ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH tarafından hazırlanan **"Kısmi Metrik Uzaylarda En İyi Yakınlık Noktası Teoremleri"** adlı tez çalışması 06/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Anabilim Dalı
Kırıkkale Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Kısmi Metrik Uzaylarda En İyi Yakınlık Noktası Teoremleri**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (06/09/2021).

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, yeni bir BG-büzülme dönüşümü ve proksimal BG-büzülme dönüşümü kavramlarını tanıtıyoruz. Ardından, en iyi yakınlık noktası sonuçlarını elde ediyoruz. Böylece, literatürde var olan sonuçları genelleştiriyor ve geliştiriyoruz. Ayrıca, sonucumuzun etkisini göstermek için bazı örnekler sunuyoruz. Üçüncü bölümde, bir Fp-büzülme dönüşümü kavramını tanıtıyoruz. Ardından, bu tür eşlemeler için en iyi yakınlık noktası sonuçlarını ispatlıyoruz. Ayrıca, sonucumuzun etkinliğini göstermek için bir örnek sunuyoruz. Dördüncü bölümde, lineer olmayan Freldhom ve Volterra integral denklemlerinin çözümü için varlık ve teklik sonucu veriyoruz. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verildi.

2021, 39 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sabit Nokta, En iyi yakınlık noktası, Kısmi metrik uzay, Bianchini-Grandolfi fonksiyonu, F-büzülme

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SOME BEST PROXIMITY POINT RESULTS ON PARTIAL METRIC SPACES

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa ASLANTAŞ

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, we give basic definitions and theorems that will be used throughout the thesis are given. In the second chapter, we introduce new concepts of BG-contraction mapping and proximal BG-contraction mapping. Then, we obtain some best proximity point results. Hence, we generalize and improve results existing in the literature. Also, we provide nontrivial example to show the effect of our result. In the third chapter, we introduce a concept of Fp-contraction mapping. Then, we obtain a best proximity point for such mappings. Hence, we extend and generalize some results existing in the literature. Also, we provide an example to demonstrate the effectiveness of our result. In the fourth chapter, we give an existence and uniqueness result for solution of nonlinear Freldhom and Volterra integral aligns. In the last section, discussion and recommadation are given.

2021, 39 pages

Keywords: Fixed point, Best proximity point, Partial metrik space, Bianchini-Grandolfi function, F-contraction

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Her şeyden önce, rahman ve rahim olan Allah'a çok teşekkür ederim. Bu tez sürecimin tamamlanmasinda emeği geçen bir çok kişiye teşekkür etmekten mutluluk duyarım. Bu çalışmanın hazırlanması ve yürütülmesi sırasında ilgi ve alakasını hiç eksik etmediği, ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde bilgi ve deneyimleri ile yardım ettiği tüm bu süreçte manevi desteğini daima hissettirdiği için çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca gösterdiği akıl hocalığı ve sabrı için kendisine sossuz teşekkürler etmek istiyorum. Eğitim deneyimi benzersiz olmuştur. Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm öğretim üyelerine çok teşekkür ederim. Zor zamanlarımda beni her zaman yüreklendiren ve manevi desteğini esirgemeyen anneme babama teşekkür ederim. Destek olan kardeşlerime ve arkadaşlarıma en içtenten teşekkürlerimi sunarım.

Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH
Çankırı, Eylül 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. ÖN BİLGİLER **3**
2.1 Metrik Uzaylar ve Özellikleri **3**
2.2 Sabit Nokta ve En İyi Yakınlık Noktası Teorisi **9**
2.3 Kısmi Metrik Uzaylar **14**
3. EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARIMIZ **17**
3.1 BG-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **17**
3.2 Proximal BG-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **23**
3.3 F-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **28**
4. UYGULAMA **32**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **35**
KAYNAKLAR **36**
ÖZGEÇMİŞ **39**

SİMGELER DİZİNİ

$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\forall$	Her-Herhangi
$\exists$	En azından bir
$B_\sigma(a, \varepsilon)$	a merkezli ε yarıçaplı σ-yuvar

KISALTMALAR DİZİNİ

sup	Üst sınırların en küçüğü
inf	Alt sınırların en büyüğü
limsup	Üst limit
liminf	Alt limit

1. GİRİŞ

Sıradan diferansiyel denklemlerde sabit bir noktanın hangi koşullar altında var olduğu, tek olup olmadığı ve tek ise nasıl bulunabileceği sorularına yanıt aramak için sabit nokta teori çalışmaları ortaya çıkmıştır. Ancak optimizasyon, hesaplama algoritmaları, fiziksel matematiksel modelleme, ekonomi, varyasyonel eşitsizlikleri, tamamlayıcı problemler, denge problemleri, sosyal bilimler, tıp iletişim vb. birçok bilimsel alanda geniş bir yayılma göstermektedir. Matematik alanında genel topoloji, fonksiyonel analiz, doğrusal olmayan fonksiyonel analiz, operatör teorisi, diferansiyel denklemler, potansiyel teorisi, yaklaşım teorisi, kontrol sistemleri ve oyun gibi birçok alanda uygulamalarla karşımıza çıkmaktadır. Sabit nokta teorisi, $T\bar{a} = 0$ gibi denklemler ve bu denklemlerin çözümü ile ilgilenir. Denklem türüne uygun belirli bir operatör için sabit bir nokta bulmak, sorunun çözümünü bulmak anlamına gelir. Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi üzerine yapılan ilk çalışmalardan biri, 1922 yılında Banach daralma prensibi olarak bilinen temel bir sonuçtur (Banach 1922). Banach daralma prensibi dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de gösterir. Daha sonra Banach daralma prensibi farklı alanlara genişletilir (Abbas *et al.* 2019, Agarawal 2004, Aydi 2016, Ciric *et al.* 2011, Hussain *et al.* 2016, Karapınar *et al.* 2014, Kadelburg and Radenovic 2014, Latif *et al.* 2016, Marin *et al.* 2011, Mizoguchi and Takahashi 1989, Nadler 1969, Reich 1972, Reich 1978, Reich 1983, Reilly *et al.* 1982, Romaguera 1992). Lineer olmayan alt yarı sürekli fonksiyonlar yardımıyla genelleştirmelerin birisi Bianchini and Grandolfi (1986) tarafından elde edildi. Diğer farklı genelleştirilmesi Wardowski (2012) tarafından yeni bir fonksiyon ailesi ile elde edildi. Yeni fonksiyon ailesi pek çok büzülme sınıfını birleştirdiği için pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Altun *et al.* 2015, Altun *et al.* 2016, Altun *et al.* 2017, Cosentino and Vetro 2014, Durmaz and Altun 2016, Dag *et al.* 2017, Piri and Kumam 2014, Saadati *et al.* 2014).

Diğer taraftan, bir metrik uzayda (Ω, p) her $\bar{a}, \bar{b}$ için $p(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ gerek ve yeter koşul $\bar{a} = \bar{b}$ önermesi doğrudur. Ancak, bilgisayar bilimi deneyiminin motive ettiği bu denkliği gevşetme eğilimiden yola çıkarak, Matthews (1992) söz konusu koşulu zayıflatarak kısmi metrik adı verdiği yeni bir kavram ortaya koydu. Böylece sabit nokta çalışmaları farklı bir alanda genişletilmiş oldu. Ardından, kısmi metrik uzaylarda pek çok sabit nokta çalışmaları elde edilmiştir (Abbas and Nazir 2012, Romaguera 2010, Romaguera

2012, Vetro and Vetro 2015). Fakat, Haghi *et al.* (2013), (Ω, σ) kısmi metrik uzay olmak üzere $\bar{a} = \bar{b}$ ise $p(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ ve $\bar{a} \neq \bar{b}$ ise $p(\bar{a}, \bar{b}) = \sigma(\bar{a}, \bar{b})$ olarak tanımlanan fonksiyonun metrik uzay kullanarak her bir kısmi metrik uzayı bir metrik uzay ile ilişkilendirerek bir makale sundu. Kısmi metrik uzaylarda elde edilen bazı sabit nokta sonuçlarının olağan bir metrik uzay bağlamındaki sonuçlara eşdeğer olduğunu kanıtladılar. Ancak kısmi metriklerin bilgisayar bilimlerindeki uygulamaları için önemli bazı sonuçlar bu şekilde elde edilemez. Örneğin Haghi *et al.* (2013) deki yöntemi kullanarak, bir T dönüşümünün sabit noktası olan $\bar{a}$ noktası için $\sigma(\bar{a}, \bar{a}) = 0 = \sigma(T\bar{a}, T\bar{a})$ sonucuna varılamaz.

Diğer taraftan, Basha and Veeramani (1977) en iyi yakınlık noktası kavramını ortaya atmışlardır. A, B kümeleri (Ω, p) metrik uzayının boştan farklı alt kümeleri ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise T dönüşümü bir sabit noktaya sahip olamaz. Bu durumda minimizasyon problemi $\min\{p(\bar{a}.T\bar{a}) : \bar{a} \in A)$ için yaklaşık bir çözüm $\bar{a}$'in varlığını düşünmek anlamlıdır. Her $\bar{a} \in A$ için $p(\bar{a}, T\bar{a}) \geq 0$ olduğundan bahsedilen problemin en uygun çözümü $p(\bar{a}, T\bar{a}) = p(A, B)$ koşulunu sağlayan $\bar{a}$ noktasıdır. Bu $\bar{a}$ noktası T dönüşümünün en iyi yakın noktası olarak adlandırılır. Bu konu daha sonra bir çok yazar tarafından çalışılmıştır (Altun *et al.* 2020, Aslantas *et al.* 2021, Basha 2010, Gabeleh 2013, Jleli and Samet 2013, Parvaneh *et al.* 2020, Sahin *et al.* 2020).

Bu tezde kısmi metrik uzaylarda Bianchini-Grandolfi fonksiyonları yardımıyla yeni en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edildi. Ayrıca, Wardowski (2012) tarafından ortaya atılan F-büzülme fonksiyonları yardımıyla yeni en iyi yakınlık noktası sonuçları kısmi metrik uzaylarda elde edildi. Ayrıca sonuçlarımızı etkilerini göstermek için bazı örnekler sunuldu.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın ana sonuçlarında faydalandığımız bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Metrik Uzaylar ve Özellikleri

Tanım 2.1. W boş olmayan bir küme ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer p fonksiyonu, her $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in W$ için,

p_1) $p(\bar{a}, \bar{b}) \geq 0$,

p_2) $p(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$,

p_3) $p(\bar{a}, \bar{b}) = p(\bar{b}.\bar{a})$,

p_4) $p(\bar{a}, \bar{b}) \leq p(\bar{a}, \bar{c}) + p(\bar{c}, \bar{b})$,

koşullarını sağlıyorsa p fonksiyonuna W üzerinde bir metrik denir. Ayrıca (W, p) çiftine bir metrik uzay denir.

Örnek 2.2. $W = \mathbb{R}$ ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a}, \bar{b} \in W$ için $p(\bar{a}, \bar{b}) = \left|\bar{a} - \bar{b}\right|$ biçiminde tanımlansın. O halde, (W, p) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}$'de alışılmış metrik olarak adlandırılır.

Örnek 2.3. $W = \mathbb{R}^2$ ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in W$ için

$$p((\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2)) = maks\{|\bar{a}_1 - \bar{a}_2|, |\bar{b}_1 - \bar{b}_2|\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W, p) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}^2$' de maksimum metrik olarak adlandırılır.

Örnek 2.4. $W = \mathbb{R}^2$ ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in W$ için

$$p(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(\bar{a}_1 - \bar{b}_1)^2 + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2)^2}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W, p) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}^2$'de Öklid metriği olarak adlandırılır.

Örnek 2.5. W boştan farklı bir küme ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a}, \bar{b} \in W$ için

$$p(\bar{a},\bar{b}) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{a} = \bar{b} \\ 1 & , \quad \bar{a} \neq \bar{b} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde, (W,p) bir metrik uzaydır. Bu metrik, ayrık metrik olarak adlandırılır.

Örnek 2.6. Bir W kümesi $[\bar{a},\bar{b}]$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar ailesi olsun ve $p : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $f,g \in W$ için

$$p(f,g) = \max_{t\in[\bar{a},\bar{b}]} |f(t) - g(t)|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W,p) bir metrik uzaydır. Bu metrik, düzgün metrik olarak adlandırılır.

Tanım 2.7. (W,p) bir metrik uzay ve $\bar{a}_0 \in W$ olsun. Her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(\bar{a}_0,r) = \{\bar{b} \in W : p(\bar{a}_0,\bar{b}) < r\}.$$

kümesine açık yuvar denir.

Örnek 2.8. $(\mathbb{R},p)$ alışılmış metrik uzay ve $\bar{a}_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(\bar{a}_0,r) = (\bar{a}_0 - r, \bar{a}_0 + r).$$

biçimindedir.

Tanım 2.9. (W,p) bir metrik uzay ve $\bar{a}_0 \in W$ olsun. Her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(\bar{a}_0,r) = \{\bar{b} \in W : p(\bar{a},\bar{b}) \leq r\}$$

kümesine kapalı yuvar denir.

Örnek 2.10. $(\mathbb{R}, p)$ alışılmış metrik uzay ve $\bar{a}_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$\overline{B}(\bar{a}_0, r) = [\bar{a}_0 - r, \bar{a}_0 + r]$$

biçimindedir.

Tanım 2.11. (W, p) bir metrik uzay ve S W'nın alt kümesi olsun. Eğer S kümesi noktalarının her biri için bir açık yuvar içeriyorsa, yani

$$\forall \bar{a} \in S : \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{a}, \varepsilon) \subseteq S$$

sağlanıyorsa S kümesine açık küme denir.

Önerme 2.12. (W, p) bir metrik uzay olsun. Her açık yuvar bir açık kümedir.

Tanım 2.13. (W, p) bir metrik uzay ve S W'nın alt kümesi olsun. Eğer S kümesinin tümleyeni açık ise S kümesine kapalı küme denir.

Örnek 2.14. (W, p) ayrık metrik uzay olsun. Her $\bar{a} \in W$ için

$$B\left(\bar{a}, \frac{1}{2}\right) = \{\bar{a}\}$$

olduğu için her tek nokta $\{\bar{a}\}$ kümesi bir açık kümedir. Dolayısıyla her S kümesi açıktır. Ayrıca her küme de kapalıdır.

Tanım 2.15. (W, p) bir metrik uzay ve S W'nın herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer her $\bar{a} \in S$ için $S \subseteq B(\bar{a}, r)$ olacak şekilde pozitif $r > 0$ bir gerçel sayısı varsa S kümesine sınırlıdır denir. Eğer S kümesi sınırlı değil ise sınırsızdır denir.

Tanım 2.16. W boştan farklı bir küme olsun. Doğal sayılardan W'ya tanımlanan her fonksiyona bir dizi denir. Bir diziyi temsil etmek için genellikle $\{\bar{a}_n\}$ sembolünü kullanırız, burada n bir doğal sayıdır ve $\bar{a}_n$ üzerindeki fonksiyonun değeridir.

Tanım 2.17. (W, p) bir metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ W'da bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ koşuluna sahip her $m, n \in \mathbb{N}$ için $p(\bar{a}_n, \bar{a}_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\bar{a}_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Örnek 2.18. $(\mathbb{R}, p)$ alışılmış metrik uzay olsun. $\{\bar{a}_n\} = \{1 - \frac{1}{2^n}\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir Cauchy dizisidir.

Örnek 2.19. $(\mathbb{R}, p)$ alışılmış metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{a}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

biçiminde tanımlansın. $\varepsilon = \frac{1}{3}$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{2n} - \bar{a}_n| &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &\geq \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &= \tfrac{1}{2} > \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu için $\{\bar{a}_n\}$ dizisi Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.20. (W, p) bir metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$'nin W'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ koşuluna sahip her $n \in \mathbb{N}$ için $p(\bar{a}_n, \bar{a}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\bar{a}_n\}$ dizisi $\bar{a}$ noktasına yakınsar denir ve $n \to \infty$ için $\bar{a}_n \to \bar{a}_0$'veya $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a}_0$ biçiminde gösterilir.

Önerme 2.21. (W, p) bir metrik uzay, $\{\bar{a}_n\}$ W'da bir dizi ve $\bar{a} \in W$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a} \Longleftrightarrow p(\bar{a}_n, \bar{a}) \to \infty \; n \to 0 \text{ için.}$$

Örnek 2.22. $(\mathbb{R}, p)$alışılmış metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $\bar{a}_n = \frac{1}{n}$ biçiminde tanımlı olsun. $\{\bar{a}_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$ seçelim. O halde

$$\begin{aligned} p(\bar{a}_n, \bar{a}) &= p\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) \\ &= \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| \\ &= \tfrac{1}{n} \\ &< \tfrac{1}{n_0} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\{\bar{a}_n\}$ dizisi 0 noktasına yakınsaktır.

Teorem 2.23. (W,p) bir metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$ W'da bir dizi olsun. Eğer $\{\bar{a}_n\}$ dizisi bir noktaya yakınsak ise o nokta tektir.

Tanım 2.24. (W,p) bir metrik uzay ve $(\bar{a}_n)$ de W'de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $(\bar{a}_{n_k})$ dizisine $(\bar{a}_n)$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.25. (W,p) bir metrik uzay olsun. $(\bar{a}_n)$ dizisi yakınsak ise her $(\bar{a}_{n_k})$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.26. (W,p) bir metrik uzay ve $A \subseteq W$ olsun. A nin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{\bar{a}_n\} \subseteq A$ olacak biçimdeki her $\{\bar{a}_n\}$ dizisi için $\bar{a}_n \to \bar{a}$ olduğunda $\bar{a} \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.27. (W,p) bir metrik uzay olsun. Eğer W' daki her Cauchy dizisi W'da bir noktaya yakınsıyorsa (W,p) tam metrik uzayı denir.

Örnek 2.28. (W,p) ayrık metrik uzayı tam metrik uzaydır.

Önerme 2.29. Metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Açıklama 2.30. Önerme 2.29 tersi her zaman doğru olmayabilir. $(\mathbb{Q},p)$ alışılmış metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$ dizisi $\bar{a}_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ için $\bar{a}_n = \frac{\bar{a}_n}{2} + \frac{1}{\bar{a}_n}$ biçiminde tanımlansın. $\{\bar{a}_n\}$, $\mathbb{Q}$'da bir Cauchy dizisidir, fakat $\mathbb{Q}$ içinde herhangi bir noktaya yakınsak değildir.

Tanım 2.31. $(W,p_1),(Y,p_2)$ iki metrik uzay, $f : W \to Y$ bir fonksiyon ve $\bar{a}_0 \in W$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d_1(\bar{a},\bar{a}_0) < \delta$ koşuluna sahip her $\bar{a}$ için $d_2(f(\bar{a}),f(\bar{a}_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa f fonksiyonuna $\bar{a}_0$ noktasında süreklidir denir. Eğer her $\bar{a}_0 \in W$ için f fonksiyonu sürekli ise f fonksiyonu W üzerinde süreklidir denir.

Örnek 2.32. $(\mathbb{R},d)$ alışılmış metrik uzay ve $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a} \in (0,1)$ için $f(\bar{a}) = \frac{1}{\bar{a}}$ biçiminde tanımlansın. f fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 2.33. $(W,p_1),(Y,p_2)$ iki metrik uzay ve $f : W \to Y$ bir fonksiyon. Eğer her $\bar{a} \in W$ için

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\bar{a}_n) = f(\bar{a}).$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna dizisel süreklidir denir.

Önerme 2.34. $(W,d_1),(Y,d_2)$ iki metrik uzay ve $f : W \to Y$' bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu W üzerinde süreklidir ancak ve ancak f fonksiyonu dizisel süreklidir.

Tanım 2.35. (W,p) bir metrik uzay, $f : W \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{a}_0 \in W$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\bar{a} \in B(\bar{a}_0,\delta) \cap W$ koşuluna sahip her $\bar{a}$ için

$$f(\bar{a}_0) - \varepsilon < f(\bar{a})$$

sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna alt yarı-sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ için $\bar{a} \in B(\bar{a}_0,\delta) \cap W$ koşuluna sahip her $\bar{a}$ için

$$f(\bar{a}) < f(\bar{a}) + \varepsilon$$

sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna üst yarı-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.36. (W,p) bir metrik uzay, $f : W \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{a} \in W$"nın bir limit noktası olsun. f alt yarı-sürekli fonksiyondur ancak ve ancak

$$\lim_{\bar{a}\to\bar{a}_0} \inf f(\bar{a}) \geq f(\bar{a}_0).$$

Benzer şekilde, f üst yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak

$$\lim_{\bar{a}\to\bar{a}_0} \inf f(\bar{a}) \leq f(\bar{a}_0).$$

Teorem 2.37. (W,p) bir metrik uzay, $f : W \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\bar{a}_0 \in W$ olsun. Eğer W'da $\bar{a}_0$'ya yakınsayan her $\{\bar{a}_n\}$ dizisi için

$$\lim_{\bar{a}\to\infty} \inf f(\bar{a}) \geq f(\bar{a}_0)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna alt yarı-sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde, eğer

W'da $\bar{a}_0$'ya yakınsayan her $\{\bar{a}_n\}$ dizisi için

$$\lim_{\bar{a}\to\infty} \inf f(\bar{a}) \leq f(\bar{a}_0)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna üst yarı-sürekli fonksiyon denir.

2.2 Sabit Nokta ve En İyi Yakınlık Nokta Teorisi

Tanım 2.38. W boştan farklı bir küme ve $T : W \to W$ bir dönüşüm olsun. $T\bar{a} = \bar{a}$ olacak şekilde bir $\bar{a} \in W$ varsa $\bar{a}$ noktasına T'nın sabit noktası denir.

Örnek 2.39. $W = [1,\infty]$ ve $T : W \to W$, $F : W \to W$ dönüşümleri sırasıyla her $\bar{a} \in W$ için

$$T\bar{a} = \frac{\bar{a}+2}{3}$$

ve

$$F\bar{a} = 2+\bar{a}$$

Bu durumda $\bar{a} = 1$ T'nin sabit noktasıdır, ancak F'nin W'de sabit bir noktası yoktur. Ayrıca, $W = (1,\infty)$ alırsak, T ve F'nin sabit bir noktası yoktur. Bu nedenle, sabit noktanın varlığı hem dönüşüme hem de dönüşümün tanımlandığı kümeye bağlıdır.

Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktasının $T\bar{a} = \bar{a}$ denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten de,

$$\bar{a}^2 - 6x + 5 = 0 \tag{2.1}$$

denklemini ele alalım. Buna göre $\bar{a} = \frac{\bar{a}^2+5}{6}$ yazabiliriz. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü her $\bar{a} \in \mathbb{R}$ için

$$T\bar{a} = \frac{\bar{a}^2+5}{6}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda T nin sabit noktası eşitsizlik (2.1)'in çözümüdür.

Tanım 2.40. (W, p) bir metrik uzay ve $T : W \to W$ bir dönüşüm olsun.

- Eğer her $\bar{a}, \bar{b} \in W$ için

$$p(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq rp(\bar{a}, \bar{b}) \tag{2.2}$$

sağlanacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T'ye büzülme dönüşümü denir.

- Eğer her $\bar{a}, \bar{b} \in W$ için

$$p(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq p(\bar{a}, \bar{b})$$

sağlanıyorsa T'ye genişlemeyen dönüşümü denir.

- Eğer her $\bar{a}, \bar{b} \in W$ için

$$p(T\bar{a}, T\bar{b}) < p(\bar{a}, \bar{b})$$

sağlanıyorsa T'ye büzen dönüşüm denir.

Her büzülme dönüşümünün büzen bir dönüşüm olduğu ve ayrıca her büzen dönüşümün genişlemeyen bir dönüşüm olduğunu görülebilir. Ancak, tersleri doğru olmayabilir.

Örnek 2.41. $(\mathbb{R}, p)$ alışılmış metrik uzay olsun.

- $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü $T\bar{a} = \bar{a}^2$ biçiminde tanımlanırsa, T büzülme dönüşümüdür.
- $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $T\bar{a} = \bar{a}$ biçiminde tanımlanırsa, T genişlemeyen bir dönüşümdür. Ayrıca, T büzen dönüşüm değildir.
- $T : [1,\infty) \to [1,\infty)$ dönüşümü $T\bar{a} = \frac{\bar{a}^2+1}{\bar{a}}$ olarak tanımlarsak, o zaman T büzen bir eşlemedir. Ayrıca, T bir büzülme eşlemesi değildir.

Banach Sabit Nokta Teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremidir. İspatından görülebileceği gibi, aynı zamanda bize sabit noktanın bulunmasına dair bir yöntemde sunmaktadır. Bu yöntem tekarlama olarak adlandırılır, yani, belirli bir kümede rastgele bir $\bar{a}_0$ seçerek başlıyoruz ve tekrarlı olarak aynı işlemi uygulayarak

$$\bar{a}_{n+1} = T\bar{a}_n \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

biçiminde tanımlı bir dizi oluştururuz. Bu yöntem, uygulamalı matematiğin hemen hemen her dalında bulunabilir. Banach sabit nokta teoremi, metrik uzaylarda sabit nokta

teoremlerinin başlangıcı olması yanında matematik bilimlerinin çeşitli bölümlerinde geniş uygulanabilirliğe sahiptir.

Teorem 2.42. (W,p) tam bir metrik uzay ve $T : W \to W$ büzülme dönüşümü olsun. O halde T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu ilkenin genelleştirilmesi, yoğun bir şekilde araştırılan bir araştırma dalı olmuştur. Aşağıda bu tür genellemelere birkaç örnek verilmiştir. Bu anlamda, Bianchini and Grandolfi (1986) sağ taraftaki eşitsizliğin yerine lineer olmayan bir fonksiyon kullanarak aşağıdaki bu ünlü prensibin bir genellemesi olan teoremi elde ettiler.

Teorem 2.43. (W,p) tam bir metrik uzay ve $T : W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\bar{a},\bar{b} \in W$ için

$$p(T\bar{a},T\bar{b}) < \varphi(p(\bar{a},\bar{b}))$$

olacak şekilde her $\gamma > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\gamma) < \infty$ koşulunu sağlayan azalmayan bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu varsa T dönüşümü W'da bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.43 deki koşulları sağlayan φ fonksiyonlarının kümesini Φ ile göstereceğiz.
Wardowski (2012), Banach büzülme ilkesi dahil literatürdeki bir cok büzülmeyi içeren F-büzülme adında yeni bir kavram ortaya attı. $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:
(F_1) F kesin artandır,
(F_2) Pozitif reel sayılardaki her $\{\alpha_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(\delta_n) = -\infty,$$

(F_3) $\lim_{\delta\to 0^+} \delta^k F(\delta) = 0$ koşulunu sağlayan bir $k \in (0,1)$ reel sayısı vardır.
(F_1)-(F_3) koşullanı sağlayan $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesini $\mathscr{F}$ ile gösterelim.
Wardowski ünlü ilkenin uygun bir genellemesi olan aşağıdaki teoremi ispatladı.

Tanım 2.44. (W,p) bir metrik uzay, $T : W \to W$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer $p(T\bar{a},T\bar{b}) > 0$ koşuluna sahip her $\bar{a},\bar{b} \in \Omega$ için

$$\tau + F(p(T\bar{a},T\bar{b})) \leq F(p(\bar{a},\bar{b}))$$

sağlayacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T dönüşümüne F-büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.45. (W, p) bir metrik uzay ve $T : W \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü bir F-büzülme dönüşümü ise bu durumda T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan Basha and Veeramani (1977) kendinden kendine olmayan dönüşümleri düşünerek en iyi yakınlık noktası tanımını ortaya attı. (W, p) metrik uzay, A, B W'nın boştan farklı altkümeleri ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $A \cap B$ boş küme ise T dönüşümü sabit noktaya sahip olamaz. Bu durumda $\min\{p(\bar{a}, T\bar{a}) : \bar{a} \in A\}$ probleminin çözümünün varlığını bulmak mantıklıdır. Her $\bar{a} \in A$ için $p(\bar{a}, T\bar{a}) \geq p(A, B)$ olduğundan, $p(\bar{a}, T\bar{a}) = p(A, B)$ bahsedilen probleminin optimal bir çözümüdür.

Tanım 2.46. Let (W, p) bir metrik uzay, A, B W'nın boştan farklı alt kümeleri ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p(\bar{a}, T\bar{a}) = p(A, B)$ olacak şekilde bir $\bar{a} \in A$ varsa $\bar{a}$ noktasına T'nin en iyi yakınlık noktası denir.

Eğer Tanım 2.46'de $A = B = W$ alırsak bu durumda en iyi yakınlık noktası T 'nin sabit noktasıdır. En iyi yakınlık noktası sonucları sabit nokta sonuclarına döndüğünden pek çok yazar bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır. (W, p) bir metrik uzay A, B W'nın boştan farklı alt kümeleri ve $T : A \to B$'ye dönüşümü olsun.

$$A_0 = \{\bar{a} \in A : p(\bar{a}, \bar{b}) = p(A, B) \text{ bazı } \bar{b} \in B\}$$

ve

$$B_0 = \{\bar{b} \in B : p(\bar{a}, \bar{b}) = p(A, B) \text{ bazı } \bar{a} \in A\}$$

kümelerini tanımlayalım. Basha (2010), proksimal kasılma dönüşüm kavramını tanıtarak, kendinden olmayan dönüşümler için Banach büzülme ilkesinin bir versiyonunu kanıtladı.

Tanım 2.47. (W, p) bir metrik uzay $A.B$, W'nin boş olmayan altkümeleri ve $T : A \to B$ bir

dönüşüm olsun. Eğer her $\bar{a}_1, \bar{a}_2, u_1, u_2 \in A$ için

$$\left.\begin{array}{l} p(u_1, T\bar{a}_1) = p(A,B) \\ p(u_2, T\bar{a}_2) = p(A,B) \end{array}\right\} p(u_1,u_2) \leq kp(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ varsa T dönüşümüne proksimal büzülme dönüşümü denir.

Tanım 2.48. (W,p) bir metrik uzay ve A,B ,W'nin boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $\bar{a} \in A$ için $p(\bar{a},\bar{b}_n) \to p(\bar{a},B)$ koşulunu sağlayan her $\{\bar{b}_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise B A'ya göre yaklaşık kompaktır denir..

Teorem 2.49. (W,p) bir tam metrik uzay, A,B, W'nin boş olmayan altkümeleri ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. A kapalı, B, A'ya göre yaklaşık olarak kompakt ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. Eğer T, $T(A_0) \subseteq B_0$'koşulunu sağlayan bir proksimal büzülme dönüşümü ise T, A'da tek bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

Ardından Raj (2013) P-özelliği kavramını tanıttı ve en iyi yakınlık noktasını elde etti.

Tanım 2.50. (W,p) bir metrik uzay ve A,B,W'nin boş olmayan altkümeleri olsun. Eğer her $u_1, u_1, v_1, v_2 \in A$ için

$$\left.\begin{array}{l} p(u_1,v_1) = p(A,B) \\ p(u_2,v_2) = p(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow p(u_1,u_2) = p(v_1,v_2)$$

koşulu sağlanıyorsa (A,B) çifti P-özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.51. (W,p) bir metrik uzay, A,B,W'nin boş olmayan kapalı altkümeleri ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. (A,B) çifti P-özelliğine sahip olduğunu ve $T : A \to B$ dönüşümünün $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağladığını varsayalım. Eğer her $\bar{a}, \bar{b} \in A$ için

$$p(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq kp(\bar{a},\bar{b})$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ varsa T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

Saadati *et al.* (2014) $\mathscr{F}$ ailesi yardımıyla aşağıdaki en iyi yakınlık noktası sonucunu ispatladılar.

Teorem 2.52. (W,p) bir metrik uzay A,B,W'nin boş olmayan kapalı altkümeleri ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. (A,B) çifti P-özelliğine sahip olduğunu varsayalım. Eğer $T : A \to B$ dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan bir F-büzülme dönüşümü ise bu durumda T tek bir en iyi yakın noktaya sahiptir.

2.3 Kısmi Metrik Uzaylar

Matthews (1992), veri akışı ağlarının düz anlamsal anlam bilimini incelemek için kısmi metrik uzay kavramını ortaya attı. Kısmi metrik uzayın en önemli özelliklerinden biri noktanın kendine olan uzaklığının sifir olmayabileceğidir. Şimdi kısmi metrik uzay tanımı ve onunla ilgli temel özellikleri verelim.

Tanım 2.53. W boş olmayan bir küme ve $\sigma : W \times W \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in W$ için

(p1) $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \sigma(\bar{a},\bar{a}) = \sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{b},\bar{b})$

(p2) $\sigma(\bar{a},\bar{a}) \leq \sigma(\bar{a},\bar{b})$

(p3) $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{b},\bar{a})$

(p4) $\sigma(\bar{a},\bar{c}) \leq \sigma(\bar{a},\bar{b}) + \sigma(\bar{b},\bar{c}) - \sigma(\bar{b},\bar{b})$.

şartları sağlanırsa σ fonksiyonuna kısmi metrik ve (W,σ) ikilisine kısmi metrik uzay denir.

Eğer $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = 0$ ise (σ_1) ve (σ_2) özeliklerinden $\bar{a} = \bar{b}$ olduğu görülür. Fakat $\bar{a} = \bar{b}$ ise $\sigma(\bar{a},\bar{b})$ sifir olmayabilir.

Açıklama 2.54. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzay olduğu görülebilir fakat tersi doğru olmayabilir. Bunu aşağıdaki iki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.55. $W = [0,\infty)$ and $\sigma : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a},\bar{b} \in W$ için $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = maks\{\bar{a},\bar{b}\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W,σ) bir kısmi metrik uzaydır. Fakat (W,σ) metrik uzay değildir. Gerçekten, eğer $\bar{a} = \bar{b} = 1$ seçersek bu durumda $\sigma(1,1) = 1 \neq 0$.

Örnek 2.56. $W=[0,\infty)$ and $\sigma: W\times W\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $\bar{a},\bar{b}\in W$ için

$$\sigma(\bar{a},\bar{b})=\begin{cases}\frac{\bar{a}}{2} & , \quad \bar{a}=\bar{b}\\ \\ \bar{a}+\bar{b} & , \quad \bar{a}\neq\bar{b}\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W,σ) bir kısmi metrik uzaydır. Fakat (W,σ) bir metrik uzay değildir. Gerçekten, eğer $\bar{a}=\bar{b}=2$ alırsak, bu durumda $\sigma(2,2)=1\neq 0$.

Tanım 2.57. (W,σ) herhangi bir kısmi metrik uzay, $\bar{a}_0\in W$ ve $\varepsilon>0$ olsun.

- $B_\sigma(\bar{a}_0,\varepsilon)=\{\bar{b}\in W:\sigma(\bar{a}_0,\bar{b})<\sigma(\bar{a}_0,\bar{a}_0)+\varepsilon\}$ kümesine $\bar{a}_0$ merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.
- $B_\sigma(\bar{a}_0,\varepsilon)=\{\bar{b}\in W:\sigma(\bar{a}_0,\bar{b})\leq\sigma(\bar{a}_0,\bar{a}_0)+\varepsilon\}$ kümesine ise $\bar{a}$ merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

(W,σ) bir kısmi metrik uzay olsun. σ metriği her $\bar{a}\in W$ için

$$\{B_\sigma(\bar{a},\varepsilon):\bar{a}\in W,\varepsilon>0\}$$

açık yuvarlar ailesini taban kabul eden W üzerinde bir τ_σ topolojisi oluşturur. Bu topoloji T_0 topolojisidir.

Önerme 2.58. (W,σ) kısmi metrik uzay ve $\sigma^s: W\times W\to[0,\infty)$ fonksiyonu

$$\sigma^s(\bar{a},\bar{b})=2\sigma(\bar{a},\bar{b})-\sigma(\bar{a},\bar{a})-\sigma(\bar{b},\bar{b})$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W,σ^s) bir metrik uzaydır.

Önerme 2.59. (W,σ) bir kısmi metrik uzay ve $\{\bar{a}_n\}$, W'de bir dizi olsun. $\{\bar{a}_n\}$ dizisinin bir $\bar{a}\in W$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma(\bar{a},\bar{a})=\lim_{n\to\infty}\sigma(\bar{a},\bar{a}_n).$$

Tanım 2.60. $(W.\sigma)$ bir kısmi metrik uzay olsun.

- $\{\bar{a}_n\}$, W'de bir dizi olmak üzere, eğer $\lim_{n,m\to\infty}\sigma(\bar{a}_n,\bar{a}_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{\bar{a}_n\}$ dizisi W'de bir Cauchy dizisidir.

- W'deki her Cauchy dizisi W'de yakınsak ise yani $\bar{a} \in W$ için

$$\sigma(\bar{a},\bar{a}) = \lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n,\bar{a}_m).$$

Kısmi metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 2.61. $W = \mathbb{R}^-$ ve $\sigma : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = -\min\{\bar{a},\bar{b}\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (W,σ) bir kısmi metriktir. W'da bir

$$\{\bar{a}_n\} = \{9,-1,0,-1,0,-1,...\}$$

dizisi tanımlayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n,-1) = \lim_{n\to\infty}(-\min\{\bar{a}_n,-1\}) = 1 = \sigma(-1,-1)$$

olup $\{\bar{a}_n\}$ dizisi -1 e yakınsar. Fakat $\lim_{n,m\to\infty}, \sigma(\bar{a}_n,\bar{a}_m)$ limiti yoktur. Buradan $\{\bar{a}_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.62. (W,σ) bir kısmi metrik uzay olsun. Her Cauchy dizisi yakınsak ise (W,p) ikilisine tam kısmi metrik uzay denir.

Önerme 2.63. (W,σ) bir kısmi metrik uzay ve A kümesi W'nın boştan farklı alt kümesi olsun.

$$A \text{ kapalıdır } \Longleftrightarrow (A,p) \text{ tamdır.}$$

Lemma 2.64. (W,σ) kısmi metrik uzay, $\{\bar{a}_n\}$ W da bir dizi ve $\bar{a} \in W$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\{\bar{a}_n\}$ dizisinin (W,σ)'de bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{\bar{a}_n\}$ dizisi (W,σ^s)'de bir Cauchy dizisidir.

ii) (W,σ) tam kısmi metrik uzaydır ancak ve ancak (W,σ^s) tam metrik uzaydır.

iii)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^s(\bar{a}_n,\bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\bar{a},\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n,\bar{a} = \lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n,\bar{a}_m)).$$

3. EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARIMIZ

Bu bölümde Bianchini-Grandolfi fonksiyonları yardımıyla elde ettiğimiz sonuçları sunuyoruz.

3.1 BG-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Bu bölüme aşağıdaki tanımı tanıtarak başlıyoruz.

Tanım 3.1. (Ω,σ) bir kısmi metrik uzay, $\emptyset \neq A,B \subseteq \Omega$ ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\bar{a},\bar{b} \in A$ için

$$\sigma(T\bar{a},T\bar{b}) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}.\bar{b}))$$

koşulunu sağlayan bir $\varphi \in \Phi$ fonksiyonu varsa, T dönüşümü *BG*- büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 3.2. (Ω,σ) bir tam kısmi metrik uzay, A,B Ω'nin boştan farklı kapalı alt kümeleri ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. $T : A \to B$ dönüşümünün $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan bir *BG*-büzülme dönüşümü olduğunu ve (A,B) çiftinin *P*-özelliğine sahip olduğunu varsayalım. O halde T, A'da tek bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir. Ayrıca eğer $\bar{a}^*$ bir en iyi yakınlık noktası ise $\sigma(\bar{a}^*,\bar{a}^*) = 0$.

Proof. $\bar{a}_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun. $T\bar{a}_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$\sigma(\bar{a}_1,T\bar{a}_0) = \sigma(A,B) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_1 \in A_0$ vardır. T dönüşümü *BG*-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\sigma(T\bar{a}_0,T\bar{a}_1) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}_0,\bar{a}_1))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yine $T\bar{a}_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$\sigma(\bar{a}_2,T\bar{a}_1) = \sigma(A,B) \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_2 \in A_0$ vardır. T dönüşümü BG-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\sigma(T\bar{a}_1, T\bar{a}_2) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}_1, \bar{a}_2))$$

eşitsizliğini buluruz. (3.1) ve (3.2) eşitliklerini göz önüne alarak (A,B) çifti P-özelliğine sahip olmasını kullanarak

$$\sigma(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \sigma(T\bar{a}_0, T\bar{a}_1)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu işlemi tekrarlayarak her $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) = \sigma(T\bar{a}_{n-1}, T\bar{a}_n) \tag{3.3}$$

$$\sigma(\bar{a}_{n+1}, T\bar{a}_n) = \sigma(A,B) \tag{3.4}$$

ve

$$\sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}_{n+1}) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}))$$

eşitliklerini ve eşitsizliğini saylayacak bir $\{\bar{a}_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\bar{a}_{n_0} = \bar{a}_{n_0+1}$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa eşitlik (3.4)'ten $\bar{a}_{n_0}$ noktası T'nin en iyi yakın noktasıdır. Şimdi, $\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) > 0$ olduğunu varsayalım. (A,B) çifti P-özelliğine sahip ve T dönüşümü bir BG-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) &= \sigma(\bar{a}_{n_{0+1}}, \bar{a}_{n_{0+1}}) \\ &= \sigma(T\bar{a}_{n_0}, T\bar{a}_{n_0}) \\ &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0})) \\ &< \sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) \end{aligned}$$

buluruz ki bu ifadede bir çelişkidir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\bar{a}_n \neq \bar{a}_{n+1}$ olduğunu, yani

her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) &= \sigma(T\bar{a}_{n-1}, T\bar{a}_n) \\
&\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n)) \\
&= \varphi(\sigma(T\bar{a}_{n-2}, T\bar{a}_{n-1})) \\
&\leq \varphi^2(\sigma(\bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\varphi \in \Phi$ olduğu için $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1))$ serisi yakınsaktır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = 0$$

bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmaksızın $m > n > n_0$ koşuluna sahip her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) &\leq \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) + \sigma(\bar{a}_{n+1}, \bar{a}_{n+2}) + ... + \sigma(\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m) \\
&\leq \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) + \varphi^{n+1}(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1) + ... + \varphi^{m-1}(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) \\
&\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)).
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak, $\lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = 0$ olur ve böyle $\{\bar{a}_n\}$, A'da bir Cauchy dizisidir. Eşitlik (3.3)'den, $\{T\bar{a}_n\}$, B'de bir Cauchy dizisidir. (Ω, σ) tam bir kısmi metrik uzay ve A,B Ω'nin kapalı alt kümeleri olduğu için

$$\lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = \sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}) = 0 \tag{3.5}$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}_m) = \sigma(\bar{b}^*, \bar{b}^*) = \lim_{n\to\infty} \sigma(T\bar{a}_n, \bar{b}^*) = 0 \tag{3.6}$$

olacak şekilde $\bar{a}^* \in A$ ve $\bar{b}^* \in B$ noktaları vardır. Lemma 2.64'den $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\sigma(\bar{a}^*, \bar{b}^*) = \sigma(A.B)$$

buluruz. (A,B) çifti P-özelliğine sahip olduğundan

$$\sigma(\bar{a}^*,\bar{a}^*) = \sigma(\bar{b}^*,\bar{b}^*)$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca, T dönüşümü BG-büzülme dönüşümü olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}^*) &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_n,\bar{a}^*)) \\ &\leq \sigma(\bar{a}_n,\bar{a}^*) \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak ve (3.5) (3.6) kullanarak

$$\sigma(\bar{b}^*, T\bar{a}^*) = 0$$

elde ederiz ve böylece $\bar{b}^* = T\bar{a}^*$ bulunur. O halde $\bar{a}^*$, A'deki T'nin en iyi yakınlık noktasıdır. Ayrıca (3.5)'ten $\sigma(\bar{a}^*,\bar{a}^*) = 0$ dır. Şimdi,en iyi yakınlık noktasının tekliğini göstereceğiz. $\bar{a}^*$ ve $\bar{b}^*$ A'de birbirinden farklı T'nin en iyi yakınlık noktaları olduğunu varsayalım, yani,

$$\sigma(\bar{a}^*, T\bar{a}^*) = \sigma(A,B)$$

ve

$$\sigma(\bar{b}^*, T\bar{b}^*) = \sigma(A,B).$$

(A,B) çifti P-özelliğine sahip ve T bir BG-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}^*,\bar{b}^*) &= \sigma(T\bar{a}^*, T\bar{b}^*) \\ &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}^*,\bar{b}^*)) \\ &< \sigma(\bar{a}^*,\bar{b}^*) \end{aligned}$$

bulunur ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle, T A'da tek bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

□

Örnek 3.3. $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$ ve $\sigma : \Omega \times \Omega \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\}$ ile tanımlansın. Şimdi σ'nin kısmi metrik olduğunu gösterelim.

p_1) $(\bar{a}_1,\bar{a}_2) = \bar{a} = \bar{b} = (\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ ise $\sigma(\bar{a},\bar{a}) = \sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{b},\bar{b})$ kolayca görülür. Kabul

edelim ki $\sigma(\bar{a},\bar{a}) = \sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{b},\bar{b})$ olsun. $\bar{a} = \bar{b}$ olduğunu gösterelim. O halde

$$\sigma(\bar{a},\bar{a}) = \sigma(\bar{b},\bar{b}) \Longrightarrow \bar{a}_2 = \bar{b}_2$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{a},\bar{a}) &\Longrightarrow \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\} = \bar{a}_2 \\ &\Longrightarrow \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \\ &\Longrightarrow \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| = 0 \\ &\Longrightarrow \bar{a}_1 = \bar{b}_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\bar{a} = \bar{b}$ bulunur.

p_2) Her $\bar{a} = (\bar{a}_1,\bar{a}_2), \bar{b} = (\bar{b}_1,\bar{b}_2) \in \Omega$ için,

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a},\bar{a}) &= \bar{a}_2 \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\} = \bar{a}_2 \\ &\leq \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\} \\ &= \sigma(\bar{a},\bar{b}). \end{aligned}$$

p_3) Her $\bar{a} = (\bar{a}_1,\bar{a}_2), \bar{b} = (\bar{b}_1,\bar{b}_2) \in \Omega$ için $\sigma(\bar{a},\bar{b}) = \sigma(\bar{b},\bar{a})$ sağlandığı açıktır.

p_4) Her $\bar{a} = (\bar{a}_1,\bar{a}_2), \bar{b} = (\bar{b}_1,\bar{b}_2), u = (u_1,u_2) \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a},u) &= |\bar{a}_1 - u_1| + \max\{\bar{a}_2,u_2\} \\ &\leq \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \left|\bar{b}_1 - u_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\} + \max\{\bar{b}_2,u_2\} - u_2 \\ &\leq \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \max\{\bar{a}_2,\bar{b}_2\} + \left|\bar{b}_1 - u_1\right| + \max\{\bar{b}_2,u_2\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (Ω,σ) kısmi metrik uzaydır.

Ayrıca

$$p_\sigma(\bar{a},\bar{b}) = \left|\bar{a}_1 - \bar{b}_1\right| + \left|\bar{a}_2 - \bar{b}_2\right|$$

metriği ile beraber (Ω, p_σ) tam metrik uzay olduğu için Lemma 2.64'ten (Ω,σ) tam kısmi metrik uzaydır. $A = [0,1] \times [0,\pi]$ ve $B = [2,\pi] \times [0,\pi]$ Ω'nin altkümeleri olsun. (Ω,σ) kısmi metriğinin kapalıları her $a,b,c \in [0,\pi]$ için $[a,b] \times [0,c]$ biçiminde olduğu için A ve B kapalı alt kümelerdir. Ayrıca $\sigma(A,B) = 1$, $A_0 = \{(1,0)\}$ ve $B_0 = \{(2,0)\}$ dir. Şimdi

(A,B) çiftinin P-özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a},\bar{b}) &= \sigma(A,B) \\ \sigma(\bar{a}',\bar{b}') &= \sigma(A,B) \end{aligned} \tag{3.7}$$

sağlansın. $\bar{a},\bar{a}',\bar{b},\bar{b}'$ noktaları (3.7) eşitliklerini sağladığı için $\bar{a}=\bar{a}'=(1,0)$ ve $\bar{b}=\bar{b}'=(2,0)$ olmalıdır. O halde

$$\sigma(\bar{a},\bar{a}')=0=\sigma(\bar{b},\bar{b}')$$

sağlanır ve böylece (A,B) çifti P-özelliğine sahiptir. $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $\bar{b}\in[0,\infty)$ için

$$\varphi(\bar{b})=\begin{cases} \sin\frac{\bar{b}}{2}\ , & \bar{b}\in[0,\pi] \\ \frac{\bar{b}}{2}\ , & \bar{b}>\pi \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Şimdi $\varphi\in\Psi$ olduğunu gösterelim. φ azalmayan bir fonksiyondur. Aşağıdaki durumları ele alıyoruz:
Case 1. $\bar{b}\in[0,\pi]$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \varphi^2(\bar{b}) &= \varphi(\varphi(\bar{b})) \\ &= \sin\tfrac{\varphi(\bar{b})}{2} \\ &\leq \tfrac{\varphi(\bar{b})}{2} \\ &= \tfrac{\sin\frac{\bar{b}}{2}}{2} \\ &\leq \tfrac{\bar{b}}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Bu şekilde devam edersek her $n\geq 1$ için $\varphi^n(\bar{b})\leq\frac{\bar{b}}{2^n}$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\bar{b})<\infty$.
Case 2. $\bar{b}>\pi$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \varphi^2(\bar{b}) &= \varphi(\varphi)) \\ &\leq \varphi(\tfrac{\bar{b}}{2}). \end{aligned}$$

Eğer, $\frac{\bar{b}}{2}>\pi$ ise

$$\begin{aligned} \varphi^2(\bar{b}) &\leq \varphi(\tfrac{\bar{b}}{2}) \\ &\leq \tfrac{\bar{b}}{4} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer $\frac{\bar{b}}{2} \in [0,\pi]$ ise

$$\begin{aligned} \varphi^2(\bar{b}) &\leq \varphi(\tfrac{\bar{b}}{2}) \\ &= \sin\tfrac{\bar{b}}{4} \\ &\leq \tfrac{\bar{b}}{4} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu işlemi tekrarlayarak, her $n \geq 1$ için

$$\varphi^n(\bar{b}) \leq \frac{\bar{b}}{2^n}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\bar{b}) < \infty$ bulunur. Böylece, $\varphi \in \Psi$' dir. $T : A \to B$'ye dönüşümünü her $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in A$ için

$$T\bar{a} = \left(2, \sin\frac{\bar{a}_2}{2}\right)$$

biçiminde tanımlayalım. Şimdi, T bir BG-büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Her $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in A$ için

$$\begin{aligned} \sigma(T\bar{a}, T\bar{b}) &= \sigma\left(\left(2, \sin\tfrac{\bar{a}_2}{2}\right), \left(2, \sin\tfrac{\bar{b}_2}{2}\right)\right) \\ &= \max\left\{\sin\tfrac{\bar{a}_2}{2}, \sin\tfrac{\bar{b}_2}{2}\right\} \\ &= \sin\tfrac{\max\{\bar{a}_2, \bar{b}_2\}}{2} \\ &= \varphi(\sigma(\bar{a}, \bar{b})) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde Teorem 3.2'nin tüm hipotezleri karşılanmıştır ve böylece T'nin A'da tek en iyi yakınlık noktası vardır ve $\bar{a} = (1,0)$ T'nin en iyi yakınlık noktasıdır. Ayrıca, $\sigma((1,0),(1,0)) = 0$.

3.2 Proximal BG-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Bu bölüme aşağıdaki tanımımızla başlıyoruz.

Tanım 3.4. (Ω, σ) kısmi metrik uzay, $\emptyset \neq A, B \subseteq \Omega$ ve $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer

her $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in A$ için

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(\bar{b}_1, T\bar{a}_1) = \sigma(A,B) \\ \sigma(\bar{b}_2, T\bar{a}_2) = \sigma(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(\bar{b}_1, \bar{b}_2) \leq \varphi(\ \sigma(\bar{a}_1, \bar{a}_2))$$

olacak şekilde $\varphi \in \Psi$ varsa T'ye proksimal BG-büzülme dönüşümü denir.

Teorem 3.5. (Ω, σ) tam bir kısmi metrik uzay, $\emptyset \neq A, B \subseteq \Omega$ ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. $T : A \to B$ nin $T(A_0) \subseteq B_0$ sağlayan bir dönüşüm olduğunu ve A_0'ın kapalı olduğunu kabul edelim. T dönüşümü bir proksimal BG-büzülme dönüşümü ise T, A'da tek bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir. Ayrıca eğer $\bar{a}^*$ bir en iyi yakınlık noktası ise $\sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = 0$.

Proof. $\bar{a}_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun. $T\bar{a}_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$\sigma(\bar{a}_1, T\bar{a}_0) = \sigma(A,B) \tag{3.8}$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_1 \in A_0$ vardır. Benzer şekilde, $T\bar{a}_1 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$\sigma(\bar{a}_2, T\bar{a}_1) = \sigma(A.B) \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_2 \in A_0$ vardır. (3.8) ve (3.9) dikkate alınırsa T bir proksimal BG-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\sigma(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \leq \varphi(\sigma((\bar{a}_0, \bar{a}_1))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\varphi \in \Psi$ vardır. $T\bar{a}_1 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$(\bar{a}_3, T\bar{a}_2) = \sigma(A.B), \tag{3.10}$$

olacak şekilde $\bar{a}_3 \in A_0$ vardır. (3.9) ve (3.15) dikkate alınırsa T bir proksimal BG-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\sigma(\bar{a}_2, \bar{a}_3) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}_1, \bar{a}_2))$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde $\varphi \in \Psi$ vardır. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(\bar{a}_{n+1}, T\bar{a}_n) = \sigma(A,B) \tag{3.11}$$

ve

$$\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) \leq \varphi(\sigma(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n))$$

olacak şekilde $\{\bar{a}_n\}$ dizisini oluşturabiliriz. Eğer $\bar{a}_{n_0} = \bar{a}_{n_0+1}$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (3.11)'den $\bar{a}_{n_0}$ noktası T'nin en iyi yakınlık noktasıdır. Şimdi, $\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) > 0$ olduğunu varsayalım. T bir proksimal *BG*-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) &= \sigma(\bar{a}_{n_0+1}, \bar{a}_{n_0+1}) \\ &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0})) \\ &< \sigma(\bar{a}_{n_0}, \bar{a}_{n_0}) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve bu çelişkidir. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n)) \\ &\leq \varphi^2(\sigma(\bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca $\varphi \in \Phi$ olduğu için $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1))$ serisi yakınsaktır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = 0$$

bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmaksızın $m > n > n_0$ koşuluna sahip her $m, n \in \mathbb{N}$ için için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) &\leq \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) + \sigma(\bar{a}_{n+1}, \bar{a}_{n+2}) + ... + \sigma(\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m) \\ &\leq \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) + \varphi^{n+1}(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) + ... + \varphi^{m-1}(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi^n(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)). \end{aligned}$$

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak, $\lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = 0$ olur ve böyle $\{\bar{a}_n\}$, A_0'da bir Cauchy dizisidir. (Ω, σ) tam kısmi metrik uzay ve A_0, Ω'nin kapalı bir alt kümesi olduğundan

$$\sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}^*) = \lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = 0 \tag{3.12}$$

olacak şekilde $\bar{a}^* \in A$ noktası vardır. Ayrıca $T\bar{a}^* \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan

$$\sigma(z, T\bar{a}^*) = \sigma(A, B) \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir $z \in A_0$ vardır. (3.12) ve (3.13) dikkate alarak, T proksimal bir BG-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_{n+1}, z) &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}^*)) \\ &\leq \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}^*) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Lemma 2.64 dan, son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\sigma(\bar{a}^*, z) = \sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = 0$$

elde ederiz ve böylece $\bar{a}^* = z$ dir. O halde (3.13)'den $\bar{a}^*$, T'nin en yakın yakınlık noktasıdır ve $\sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = 0$ dır. Şimdi tekliğini göstereceğiz. $\bar{a}^*$ ve $\bar{b}^*$ A'da birbirinden farklı T'nin en iyi yakınlık noktaları olduğunu varsayalım, yani,

$$\sigma(\bar{a}^*, T\bar{a}^*) = \sigma(A, B)$$

ve

$$\sigma(\bar{b}^*, T\bar{b}^*) = \sigma(A, B).$$

T bir proksimal BG-büzülme dönüşümü olduğu için

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}^*, \bar{b}^*) &\leq \varphi(\sigma(\bar{a}^*, \bar{b}^*)) \\ &< \sigma(\bar{a}^*, \bar{b}^*) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu bir çelişkidir. Böylece, T, A içinde tek en iyi yakınlık noktasına sahiptir. □

Örnek 3.6. $\Omega = [0,\infty)$ ve $\sigma : \Omega \times \Omega \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\sigma(\bar{a},\bar{b}) = \begin{cases} \bar{a} & , \quad \bar{a} = \bar{b} \\ \bar{a}+\bar{b} & , \quad \bar{a} \neq \bar{b} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. (Ω,σ) kısmi metrik uzaydır. Şimdi (Ω,σ) nin tam olduğunu gösterelim. $\{\bar{a}_n\}$ Ω de bir Cauchy dizisi olsun. Ayrıca, her $\bar{a} \in \Omega$ için

$$B_\sigma\left(\bar{a},\frac{\bar{a}}{2}\right) = \{\bar{a}\}, \text{ tümü için } \bar{a} > 0$$

ve

$$B_\sigma\left(0,\frac{1}{2}\right) = \{0\},$$

olduğundan τ_σ ayrık topolojidir. $A = \{0\} \cup [e,e^2]$ ve $B = [1,2]$ olsun. O halde $\sigma(A,B) = 1$, $A_0 = \{0\}$ ve $B_0 = \{1\}$ dir. Ayrıca A_0 kapalıdır. $T : A \to B$ ve $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümleri sırasıyla her $\bar{a},\bar{b} \in A$ için

$$T\bar{a} = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{a} = 0 \\ \ln \bar{a} & , \quad \bar{a} \neq 0 \end{cases}$$

ve her $\bar{b} \in [0,\infty)$ için

$$\varphi(\bar{b}) = \frac{\bar{b}}{2}$$

biçiminde tanımlansın. φ azalmayan ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi^n(\bar{b}) \leq \frac{\bar{b}}{2^n}$$

sağlandığından $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\bar{b}) < \infty$ bulunur ve böylece $\varphi \in \Psi$ dir. Şimdi T nin bir proksimal BG-büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a},T\bar{b}) &= \sigma(A,B) \\ \sigma(\bar{a}',T\bar{b}') &= \sigma(A,B) \end{aligned} \tag{3.14}$$

sağlansın. $\bar{a},\bar{a}',\bar{b},\bar{b}'$ noktaları (3.14) eşitliklerini sağladığı için $\bar{a} = \bar{a}' = \bar{b} = \bar{b}' = 0$ olmalıdır. O halde

$$\sigma(\bar{a},\bar{a}') = 0 = \varphi(\sigma(\bar{b},\bar{b}'))$$

sağlanır. Böylece, Teorem 3.5'ün tüm koşulları yerine getirilmiştir. T, A'da tek en iyi yakınlık noktasına sahiptir ve $\bar{a}=0$, T'ın en iyi yakınlık noktasıdır. Dahası, $\sigma(\bar{a}^*,\bar{a}^*)=0$.

Eğer Tanım 3.1 ve Tanım 3.4 te $A=B=\Omega$ alırsak bu tanımların birbirleriyle çakışır ve böylece aşağıdaki sabit nokta sonucunu elde ederiz.

Sonuç 3.7. (Ω,σ) tam kısmi metrik uzay ve $T:\Omega\to\Omega$ bir dönüşüm olsun. Her $\bar{a},\bar{b}\in\Omega$ için

$$\sigma(T\bar{a},T\bar{b})\leq\varphi(\sigma(\bar{a}.\bar{b}))$$

sağlanacak şekilde $\varphi\in\Psi$ varsa T'nin A da tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca eğer $\bar{a}^*$ bir sabit noktası ise $\sigma(\bar{a}^*,\bar{a}^*)=0$.

3.3 F-Büzülme Dönüşümü Yardımıyla İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Bu bölüme F_σ-büzülme eşlemesinin tanımını tanıtarak başlıyoruz.

Tanım 3.8. (Ω,p) kısmi bir metrik uzay ve A,B, Ω'in boş olmayan alt kümeleri olsun. $T:A\to B$'nin bir dönüşüm ve $F\in\mathscr{F}$ olduğunu varsayalım. Eğer $\sigma(T\bar{a},T\bar{b})>0$ koşuluna sahip her $\bar{a},\bar{b}\in A$ için

$$\tau+F(\sigma(T\bar{a},T\bar{b}))\leq F(\sigma(\bar{a},\bar{b}))$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $\tau>0$ varsa T'ye F_σ-büzülme dönüşümü adı verilir.
Şimdi bu bölümdeki ilk ana sonucumuzu sunuyoruz.

Teorem 3.9. (Ω,p) tam bir kısmi metrik uzay, A,B Ω'in boş olmayan kapalı alt kümeleri ve $A_0\neq\emptyset$ olsun. $T:A\to B$ $T(A_0)\subseteq B_0$ şartını sağlayan bir F_σ-büzülme dönüşüm, $F\in\mathscr{F}$ ve (A,B) çiftinin P-özelliğine sahip olduğunu varsayalım. Eğer T, τ_{p_σ} topolojisine göre sürekli bir dönüşüm ise T, A da bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

Proof. $\bar{a}_0,A_0$ da keyfi bir nokta olsun. $T\bar{a}_0\in T(A_0)\subseteq B_0$ olduğu için

$$\sigma(\bar{a}_2,T\bar{a}_1)=\sigma(A,B)$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_1 \in A_0$ noktası vardır. Yine, $T\bar{a}_1 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğu için

$$\sigma(\bar{a}_2, T\bar{a}_1) = \sigma(A,B)$$

olacak şekilde bir $\bar{a}_2 \in A_0$ vardır. Bu işlemi tekrarlayarak, A da

$$\sigma(\bar{a}_n T\bar{a}_{n+1}) = \sigma(A,B) \tag{3.15}$$

olacak şekilde bir $\{\bar{a}_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\bar{a}_{n_0} = \bar{a}_{n_0+1}$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\bar{a}_{n_0}$ noktası T'nin en iyi yakın noktasıdır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\bar{a}_n \neq \bar{a}_{n+1}$ olduğunu, yani tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. (A,B) çifti P-özelliğine sahip olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) = \sigma(T\bar{a}_{n-1}, T\bar{a}_n) \tag{3.16}$$

sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma(T\bar{a}_{n-1}, T\bar{a}_n) > 0$ ve T bir F_σ-büzülme dönüşümü olduğu için her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau + F(\sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}_{n+1})) \leq F(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}))$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde bir $\tau > 0$ vardır. O halde 3.16'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})) &= F(\sigma(T\bar{a}_{n-1}, T\bar{a})) \\ &\leq F(\sigma(T\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n)) - \tau \\ &= F(\sigma(T\bar{a}_{n-2}, T\bar{a}_{n-1})) - \tau \\ &\leq F(\sigma(\bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1})) - 2\tau \\ &\vdots \\ &\leq F(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) - n\tau \end{aligned} \tag{3.17}$$

sağlanır. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak $\lim_{m\to\infty} F(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})) = -\infty$ buluruz ve böylece durumundan $(F2)$ koşulundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) = 0 \tag{3.18}$$

elde ederiz. Ayrıca (F_3) koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha}\, F(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})) = 0 \tag{3.19}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in (0.1)$ vardır. 3.20' den

$$\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha} F(\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})) - \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha} F(\sigma(\bar{a}_0, \bar{a}_1)) \leq -\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha} n\tau \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. 3.18, 3.19 eşitliklerini ve son eşitsizliği kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha} n = 0$$

eşitliğini buluruz. O halde $\varepsilon = 1$ olarak düşünürsek her $n \geq n_1$ için $\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})^{\alpha} n \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$$

eşitsizliği elde edilir. Genelliği bozmaksızın $m \geq n \geq n_1$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) &\leq \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}) + \sigma(\bar{a}_{n+1}, \bar{a}_{n+2}) + \ldots + \sigma(\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_m) \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{q}}} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^{\frac{1}{q}}} \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{q}}}$ serisi yakınsak olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = 0$ yazabiliriz. Buradan, $\{\bar{a}_n\}$, A'daki bir Cauchy dizisidir. (3.16)'den $\{T\bar{a}_n\}$, B'deki bir Cauchy dizisidir. A ve B, Ω'in kapalı alt kümeleri ve (Ω, p) tam bir kısmi metrik uzay olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}_m) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\bar{a}_n, \bar{a}^*) = \sigma(\bar{a}^*, \bar{a}^*) = 0 \tag{3.21}$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}_m) = \lim_{n\to\infty} \sigma(T\bar{a}_n, \bar{b}^*) = \sigma(\bar{b}^*, \bar{b}^*) = 0, \tag{3.22}$$

olacak şekilde bir $\bar{a}^* \in A$ ve $\bar{b}^* \in B$ noktaları vardır. Lemma ??? den, (3.15) de $n \to \infty$

için limit alırsak

$$\sigma(\bar{a}^*, \bar{b}^*) = \sigma(A, B) \tag{3.23}$$

buluruz. Ayrıca Lemma 2.64 ve (3.21) ten

$$\lim_{n \to \to} p_\sigma(\bar{a}_n, \bar{a}^*) = 0$$

ve

$$\lim_{n \to \to} p_\sigma(T\bar{a}_n, \bar{b}^*) = 0 \tag{3.24}$$

elde ederiz. T dönüşümü τ_{p_σ}-topolojisine göre sürekli olduğundan ve son eşitliğide göbarc önüne alarak

$$\lim_{n \to \infty} p_\sigma(T\bar{a}_n, T\bar{a}^*) = 0. \tag{3.25}$$

(3.24) ve (3.25)'den $\bar{b}^* = T\bar{a}^*$elde ederiz. (3.23)'dan $\bar{a}^*$ T'nin en iyi yakın noktası olduğu görülür. □

4. UYGULAMA

Sonuç 3.7 dikkate alarak, doğrusal olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin bir çöbarcümü için bir varlık ve teklik sonucu veriyoruz. Aşağıdaki doğrusal olmayan Freldhom integral denklemini düşünün

$$u = (\bar{b}) + \int_{a_1}^{a_2} K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))px \tag{4.1}$$

burada $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ile $a_1 < a_2$, $\phi : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ ve $K : [a_1, a_2]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.1. Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

i) Her $u \in C[a_1, a_2]$ ve $\bar{b} \in [a_1, a_2]$ için
$$Tu(\bar{b}) = \phi(\bar{b}) + \int_{a_1}^{a_2} K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))px$$
biçiminde tanımlanan $T : C[a_1, a_2] \to C[a_1, a_2]$ dönüşümü süreklidir.

ii) Her $\bar{b}, \bar{a} \in [a_1, a_2]$ ve $u, \bar{b} \in C[a_1, a_2]$
$$\left|K(\bar{b}.\bar{a}.u(\bar{a}))\right| + \left|K(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}(\bar{a}))\right| \leq \frac{\varphi(|u(\bar{a})| + \left|\bar{b}(\bar{a})\right|) - 2\left|\phi(\bar{b})\right|}{a_2 - a_1}$$
koşulunu sağlayan $\varphi \in \Psi$ vardır.

Bu durumda integral denklemin (4.1) tek bir çöbarcümü vardır.

Proof. $\Omega = C[a_1, a_2]$ olsun ve $\sigma : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ dönüşümü her $\bar{a}, \bar{b} \in \Omega$ ve $\bar{b} \in [a_1, a_2]$ için

$$\sigma(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} \sup_{\bar{b} \in [a_1, a_2]} \left|\bar{a}(\bar{b})\right| & , \quad \bar{a} = \bar{b} \\ \sup_{\bar{b} \in [a_1, a_2]} \left|\bar{a}(\bar{b})\right| + \sup_{\bar{b} \in [a_1, a_2]} \left|u(\bar{b})\right| & , \quad \bar{a} \neq \bar{b} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (Ω, σ) tam bir kısmi metrik uzaydır. Şimdi, T'nin tek bir sabit noktası olduğunu ve dolayısıyla denklem (4.1)'in tek bir çöbarcümü olduğunu

kanıtlayacağıbarc. Her $\bar{b} \in [a_1, a_2]$ ve $u, \bar{b} \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\left|Tu(\bar{b})\right| + \left|T\bar{b}(\bar{b})\right| &= \left|\phi(\bar{b}) + \int_{a_1}^{a_2} K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))px\right| + \left|\phi(\bar{b}) + \int_{a_1}^{a_2} K(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}, (\bar{a}))px\right| \\
&= \left|2\phi(\bar{b})\right| + \int_{a_1}^{a_2} [\left|K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))\right| + \left|K(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}(\bar{a}))\right|]px \\
&\leq 2\left|\phi(\bar{b})\right| + \frac{\int_{a_1}^{a_2} \varphi(|u(\bar{a})| + \left|\bar{b}(\bar{a})\right|) - 2\left|\phi(\bar{b})\right| px}{a_2 - a_1} \\
&\leq 2\phi(\bar{b}) + \frac{\int_{a_1}^{a_2} \varphi(\sigma(u, \bar{b}))px}{a_2 - a_1} - \frac{2\phi(\bar{b}) \int_{a_1}^{a_2} px}{a_2 - a_1} \\
&= \varphi(\sigma(u, \bar{b})).
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlikte $\bar{b} \in [0,1]$ için supremum alırsak

$$\sup_{\bar{b} \in [0,1]} \{\left|Tu(\bar{b})\right| + \left|T\bar{b}(\bar{b})\right|\} \leq \varphi(\sigma(u, \bar{b})),$$

bulunur ve böylece

$$\sigma(Tu, T\bar{b}) \leq \varphi(\sigma(u, \bar{b}))$$

elde ederiz. O halde Sonuç (3.7)'in tüm koşulları sağlanmış olur. Bu durumda integral denklemin (4.1)'un tek bir çöbarcümü vardır. □

Şimdi aşağıdaki doğrusal olmayan Volterra integral denklemini düşünüyoruz:

$$u(\bar{b}) = \phi(\bar{b}) + \int_{a_1}^{\bar{b}} K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))px \tag{4.2}$$

burada $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ile $a_1 < a_2$, $\phi : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ ve $K : [a_1, a_2]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$sürekli fonksiyonlardır. Teorem 4.1 ün ispatında benzer tekniği kullanarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.2. Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

i) Her $u \in C[a_1, a_2]$ ve $\bar{b} \in [a_1, a_2]$ için

$$Tu(\bar{b}) = \phi(\bar{b}) + \int_{a_1}^{\bar{b}} K(\bar{b}, \bar{a}, u(\bar{a}))px$$

biçiminde tanımlanan $T : C[a_1, a_2] \to C[a_1, a_2]$ dönüşümü süreklidir.

ii) Her $\bar{b}, \bar{a} \in [a_1 a_2]$ ve $u, \bar{b} \in C[a_1, a_2]$

$$\left|K(\bar{b}.\bar{a}.u(\bar{a}))\right| + \left|K(\bar{b}, \bar{a}, \bar{b}(\bar{a}))\right| \leq \frac{\varphi(|u(\bar{a})| + \left|\bar{b}(\bar{a})\right|) - 2\left|\phi(\bar{b})\right|}{a_2 - a_1}$$

koşulunu sağlayan $\varphi \in \Psi$ vardır.

Bu durumda integral denklemin (4.2) tek bir çöbarcümü vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kısmi metrik uzaylarda en iyi yakınlık noktası sonuçları üzerine çalışma yapıldı. Biancihini-Grandolfi fonksiyonları aracılığı ile bazı yeni büzülme dönüşümleri tanımlandı ve bu dönüşümler için de bazı en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edildi. Ayrıca bu dönüşümler için elde edilen sonuçları destekleyen örnekler sunulmuştur. Ayrıca son zamanlarda sıklıkla çalışılan F-büzülme fonksiyonları yardımıyla yeni en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiş ve sonuçlar örnekle desteklenmiştir.Son olarak, lineer olmayan Freldhom ve Volterra integral denklemlerinin çözümü için varlık ve teklik sonucu veriyoruz. Son bölümde ise tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Iqbal, H. and Petrusel, A. 2019. Fixed points for multivalued Suzuki type $(\theta - R)$ contraction mapping with application. Journal of Function Spaces, 2019, 1-13.

Abbas, M. and Nazir, T. 2012. Fixed point of generalized weakly contractive mappings in or dered partial metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 2012(1), 1-19.

Agarawal, R., P., O'Regan, D. and Shahzad, N. 2004. Fixed point theorem for generalized contractive maps of Meir-Keeler type. Math. Nachr., 276(1), 3-22.

Altun, I., Aslantas, M. and Sahin, H. 2020. Best proximity point results for p-proximal contractions. Acta Math. Hungar., 162(2), 393-402.

Altun, I., Minak, G. and Dag, H. 2015. Multivalued F-contractions on complete metric space. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 16(4), 659-666.

Altun, I., Al Arifi, N., Jleli, M., Lashin, A. and Samet, B. 2016. A new concept of (α, F_d) contraction on quasi metric space. J. Nonlinear Sci. Appl., 9, 3351-3361.

Altun, I., Olgun, M. and Minak, G. 2017. Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 22(2), 371-384.

Aslantas, M., Sahin, H. and Altun, I. 2021. Best proximity point theorems for cyclic p-contractions with some consequences and applications. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 26(1), 113-129.

Aydi, H. 2016. An-implicit contractive pair of mappings on quasi b-metric spaces and an application to integral aligns. J. Nonlinear Convex Anal., 17(12), 2417-2433.

Banach, S. 1922. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux aligns integrales. Fund. Math., 3, 133-181.

Basha, S.S. 2010. Extensions of Banach's contraction principle. Numer. Funct. Anal. Optim., 31(5), 569-576.

Basha, S.S. and Veeramani, P., 1977. Best approximations and best proximity pairs, Acta Sci. Math., 63, 289-300.

Bianchini, R.M. and Grandolfi, M. 1986. Trasformazioni di tipo contrattivo generalizzato inuno spazio metrico. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, 45, 212-216.

Ciric, L.B., Samet, B., Aydi, H. and Vetro, C. 2011. Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application. Applied Mathematics and

Computation, 218(6), 2398-2406.

Cosentino, M. and Vetro, P. 2014. Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy Rogers-type. Filomat, 28 (4), 715-722.

Durmaz, G. and Altun, I. 2016. Fixed point results for α-admissible multivalued F-contractions. Miskole Mathematical Notes, 17(1), 187-199.

Dag, H., Mınak, G. and Altun, I. 2017. Some fixed point results for multivalued F-contractions on quasi metric spaces. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 111(1), 177-187.

Haghi, R.H., Rezapour, S. and Shahzad, N. 2013. Be careful on partial metric fixed point results. Topol. Appl. 160, 450-454.

Gabeleh, M. 2013. Global optimal solutions of non-self mappings. Sci. Bull. Politeh. Univ. Buchar, Ser.A. Appl. Math. Phys., 75, 67-74.

Hussain, N., Vetro, C. and Vetro, F. 2016. Fixed point results for a-implicit contractions with application to integral aligns. Nonlinear Anal. Model. Control, 21(3), 362-378.

Jleli, M. and Samet, B. 2013. Best proximity points for $\alpha - \psi$-proximal contractive type mappings and applications. Bulletin des Sciences Mathématiques, 137(8), 977-995.

Karapınar, E., Romaguera, S. and Tirado, P. 2014. Contractive multivalued maps in terms of Q-functions on complete quasimetric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2014, 1-15.

Kadelburg, Z. and Radenovic, S. 2014. Fixed Point and Tripled Fixed Point Theorems under Pata-Type Conditions in Ordered Metric Spaces. International Journal of Analysis and Applications 6, 113-122.

Latif, A.A., Abbas, M. and Hussain, A. 2016. Coincidence best proximity point of F_g-weak contractive mappings in partially ordered metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl., 9, 2448-2457.

Matthews, S. G. 1992. Partial metric topology. Annals of the New York Academy of Sciences-Paper Edition, 728, 183-197.

Marin, J., Romaguera, S. and Tirado, P. 2011. Q-functions on quasimetric spaces and fixed points for multivalued maps. Fixed Point Theory and Applications, 2011, 1-10.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. 1989. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 141(1), 177-188.

Nadler, S.B. 1969. Multi-valued contraction mappings. Pacific Journal of Mathematics,

30(2), 475-188.

Parvaneh, V., Haddadi, M.R. and Aydi, H. 2020. On best proximity point results for some type of mappings. Journal of Function Spaces, 2020, 1-6.

Piri, H. and Kumam, P. 2014. Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 210, 1-11.

Reich, S. 1972. Fixed points of contractive functions, Boll. Unione Mat. Ital. 5, 26-42.

Reich, S. 1978. Approximate selections, best approximations, fixed points, and invariant sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62(1), 104-113.

Reich, S. 1983. Some problems and results in fixed point theory. Contemp. Math., 21, 179-187.

Reilly, I.L., Subrahmanyam, P.V. and Vamanamurthy, M.K. 1982. Cauchy sequences in quasi- pseudo-metric spaces. Monatsh. Math., 93, 127-140.

Romaguera, S. 1992. Left K-completeness in quasi-metric spaces. Math. Nachr., 157, 15-23.

Romaguera, S. 2010. A Kirk type characterization of completeness for partial metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2009(1), 493298.

Romaguera, S. 2012. Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces. Topology and its Applications, 159(1), 194-199.

Sahin, H., Aslantas, M. and Altun, I. 2020. Feng Liu type approach to best proximity point results for multivalued mappings. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22(1),1-11.

Saadati, R., Omidvari, M. and Vaezpour, S. M. 2014. Best proximity point theorems for F-contractive non-self mappings. Miskolc mathematical notes, 15(2), 615-623.

Vetro, C. and Vetro, F. 2015. A homotopy fixed point theorem in 0-complete partial metric space. Filomat, 29(9), 2037-2048.

Wardowski, D. 2012. Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2012(1), 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Raid Abdulhadi Abdulqader ALABDULLAH

Eğitim

Yüksek Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı, 2021

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Tam Metin

1) Aslantas, M., Abdulhadi Abdulqader Abdullah, R., Best Proximity Point Results Via F-Contractions On Partial Metric Spaces. ISTANBUL International Modern Scientific Research Congress, 4-5 June 2021

b) Bildiriler

1) Aslantas, M., and Abdulhadi Abdulqader Abdullah, R., Best Proximity Point Results via Bianchini-Grandolfi Gauge Functions on Partial Metric Spaces. 4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS, 27-30 Oct 2020.