İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASTERNAK ZEMİNE OTURAN SONSUZ BİR KİRİŞİN HAREKETLİ TEKİL YÜK ALTINDAKİ DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nagehan EVCAN

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASTERNAK ZEMİNE OTURAN SONSUZ BİR KİRİŞİN HAREKETLİ TEKİL YÜK ALTINDAKİ DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nagehan EVCAN
(501091134)

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abdul HAYIR

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501091134 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Nagehan Evcan,** ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"PASTERNAK ZEMİNE OTURAN SONSUZ KİRİŞİN HAREKETLİ TEKİL YÜK ALTINDAKİ DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde basarı ile sunmustur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Abdul HAYIR** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Eş Danışman :	**Prof.Dr. Ünal ALDEMİR** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. İrfan Coşkun** Yıldız Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : **18 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **26 Ocak 2012**

Babama,

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince yardımlarını, hoşgörüsünü ve değerli vaktini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Abdul HAYIR' a gösterdiği yakın ilgi ve değerli katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Öğrenim hayatım boyunca hep yanımda hissettiğim ve burada olmama sebep olan aileme herşey için teşekkür ederim.

Ocak 2012

Nagehan EVCAN
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
KISALTMALAR ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
ÖZET ..... **xvii**
SUMMARY ..... **xix**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Amacı 1
1.2 Literatür Araştırması 2
2. ELASTİK ZEMİN MODELLERİ **5**
2.1 Tek Parametreli Zemin Modelleri 5
2.1.1 Winkler zemin modeli 5
2.2 İki Parametreli Zemin Modelleri 7
2.2.1 Flonenko-Borodich modeli 7
2.2.2 Hetenyi modeli 8
2.2.3 Pasternak modeli 8
2.2.4 Vlasov modeli 9
2.3 Üç Parametreli Zemin Modelleri 10
3. HIZLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ **13**
3.1 Hızlı Fourier Dönüşümü Tanımı 13
3.1.1 Hızlı fourier dönüşümü algoritmaları 14
4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ **19**
4.1 Kirişin Temel Formülleri 19
4.1.1 Kirişin Winkler zemini için çözümü 20
4.1.2 Kirişin Pasternak zemini için çözümü 21
5. SAYISAL ANALİZLER **25**
5.1 Winkler Zemin Modeli İçin Frekans Tanımlı Diyagramlar 25
5.2 Pasternak Zemin Modeli İçin Frekans Tanımlı Diyagramlar 27
5.3 Winkler ve Pasternak Zemin Modellleri İçin Karşılaştırmalı Diyagramlar 29
6. SONUÇ VE ÖNERİLER **31**
KAYNAKLAR **33**
ÖZGEÇMİŞ **35**

KISALTMALAR

DFT **:** Discrete Fourier Transform
FFT **:** Fast Fourier Transform
HFT **:** Hızlı Fourier Dönüşümü

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : "*k*" yay katsayısının zemin türlerine göre değerleri …….....6

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Winkler zemin modeli. 5
Şekil 2.2 : Filonenko-Borodich zemin modeli. 8
Şekil 2.3 : Pasternak zemin modeli 9
Şekil 2.4 : Vlasov Zemin modeli 9
Şekil 3.1 : Frekans desimasyonlu HFD için temel kelebek hesaplaması 17
Şekil 4.1 : Elastik zemin üzerine oturan sonsuz kiriş modeli. 19
Şekil 5.1 : Winkler zemin üzerine oturmuş kirişin çeşitli tekil yük hızlarına verdiği dinamik çökme tepkisinin farklı çözüm metodlarıyla karşılaştırılması. .. 25
Şekil 5.2 : Winkler zemini üzerindeki kirişin değişik hızlara göre çökme miktarı. .. 26
Şekil 5.3 : Kirişin farklı zemin rijitliklerine göre çökme miktarı diyagramı. 26
Şekil 5.4 : Pasternak zemin üzerine oturmuş kirişin çökme miktarı diyagramı. 27
Şekil 5.5 : Çeşitli kesme modülleri G_p için dinamik çökme miktarı diyagrami. 26
Şekil 5.6 : Pasternak zemin üzerindeki kirişin çökme miktarı değişim diyagramı. .. 27
Şekil 5.7 : Winkler ve Pasternak modelleri için hızın çökmeyle değişim diyagramı. 29
Şekil 5.8 : Winkler ve Pasternak modelleri için dinamik çökme diyagramı. 30

PASTERNAK ZEMİNE OTURAN SONSUZ BİR KİRİŞİN HAREKETLİ TEKİL YÜK ALTINDAKİ DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

ÖZET

Çeşitli özellikteki zeminler ile temas halinde olan mühendislik yapılarının hesapları günümüzde giderek önem kazanan konulardandır. Hesaplarda genel olarak varsayımlara dayalı çeşitli tiplerde zemin modelleri kullanıldığı gibi, kullanılan analiz yöntemleri de çeşitli olabilmektedir. Bu tez çalışmasında birçok mühendislik uygulmasında karşılaşılan ve birçok pratik uygulamaya örnek olan elastik zemine oturan kiriş problemi ve dinamik davranışı incelenmektedir. Elastik zemin modeli olarak sonsuz kiriş için elastik zemin modellerinden iki parametreli olan ve kayma etkilerini de hesaba katan Pasternak zemin modeli seçilmiştir. Literatürde geniş bir kaplayan ve matematiksel açıdan daha kolay olan, tek parametreli zemin modeli olan Winkler zemin modelinin seçilmemiş olmasının sebebi iki parametreli zemin modellerine kıyasla gerçekçilikten daha uzak olmasıdır. Seçilen pasternak zemin üzerine oturan sonsuz kirişe hareketli tekil yük etkitilmiştir.

Bu çalışmada tezin amacından bahsedilmiş, bu konuda çalışan bilim adamlarının konu hakkındaki çalışmalarına değinilmiş ve literatür çalışması yapılmıştır. Bu çalışmada kısaca geçmişte ve günümüzde hala kullanılmakta olan zemin modellerinden bahsedilmiş, sınıflara ayrılmış aralarındaki farklar ve benzerlikler; şekillerle ve formulasyonlarla belirtilmiştir. Tez konusu olarak neden iki parametreli olan Pasternak zemin seçildiğine dair açıklamalar yapılmış, bu zemin modelinin diğer modellere göre olumlu ve olumsuz yanları incelenmiştir. Çözümde kullanılan matematiksel yöntem olan Hızlı Fourier Dönüşümü, ters Fourier uygulaması ve zaman ortamından frekans ortamına geçiş hakkında açıklamalar yapılmış, tez konusu problemde şekil üzerinde uygulamalı olarak gösterilmiştir. Zemin üzerine oturan kiriş homojen, izotrop ve sonsuz uzunluktaki bir kiriş olarak düşünülmüştür. Buna ek olarak incelemenin konusu olan hareketli tekil yük altındaki sonsuz kiriş problemi günümüzde de hala en çok kullanılan zemin modellerinden olan Winkler zemin modeline de uygulanmış Pasternak zemin modeliyle kıyaslanmıştır.

Hızlı Fourier dönüşümü uygulanmış analiz sonuçları frekans ortamına çevrilmiş, elde edilen sonuçlar bilgisayar ortamında Mathematica programında grafiklere dökülmüştür. Bilgisayar programı kullanılarak grafiklere dökülen sonuçların zemin tipine göre çeşitli verileri değiştirilerek kıyaslama ortamı sağlanmıştır.

Son bölümde ise her iki zemin tipinede aynı veriler uygulanarak, karşılaştırmalı grafikler elde edilmiş olup, elde edilen grafiklere, sonuçlara ve kıyaslamalara dayanılarak zemin modellerinde gerçekçilik irdelenmiştir.

DYNAMIC RESPONSE OF A INFINITE BEAM ON A PASTERNAK FOUNDATION AND UNDER A MOVING LOAD

SUMMARY

In recent years considerable attention has been given to the response of elastic beams on an elastic foundation which one of the structural engineering problems of theoreticl and practical interest. A large number of studies have been devoted to the subject. In these studies a number of foundation models having various degrees of sophistication have been used to capture the complex behaviour of the soil.

Calculation of engineering structure, which is in contact with foundation has several features, has became more important in recent years. As different models of foundation are used, analysing method of calculation can be different.

The purpose of this study is to analyze the dynamic response of beam on a elastik foundation, which has drawn a lot of attention due to its wide aplications in the engineering area.

The concept of beams and slabs resting on elastic foundations has been extensively used by geotechnical, pavement and railroad engineers for foundation design and analysis. The analysis of structures resting on elastic foundations is usually based on a relatively simple model of the foundation's response to applied loads.

Generally, the analysis of bending of beams resting on an elastic foundation is developed on the assumption that the reaction forces of the foundation are proportional, at every point, to the deflection of the beam at that point. The vertical deformation characteristics of the foundation are defined by means of continuous, closely spaced linear springs. The constant of proportionality of these springs is known as the modulus of subgrade reaction, k_0. This simple representation of elastic foundation was introduced by Winkler in 1867. The Winkler's model, which has been originally developed for the analysis of railrod tracks, is very simple but does not accurately represent the characteristics of many practical foundations. One of the most important deficiencies of the Winkler's model is that a diplacement discontinuity appears between the loaded and the unloaded part of the foundation surface. In reality, the soil surface does not show any discontinuity.

In order to eliminate the deficiency of Winkler's model, improved theories have been introduced on refinement of Winkler's model, by visualizinh various types of interconnections such as shear layers and bems along the Winkler springs (Filonenko-Borodich (1940), Hetenyi (1946), Pasternak (1954), and Vlasov (1960)). These theories have been attemped to find an applicable and simple model of representation of foundation medium.

Although the Winkler's model is a poor represention of the many practical subgrade or subbase materials, it is widely used in soil-structure problems for almost one and a half century. The foundation represented by Winkler model can not sustain shear stresses, and hence discontinuity of adjacent spring displacements can occur. This is

the prime short-coming of this foundation model which in practical applications may result in significant inaccuracies in the evaluated structural response. İn order to overcome this problem many researchers have been propesed various mechanical foundation models considering interactions with the surroundings. Among them it is mentioned the class of two parameter foundations named like this because they have the second parameter which introduces interactions between adjacent springs, in addition to the first parameter from the ordinary Winkler's model. This class of models includes Filonenko-Borodich, Pasternak, Hetenyi, and Vlasov foundations. Mathematically, the equations to describe the rection of the two parameter foundations are equilibrium ones, and the only difference is the definition of the parameters.

Two parameter foundation models are more accurate than the one parameter foundation model. As a special case if the second parameter is neglected, the mechanical modeling of the foundation using the Pasternak's formulation converges to the Winkler's formulation. The simplest model for the soil is the one parameter Winkler model which represents the soil as a system of closely spaced but mutually independent linear springs. In the model, the foundation reaction is assumed to be proportional to the vertical displacement of the foundation at the same point. However, the Winkler model has various shortcomings due to the independence of the springs. Becuse the springs are assumed to be independent and unconnected to each other, no interaction exists between the springs. When loading displays a discontinuity, similar discontinuity will appear on the foundation surface as well. The soil outside the loading area does not contribute to the foundation response. In order to take care of these shortcomings and to improve the model, two parameter models have been proposed. Pasternak model is one of the simplest two parameter models used commonly.

This model can be visualized as a system of closely spaced linear springs coupled to each other with elements which transmit a shar foce proportionl to the slope of the foundation surface. The model can be seen as a membrane having a surface tension laid on a system of elastic springs as well. Due to connection of spring the continuity of the foundation surface is maintained. However, a discontinuity in slope of the displacement can appear at a edge of the beam or the plate resting on the foundation. The anaytical aspects of the continuously supported structures and corresponding boundary conditions on various soil models have been discussed by Kerr (1964, 1976). İt is pointed out that the intuitive approach in the boundary conditions may lead to the incorrect formulationof the boundary conditions for the case of a two parameter foundation model.

In this study; Pasternak model is used, in which shear interaction between the springs is considered, to represent the soil foundation. Up to now,the beams on two parameter foundations subjected to moving loads have received less attention, probably because of the model complexity and difficulties in estimating parameter values. The dynamic response of a beam subjected to moving harmonic load is investigated in this thesis. The beam is assumed as an infinite Bernoulli-Euler beam with constant cross section, and the soil is represented by a Pasternak foundation model.

Static and dynamic responses of a completely free elastic beam resting on a two parameter tensionless Pasternak foundation are investigated by assumed that the beam is symetrically subjected to a uniformly distributed load and concentrted load

at its middle. Governing equations of the problem are obtained and solved by paying attention on the boundary conditions of the problem including the concentrated edge foundation reaction in the case of complete contact and lift-off condition of the beam in a two parameter foundation. The nonlinear governing equation of the problem is evaluated numerically by adopting an iterative procedure. Numerical results are presented in figures to demonstrate the non linear behaviour of the beam foundation system for various values of the parameters of the problem compratively by considering the static and dynamic loading cases.

The two parameter Pasternak foundation assumes the existence of shear interaction between the spring elements. This may be accomplished by connecting the ends of the springs with a beam consisting of incompressible vertical elements which deform only by transverse shear. The stiffness of the springs and the shear rigidity of this beam are the two parameters of the foundation.

Of all available elastic foundation models, the Pasternak's one is the most natural extension of the Winkler's model for homogeneous foundation soil, when the second parameter, shear modulus, is considered in the analysis.

Response of structural elements resting on the one and two parameter foundation is usually analyzed by assuming that the foundation supports compressive as well as tensile stresses. Athough this assumption simplifies the analysis considerably, it is questionable or not valid for many supporting media including the soil. In order to increse the validity of the model, tensionless foundation models which can support compressive reactions only are introduced. In this model separation between the foundation and the structural element takes place in order to avoid the tensile stresses. However, this assumption complicates the analysis makes it highly non-linear, since the region of contact and seperation is not known in advance. As a result, only a limited number of studies dealing with tensionless foundation are published.

Response of structural elements such as, rings and beams on tensionless Winkler fondation is considered. There are various studies dealing with the static problems and the dynamic problems. The papers dealing with the rectangular and cicular plates on tensionless Winkler foundation can be considered as extension of the beam problem. There are various studies dealing with the plates subjected to static loads and to dynamic loads. Generally, in order to investigate lift-off occurence from the foundation and seperation condition, completely free beams and plates are considered in many studies and solutions are obtained by applying approximate numerical techniques to the nonlinear governing equation of the problem by employing the coordinate functions which satisfy the corresponding boundary conditions. In this way the nonlinear problem is reduced to the iterative solution of the system of the nonlinear algebraic equations, since the contact region is not known in advance. On the other hand, when the load is a function of time, then the contact region appears as a function of time as well. After the initial configuration of the contact region is found, the numerical analysis is carried out by adopting step-wise integration in the time domain by updating the contact region continuously.

There are various studies dealing with the structural elements resting on the conventionl two-parameter foundation assuming continuous contact. When the boundary of the beam or the plate is fixed, then the boundary condition does not pose any new aspect that of the Winkler foundation. However, when a free end of the beam or plate is considered, then the corresponding boundary condition includes an

additional concentrated load due to the membrane stiffness of the two-parameter foundation. When tensionless two-parameter Pasternak model is considered, the solution gets more complicated due to the free edge conditions even in the static problems. Another major difficulty lays in the definition of the contact zone. Due to these reasons the number of the publications on a two-parameter foundation model that reacts in compression only is very limited. Nonlinear oscillations take place, when the external loads depend on time.

The beam and foundation were assumed to be homogeneous and isotropic. In the solution, the double Fourier transform technique is used to reduce the governing partial differantial equation to an algebraic equation and used the inverse Fourier transform to obtain the analytical solution of the integral form Fast Fourier Transform is applied to obtain explicit solution.

1. GİRİŞ

Uygulama alanı kapsamı nedeniyle elastik zemine oturan kirişlerin titreşim ve stabilite problemlerinin çözümü ile ilgili, yapı ve geoteknik mühendisleri kapsamlı çalışmalar yapmaktadır. Elastik zemine oturan kiriş problemleri, özellikle endüstride çeşitli fabrika kren ve makinelerin sabitlenmesinde, nükleer enerji santrallerinde, uçak hangarlarında, yapı temelleri ve demiryolu uygulamalarında geniş uygulama alanına sahiptir. Bu yüzden elastik zemin üzerine oturan kirişlerin problemleri özel bir önem kazanmaktadır. Daha çok yüksek maliyet gerektiren büyük kapsamlı projelerde ve stratejik yapılarda kullanılan elastik zemine oturan kirişlerin, her türlü dış etkiye karşı yeterli güvenlik seviyesinde inşa edilmesi önem kazanmaktadır. Dolayısı ile, gerek mevcut yükler ve kendi ağırlıkları altındaki gerilme, deformasyon, eğilme ve çeşitli noktalardaki deplasmanların statik hesapları ve gerekse deprem gibi dinamik yükler altındaki dinamik analizler yeterli hassasiyetle yapılmalıdır. Bu tür problemlerde kirişle zemin etkileşim halinde olduğundan zeminin davranışının yapıya olan etkisi önemli olmaktadır.

Yapıya etkiyen yükler en kısa yoldan zemine iletilmekte ve bu etkilere karşı zemin-yapı sistemi birlikte karşı koymaktadır. Sistemin davranışını inceleyebilmek için öncelikle bazı kabullerin yapılması, yani bir zemin modelinin baştan kabul edilmesi gerekmektedir. Bunun nedeni zeminin karışık ve belirsiz elastik özelliklere sahip olması ve plastik deformasyon yapabilmesidir.

Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileriyle ilgili yapılan hipotezler olmuştur. Ortaya çıkan bu modellerin daha çok zemin-yapı etkileşimini ortaya koyan basit ve gerçekçi özelliklere sahip olması ihtiyacı giderek önemini artırmaktadır.

1.1 Tezin Amacı

Zemin-yapı etkileşiminin belirlenmesindeki asıl amaç, zeminin yapı üzerinde oluşturacağı etkileri ortaya koyarak bu etkileri hesaplarda dikkate almaktır. Bu ilişkiyi belirlemek zeminin karmaşıklığından dolayı oldukça zordur. Beton ve çelik

yapıların davranışları lineer ve izotrop olduğu kabul edilip yeterli doğrulukta modellenip analiz edilebilirken; bunun aksine zemin, homojen ve izotrop olarak kabul edilememesi durumunda, doğrusal olmayan bir davranış göstermektedir. Ayrıca zemin parçacıklarının şekilsel, boyutsal ve mekanik özellikleri, zeminin nem durumu, suya doygunluğu ve permeabilitesi gibi çeşitli özelliklerini belirlemektedir. Fakat bu değişkenlerin kesin ve net olarak belirlenmesi neredeyse mümkün olmamaktadır. Bu sorun probelemi daha karışık hale getirmektedir. Her ne kadar bu konu literatür çalışmasında önemli bir rol oynasa da zemin-yapı etkileşiminde zemin davranışının rolü tam olarak çözülememektedir.

Elastik zemine oturan kiriş problemlerinin matematiksel çözümü zeminin oldukça karmaşık bir yapıya sahip olması sebebiyle yapılan idealleştirmeler genellikle zeminin fiziksel ve mekanik davranışları ile ilgili olmaktadır. Burada şu da belirtilmelidir ki oluşturulan zemin modelleri, zemini oluşturan partiküller için değil zeminin bütünü göz önüne alınarak çıkarımıştır. Genel olarak şimdiye kadar bu konuyla ilgili ortaya çıkan modelleri üç grup halinde toplayabiliriz; bir parametreli, iki parametreli ve üç parametreli zemin modelleri.

Bu çalışmada, elastik zemin modeli olarak çekme almayan, iki parametreli bir model olan Pasternak zemini modeli olarak seçilmiş ve üzerindeki sonsuz uzunluktaki kirişin hareketli yük altındaki stabilitesi ve serbest titreşimi ele alınmıştır. Genel olarak üç grupta toplanan zemin modellerini ayrı ayrı incelemek ve aralarındaki farkları ortaya koyarak, gerçekçiliğe daha yakın sonuç alabilmek için farklı çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

Elde edilen buguları kanıtlamak için kapsamlı sayısal hesaplar yapılmıştır. Sayısal hesaplarda Mathematica bilgisayar programı kullanılmıştır.

Problemin çözümünün doğruluğunu kanıtlamak için literatürde bulunan mevcut çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır.

1.2 Literatür Araştırması

Elastik zemin üzerine oturan kirişler ve plaklar üzerine yapılan çalışmalar, bu tür problemlerin geniş uygulama alanı bulmaları nedeniyle, oldukça fazladır. Bu bölümde bu tezde faydalanılan bazı çalışmalar gözden geçirilecektir.

Genel olarak zemin modelleri hakkında en temel araştırmalar Winkler (1867), Filonenko-Borodich (1940), Hetenyi (1916; 1950), Pasternak (1954), ve Vlasov-Leont'ev (1966) şeklinde söylenebilir.

Zimmerman (1988) yatak katsayısını bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traversleri hasabında kullanarak, kendi özel uygulamalarında belirli türdeki, zeminler için bulduğu ve kullandığı *k* değerlerini vermiştir.

Dumir ve Bhaskar (1988) Winkler ve Pasternak tipi elastik zemin üzerine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan statik hesabını yapmışlardır. Çalışmada ortogonal nokta kollokasyon metodu kullanmışlardır.

Winkler zemin tipi üzerinde 1946'da Hetenyi (1964) çalışmıştır. Hetenyi daha çok kesin çözümlerle ilgilenmiştir. Kesin çözümler büyük bir zaman kaybına sebep olduğu için, birçok araştırmacı bu zaman kaybından kurtulmak amacıyla daha genel olan sayısal metodları geliştirerek problemleri çözmeye çalışmışlardır.

Miranda ve Nahir (1946) sonlu uzunluktaki elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin, özel fonksiyonlarla çözümünü yapmış ve bununla ilgili sayısal örnekler vermişlerdir.

Qin (1994) yaptığı çalışmada, kare bir plağın çeşitli noktalaındaki çökmelerini ve eğilme momentlerini Winkler ve Pasternak zemin türü için incelemiştir. Çalışmada hibrit bir sonlu eleman modeli önerilmiştir.

Celep, Malaika ve Hussein (1988) çekmeye çalışmayan Winkler zeminine outran sonlu kirişin zorlanmış titreşimleri Galerkin yöntemini kullanarak incelemişlerdir ve çeşitli yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının değişimi ile çeşitli çökmelerin zamanla değişimini incelemişlerdir.

De Rosa (1988) ise Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetlenme koşulları altında, eksenel yük altında titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı kabul edilmiştir.

Engin (1992) elastik-plastik zemine oturan ağırlıksız kiriş ve ince dairesel plakların tekil yük altında davranışını incelemiştir. Zeminin yanlız basınç gerilmesi aktardığı ve belirli bir çokmede plastikleştiği kabul edilmiştir. Çözümün sonunda, elastik-plastik ve yapının zeminden ayrıldığı sınırda, tekil yükün siddeti ve plağın yarıçapı değişimi ile gözlenmiştir.

Dillard (1989) tarafından yapılan çalışmada Winkler elastik zeminine oturan dikdörtgen ve kare plakların eğilme hesabı analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Sistemin yönetici denklemi 6. mertebeden diferansiyel denklem olup, çözümü seriler yardımıyla yapılmıştır. Çalışmada tekil yük ve tekil moment etkileri dikkate alınmıştır.

Vlasov modelinde, tahmine dayanılarak değer verilen çökmenin enine doğrultudaki dağılımlarını gösteren γ parametresinin elastik zemine oturan kiriş için ardışık yaklaşım yöntemi ile nasıl elde edileceği Vallabhan ve Das (1988) tarafından yapılan çalışmada incelenmiştir. Potansiyel enerjinin minimum yapılması kuralına bağlı olarak, Vlasov modeline ait diferansiyel denklemlerin diğer bir yol olarak nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Zeminin özelliklerinin derinlikle lineer olmayan şekilde değiştiği, tabakalı Vlasov tipi zemin modelinin sonlu eleman yöntemi ile incelenmesini Vallabhan ve Daloğlu (1999) yaptıkları çalışmasında ele almışlardır. Çalışmada, düzlemsel sonlu elemanın rijitlik matrisinin, plağa, zeminin çökmesine ve kayma deformasyonuna bağlı olarak üç kısımdan oluştuğu gösterilmiştir.

Nath ve Jain (1983) tarafından yapılan çalışmada Winkler- Pasternak elastik zemine oturan basık küresel kabuğun lineer olmayan dinamik analizi sürekli adım yük fonksiyonu için elde edilmiştir. Kabuk yönetici denklemi Donnel kabuki teorisi ile çıkarılmıştır. Elde edilen kısmi türevli nonlinear hareket denklemi Taylor serisine açılarak lineerleştirilmiştir.

Henwood vd. (1981) Winkler tipi elastik zemine oturan kalın plakların çözümünü sonlu farklar yöntemini kullanarak gerçekleştirmiştir. Elde ettiği sonuçları sonlu eleman çözümleri ile kıyaslamıştır.

Engesser (1893) kiriş genişliği ile zemin yatak katsayısının ters orantılı olduğuna işaret etmiştir. Yani kiriş genliği arttıkça zemin yatak katsayısı azalmaktadır. Hayashi ve Freud, Zemin yatak katsayısının taban basıncına bağlı olabileceğini düşünerek, taban basıncı arttıkça parametrenin değerinin azalacağı kabulü ile birçok problem çözmüştür.

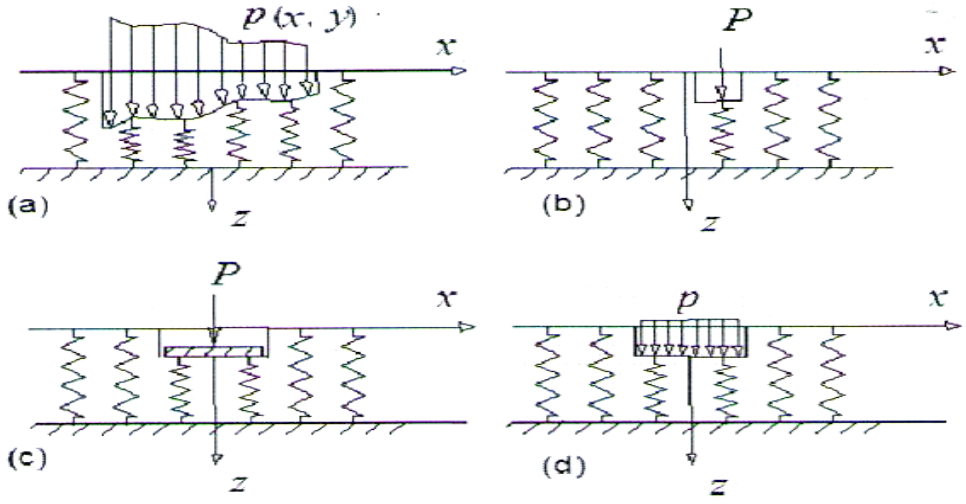
Teo ve Livew (2002) benzer şekilde Pasternak tipi elastik zemine oturan kalın plakları inceledikleri çalışmalarında zeminin parametrelerini belirleme yoluna gitmişlerdir.

2. ELASTİK ZEMİN MODELLERİ

2.1 Tek Parametreli Zemin Modelleri

2.1.1 Winkler zemin modeli

Zemin ve yapı arasındaki ilişki ilk olarak Winkler tarafından 1867 yılında modellenmiştir. Başlangıçta demiryollarında yerdeğiştirmelerin ve nihai gerilmelerin analizinde kullanılan bu model daha sonraki yıllarda bir çok zemin-yapı etkileşim problemlerinde kullanılmaya başlamış ve Winkler zemin modeli olarak literatüre girmiştir. Bu model karmaşık ifadeler barındıran diğer modellere kıyasla matematiksel açıdan daha basit olmasından dolayı, elastik zemine oturan kirişlerde en çok kullanılan model olmuştur.Bu modelde zemini oluşturan birbirinden bağımsız yaylar Şekil 2.1 deki gibi gösterilmektedir; (a) uniform olmayan yayılı yük altındaki Winkler zemin modelinin yerdeğiştirmesini, (b) tekil yük altındaki zemin yerdeğiştirmesini, (c) rijit yük altındaki zemin yerdeğiştirmesini ve (d) uniform yayılı yük altındaki zemin yerdeğiştirmesini göstermektedir.



Şekil 2.1 : Winkler zemin modeline gore yerdeğiştirme durumları.

Winkler modeli adı ile tanınan idealleştirilmiş zemin ortamı modelinde, zeminin birbirinden bağımsız ve birbirine sonsuz yakın yaylardan oluştuğu düşünülmekte bu yayların yanlız doğrudan doğruya yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri, ancak

yayların, komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği varsayılmaktadır. Bunun sonucu olarak, zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak göz ününe alınmış olur (Hetenyi, 1955). Bu modelde zeminin düşey yerdeğiştirmesinin (w)sadece o noktaya etki eden taban basıncına (p) ve idealleştirilmiş zemindeki yay sabitine (k) bağlı olduğu kabul edilmektedir Şekil 2.1. Bunun sonucunda zemin tamamen sürekiz bir ortam şeklinde dikkate alınmış olmaktadır ve zemin direnci,

$$p(x, y) = kw(x,y) \qquad \textbf{(2.1)}$$

ifadesiyle gösterilir.

Burada k elastik yay katsayısı olup uygulamada "yatak katsayısı" olarak isimlendirilir. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder ve birimi N/m^2' dir. "k" yatak katsayısı bir zemin sabiti değildir; zemin türüne, temel genişliğine ve derinliğine bağlıdır (Pasternak 1954; Elishakoff 2001). Çizelge 2.1 de "k" yatak katsayısının zemin çeşitlerine bağlı olarak değiştiği gösterilmektedir.

Çizelge 2.1 : "*k*" yay katsayısının zemin türlerine göre değerleri (Avcar,2007).

Zemin Türü		**K_s (KN/m^2)**
Kum (Kuru veya Nemli)	Gevşek	8.000 ~ 25.000
	Orta	25.000 ~ 125.000
	Yoğun	125.000 ~ 375.000
Kum (Doygun)	Gevşek	10.000 ~ 15.000
	Orta	35.000 ~ 40.000
	Yoğun	130.000 ~ 150.000
Kil	Gevşek	12.000 ~ 25.000
	Orta	25.000 ~ 50.000
	Yoğun	>50.000

Winkler modelinin gerçekçilikten uzak olmasının en büyük sebebi yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almaması, yani yükün etkidiği yay bir miktar çökerken diğer yaylarda bir değişiklik olmadığını, zemine etkiyen kuvvetlerin sadece etki ettikleri

noktada şekildeğişimi yaptığını kabul etmesidir. Bu durumda elastik zeminin üzerindeki herhangi bir yapı elemanının yapmış olduğu yer değiştirmeye, yüklü alanın dışındaki zeminin etkisi olmamaktadır. Halbuki elastik tabakanın yüzeyindeki bir noktada oluşan yer değiştirme sadece o noktaya etki eden kuvvetten değil aynı zamanda diğer noktalardaki kuvvetlerden de etkilenmektedir.

2.2 İki Parametreli Zemin Modelleri

Winkler modelinin tam olarak gerçekliği yansıtmadığını düşünen ve eksik kalan zemin süreksizliğini giderilmesi amacını güden bilim adamları Winkler modelini geliştirmek üzere yeni modeller ortaya koymuştur. Bunlardan öne çıkanları kronolojik sıralamaya göre Filonenko-Borodich (1940), Hetenyi (1946; 1950), Pasternak (1954), ve Vlasov-Leont'ev (1966)' dir.

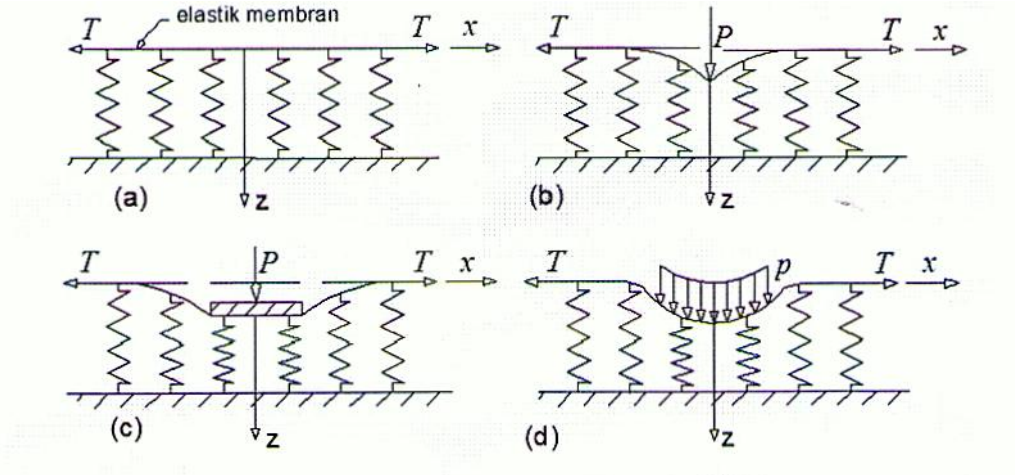
2.2.1 Filonenko-Borodich modeli

Bu zemin modelinde, Winkler zemin modelinde tanımlanan yayların, iki ucundan T çekme kuvvetine maruz bir elastik membrana tutturulduğu ve ortamın sürekliliğinin, yüzeydeki bu ince elastik membranla sağlandığı görülmüştür.Bu zemin modelinde zemin tepkisi;

$$p\ x\ = kw\ x\ - T\frac{d^2w(x)}{dx^2} \qquad \textbf{(2.2)}$$

ifadesi ile tanımlanmaktadır.

Şekil 2.2 de Filonenko-Borodich zemin modelinin, uygulanan çeşitli yükler altındaki yerdeğiştirmesi gösterilmektedir; (a) yüksüz durumu ve zemini oluşturan yayların birbirine elastic membranla bağlandığını belirtmekte, (b) tekil yük altındaki zemin modelinin yerdeğiştirmesini, (c) rijit yük altındaki zemin yerdeğiştirmesini, (d) yayılı yük altındaki zemin yerdeğiştirmesini şematize etmektedir.



Şekil 2.2 : Filonenko-Borodich zemin modeli.

2.2.2 Hetenyi modeli

Bu model Winkler yaylarının üzerinde eğilme rijitliği D olan bir plak olduğunun varsayarak yaylar arasındaki sürekliliği sağlamaktadır. Zemin üzerinde üç boyutlu problemlerde elastik plaka, iki boyutlu problemlerde ise elastik kiriş ilave ederek çökme dağılımını sağlamaktadır. Zemin tepkisini veren ifade;

$$p\ x,y\ = kw\ x,y\ - D\nabla^2 w(x,y) \qquad \textbf{(2.3)}$$

olarak gösterilebilir. Burada *D* = plak eğilme rijitliğini göstermektedir.

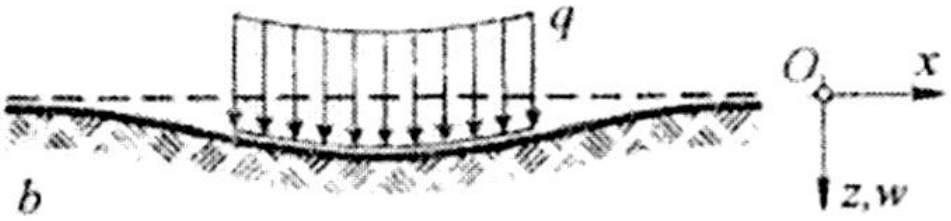
İki boyutlu sistemlerde*;*

$$p\ x\ = kw\ x\ - D\frac{d^4 w(x,y)}{dx^4} \qquad \textbf{(2.4)}$$

ifadesi kullanılır.

2.2.3 Pasternak modeli

Pasternak zemin modelinde yay elemanları arasında kayma etkileşiminin olduğu varsayımına dayanır Şekil 2.3. Yayların üst uçlarından yanlızca kayma deformasyonlarına karşı koyan bir kayma tabakasına tutturulduğu kabul edilmekte, böylece yaylar arasındaki kayma etkileşimi göz önüne alınmaktadır. Yaylar arasındaki bu kayma tabakası sayesinde aralarındaki etkileşim sağlanmış olmaktadır. Yaylar arası etkileşimin ihmal edilmesi durumunda Pasternak zemin modeli özel bir hali olan Winkler zeminine dönüşür.



Şekil 2.3 : Pasternak zemin modeli.

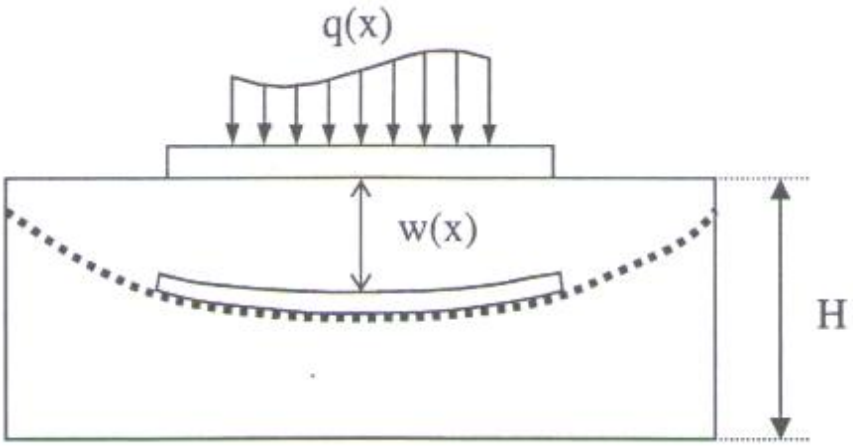
Zemin tepkisi, kayma tabakasının düşey dengesinden ;

$$p(x) = kw(x) - G\frac{d^2w(x)}{dx^2} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Olarak elde edilir. Burada G kayma tabakası parametresini temsil etmektedir. Kayma elemanının x, y ekseninde izotrop olduğu kabul edilmesi halinde $G_x=G_y=G_z$ alınabilir.

2.2.4 Vlasov modeli

Bu modelde zemin yarı sonsuz bir ortam olarak tanımlanmıştır ve zemin parametrelerinin hesaplanabilmesi için Vlasov ve Leont'ev elastik zemin derinliğince düşey deplasman profilini temsil eden diğer bir parametre, γ, tanımlanmıştır. Bu yaklaşımın avantajı zemin modülü *k* ile yaylar arası etkileşimi temsil eden 2*t*'nin zemin ve kirişin geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı olarak hesaplanmasıdır.



Şekil 2.4 : Vlasov zemin modeli.

Düzlem şekil değiştirme durumu olan elastik zemine oturan kiriş probleminin çözümü için, zeminin herhangi bir noktasındaki deplasman (2.6) daki gibi tanımlanmıştır.

$$u(x,y,z)=0$$
$$w(x,y,z)=w(x,y)\phi(z) \qquad \textbf{(2.6)}$$

Burada $\phi(z)$ zemin yüzeyinden kaya tabakaya doğru yer değiştirmenin değişimini göstermektedir ve (2.7) deki gibi ifade edilir.

$$\phi(z)=\frac{\sinh\gamma(1-\frac{z}{H})}{\sinh\gamma} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Yukarıdaki ifadelerde H zemin derinliği ve v_s poisson oranıdır. γ ise yukarıda tanımlandığı üzere kiriş ve elastik zeminin yer değiştirmesine bağlıdır.

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2=\frac{(1-2v_s)}{2(1-v_s)}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]dxdy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}w^2(x,y)dxdy} \qquad \textbf{(2.8)}$$

2.3 Üç Parametreli Zemin Modelleri

Yukarıda anlatılanların ışığında görülmektedir ki; yüzeysel taşıyıcıların çözümünde iki parametreli zemine ait elastik yataklanma ve kayma parametresi bir veri olarak kabul edilebildiği gibi (Pasternak 1954), daha gerçekçi çözümlere ulaşabilmek için bu değerlerin zemin karakteristikleri cinsinden aranması yoluna da gidilebilir (Vlasov 1949). Literetürde bulunan iki parametreli modellerin de bazı dezavantajları bulunur. Bir parametreli modellere benzer şekilde zemin içerisindeki değişim dikkate alınmadığı gibi modelde kullanılan parametreler de gerçek olmayan kuramsal ifadelerdir. Bu parametrelerin alabileceği değerlerle zemin özellikleri arasında kesin bir ilişkiyi gösteren ifade yoktur. Oysaki yapı mühendisleri gerek ekonomik gerekse emniyetli projelendirmeler gerçekleştirebilmek için kullanacakları bilgisayar programlarında zemin parametrelerinin ne alınacağı konusunda kesin ve somut bilgilere ihtiyaç duymaktadırlar. Bu eksikliklerin farkında olan araştırmacılar

tarafından yapıdaki ve zemindeki kayma etkilerini dikkate alan Vlasov modeli üzerinde zemin parametrelerinin hesabında izlenecek yol ile ilgili çeşiti çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaları iki parametreli zemin modellerinden ayıran özellik zemin yatak katsayısı ve zemin kayma parametresi olarak adlandırılan parametrelerin bir veri olarak kabulü yerine zeminin elastik özelliklerinden faydalanarak hesaplanması için bir takım yöntemlerin geliştirilmeye çalışılmasıdır. Bu modellerden en bilineni Geliştirilmiş Vlasov Modeli olarak adlandırılan modeldir. Bu tür modellerde zemin parametrelerinin belirlenmesinde kullanılan üçüncü bir parametre karşımıza çıkmaktadır ve bu değişken zemin modellerinin sınıfladırıması bölümünde detaylıca açıklanmıştır.

.

3. HIZLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

3.1 Hızlı Fourier Dönüşümü Tanımı

Ayrık-zamanlı Fourier dönüşümü (DFT) mutlak toplanabilir diziler için frekans bölgesi gösterimini sağlamaktadır.Ancak, Fourier dönüşümü sonsuz uzunlukta bir dizi içi dır ve daha önemlisi, sürekli bir değişken olan ω açısal frekansının bir fonksiyonudur.

Ayrık Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümünün eşit aralıklı frekanslardaki örneklerine özdeştir. Sonuç olarak N noktalı bir DFT'nin hesaplanması Fourier dönüşümünün N örneğinin, N eşit aralıklı frekanslarla ($\omega_k = 2\pi k / N$), z-düzlemindeki birim çember üzerinde N nokta ile hesaplanmasına karşılık gelir. Burada temel amaç N-noktalı DFT'nin hesaplanması için verimli algoritmaların kullanılmasıdır. Bu algoritmalar ortak olarak Hızlı Fourier Dönüşümü(FFT) adını alır.

Ayrık Fourier dönüşümü denklem halinde yazacak olursak

$$X_{(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad 0 \le k \le N-1 \qquad \textbf{(3.1)}$$

Burada $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ dir. (3.1) denklemiyle gösterilen (DFT)'nin doğrudan hesalanmasında her bir $X(k)$ değeri için adet karmaşık çarpma ve N-1 adet karmaşık toplama işlemi yapılmaktadır. Bundan dolayı N adet DFT değeri bulunurken, N^2 adet çarpma ve N(N-1) adet toplama işlemi gereklidir. Ayrıca her karmaşık çarpma işlemi dört gerçel çarpma ve iki gerçel toplama işlemi ve her bir karmaşık toplama iki gerçel toplama işlemi ile gerçeklenmektedir. Sonuç olarak, dizi uzunluğu olan N'nin büyük olması durumunda DFT'nin doğrudan bulunması çok fazla işlem yapılmasını gerektirir. Yani, N sayısı artarken yapılan işlem sayısı yüksek hızla artmakta ve işlem sayısı kabul edilemez bir seviyeye doğru gitmektedir. 1965 yılında Cooley ve Tukey (1965). Ayrık Fourier Dönüşümü için gerekli işlem

miktarını azaltacak bir yöntem geliştirdiler. Bu yöntem, sayısal işaret işleme ve diğer alanlarda DFT uygulamalarında ani bir artış oluşmasına sebep oldu. Ayrıca başka algoritmaların geliştirilmesine neden olmuştur.Tüm bu algoritmalar Hızlı Fourier Dönüşüm algoritmaları olarak bilinir. Bu algoritmalar ile DFT hesabı için yapılması gereken işlem sayısı büyük ölçüde azaltılarak işlem kolaylığı sağlanmıştır. Bu arada W_N^{kn} faktörünün periyodiklik ve simetri özellikleri kullanılarak işlem sayısı azaltılabilir.

3.1.1 Hızlı Fourier dönüşümü algoritmaları

DFT' nin hesaplanamasında birçok farklı algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmaların işlem sayısını azaltmak için temelde kullanıldığı özellikler temel fonksiyon olan W_N' in periyodiklik ve simetri özelliğidir. Burada parçala-birleştir yaklaşımını kullanarak türetilen radix-R FFT algoritmalarından radix-2 (yani data boyu $N = 2^k$ olan veriler için) algoritması olan zamanda tanımlı FFT ve frekansta tanımlı FFT algoritmasını incelenmiştir.

Periyodiklik özelliği

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Simetri özelliği

$$W_N^{kn+N/2} = -W_N^{kn} \qquad \textbf{(3.3)}$$

- Zamanda tanımlı FFT

İşaretin uzunluğu olan N sayısı FFT algoritmalarında önemli rol oynamaktadır. N'nin ikinin katları olması durumunda algoritma basit ve etkin olmaktadır. $N = 2^R$ olmakla birlikte bu algoritmaya Radix-2 FFT algoritması denir. N çift tamsayı olup *x(n)* dizisi *N* / 2 uzunluklu iki diziye ayrılabilir. Bu ayrımda, ilk dizinin elemanları tek sayı indisli, ikinci dizinin elemanları çift sayı indisli seçilir ve *n = 2r* çift indisliler için, *n = 2r+1* tek indisliler için kullanılır. Bu ayrım denklem (3.4) ve (3.5) de gösterilmiştir;

$$X_k = \sum_{n\ \text{çift}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n\ \text{tek}} x(n)W_N^{nk} \qquad \textbf{(3.4)}$$

ve

$$\sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_n^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \tag{3.5}$$

$W_N^2 = W_{N/2}$ ifadesi kullanılara denklem (3.6) daki hale getirilir;

$$X_k = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} \tag{3.6}$$

Burada N / 2 uzunluğunda iki DFT yardımıyla N uzunluklu dizinin DFT'si hesaplanmaktadır. *x(n)* dizisinin tek ve çift noktaları;

$$\begin{aligned} x^{ç}(n) &= x(2n); n = 0,1,2,.....,(N/2)-1 \\ x^{t}(n) &= x(2n+1); n = 0,1,2,.....(N/2)-1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Şeklinde gösterilir. (3.7) deki tanımlar (3.6) da yerine konulursa

$$X_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{ç}(n)W_N^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{nk} \tag{3.8}$$

ifade edilir.

$$\begin{aligned} W_N^{nN/2} &= [e^{-j2\pi/(N/2)}]^{(nN/2)} = e^{-j2\pi n} = 1 \\ W_{N/2}^{N/2} &= 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Denklem (3.9) daki ifadeler kullanılarak,

$$X_{k+(N/2)} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{ç}(n)W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{nk} \tag{3.10}$$

Elde edilir. K indeksini $0 \le k \le (N/2)-1$ aralığındaki sınırlayarak çift ve tek noktaların DFT'lerini ayrı ayrı belirtebilir;

$$\begin{aligned} X_k^{ç} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{ç}(n)W_{N/2}^{nk} \\ X_k^{t} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{t}(n)W_{N/2}^{nk} \end{aligned} \tag{3.11}$$

denklem (3.11) deki tanımlamalardan yaralanılarak (3.10) ve (3.8) tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} &X_k = X_k^{ç} + W_N^k X_k^t \\ &X_k + (N/2) = X_k^{ç} - W_N^k X_k^t \\ &k = 0,1,2,.....,(N/2)-1 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.12)}$$

N-noktalı DFT'nin tek ve çift noktalarının oluşturduğu N/2 noktalı iki DFT' den elde edilebileceği görülmektedir. Aynı şekilde, N/2 noktalı iki DFT de yeniden belirlenecek N/4 noktalı tek ve çift noktalı dizilerden benzer viçimde elde edilir. $N=2^L$ varsayıldığında L adımgidilecek olursa, sonuçta sadece 2 noktalı bir dizinin DFT' sinin hesabı yeterli olmaktadır.

- Frekans tanımlı FFT

Alternatif FFT algoritması diziyi orta noktasından ikiye ayırarak;

$$\begin{aligned} &x^{(1)}(n) = x(n) \\ &x^2(n) = x(n+N/2) \\ &n = 0,1,2...(N/2)-1 \end{aligned}$$

(3.4) deki gibi yazılırsa;

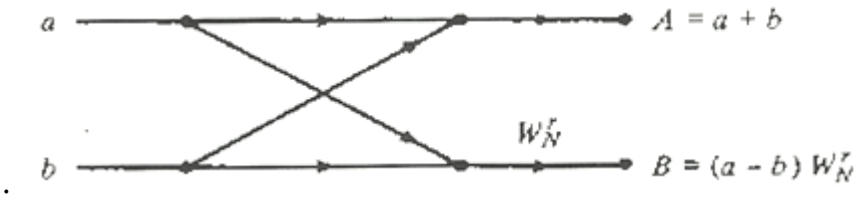
$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n+N/2) W_N^{(n+(N/))k} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Tanımlamalar yerine konursa;

$$X_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_N^{(n+(N/2))k} \qquad \textbf{(3.5)}$$

elde edilir.

Hızlı Fourier dönüşümünü frekans ortamına dönüştürmek için önce ters Fourier uygulamasıgereklidir. Ters Fourier dönüşümü uygulandıktan sonra frekans ortamına dönüştürülür daha sonra Hızlı Fourier dönüşümüne geri dönülüp denklemde yerine konulur denklem frekans ortamında elde edilmiş olur Şekil 3.1.



Şekil 3.1 : Frekans tanımlı HFD için temel kelebek hesaplaması.

Frekans tanımlı ortamda çift ve tek frekans noktaları X_{2k} ve X_{2k+1} k=0,1,….,(N/2)-1 aralığında kullanılarak DFT elde edilebilir. *k* yerine *2k* konulursa,

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_N^{(n+(N/2))2k} \qquad \textbf{(3.6)}$$

şeklinde yazılabilir.

$W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ ve $W_N^{kN} = 1$ özelliklerinden yararlanılarak,

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} \qquad \textbf{(3.7)}$$

elde edilir.

k yerine *2k+1* konulurak ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} X_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(1)}(n) W_N^{n(2k+1)} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x^{(2)}(n) W_N^{(n+(N/2)(2k+1))} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(1)}(n) W_{N/2}^{nk} - \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} W_N^{Nk} W_N^{N/2} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.8)}$$

$W_N^{Nk} = 1$ ve $W_N^{N/2} = -1$ özelliklerinden yararlanılarak,

$$X_{2k+1} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(1)}(n) W_{N/2}^{nk} - \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^n x^{(2)}(n) W_{N/2}^{nk} \qquad \textbf{(3.9)}$$

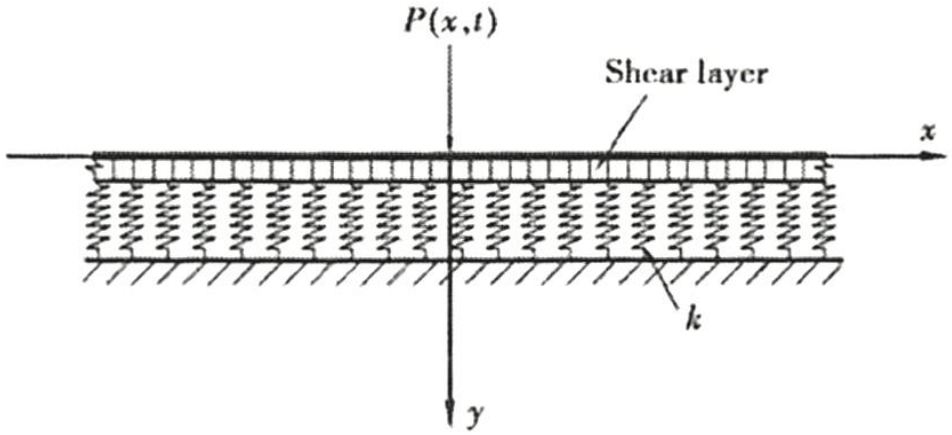
k = 0,1,….,(N/2)-1 için X_{2k} ve X_{2k+1}'den N için frekansta tanımlı FFT görülmektedir.

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x^{(1)}(n) + x^{(2)}(n)] W_{N/2}^{nk}$$
$$X_{2k+1} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} [x^{(1)}(n) - x^{(2)}(n)] W_N^n W_{N/2}^{nk} \quad \textbf{(3.10)}$$

4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

4.1 Kirişin Temel Formülleri

Dış yüke maruz kalmış ve elastik zemin üzerine oturan kiriş Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 : Elastik zemin üzerine oturan sonsuz kiriş modeli.

Elastik zemin üzerine oturmuş ve hareketli yük için hareketin diferansiyel denklemi (4.1) deki gibi ifade edilir.

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=P(x,t)-Q(x,t) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Bu denklemdeki $\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}$ ve $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$, x ve t ye bağlı y(x,t) nin dördüncü kısmi ve ikinci kısmi türevlerini belirtir, sırasıyla; y(x,t) kirişin metre cinsinden enine yerdeğiştirmesidir; x koordinat düzlemindeki kirişin metre cinsinden uzunluğudur; t saniye cinsinden zamandır; EI eğilme rijitliği olup Nm^2 cinsindendir; m birim uzunluğa düşen kütle miktarıdır kgm^{-1}; P(x,t) birim uzunluğa uygulanan dış kuvvet Nm^{-1} ;ve $Q(x,t)$ zeminin uyguladığı dirençtir.

4.1.1 Kirişin Winkler zemini için çözümü

Winkler Zemini için (4.1) de verilen $Q(x,t)$ zemin direnci

$$Q(x,t) = ky(x,t) \tag{4.2}$$

Denklemdeki *k* kirişin birim uzunluğuna gelen zemin yay sabitidir, birimi (N/m^2) dir. (4.2) denklemi (4.1) de yerine konulursa;

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky(x,t) = P(x,t) \tag{4.3}$$

$P(x,t)$ dış yükü kirişin üzerinde ν hızıyla hareket ederse;

$$P(x,t) = P\delta(x - \nu t) \tag{4.4}$$

δ Dirac-delta fonksiyonudur. (4.3) denklemine her iki taraftan çift Fourier döşümü uygulanırsa;

$$EI\xi^4 y(\xi,\omega) + m\omega^2 y(\xi,\omega) + k\,y(\xi,\omega) = P(\xi,\omega) \tag{4.5}$$

Denklemdeki $P(\xi,\omega)$ ve $y(\xi,\omega)$, *P(x,t)* ve *y(x,t)* nin Fourier dönüşümleri olup sırasıyla, $P(\xi,\omega)$ denklem (4.6) daki gibi tanımlanabilir.

$$P(\xi,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)\exp[-i(\xi x + \omega t)]dxdt = P2\pi\delta(\omega + \nu\xi) \tag{4.6}$$

(4.6) denklemini (4.5) denkleminde yerine koyarsak problemin çözümü frekans ortamı içinde (4.7) deki gibi açıklanır.

$$y(\xi,\omega) = \frac{2\pi P\delta(\omega + \nu\xi)}{EI\xi^4 + k - m\nu^2} \tag{4.7}$$

Problemi çözmek için frekans ortamını zaman ortamına geri dönüştürmek gerekir. Bu sebeple denkleme (4.7) her iki taraftan ters Fourier dönüşümü uygulanır (4.8)

$$y(x,t) = \frac{P}{2\pi EI}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\omega + \nu\xi)\exp[i(\xi x + \omega t)]}{(\xi^4 + \bar{k} - \bar{m}\omega^2)}d\xi\, d\omega \tag{4.8}$$

= k / *EI*, ve = *m / EI.*

Dirac-delta fonksiyonun özelliği olarak,çözümün integral ifadesi zaman ortamında;

$$y(x,t) = \frac{P}{2\pi EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi(x-\nu t)]}{\xi^4 - \bar{m}\nu^2 + \bar{k}} d\xi \qquad \textbf{(4.9)}$$

4.1.2 Kirişin Pasternak zemini için çözümü

Pasternak zemin için zemin direnci (4.10);

$$Q(x,t) = ky(x,t) - G_p \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Buradaki k birim kiriş uzunluğu için zeminin yay sabitidir (ilk parametre) birimi N/m^2, ve G_p zeminin N cinsinden kayma modülüdür. k ve G_p elastik tabakanın zorlanmış deformasyonuna bağlı olup farklı metodlarla belirlenebilir. İki parametreli zemine oturan kiriş için diferansiyel denklem (4.10) daki zemin direnci ifadesini (4.1) deki elastic zemine oturan kiriş için genel diferansiyel denklemde yerine koyarsak (4.11) deki denklem elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - G_p \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + ky(x,t) + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t) \qquad \textbf{(4.11)}$$

Eğer $P(x,t)$ ν hızıyla hareket eden bir dış yükse denklem (4.12) deki gibi elde edilir.

$$P(x,t) = P\delta(x - \nu t) \qquad \textbf{(4.12)}$$

δ denklem (4.13) de açıklandığı gibi Dirac-delta fonksiyonudur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \qquad \textbf{(4.13)}$$

$f(x)$: x değişkeninin herhangi bir fonksiyonudur, *ve* x_0 *:* x değişkeninin tanımlanmış değeridir.

Bu bölümde Fourier integral dönüşümünün (4.3) cebirsel denkleme dönüşümü incelenmiştir, çünkü orjinal denklem dördüncü dereceden lineer diferansiyel denklemi matematiksel açıdan çözmek oldukça zordur.

f (x,t) denklemi için çift Fourier dönüşümü ve tersi (4.14) ve (4.15) denklemlerindeki gibidir.

$$F\ \ f(x,t)\ = f(\xi,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\exp[-i(\xi x+\omega t)]dxdt \qquad \textbf{(4.14)}$$

ve

$$F^{-1}[f(\xi,\omega)] = f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\omega)\exp[i(\xi x+\omega t)]d\xi d\omega \qquad \textbf{(4.15)}$$

Yukarıdaki denklemlerde $F[]$ ve $F^{-1}[]$, Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümlerini ifade eder, sırasıyla ξ ve ω, x ve t nin frekans ortamının yerine kullanılmış değişkenlerdir.

$$F[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F[f(t)] \qquad \textbf{(4.16)}$$

Denklemdeki $f^{(n)}(t)$,t değişkeninin n inci dereceden türevidir ve $i=\sqrt{-1}$.

Çözümü elde etmek için, (4.11) deki denklemin her iki tarafına da çift Fourier dönüşümü uygulanır ve kısmi diferansiyel denklem cebirsel denkleme indirgenir:

$$EI\xi^4 y(\xi,\omega)+G_p\xi^2 y(\xi,\omega)+k y(\xi,\omega)-m\omega^2 y(\xi,\omega)=P(\xi,\omega) \qquad \textbf{(4.17)}$$

Denklemdeki $P(\xi,\omega)$ ve $y(\xi,\omega)$, *P(x,t)* ve *y(x,t)* nin Fourier dönüşümleri olup sırasıyla, $P(\xi,\omega)$ denklem (4.18) deki gibi gösterilebilir

$$P(\xi,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)\exp[-i(\xi x+\omega t)]dxdt = P2\pi\delta(\omega+\nu\xi) \qquad \textbf{(4.18)}$$

(4.18) denklemini (4.17) denkleminde yerine koyarsak problemin çözümü frekans ortamı içinde (4.19) deki gibi açıklanır.

$$y(\xi,\omega) = \frac{2\pi P\delta(\omega+\nu\xi)}{EI\xi^4+G_p\xi^2+k-m\nu^2} \qquad \textbf{(4.19)}$$

Problemi çözmek için frekans ortamını zaman ortamına geri dönüştürmek gerekir. Bu sebeple denkleme (4.19) her iki taraftan ters Fourier dönüşümü uygulanır (4.20).

$$y(x,t) = \frac{P}{2\pi EI} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega + \nu\xi) \exp[i(\xi x + \omega t)]}{(\xi^4 + \overline{G}\xi^2 + \overline{k} - \overline{m}\omega^2)} d\xi d\omega \qquad \textbf{(4.20)}$$

$G = G_p / EI$, $k = k / EI$, ve $m = m / EI$.

Direkt-delta fonksiyonun özelliği olarak, çözümün integral ifadesi frekans ortamında

$$y(x,t) = \frac{P}{2\pi EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\xi(x - \nu t)]}{\xi^4 + (\overline{G} - \overline{m}\nu^2)\xi^2 + \overline{k}} d\xi \qquad \textbf{(4.21)}$$

denklem (4.21) deki gibi ifade edilir.

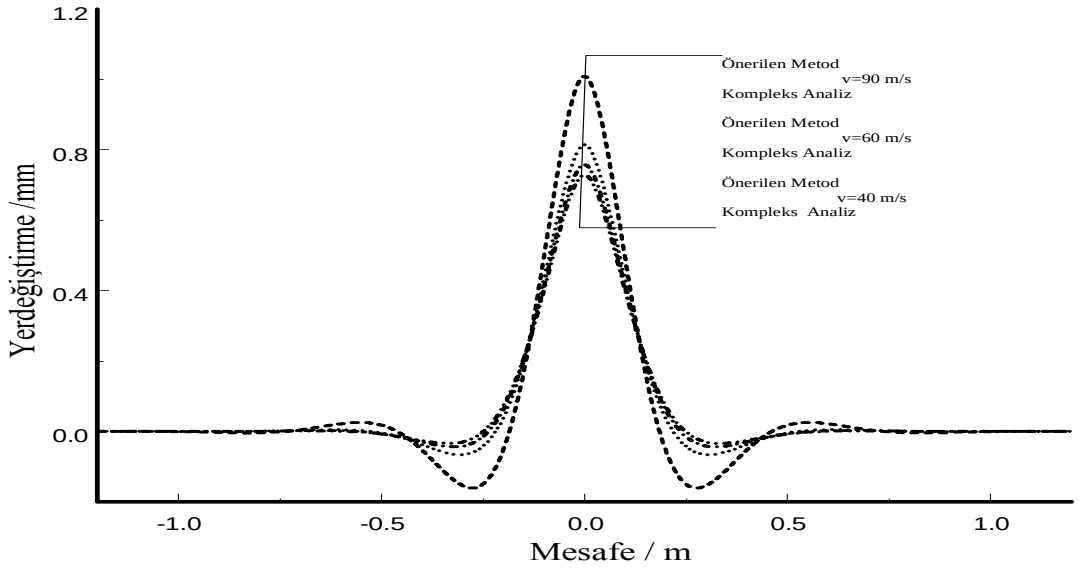
5. SAYISAL ANALİZLER

Bu bölümde Pasternak zemin üzerine oturan sonsuz kirişin hareketli tekil yük altındaki davranışları Mathematica bilgisayar programından yaralanılarak grafiklere dökülmüştür. Elde edilen souçlar Winkler zemin modelinde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve aralarındaki farklar incelenmiştir.

5.1 Winkler Zemin Modeli İçin Frekans Tanımlı Grafik Sonuçları

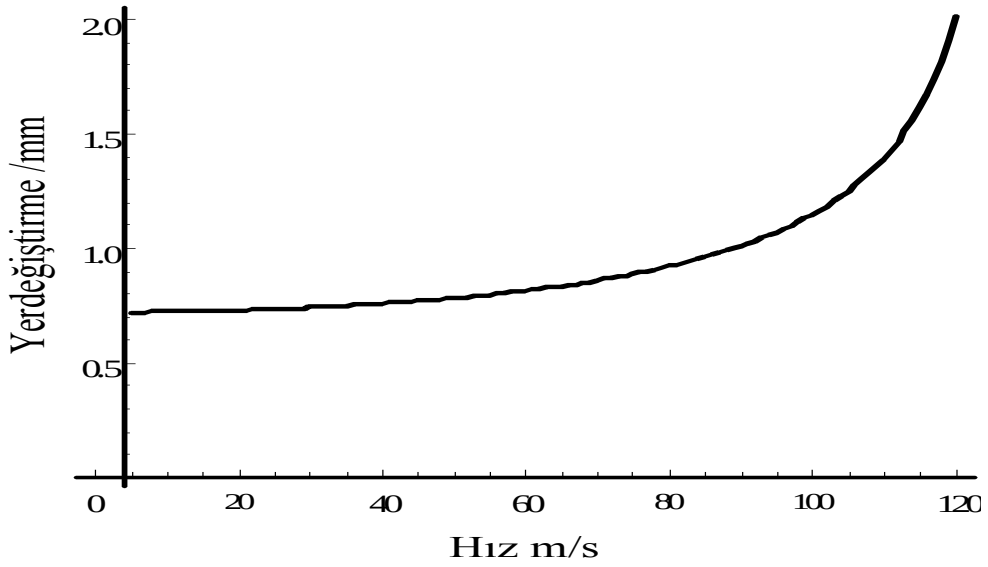
Winkler zemini üzerine oturmuş elastik kirişin, çeşitli hızlardaki hareketli yüke olan dinamik yerdeğiştirme tepkisini açıklamak amacıyla sayısal karşılaştırmalar yapılmış ve grafiklerle gösterilmiştir. Hesaplarda kullanılan bazı parametreler EI = 2.3 kNm^2 , k = 68.9 MPa, m = 48.2 kg/m, P = 10.5 N dir.

Şekil 5.1 de sonuçlar kompleks ve önerilen metodlar kullanılarak karşılaştırılmıştır ve sonuçların çok da farklı olmadığı hatta yaklaşık olarak aynı oldukları gözlenmektedir.



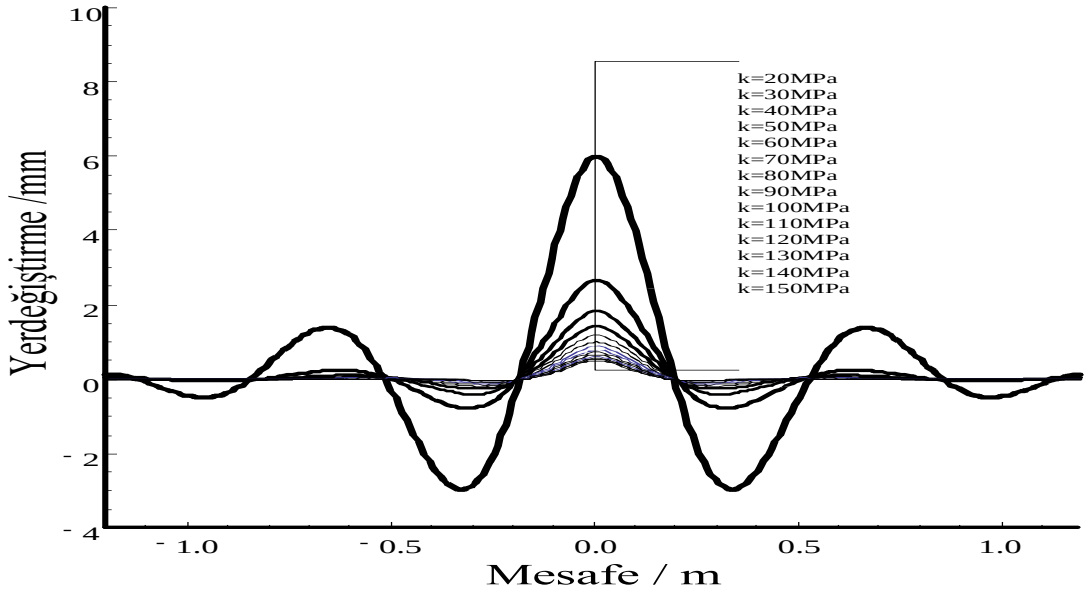
Şekil 5.1 : Winkler zemini üzerine oturmuş kirişin çeşitli tekil yük hızlarına verdiği dinamik çökme tepkisinin farklı metodlarla karşılaştırılması.

Şekil 5.2 Winkler zemin üzerindeki kirişin üzerinde gezen çeşitli hızlardaki tekil yüke verdiği dinamik tepkiyi ortaya koymaktadır. Şekilden de anlaşılacağı gibi tekil yükün hızı arttıkça kirişin çökmesi de artmaktadır.



Şekil 5.2 : Winkler zemin üzerindeki kirişin değişik hızlara gore çökme miktarı.

Kirişin dinamik çökmesi zeminin rijitliğine gore Şekil 5.3 de ki gibi hesaplanmış ve grafiğe dökülmüştür. Şekilde görüldüğü gibi zeminin yumuşak olması halinde zeminin tepkisi büyümekte ve x ekseni üzerinde dalgalanmakta ve kararsız bir şekil göstermekte, zemin rijitliği yeteri kadar arttığında kirişin tepkisi sabit hale gelmektedir.

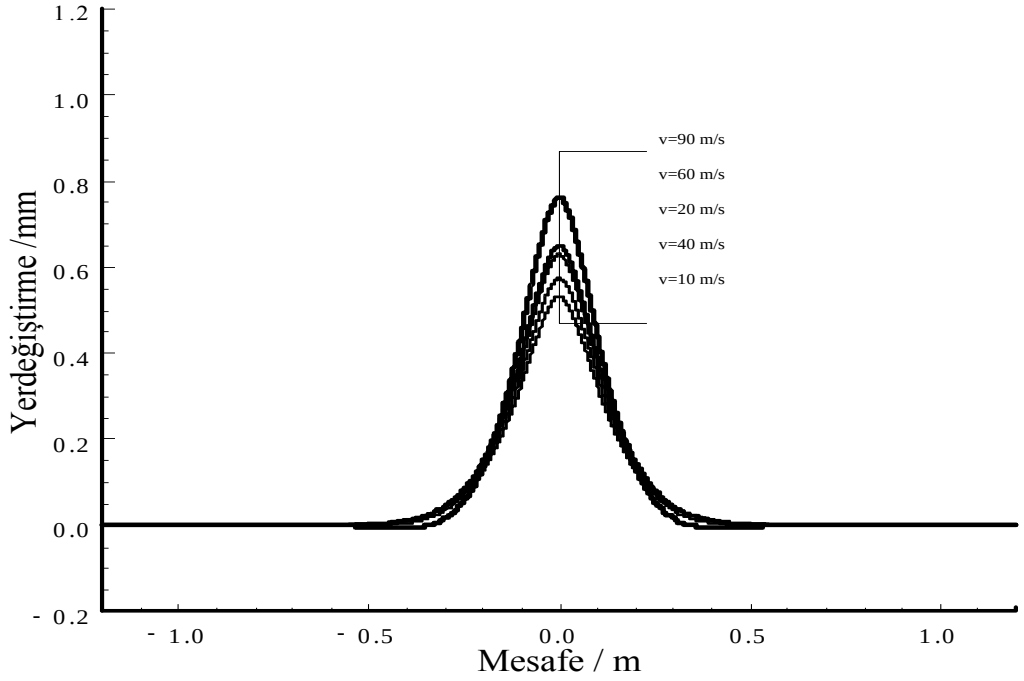


Şekil 5.3 : Kirişin farklı zemin rijitliklerine göre çökme miktarı diyagramı.

5.2 Pasternak Zemin Modeli İçin Frekans Tanımlı Grafik Sonuçları

Hareketli tekil yük etkisine maruz kalmış ve Pasternak zemin üzerine oturmuş kirişin dinamik tepkisini incelemek amacıyla bazı sayısal karşılaştırmalar verilmiştir. Hesaplamalarda kullanılan bazı parametreler EI = 2.3 kNm^2, k = 68,9 MPa, m=48,2 kg/m, P = 10.5 kN, G_p = 666875 N dur.

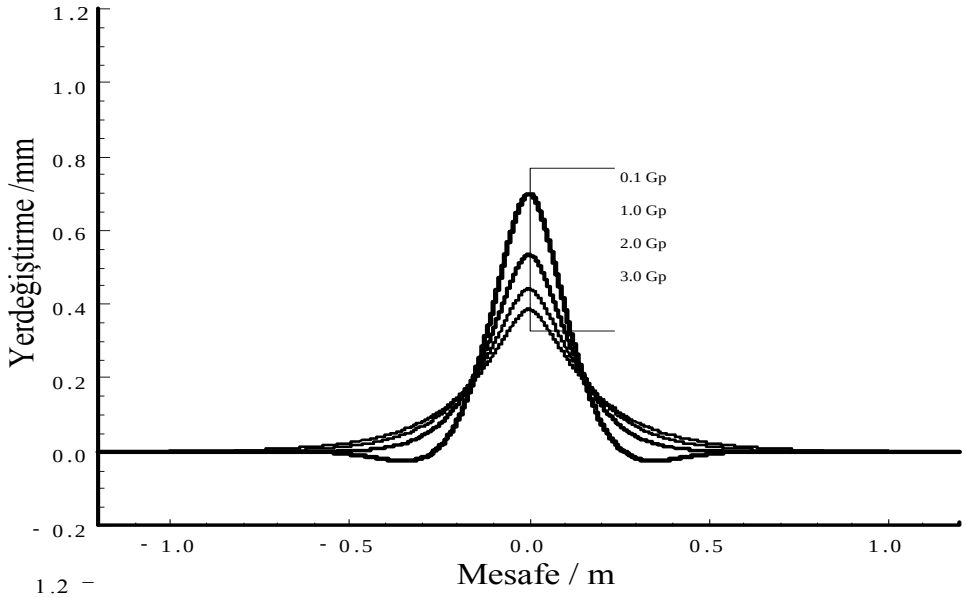
Pasternak zeminine üzerinde haretli yük altındaki kirişin yükün faklı hızlarındaki dinamik çökme grafiği Şekil 5.4 da ki gibidir. Grafikte yatay eksenin 0 noktası hareketli yükün yerini belirtmektedir. Eğilmenin simetrik olduğu ve maksimum çökmenin düşük hızlarda oluştuğu gözlenmektedir. Azalan yerdeğiştirmeler pozitif olarak alınmaktadır. Bu nedenle pozitif çökme meydana geldiğinde kirişin en alt kısmı en çok gerilimi alan kısım olmaktadır. Hareketli yükün hızı arttıkça maksimum dinamik çökme genişlemektedir. Şekilde görüldüğü gibi hareketli yükün 90 m/s olduğu zaman kiriş maksimum çökmeyi yapmakta ve 0.62 mm olmaktadır, hızın alınan minimum değeri olan 10 m/s olduğu anda kirişin çökmesi 0.51 mm olmaktadır.



Şekil 5.4 : Pasternak zemin üzerine oturmuş kirişin dinamik çökme diyagramı.

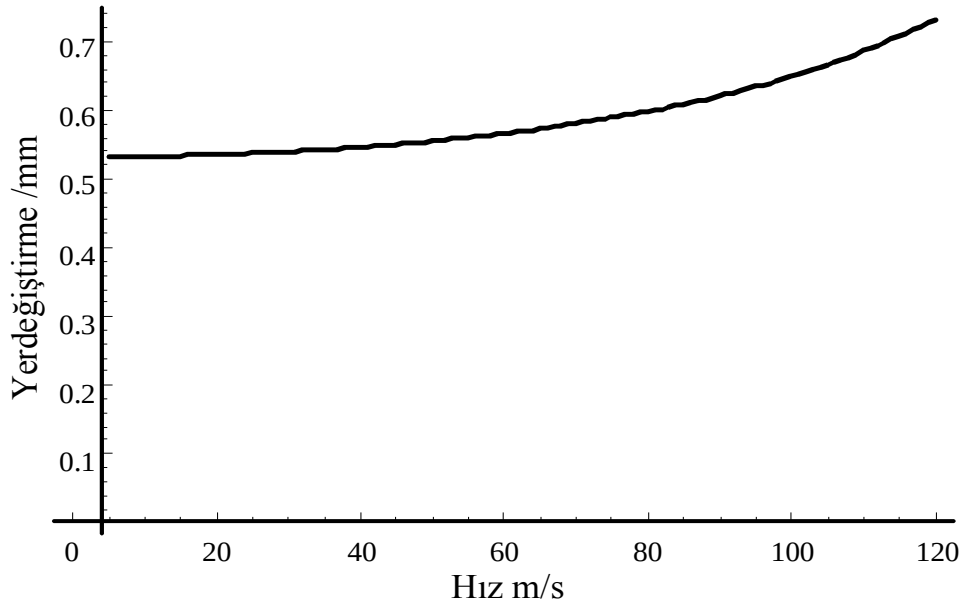
Hareketli tekil yükün hızı 20 m/s ye sabitlendiği takdirde Pasternak zemini üzerine oturmuş kirişin farklı kesme modüllerinde verdiği dinamik çökme diyagramı Şekil 5.5 de verilmiştir. Sabitlenmiş hızda kirişin maksimum çökmesi düşük kesme

modüllerinde açıkça artmaktadır. G_p değeri 3.0 dan 1.0 a doğru azaldığında, maksimum eğilmenin %50 civarında arttığı gözlemlenmektedir.



Şekil 5.5 :Çeşitli kesme modülleri G_p için kirişin dinamik çökme miktarı diyagramı.

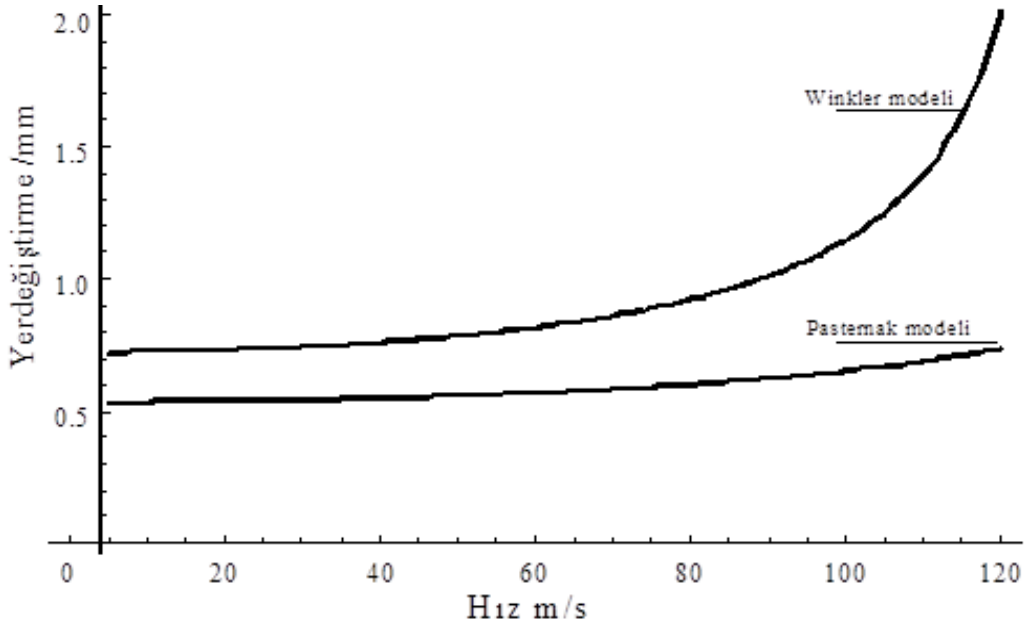
Pasternak zeminin üzerindeki tekil yük hızının miktarı arttıkça zemin verdiği tepkinin yani yerdeğiştimenin de arttığı Şekil 5.6 da gösterilmiştir.



Şekil 5.6 : Pasternak zemini üzerindeki kirişin çökme miktarı değişim diyagramı.

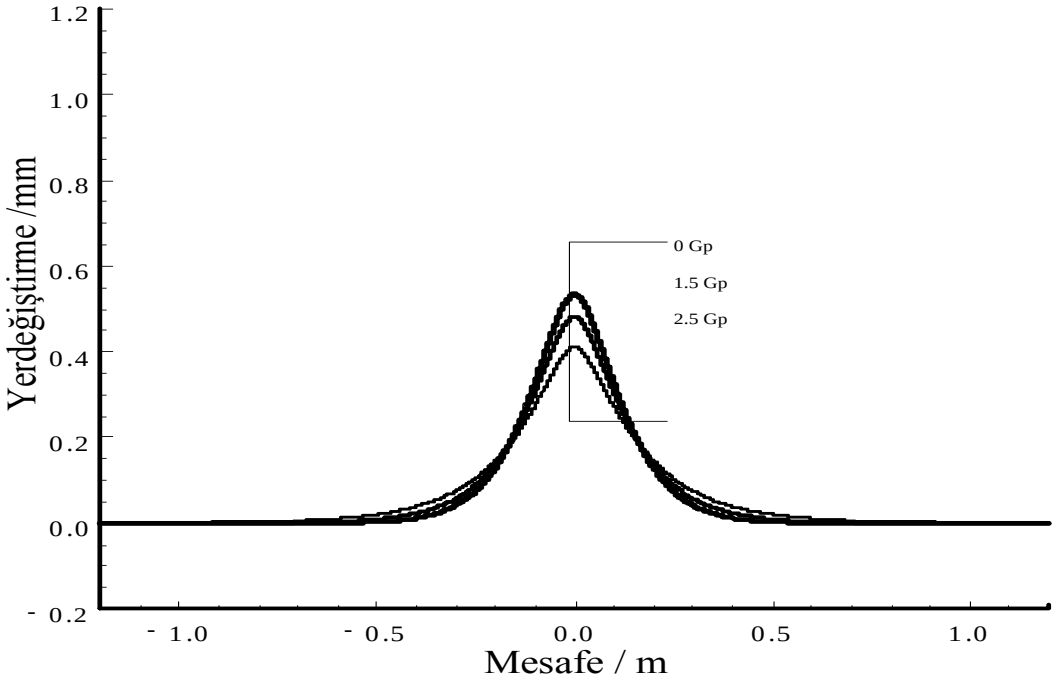
5.3 Winkler ve Pasternak Zemin Modelleri İçin Karşılaştırmalı Diyagramlar

Şekil 5.7 de Pasternak ve Winkler zeminleri için kiriş üstüne uygulanan tekil yük farklı hızlarla hareket ettirildiğinde; Winkler zemininin yüksek hızda Pasternak zemine kıyasla daha çok tepki verdiği görülmektedir ve daha çok yer değiştirmektedir. Winkler zemini daha çok tepki vermesi sonucu gerçekçilikten uzaklaşılmış olsa da daha en emniyetli tarafta kalınmış olacaktır.



Şekil 5.7 : Winkler ve Pasternak modelleri için hızın çökmeyle değişim diyagramı.

Şekil 5.8 de gösterilen diyagram kesme modülü G_p hesaplarda 0 alınan Winkler zemini ile çeşitli G_p değerleri verilen Pasternak zemin için dinamik çökme diyagramını göstermektedir. Diyagramda görüldüğü gibi kesme modülü 0 alınan Winkler zemini için dinamik çökme Pasternak zemine kıyasla oldukça fazladır.



Şekil 5.8 : Winkler ve Pasternak modelleri için dinamik çökme diyagramı.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında elastik zemine oturan sonsuz bir kirişin hareketli tekil yük altındaki davranışları ele alınmaktadır. Elastik zemin üzerine oturan kiriş sonsuz uzunlukta ve her noktada homojen ve izotrop olarak kabul edilmiştir. Zemin modeli olarak iki parametreli ve zemini oluşturan yayların birbirine bağlı hareket ettiği Pasternak zemin modeli dikkate alınmıştır. Bu çalışmada literatürde yaygın olarak kullanılan çalışmalara katkı sağlamak amacıyla, dönüşüm teknikleri kullanılmıştır. Çözüm fonksiyonunu kapalı olarak frekans denkleminden elde etmekte güçlükler vardır. Özellikle plak ve kabuklar gibi iki boyutlu problemlerde çözüm fonksiyonunu bulmak son derece güçtür. Bazı durumlar için kapalı çözüm elde edilememektedir. Bu çalışmada kullanılan FFT çözümleri aynı zamanda iki boyutlu problemlerin çözümünde de kolaylıkla kullanılabilir. Çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçların oldukça yalın olduğu görülmüştür. Literatürde kendine oldukça geniş bir alan bulan Winkler zemini ile karşılaştırıldığında Pasternak zeminin daha gerçekçi sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Bu çalışmada kullanılan çözüm yöntemi farklı zemin modelleri içinde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Celep, Z. ve Gençoğlu, M., (2002). Forced vibrations of a rigid circular late on a tensionless Winkler edge support, *Journal of Sound and Vibration*, 263, 945-953.

Celep, Z., Malekia, A. ve Abu-Hussein, M., (1988).Forced vibrations of a beam on tensionless foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 128, 235-246.

Cooley, J. W., Tukey, J. W., (1965). An algorithm for the machine computation of complex fourier series, *Mathematics of Computation*, 19, 297-301.

De Rosa, M. A., (1988). Stability plates resting on a tensionless elastik foundation, *Journal of Eng. Mech.*, Vol. 18, 377-388.

Dillard. D. A., (1989). Bending of plates on thin elastromeric foundations, Journal of Applied Mechanics, 56, 382-386.

Dumir, P. C. ve Bhaskar, A. (1988). Nonlinear static analysis of rectangular plates on elastik foundations by the orthogonal point collocation method, Comput. Method in Applied Mech. and Engineering, 67, 111-124.

Engesser, F., (1893). Zur Theorie des Baugrundes, Zentralblatt der bauverwaltung.

Engin, H., (1992). Elastoplastik zemine oturan kiriş ve plaklar, İTÜ İnşaat Fak., İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı II. Sempozyum, İstanbul, Haziran, s. 15-18.

Filonenko-Borodich, M. M., (1940). Some approximate theories of the elastik foundation, (in Russian), Uchenyie Zapiski *Moscovskogo GosudarstuennogoUniversiteta Mechanika*, 46, 3-18.

Henwood, D. J., Whiteman, J. R. ve Yettram, A. L., (1981). Finite difference solution of a system first order partial differential equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, 1385-1395.

Heteyni, M., (1964). Beams on elastik foundation, The University of Michigan Pres, Ann Arbor, Michigan

Miranda, C. K. ve Nair, K., (1946). Finite beams on elastik foundations, *J. Struc. Div. Proceedings*, ASCE, 92, 131-142.

Nath, Y., ve Jain, R. K., (1983). Nonlinear dynamic analysis of shallow spherical shell on elastik foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 25, 409-419

Pasternak, P. L., (1954). On a new method of analysis of an elastik foundation by means of two foundation constants, (in Russian), *Gosudarstvennoe IzdatelstvoLiteraturi po Stroitelstvu i Arkhitekture Moskow*, Russia.

Qin, Q. H., (1994). Hybrid Trefftz finite element approach for plate bending on an elastik foundation, Applied Math. Modeling, 18, 334-339.

Teo, T. M. ve Liew, K. M., (2002). Differantial cubature method for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, 1179-1194.

Vallabhan, C. V. G. ve Daloğlu A. T., (1999). Consistent FEM-Vlasov model for plates on layered soil, *Journal of Structual Engineering* , 125, 108-113.

Vallabhan, C. V. G. ve Das Y. C., (1988). Parametric study of beams on elastik foundations, *Journal of Engineering Mechanics*, 114, 2072-2082.

Vlasov, V. Z., ve Lepnt'ev. N. N., (1966). Beams plates and shells on elastik foundations. Israel Programme for scientific translations, Tel. Aviv.

Winkler, E., (1867). Die Lehre von der Elastizitat und Festiget, Prague, Czechoslovakia.

Zimmerman, H.(1998). Die berechnung des eisenbahnaber bausesi, Second Edition, Berlin, German.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nagehan EVCAN
Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul / 1986
Adres: İstanbul
E-Posta: nagehanevcan@hotmail.com
Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi