008).

1.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Temel Esasları

Bu metodun temel fikrini anlatmak için aşağıdaki şekilde verilen

$$L[u(t)]+N[u(t)]=g(t), \tag{1.43}$$

lineer olmayan denklem sistemini ele alalım. Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ ise sürekli fonksiyondur. Bu metodun temel karakteri (1.43) eşitliği için

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_{t_0}^{t}\lambda\left\{Lu_n(s)+N\tilde{u}_n(s)-g(s)\right\}ds, \tag{1.44}$$

şeklinde bir doğrulama fonksiyonu yazmaktır. Burada λ ,Varyasyonel teori sayesinde kolayca elde edilebilen genel Lagrange çarpanı, u_n, mertebesi n olan yaklaşık çözüm ve $\tilde{u}_n$ de $\delta\tilde{u}_n=0$ olarak tanımlanmış kısıtlanmış bir fonksiyondur. Burada λ'nın bir sabit yada bir fonksiyon olabileceğini söylemek gerekir. λ elde edildikten sonra $n\geq 0$ olmak üzere ardışık işlemler yardımıyla $u(x)$ çözümünün yaklaşık çözümü olan $u_n(x)$ çözümü elde edilir. Sıfırıncı mertebeden yaklaşım olan $u_0(x)$, $u(0),u'(0),u''(0),...$ başlangıç değerleri kullanılarak yazılır ve böylece denklemin çözümü

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u(x), \tag{1.45}$$

şeklinde bulunur.

Temel özelliklerini verdiğimiz VIM'nin uygulanması ile ilgili birkaç örnek aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 1.2.1. (He, 2007) İlk olarak genel bir birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemi ele alalım

$$u'+a(t)u=b(t),\ u(0)=c. \tag{1.46}$$

Bu denklemin doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\int_{0}^{t}\lambda\left\{\frac{du_n}{ds}+a(s)u_n(s)-b(s)\right\}ds \tag{1.47}$$

şeklinde yazılabilir. u_n'e göre yukarıdaki fonksiyonelin doğru ve $\delta u_n=0$ olduğu belirtilerek

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda\left\{\frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s)\right\}ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda\delta u_n(s)\big|_{s=t} + \int_0^t \left\{-\frac{\partial\lambda}{\partial s} + a(s)\lambda\right\}\delta u_n(s)ds = 0\end{aligned} \tag{1.48}$$

yazılır. Buradan aşağıdaki Euler-Lagrange denklemi

$$-\frac{\partial\lambda(t,s)}{\partial s} + a(s)\lambda(t,s) = 0 \tag{1.49}$$

ve doğal sınır koşulları

$$1 + \lambda(t,s) = 0 \tag{1.50}$$

bulunmuş olur. Böylece Lagrange çarpanı

$$\lambda(t,s) = -\exp\left\{\int_0^s a(\xi)d\xi - \int_0^t a(\xi)d\xi\right\} \tag{1.51}$$

şeklinde elde edilir. Bu Lagrange çarpanı, (1.47) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp\left\{\int_0^s a(\xi)d\xi - \int_0^t a(\xi)d\xi\right\}\left\{\frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s)\right\}ds. \tag{1.52}$$

sonucu bulunur. $u(0) = c$ başlangıç koşulu altında $u' + a(t)u = 0$ homojen diferensiyel denkleminin çözümü olan $u_0 = c\exp\left\{-\int_0^t a(\xi)d\xi\right\}$ ile çözüme başlanırsa

$$\begin{aligned}u_1(t) &= c\exp\left\{-\int_0^t a(\xi)d\xi\right\} - \int_0^t b(s)\exp\left\{\int_0^s a(\xi)d\xi - \int_0^t a(\xi)d\xi\right\}ds \\ &= c\exp\left\{-\int_0^t a(\xi)d\xi\right\} - \exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\}\int_0^t b(s)\exp\left\{\int_0^s a(\xi)d\xi\right\}ds\end{aligned} \tag{1.53}$$

elde edilir ki bu gerçek çözümdür.

Örnek 1.2.2. (He, 2007) Lineer olmayan denklemler için Lagrange çarpanının bulunması daha zordur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için lineer olmayan terimlere kısıtlanmış varyasyon uygulanmaktadır. Kısıtlanmış varyasyonun nasıl uygulandığını

$$u''(t) + w^2u(t) = 0. \tag{1.54}$$

lineer denkleminde görelim. Bu denklem için doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda\left\{u_n''(s) + w^2\tilde{u}_n(s)\right\}ds \tag{1.55}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{u}_n$, $\delta\tilde{u}_n = 0$ eşitliğiyle kısıtlanmış bir varyasyondur. Bu durumda, fonksiyonelin stasyoner koşulları

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \lambda(t,s)}{\partial s^2} = 0, \\ &1 - \frac{\partial \lambda(t,s)}{\partial s}\Big|_{t=s} = 0, \\ &\lambda(t,s)\Big|_{t=s} = 0. \end{aligned} \tag{1.56}$$

yazılabilir. Bu eşitliklerden Lagrange çarpanı kolayca

$$\lambda = s - t, \tag{1.57}$$

olarak elde edilir. Lagrange çarpanının değeri iterasyon formülünde yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t)\left\{u_n''(s) + w^2 u_n(s)\right\} ds \tag{1.58}$$

elde edilir. Eğer bu denklemin başlangıç değerleri $u(0) = 1$ ve $u'(0) = 0$ olarak verilirse iterasyona $u_0(0) = u(0) = 1$ değeriyle başlanır ve yukarıdaki iterasyon formulünü kullanarak yaklaşık çözümler

$$\begin{aligned} &u_1(t) = 1 - \frac{1}{2!}w^2 t^2, \\ &u_2(t) = 1 - \frac{1}{2!}w^2 t^2 + \frac{1}{4!}w^4 t^4, \\ &\vdots \\ &u_n(t) = 1 - \frac{1}{2!}w^2 t^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}w^{2n} t^{2n}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki çözüm prosedüründen de anlaşılacağı gibi yaklaşık çözümlerin gerçek çözüm olan $\cos wt$ çözümüne yaklaştığı açıkça görülmektedir. Lagrange çarpanın daha iyi tanımlanmasıyla yaklaşık çözümler gerçek çözüme daha hızlı yakınsar.

Bahsedilen bu örnekler VIM'nin çözüm prosedürünün daha iyi anlaşılması için verilmiş örneklerdir. Aşağıdaki örnekte ise Momani ve Abusaad (2006) kısmi türevli Helmholtz diferensiyel denkleminin çözümünü VIM ile yapmıştır.

Örnek 1.2.3. (Momani ve Abusaad, 2006) Lineer, kısmi türevli, Helmholtz diferensiyel denklemini ele alalım. Helmholtz denklemi

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - u(x,y) = 0, \tag{1.60}$$

şeklinde olup başlangıç koşulları ise

$$u(0,y)=y,\ u_x(0,y)=y+\cosh(y), \tag{1.61}$$

olarak verilmiştir. x ve y doğrultusundaki doğrulama fonksiyonelleri sırasıyla

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,y)&=u_n(x,y)+\int_0^y \lambda_1\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,\tau)}{\partial\tau^2}-\tilde{u}_n(x,\tau)\right)d\tau,\\ u_{n+1}(x,y)&=u_n(x,y)+\int_0^x \lambda_2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial y^2}-\tilde{u}_n(\zeta,y)\right)d\zeta, \end{aligned} \tag{1.62}$$

olur. Burada $\lambda_i(i=1,2)$ Lagrange çarpanları, u_0 başlangıç yaklaşımı ve $\tilde{u}_n$ de $\delta\tilde{u}_n=0$ olacak şekildeki kısıtlanmış varyasyondur. (1.62) için doğrulama fonksiyonellerinin kısıtlamaları yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x,y)&=\delta u_n(x,y)+\delta\int_0^x \lambda_2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial y^2}-\tilde{u}_n(\zeta,y)\right)d\zeta,\\ \delta u_{n+1}(x,y)&=\delta u_n(x,y)+\delta\int_0^x \lambda_2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}\right)d\zeta,\\ \delta u_{n+1}(x,y)&=\delta u_n(x,y)(1-\lambda_2'(t))+\delta\frac{\partial\tilde{u}_n(\zeta,y)}{\partial\zeta}\lambda_2(\zeta)+\int_0^x \delta u_n(\zeta,y)\lambda_2''(\zeta)d\zeta=0, \end{aligned} \tag{1.63}$$

elde edilir. Bu fonksiyoneller ise aşağıdaki stasyoner koşulları sağlar

$$\begin{aligned} &\delta u_n: 1-\lambda_2'(\zeta)=0,\\ &\delta\frac{\partial u_n}{\partial\zeta}:\ \lambda_2(\zeta)=0,\\ &\delta u_n:\lambda_2''(\zeta)=0, \end{aligned} \tag{1.64}$$

Böylece bu denklemlerden Lagrange çarpanı

$$\lambda_2(\zeta)=\zeta-x, \tag{1.65}$$

bulunur. Benzer işlemler yardımıyla $\lambda_1(\tau)=\tau-y$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, x ve y doğrultusundaki iterasyon formülleri

$$u_{n+1}(x,y)=u_n(x,y)+\int_0^y(\tau-y)\left(\frac{\partial^2u_n(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_n(x,\tau)}{\partial\tau^2}-u_n(x,\tau)\right)d\tau, \tag{1.66}$$

$$u_{n+1}(x,y)=u_n(x,y)+\int_0^x(\zeta-x)\left(\frac{\partial^2u_n(\zeta,y)}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2u_n(\zeta,y)}{\partial y^2}-u_n(\zeta,y)\right)d\zeta. \tag{1.67}$$

bulunur. Şimdi A ve B katsayıları x doğrultusundaki başlangıç koşullarından elde edilmek üzere, başlangıç yaklaşımını $u_0=A+Bx$ alalım. Böylece

$$u_0(x,y)=y(1+x)+x\cosh(y), \tag{1.68}$$

elde edilir. x doğrultusundaki Varyasyonel iterasyon formülü (1.67) kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$u_1(x,y) = u_0(x,y) + \int_0^x (\zeta - x)\left(\frac{\partial^2 u_0(\zeta,y)}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u_0(\zeta,y)}{\partial y^2} - u_0(\zeta,y) \right) d\zeta,$$

$$u_1(x,y) = y(1+x) + x\cosh(y)$$

$$+ \int_0^x (\zeta - x)\left(\frac{\partial^2 y(1+\zeta) + \zeta(\cosh(y))}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 y(1+\zeta) + \zeta(\cosh(y))}{\partial y^2} - (y(1+\zeta) + \zeta(\cosh(y))) \right) d\zeta.$$

Buradan

$$u_1(x,y) = y(1+x) + x\cosh(y) - y\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)$$

bulunur. Rekürans bağıntısı kullanılarak $u_n(x,y)$ terimlerinin değerleri

$$u_0(x,y) = x\cosh(y) + y(1+x),$$

$$u_1(x,y) = x\cosh(y) + y\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right),$$

$$u_2(x,y) = x\cosh(y) + y\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right),$$

$$u_3(x,y) = x\cosh(y) + y\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \right),$$

$\vdots$

şeklinde elde edilir. Böylece, diferensiyel denklemin kapalı formda ifadesi

$$u(x,y) = y\exp(x) + x\cosh(y),$$

şeklinde bulunmuş olur.

1.2.2. Varyasyonel İterasyon Metodunun Yakınsaklığı

VIM'nin yakınsaklığı üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Adi, kısmi veya kesirli türevli, lineer veyaa lineer olmayan diferensiyel denklemlerin VIM ile çözümünün yakınsaklığı ile ilgili çalışmalardan birkaçı aşağıda verilmiştir.

Odibat (2010) VIM'nin yakınsaklığı için bu metoda başka bir yaklaşım getirmiştir. Odibat çalışmasında lineer olmayan bir diferensiyel denklemi

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t),\ t > 0 \tag{1.69}$$

olarak ele almıştır. Burada $L = \frac{d^m}{dt^m}, m \in \mathbb{N}$, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ de bilinen bir analitik fonksiyondur. Bu denklemin başlangıç koşulları ise

$$u^{(k)}(0) = c_k,\ k = 0,1,...,m-1,\ c_k \in \mathbb{R} \tag{1.70}$$

şeklinde verilmiştir. VIM'ye göre (1.69) denkleminin doğrulama fonksiyoneli

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \int_0^t \left[\lambda(\tau)\left(Lu_k(\tau) + N\tilde{u}_k(\tau) - g(\tau) \right) \right] d\tau \tag{1.71}$$

şeklinde yazılır. Burada λ Lagrange çarpanıdır ve lineer olmayan terim Nu için kısıtlanmış varyasyon uygulanmıştır. $\delta\tilde{u}_k = 0$ olacak şekilde bu fonksiyonelin stasyoner denklemi

$$\delta u_{k+1}(t) = \delta u_k(t) + \delta \int_0^t \left[\lambda(\tau)\left(Lu_k(\tau) - g(\tau) \right) \right] d\tau \tag{1.72}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} &m = 1 \; için \; \lambda = -1, \\ &m = 2 \; için \; \lambda = \tau - t, \end{aligned} \tag{1.73}$$

ve genel olarak

$$m \geq 1 \; için \; \lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\tau - t)^{m-1}, \tag{1.74}$$

şeklinde Lagrange çarpanları elde edilir. Böylece (1.74) denklemini (1.71) de yerine yazarak iterasyon formülü

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\tau - t)^{m-1} \left(Lu_k(\tau) + Nu_k(\tau) - g(\tau) \right) \right] d\tau \tag{1.75}$$

bulunur. Burada $A[u]$ operatörü

$$A[u] = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\tau - t)^{m-1} \left(Lu_k(\tau) + Nu_k(\tau) - g(\tau) \right) \right] d\tau \tag{1.76}$$

şeklinde ve $v_k, k = 0,1,2,...$ bileşenleri de

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = A[v_0] \\ v_2 = A[v_0 + v_1] \\ \vdots \\ v_{k+1} = A[v_0 + v_1 + \cdots + v_k] \end{cases} \tag{1.77}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak, $u(t) = \lim_{k\to\infty} u_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ ifadesinden, çözüm fonksiyonu

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \tag{1.78}$$

seri toplamı şeklinde bulunur. Sıfırıncı (başlangıç) yaklaşım $(u_0 = v_0)$, problemin sınır veya başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde istenildiği gibi seçilebilir. Bu metodun

başarısı v_0 başlangıç yaklaşımının uygun olarak seçilmesine bağlıdır. Verilen bu alternatif yaklaşımda v_0 başlangıç yaklaşımı

$$v_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} t^k, \tag{1.79}$$

şeklinde seçilecektir. Yaklaşık hesaba göre işlem yapıldığı düşünülürse, $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ çözümü yerine n'inci mertebeden sonlu yaklaşım serisi kullanılarak $u(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t)$ yazılabilir. VIM için bu alternatif yolu öneren Odibat (2010), yakınsaklık için aşağıdaki teoremleri vermiştir.

Teorem 1.2.1. (Odibat, 2010) (1.76) ile verilen A operatörü H Hilbert uzayından H Hilbert uzayına tanımlansın. Bu takdirde (1.78)'de verilen

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$$

çözümü

$\|A[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k+1}]\| \le \gamma \|A[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k+1}]\|$, $(\|v_{k+1}\| \le \gamma \|v_k\|)$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

olacak şekilde bir $0 < \gamma < 1$ varsa yakınsaktır.

Teorem 1.2.1, Banach sabit nokta teoreminin özel bir halidir.

Teorem 1.2.2. (Odibat, 2010) Eğer (1.78) denklemiyle tanımlanan seri yakınsak ise bu çözüm (1.69) denklemiyle verilen lineer olmayan problemin gerçek çözümüdür.

Teorem 1.2.3. (Odibat, 2010) (1.78) denklemiyle tanımlanan $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ serisi, $u(t)$ çözümüne yakınsasın. Eğer $u(t) = \sum_{k=0}^{j} v_k(t)$ sonlu serisi $u(t)$ çözümüne yakınsak bir çözüm olarak ele alınırsa, burada yapılacak $E_j(t)$ maksimum hatası

$$E_j(t) \le \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\| \tag{1.80}$$

bulunur.

Bu teoremlerin ispatları Odibat (2010) tarafından çalışmasında verilmiştir. Yukarıda elde edilen sonuçlar Odibat (2010) tarafından aşağıdaki örnek üzerinde gösterilmiştir.

Örnek 1.2.4. (Odibat, 2010) Lineer olmayan bir

$$u'(t) = u^2(t) + 1, \quad 0 < t \le 1, \tag{1.81}$$

diferensiyel denklemi $u(0) = 0$ başlangıç koşulu altında inceleyelim. Odibat'ın (2010) çalışmasında ele aldığı biçimde (1.81) denklemi için iterasyon formülü

$$\begin{cases} v_0 = 0, \\ v_{k+1} = -\int_0^t \left[[v_0 + v_1 + \cdots + v_k]'(\tau) - [v_0 + v_1 + \cdots + v_k]^2(\tau) - 1 \right] d\tau, \end{cases} \tag{1.82}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki iterasyon formülünü kullanarak

$$\begin{cases} v_1 = t, \\ v_2 = \dfrac{1}{3}t^3, \\ v_3 = \dfrac{2}{15}t^5 + \dfrac{1}{63}t^7, \\ v_4 = \dfrac{4}{105}t^7 + \dfrac{38}{2835}t^9 + \dfrac{134}{51975}t^{11} + \dfrac{4}{12285}t^{13} + \dfrac{1}{59535}t^{15}, \\ \vdots \end{cases} \tag{1.83}$$

çözümleri bulunur. Açıkça görülebilir ki elde edilen $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ çözümü, problemin gerçek çözümü olan $u(t) = \tan(t) = t + \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{2}{15}t^5 + \dfrac{17}{315}t^7 + \cdots$ çözümüne yakınsamaktadır. Bu problem için β_i değerlerinin hesaplanması durumunda ise

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\|v_2\|}{\|v_1\|} = 0.33333 \\ \beta_2 = \dfrac{\|v_3\|}{\|v_2\|} = 0.44761 \\ \beta_3 = \dfrac{\|v_4\|}{\|v_3\|} = 0.36472 \\ \beta_4 = \dfrac{\|v_5\|}{\|v_4\|} = 0.29081 \\ \vdots \end{cases} \tag{1.84}$$

bulunur. Tüm $i \geq 1$ değerleri ve $0 < t \leq 1$ için β_i değerleri birden küçük olduğundan (1.81) denkleminin VIM ile çözümünün yakınsak olduğu söylenebilir.

Tatari ve Dehghan (2007) çalışmalarında ise ikinci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemler için bir yakınsaklık analizi yapmışlardır. Bunun için özel başlangıç koşullarına sahip ikinci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemlerin genel halini aşağıdaki şekilde vermişlerdir

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) = 0. \tag{1.85}$$

VIM için kısmi türevli diferensiyel denklemin t doğrultusundaki doğrulama fonksiyoneli ise

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda F\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \tau}, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x \partial \tau}\right) d\tau, \tag{1.86}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{u}_n$, $\delta \tilde{u}_n = 0$ olacak biçimdeki kısıtlanmış varyasyondur. λ Lagrange çarpanını bulmak için aşağıdaki stasyoner doğrulama fonksiyoneli aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda F\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \tau}, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x \partial \tau}\right) d\tau = 0, \tag{1.87}$$

Aslında, bu denklemin çözümü, uygun bir $u_0(x,t)$ başlangıç koşulu seçimiyle

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda F\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \tau}, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial \tau}\right) d\tau, \tag{1.88}$$

fonksiyonelinin sabit bir noktası olarak düşünülebilir.

Teorem 1.2.4. (Tatari ve Dehghan, 2007) (Banach sabit nokta teoremi). X bir Banach uzayı ve $A: X \to X$ bir lineer olmayan dönüşüm olsun ve

$$\|A[u] - A[\bar{u}]\| \leq \gamma \|u - \bar{u}\|, \quad u, \bar{u} \in X. \tag{1.89}$$

eşitsizliği sağlansın. $\gamma < 1$ sabit sayıları için A tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca,

$$u_{n+1} = A[u_n] \tag{1.90}$$

dizisi $u_0 \in X$ keyfi seçimiyle birlikte, A'nın bir sabit noktasına yakınsar ve

$$\|u_k - u_l\| \leq \|u_1 - u_0\| \sum_{j=l-1}^{k-2} \gamma^j, \tag{1.91}$$

bulunur.

Teorem 1.2.4 uyarınca

$$A[u] = u(x,t) + \int_0^t \lambda F\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \tau}, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial \tau}\right) d\tau, \tag{1.92}$$

lineer olmayan dönüşümünde VIM'nin yakınsak olması için yeter şart A'nın kesinlikle daralmasıdır. Ayrıca (1.88) denklemiyle verilen dizi A sabit noktasına yakınsar ve bu dizi (1.85) de verilen kısmi diferensiyel denklemin bir çözümüdür.

1.3. Homotopi Perturbasyon Metodu

Homotopi Perturbasyon Metodu (Homotopi Perturbation Method-HPM) ilk olarak Çinli matematikçi Ji Huan He tarafından 1999 yılında önerilmiştir. Bu tarihten itibaren HPM birçok bilimsel çalışmada lineer, lineer olmayan, adi veya kısmi birçok problemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Bu metod, diferensiyel topolojide gördüğümüz homotopi tekniği ile perturbasyon tekniğinin birleştirilmesi ile oluşmuş bir tekniktir (He, 2003). Daha önce literatürde bulunan klasik perturbasyon teknikleri küçük parametreye ihtiyaç duymaktaydı. Bu metod ile beraber homotopi tekniğine göre, bir $p \in [0,1]$ gömülme parametresi ile birlikte bir homotopi kurulur. Buradaki gömülme parametresi küçük parametre olarak düşünülür ve böylece bu tekniğe HPM adı verilir. Metodun işleyişi ise aşağıdaki gibidir.

1.3.1. Homotopi Perturbasyon Metodunun Temel Esasları

Bu metodun esaslarını anlatmak için öncelikle aşağıdaki lineer olmayan diferesiyel denklemi ele alalım

$$A(u) - f(r) = 0, \ r \in \Omega \tag{1.93}$$

ve denkleminin sınır koşulları da

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \ r \in \Gamma, \tag{1.94}$$

olarak verilsin. Burada A genel diferensiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon, Γ da Ω bölgesi üzerinde bir sınırdır. A operatörü genel olarak, L lineer operatörü ve N de lineer olmayan operatörü göstermek üzere L ve N gibi iki kısma ayrılmaktadır. Böylece (1.94) denklemi, genel anlamda,

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, \ r \in \Omega \tag{1.95}$$

şeklinde ifade edilir. Homotopi tekniğine göre $v(r,p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ye kurulan homotopi

$$H(v,p)=(1-p)\left[L(v)-L\left(u_0\right)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0,\ p\in[0,1],\ r\in\Omega \tag{1.96}$$

veya

$$H(v,p)=L(v)-L\left(u_0\right)+pL\left(u_0\right)+p\left[N(v)-f(r)\right]=0, \tag{1.97}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $p\in[0,1]$ bir gömülme parametresi ve u_0 sınır değerlerini sağlayacak olan başlangıç yakınsamasıdır. (1.97) veya (1.98) denkleminden

$$H(v,0)=L(v)-L\left(u_0\right)=0, \tag{1.98}$$

veya

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=0, \tag{1.99}$$

olduğu açıkça gözükmektedir. Buradan, p'nin sıfırdan birime kadar değişmesiyle $v(r,p)$'nin $u_0(r)$'den $u(r)$'ye kadar değiştiğini söyleyebiliriz. Topolojide buna deformasyon denir ve $L(v)-L\left(u_0\right)$ ve $A(v)-f(r)$ ifadeleri de homotopik olarak adlandırılır.

He (1999) çalışmasında p gömülme parametresini küçük parametre olarak ele almıştır. (1.97) veya (1.98) denkleminin çözümünün p'nin kuvvetlerine göre bir kuvvet serisi olduğu düşünülürse

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots \tag{1.100}$$

eşitliği yazılabilir. Burada $p=1$ durumunda ise (1.94) denkleminin çözümü

$$u=\lim_{p\to1}v=v_0+v_1+v_2+\cdots \tag{1.101}$$

şeklinde elde edilir. (1.102) denklemiyle verilen seri çözümü çoğu zaman yakınsaktır. Yakınsaklık oranı ise $A(v)$ lineer olmayan operatörüne göre değişmektedir. Yakınsaklık için aşağıdaki iki durumu göz önünde bulundurmak gereklidir.

1. $N(v)$'nin v'ye göre ikinci türevi küçük olmalıdır. Çünkü p parametresi buna göre daha büyük olabilir. (Örneğin $p\to1$ durumunda).

2. $L^{-1}\partial N/\partial v$ normu 1'den küçük olmalıdır.

HPM çeşitli diferensiyel denklemlerin çözümü için aşağıdaki şekilde kullanılmaktadır.

1.3.2. Homotopi Perturbasyon Metodunun Kullanımı

HPM birçok lineer yada nonlineer denklemin çözümünde oldukça kullanışlı bir metoddur. Şimdi bu denklemlerin HPM ile çözümüyle ilgili birkaç örnek verelim.

Örnek 1.3.1 (He,1999) Literatürde iyi bilinen Duffing denklemini göz önüne alalım. Duffing denklemi

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u+\varepsilon u^3=0,\ u(0)=A,\ u'(0)=0, \tag{1.102}$$

ile verilsin. Burada

$$L(v)-L(u_0)+pL(u_0)+p\varepsilon v^3=0. \tag{1.103}$$

ifadesini sağlayan bir homotopi kurulabilir ve $L=\frac{d^2u}{dt^2}+u$ olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$L(v)-L(u_0)=0\ \ ,v_0(0)=A,\ v_0'(0)=0, \tag{1.104}$$

$$L(v_1)-L(u_0)+\varepsilon {v_0}^3=0\ \ ,v_1(0)=v_1'(0)=0. \tag{1.105}$$

lineer sistemi elde edilir. (1.104) denkleminin başlangıç yaklaşımını α bir sabit olmak üzere $v_0(t)=u_0(t)=A\cos\alpha t$ alınırsa, (1.106) denkleminden

$$\frac{d^2v_1}{dt^2}+v_1+A\left(-\alpha^2+1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)\cos\alpha t+\frac{\varepsilon A^3}{4}\cos 3\alpha t=0 \tag{1.106}$$

elde edilir. Buradan (1.107) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} v_1(t)&=\int_0^t \sin(\tau-t)\left[A(-\alpha^2+1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2)\cos\alpha\tau+\frac{\varepsilon A^3}{4}\cos 3\alpha\tau\right]d\tau \\ &=\left(-\alpha^2+1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)\frac{A}{\alpha^2-1}(\cos\alpha t-\cos t)+\frac{\varepsilon A^3}{4(9\alpha^2)-1}(\cos 3\alpha t-\cos t) \end{aligned} \tag{1.107}$$

bulunur. Böylece bilinen metodlarla α sayısı

$$\alpha=\sqrt{\frac{10+7\varepsilon A^2+\sqrt{64+104\varepsilon A^2+49\varepsilon^2A^4}}{18}} \tag{1.108}$$

şeklinde olur. Küçük ε değerleri için α sayısı $\alpha=\sqrt{1+3\varepsilon A^2/4+O(\varepsilon^2)}$ olarak hesaplanabilir. Böylece (1.108) denklemi yeniden

$$v_1(t)=v_0(t)+v_1(t)=\left(-\alpha^2+1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)\frac{A}{\alpha^2-1}\cos\alpha t+\frac{\varepsilon A^3}{4(9\alpha^2)-1}\cos 3\alpha t \tag{1.109}$$

şeklinde yazılabilir. İlk yaklaşım, çözüm için yeterlidir ve

$$u_1(t)=v_0(t)+v_1(t)=\frac{3\varepsilon A^3}{4(\alpha^2-1)}\cos\alpha t+\frac{\varepsilon A^3}{4(9\alpha^2)-1}\cos 3\alpha t \tag{1.110}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.3.2 (Roozi ve ark., 2011) Bu örnekte ise kısmi diferensiyel denklemlerin HPM ile çözümünü göreceğiz. Kısmi diferensiyel denklem

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.111}$$

olup başlangıç şartları ise

$$\begin{aligned} &u(0,x)=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=-\sin x, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,x)=-\cos x, \end{aligned} \tag{1.112}$$

ile verilsin. Bu denklemi HPM ile çözmek için

$$(1-p)\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}\right)+p\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-U\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0 \tag{1.113}$$

veya

$$\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}+p\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-U\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0 \tag{1.114}$$

homotopileri kurulabilir. (1.115) denkleminin

$$U = U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \cdots \tag{1.115}$$

şeklinde bir seri çözümü olsun. (1.116) denklemi (1.115) eşitliğinde yerine yazılıp, p 'nin kuvvetlerine göre denklemler düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} &p^0:\frac{\partial^3 U_0}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}=0,\\ &p^1:\frac{\partial^3 U_1}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 U_0}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4 U_0}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 U_0}{\partial x^4}-U_0\frac{\partial U_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\frac{\partial U_0}{\partial x}=0,\\ &p^2:\frac{\partial^3 U_2}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 U_1}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}-U_0\frac{\partial U_1}{\partial t}-U_1\frac{\partial U_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}\frac{\partial U_0}{\partial x}-\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\frac{\partial U_1}{\partial x}=0,\\ &\vdots\\ &p^j:\frac{\partial^3 U_j}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 U_{j-1}}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^4 U_{j-1}}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 U_{j-1}}{\partial x^4}-\sum_{k=0}^{j-1}U_k\frac{\partial U_{j-1-k}}{\partial t}-\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}\frac{\partial U_{j-1-k}}{\partial x}=0,\\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.116}$$

Başlangıç değerlerinden faydalanarak, başlangıç yaklaşımı

$$U_0 = u_0 = \cos x - t\sin x - \frac{t^2}{2}\cos x \tag{1.117}$$

alınırsa iterasyon formulü de kullanılarak

$$U_1 = \frac{t^3}{3!}\sin x + \frac{t^4}{4!}\cos x,$$
$$U_2 = -\frac{t^5}{5!}\sin x - \frac{t^6}{6!}\cos x,$$
$$U_3 = \frac{t^7}{7!}\sin x + \frac{t^8}{8!}\cos x,$$
$$\vdots$$

bileşenlerine ulaşılır. Böylece, çözüm

$$\begin{aligned} u &= U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \\ &= \cos x\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right) - \sin x\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1.118}$$

serisi şeklinde bulunurki bu çözümün kapalı hali olan $u = \cos(x+t)$ problemin kesin çözümüdür.

1.3.3. Homotopi Perturbasyon Metodunun Yakınsaklığı

Bu metodun yakınsaklığı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Çeşitli diferensiyel denklemlerin HPM ile çözümünün yakınsak olduğunu gösteren bazı çalışmaları burada vereceğiz.

Biazar ve Ghazvini (2009) kısmi diferensiyel denklemlerin HPM ile çözümlerinin yakınsak olduğunu göstermiştir ve çalışmalarında aşağıdaki teoremden faydalanmıştır.

Teorem 1.3.1 (Biazar ve Ghazvini, 2009) X ve Y birer Banach uzayı ve $N : X \to Y$ bir lineer olmayan dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\forall v, \tilde{v} \in X : \left\|N(v) - N(\tilde{v})\right\| \le \gamma \left\|v - \tilde{v}\right\|, \ 0 < \gamma < 1.$$

yazılabilir. Banach sabit nokta teoremine göre u gibi bir sabit nokta var ise bu noktada $N(u) = u$ sağlanır. HPM ile elde edilen seri çözüm ise

$$V_n = N(V_{n-1}), \ V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} u_i, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ile ifade edilebilir. $B_r(u) = \left\{u^* \in X \,\middle|\, \left\|u^* - u\right\| < r\right\}$ için $V_0 = v_0 = u_0 \in B_r(u)$ olmak üzere

i. $\left\|V_n - u\right\| \le \gamma^n \left\|v_0 - u\right\|,$

ii. $V_n \in B_r(u),$

iii. $\lim_{n\to\infty} V_n = u.$

yazılabilir. Bu teoremin bir uygulamasını aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 1.3.3. (Biazar ve Ghazvini, 2009) Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin içinde önemli bir role sahip olan Burgers denklemini ele alalım. Burgers denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\left[0,\frac{1}{2}\right) \tag{1.119}$$

şeklindedir ve bu denklemin başlangıç koşulu

$$u(x,0)=2x \tag{1.120}$$

olsun. Burgers denkleminin analitik çözümünün $u(x,t)=\dfrac{2x}{1+2t}$ olduğu bilinmektedir. (1.120) denklemini (1.121) başlangıç koşulu altında çözmek için HPM'ye göre

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)+p\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0, \tag{1.121}$$

veya

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}=p\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}-v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right). \tag{1.122}$$

homotopisi yazılır. (1.123) denkleminin çözümü

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots \tag{1.123}$$

olsun. (1.124) ifadesi (1.123) denkleminde yerine yazılır ve p'nin kuvvetlerine göre gruplanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&p^0:\frac{\partial v_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}=0,\\
&p^1:\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial t}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}=0,\ v_1(x,0)=0,\\
&p^2:\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=0,\ v_2(x,0)=0,\\
&\vdots\\
&p^j:\frac{\partial v_j}{\partial t}+\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial v_{k-j-1}}{\partial x}-\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}=0,\ v_j(x,0)=0.
\end{aligned} \tag{1.124}$$

(1.121) başlangıç değerini göz önüne alarak başlangıç yaklaşımı $v_0(x,t)=u_0(x,t)=2x$ alınırsa

$$v_j=\int_0^t\left(\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}-\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial v_{k-j-1}}{\partial x}\right)dt,\quad j=1,2,3,.... \tag{1.125}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Böylece seri çözümümün terimleri

$$u_1(x,t) = -4xt,$$
$$u_2(x,t) = 8xt^2,$$
$$u_3(x,t) = -16xt^3,$$
$$u_4(x,t) = 32xt^4,$$
$$u_5(x,t) = -64xt^5,$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,t) = (-1)^n 2^{n+1} xt^n,$$

bulunur. $N : \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ ve $V_n = N(V_{n-1})$ olsun. Bu takdirde

$$V_0 = v_0 = u_0, \quad V_n = \sum_{j=0}^{n} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{j} v_k \frac{\partial v_{j-k}}{\partial x} \right) dt, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{1.126}$$

ve $t \le \frac{\gamma}{2}$, $0 < \gamma < 1$, yazılır.

N'nin bir daralma olması HPM'nin yakınsaklığı için önemli bir koşuldur. Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\|v_0 - u\| = \left\| 2x - \frac{2x}{1+2t} \right\| = 4 \left\| \frac{xt}{1+2t} \right\|,$$
$$\|V_1 - u\| = \|u_0 + u_1 - u\| = 8 \left\| \frac{xt^2}{1+2t} \right\| \le 8 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left\| \frac{xt}{1+2t} \right\| = \gamma \|v_0 - u\|,$$
$$\|V_2 - u\| = \|u_0 + u_1 + u_2 - u\| = 16 \left\| \frac{xt^3}{1+2t} \right\| \le 16 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \left\| \frac{xt}{1+2t} \right\| = \gamma^2 \|v_0 - u\|,$$
$$\vdots$$
$$\|V_n - u\| = \left\| \sum_{j=0}^{n} u_j - u \right\| = 2^{n+2} \left\| \frac{xt^{n+1}}{1+2t} \right\| \le 2^{n+2} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^n \left\| \frac{xt}{1+2t} \right\| = \gamma^n \|v_0 - u\|.$$

Buradan $\lim_{n\to\infty} \|V_n - u\| \le \lim_{n\to\infty} \gamma^n \|v_0 - u\| = 0$ ve $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{2x}{1+2t}$ bulunur ki bu çözüm problemin analitik çözümüdür.

HPM'nin yakınsaklığı ile ilgili bir başka çalışma Jafari ve ark. (2010) tarafından yapılmıştır. Jafari ve arkadaşları (2010) $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin u'ya yakınsaması için gerek ve yeter şartın

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{1.127}$$

şeklinde tanımlanan kısmi toplamlar dizisinin u'ya yakınsaması olduğunu belirtmişler ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 1.3.2 (Jafari ve ark., 2010) $n = 0,1,2,...$ sayıları için (1.128) denkleminin çözümünde kullanılacak $s_n(x)$ ardışık iterasyonlarını oluşturmak için

$$s_0(x) = f(x),$$

$$s_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) s_n(t) dt.$$

iterasyon şeması göz önüne alınsın. Uygulamalarda

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,t) dx dt = B^2 < \infty \tag{1.128}$$

olsun ve $f(x) \in L^2(a,b)$ alınsın. Bu takdirde $|\lambda| < \frac{1}{B}$ ise yukarıdaki iterasyon $L^2(a,b)$ uzayında (1.128) denkleminin çözümüne yakınsar. Bu teoremin bir uygulaması aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 1.3.4 (Jafari ve ark., 2010) Aşağıdaki integral denklemi verilsin:

$$u(x) = \sqrt{x} + \lambda \int_0^1 xtu(t) dt. \tag{1.129}$$

Bu denklemin iterasyon formülü

$$s_{n+1}(x) = \sqrt{x} + \lambda \int_0^1 (xt) s_n(t) dt \tag{1.130}$$

olur. Başlangıç koşulu ise

$$u_0(x) = \sqrt{x}, \tag{1.131}$$

alınarak (1.130) denkleminden

$$u(x) = \sqrt{x} + p\lambda \int_0^1 (xt) u(t) dt \tag{1.132}$$

homotopisi kurulur. (1.131) seri çözümü (1.141) ifadesinde yerine yazılırsa

$$p^0 : u_0(x) = \sqrt{x},$$

$$p^1 : u_1(x) = \lambda \int_0^1 (xt)\sqrt{t}\,dt = \frac{2\lambda x}{5},$$

$$p^2 : u_2(x) = \lambda \int_0^1 (xt)\frac{2\lambda t}{5}\,dt = \frac{2\lambda^2}{15}x,$$

$$p^3 : u_3(x) = \lambda \int_0^1 (xt)\frac{2\lambda^2}{15}\,tdt = \frac{2\lambda^3}{45}x,$$

$$\vdots$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu şekilde hesaplamaya devam edilirse

$$s_n(x) = \sqrt{x} + \left[\frac{2}{5.3^0}\lambda + \frac{2}{5.3^1}\lambda^2 + \frac{2}{5.3^2}\lambda^3 + \cdots\right] = \sqrt{x} + \left[\frac{6}{5}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^i x\right] \tag{1.133}$$

genel ifadesi bulunur. Bu ise $|\lambda| < 3$ için yakınsaktır. Diğer taraftan Teorem 1.3.2 den

$$\int_0^1\int_0^1 k^2(x,t)\,dxdt = \int_0^1\int_0^1 (xt)^2\,dxdt = \frac{1}{9} = B^2 \tag{1.134}$$

bulunur ve $|\lambda| < 3$ için (1.139) denklemi de yakınsaktır.

1.4. Ortogonal Polinomlar

İlk olarak 1835 yılında Murphy ortogonal polinomları tanımlamıştır. Ortogonal polinomların önemini belirten kişi ise Chebyshev'dir. 1855 yılında yaptığı çalışma, Fourier serilerinin, sürekli kesirler teorisinin ve yaklaşım teorisinin oluşturduğu bir çalışmadır. Biz, bu çalışmada oldukça yaygın kullanılan birinci tür Chebyshev polinomlarından ve diğer ortogonal polinomların özelliklerinden kısaca bahsedeceğiz.

Gauss kendisine ait olan yaklaşık quadratürle ilgili teorisinde $\log\left((1+x)/(1-x)\right)$ fonksiyonun sürekli kesirlerle elde edilen seri açılımına yakınsayan polinomlar kullanmıştır. Daha sonra Jacobi (1826) bu polinomların Legendre polinomları olduğunu belirtmiş ve bu polinomların ortogonalliğinin temel rolü oynadığını belirtmiştir.

Bazı ortogonal polinomlar ve özellikleri aşağıdaki gibidir.

1.4.1. Chebyshev Polinomları

Literatürde çeşitli türden Chebyshev polinomları bilinmektedir. Bunlar arasında en çok bilinenleri birinci tür $T_n(x)$ Chebyshev polinomlarıdır.

Tanım 1.4.1. n'inci dereceden x'e göre birinci tür $T_n(x)$ Chebyshev polinomları $x=\cos\theta$ olmak üzere

$$T_n(x)=\cos n\theta \tag{1.135}$$

olarak tanımlanır. x değişkeni $[-1,1]$ aralığında seçilirse buna karşılık gelen θ değişkeni de $[0,\pi]$ aralığında seçilmiş olur. Bu değerler karşılıklı yönlerde geçiş sağlarlar, yani $x=-1$ noktası $\theta=\pi$'ye karşılık gelirken, $x=1$ noktası da $\theta=0$ değerine karşılık gelmektedir.

$T_n(x)$ Chebyshev polinomları $\cos n\theta$ fonksiyonunun açılımından faydalanarak bulunabildiği gibi

$$\cos n\theta+\cos(n-2)\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta \tag{1.136}$$

trigonometrik eşitsizliğinden de bulunabilir. (1.144) tanımından faydalanarak

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\quad n=2,3,.... \tag{1.137}$$

temel rekürans bağıntısı elde edilir. Başlangıç şartları için

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x, \tag{1.138}$$

değerleri kullanılarak bütün $\{T_n(x)\}$ değerleri etkin bir şekilde elde edilmiş olur. (Fox ve Parker, 1968)

Fonksiyonların ortogonalliği ile ilgili olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz

Tanım 1.4.2. $L_2[a,b]$ uzayında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları verilsin. Eğer, $w(x)$ sürekli ve negatif olmayan bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $[a,b]$ aralığında

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx=0 \tag{1.139}$$

eşitliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara ortogonal fonksiyonlar denir. Kolaylık olması açısından burada iç çarpım simgesi kullanılırsa

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx, \tag{1.140}$$

yazılabilir. Burada w, f ve g, $[a,b]$ aralığında x'in birer fonksiyonudur. Böylece (1.148) eşitliği kullanılarak $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının ortogonal olması için gerek ve yeter şart

$$\langle f,g\rangle=0, \tag{1.141}$$

olmasıdır denilebilir. (El Attar, 2006)

$T_i(x)$ Chebyshev polinomları, $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere $[a,b]=[-1,1]$ aralığında

$$\begin{aligned}\langle T_i,T_j\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int_{0}^{\pi}\cos i\theta\cos\, j\theta d\theta.\end{aligned} \tag{1.142}$$

yazılabilir. Ayrıca $i\neq j$ için,

$$\int_0^{\pi}\cos i\theta\cos\, j\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos(i+j)\theta+\cos(i-j)\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j}+\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j}\right]_0^{\pi}=0.$$

eşitliği de açıktır. Böylece

$$\langle T_i,T_j\rangle=0,\quad (i\neq j) \tag{1.143}$$

yazılabilir ve $\{T_i(x),\ i=0,1,2,...\}$ dizisi $[-1,1]$ aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$'e göre olan ortogonal bir polinom dizisidir denilir.(Mason ve Handscomb, 2003)

Bazı durumlarda $[0,1]$ aralığında işlem yapmak $[-1,1]$ aralığında işlem yapmaktan daha uygun olabilir. Bu durumda $s=2x-1$ veya $x=\frac{1}{2}(1+s)$ dönüşümü kullanılarak $[0,1]$ aralığında n'inci dereceden birinci türden ötelenmiş $T_n^*(x)$ Chebyshev polinomları

$$T_n^*(x)=T_n(s)=T_n(2x-1) \tag{1.144}$$

şeklinde elde edilir. Buradan ötelenmiş birinci tür Chebyshev polinomları için başlangıç koşulları

$$T_0^*(x)=1,\quad T_1^*(x)=2x-1, \tag{1.145}$$

bulunur. Daha genel haliyle ele alınacak olursa Chebyshev polinomları herhangi bir sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlanabilir. Bunun için $[-1,1]$ aralığına uygun yeni değişken s olmak üzere bu değişken

$$s=\frac{2x-(a+b)}{b-a} \tag{1.146}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan da görüldüğü gibi $[a,b]\equiv[0,1]$ seçilmesi durumunda $s=2x-1$ bulunur ki, bu dönüşümle bir önceki ele alınan ötelenmiş Chebyshev polinomları elde edilmiş olur. (Andrews, 1985)

1.4.1.1. Herhangi bir fonksiyonun Chebyshev serisine açılması

Chebyshev serileriyle ile ilgili formülleri elde etmeden önce bu polinomların tam bir polinomlar kümesi oluşturduğunu söylemek gerekir. $[a,b]$ kapalı aralığında pozitif, integrallenebilir ağırlık fonksiyonunu ele alalım. Böyle bir ağırlık fonksiyonu her zaman lineer bağımsız ortogonal polinom kümeleri meydana getirir. Bu kümeler ise $n=0,1,2,..$ için x^n'in bütün kuvvetlerini içerir. (Philips, 2003)

Teorem 1.4.1. (Snyder, 1966) $\{\phi_n(x)\}$ pozitif, integrallenebilir ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinomların bir dizisi olsun. Bu polinomların sonlu $[a,b]$ kapalı aralığında ortogonal olduğu kabul edilirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = C_n\delta_{mn}. \tag{1.147}$$

Burada C_n sabit katsayılar ve δ_{mn} Dirac-Delta fonksiyonudur. Böylece $\{\phi_n(x)\}$, $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların bir tam kümesidir.

1.4.2. Legendre Polinomları

Fransız matematikçi Adrien Marie Legendre tarafından bu polinomlar çeşitli matematiksel ve fiziksel problemlerde ele alınmıştır. Legendre diferensiyel denkleminin çözümü olan bu polinomlar Laplace denkleminin, Helmholtz denkleminin ve benzer küresel kutupsal koordinatlardaki diferensiyel denklemlerin değişkenlerine ayrılması işlemlerinde de ortaya çıkmaktadır.

Legendre diferensiyel denklemi v sabit bir sayı olmak üzere

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+v(v+1)y=0, \tag{1.148}$$

olarak verilmiştir. Bu denklem klasik ve quantum fiziğinde önemli bir yere sahiptir. Legendre denklemi klasik mekanikte, elektromanyetik teoride, ısı ve quantum mekaniğinde küresel koordinatlarla beraber sıkça karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemin

çözümü $P_n(x)$, n'inci dereceden bir polinom olmak üzere Legendre polinomlarıdır ve aşağıdaki gibi elde edilir

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.149}$$

Bu denklemde $M = n/2$ veya $(n-1)/2$'ye eşit olan bir tamsayıdır. İlk birkaç Legendre polinoumu aşağıdaki şekilde verilebilir

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$\vdots$$

$\{P_n(x)\}$ ortogonal Legendre polinomlarının bir kümesi olsun. Bu kümenin bir elemanı olan Legendre polinomları $-1 < x < 1$ aralığında ortogonaldirler ve

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & m = n \ \ ise \\ 0 & m \neq n \ \ ise \end{cases} \tag{1.150}$$

özelliği vardır. (Chow, 2000)

$f(x)$ fonksiyonu $(-1,1)$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{1.151}$$

yazılabilir. c_n, $n = 0,1,2,...$ katsayılarını elde etmek için (1.160) denkleminin her iki tarafı $P_n(x)$ ile çarpılır x'e göre -1'den 1'e integre edilirse

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) dx \tag{1.152}$$

bulunur. Legendre polinomlarının ortogonallik özelliği ve ağırlık fonksiyonunun 1 olduğu dikkate alınırsa

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}c_n$$

elde edilir. Böylece c_n, $n = 0,1,2,...$ katsayıları

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \tag{1.153}$$

olacaktır. (Scanlon, 1987)

Yeni ortogonal polinomları tanıtmadan önce bu polinomların tanımında kullanılan hipergeometrik fonksiyonlar hakkında biraz bilgi vereceğiz.

1.4.3. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Elemanter fonksiyonlar ve özel fonksiyonların birbirleriyle olan ilişkilerinden dolayı bazen genel fonksiyonlar tanımlanabilir ve özel fonksiyonlar bu genel fonksiyonların özel hali olarak ele alınabilirler. Bu yapıdaki genel fonksiyonlar aslında tanımlanmış ve hipergeometrik tipteki fonksiyonlar olarak adlandırılmışlardır. Bu fonksiyonların çeşitli türleri bulunmasına karşın en temel olanı standart hipergeometrik fonksiyon ve bileşik hipergeometrik fonksiyonlardır. Ayrıca genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların MacRobert E-fonksiyonu ve Meijer G-fonksiyonu şeklinde başka genelleştirmeleri de mevcuttur.

Hipergeometrik fonksiyonlar teorisinin en büyük gelişimi 1812 yılında Gauss tarafından yapılmış ve notlarında yayınlanmıştır. Daha önce Euler ve diğerleri tarafından hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili çalışmalar mevcutsa da bu fonksiyonları tanımlayan seriler hakkındaki ilk sistematik çalışma Gauss'a aittir.

1.4.3.1. Pochhammer Sembolü

Çarpma formülleri, faktoriyeller ve gamma fonksiyonları ile ilgili

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad n = 1,2,3,... \tag{1.154}$$

kısaltması yapılabilir. Bu şekildeki kısaltmaya Pochhammer sembolü denilmektedir. Gamma fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak bu sembol

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n = 0,1,2,.... \tag{1.155}$$

şeklindede tanımlanabilir. $(a)_n$ sembolü yerine bazen (a,n) şeklinde tanımlanan Appel sembolü de kullanılmaktadır. Hipergeometrik fonksiyonların gösteriminde Pochhammer sembolü oldukça kullanışlıdır.

1.4.3.2. $F(a,b;c;x)$ **Fonksiyonu**

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{1.156}$$

şeklinde tanımlanan seriye hipergeometrik seri adı verilir. $a=1$ ve $b=c$ alınması durumunda bu seri

$$1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{1.157}$$

şeklinde elemanter geometrik seriye indirgendiği için bu şekilde adlandırılmışlardır. (1.165) eşitliğindeki genel u_n terimini ele alarak ve bu terime oran testi uygulanarak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}x^{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!}\frac{(c)_n n!}{(a)_n(b)_n x^n}\right|$$
$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\right|$$

bulunur. Limit özellikleri kullanılarak ve a,b veya c sayılarından hiçbirinin sıfır veya negatif bir sayı olmadığını kabul ederek

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x| \tag{1.158}$$

bulunur. Sonuçta $|x|<1$ için (1.165) serisinin yakınsadığı, $|x|>1$ için ise ıraksadığı bulunmuş olur. $|x|=1$ için $c-a-b>0$ olması durumunda bu serinin yakınsak olduğu gösterilebilir. Böylece

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!},\quad |x|<1 \tag{1.159}$$

hipergeometrik serileri tarafından tanımlanan bu fonksiyona hipergeometrik fonksiyon adı verilir. Ayrıca bu sembol

$${}_2F_1(a,b;c;x)=F(a,b;c;x) \tag{1.160}$$

şeklinde de verilebilir. Burada 2 ve 1 sayısı sırasıyla pay ve paydadaki terim sayısını belirtmektedir. Noktalı virgülle ayrılan ifadede a ve b paydaki, c'de paydadaki ifadeleri göstermektedir. Eğer c bir negatif sayı veya sıfıra eşitse (1.168) şeklinde bir seri dolayısıyla $F(a,b;c;x)$ fonksiyonu tanımlı değildir. Ayrıca a veya b'nin her ikisi birden bir negatif sayı veya sıfıra eşitse bu seri sonludur ve bütün x değerleri için

yakınsaktır. Eğer $a=-m,\ (m=0,1,2,...)$ alınırsa; bu takdirde $n>m$ için $(-m)_n=0$ olur. Bu ise (1.168) eşitliğini

$$F(-m,b;c;x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-m)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<\infty \tag{1.161}$$

hipergeometrik polinomlarına indirger.

Aşağıda verilen ikinci merteben diferensiyel denklem

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \tag{1.162}$$

Gauss'un hipergeometrik denklemi olarak adlandırılmaktadır. Bu denklem bu şekilde adlandırılmıştır çünkü

$$y_1=F(a,b;c;x),\ \ c\neq 0,-1,-2,... \tag{1.163}$$

fonksiyonu denklemin bir çözümüdür. (1.172) denkleminin bir çözüm olduğunu görmek için $F(a,b;c;x)$ serisini (1.171) denkleminde yerine yazmak yeterlidir.

Hipergeometrik fonksiyonların integral gösterimi de mevcuttur. Bunu göstermek için Beta fonksiyonunun

$$B(n+b,c-b)=\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt,\quad c>b>0 \tag{1.164}$$

gösterimi kullanılacaktır. Ayrıca

$$\frac{(b)_n}{(c)_n}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt,\quad c>b>0 \tag{1.165}$$

eşitliği mevcuttur. (1.174) denklemi (1.168) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}F(a,b;c;x)&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt,\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(xt)^n\right)dt\end{aligned} \tag{1.166}$$

bulunur.

$$\frac{(a)_n}{n!}=\binom{-a}{n}(-1)^n \tag{1.167}$$

eşitliği kullanılarak (1.175) eşitliğindeki seri toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(xt)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-a}{n}(-xt)^n=(1-xt)^{-a} \tag{1.168}$$

şeklinde bulunan, ($|xt|<1$), binomial seriler tanımlanabilir. Böylece (1.175) eşitliğinden integral gösterimi

$$F(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt,\ \ c>b>0 \tag{1.169}$$

elde edilmiş olur.

Hipergeometrik fonksiyonlar, matematik analiz ve uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Pek çok elemanter ve özel fonksiyonlar bu fonksiyonların özel bir hali olarak yer almaktadır. Örnek olarak bu fonksiyonların özel bir hali

$$F(1,b;b;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

bulunur ki buradan

$$F(1,b;b;x)=(1-x)^{-1} \tag{1.170}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\arcsin x=xF(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) \tag{1.171}$$

ve

$$\log(1-x)=-xF(1,1;2;x) \tag{1.172}$$

bulunur. Ayrıca bunlara ek olarak $P_n(x)$, n'inci dereceden Legendre polinomu olmak üzere

$$P_n(x)=F(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}) \tag{1.173}$$

eşitliği mevcuttur. (Suetin, 2001)

1.4.4. Jacobi Polinomları

Eğer

$$c_n=\int_a^b x^n d\alpha(x)$$

katsayıları verilen $d\alpha(x)$ ifadesinden elde edilen sayılar ise

$$p_n(x)=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} \tag{1.174}$$

polinomları $d\alpha(x)$'e göre ortogonal fonksiyonlardır. İlk bakışta polinomların matrisler yardımıyla gösterimi biraz zor gözükebilir. Ama Wilson (1978,1991) yıllarında

göstermiştir ki çoğu özel durumlarda $p_n(x)$'in hipergeometrik gösterimini elde etmek determinantlar ile daha kolay olmaktadır.

Lemma 1.4.1. (Andrews ve ark., 1999) $\{\phi_n\}_0^\infty$ bağımsız fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu takdirde $\{p_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi

$$p_n(x) = C_n \begin{vmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{0,1} & \mu_{0,2} & \cdots & \mu_{0,n} \\ \mu_{1,0} & \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \mu_{n-1,2} & \cdots & \mu_{n-1,n} \\ \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{vmatrix} \tag{1.175}$$

olarak verilir. Burada C_n sabittir ve $m < n$ için

$$\int_a^b p_n(x)\phi_m(x)d\alpha(x) = 0, \tag{1.176}$$

bağıntısı sağlanır ve

$$\mu_{i,j} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)d\alpha(x), \tag{1.177}$$

olarak verilmektedir.

Corollary 1.4.1. (Andrews ve ark., 1999) $\{\phi_n\}_0^\infty$ ve $\{\psi_n\}_0^\infty$ iki dizi olsun. $p_n(x)$ fonksiyonları

$$\mu_{i,j} = \int_a^b \psi_i\phi_j d\alpha(x),$$

olmak üzere (1.184)'deki gibi tanımlansın. Bu takdirde $m \le n-1$ için

$$\int_a^b p_n(x)\psi_m(x)d\alpha(x) = 0,$$

bulunur. Şimdi özel olarak $(-1,1)$ aralığında ağırlık fonksiyonu $\alpha'(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ olması durumunu ele alalım. Buradaki amaç $p_n(x)$ fonksiyonlarını elde etmektir. Bunun için $\phi_k(x) = (1-x)^k$ ve $\psi_k(x) = (1+x)^k$ seçilir. ϕ_k ve ψ_k'nın k'ıncı mertebeden diğer seçimlerinden de aynı sonuçlar elde edilse de bu seçim işleri kolaylaştırmaktadır. Bu durumda

$$\mu_{i,j} = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j}\,dx$$
$$= 2^{\alpha+\beta+1+i+j}\,\frac{\Gamma(\alpha+1+j)\Gamma(\beta+1+i)}{\Gamma(\alpha+\beta+2+i+j)} \tag{1.178}$$
$$= 2^{\alpha+\beta+1+i}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1+i)}{\Gamma(\alpha+\beta+2+i)}\,\frac{2^j(\alpha+1)_j}{(\alpha+\beta+2+i)_j}$$

bulunur.

Teorem 1.4.2. (Andrews ve ark., 1999) (1.187) denkleminde verilen $\mu_{i,j}$ katsayıları ile beraber (1.184) polinomlarının sabit çarpımı olan Jacobi polinomları

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \tag{1.179}$$

şeklinde bulunabilir.

Jacobi polinomları şu şekilde de tanımlanabilir. Eğer a veya b sayılarından biri negatifse yani $-n$ gibi bir sayıya eşitse $F(a,b;c;x)$ hipergeometrik fonksiyonu bir polinom haline gelir ve n'inci dereceden Jacobi polinomu olarak adlandırılır

$$F(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(b)_k}{(c)_k} x^k. \tag{1.180}$$

Genel olarak $\alpha > -1,\ \beta > -1,$ olmak üzere birçok fiziksel ve matematiksel uygulaması bulunan $w(x) = (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}$ şeklinde bir ağırlık fonksiyonu bulunan polinomlar Jacobi polinomları olarak adlandırılmaktadır. Özel olarak $a = -1$ ve $b = 1$ alınırsa, $\alpha > -1, \beta > -1$ için Jacobi polinomları $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre $[-1,1]$ aralığında ortogonal polinomlardır. Burada kullanılan genel lineer dönüşüm $t = -1 + 2\dfrac{x-a}{b-a}$ şeklindedir. $\alpha = \beta$ olması durumunda ise $w(x) = (1-x^2)^{\alpha}$ olur ve bu polinomlar ultraküresel (spherical) polinomlar olarak adlandırılırlar. Ultraküresel polinomların en çok bilinen iki özel hali vardır. $\alpha = \beta = 0$ olması durumunda bu polinomlar Legendre polinomlarını, $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ olması durumunda ise bu polinomlar Chebyshev polinomlarını vermektedirler.

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ şeklinde verilen Jacobi polinomlarının üreteç fonksiyonu

$R = (1-2xr+r^2)^{1/2}$

olmak üzere

$$F(x,r)=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-r+R)^{-\alpha}(1-r+R)^{-\beta} \tag{1.181}$$

şeklindedir. Yani $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları her zaman

$$F(x,r)=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-r+R)^{-\alpha}(1-r+R)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)r^n. \tag{1.182}$$

eşitliğini sağlar. Bu denklemde bu polinomların ortogonalliği sorgulanabilir. $\alpha=\beta=0$ olması durumunda $P_n(x)$ Legendre polinomlarının elde edildiği bilinmektedir. Legendre ise bu polinomlar için aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu göstermiştir

$$\frac{1}{\sqrt{rs}}\log\frac{1+\sqrt{rs}}{1-\sqrt{rs}}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2xr+r^2}\sqrt{1-2xs+s^2}}$$
$$=\int_{-1}^{1}\sum_{m,n}P_n(x)P_m(x)r^n s^m dx.$$

Bu ise ortogonal olduklarını göstermektedir. Chebyshev (1870) aynı metodu Jacobi polinomlarına uygulamıştır. Benzer bir ispat da Hermite (1890) tarafından verilmiştir. Hermite, Legendre polinomları için bir ispat yapmaya çalışmış ama bulduğu ispatın Jacobi polinomları için de geçerli olduğu görülmüştür.

Yukarıda verilen bilgilerin ışığında

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}^2dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.183}$$

formülü yazılabilir. Buradan Jacobi polinomlarının $[-1,1]$ aralığında $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-1}^{1}w(t)P_m^{(\alpha,\beta)}(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt=\begin{cases}\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & n=m\\ 0 & ,n\neq m\end{cases} \tag{1.184}$$

özelliği sağladığı bulunabilir (Szegö, 1939).

1.4.5. Gegenbauer Polinomları

Leopold Gegenbauer tarafından isimlendirilen bu polinomlar $C_n^{\alpha}(x)$ ile gösterilirler. Ultraküresel polinomlar olarak da bilinmektedirler. $[-1,1]$ aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x)=(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$'e göre ortogonaldirler. Legendre ve Chebyshev polinomlarının genel bir hali olan bu polinomlar, Jacobi polinomlarının ise özel bir halidir. Gegenbauer polinomları

$$(1-x^2)y''-(2\alpha+1)xy'+n(n+2\alpha)y=0 \tag{1.185}$$

şeklinde verilen Gegenbauer diferensiyel denkleminin özel bir çözümüdür (Hazewinkel, 2001). Kolayca görülebileceği gibi $\alpha=1/2$ alınması durumunda bu denklem Legendre denklemine, dolayısıyla Gegenbauer polinomları da Legendre polinomlarına dönüşmektedir. Gegenbauer polinomları

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\alpha}(x)t^n \tag{1.186}$$

şeklinde verilen üreteç fonksiyonunun terimleri olarak elde edilebilir (Stein ve Weiss, 1971). Ayrıca bu polinomlar aşağıdaki rekürans bağıntısı yardımıyla da elde edilebilir (Hazewinkel,2001)

$$\begin{aligned} &C_0^{\alpha}(x)=1,\\ &C_1^{\alpha}(x)=2\alpha x,\\ &\vdots\\ &C_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n}\Big[2x(n+\alpha+1)C_{n-1}^{\alpha}(x)-(n+2\alpha-2)C_{n-2}^{\alpha}(x)\Big]. \end{aligned} \tag{1.187}$$

Gegenbauer polinomları Gaussian hipergeometrik serilerinin özel bir hali olarak

$$C_n^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,2\alpha+n;\alpha+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right) \tag{1.188}$$

şeklinde gösterilebilirler (Abramowitz ve Stegun, 1965). Bu polinomlar Jacobi polinomlarının özel bir halidir ve aralarında

$$C_n^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{(\alpha+\frac{1}{2})_n}P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}(x) \tag{1.189}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Gegenbauer polinomları sabit bir α değeri için [–1,1] aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x)=(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$'e göre ortogonaldirler ve

$$\int_{-1}^{1}C_n^{\alpha}(x)C_m^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx=\begin{cases}\dfrac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)\left[\Gamma(\alpha)\right]^2}, & n=m \ \ ise\\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & n\neq m \ \ ise\end{cases}. \tag{1.190}$$

bağıntısını sağlarlar.

2. YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARININ ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE MODİFİKASYONU

Bu bölümde, genel hatlarını verdiğimiz yaklaşık çözüm metodlarından Adomian Ayrışım metodu (ADM), Varyasyonel İterasyon metodu (VIM) ve Homotopi Perturbasyon metodunun (HPM) çözüm prosedürlerinde, $[-1,1]$ aralığında ortogonal Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomlarının kullanılmasıyla yöntemlerin modifikasyonunu ve çözümlerin iyileştirilmesini inceleyeceğiz.

Burada, çalışmanın asıl amacı olan Chebyshev ve Legendre polinomlarının daha genel hali olan Gegenbauer ve Jacobi polinomları kullanılmış ve önceki çalışmalardan daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması için çizelgeler ve grafikler eklenmiştir. Ayrıca diğer yaklaşık çözüm metodlarından HPM'nin çözüm prosedüründe Legendre ve Chebyshev polinomları kullanılmıştır. VIM'nin modifikasyonunda ise Legendre ve Chebyshev ortogonal polinomlarının yanı sıra lineer olmayan terimler için ADM metoundan hatırladığımız Adomian polinomları da kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların etkinliği çizelgeler ve grafikler yardımıyla gösterilmiştir.

2.1. Gegenbauer ve Jacobi Polinomlarıyla Adomian Ayrışım Metodu

Bu bölümde Adomian Ayrışım metodunun çözüm prosedüründe Gegenbauer ve Jacobi polinomlarının kullanımını vereceğiz. Bunun için öncelikle bir diferensiyel denklemin ADM ile çözülebilmesi için verilen diferensiyel denklemi ilk olarak

$$L(u)+N(u)+R(u)=g(x) \tag{2.1}$$

şeklinde ele almıştık. Genel olarak eğer $g(x)$, Adomian metodunun çözüm prosedüründe kullanılamayan bir fonksiyon ise, m keyfi bir sabit olmak üzere $g(x)$ fonksiyonu m'inci dereceden bir Taylor serisine aşağıdaki gibi açılır

$$g(x)\approx\sum_{n=0}^{m}\frac{g^{n}(0)}{n!}x^{n}. \tag{2.2}$$

Biz bu çalışmamızda ise $g(x)$ fonksiyonunu terimleri $C_n^{\alpha}(x)$ ortogonal Gegenbauer polinomları olan

$$g(x)\approx\sum_{n=0}^{m}a_nC_n^{\alpha}(x). \tag{2.3}$$

seriyi kullanacağız. Gegenbauer polinomlarının terimlerinin

$$
\begin{aligned}
&C_0^{\alpha}(x)=1,\\
&C_1^{\alpha}(x)=2\alpha x,\\
&C_2^{\alpha}(x)=2\alpha^2x^2-2\alpha x^2-\alpha,\\
&\vdots\\
&C_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n}\Big[2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{\alpha}(x)-(n+2\alpha-2)C_{n-2}^{\alpha}(x)\Big].
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

olduğunu biliyoruz. (2.3) denklemi çözüm prosedüründe yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&u_0=L^{-1}(a_0C_0^{\alpha}(x)+a_1C_1^{\alpha}(x)+a_2C_2^{\alpha}(x)+a_3C_3^{\alpha}(x)+\ldots)+\phi(x)\\
&u_1=-L^{-1}(Ru_0)-L^{-1}(Nu_0)\\
&u_2=-L^{-1}(Ru_1)-L^{-1}(Nu_1)\\
&\vdots\\
&u_{i-1}=-L^{-1}(Ru_i)-L^{-1}(Nu_i),\quad i=1,2,\ldots.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

elde edilir. Elde edilen bu terimler, m pozitif bir sayı ve aranan yaklaşık çözümün mertebesini göstermek üzere

$$u(x)=\sum_{n=0}^{m}u_n \tag{2.6}$$

seri açılımında yerine konularak yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

Adomian ayrışım metodununun modifikasyonu için kullanacağımız $[-1,1]$ aralığında ortogonal polinomlardan bir diğeri ise Jacobi polinomlarıdır. $\alpha,\beta>-1$ için $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ortogonal Jacobi polinomları olmak üzere $g(x)$ fonksiyonu terimleri Jacobi polinomları olan bir seriye

$$g(x)\approx\sum_{n=0}^{m}b_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.7}$$

şeklinde açılır ki buradaki Jacobi polinomları

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\left(\frac{z-1}{2}\right) \tag{2.8}$$

bağıntısıyla hesaplanmaktadır. (2.7) denklemi çözüm prosedüründe yerine yazılırsa seri çözümün terimleri

$$u_0 = L^{-1}(b_0 P_0^{(\alpha,\beta)}(x) + b_1 P_1^{(\alpha,\beta)}(x) + b_2 P_2^{(\alpha,\beta)}(x) + b_3 P_3^{(\alpha,\beta)}(x) + \ldots) + \phi(x)$$
$$u_1 = -L^{-1}(Ru_0) - L^{-1}(Nu_0)$$
$$u_2 = -L^{-1}(Ru_1) - L^{-1}(Nu_1) \qquad (2.9)$$
$$\vdots$$
$$u_{i-1} = -L^{-1}(Ru_i) - L^{-1}(Nu_i), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

şeklinde olur. Elde edilen bu terimler,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{m} u_n \qquad (2.10)$$

ifadesinde yazılarak yaklaşık çözüm elde edilmiş olur (Çenesiz ve Kurnaz, 2011). Bu metodun etkinliğini göstermek için aşağıdaki uygulamalar verilmiştir

2.1.1. Metodun Uygulanması

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan adi diferensiyel denklemler önerilen metod ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar daha önce önerilen ortogonal Chebyshev ve Legendre polinomlarının kullanımından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Problemin nümerik sonuçları için Maple 13 paket program kullanılmıştır.

Örnek 2.1.1. İlk olarak Hosseini (2006) tarafından verilen $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı aşağıdaki lineer diferensiyel denklemi ele alalım:

$$u'' + xu' + x^2u^3 = (2 + 6x^2)e^{x^2} + x^2e^{3x^2} \qquad (2.11)$$

Bu denklemin başlangıç koşulları

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \qquad (2.12)$$

olarak verilmiştir. Bu denklemin gerçek çözümünün $u(x) = e^{x^2}$ olduğu bilinmektedir. Adomian ayrışım metoduyla problemin çözümünü bulmak için (2.11) denklemini (2.1) denklemine dönüştürerek

$$L(u) + N(u) + R(u) = g(x) \qquad (2.13)$$

$L = \dfrac{d^2}{dx^2}$, $R = x\dfrac{d}{dx}$, $N(u) = x^2u^3$ ve $g(x) = (2 + 6x^2)e^{x^2} + x^2e^{3x^2}$ bulunur. Buradaki lineer olmayan terimler için kullanılacak Adomian polinomlarını (Ghorbani (2009) ve Ghorbani ve Nadjafi (2007))

$$
\begin{aligned}
&A_0 = x^2 {u_0}^3, \\
&A_1 = x^2 \left(3{u_0}^2 u_1\right), \\
&A_2 = x^2 \left(3{u_0}^2 u_2 + 3u_0 {u_1}^2\right), \\
&A_3 = x^2 \left(3{u_0}^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + {u_1}^3\right), \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

şeklinde verebiliriz. Burada $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$ operatörü ikinci mertebeden türev operatörü seçildiği için tersi olan $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dx^2$ operatörü iki katlı integral olarak alınmalıdır. Ters operatörü, (2.13) eşitliğinin her iki tarafına uygularsak

$$u = L^{-1}\left(g(x)\right) - L^{-1}\left(N(u)\right) - L^{-1}(R(u)) \tag{2.15}$$

bulunur. Burada $g(x) = (2+6x^2)e^{x^2} + x^2 e^{3x^2}$ fonksiyonunun integrali alındığında karşımıza $erf(x)$ hata fonksiyonu çıkar ki buradan bir nümerik sonuç elde etmek imkansızdır. $erf(x)$ hata fonksiyonu $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ olarak tanımlanmaktadır. Bunun için bu metodun çözüme ulaşabilmesi için bir modifikasyona ihtiyaç vardır. Burada ilk akla gelecek işlem bu fonksiyonun seriye açılmasıdır. Hosseini (2006) $g(x)$ fonksiyonu için Taylor seri açılımını ve Chebyshev ortogonal polinomlarını kullanmış, Liu (2009) ise $g(x)$ fonksiyonu için Legendre ortogonal polinomlarını kullanmışlardır. Biz ise burada bu polinomların en genel hali olan Gegenbauer ve Jacobi ortogonal polinomlarını kullanacağız. Gegenbauer polinomlarının kullanıldığı ve ilk yedi terimini aldığımız seri açılımını aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^{6} a_i C_i^{\alpha}(2x-1), \quad 0 \le x \le 1. \tag{2.16}$$

Burada a_i katsayılarını bulmak için Gegenbauer polinomlarının ortogonalliğinden faydalanarak

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} g(0.5x+0.5) C_i^{\alpha}(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx}{\int_{-1}^{1} \left[C_i^{\alpha}(x)\right]^2 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx} \tag{2.17}$$

yazabiliriz. Burada $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ Gegenbauer polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. Ayrıca verilen problem $[0,1]$ aralığında olduğu için $[-1,1]$ aralığında ortogonal olan Gegenbauer polinomlarından faydalanmak için $t=0.5x+0.5$ şeklinde bir değişken dönüşümü de yapılmıştır. Sayısal bir değer elde etmek için $\alpha=1$ gibi özel bir değer aldığımızda $g(x)$ fonksiyonunun Gegenbauer polinomlarından faydalanılarak elde edilen seri açılımı

$$g(x)\approx 2.11-4.47x+58.34x^2-230.68x^3+533.35x^4-575.29x^5+258.25x^6 \qquad (2.18)$$

şeklinde bulunur. Elde ettiğimiz bu seri açılım (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u_0 &= L^{-1}(2.11-4.47x+58.34x^2-230.68x^3+533.35x^4-575.29x^5+258.25x^6)+u(0)+u'(0)x \\
&= 1+1.05x-0.74x^3+4.86x^4+\ldots \\
u_1 &= -0.25x^4+0.11x^5+\ldots \\
u_2 &= 0.03x^6-0.01x^7+\ldots \\
&\vdots \\
u_6 &= 0.1\times 10^{-5}x^{14}-0.4\times 10^{-6}x^{15}+\ldots
\end{aligned} \qquad (2.19)$$

terimleri bulunur. Böylece Gegenbauer polinomlarından faydalanılarak elde edilen yaklaşık çözüm

$$u_g(x)=\sum_{i=0}^{6}u_i(x)=1+1.05x^2-0.74x^3+4.60x^4-11.42x^5+\ldots \qquad (2.20)$$

olur. Gegenbauer polinomlarının kullanıldığı seri açılımla gerçek çözüm arasındaki fark Çizelge 2.1'de verilmiştir. Ayrıca önerilen bu metodun etkinliğini göstermek için diğer ortogonal polinomların kullanıldığı seri açılımlarla elde edilen sonuçlar da aynı çizelgede birlikte verilmiştir.

Benzer şekilde $g(x)$ fonksiyonu terimleri ortogonal Jacobi polinomları olan yedi terimli

$$g(x)\approx\sum_{i=0}^{6}c_iP_i^{(\alpha,\beta)}(2x-1),\quad 0\le x\le 1, \qquad (2.21)$$

serisiyle birlikte de düşünülebilir. Bu serideki c_i katsayıları ise Jacobi polinomlarınının $[-1,1]$ aralığında ortogonal ve ağırlık fonksiyonu $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ olması durumu göz önünde bulundurularak

$$c_i = \frac{\int_{-1}^{1} g(0.5x+0.5)P_i^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx}{\int_{-1}^{1}\left[P_i^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx} \tag{2.22}$$

şeklinde elde edilebilir. Özel olarak $\alpha=\beta=1$ alınarak $g(x)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları yardımıyla seri açılımı

$$g(x) \approx 2.15 - 5.11x + 60.74x^2 - 231.09x^3 + 521.77x^4 - 556.23x^5 + 249.29x^6 \tag{2.23}$$

şeklinde bulunur. Elde ettiğimiz bu seri açılım (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= L^{-1}(2.15 - 5.11x + 60.74x^2 - 231.09x^3 + 521.77x^4 - 556.23x^5 + 249.29x^6) + u(0) + u'(0)x \\ &= 1 + 1.07x^2 - 0.85x^3 + 5.06x^4 + \dots \\ u_1 &= -0.26x^4 + 0.12x^5 + \dots \\ u_2 &= 0.03x^6 - 0.01x^7 + \dots \\ &\vdots \\ u_6 &= 0.1\times10^{-5}x^{14} - 0.5\times10^{-6}x^{15} + \dots \end{aligned} \tag{2.24}$$

elde edilir. Böylece Jacobi polinomlarından faydalınarak elde edilen yaklaşık çözüm

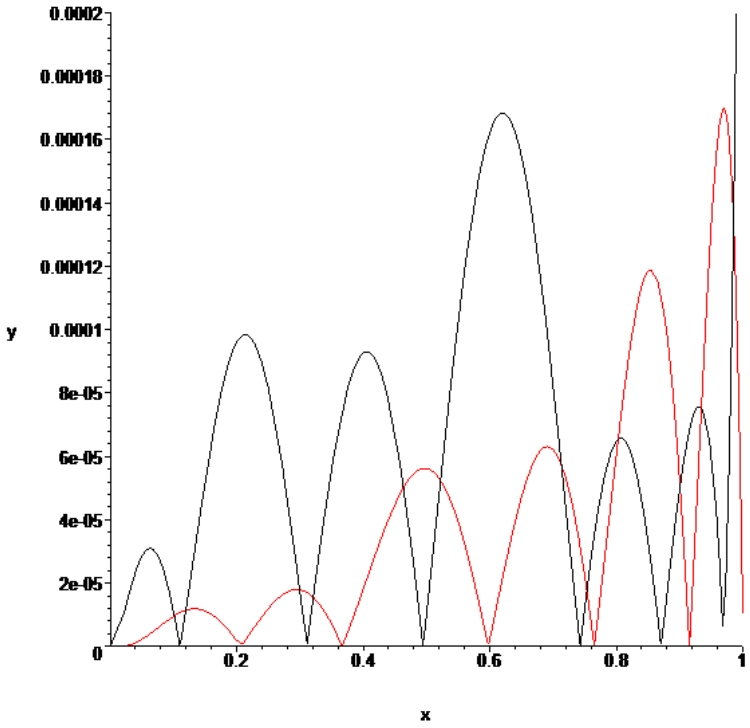
$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{6} u_i = 1 + 1.07x^2 - 0.85x^3 + 4.79x^4 - 11.42x^5 + 16.64x^6 + \dots \tag{2.25}$$

şeklinde bulunur. Jacobi polinomlarının kullanıldığı seri açılımla gerçek çözüm arasındaki fark ve diğer polinomların kullanımıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 2.1'de verilmiştir. Ayrıca Jacobi ve Gegenbauer polinomlarının kullanılıdığı yaklaşık çözümlerin mutlak hatası Şekil 2.1'de birlikte verilmiştir.

Çizelge 2.1. Örnek 2.1.1 için mutlak hatalar ve karşılaştırmaları.

x	$u(x)$	$\lvert u(x)-u_t(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_c(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_P(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_g^{0.45}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_j^{(1.5,-0.75)}(x)\rvert$
0	1	0	0	0	0	0
0.25	1.064494459	$0.6\text{x}10^{-7}$	0.00015957	0.00006364	0.00008167	0.00001202
0.5	1.284025417	0.00006674	0.00014306	0.00002084	$0.99\text{x}10^{-5}$	0.00005614
0.75	1.755054657	0.00439015	0.00020174	0.00005450	0.00001191	0.00002254
1	2.718281828	0.09377613	0.0013607	0.00002289	0.00042983	0.00001012

$u(x)$ =gerçek çözüm, $u_t(x)$ = Taylor serisi, $u_c(x)$ =Chebyshev serisi
$u_p(x)$ = Legendre polinomları $u_g^{0.45}(x)$ = Gegenbauer polinomları ($\alpha=0.45$), $u_j^{(1.5,-0.75)}(x)$ = Jacobi polinomları ($\alpha=1.5, \beta=-0.75$). Gerçek çözüme en yakın sonuçlar farklı zeminlerle belirtilmiştir



Şekil.2.1. Örnek 2.1.1 için Jacobi ve Gegenbauer polinomlarının hataları. Şekilde $\left|u(x)-u_g^{0.45}(x)\right|$ hatası siyah çizgi ile $\left|u(x)-u_j^{(1,75,-0,45)}(x)\right|$ hatası kırmızı çigi ile gösterilmiştir.

Örnek 2.1.2 Şimdi ise Tien (2009) tarafından ele alınan $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı Duffing denklemini inceleyelim:

$$u'' + 3u - 2u^3 = \cos(x)\sin(2x), \tag{2.26}$$

Denklemin başlangıç koşulları ise

$$u(0) = 0,\ u'(0) = 1. \tag{2.27}$$

olsun. Bu durumda, denklemin analitik çözümünün $u(x) = \sin(x)$ olduğu açıktır. $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dx^2$, $N_u = 2u^3$ ve $R_u = -3u$ olmak üzere (2.26) denkleminin her tarafına L^{-1} operatörü uygulanırsa

$$u = L^{-1}(g(x)) + L^{-1}(N_u) - L^{-1}(R_u) \tag{2.28}$$

eşitliği elde edilir. Özel $\alpha = 1$ değeri için terimleri Gegenbauer ortogonal polinomları olan bir seri

$$g(x) \approx -0.000017 + 2.00084x - 0.01198x^2 - 2.25765x^3 - 0.25137x^4 + 1.48237x^5 - 0.47089x^6 \tag{2.29}$$

olur. Bu seri açılım yerine yazılarak

$$\begin{aligned} u_0 &= L^{-1}(-0.000017 + 2.00084x - 0.01198x^2 - \ldots) + u(0) + u'(0)x \\ &= x - 0.8\times10^{-5}x^2 + 0.3334x^3 - 0.00099x^4 + \ldots \\ u_1 &= -0.5x^3 + 0.2\times10^{-5}x^4 + \ldots \\ u_2 &= 0.07x^5 - 0.2\times10^{-6}x^6 + \ldots \\ &\vdots \\ u_6 &= 0.1\times10^{-6}x^{13} - 0.1\times10^{-12}x^{14} + \ldots \end{aligned} \tag{2.30}$$

terimleri elde edilir. Böylece yaklaşık çözüm

$$u_g(x) = \sum_{i=0}^{6} u_i(x) = x - 0.8\times10^{-5}x^2 - 0.16652x^3 - 0.00099x^4 + 0.0012x^5 + \ldots \tag{2.31}$$

şeklinde bulunmuş olur. Duffing denklemi için Adomian ayrışım metodunun Gegenbauer polinomları kullanılarak modifiye edilmesiyle elde edilen $u_g(x)$ yaklaşık çözümün mutlak hatası ve bu denklemin analitik çözümü Çizelge 2.2'de birlikte verilmiştir. Bir karşılaştırma yapılabilmesi için diğer ortogonal polinomların kullanıldığı yaklaşık çözümlerde aynı çizelgede birlikte verilmiştir.

Duffing denkleminin Adomian metodu ile çözülebilmesi için $g(x)$ fonksiyonunu seriye açmakta kullanacağımız bir diğer polinom ise ortogonal Jacobi polinomlarıdır. Yukarıda verilen yollar takip edilerek özel $\alpha, \beta = 1$ değeri için $g(x)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları kullanılarak seri açılımı

$$g(x) \approx -0.00002 + 2.00103x - 0.01338x^2 - 2.25299x^3 - 0.25912x^4 + 1.48864x^5 - 0.47286x^6 \tag{2.32}$$

şeklinde bulunur. Bu seri, çözümde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= L^{-1}(-0.00002 + 2.00103x - 0.01338x^2 - \ldots) + u(0) + u'(0)x \\ &= x - 0.1\times10^{-4}x^2 + 0.3335x^3 - 0.001x^4 + \ldots \\ u_1 &= -0.5x^3 + 0.3\times10^{-5}x^4 + \ldots \\ u_2 &= 0.07x^5 - 0.3\times10^{-6}x^6 + \ldots \\ &\vdots \\ u_6 &= 0.1\times10^{-6}x^{13} - 0.2\times10^{-12}x^{14} + \ldots \end{aligned} \tag{2.33}$$

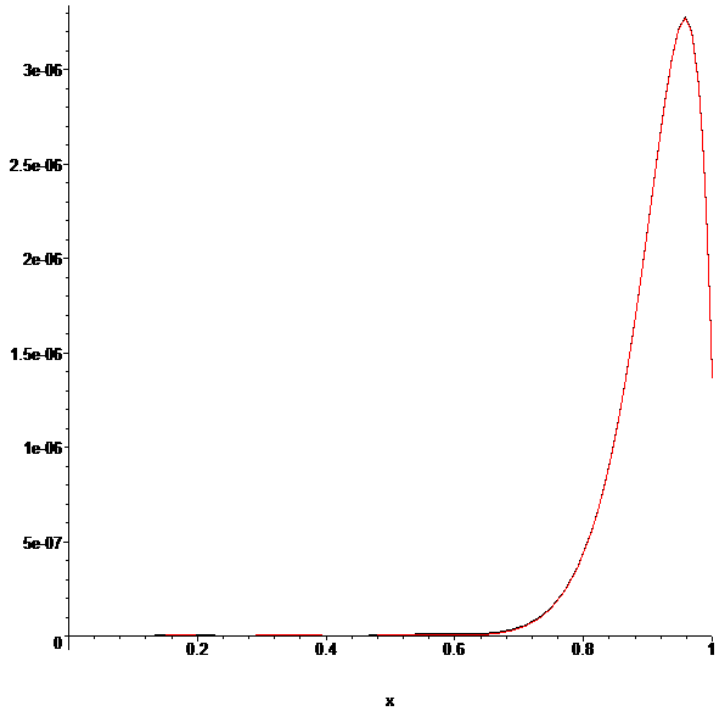
terimleri elde edilir. Böylece Jacobi polinomlarıyla elde edilen yaklaşık çözüm

$$u_j(x)=\sum_{i=0}^{6}u_i(x)=x-0.1\times10^{-4}x^2-0.16649x^3-0.00111x^4+0.01232x^5+\ldots \qquad (2.34)$$

şeklinde bulunmuş olur. $u_j(x)$ yaklaşık çözümünün mutlak hatası ve diğer ortogonal polinom çözümlerinin mutlak hataları Çizelge 2.2'de birlikte verilmiştir. Ayrıca bir karşılaştırma yapılabilmesi için Jacobi polinomlarının ve Gegenbauer polinomlarının kullanıldığı çözümlerine ait mutlak hata grafikleri de Şekil 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Örnek 2.1.2 için hatalar ve karşılaştırmaları

x	$u(x)$	$\lvert u(x)-u_t(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_c(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_P(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_g^{0.45}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_j^{(0.5,0)}(x)\rvert$
0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.2474039593	$0.113\text{x}10^{-7}$	$0.68\text{x}10^{-8}$	$0.9\text{x}10^{-9}$	$0.26\text{x}10^{-8}$	$0.36\text{x}10^{-9}$
0.5	0.4794255386	$0.57433\text{x}10^{-5}$	$0.268\text{x}10^{-7}$	$0.583\text{x}10^{-8}$	$0.96\text{x}10^{-8}$	$0.73\text{x}10^{-8}$
0.75	0.6816387600	0.00021539	$0.171\text{x}10^{-6}$	$0.15\text{x}10^{-6}$	$0.154\text{x}10^{-6}$	$0.149\text{x}10^{-6}$
1	0.8414709848	0.00279044	$0.139\text{x}10^{-5}$	$0.13656\text{x}10^{-5}$	$0.137\text{x}10^{-5}$	$0.13655\text{x}10^{-5}$



Şekil 2.2. Örnek 2.1.2 için Jacobi ve Gegenbauer polinomlarının hataları. Şekilde $\lvert u(x)-u_g^{0.45}(x)\rvert$ hatası siyah çizgi ile $\lvert u(x)-u_j^{(0.5,0)}(x)\rvert$ hatası kırmızı çigi ile gösterilmiştir.

Örnek 2.1.3 Bu örnekte ise Tien (2009) tarafından verilen $0\le x\le1$ aralığında tanımlı lineer olmayan, adi türevli diferensiyel

$$u'' + uu' = x\sin(2x^2) - 4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2) \tag{2.35}$$

denklemi

$$u(x) = u'(x) = 0. \tag{2.36}$$

başlangıç şartları altında inceleyelim. Denklemin analitik çözümünün $u(x) = \sin(x^2)$ olduğu bilinmektedir. (2.35) denklemini Adomian ayrışım metoduyla çözmek için operatör cinsinden yazıldığında lineer operatörün tersi $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dx^2$ bulunur. Bu ters operatör eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa $N_u = uu'$ olmak üzere

$$u = L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(N_u) \tag{2.37}$$

bulunur. Yukarıdaki çözüm prosedürü uygulanarak $\alpha = 1$ özel değeri için $g(x)$ fonksiyonunun Gegenbauer polinomları kullanılarak yedi terimli seri çözümü

$$g(x) \approx 2.002 - 0.09x + 1.1x^2 - 3.276x^3 + 7.263x^4 - 13.585x^5 + 5.214x^6 \tag{2.38}$$

şeklinde elde edilir. (2.38) ifadesini (2.37) denkleminde yerine yazar ve Adomian metodundan elde edilen rekürans bağıntısını kullanırsak

$$\begin{aligned}
u_0 &= L^{-1}(2.002 - 0.09x + 1.1x^2 - 3.276x^3 + 7.263x^4 - 13.585x^5 + 5.214x^6) + u(0) + u'(0)x \\
&= 1.001x^2 - 0.162x^3 + 0.916x^4 + \dots \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -0.1x^5 + 0.002x^6 + \dots \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = 0.012x^8 - 0.004x^9 + \dots \\
&\vdots \\
u_6 &= -L^{-1}(A_5) = 0.3\times10^{-5}x^{20} - 0.2\times10^{-6}x^{21} + \dots.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

terimlerine ulaşırız. Böylece yaklaşık çözüm

$$u_g(x) = \sum_{i=0}^{6} u_i(x) = 1.001x^2 - 0.016x^3 + 0.091x^4 - 0.264x^5 + \dots \tag{2.40}$$

bulunur. $u_g(x)$ yaklaşık çözümünden sabit bir α değeri için oluşan hata, gerçek çözüm ve diğer ortogonal polinomların çözüm hataları Çizelge 2.3'te birlikte verilmiştir.

Bu problemin çözümü için başka bir yol ise Jacobi polinomlarının kullanılmasıdır. $\alpha, \beta = 1$ özel değeri için $g(x)$ fonksiyonunun Jacobi polinom serisi

$$g(x) \approx 2.003 - 0.115x + 1.192x^2 - 3.453x^3 + 7.35x^4 - 13.491x^5 + 5.134x^6 \tag{2.41}$$

şeklinde bulunur. (2.41) ifadesini (2.37) denkleminde yerine yazar, lineer olmayan terimler için Adomian polinomlarını elde eder ve Adomian metodundan elde edilen rekürans bağıntısını kullanırsak

$$\begin{aligned}
u_0 &= L^{-1}(2.003 - 0.115x + 1.192x^2 - 3.453x^3 + 7.35x^4 - 13.491x^5 + 5.134x^6) + u(0) + u'(0)x \\
&= 1.001x^2 - 0.019x^3 + 0.099x^4 + \dots \\
u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -0.1x^5 + 0.003x^6 + \dots \\
u_2 &= -L^{-1}(A_1) = 0.012x^8 - 0.0005x^9 + \dots \\
&\vdots \\
u_6 &= -L^{-1}(A_5) = 0.3\times 10^{-5}x^{20} - 0.3\times 10^{-6}x^{21} + \dots
\end{aligned} \tag{2.42}$$

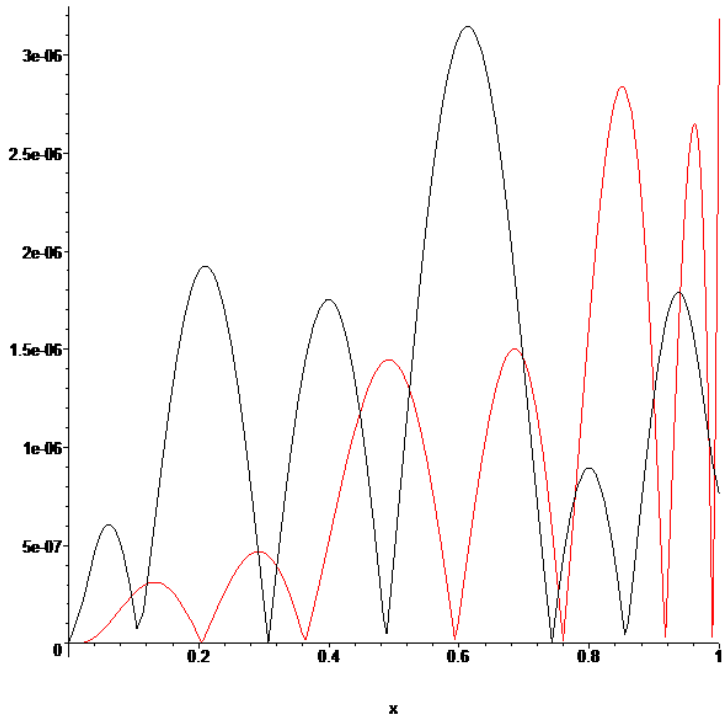
terimlerini buluruz. Böylece ortogonal Jacobi polinomlarından faydalanarak

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{6} u_i(x) = 1.001x^2 - 0.019x^3 + 0.099x^4 - 0.273x^5 + \dots. \tag{2.43}$$

yaklaşık çözümü elde ederiz. Sabit α, β değerleri için elde edilen $u_j(x)$ yaklaşık çözümünün hatası, analitik çözüm ve diğer ortogonal polinomların hataları bir karşılaştırma yapılabilmesi için Çizelge 2.3'te birlikte verilmiştir. Ayrıca Jacobi ve Gegenbauer polinomlarının yardımıyla elde edilen yaklaşık çözümlerin hatalarının grafiği Şekil 2.3'te beraber çizilmiştir.

Çizelge 2.3. Örnek 2.1.3 için mutlak hatalar ve karşılaştırmaları

x	$u(x)$	$\lvert u(x)-u_t(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_c(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_p(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_g^{0.45}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_j^{(1.5,-0.75)}(x)\rvert$
0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.0624593	$0.626\text{x}10^{-7}$	$0.288\text{x}10^{-5}$	$0.117\text{x}10^{-5}$	$0.152\text{x}10^{-5}$	$0.33\text{x}10^{-6}$
0.5	0.2474039	$0.275\text{x}10^{-4}$	$0.313\text{x}10^{-5}$	$0.199\text{x}10^{-6}$	$0.44\text{x}10^{-6}$	$0.143\text{x}10^{-5}$
0.75	0.5333026	$0.854\text{x}10^{-3}$	$0.398\text{x}10^{-5}$	$0.11\text{x}10^{-5}$	$0.196\text{x}10^{-6}$	$0.348\text{x}10^{-6}$
1	0.8414709	$0.808\text{x}10^{-2}$	$0.545\text{x}10^{-5}$	$0.32\text{x}10^{-6}$	$0.758\text{x}10^{-6}$	$0.318\text{x}10^{-5}$



Şekil 2.3. Örnek 2.1.3 için Jacobi ve Gegenbauer polinomlarının hataları. Şekilde $\left|u(x)-u_g^{0.45}(x)\right|$ hatası siyah çizgi ile $\left|u(x)-u_j^{(1.5,-0.75)}(x)\right|$ hatası kırmızı çigi ile gösterilmiştir

2.2. Legendre Polinomlarıyla Homotopi Perturbasyon Metodu

Çoğu yaklaşık çözüm yönteminde olduğu gibi HPM'nin çözüm metodunda da integral alma işlemi kullanılmaktadır. Ancak bazı fonksiyonlarının integralinin alınması çok zor olmaktadır. Bu tür fonksiyonlar için, örneğin

$$A(u)-f(r)=0,\ r\in\Omega \tag{2.44}$$

denklemiyle verilen $f(r)$ fonksiyonunun bu tip bir fonksiyon olduğunu ele alırsak, HPM'nin çözüm prosedüründe bu fonksiyonu kullanmak için terimleri Legendre polinomları olan

$$f(r)\approx\sum_{k=0}^{m}a_kP_k(r) \tag{2.45}$$

şeklinde bir seri açılımını kullanabiliriz. Burada m yaklaşık çözümün mertebesidir. Bu durumda (2.44) denklemini

$$A(u)-\sum_{k=0}^{m}a_kP_k(r)=0,\ \ r\in\Omega, \tag{2.46}$$

ve

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0,\ r \in \Gamma. \tag{2.47}$$

sınır koşullarıyla yazabiliriz. Genel A operatörü, lineer ve lineer olmayan L ve N gibi iki kısma ayrılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$L(u) + N(u) - \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(r) = 0. \tag{2.48}$$

Daha sonra $v(r, p) : \Omega \times [0,1] \to \Re$ olmak üzere

$$H(v, p) = (1-p)\left[L(v) - L(u_0)\right] + p\left[A(v) - \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(r)\right] = 0 \tag{2.49}$$

veya

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(v) - \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(r)\right] = 0, \tag{2.50}$$

olacak şekilde bir homotopi yazılabilir. Burada p gömülmüş parametre u_0 ise (2.46) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır. (2.49) ve (2.50) denklemleriyle verilen eşitlikler

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{2.51}$$

$$H(v,1) = A(v) - \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(r) = 0 \tag{2.52}$$

sınır koşullarını sağlamaktadırlar. HPM'ye göre p gömülmüş parametresi küçük parametre olarak kullanılmaktadır ve bu metod sonucunda elde edilecek çözüm p'nin kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \cdots, \tag{2.53}$$

şeklinde bulunacaktır. $p = 1$ değeri için (2.46) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u = \lim_{p \to 0} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots. \tag{2.54}$$

olacaktır (Çenesiz ve Kurnaz, 2011).

2.2.1. Metodun Uygulanması

Bu bölümde iki lineer olmayan, adi türevli diferensiyel denklem yukarıda verilen modifiye edilmiş HPM ile çözülmüş, elde edilen yaklaşık çözüm, Taylor seri açılımı ve problemlerin analitik çözümü ile karşılaştırılmıştır. Bütün hesaplamalarda Maple 13 paket programı kullanılmıştır.

Örnek 2.2.1. Hosseini (2006) tarafından verilen $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklemi ele alalım

$$u'' + xu' + x^2u^3 = (2+6x^2)e^{x^2} + x^2e^{3x^2}. \tag{2.55}$$

Bu denklemin başlangıç koşulları ise

$$u(0) = 1, \;\; u'(0) = 0. \tag{2.56}$$

olarak verilmiştir. (2.55) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(x) = 0 \tag{2.57}$$

şeklinde yazılırsa $L(u) = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $N(u) = x\dfrac{du}{dx} + x^2u^3$ ve $f(x) = (2+6x^2)e^{x^2} + x^2e^{3x^2}$ elde edilir. Verilen $f(x)$ fonksiyonunun HPM çözüm prosedüründe kullanılması oldukça zordur. Bunun için $f(x)$ fonksiyonu Legendre serisine

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(2x-1), \qquad 0 \le x \le 1. \tag{2.58}$$

şeklinde açılır. Problem $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı, Legendre ortogonal polinomları ise $[-1,1]$ aralığında ortogonal olduğu için $t = 2x-1$ gibi bir dönüşüm yapılmıştır. Legendre polinomlarının ortogonallik özelliğinden faydalanarak a_k katsayıları

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(0.5x+0.5)P_k(x)dx, \qquad k = 1,2,...,m \tag{2.59}$$

yazılabilir. Böylece $f(x)$ fonksiyonu Legendre serisi, $m = 8$ olmak üzere

$$f^*(x) \approx 2.005 - 0.515x + 19.716x^2 + \cdots + 354.336x^8 \tag{2.60}$$

olarak bulunur. Burada $\Omega \times [0,1] \to \Re$ olmak üzere

$$u'' - u_0'' + pu_0'' + p\left[xu' + x^2u^3 - f^*(x)\right] = 0, \quad p \in [0,1],\ x \in \Omega, \tag{2.61}$$

eşitliği sağlayan bir homotopi yazılabilir. $p \in [0,1]$ gömülmüş parametredir. Başlangıç değerlerinden faydalanarak başlangıç yaklaşımı ise $u_0(0) = 1,\ u_0'(0) = 0$ olarak bulunur. (2.55) denklemiyle verilen problemin çözümünü

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots. \tag{2.62}$$

olarak ele alalım. (2.62) denklemini (2.61) eşitliğinde yerine yazar ve elde edilen eşitliği p'nin kuvvetlerine göre düzenlersek

$$p^0:\begin{cases} u_0'' = 0, \\ u_0(0)=1, u_0'(0)=0, \end{cases}$$

$$p^1:\begin{cases} u_1'' + xu_0' + x^2 {u_0}^3 - f(x) = 0, \\ u_1(0)=0, u_1'(0)=0, \end{cases}$$

$$p^2:\begin{cases} u_2'' + xu_1' + 3x^2 {u_0}^2 u_1 = 0, \\ u_2(0)=0, u_2'(0)=0, \end{cases}$$

$$p^3:\begin{cases} u_3'' + xu_2' + 3x^2 {u_0}^2 u_2 + 3x^2 {u_1}^2 u_0 = 0, \\ u_3(0)=0, u_3'(0)=0, \end{cases}$$

$\vdots$

bulunur. Böylece yukarıdaki diferensiyel denklemlerin çözümleri

$$\begin{aligned} &u_0(x)=1, \\ &u_1(x)=1.002x^2-0.085x^3+1.559x^4+\cdots+3.937x^{10}, \\ &u_2(x)=-0.167x^4+0.012x^5-0.308x^6-\cdots-0.064x^{14}, \\ &u_3(x)=0.022x^6-0.001x^7-0.011x^8-\cdots-0.084x^{24}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.63}$$

şeklinde elde edilir. Böylece yaklaşık Legendre seri çözümü

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p\to 1} u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 = u_0+u_1+u_2+\cdots \\ &= 1+1.002x^2-0.085x^3+1.392x^4+\cdots+0.712x^{23}-0.084x^{24}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

bulunur.

$f(x)$ fonksiyonunun seri açılımı için kullanacağımız bir diğer ortogonal fonksiyon ise birinci tür Chebyshev polinomlarıdır. Chebyshev serisi

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(2x-1), \qquad 0 \le x \le 1. \tag{2.65}$$

yazılabilir. Burada m yaklaşık çözümün mertebesidir. Chebyshev polinomlarının ortogonallik özelliğini kullanarak b_k katsayıları

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(0.5x+0.5)T_0(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ b_i &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(0.5x+0.5)T_i(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad i=1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{2.66}$$

bulunur. Bu denklemlerdeki $\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonudur. Chebyshev polinomları kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun seri açılımı, $m=8$ olmak üzere

$$f_C^*(x) \approx 2.038 + 7.165x^2 + 23.511x^4 - 25.208x^6 + 34.273x^8 \tag{2.67}$$

bulunur. HPM'ye gore $\Omega \times [0,1] \to \Re$ olacak şekilde bir homotopi

$$u'' - u_0'' + pu_0'' + p\left[xu' + x^2u^3 - f_C^*(x) \right] = 0, \quad p \in [0,1],\ x \in \Omega, \tag{2.68}$$

yazılır. Bu denklemde $p \in [0,1]$ gömülmüş parametredir ve başlangıç koşulları $u_0(0)=1,\ u_0'(0)=0$ yazılabilir. (2.55) denkleminin çözümü

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots. \tag{2.69}$$

seri açılımı olarak yazılabilir. (2.69) denklemi (2.68) denkleminde yerine yazılır ve elde edilen çözüm p 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$p^0 : \begin{cases} u_0'' = 0, \\ u_0(0) = 1, u_0'(0) = 0, \end{cases}$$

$$p^1 : \begin{cases} u_1'' + xu_0' + x^2{u_0}^3 - f_C^*(x) = 0, \\ u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0, \end{cases}$$

$$p^2 : \begin{cases} u_2'' + xu_1' + 3x^2{u_0}^2u_1 = 0, \\ u_2(0) = 0, u_2'(0) = 0, \end{cases}$$

$$p^3 : \begin{cases} u_3'' + xu_2' + 3x^2{u_0}^2u_2 + 3x^2{u_1}^2u_0 = 0, \\ u_3(0) = 0, u_3'(0) = 0, \end{cases}$$

$\vdots$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki diferensiyel denklemlerin çözümleri ise

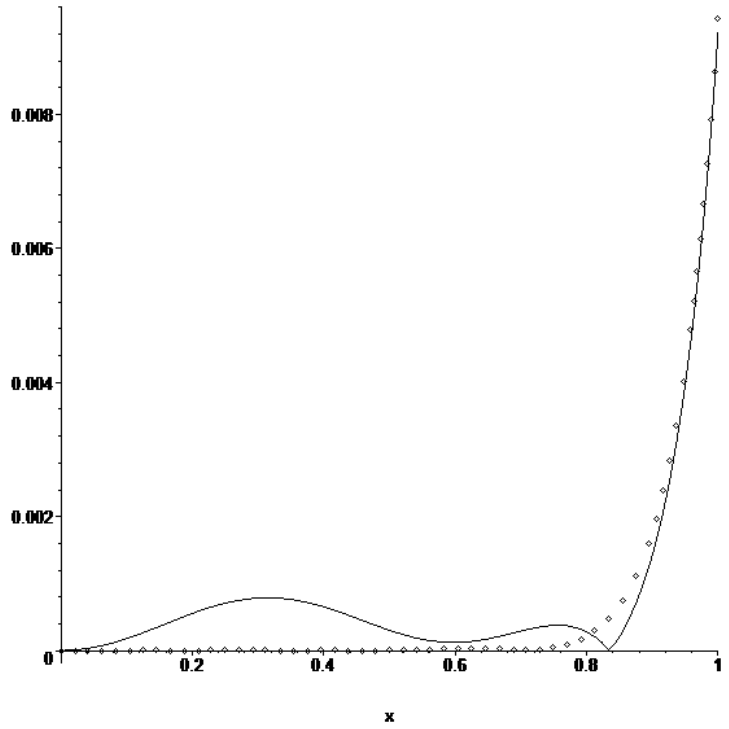
$$u_0(x) = 1,$$
$$u_1(x) = 1.019x^2 + 0.513x^4 + \cdots + 0.38x^{10},$$
$$u_2(x) = -0.169x^4 - 0.17x^6 - 0.111x^8 - \cdots - 0.006x^{14},$$
$$u_3(x) = 0.022x^6 - 0.002x^8 - 0.019x^{10} - \cdots - 0.007x^{24},$$
$\vdots$

bulunur. Böylece çözüm

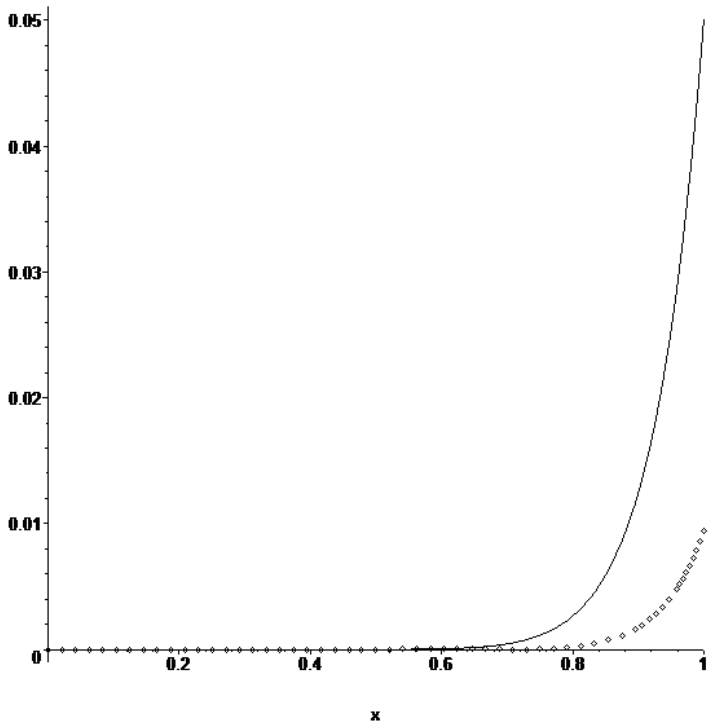
$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \to 1} u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \\ &= 1 + 1.019x^2 + 0.343x^4 + 0.635x^6 - \cdots + 0.002x^{22} - 0.007x^{24}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonunu seriye açmanın bir diğer yolu ise Taylor seri açılımını kullanmaktır. Taylor seri açılımının doğası gereği, şekildenden de kolayca görülebilir, Taylor seri açılımı kullanılarak elde edilen çözümün hata grafiği uç noktalarda çok hızlı artış göstermektedir.

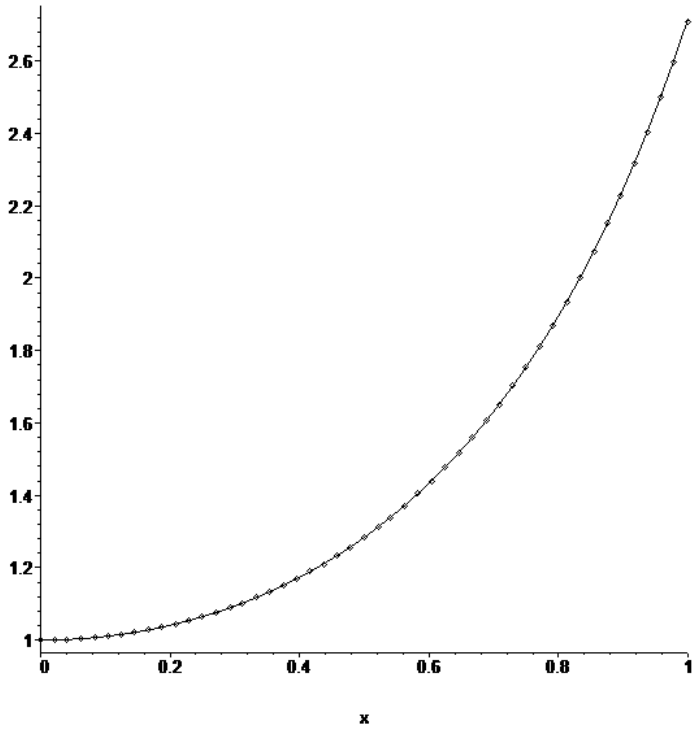
Chebyshev polinomları ve Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümün hatası Şekil 2.4'te birlikte verilmiştir. Ayrıca Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile Taylor seri açılımı Şekil 2.5'te, Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile gerçek çözüm Şekil 2.6'da çözümün etkinliğini göstermek için birlikte verilmiştir.



Şekil 2.4. Örnek 2.2.1'in çözümünde HPM ile Legendre (düz çizgi) ve Chebyshev (noktalı çizgi) polinomları kullanılarak elde edilen çözümlerin mutlak hatalarının grafikleri



Şekil 2.5. Örnek 2.2.1'in çözümünde HPM ile Legendre polinomları (noktalı çizgi) ve Taylor seri açılımı (düz çizgi) kullanılarak elde edilen çözümlerin hatalarının grafikleri



Şekil 2.6. Örnek 2.2.1'in HPM ile Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümü (noktalı çizgi) ve gerçek çözüm (düz çizgi).

Örnek 2.2.2 Ele alacağımız $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı bir başka lineer olmayan diferensiyel denklem

$$u'' + uu' = x\sin(2x^2) - 4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2), \tag{2.71}$$

denklemidir. Bu problemin başlangıç koşulları

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{2.72}$$

olarak verilmiştir. HPM'ye göre (2.71) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(x) = 0, \tag{2.73}$$

şeklinde düzenlenirse

$L(u) = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $N(u) = u\dfrac{du}{dx}$ ve $f(x) = x\sin(2x^2) - 4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$ bulunur.

Verilen $f(x)$ fonksiyonunun HPM çözüm prosedüründe kullanılması oldukça zordur. $f(x)$ fonksiyonun Legendre serisi

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(2x-1), \qquad 0 \le x \le 1. \tag{2.74}$$

olarak yazılabilir. HPM çözüm prosedürüne göre işlemler uygulanırsa $f(x)$ fonksiyonunun Legendre serisi

$$f^*(x) = 2 - 0.0004x + 0.012x^2 + 1.859x^3 + \cdots - 6.493x^7 + 3.081x^8, \tag{2.75}$$

bulunur. $\Omega \times [0,1] \to \Re$ olmak üzere

$$u'' - u_0'' + pu_0'' + p\left[uu' - f^*(x)\right] = 0, \quad p \in [0,1],\ x \in \Omega, \tag{2.76}$$

bağıntısını sağlayan bir homotopi yazılabilir. Burada $p \in [0,1]$ gömülmüş parametre ve $u_0(0) = u_0'(0) = 0$ başlangıç yaklaşımıdır. (2.71) denklemiyle verilen problemin çözümü

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots. \tag{2.77}$$

yazılabilir. (2.77) ifadesini (2.71) denkleminde yerine yazar ve elde edilen ifadeyi p 'nin kuvvetlerine göre düzenlersek

$$p^0 : \left\{ u_0'' = 0, \quad u_0(0) = 0, u_0'(0) = 0, \right.$$

$$p^1 : \left\{ u_1'' + u_0'u_0 - f(x) = 0, \quad u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0, \right.$$

$$p^2 : \left\{ u_2'' + u_0' u_1 + u_1' u_0 = 0, \quad u_2(0) = 0, u_2'(0) = 0, \right.$$

$$p^3 : \left\{ u_3'' + u_0' u_2 + u_1' u_1 + u_2' u_0 = 0, \quad u_3(0) = 0, u_3'(0) = 0, \right.$$

$$p^4 : \left\{ u_4'' + u_0' u_3 + u_1' u_2 + u_2' u_1 + u_3' u_0 = 0, \quad u_4(0) = 0, u_4'(0) = 0, \right.$$

$$p^5 : \left\{ u_5'' + u_0' u_4 + u_1' u_3 + u_2' u_2 + u_3' u_1 + u_4' u_0 = 0, \quad u_5(0) = 0, u_5'(0) = 0, \right.$$

$\vdots$

bulunur. Yukarıdaki verilen diferensiyel denklemlere karşılık gelen çözümler ise

$$u_0(x) = 0,$$

$$u_1(x) = x^2 - 0.00007x^3 + 0.001x^4 + \cdots - 0.09x^9 + 0.034x^{10},$$

$$u_2(x) = 0,$$

$$u_3(x) = -0.1x^5 + 0.00001x^6 - 0.0001x^7 - \cdots - 0.0001x^{20} - 0.00002x^{21},$$

$$u_4(x) = 0,$$

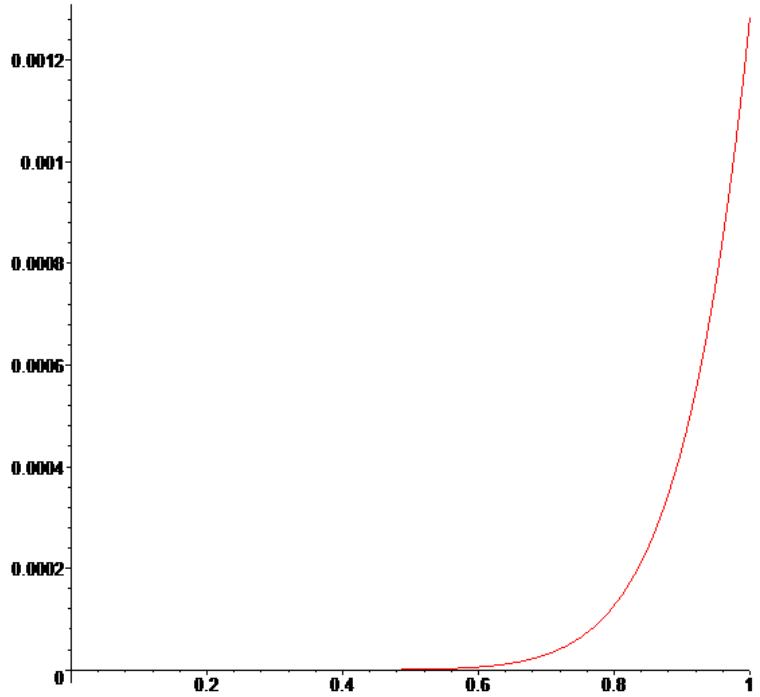
$$u_5(x) = 0.01x^8 - 0.2\times10^{-5}x^9 + \cdots - 0.2\times10^{-6}x^{31} + 0.2\times10^{-7}x^{32},$$

$\vdots$

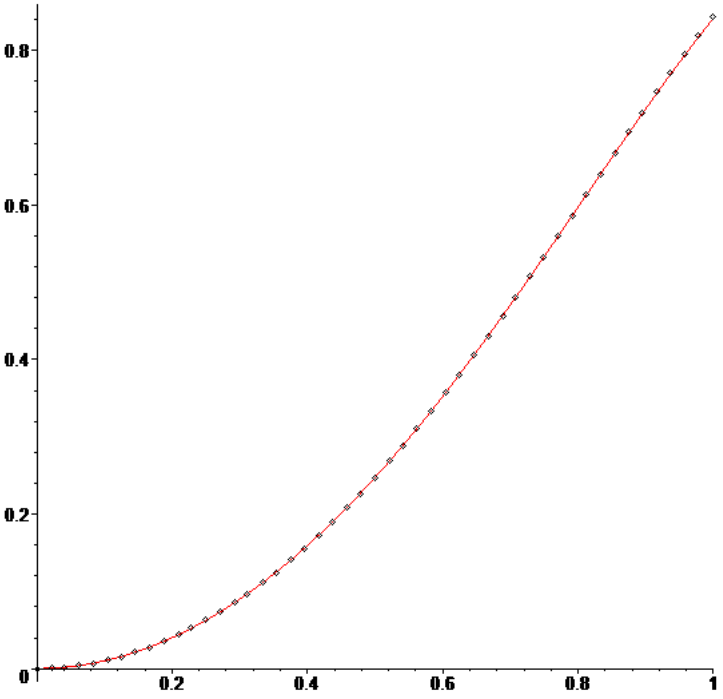
bulunur. Buradan HPM ve Legendre polinomlarıyla yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p\to 1} u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 + p^5u_5 + \cdots = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots \\ &= x^2 - 0.00007x^3 + 0.0001x^4 - 0.007x^5 - \cdots - 0.2\times10^{-6}x^{31} + 0.2\times10^{-7}x^{32}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu yaklaşık çözümün hatasının grafiği Şekil 2.7'de, gerçek çözüm ve yaklaşık çözüm ise birlikte Şekil 2.8'de verilmiştir.



Şekil 2.7. Örnek 2.2.2'nin HPM ile Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümünün hatasının grafiği.



Şekil 2.8. Örnek 2.2.2'nin HPM ile Legendre polinomları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümü (noktalı çizgi) ve gerçek çözüm (düz çizgi).

2.3. Legendre, Chebyshev ve Adomian Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu

Bu bölümde Varyasyonel iterasyon metodunun çözüm prosedüründe Legendre ve Chebyshev seri açılımları kullanılmıştır. Ayrıca Adomian ayrışım metodunda lineer olmayan terimler için kullanılan Adomian polinomları VIM çözüm prosedüründe Chebyshev ve Legendre polinomlarıyla birlikte verilmiştir.

2.3.1. Adomian Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu

VIM'nin çözüm prosedüründe lineer olmayan problemler için Abbasbandy (2007) Adomian polinomlarının kullanılmasını önermiştir. Bunun için $u(x)$ çözümü

$$u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x) \tag{2.79}$$

serisi olarak düşünülmüştür. Lineer olmayan terimlerde, A_i Adomian polinomları (Adomian,1994) olmak üzere

$$Nu=\sum_{i=0}^{\infty}A_i(u_0,u_{1,},...,u_i) \tag{2.80}$$

olarak ele alınmıştır. Böylece ulaşılacak olan çözüm

$$u_n(x)=\sum_{i=0}^{n}u_i(x) \tag{2.81}$$

olacaktır. Bu tanımlamalar göz önüne alındığında doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\int_0^x\lambda(t)\left(Lu_n(t)+\sum_{i=0}^{n}A_i(t)-g(t)\right)dt, \tag{2.82}$$

veya

$$u_{n+1}(x)=\int_0^x\lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n}Lu_i(t)+\sum_{i=0}^{n}A_i(t)-g(t)\right)dt, \tag{2.83}$$

şeklinde yazılabilir. Burada yine λ genel Lagrange çarpanını göstermektedir. $n\geq 1$ için, ardışık hesaplamalar sonucunda $u_{n+1}(x)$ bulunur. Böylece bu problemin gerçek çözümüne

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{2.84}$$

şeklinde ulaşılır.

2.3.2. Legendre ve Chebyshev Polinomlarıyla Varyasyonel İterasyon Metodu

VIM, çözüm prosedüründe integral kullanan yaklaşık çözüm metodlarından birisidir. Ancak bazı fonksiyonların integralini hesaplamak çok zor, kimi zaman imkânsızdır. Bu durumda fonksiyonlar seriye açılarak bir çözüme ulaşılabilir. Eğer

$$Lu(x)+Nu(x)=g(x), \tag{2.85}$$

denkleminde verilen $g(x)$ fonksiyonu integrallenemeyen bir fonksiyon ise, $g(x)$ fonksiyonu,

$$g(x)\approx\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{k}(0)}{k!}x^{k} \tag{2.86}$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir. Bu çalışmada ise VIM'nin çözüm prosedüründe ortogonal Chebyshev ve Legendre polinomları kullanılmıştır. $g(x)$ fonksiyonu Chebyshev serisine

$$g(x)\approx\sum_{k=0}^{m}b_{k}T_{k}(x), \tag{2.87}$$

şeklinde açılabilir. Legendre serisinin kullanılması durumunda ise

$$g(x)\approx\sum_{k=0}^{m}c_{k}P_{k}(x) \tag{2.88}$$

bulunur. (2.87) ve (2.88) ifadeleriyle verilen seri açılımları çözüm prosedüründe yerine yazılırsa doğrulama fonksiyonelleri

$$u_{n+1}(x)=u_{n}(x)+\int_{0}^{x}\lambda(t)\left(Lu_{n}(t)+N\tilde{u}_{n}(t)-\sum_{k=0}^{m}b_{k}T_{k}(t)\right)dt, \tag{2.89}$$

ve

$$u_{n+1}(x)=u_{n}(x)+\int_{0}^{x}\lambda(t)\left(Lu_{n}(t)+N\tilde{u}_{n}(t)-\sum_{k=0}^{m}c_{k}P_{k}(t)\right)dt. \tag{2.90}$$

bulunur. Bağımsız $u_{n}(x)$ değişkenine göre, $\delta\tilde{u}_{n}=0$ olacak şekilde bu eşitliklerin bir varyasyonu alındığında genel Lagrange çarpanı bulunur. $u_{0}(x)$ başlangıç yaklaşımının bulunması için ise problemin verilen başlangıç değerlerinden faydalanabilinir. $n\geq 1$ için ardışık hesaplamalar yapılarak $u_{n+1}(x)$ çözümü bulunduktan sonra problemin gerçek çözümü

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_{n}(x) \tag{2.91}$$

şeklinde bulunur. Eğer çözüm prosedüründe Adomian polinomları kullanılırsa Chebyshev serisinin kullanıldığı doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(Lu_n(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(t) \right) dt, \tag{2.92}$$

veya

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} Lu_i(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(t) \right) dt, \tag{2.93}$$

bulunur. Legendre serisinin kullanıldığı çözüm fonksiyoneli ise

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(Lu_n(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(t) \right) dt, \tag{2.94}$$

veya

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} Lu_i(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(t) \right) dt, \tag{2.95}$$

şeklinde elde edilir. Adomian polinomlarının kullanıldığı bu çözüm prosedüründe $n \geq 1$ için ardışık hesaplamalar yapılarak $u_{n+1}(x)$ çözümü bulunduktan sonra problemin gerçek çözümü

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{2.96}$$

şeklinde hesaplanabilir (Çenesiz ve Kurnaz, 2011).

2.3.3. Metodun Uygulanması

VIM'nin ortogonal Chebyshev ve Legendre polinomlarıyla modifikasyonunun etkinliğini göstermek için bu bölümde bazı örnekler vereceğiz. Lineer olmayan terimler içeren problemlerde ayrıca Adomian polinomlarını da kullanarak çözüme ulaşacağız. Yapılan bu modifikasyonun Taylor seri açılımına göre üstünlüğünü göstermek için elde edilen sonuçlar çizelgeler ve grafiklerde karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Yapılan tüm bu nümerik hesaplamalarda Maple 13 paket programı kullanılmıştır.

Örnek 2.3.1. Hosseini (2006) tarafından verilen $0 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı aşağıdaki diferensiyel denklemi ele alalım

$$u'' + uu' = x\sin(2x^2) - 4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2), \tag{2.97}$$

Bu denklemin başlangıç koşulları ise

$$u(0) = u'(0) = 0$$

olarak verilmiştir. Bu denklemin gerçek çözümünün $u(x)=\sin(x^2)$ olduğu bilinmektedir. VIM'ye göre (2.97) denklemini (2.85) denklemi gibi yazarsak $Lu(x)=u''(x)$, $Nu(x)=u(x)u'(x)$ ve $g(x)=x\sin(2x^2)-4x^2\sin(x^2)+2\cos(x^2)$ bulunur. VIM çözüm prosedürüne göre doğrulama fonksiyonelini

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\int_0^x \lambda(t)\left(u_n''(t)+\tilde{u}_n(t)\tilde{u}_n'(t)-g(t)\right)dt \tag{2.98}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikteki stasyoner koşullar ise

$$\begin{aligned} 1-\lambda'\big|_{t=x}&=0,\\ \lambda\big|_{t=x}&=0,\\ \lambda''\big|_{t=x}&=0, \end{aligned} \tag{2.99}$$

bulunur. Bu stasyoner koşullardan Lagrange çarpanı $\lambda=t-x$ olarak elde edilir. Bu problemin VIM ile çözülmesi için (2.98) eşitliğinde verilen $g(t)$ fonksiyonunun integralinin hesaplanması gerekmektedir. $g(x)=x\sin(2x^2)-4x^2\sin(x^2)+2\cos(x^2)$ şeklinde verilen fonksiyonunun integrali hesaplandığında ise karşımıza çıkan fonksiyonun çözüm için kullanılması çok zordur. Bu durumda $g(x)$ fonksiyonu Taylor serisine açılırsa

$$g(x)\approx 2+2x^3-5x^4-(4/3)x^7+(3/4)x^8+O(x^{11}) \tag{2.100}$$

bulunur. Başlangıç koşullarından faydalanarak başlangıç yaklaşımı

$$u_0(x)=u(0)+u'(0)x=0 \tag{2.101}$$

olarak elde edilir. (2.100) eşitliği (2.98) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\int_0^x \lambda(t)\left(u_n''(t)+\tilde{u}_n(t)\tilde{u}_n'(t)-(2+2t^3-5t^4-(4/3)t^7+(3/4)t^8)\right)dt \tag{2.102}$$

bulunur. Başlangıç yaklaşımından başlayarak ardışık olarak hesaplamalar yapılırsa, bu problemin analitik çözümü $u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$ şeklinde bulunur. Bazen $\lim_{n\to\infty}u_n(x)$ limiti kolayca hesaplamasada, VIM genellikle birkaç iterasyon sonra gerçek çözüme yaklaşık sonuçlar vermektedir. Verilen problemde dört iterasyon kullanılarak elde edilen $u_{tay}(x)$ yaklaşık çözümü, bu çözüm sonucunda bulunan hata ve diğer ortogonal polinomların kullanıldığı seri çözümlerin mutlak hatası Şekil 2.9 ve Çizelge 2.4'te karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

$g(x)$ fonksiyonunun seri açılımı için kullanacağımız ilk ortogonal polinom Chebyshev polinomlarıdır. $g(x)$ fonksiyonu terimleri Chebyshev polinomları olan seriye

$$g(x) \approx \sum_{k=0}^{10} b_k T_k(2x-1),\ 0 \le x \le 1, \tag{2.103}$$

şeklinde açılabilir. Problem $0 \le x \le 1$ aralığında verildiği için $[-1,1]$ aralığında ortogonal olan Chebyshev polinomlarını kullanmak için $t = 2x-1$ dönüşümü kullanılmıştır. Chebyshev polinomlarının ortogonallik özelliğinden faydalanarak (2.103) eşitliğindeki b_k katsayıları $\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(0.5x+0.5)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \\ b_i &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(0.5x+0.5)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ i = 1,2,...,10 \end{aligned} \tag{2.104}$$

olarak elde edilir. Böylece $g(x)$ fonksiyonunun Chebyshev serisi

$$\begin{aligned} g(x) \approx\ & 1.99 + 0.0001x - 0.006x^2 + 2.09x^3 - 5.72x^4 + 3.20x^5 - 8.68x^6 \\ & + 13.29x^7 - 14.17x^8 + 8.33x^9 - 1.71x^{10} \end{aligned} \tag{2.105}$$

bulunur. Başlangıç değerleri kullanılarak başlangıç yakınsaması, $u_0(x) = u(0) + u'(0)x = 0$ elde edilir. Yukarıdaki denklemler kullanılarak doğrulama fonksiyoneli ise

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(u_n''(t) + \tilde{u}_n(t)\tilde{u}_n'(t) - (1.99 + 0.0001t - 0.006t^2 + ... + 8.33t^9 - 1.71t^{10})\right)dt. \tag{2.106}$$

elde edilir. Böylece ardışık hesaplamalar sonucunda çözüm $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ şeklinde hesaplanır. Chebyshev serisiyle elde edilen yaklaşık çözümün etkinliğini göstermek için, dört iterasyon sonunda elde edilen $u_{che}(x)$ yaklaşık çözümüyle diğer seri açılımlardan elde edilen sonuçlar Çizelge 2.4 ve Şekil 2.9'da birlikte verilmişlerdir.

$g(x)$ fonksiyonunu seriye açmak için kullanacağımız bir diğer ortogonal polinom ise Legendre ortogonal polinomlardır. $g(x)$ fonksiyonunun Legendre serisi

$$g(x) \approx \sum_{k=0}^{10} c_k P_k(2x-1) \tag{2.107}$$

şeklinde bulunur. Legendre polinomlarının ortogonallik özelliğinden ve ağırlık fonksiyonunun 1 olmasından faydalanarak c_n katsayıları

$$c_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} g(0.5x+0.5)P_i(x)dx,\ i=1,2,...,10, \tag{2.108}$$

olarak hesaplanır. c_n katsayıları hesaplandıktan sonra $g(x)$ fonksiyonunun Legendre seri açılımı

$$\begin{aligned} g(x) \approx\ & 1.99 + 0.0002x - 0.008x^2 + 2.11x^3 - 5.80x^4 + 3.39x^5 - 8.95x^6 \\ & + 13.47x^7 - 14.20x^8 + 8.28x^9 - 1.69x^{10} \end{aligned} \tag{2.109}$$

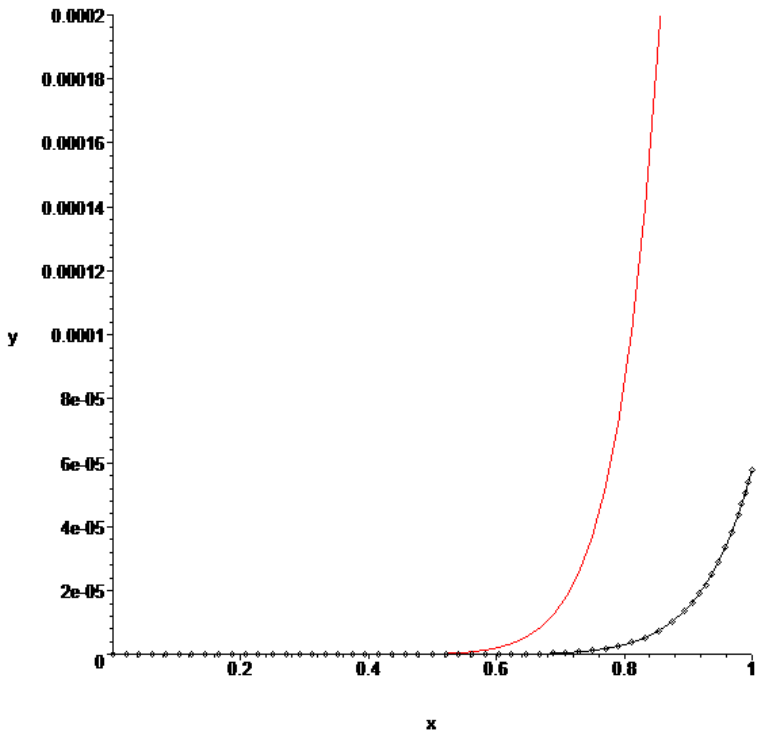
bulunur. Başlangıç yaklaşımının $u_0(x) = u(0) + u'(0)x = 0$ olduğu gözönünde bulundurularak ve bu değerler doğrulama fonksiyonelinde yerine yazılarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(u_n''(t) + \tilde{u}_n(t)\tilde{u}_n'(t) - (1.99 + 0.0002t - ... + 8.29t^9 - 1.69t^{10}\right)dt \tag{2.110}$$

elde edilir. Ardışık hesaplamalar kullanılarak verilen denklemin çözümüne $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ şeklinde ulaşılır. Legendre polinomlarının kullanıldığı seri açılımın etkinliğini göstermek için dört iterasyon sonucunda elde edilen $u_{leg}(x)$ yaklaşık çözümünden elde edilen sonuçlar, Çizelge 2.4 ve Şekil 2.9'da verilmiştir.

Çizelge 2.4. Örnek 2.3.1'in yaklaşık çözümü sonucu bulunan hatalar.

x	$u(x)$	$\lvert u(x) - u_{tay}(x)\rvert$	$\lvert u(x) - u_{che}(x)\rvert$	$\lvert u(x) - u_{leg}(x)\rvert$
0	1	0	0	0
0.2	0.0399	$0.4\text{x}10^{-11}$	$0.2\text{x}10^{-10}$	$0.5\text{x}10^{-9}$
0.4	0.1593	$0.1\text{x}10^{-7}$	$0.3\text{x}10^{-9}$	$0.6\text{x}10^{-9}$
0.6	0.3522	$0.2\text{x}10^{-5}$	$0.58\text{x}10^{-7}$	$0.59\text{x}10^{-7}$
0.8	0.5971	$0.8\text{x}10^{-4}$	$0.3114\text{x}10^{-5}$	$0.3115\text{x}10^{-5}$
1	0.8414	0.001	$0.578529\text{x}10^{-4}$	$0.578525\text{x}10^{-4}$



Şekil 2.9. $\left|u(x)-u_{tay}(x)\right|$ (kırmızı çizgi), $\left|u(x)-u_{che}(x)\right|$ (noktalı çizgi), $\left|u(x)-u_{leg}(x)\right|$ (siyah çizgi)

Örnek 2.3.2. Hosseini (2006) tarafından verilen $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı

$$u'' + xu' + x^2u^3 = (2+6x^2)e^{x^2} + x^2e^{3x^2} \tag{2.111}$$

lineer olmayan diferensiyel denkleminin başlangıç koşulları

$$u(0)=1, \quad u'(0)=0 \tag{2.112}$$

olsun. Bu denklemin gerçek çözümünün $u(x)=e^{x^2}$ olduğu bilinmektedir. Bu denklemin VIM ile çözümü için, (2.111) denklemi (2.85) formunda yazılırsa $L(u)=\dfrac{d^2u}{dx^2}$, $N(u)=x\dfrac{du}{dx}+x^2u^3$ ve $g(x)=(2+6x^2)e^{x^2}+x^2e^{3x^2}$ bulunur. Bu problemde lineer olmayan terimler için Adomian polinomlarını kullanacağız. Lineer olmayan terim için Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
A_0 &= xu_0' + x^2 {u_0}^3, \\
A_1 &= xu_1' + x^2 \left(3{u_0}^2 u_1\right), \\
A_2 &= xu_2' + x^2 \left(3{u_0}^2 u_2 + 3u_0 {u_1}^2\right), \\
A_3 &= xu_3' + x^2 \left(3{u_0}^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + {u_1}^3\right), \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

bulunur. VIM' de Adomian polinomlarının kullanıldığı doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} Lu_i(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - g(t)\right)dt \tag{2.114}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin staysoner koşulları ise

$$
\begin{aligned}
1 - \lambda'\big|_{t=x} &= 0, \\
\lambda\big|_{t=x} &= 0, \\
\lambda''\big|_{t=x} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

elde edilir. Bu denklemlerden Lagrange çarpanı $\lambda = t - x$ bulunur.

İlk olarak, $m = 10$ için $g(x)$ fonksiyonu Taylor serisine açılırsa

$$g(x) \approx 2 + 9x^2 + 10x^4 + 7.83x^6 + 5.58x^8 + 3.64x^{10} \tag{2.116}$$

bulunur. Başlangıç koşullarından fayadalanarak başlangıç yakınsaması $u_0(x) = u(0) + u'(0)x = 1$ elde edilir. Böylece doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(t)'' + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - (2 + 9t^2 + 10t^4 + 7.83t^6 + 5.58t^8 + 3.64t^{10})\right)dt, \tag{2.117}$$

olarak yazılır. Problemin gerçek çözümü ardışık hesaplamalar neticesinde $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ elde edilir. VIM'nin 3 adım uygulanması sonucu Taylor seri açılımının kullanıldığı yaklaşık çözüm

$$u_{tay}(x) = \sum_{n=0}^{3} u_n(x) = 1 + x^2 + 0.5x^4 + 0.166x^6 + \cdots - 0.1\times10^{-4} x^{26} - 0.3\times10^{-5} x^{28} \tag{2.118}$$

bulunur. Bu yaklaşık çözümün hatası Çizelge 2.5 ve Şekil 2.10'da verilmiştir

Eğer VIM çözüm prosedüründe seri açılımlar için Chebyshev polinomları, lineer olmayan terimler için Adomian polinomları uygulanırsa, doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} Lu_i(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(t)\right)dt, \tag{2.119}$$

olarak yazılır. İlk örnekte verilen prosedür ve Chebyshev polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılarak b_k katsayıları bulunur ve $m=10$ için $g(x)$ fonksiyonunun Chebyshev serisi

$$g(x) \approx 2.0001 - 0.03x + 10.18x^2 + \cdots + 368.67x^{10} \tag{2.120}$$

bulunur. Başlangıç koşulları kullanılarak başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = u(0) + u'(0)x = 1$ olarak elde edilir. Böylece doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(t)'' + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - (2.0001 - 0.03t + 10.18t^2 + \cdots + 368.67t^{10}) \right) dt, \tag{2.121}$$

bulunur. Burada 3 iterasyon sonucunda Chebyshev serisinin kullanıldığı yaklaşık çözüm

$$u_{che}(x) = \sum_{n=0}^{3} u_n(x) = 1 + 1.00006x^2 - 0.005x^3 + 0.59x^4 - \cdots + 0.317x^{27} - 0.03x^{28} \tag{2.122}$$

elde edilir. Bu yaklaşık çözümün hatası ve diğer yaklaşık çözümlerle karşılaştırılması Çizelge 2.5 ve Şekil 2.10'da verilmiştir.

Son olarak lineer olmayan fonksiyonlar için Adomian polinomlarının seri açılım için Legendre polinomlarının kullanıldığı doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} Lu_i(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(t) \right) dt, \tag{2.123}$$

yazılabilir. Örnek 2.3.1'de verildiği gibi Legendre polinomlarının ortogonallik özelliğinden faydalanarak c_k katsayıları bulunur ve $m=10$ için $g(x)$ fonksiyonunun Legendre serisine

$$g(x) \approx 2.0003 - 0.048x + 10.517x^2 + \cdots + 358.91x^{10} \tag{2.124}$$

bulunur. Başlangıç yakınsaması $u_0(x) = u(0) + u'(0)x = 1$ olarak elde edilir. Böylece doğrulama fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda(t)\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(t)'' + \sum_{i=0}^{n} A_i(t) - (2.0003 - 0.048t + 10.517t^2 + \cdots + 358.91t^{10}) \right) dt, \tag{2.125}$$

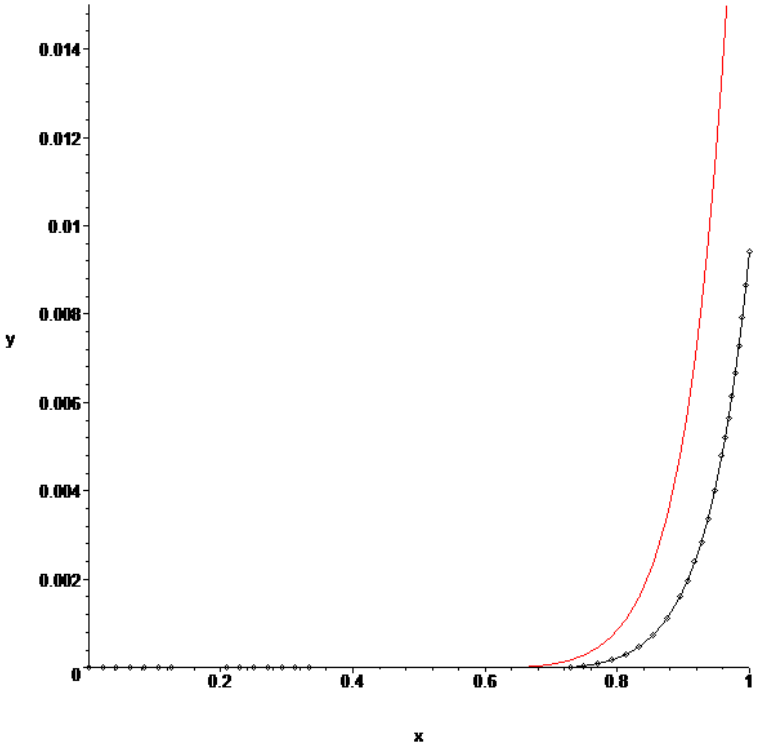
yazılabilir. VIM ile Legendre seri açılımı kullanılarak 3 iterasyon sonucunda yaklaşık çözüm

$$u_{leg}(x) = \sum_{n=0}^{3} u_n(x) = 1 + 1.0001x^2 - 0.008x^3 + 0.626x^4 - \cdots + 0.301x^{27} - 0.029x^{28} \tag{2.126}$$

olarak elde edilir. Bu yaklaşık çözümün hatası ve diğer yaklaşık çözümlerle karşılaştırılması Çizelge 2.5 ve Şekil 2.10'da verilmiştir.

Çizelge 2.5. Örnek 2.3.2'nin yaklaşık çözümü sonucu bulunan hatalar.

x	$u(x)$	$\lvert u(x)-u_{tay}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_{che}(x)\rvert$	$\lvert u(x)-u_{leg}(x)\rvert$
0	1	0	0	0
0.2	1.0408	$0.6\text{x}10^{-8}$	$0.1\text{x}10^{-7}$	$0.1\text{x}10^{-6}$
0.4	1.1735	$0.12\text{x}10^{-5}$	$0.13\text{x}10^{-5}$	$0.14\text{x}10^{-5}$
0.6	1.4333	$0.9\text{x}10^{-5}$	$0.19\text{x}10^{-4}$	$0.194\text{x}10^{-4}$
0.8	1.8964	0.0008	0.000216	0.000215
1	2.7182	0.025	0.0094229	0.0094227



Şekil 2.10. $\lvert u(x)-u_{tay}(x)\rvert$ (kırmızı çizgi), $\lvert u(x)-u_{che}(x)\rvert$ (noktalı çizgi), $\lvert u(x)-u_{leg}(x)\rvert$ (siyah çizgi)

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

3.1 Sonuçlar

Bu çalışmada yaklaşık çözüm metodlarından Adomian ayrışım metodu, Homotopi perturbasyon metodu ve Varyasyonel iterasyon metodunun yetersiz kaldığı bazı problemler için $[-1,1]$ aralığında ortogonal Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomları yardımıyla modifikasyonlar yapılmıştır. Bu modifikasyonlar sonucu elde edilen sonuçların etkinliği, önceki çalışmalarla ve problemin gerçek çözümüyle, grafikler ve çizelgeler yardımıyla, karşılaştırılarak verilmiştir. Elde edilen bu sonuçlara göre bu tür ortogonal polinomların yaklaşık çözüm metodlarının çözüm prosedürlerinde rahatlıkla kullanılabileceği, hatta genel olarak kullanılan Taylor seri açılımından çok daha iyi sonuçlar verdiğini söyleyebiliriz.

3.2 Öneriler

Yapılan bu çalışmada ele alınan problemin doğası gereği $[-1,1]$ aralığında ortogonal Chebyshev, Legendre, Gegenbauer ve Jacobi polinomları kullanılmıştır. Verilen problemin şartlarına uygun olarak bu polinomlar, Diferensiyel dönüşüm metodu gibi, seri çözümlerin kullanıldığı diğer yaklaşık çözüm metodlarının çözüm prosedürlerinde de rahatlıkla kullanılabilir. Ayrıca, yine problemin tanımlandığı aralığa bakılarak, uygun dönüşümler yardımıyla $(-\infty,\infty)$ aralığında ortogonal Hermite polinomları veya $(0,\infty)$ aralığında ortogonal Laguerre polinomları kullanılarak da problemlerin çözümüne ulaşılabilir.

4. KAYNAKLAR

Abassy, T.A., El-Tawil, M.A., El-Zoheiry, H., 2007, Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Padé technique, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 940-954.

Abbasbandy, S., 2007, A new application of He's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 59-63.

Abdelwahid, F., 2003, A mathematical model of Adomian polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 141, 447-453.

Abramowitz, M.. Stegun, A.I., 1965, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, *Dover Publications*, New York.

Adomian, G., 1986, Nonlinear sthochastic operator equations, *Academic Press*, New York.

Adomian, G., 1988, A review of the decomposition method in applied mathematics, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501-544.

Adomian, G., 1988, An adaptation of the decomposition method for asymtotic solutions, *Mathematics and Computers in Simulation*, 30, 325-329.

Adomian, G., 1994, Solving Frontier problems of Physics: The decomposition method, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Andrews, G.E.,Askey, R., Roy, R., 1999, Special Functions, *Cambridge University Press*, USA.

Andrews, L.A., 1985, Special functions for engineers and applied mathematicians, *Macmillan Publishing Company*, London.

Babolian, E., Biazar, J., 2002, On the order of convergence of Adomian method, *Applied Mathematics and Computation*, 130, 383-387.

Babolian, E., Javadi, S., 2003, Restarted Adomian method for algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 146 (2-3) 533-541.

Babolian, E., Javadi, S., Sadeghi, H., 2004, Restarted Adomian method for integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 153 (2-4) 353-359.

Biazar, J., 2005, Solution of systems of integral–differential equations by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 1232-1238.

Biazar, J., Ghazvini, H., 2009, Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 2633-2640.

Cherrauault, Y., 1989, Convegence of Adomian's method, Kybernetes 18, 31-38.

Chow, T.L., 2000, Mathematical Methods for Physicists:A concise introduction, *Cambridge University Press*, Australia.

Çenesiz, Y., Kurnaz, A., 2011, Adomian decomposition method by Gegenbauer and Jacobi polynomials, *International Journal of Computer Mathematics*, 88 (17) ,3666-3676.

Çenesiz, Y., Kurnaz, A., 2011, Homotopy Perturbation Method by Legendre Polinomials, *International Conference on Applied Analysis and Algebra-ICAAA 2011*, İstanbul-Turkey, 201.

Çenesiz, Y., Kurnaz, A., 2011, Variational Iteration Method with Legendre, Chebyshev and Adomian polynomials, *The 24th International Conference on Jangjeon Mathematical Society- ICJMS-2011*, Konya-Turkey, 62.

Darvishi, M.T., Khani, F., Nezhad, S.H., Ryu, S.W., 2010, New modification of the HPM for numerical solutions of the sine-Gordon and coupled sine-Gordon equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 87, 908–919.

El Attar, R., 2006, Special functions and orthogonal polynomials, *Lulu pres*, USA.

Fox, L., Parker, I.B., 1968, Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, *Oxford University Press*, Belfast.

Ghorbani, A., 2009, Beyond Adomian polynomials: He polynomials, *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 1486-1492.

Ghorbani, A., Nadjafi, J.S., 2007, He's homotopy perturbation method for calculating Adomian polynomials, *International Journal of Nonlinear Science and Numeric Simulation*, 8, 229-232.

Ghorbani, A., Nadjafi, J.S., 2009, An effective modification of He's variational iteration method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 2828-2833.

Hazewinkel, M., 2001, Encyclopedia of Mathematics, *Kluwer Academics Publishers*, Dordrecht.

He, J.H., 1997, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2, 230-235.

He, J.H., 1997, Semi-inverse method of establishing generalized principles for fluid mechanics with emphsis on turbomachinery aerodynamics, *Int. J. Turbo Jet-Engines*, 14, 23-28.

He, J.H., 1997, Variational iteration method for delay differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2, 235-236.

He, J.H., 1998, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167, 57-68.

He, J.H., 1998, Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167, 69-73.

He, J.H., 1999, Homotopy perturbation technique, *Comput. Methods Appl. Engrg.*, 178, 257-262.

He, J.H., 2000, A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems, *Int. J. Non-linear Mech*, 35, 37-43.

He, J.H., 2003, Homotopy pertubartion method: a new non-linear analytical technique, *Appl. Math. Comput.*,156, 527-539.

He, J.H., 2007, Variational iteration method-Some recent results and new interpretations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 3-17.

Hosseini, M.M., 2006, Adomian decomposition method with Chebyshev polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 175, 1685-1693.

Jafari, H., Alipour, M., Tajadodi, H., 2010, Convergence of Homotopy Perturbation Method for solving integral equations, *Thai Journal of Mathematics*, 8, 511-520.

Javidi, M., 2009, Modified homotopy perturbation method for solving system of linear Fredholm integral equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 50,159-165.

Kalla, I.L., 2007, Error analysis of Adomian series solution to a class of nonlinear differential equations, *Applied mathematics E-notes*, 7, 214-221.

Liu, Y., 2009, Adomian decomposition method with orthogonal polynomials: Legendre polynomials, *Mathematical and Computer Modelling*, 49,1268-1273.

Luo, X.G., 2005, A two-step Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 170, 570-583.

Mason, J.C., Handscomb, D.C., 2003, Chebyshev Polynomials, *ACRC Press Company*, Florida

Mohyud-Din, S.T., Noor, M.A. 2008, Homotopy Perturbation Method and Padé Approximants for Solving Flierl-Petviashivili Equation, *Appl. Appl. Math*, 3, 224-234.

Momani, S., Abuasad, S., 2006, Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 27, 1119-1123.

Noor, M.A., Noor, K.I., Din, S.T.M., 2009, Modified variational iteration technique for solving singular fourth-order parabolic partial differential equations, *Nonlinear Analysis*, 71, 630-640.

Odibat, Z., Momani, S., 2008, Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos, Solitons & Fractals*, 36, 167-174.

Odibat, Z.M., 2008, Reliable approaches of variational iteration method for nonlinear operators, *Mathematical and Computer Modelling*, 48, 222-231.

Odibat, Z.M., 2010, A study on the convergence of the variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 1181-1192.

Philips, G.M., 2003, Interpolation and Approximation by Polynomials, *Springer*,, USA.

Pourdavish, A., 2006, A reliable symbolic implementation of algorithm for calculating Adomian polinomials, *Applied Mathematics and Computation*, 172, 545-550.

Ray, S.S., Bera, R.K., 2006, Analytical solution of a fractional diffusion equation by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 174 329-336.

Roozi, A.,Alibeiki, E., Hosseini, S.S.. Shafiof, S.M., Ebrahimi, M., 2011, Homotopy perturbation method for special nonlinear partial differential equations, *Journal of King Saud University*, 23, 99-103.

Scanlon, P.J., 1987, An alternative form for the Legendre polynomial expansion coefficients, *Journal of Computational Physiscs*, 69, 482-486.

Snyder, M.A., 1966, Chebyshev Methods in Numerical Approximation, *Prentice-Hall Inc.*, USA.

Soltani, L.A., Shirzadi, A., 2010, A new modification of the variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 2528-2535.

Stein, E., Weiss, G., 1971, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, *Princeton University Press*, Princeton.

Suetin, P.K., 2001, Encyclopedia of Mathematics, *Kluwer Academic Publishers*.

Szegö, G., 1939, Orthogonal Polynomials, *American Mathematical Society Colloquium Publications* ,Volume XXIII New York City.

Tatari, M., Dehghan, M., 2007, On the convergence of He's variational iteration method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 121-128.

Tien, W.C., Chen, C.K., 2009, Adomian decomposition method by Legendre polynomials, *Chaos, Solitons & Fractals*, 39, 2093-2101.

Wazwaz, A.M., 1999, A reliable modification of Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 102, 77–86.

Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 111, 53-69.

Wazwaz, A.M., El-Sayed, S.M., 2001, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 122, 393–405.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yücel ÇENESİZ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Karapınar, 15.02.1982
Telefon : 0(332) 223 39 61
Faks : 0 332) 241 24 99
e-mail : ycenesiz@selcuk.edu.tr.

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Cumhuriyet Lisesi, Selçuklu, Konya	1999
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2004
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2007
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2012

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2005-2012	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI
Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri
YABANCI DİLLER
İngilizce

YAYINLAR

A. <u>Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler</u>:

A1. Çenesiz Y., Keskin, Y., Kurnaz, A., “The solution of the Bagley–Torvik equation with the generalized Taylor collocation method”, Journal of the Franklin Institute, 10(6), 2010. (Yüksek Lisans Tezinden)

A2. Çenesiz Y., Koç A.B., Çitil B., Kurnaz, A., “Pade embedded Piecewise Differential Transform Method for the solution of ODE’s”, Mathematical & Computational Applications, 15(2), 2010.

A3. Çenesiz Y., Keskin, Y., Kurnaz A., "The solution of the nonlinear dispersive K(m,n) equations by RDT method", International Journal of Nonlinear Science, 9(4), 2010.

A4. Çenesiz Y., Kurnaz, A., Adomian decomposition method by Gegenbauer and Jacobi polynomials, International Journal of Computer Mathematics, 88 (17) ,2011. (Doktora Tezinden)

B.Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (*Proceedings*) basılan bildiriler:

B1. Keskin, Y., **Çenesiz, Y.**, Servi, S., Eser, H., Kurnaz, A., Oturanç, G., "A New Approach To Gas Dynamics Equation: An Application of The Differential Transform Method", International Conference on Modelling and Simulation (MS'06 Turkey), 28-29-30 August, Konya Turkey, 2006.

B2. Keskin, Y., **Çenesiz, Y.**, Kurnaz, A.,"N-dimensional differential transformation method for solving PDEs", Fourth International Conference of Applied Mathematics and Computing – FICAMC August 12-17, 2007.

B3. Çenesiz Y., Keskin, Y., Kurnaz, A., "The solution of the Bagley–Torvik equation with the generalized Taylor collocation method", 14th International Congress on Computational and Applied Mathematics, ICCAM 2009. (Yüksek Lisans Tezinden).

B4. Koç A. B., Peker H. A., Karaoğlu O., Keskin Y., **Çenesiz Y.**, Oturanç G., Servi S. "Application of Padé approximation of differential transform method to the solution of prey and predator problem", 14th International Congress on Computational and Applied Mathematics , ICCAM 2009.

B5. Çenesiz Y., Keskin, Y., Kurnaz, A., "The solution of the nonlinear evolution equations by Reduced Differential Transfom Method" The First International Conference on Mathematics and Statistics, AUS-ICMS'10.

B6. Çenesiz, Y., Kurnaz, A., 2011, Homotopy Perturbation Method by Legendre Polinomials, International Conference on Applied Analysis and Algebra-ICAAA 2011. (Doktora Tezinden)

B7. Çenesiz, Y., Kurnaz, A., 2011, Variational Iteration Method with Legendre, Chebyshev and Adomian polynomials, The 24th International Conference on Jangjeon Mathematical Society- ICJMS-2011. (Doktora Tezinden)

C.<u>Ulusal dergilerde yayınlanan makaleler</u> :

C1. Çenesiz Y., Keskin, Y., Kurnaz, A., The Solution of the Nonlinear Dispersive K(m,n,1) Equations by RDT Method, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 12 (2), 2011.

D.<u>Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (*Proceedings*) basılan bildiriler</u>:

D1. Koç A. B., **Çenesiz Y.**, Keskin, Y., Kurnaz, A. "Whitham-Broer-Kaup ve Broer-Kaup-Kupershmidt Denklemleri ve Gezici Dalga Çözümleri Üzerine Genel Bir Bakış", 1. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 2009.

D2. Çenesiz Y., Keskin Y., Kurnaz A., "Nonlineer dispersive *K(m,n,1)* denklemlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü", 5. Ankara Matematik Günleri, 2010.

D3. Keskin Y., **Çenesiz Y**., Oturanç G., "RLW denkleminin nümerik çözümleri için indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi", 5. Ankara Matematik Günleri, 2010.

D4. Çenesiz Y., Keskin Y., Kurnaz A., İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm yöntemiyle lineer olmayan dispersive *K(m,n)* denklemlerinin çözümü, 2. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 2010.

D5. **Çenesiz Y.,** Koç A. B., Kurnaz A., Boussinesq benzeri B(m,n) denklemlerinin İndirgenmiş Diferensiyel Dönüşüm yöntemi ile çözümü, 3. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 2011.