İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT KALIN PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurten ATEŞ

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

HAZİRAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT KALIN PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurten ATEŞ
(501071135)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Mayıs 2011
Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2011

Tez Danışmanı : Yard. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Nihal ERATLI (İTÜ)
Doç.Dr. Zafer KÜTÜĞ (YTÜ)

HAZİRAN 2011

Biricik Aileme ,

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım süresince değerli zamanını ve bilgisini benden esirgemeyen, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve destek olan Danışman Hocam Yard. Doç. Dr. Fethi KADIOĞLU'na, değerli fikir ve yardımlarından dolayı Sn. Doç. Dr. Nihal ERATLI'ya saygılarımı sunarım.

Çalışmalarımın her aşamasında beraber çalışmaktan mutluluk duyduğum sevgili arkadaşım ve meslektaşım Nihan SATIR'a, tezime yardımlarıyla katkıda bulunan iş arkadaşım Mustafa Kürşat BAŞARAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen canlarım annem Fatma ATEŞ'e, babam Halil ATEŞ'e, kardeşim İsmail ATEŞ'e ve arkadaşım Levent GÜRAY'a en derin sevgilerimi sunarım.

Haziran 2011

Nurten ATEŞ
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
SEMBOL LİSTESİ ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı 2
1.2 Literatür Özeti 3
2. KOMPOZİT MALZEMELER **5**
2.1 Kompozitlerin Makromekanik Davranışı 5
2.1.1 Ortotropik tabakalarda düzlem gerilme durumu 5
2.1.2 Mekanik davranışın yöne bağlı olarak değişimi 5
2.2 Çok Tabakalı Kompozit Malzemeler 8
2.2.1 Çok tabakalı bir levhada gerilme-şekil değiştirme davranışı 8
2.2.2 Bir levhaya etkiyen bileşke kuvvetler ve momentler 12
2.2.3 Simetrik tabakalanma 15
3. PLAK KAVRAMI **17**
3.1 Tanım ve Yapılan Varsayımlar 17
3.2 Malzeme Sabitleri ve Hooke Yasaları 19
3.3 Ortotrop Kalın Plak Denklemlerin ve Fonksiyonelin Elde Edilmesi 24
3.3.1 Ortotrop kalın plak denklemlerin elde edilmesi 24
3.3.2 Denge denklemleri 27
3.3.3 Gerilme ve şekil değiştirme büyüklükleri arasındaki bağıntılar 28
3.3.4 Fonksiyonelin elde edilmesi 30
4. ELEMAN MATRİSİNİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU KULLANILARAK ELDE EDİLMESİ **37**
4.1 Plak Elemanı ve İnterpolasyon Fonksiyonları 37
4.2 Ortotrop Kalın Plak İçin Eleman Matrisinin Elde Edilmesi 41
5. STATİK ANALİZ **43**
5.1 Sayısal Örnekler 44
5.1.1 Tek tabakalı izotrop 44
5.1.2 Tek tabakalı ortotrop 46
5.1.2.1 Basit mesnetli tek tabakalı üniform yüklü ortotrop kalın plaklar 46
5.1.2.2 Ankastre mesnetli tek tabakalı üniform yüklü ortotrop kalın plaklar 48
5.1.3 Farklı a/h oranları için ortotrop tabakalarda gerilme durumu 49
5.1.4 Farklı tabakalanma ve farklı a/h durumları için gerilme durumu 50
5.1.5 Farklı a/b ve a/h oranları için tabakalı ortotrop kalın plak çözümü 51
5.1.6 Farklı a/h ve E_x/E_y oranları için tabakalı ortotrop kalın plak çözümü 51

5.1.7 Farklı sınır koşullarına sahip tabakalı ortotrop kalın plak çözümü..... 55
6. SONUÇLAR 57
KAYNAKLAR..... 59

SEMBOL LİSTESİ

ε_x , ε_y	: Şekil değiştirme halinin x ve y bileşenleri
σ_x , σ_y , σ_z	: x, y, z doğrultularındaki normal gerilmeler
E_x , E_y	: Elastisite modülleri
μ_{xy}, μ_{xz}, μ_{yz}	: Poisson oranları
γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}	: Açı değişimleri
τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}	: Kayma gerilmeleri
M_x, M_y, M_{xy}	: Eğilme ve burulma momentleri
h	: Plak kalınlığı
Q_x , Q_y	: Kesme kuvvetleri
w	: Düşey yer değiştirme
q	: Düşey yayılı yük
Ω_x, Ω_y	: Şekil değiştirme büyüklükleri
G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}	: Kayma modülleri
D_x , D_y	: Eğilme rijitlikleri
Q	: Operatör
[;]	: İç çarpım
Ψ_i	: Yaklaşım fonksiyonu
ξ , η	: Doğal koordinat takımı
a , b	: Dikdörtgen sonlu eleman boyutları
x_G , y_G	: Dikdörtgen elemanın ağırlık merkezi koordinatları
[K]	: Dikdörtgen sonlu elemanın rijitlik matrisi
$\bar{\omega}$	: Frekans parametresi
$[M_e]$	: Kütle matrisi
ρ	: Yoğunluk
L	: Katsayılar matrisi
f	: Yük vektörü
y	: Bilinmeyenler vektörü
N_i	: Şekil fonksiyonu
κ_x , κ_y, κ_{xy}	: Referans düzlemin eğriliği

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1 : Basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde izotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS) 45
Çizelge 1.2 : Basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS) 47
Çizelge 1.3 : Ankastre mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (CCCC) 48
Çizelge 1.4 : (0˚/90˚/ 0˚) tabakalı kalın plakta farklı a/h oranları için *w* çökme değerleri (SSSS)… 49
Çizelge 1.5 : (0˚/90˚/ 0˚) tabakalı kalın plakta farklı a/h oranları için *w* çökme değerleri (SSSS)…… 49
Çizelge 1.6 : (0˚/90˚/0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS)… 50
Çizelge 1.7 : (0˚/90˚/90˚/0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta çökme değerleri (SSSS) ... 50
Çizelge 1.8 : (0˚/90˚/90˚/0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta çökme değerleri (SSSS) ... 50
Çizelge 1.9 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı a/b ve h/a oranları için çökme değerleri (CCCC) 51
Çizelge 1.10 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından basit mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için çökme ve moment değerleri (SSSS).. 52
Çizelge 1.11 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından basit mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için kesme değerleri (SSSS) 52
Çizelge 1.12 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için çökme ve moment değerleri (CCCC). 53
Çizelge 1.13 : 0˚/90˚/0˚ tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için kesme değerleri (CCCC) 54
Çizelge 1.14 : Karşılıklı iki kenarı ankastre, diğer kenarları basit oturan üniform yayılı yük etkisinde a/h oranlarına göre çökme ve moment değerleri (CSCS) 55
Çizelge 1.15 : Karşılıklı iki kenarı ankastre, diğer kenarları basit oturan üniform yayılı yük etkisinde a/h oranlarına göre kesme kuvveti değerleri (CSCS) 56

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Her hangi x-y eksenlerinden malzeme asal eksenlerine pozitif yönde dönüş 6
Şekil 1.2 : x-z düzlemindeki deformasyon geometrisi 9
Şekil 1.3 : Tabaka kalınlığı boyunca gerilme ve şekil değiştirmeler..... 11
Şekil 1.4 : Tabakadaki düzlem içi kuvvetler 12
Şekil 1.5 : Tabakaya etkiyen momentler 12
Şekil 1.6 : Tabakalı bir elemandaki katmanların koordinat yerleşimi..... 13
Şekil 1.7 : Membran geometrisi ve taşıdığı yükler..... 17
Şekil 1.8 : İnce plak geometrisi 18
Şekil 1.9 : Kalın plak geometrisi 18
Şekil 1.10 : Üç boyutlu gerilme hali..... 19
Şekil 1.11 : Gerilme bileşenleri 25
Şekil 1.12 : Kesit tesirleri 26
Şekil 1.13 : w, Ω, $\partial w/\partial x$' in şekil üzerinde gösterilmesi 31
Şekil 1.14 : Global ve doğal koordinat sisteminde dikdörtgen eleman 38
Şekil 1.15 : Üniform yüklü dörtgen plak..... 44
Şekil 1.16 : Ortotrop kenarlarından basit mesnetli üniform yüke maruz kalın plakta çökme için yaklaşım testi 47

ÇAPRAZ TABAKALI KOMPOZİT KALIN PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada fonksiyonel analiz yöntemi ile Gâteaux türevi kullanılarak çapraz tabakalı kompozit kalın plakların düşey yükler altında statik analizleri yapılmıştır. Bunun için yaklaşık çözüm yöntemi olarak sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Analizlerde simetrik tabakalanma durumlarındaki plağın davranışı incelenmiştir. Plakta kullanılan malzeme ortotrop olarak kabul edilmiştir. Kullanılan yöntemin geçerliliğini test etmek amacıyla, literatürdeki çalışmalarda incelenen problemler yeniden çözülüp sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kompozit malzeme tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra bu tezin amacı ve kapsamından söz edilip, ortotrop ve izotrop plaklarla ilgili literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, plak tanımı, çeşitleri ve özelliklerine yer verilmiştir. Malzeme çeşitleri ve malzeme sabitlerinin elde edilmesi incelenmiştir. Ortotrop plak denklemleri ortaya konarak ve Gâteaux türevine bağlı geometrik ve dinamik sınır koşullarının kullanılması ile yeni bir fonksiyonel elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen fonksiyonel kullanılarak karışık sonlu eleman formülasyonu ile eleman matrisi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, materyal incelemesi yapılmıştır. Mekanik davranışın yöne bağlı olarak değişimi ve levhalarda gerilme - şekil değiştirme davranışları irdelenmiştir.

Beşinci bölümde, simetrik tabakalanma durumları için plağın farklı tabakalanma açılarındaki ve farklı tabaka dizilimlerindeki davranışı incelenmiştir. Farklı sınır koşullarına sahip tabakalı ortotrop kalın plağın üniform yayılı yük etkisinde statik analizi FORTRAN adlı bir bilgisayar programı yardımıyla hazırlanan program ile yapılmıştır. Bu program yardımı ile çeşitli mesnet koşulları ve yüklemeler altında plak problemleri çözülmüş, elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmış ve sonuçların birbirlerine yakın olduğu gözlenmiştir.

Altıncı bölümde, elde edilen sonuçlar ve literatürdeki sonuçlarda göz önünde bulundurularak çalışmanın sonucu hakkında yorumlara yer verilmiştir.

STATIC ANALYSIS OF CROSS-PLY LAMINATED COMPOSITE THICK PLATES

SUMMARY

In this study, structural analysis of cross-ply laminated composite thick plates is performed by using functional analysis method and Gâteaux derivative. Finite element formulation is used for approximate method of solution. The behavior of plates is examined in conditions of symmetrical lamination. The material is used at plates is supposed as orthotrop. The problems mentioned in literature are resolved and compared to prove the validity of the used method.

This study is consisted of 6 chapters.

First chapter is about definition of composite material and properties. Then, the aim and scope of thesis are stated and studies about the thick isotrop and orthotrop plates in the literature are mentioned.

In the second chapter, definition of plates, types of plates, and properties of plates are examined. Types of material and demonstration of material constants are mentioned. The functional have been obtained by using geometric and dynamic boundary conditions depends on Gâteaux derivative and using orthotrop plate equations.

In the third chapter, through making use of the function obtained in the second chapter, mixed finite element formulation and element matrix have been obtained.

In the fourth chapter, material review has been performed. Changes of mechanical behavior according to the direction and stress and strain behavior of plates have been examined.

In the fifth chapter, the behaviour of plates according to the different lamination angle and different lamination sequence for symmetrical lamination conditions are examined. The structural analysis of laminated orthotrop thick plate which has different boundary conditions have been performed by means of FORTRAN computer program under uniformly distributed loading. By the help of this program, plate problems have been solved under a variety of support conditions and loading conditions and also, obtained results are compared with the studies in the literature and it is observed that the results were close to each other.

In the sixth chapter, the comments about the result of the study are mentioned by taking into account the results obtained in the study and the literature.

1. GİRİŞ

Mühendislikte kullanılan malzemeler genellikle metaller, seramikler, polimerler ve kompozitler olmak üzere dört gruba ayrılabilirler. Bu dört grubun birbirlerine gore üstün ve zayıf yönleri vardır. Bu dört grubun yanında, aynı ya da farklı gruplardan daha fazla malzemenin uygun olan özelliklerini tek malzemede toplamak, ya da yeni bir özellik ortaya çıkarmak amacıyla makro düzeyde birleştirilmesi ile oluşturulan malzemeler, kompozit malzeme olarak adlandırılır. Üç boyutlu nitelikteki bu biraraya getirmede amaç, bileşenlerin hiçbirinde tek başına mevcut olmayan bir özelliğin elde edilmesidir. Diğer bir deyişle, amaçlanan doğrultuda bileşenlerinden daha üstün özelliklere sahip bir malzeme üretilmesi hedeflenmektedir. Kompozit malzemelerin özellikleri:

1- Hafiflik: Polimer kompozitler genelde 1,5 – 2 gr/cm^3 yoğunluğundadır. Metal kompozitler, 2,5 – 4,5 gr/cm^3 olmakla beraber özellerde sıçrama görülebilir.

2- Rijitlik ve Boyut Kararsızlığı: Genleşme katsayıları nispeten düşük olup sert, sağlam bir yapı ve büyük bir boyut kararlılığı gösterir.

3- Yüksek Mekanik Özellikler: Çekme, basınç, darbe, yorulma dayanımları çok yüksektir.

4- Yüksek Kimyasal Direnç: Kompozitler birçok kimyasal maddelere, bu arada asitler, alkaliler, çözücüler ve açık hava şartlarına karşı son derece direnç gösterirler. Kimya tesisleri için çok kullanılan malzemelerdir.

5- Yüksek Isı Dayanımı: Kompozitlerin ısı dayanımı sıradan plastiklere göre yüksektir.

6- Elektriksel Özellikler: Elektriksel özellikler kompozitlerde isteğe gore ayarlanabilir. Metal Matrisli Birleşik Mazlemeler (MMC)' ler iletkendir.

Günümüzde çok gelişmiş olan kompozit malzemeler; havacılık ve uzay sanayisinde, nükleer, petro-kimya endüstrilerinde, kara ve deniz taşımacılığında, elektronikte, yüksek atlama sırıklarında, bisiklet, tenis ve sörf gibi çeşitli spor malzemelerinde, tıp endüstrisinde, biyomekanikte, robot teknolojisi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu bahsedilen alanlardaki kompozit malzemeler, genellikle kiriş, plak ve kabuk elemanlar olarak kullanılırlar. Kompozitlerin özgül ağırlıklarının düşük olması, yüksek mukavemet göstermeleri, kolay şekillendirilebilmeleri, daha az deformasyona uğramaları ve daha fazla yük taşıyabilmeleri kullanım alanları için büyük bir avantaj sağlamaktadır.

1.1 Tezin Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada tabakalı (lamine) kompozit plakların statik analizini incelemek için ilk olarak kompozit malzemeler üzerinde durulmuştur. Daha sonra plaktaki kuvvet ve moment denklemlerinin matris formunda elde edilmesinden bahsedilmiştir. Ardından plak ile ilgili genel denklemlerden söz edilip, denge denklemleri, kinematik denklemler, bünye bağıntıları ve alan denklemleri çıkartılmıştır. Bunlara dayanarak plağın deplasman değerlerinin teorik olarak hesaplanabilmesi için elde edilen fonksiyonların potansiyellik koşulu sağlatılmıştır. Potansiyellik koşulunu sağlayan alan denklemlerine Gâteaux türevi uygulanarak fonksiyonel bulunmuştur. Ardından kısmi türev uygulanıp sonlu eleman formülasyonuna geçilip eleman matrisi elde edilmiştir. Statik analizin yapılabilmesi için eleman matrislerinin aktarma işlemi, sistem matrisinin oluşumu Fortran dilinde bir programın geliştirilirek bilgisayar ortamına aktarılmasıyla sağlanmıştır.

Bu çalışmalara bağlı olarak, elde edilen teorik verilerin gerçek durum ile karşılaştırılması amacı ile literatürde incelenen örneklerin verileri alınıp bu çalışmada yeniden çözülmüştür. Mevcut örneklerle sonuçları karşılaştırmanın amacı yapılan bu çalışmanın geçerli olduğunu göstermenin dışında, h en kesit yüksekliği ve b en kesit genişliği olmak üzere a/h oranı, simetrik tabakalanma ve kompozit özelliklerin etkilerinin statik analiz üzerinde yarattığı sonuçları göstermektir.

1.2 Literatür Özeti

Tarun [1] çalışmasında izotrop ve ortotrop plakların statik çözümünü ayrıklaştırma yöntemi ile Kirchhoff, Reissner-Mindlin, yüksek mertebeden teorileri esas alarak inceledi.

Reddy ve Gera [2] sonlu fark methodunu kullanarak ince izotrop ve ortotrop plakların statik analizini yapmıştır.

Iyenar [3] MIF (Method of Initial Functions) methodunu kullanarak, ortotrop kalın plakların statik analizi yapmış Ambartsumyan ve Reissner teorilerine dayalı olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmıştır.

Gopalsamy ve arkadaşları [4] karışık sonlu eleman methodunu kullanarak ankastre mesnetli ortotrop plakların statik analizi yapmıştır.

Omurtag ve arkadaşları [5] yaptıkları çalışmalarında Gâteaux türevine dayalı karışık sonlu eleman methodu ile ortotrop plakların statik analizini yapmıştır.

Srinivas ve Rao [6] çalışmalarında ortotrop basit mesnetli plakların statik, titreşim ve burkulma hesabına yer vermiştir.

Dumir ve Bhaskar [7] Winkler ve Pasternak tipi elastik zemine oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan statik hesabını, ortogonal nokta kollokasyon metodunu kullanarak yapmıştır.

Pervez ve arkadaşları [8] yüksek dereceli kayma deformasyon teorisine dayalı olarak iki boyutlu sonlu eleman modeli ile tabakalı ortotrop kompozit plakların lineer statik analizini yaptılar.

Daia ve arkadaşları [9] mesh free method kullanarak çalışmış ve yüksek dereceli kayma deformasyon teorisi kullanılarak ince ve kalın tabakalı kompozit plakların statik uzama ve doğal frekans analizini incelemiştir.

Doğan ve arkadaşları [10] tabakalı plakların düşey yükler altında statik analizini yapmıştır. Analizlerde simetrik ve antisimetrik tabakalanma durumlarındaki plağın davranısı incelenmistir. Plak malzemesi izotrop ve ortotrop olarak kabul edilmistir. Simetrik tabakalanma durumları için plağın farklı tabakalanma açılarındaki ve farklı tabaka dizilimlerindeki davranısı, antisimetrik tabakalanma durumları için ise farklı tabakalanma açıları ve farklı elastisite modüllerine göre plak davranışı incelenmiştir.

Omurtag [11] çalışmasında tabakalı kompozitlerin eğilme probleminin çözümü için sunulan fonksiyonelin elde edilmesinde Gâteaux diferansiyelinden yararlanmıştır. Plak alan denklemleri önce Kirchhoff-Love teorisinde ve ortotrop malzemeler için sunulmuş ve daha sonra çok tabakalı kompozitler için genişletilmiştir.

Kabir [12] kalın antisimetrik açılı tabakalanmış plakları üniform yüke bağlı olarak analitik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak inceledi. Bu inceleme için Reissner-Mindlin kesme deformasyon teorisine dayalı geliştirilmiş Navier yaklaşımı kullanılmıştır.

2. KOMPOZİT MALZEMELER

2.1 Kompozitlerin Makromekanik Davranışı

2.1.1 Ortotropik tabakalarda düzlem gerilme durumu

Düzlem gerilmede ortotropik malzemede tek bir tabakadaki takviye doğrultusundaki gerilme şekil değiştirme bağıntısı üç boyutlu Q_{ij} matrisinin kullanılması ile Denklem 2.1' deki eşitlikle verilebilir. Düzlem gerilme durumunda düzleme dik gerilmeler kabul edilmediği için; $\sigma_3=0$, $\tau_{23}=0$, $\tau_{31}=0$ olur.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.1)}$$

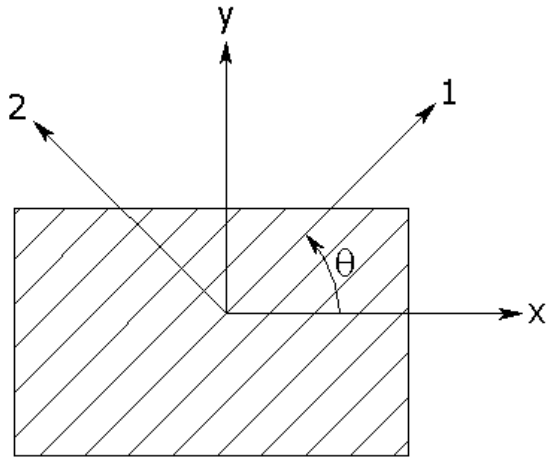
Katman elastik sabitleri deneysel mühendislik sabitleri elastisite modülü (E_i), kayma modülü (G_{ij}), poisson oranları (μ_{ij}) cinsinden aşağıdaki şekilde verilir.

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \quad , \quad Q_{12}=Q_{21}=\frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}$$

$$Q_{22}=\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \quad , \quad Q_{66}=G_{12} \qquad \textbf{(2.2)}$$

2.1.2 Mekanik davranışın yöne bağlı olarak değişimi

Denklem 2.1 malzemenin asal doğrultusundaki gerilme-şekil değiştirme bağıntılarıdır. Uygulanan gerilmeler her zaman malzemenin asal eksenleri ile çakışmayabilir. Genelde malzeme asal eksen doğrultularından farklı doğrultularda gerilmelere maruz kalır. Bu eksenler asal gerilme eksenlerinden θ açısı kadar dönmüş olan doğrultularda olabilir Şekil 1.1. Bu durumda farklı yönlerdeki bağıntılar dönüşüm tansörü (T_{ij}) kullanılarak bulunabilir.



Şekil 1.1 : x-y eksenlerinden malzeme asal eksenlerine pozitif yönde dönüş

Etkiyen gerilmelerin malzemenin asal doğrultuları 1 ve 2 yönlerinde değil de x ve y yönlerinde olması halinde, bu gerilme halinin malzeme asal eksenleri ile çakışan bir koordinat sistemindeki ifadesi veya dönüşümü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Burada [T] dönüşüm matrisidir. Benzer şekilde şekil değiştirmeler arasındaki dönüşüm,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.5)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada dönüşüm matrisi [T] aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$[T]=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Bununla beraber bir R matrisi,

$$[R]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

kullanılarak 1/2 çarpanı yok edilir ve

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}=[R]\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=[R]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre gerilme-şekil değiştirme bağıntısı şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=[T]^{-1}\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}=[T]^{-1}[Q]\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R]\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R][T]\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

Burada,

$$\left[\overline{Q}\right]=[T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \tag{2.12}$$

ile gösterilirse x-y eksenlerine ait gerilme şekil değiştirme bağıntısı,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\left[\overline{Q}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26}\\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.13)}$$

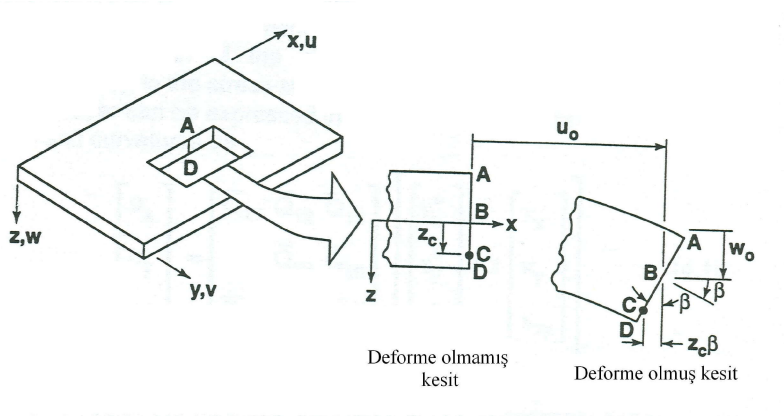
şeklinde yazılabilir. Burada $\left[\overline{Q}_{ij}\right]$ transformasyona uğramış elemanın indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılır. $\left[\overline{Q}\right]$ rijitlik matrisinin açık şekli aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta\\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\,c\,\mathrm{os}\theta\\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta\\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.14)}$$

2.2 Çok Tabakalı Kompozit Malzemeler

2.2.1 Çok tabakalı bir levhada gerilme-şekil değiştirme davranışı

Tabakalı bir levhanın gerilme ve şekil değişiminin hesaplanabilmesi için levhanın uzama ve eğilme rijitliklerinin bilinmesi gerekir. Bir çok tabakadan oluşan levhaların mekanik davranışının incelenmesinde tabakalar arasındaki bağların kayma etkisiyle deforme olmayacağı, levhanın tek bir tabaka gibi davranacağı, levhanın orta düzlemine dik düzlemlerde kayma olmayacağı ($\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$) ve normal doğrultusunda kalınlığın sabit kaldığı ($\varepsilon_z=0$) kabul edilir. Çok tabakalı bir levhanın x,y,z doğrultularındaki u,y,w yer değiştirmelerini ABCD düzleminin xz düzleminde inceleyelim [13].



Şekil 1.2 : x-z düzlemindeki deformasyon geometrisi

Orta düzlemdeki B noktasının deformasyondan sonraki yer değiştirmesi u_0 ise düzlem üzerindeki C noktasının yer değiştirmesi denklem 2.15' teki gibi olur.

$$u = u_0 - z_C \beta \tag{2.15}$$

Burada β, x doğrultusunda levha orta düzleminin eğimidir.

$$\beta = \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{2.16}$$

Tabaka kalınlığı boyunca herhangi bir noktadaki yer değiştirme aşağıdaki gibi bulunur.

$$u = u_0 - z_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{2.17}$$

Aynı şekilde y doğrultusundaki v yer değişimi de aşağıdaki gibi olur.

$$v = v_0 - z_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{2.18}$$

Bilindiği gibi $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$'dır. Bu yüzden şekil değişimleri olarak sadece ε_x, ε_y ve γ_{xy} söz konusudur. Bu değerler yer değişimleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

dolayısıyla yukarıdaki bağıntıların türevi alınarak

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin matris şeklinde ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x{}^0 \\ \varepsilon_y{}^0 \\ \gamma_{xy}{}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Bu denklemdeki $\varepsilon_x{}^0$, $\varepsilon_y{}^0$, $\gamma_{xy}{}^0$ orta düzlemdeki şekil değiştirmeleridir ve şu şekilde ifade edilir.

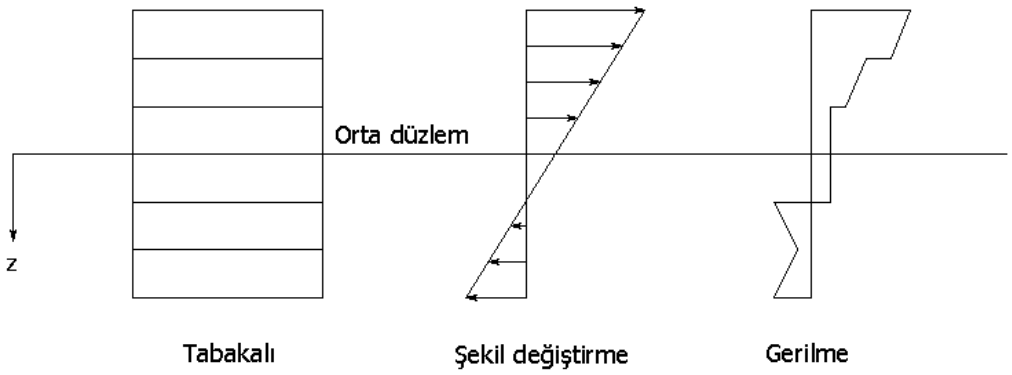
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x{}^0 \\ \varepsilon_y{}^0 \\ \gamma_{xy}{}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.22)}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Bu denklemdeki son terim referans düzlemin eğrileridir. Kalınlık boyunca şekil değişimi değerlerinin yerine konulması ile k. tabakadaki gerilmeler, çok katlı tabakanın orta düzlem şekil değiştirmeleri ve gerilmeleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] \qquad \textbf{(2.24)}$$

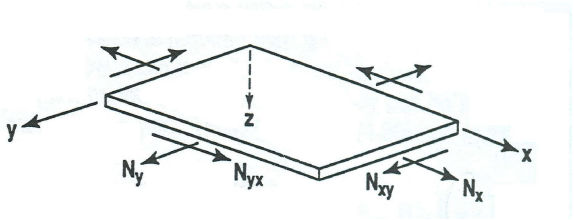
Tabaka kalınlığı boyunca, şekil değiştirmeler lineer olmasına rağmen gerilmeler lineer olmak zorunda değildir. Çünkü, transformasyona uğramış indirgenmiş rijitlik matrisi, $\left[\overline{Q}\right]$, tabakalanma içerisinde, her bir tabaka için farklı olabilir. Bu durum Şekil (1.3)' de görülmektedir [14].



Şekil 1.3 : Tabaka kalınlığı boyunca gerilme ve şekil değiştirmeler

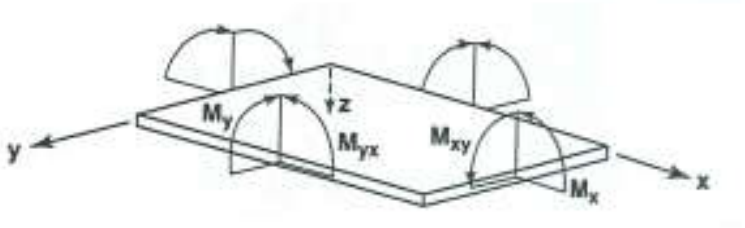
2.2.2 Bir levhaya etkiyen bileşke kuvvetler ve momentler

Bir levhaya etkiyen bileşke kuvvet ve momentler her bir tabakadaki gerilmelerin levha kalınlığı boyunca integre edilmesi ile elde edilir [13].



Şekil 1.4 : Tabakadaki düzlem içi kuvvetler

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz \qquad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz$$
$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, z \, dz \qquad \textbf{(2.25)}$$
$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \qquad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, z \, dz$$



Şekil 1.5 : Tabakaya etkiyen momentler

Yukarıdaki denklemlerde;

N_x, N_y : Birim uzunluktaki normal kuvvetler

N_{xy} : Birim uzunluktaki kesme kuvveti

M_x, M_y : Birim uzunluktaki eğilme momentleri

M_{xy} : Birim uzunluktaki burulma momentleri

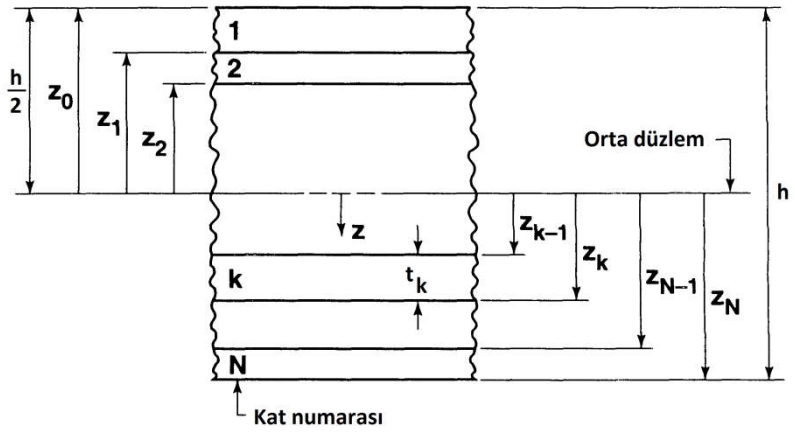
ifade etmektedir. Bunlar Şekil 1.4 ve Şekil 1.5' de görülmektedir.

Denklem 2.25 deki kuvvet ve moment denklemleri matris formunda şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \qquad \textbf{(2.26)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z\, dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z\, dz \qquad \textbf{(2.27)}$$

Yukarıdaki denklemlerde z_k ve z_{k-1}, levhanın z doğrultusundaki kalınlık koordinatlarıdır ve z_0=-h/2'dir (Şekil 1.6). Bu bileşke kuvvet ve momentler integral alındıktan sonra z'den bağımsızdırlar fakat x ve y'nin fonksiyonudurlar.



Şekil 1.6 : Tabakalı bir elemandaki katmanların koordinat yerleşimi

Her bir tabaka için bilinen gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} dz + \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z\, dz \right] \qquad \textbf{(2.28)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} z\,dz + \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2\,dz \right] \qquad \textbf{(2.29)}$$

$\varepsilon_x^{\,0}$, $\varepsilon_y^{\,0}$, $\gamma_{xy}^{\,0}$, κ_x, κ_y ve κ_{xy} z'nin değildirler. Bunlar orta düzleme ait değerlerdir. Bu yüzden toplam işareti içinden çıkarılabilir ve yukarıdaki denklemler şu şekli alır.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.30)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.31)}$$

Burada;

A_{ij} : Uzama rijitlik matrisi

B_{ij} : Birleşme rijitlik matrisi

D_{ij} : Eğilme rijitlik matrisi

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k .(z_k - z_{k-1}) \qquad \textbf{(2.32)}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k .(z_k^2 - z_{k-1}^2) \qquad \textbf{(2.33)}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k .(z_k^3 - z_{k-1}^3) \qquad \textbf{(2.34)}$$

2.2.3 Simetrik tabakalanma

Hem malzeme özelliği hem de geometrik özellikleri ile orta düzleme göre simetrik olan tabakalanmaya "simetrik tabakalanma" denilmektedir [15]. Bu sistemlerde genel rijitlik denklemleri basitleştirilebilir. Özellikle $(\bar{Q}_{ij})_k$ ve kalınlıklar h_k simetrisinden dolayı tüm birleşme rijitlikleri yani B_{ij} terimleri sıfır olur. Simetrik tabakalarda [B] matrisinin sıfır olmasından dolayı uzama-eğrilik çifti girişimsizdir yani simetrik tabakalarda girişim etkisi yoktur. Bu durum, simetrik tabakaların analizini daha kolay hale getirir. Sonuç olarak özel bir durum nedeniyle antisimetrik tabakaların kullanılması gerekmediği müddetçe simetrik tabakalar kullanılır. Simetrik levhalarda kuvvet ve momentler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{\,0} \\ \varepsilon_y^{\,0} \\ \gamma_{xy}^{\,0} \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

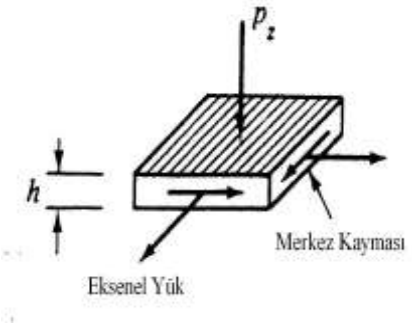
Burada A_{ij} ve D_{ij} ifadeleri, tabakaların toplam kalınlığı boyunca integre edilen Denklem (2.32) ve (2.34) eşitliğindeki ifadelerdir.

3. PLAK KAVRAMI

3.1 Tanım ve Yapılan Varsayımlar

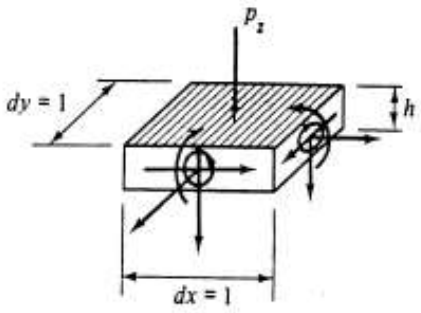
Plaklar, bir boyutu (plağın kalınlığı) diğer iki boyutunun (dikdörtgen plak için plağın eni ve boyu, dairesel plak için çap) yanında çok küçük olan, kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri düzlem oluşturan, taşıdığı yükler bu düzleme dik olan yapı elemanlarıdır. Plaklar genel olarak membran, ince ve kalın olmak üzere üç grupta incelenmektedir.

Membranlar: Eğilme rijitliğine sahip olmadan yanal yükleri eksenel ve merkez kayma yükleri ile taşıyabilen ince plaklardır. Membran geometrisi ve taşıdığı yükler Şekil 1.7' de gösterilmiştir [16].



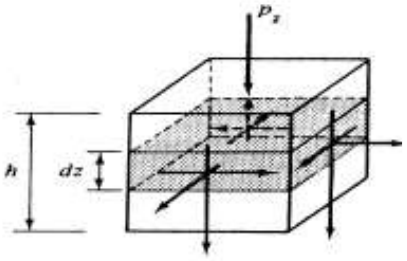
Şekil 1.7 : Membran geometrisi ve taşıdığı yükler

İnce Plaklar: Dış yüklemeleri eğilme ve burulma momentleri ile kesme, merkezi kayma ve eksenel kuvvetler ile taşıyabilen ince plaklardır. İnce plak gösterimi Şekil 1.8' de gösterilmiştir.



Şekil 1.8 : İnce plak geometrisi

Kalın Plaklar: Bu plaklarda isminden anlaşılacağı gibi kalınlıkları diğer ölçüleri yanında ihmal edilemeyecek olan plaklardır. İç gerilme durumu üç boyutlu davranış gösterir. Kalın plak gösterimi Şekil 1.9' da gösterilmiştir.



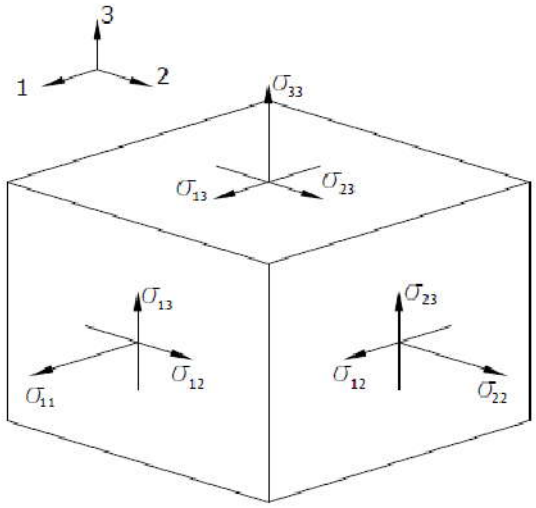
Şekil 1.9 : Kalın plak geometrisi

Klasik plak teorisinin geçerli olduğu ince plaklarda, plak açıklığının kalınlığına oranı (a/h) 10'dan büyüktür. İnce plaklarda kayma gerilmeleri (τ_{xz} ve τ_{yz}) ve normal gerilme (σ_z) ihmal edilir. Kalın plaklarda ise plak açıklığının kalınlığına oranı (a/h) 10'dan küçük olarak tanımlanmıştır. ($a/h \leq 10$) [17]. Kalın plakların, ince plaklardan farkı plağın kayma deformasyonunun göz önünde bulundurulmasıdır.

3.2 Malzeme Sabitleri ve Hooke Yasaları

Malzemeler, kuvvet ve sıcaklık karşısında çok farklı davranışlar gösterdikleri için, bu davranışları tek bir denklem veya denklem takımı ile açıklamak mümkün değildir. Bu nedenle, çeşitli malzeme tipleri için ideal malzeme davranışı tanımlayan ayrı bir takım denklemler kurma yoluna gidilir. Bunlara bünye denklemleri adı verilir. Bu kısımda bünye denklemlerinde bulunan sabitler hakkında bilgiler verilecektir.

Malzemede yük ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı sabit kabul edilirse, gerilme ile şekil değiştirme tansörü arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.



Şekil 1.10 : Üç boyutlu gerilme hali

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Burada; σ_{ij}, gerilme tansörü, ε_{kl}, gerinim tansörü, C_{ijkl}, dördüncü mertebeden rijitlik veya malzeme tansörüdür. Elastik sabitler tansöründe 81 sabit vardır. Gerilme ve gerinim tansörlerinin simetrik olmasından dolayı ($\sigma_{ij}= \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$) C_{ijkl} rijitlik matrisinin 81 adet bağımsız elemanı 36'ya iner. Rijitlik matrisinin simetrik olmasından dolayı ($C_{ijkl} = C_{klij}$) bağımsız eleman sayısı 21'e düşer. Hiçbir doğrultuda simetri özelliği olmayan malzemelerde gerilme-şekil değiştirme bağıntıları bu 21 sabit ile belirlenir. Denklem (3.1)'in matris formunda yazılımı aşağıdaki gibidir.

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin bağımsız altışar elemanları;

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}=\sigma_1 \qquad \sigma_{22}=\sigma_2 \qquad \sigma_{33}=\sigma_3 \\ &\sigma_{23}=\sigma_4 \qquad \sigma_{13}=\sigma_5 \qquad \sigma_{12}=\sigma_6 \\ &\varepsilon_{11}=\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_{22}=\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_{33}=\varepsilon_3 \\ &2\varepsilon_{23}=\varepsilon_4 \qquad 2\varepsilon_{13}=\varepsilon_5 \qquad 2\varepsilon_{12}=\varepsilon_6 \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır ise Denklem (3.1) bağıntısı

$$\sigma_i = C_{ij}\,\varepsilon_j \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin matris formu;

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Yukarıda verilen bağıntılara genel Hooke Yasaları adı verilir.

Bir malzemede genel halde 21 bağımsız elastik sabit olmasına karşı malzemede düzleme ve eksene göre malzeme simetrisi özelliği var ise bağımsız sabitlerin sayısı azalır.

Monoklinik malzeme: Bir düzleme göre malzeme simetrisi olan malzemelere monoklinik malzeme denir. $C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$. Buna göre rijitlik matrisi (C_{ij}) 13 adet bağımsız eleman sabitinden oluşur.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.5)}$$

Ortotropik malzeme: Eğer malzeme, karşılıklı olarak birbirine dik üç adet malzeme simetri düzlemine sahip ise bu tip malzemelere ortotropik malzemeler denir. Bu tip malzemeler 9 adet bağımsız elastik sabite sahiptir. Ortotropik malzemeler için rijitlik ve esneklik matrisleri aşagıdaki gibidir. $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$. Buna göre rijitlik matrisi (C_{ij}) 9 adet bağımsız eleman sabitinden oluşur.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.6)}$$

Enine (Transversely) izotropik malzeme: Ortotropik elemanın düzlemlerinin birinde, bir malzeme izotropi düzlemi varsa bu tip malzemelere transversely (enine) izotropik malzemeler denir. Bu tip malzemeler beş adet bağımsız elastik sabite sahip olup rijitlik ve esneklik matrisleri aşağıdaki şekildedir. Bu malzemede bağımsız değişken sayısı 5 dir. İzotropik düzleme dik doğrultu x_1 olsun.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.7)}$$

İzotropik malzeme: Malzemenin tüm özellikleri tüm yönlerde aynı ise bu tür malzemelere izotropik malzemeler denir.

$$C_{ij}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.8)}$$

şeklindedir. Burada görüldüğü gibi bağımsız elastik sabit sayısı 2'dir.

Bu verilen dört malzeme tipi için gerinim-gerilme bağıntıları denklem 3.3' de verilen gerilme şekil değiştirme bağıntısının ters dönüşümü ile;

$$\varepsilon_i = S_{ij}\,\sigma_j \qquad \textbf{(3.9)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada S_{ij} matrisi C_{ij} matrisinin tersidir. Bu eşitliğin matris formunda yazılışı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Bu bağıntı monoklink malzeme için;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Ortotropik malzeme için;

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.12)}$$

Enine (Transversely) izotropik malzeme için;

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{31} & S_{31} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.13)}$$

İzotropik malzeme için;

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{21} & S_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2(S_{11}-S_{12}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(S_{11}-S_{12}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Yukarıdaki bağıntılarda bulunan S_{ij} elastik sabitleri, mühendislikte kullanılan Young modülü ve Poisson oranına bağlı olarak aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
S_{11}&=\frac{1}{E_{11}} & S_{12}&=\frac{-\mu_{21}}{E_{22}} & S_{13}&=\frac{-\mu_{31}}{E_{33}}\\
S_{21}&=\frac{-\mu_{12}}{E_{11}} & S_{22}&=\frac{1}{E_{22}} & S_{23}&=\frac{-\mu_{32}}{E_{33}}\\
S_{31}&=\frac{-\mu_{13}}{E_{11}} & S_{32}&=\frac{-\mu_{23}}{E_{22}} & S_{33}&=\frac{1}{E_{33}}\\
S_{44}&=\frac{1}{G_{23}} & S_{55}&=\frac{1}{G_{13}} & S_{66}&=\frac{1}{G_{12}}
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Elastik sabitler matrisinin simetrik olmasından dolayı ($S_{ij} = S_{ji}$);

$$\frac{\mu_{21}}{E_{22}} = \frac{\mu_{12}}{E_{11}} \qquad \frac{\mu_{32}}{E_{33}} = \frac{\mu_{23}}{E_{22}} \qquad \frac{\mu_{13}}{E_{11}} = \frac{\mu_{31}}{E_{33}} \tag{3.16}$$

olur.

Fiziksel olarak ortotropik malzemeler E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23}, μ_{12}, μ_{13}, μ_{23} olmak üzere 9 adet bağımsız mühendislik sabitleriyle ifade edilir. Denklem 3.12 tekrar yazılırsa aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\mu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\mu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\mu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{13}}{E_{11}} & \frac{-\mu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

3.3 Ortotrop Kalın Plak Denklemlerin ve Fonksiyonelin Elde Edilmesi

3.3.1 Ortotrop kalın plak denklemlerin elde edilmesi

Bir önceki bölümde yapılan tanımlara gore ortotropik malzemede xyz eksen takımlarına göre Hooke yasaları;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x}\left[\sigma_x - \mu_{xy}\sigma_y - \mu_{xz}\sigma_z\right] \tag{3.18}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_y}\left[\sigma_y - \mu_{yx}\sigma_x - \mu_{yz}\sigma_z\right] \tag{3.19}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{E_z}\left[\sigma_z - \mu_{zx}\sigma_x - \mu_{zy}\sigma_y\right] \qquad \textbf{(3.20)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu_{xy})}{E_{xy}}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad \textbf{(3.21)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2(1+\mu_{xz})}{E_{xz}}\tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} \qquad \textbf{(3.22)}$$

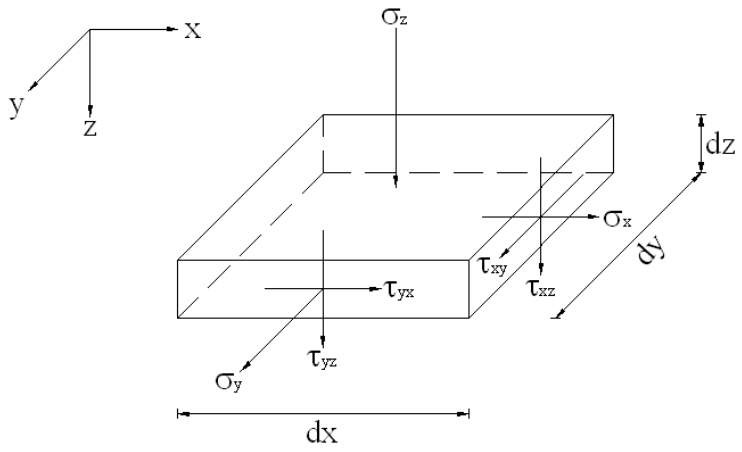
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\mu_{yz})}{E_{yz}}\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \qquad \textbf{(3.23)}$$

şeklinde yazılır. Yukarıda verilen denklemlerde görülen E_x, E_y, E_z, μ_{xy}, μ_{xz}, μ_{yx}, μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{zy}, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} değerleri malzeme sabitleri olup 12 adettir, fakat S_{ij} matrisinin simetrisinden dolayı yazılan

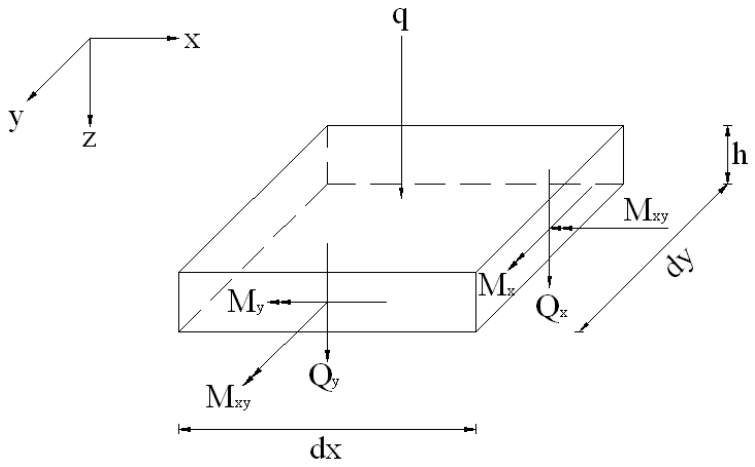
$$\frac{\mu_{xy}}{E_x} = \frac{\mu_{yx}}{E_y} \qquad \frac{\mu_{xz}}{E_x} = \frac{\mu_{zx}}{E_z} \qquad \frac{\mu_{yz}}{E_y} = \frac{\mu_{zy}}{E_z} \qquad \textbf{(3.24)}$$

eşitlikleri ile bağımsız malzeme sabitleri sayısı 9'a iner.

d_x, d_y ve d_z boyutlarına sahip bir plak elemanına etki eden gerilme bileşenleri Şekil 1.11' de, bunların bileşkeleri olan ve kesitin birim boyuna isabet eden kesit tesirleri Şekil 1.12' de gösterilmiştir. Klasik plak teorisinden farklı olarak lateral gerilmeler (σ_x, τ_{xz}, τ_{yz}) alınmıştır [18].



Şekil 1.11 : Gerilme bileşenleri



Şekil 1.12 : Kesit tesirleri

Klasik plak teorisine göre gerilme-şekil değiştirme bağıntılarından Denklem 3.25 elde edilir.

$$D_{11}=\int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}z^2dz, \qquad D_{12}=\int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}z^2dz, \qquad A_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}z^2dz$$

$$\sigma_x=\frac{Q_{11}M_x}{D_{11}}z, \qquad \sigma_y=\frac{Q_{22}M_y}{D_{22}}z, \qquad \tau_{xy}=\frac{Q_{66}M_{xy}}{A_{xy}}z \tag{3.25}$$

Diğer gerilme bileşenleri ise, Şekil 1.11'den yazılan denge denklemleri ve z=±h/2 de kayma gerilmelerinin sıfır olması koşulundan Denklem 3.26 deki gibi elde edilir.

$$\tau_{xz}=\frac{Q_{11}}{D_{11}}\frac{h^2}{8}Q_x\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right], \qquad \tau_{yz}=\frac{Q_{22}}{D_{22}}\frac{h^2}{8}Q_y\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] \tag{3.26}$$

Şekil 1.11' deki gerilme halinin z doğrultusundaki dengesinden de Denklem 3.27 elde edilir.

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} \tag{3.27}$$

z=+h/2 de σ_z=0, z=-h/2 de σ_z=-q sınır koşullarının kullanılmasıyla Denklem 3.28 elde edilir.

$$\sigma_z = q\frac{Q_{11}}{D_{11}}\left[\frac{h^2}{8}\left(z-\frac{4}{3h^2}\frac{z^3}{3}\right)+\frac{h^3}{24}\right] \qquad \textbf{(3.28)}$$

3.3.2 Denge denklemleri

Tabaka kalınlığı boyunca bulunan gerilmelerin integrasyonunun sonucunda tabaka üzerindeki momentler Denklem 3.29 ve 3.30' da olduğu gibi elde edilir.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \qquad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \qquad \textbf{(3.29)}$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz \qquad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \qquad \textbf{(3.30)}$$

Şekil 1.12' de görülen elemana etki eden kuvvetlerin x ve y eksenlerine göre türevlerinin alınması ile,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \qquad \textbf{(3.31)}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0 \qquad \textbf{(3.32)}$$

denklemleri elde edilir. $\Sigma F_z = 0$ denge denklemi ile,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \qquad \textbf{(3.33)}$$

denklemi elde edilir.

3.3.3 Gerilme ve şekil değiştirme büyüklükleri arasındaki bağıntılar

Ω_x , Ω_y ve w ile tanımlanan bileşke şekil değiştirme büyüklükleri gerilme ve yer değiştirme bileşenleri olarak iç kuvvetlerle aynı işi yaparlar [18]. Dolayısıyla;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u dz = M_x \Omega_x \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v dz = M_y \Omega_y \tag{3.34}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u dz = M_{xy} \Omega_x \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v dz = M_{xy} \Omega_y \tag{3.35}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w_0 dz = Q_x w \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w_0 dz = Q_y w \tag{3.36}$$

yazılabilir. $w_0 = w_0$ (x,y,z) değişkenleri cinsinden düşey yer değiştirmeyi tanımlamak üzere Denklem 3.25, Denklem 3.26, Denklem 3.34, Denklem 3.35 ve Denklem 3.36 kullanılarak Denklem 3.37 ve Denklem 3.38 elde edilir.

$$\Omega_x = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \int_{-h/2}^{h/2} uzdz \quad , \quad \Omega_y = \frac{Q_{22}}{D_{22}} \int_{-h/2}^{h/2} vzdz \tag{3.37}$$

$$w = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \frac{h^2}{8} \int_{-h/2}^{h/2} w_0 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \tag{3.38}$$

Denklem 3.37'deki ifadelerin sırasıyla x'e ve y'ye göre türevleri alınır ve Denklem 3.18, Denklem 3.19, Denklem 3.25 ve Denklem 3.28'deki ifadeler kullanılarak Denklem 3.39 ve Denklem 3.40 elde edilir.

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \left(M_x - \mu_{xy} M_y - \frac{h^2}{10} \mu_{xz} q \right) = 0 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} - \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \left(M_y - \mu_{yx} M_x - \frac{h^2}{10} \mu_{yz} q \right) = 0 \tag{3.40}$$

ve yine Denklem 3.37 ifadelerinin sırasıyla y'ye ve x'e göre türevleri alınır ve Denklem 3.21, Denklem 3.22, Denklem 3.23, Denklem 3.25, Denklem 3.29 ve Denklem 3.30 ifadeleri kullanılarak Denklem 3.41 elde edilir.

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}} M_{xy} = 0 \qquad \textbf{(3.41)}$$

Kaymanın yaptığı iş yazılacak olursa;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \bar{\tau}_{xz} dz = \frac{1}{G_{xz}} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \textbf{(3.42)}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{yz} \bar{\tau}_{yz} dz = \frac{1}{G_{yz}} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \textbf{(3.43)}$$

elde edilir. Denklem 3.42'de τ_{yz} değeri yazılacak olursa;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \bar{\tau}_{xz} dz = \frac{2(1+\mu_{xz})}{E_{xz}} \frac{9}{4h^2} Q_x \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz = \frac{2(1+\mu_{xz})}{E_{xz}} \frac{6}{5h} Q_x \qquad \textbf{(3.44)}$$

ve Denklem 3.42 ile Denklem 3.44'den de;

$$\Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6}{5 G_{xz} h} Q_x = 0 \qquad \textbf{(3.45)}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Aynı yaklaşımla Denklem 3.46 elde edilir;

$$\Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6}{5 G_{xz} h} Q_x = 0 \qquad \textbf{(3.46)}$$

3.3.4 Fonksiyonelin elde edilmesi

Elde edilen ortotrop kalın plak denklemleri toplu halde yazılacak olursa,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x}-\frac{Q_{11}}{E_x D_{11}}\left(M_x-\mu_{xy}M_y-\frac{Q_{11}}{D_{11}}\frac{qh^5}{120}\mu_{xz}q\right)=0$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y}-\frac{Q_{22}}{E_y D_{22}}\left(M_y-\mu_{yx}M_x-\frac{Q_{22}}{D_{22}}\frac{qh^5}{120}\mu_{yz}q\right)=0 \qquad \textbf{(3.47)}$$

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial y}+\frac{\partial \Omega_y}{\partial x}-\frac{Q_{11}}{G_{xy}D_{11}}M_{xy}=0$$

$$\Omega_x+\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{6}{5G_{xz}h}Q_x=0$$

$$\Omega_y+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{6}{5G_{yz}h}Q_y=0$$

elde edilir.

Dinamik sınır koşulları,

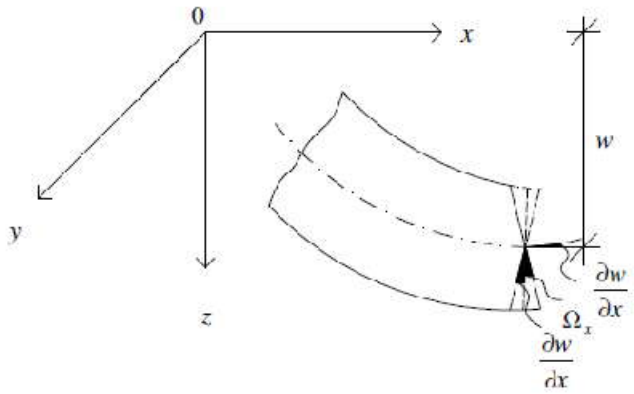
$$\begin{aligned}&\mathrm{M}-\widehat{\mathrm{M}}=0\\&\mathrm{Q}-\widehat{\mathrm{Q}}=0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.48)}$$

Geometrik sınır koşulları,

$$\begin{aligned}&-\Omega+\widehat{\Omega}=0\\&-\mathrm{w}+\widehat{\mathrm{w}}=0\end{aligned} \qquad \textbf{(3.49)}$$

şeklinde ifade edilir.

Kaymadan ve eğilmeden dolayı kesitte meydana gelen toplam açı değişikliği de Şekil 1.13'de gösterilmiştir.



Şekil 1.13 : w, Ω, $\partial w/\partial x$' in şekil üzerinde gösterilmesi

Elde edilen denklemler kullanılarak **Ly=f** diferansiyel denklemi **Q=Ly-f** operatörü şeklinde yazılabilir. Bu ifadeden fonksiyonele geçebilmek için **Q** operatörünün potansiyel olduğu gösterilmelidir. **Q** operatörü lineer denklem takımı halinde yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{17} & P_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{24} & 0 & P_{26} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{35} & P_{36} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & P_{44} & P_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & P_{54} & P_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{62} & P_{63} & 0 & 0 & P_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{71} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{81} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ w \\ \Omega \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ -A_1 \\ -A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{Q} \\ \hat{M} \\ -\hat{\Omega} \\ -\hat{w} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.50)}$$

Denklem 3.50' de yer alan P katsayıları Denklem 3.51' de verilmiştir.

$$P_{17} = -\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad P_{18} = -\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad P_{24} = -\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad P_{26} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

$$P_{35} = -\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad P_{36} = -\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad P_{42} = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad P_{44} = \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}}$$

$$P_{45} = \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \mu_{xy} \quad , \quad P_{53} = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad P_{54} = \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \mu_{yx} \quad , \quad P_{55} = -\frac{Q_{22}}{E_y D_{22}}$$

$$P_{62} = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad P_{63} = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad P_{66} = -\frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}} \quad , \quad P_{71} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P_{77} = -\frac{6}{5G_{xz}h} \quad , \quad P_{81} = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad P_{88} = -\frac{6}{5G_{yz}h}$$

$$A_1 = \frac{Q_{11}}{D_{11}} \frac{qh^5}{120} \mu_{xz} \quad , \quad A_2 = \frac{Q_{22}}{D_{22}} \frac{qh^5}{120} \mu_{yz} \qquad \textbf{(3.51)}$$

Q operatörünün potansiyel olabilmesi için Denklem 3.52'deki koşulun sağlanması gerekir.

$$< dQ(y;\bar{y}), y^* > = < dQ(y;y^*), \bar{y} > \qquad \textbf{(3.52)}$$

Buradaki tırnak, parantez içindeki ifadelerin iç çarpımını göstermekte olup $\bar{y}$ ve y^* vektörleri y'nin içinde bulunduğu uzayın elemanlarıdır. $dQ(y;\bar{y})$ ve $dQ(y;y^*)$ ise **Q** operatörünün $\bar{y}$ ve y^* doğrultusundaki Gâteaux türevlerini göstermektedir. Operatörün Gâteaux türevleri de şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$dQ(u;\bar{u}) = \left. \frac{\partial Q(u + \tau\bar{u})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \qquad \textbf{(3.53)}$$

Bu tanım kullanılarak Denklem 3.52'deki çarpımların açık şekli yazılacak olursa;

$$\left[\boldsymbol{dQ(y;\bar{y}),y^*}\right]=\left[\overline{Q}_{x,x},w^*\right]+\left[\overline{Q}_{y,y},w^*\right]+\left[\overline{M}_{x,x},\Omega_x{}^*\right]-\left[\Omega_x,\Omega_x{}^*\right]$$

$$+\left[\overline{M}_{xy,x},\Omega_y{}^*\right]+\left[\overline{M}_{y,y},\Omega_y{}^*\right]-\left[\overline{Q}_y,\Omega_y{}^*\right]+\left[\Omega_{x,x},M_x{}^*\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{11}}{E_xD_{11}}\overline{M}_x,M_x{}^*\right]+\left[\overline{\Omega}_{x,y},M_{xy}{}^*\right]+\left[\overline{\Omega}_{y,y},M_{xy}{}^*\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{11}}{G_{xy}D_{11}}\overline{M}_{xy},M_{xy}{}^*\right]+\left[\overline{\Omega}_x,Q_x{}^*\right]+\left[\overline{w}_{,x},Q_x{}^*\right]$$

$$+\left[\frac{Q_{11}}{E_xD_{11}}\mu_{xy}\overline{M}_y,M_x{}^*\right]+\left[\overline{\Omega}_{y,y},M_y{}^*\right]+\left[\frac{Q_{22}}{E_yD_{22}}\mu_{yx}\overline{M}_x,M_y{}^*\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{22}}{E_yD_{22}}\frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}}\overline{M}_y,M_y{}^*\right]-\left[\frac{6}{5G_{xz}h}\overline{Q}_x,Q_x{}^*\right]+\left[\overline{\Omega}_y,Q_y{}^*\right]$$

$$-\left[\frac{6}{5G_{yz}h}\overline{Q}_y,Q_y{}^*\right]-\left[\overline{w},Q^*\right]_\varepsilon-\left[\overline{\Omega},M^*\right]_\varepsilon+\left[\overline{M},\Omega^*\right]_\sigma+\left[\overline{Q},w^*\right]_\sigma \quad \textbf{(3.54)}$$

Benzer işlemler yapılarak Denklem 3.55,

$$\left[\boldsymbol{dQ(y;y^*),\bar{y}}\right]=\left[Q^*{}_{x,x},\overline{w}\right]+\left[Q^*{}_{y,y},\overline{w}\right]+\left[M^*{}_{x,x},\overline{\Omega}_x\right]-\left[\Omega_x,\overline{\Omega}_x\right]$$

$$+\left[M^*{}_{xy,x},\overline{\Omega}_y\right]+\left[M^*{}_{y,y},\overline{\Omega}_y\right]-\left[Q^*{}_y,\overline{\Omega}_y\right]+\left[\Omega_{x,x},\overline{M}_x\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{11}}{E_xD_{11}}M^*{}_x,\overline{M}_x\right]+\left[\Omega^*{}_{x,y},\overline{M}_{xy}\right]+\left[\Omega^*{}_{y,y},\overline{M}_{xy}\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{11}}{G_{xy}D_{11}}M^*{}_{xy},\overline{M}_{xy}\right]+\left[\Omega^*{}_x,\overline{Q}_x\right]+\left[w^*{}_{,x},\overline{Q}_x\right]$$

$$+\left[\frac{Q_{11}}{E_xD_{11}}\mu_{xy}M^*{}_y,\overline{M}_x\right]+\left[\Omega^*{}_{y,y},\overline{M}_y\right]+\left[\frac{Q_{22}}{E_yD_{22}}\mu_{yx}M^*{}_x,\overline{M}_y\right]$$

$$-\left[\frac{Q_{22}}{E_yD_{22}}\frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}}M^*{}_y,\overline{M}_y\right]-\left[\frac{6}{5G_{xz}h}Q^*{}_x,\overline{Q}_x\right]+\left[\Omega^*{}_y,\overline{Q}_y\right]$$

$$-\left[\frac{6}{5G_{yz}h}Q^*{}_y,\overline{Q}_y\right]-\left[w^*,\overline{Q}\right]_\varepsilon-\left[\Omega^*,\overline{M}\right]_\varepsilon+\left[M^*,\overline{\Omega}\right]_\sigma+\left[Q^*,\overline{w}\right]_\sigma \qquad \textbf{(3.55)}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradaki köşeli parantezler bölgedeki iç çarpımı göstermektedir. $f = f(y)$ ve $g = g(y)$ bölgede tanımlı iki fonksiyon olarak kabul edildiğinde bunların iç çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$[f,g]=\int_0^L f\,g\,dz \qquad \textbf{(3.56)}$$

Alt indis "0" Dinamik ve geometrik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli

Alt indis "σ" Dinamik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli

Alt indis "ε" Geometrik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerli

Denklem 3.54 ve Denklem 3.55 ifadeleri, Denklem 3.52'de karşılaştırıldığında,

$$\mu_{xy}E_y=\mu_{yx}E_x \qquad \textbf{(3.57)}$$

Denklem 3.57 bağıntısı da göz önünde bulunduruarak Q operatörünün potansiyel olduğu görülür ve sınır koşulları da;

$$[Q,w]_0 = \left[(Q_x n_x + Q_y n_y), w\right]$$

$$[M,\Omega]_0 = \left[(M_x n_x + M_{xy} n_y), \Omega_x\right] + \left[(M_{xy} n_x + M_y n_y), \Omega_y\right] \qquad \textbf{(3.58)}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Buradan da fonksiyonel;

$$\boldsymbol{I(y)} = \int_0^1 < \boldsymbol{Q(sy, y), y} > \mathrm{ds} \qquad \textbf{(3.59)}$$

şeklinde elde edilir. Burada s skaler bir büyüklüktür. İşlemler yapılırsa fonksiyonel,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I(y)} = \mathrm{I(y)} &= \left[\mathrm{M_x},\Omega_{\mathrm{x_{,x}}}\right] + \left[\mathrm{M_{xy}},\Omega_{\mathrm{x_{,y}}}\right] + \left[\mathrm{M_{xy}},\Omega_{\mathrm{y_{,x}}}\right] + \left[\mathrm{M_y},\Omega_{\mathrm{y_{,y}}}\right] \\
&+ \left[\mathrm{Q_x},\Omega_{\mathrm{x}}\right] + \left[\mathrm{Q_y},\Omega_{\mathrm{y}}\right] + \left[\mathrm{Q_x},\mathrm{w_{,x}}\right] + \left[\mathrm{Q_y},\mathrm{w_{,y}}\right] - \left[\mathrm{q,w}\right] \\
&- \frac{\mathrm{Q_{11}}}{2\mathrm{E_x D_{11}}}\left\{\left[\mathrm{M_x},\mathrm{M_x}\right] - 2\mu_{\mathrm{xy}}\left[\mathrm{M_x},\mathrm{M_y}\right] + \left[\mathrm{M_y},\mathrm{M_y}\right] + 2(1+\mu_{\mathrm{xy}})\left[\mathrm{M_{xy}},\mathrm{M_{xy}}\right]\right\} \\
&+ \frac{\mathrm{Q_{11}h^5}}{\mathrm{D_{11}}120}\left\{\mu_{\mathrm{xz}}\left[\mathrm{q,M_x}\right] + \mu_{\mathrm{yz}}\left[\mathrm{q,M_y}\right]\right\} - \frac{3}{5\mathrm{G_{xz}h}}\left[\mathrm{Q_x},\mathrm{Q_x}\right] - \frac{3}{5\mathrm{G_{yz}h}}\left[\mathrm{Q_y},\mathrm{Q_y}\right] \\
&- \left[\mathrm{q,w}\right] - \left[\mathrm{M},\Omega\right]_\sigma - \left[\mathrm{Q,w}\right]_\sigma - \left[(\mathrm{w}-\hat{\mathrm{w}}),\mathrm{Q}\right]_\varepsilon - \left[(\Omega-\hat{\Omega}),\mathrm{M}\right]_\varepsilon
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.60)}$$

olarak elde edilir.

4. ELEMAN MATRİSİNİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU KULLANILARAK ELDE EDİLMESİ

Fizik ve mühendislikte karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılan en yaygın ve etkin sayısal yöntemlerden biri sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık bir çözüm yöntemidir. Bu yaklaşık yöntemin kullanılmasındaki amaç; elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeler ile elemanın düğüm noktaları yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıları şekil fonksiyonlarını kullanarak ifade etmektir.

4.1 Plak Elemanı ve İnterpolasyon Fonksiyonları

Sonlu elemanlar metodunda temel fikir sürekli fonksiyonları bölgesel sürekli fonksiyonlar ile temsil etmektir. Bunun anlamı bir eleman içerisinde hesaplanması istenen büyüklüğün (örneğin deplasmanın) değeri o elemanın nodlarındaki değerler kullanılarak interpolasyon ile bulunur. Bu nedenle sonlu elemanlar metodunda bilinmeyen ve hesaplanması istenen değerler nodlardaki değerlerdir. Bu şekilde cebrik bir denklem takımı elde edilir.

Sonlu eleman tanımında elemanların koordinat ve bilinmeyenlerini doğal koordinat sistemi ile tanımlayabiliriz. Genel olarak koordinat yaklaşımı;

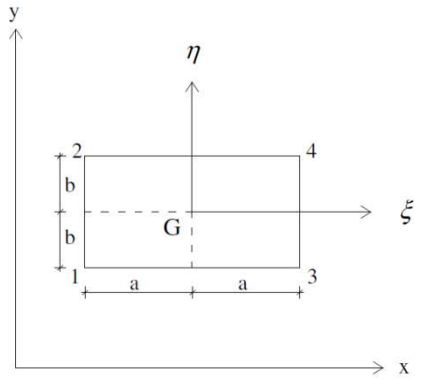
$$x = \sum_{i=1}^{q} \hat{\Psi}_i x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{q} \hat{\Psi}_i y_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{q} \hat{\Psi}_i = 1 \qquad \textbf{(4.1)}$$

şeklindedir. Burada;

x , y : Düğüm noktalarının elemandaki yerel koordinatlarını

x_i , y_i : Elemanın i. düğüm noktalarının koordinatlarını ifade etmektedir.

Yaklaşım fonksiyonlarını ifade eden $\hat{\Psi}_i$'ler her iki eksen takımı için ±1 aralığında değişen ξ ve η bağımsız koordinatları cinsinden ifade edilmiştir. Doğal koordinat sisteminin i düğüm noktasında birim olan $\hat{\Psi}_i$'ler, diğer düğüm noktalarında sıfır olmaktadırlar.



Şekil 1.14 : Global ve doğal koordinat sisteminde dikdörtgen eleman

Dört köşe düğüm noktasına sahip olan elemanın şekil fonksiyonları;

$$\Psi_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \qquad \textbf{(4.2)}$$

şeklinde ifade edilir. Burada G ağırlık merkezidir ve,

$$\xi=\frac{x-x_G}{a} \quad , \quad \eta=\frac{y-y_G}{b}$$

$$x_G=\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2} \quad , \quad y_G=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2} \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$\xi_1=\xi_2=\eta_1=\eta_3=-1 \quad , \quad \xi_3=\xi_4=\eta_2=\eta_4=1$$

olur ve denklem 4.2 her düğüm noktası için yazılacak olursa;

$$\Psi_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\Psi_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\Psi_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \textbf{(4.4)}$$

$$\Psi_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

elde dilir. Plağın eleman matrisinin elde edilebilmesi için (4.4) denklemlerinin $\partial / \partial x$ ve $\partial / \partial y$ türevleri hesaplanmalıdır. Bu kısmi türevler,

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial x}=\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial y}=\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \textbf{(4.5)}$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_G}{a}\right)=\frac{1}{a} \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_G}{b}\right)=\frac{1}{b} \qquad \textbf{(4.6)}$$

olduğuna göre denklem 4.5,

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial y}=\frac{1}{b}\frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \eta} \qquad \textbf{(4.7)}$$

şeklini alır. Bu türev işlmeleri i = 1,2,3,4 ‘ e kadar yapılacak olursa,

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial x} = \frac{1}{4a}(-1+\eta) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_1}{\partial y} = \frac{1}{4b}(-1+\xi)$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial x} = \frac{1}{4a}(1-\eta) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_2}{\partial y} = \frac{1}{4b}(1-\xi)$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_3}{\partial x} = \frac{1}{4a}(-1-\eta) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_3}{\partial y} = \frac{1}{4b}(-1-\xi) \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}_4}{\partial x} = \frac{1}{4a}(1+\eta) \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Psi}_4}{\partial y} = \frac{1}{4b}(1+\xi)$$

eşitlikleri elde edilir. İnterpolasyon fonksiyonları ile bunların kısmi türevlerinin eleman üzerinde alan integrasyonu uygulanmasıyla eleman matrisini oluşturan alt matrisler elde edilecektir. i = 1,2,3,4 ve j = 1,2,3,4 olmak üzere hesaplamalar yapıldığında;

$$[k_1] = \int_A \hat{\Psi}_i \hat{\Psi}_j dA = \begin{bmatrix} 4ab/9 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/36 \\ 4ab/18 & 4ab/9 & 4ab/36 & 4ab/18 \\ 4ab/18 & 4ab/36 & 4ab/9 & 4ab/18 \\ 4ab/36 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/9 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.9)}$$

$$[k_2] = \int_A \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial x} \hat{\Psi}_i dA = \begin{bmatrix} -b/3 & -b/6 & -b/3 & -b/6 \\ -b/6 & -b/3 & -b/6 & -b/3 \\ b/3 & b/6 & b/3 & b/6 \\ b/6 & b/3 & b/6 & b/3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$[k_3] = \int_A \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial y} \hat{\Psi}_j dA = \begin{bmatrix} -a/3 & -a/3 & -a/6 & -a/6 \\ a/3 & a/3 & a/6 & a/6 \\ -a/6 & -a/6 & -a/3 & -a/3 \\ a/6 & a/6 & a/3 & a/3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.11)}$$

ifadeleri elde edilir.

4.2 Ortotrop Kalın Plak İçin Eleman Matrisinin Elde Edilmesi

Bir önceki bölümde elde edilen Denklem 4.9, Denklem 4.10, ve Denklem 4.11' deki integral ifadeleri kullanılarak eleman matrisi genel olarak elde edilmiştir. Bu denklemlerdeki *i* satırlara, *j* sütunlara karşı gelen indislerdir. Buna göre eleman matrisi;

$$\gamma_1 = -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \quad , \quad \gamma_5 = -\frac{3}{5G_{xz}h}$$

$$\gamma_2 = \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \quad , \quad \gamma_6 = -\frac{3}{5G_{yz}h}$$

$$\gamma_3 = -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}}\frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}} \quad , \quad \gamma_7 = -\frac{1}{E_x}\frac{Q_{11}}{D_{11}}\mu_{xz}\frac{Q_{11}}{D_{11}}\frac{qh^5}{120} \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\gamma_4 = -\frac{Q_{11}}{2D_{11}G_{xy}} \quad , \quad \gamma_8 = \frac{1}{E_y}\frac{Q_{22}}{D_{22}}\mu_{yz}\frac{Q_{22}}{D_{22}}\frac{qh^5}{120}$$

olmak üzere;

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{matrix} M_x & M_y & M_{xy} & Q_x & Q_y & \Omega_x & \Omega_y & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2\gamma_1[k_1] & \gamma_2[k_1] & 0 & 0 & 0 & [k_2]^T & 0 & 0 \\ \gamma_2[k_1] & 2\gamma_3[k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & [k_3]^T & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_4[k_1] & 0 & 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_5[k_1] & 0 & [k_1] & 0 & [k_2]^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_6[k_1] & 0 & [k_1] & [k_3]^T \\ [k_2]^T & 0 & [k_3]^T & [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 & [k_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_2]^T & [k_3]^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{(4.13)}$$

3.13 ifadesi ve yük vektörü de;

$$\begin{bmatrix} \gamma_7 [k_1] q \\ \gamma_8 [k_1] q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [k_1] q \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.14)}$$

şeklinde elde edilir.

5. STATİK ANALİZ

Plak denklemlerinin çözümünde genellikle analitik çözüm yöntemleri yerine sayısal çözüm yöntemlerine başvurulur. Bunun nedeni analitik çözüm yöntemlerinde sonuca ulaşmak bazı hallerde zor ve/veya uzun olabilmektedir. Bu çalışmada plak denkleminin çözümünde sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır.

Farklı tabaka dizilimlerine sahip ortotrop kalın plakların statik analizini, üçüncü bölümde sonlu eleman formuna uygun olarak elde ettiğimiz eleman matrisinin kullanımı ile yapmak mümkündür. Fortran programı yardımı ile statik analiz yapılmıştır. Bu programda kodlama ile eleman matrisindeki bilgiler sistem matrisine aktarılmaktadır. Elde edilen bu sistem matrisinin kullanılması ile tabakalı kompozit ortotrop kalın plakların statik analizi yapılabilir.

Sistem matrisi Denklem 4.13 ve Denklem 4.14 ifadelerinden sonlu eleman formuna uygun olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada öncelikle tek tabaka çözümleri literatür ile karşılaştırılmış, daha sonra çeşitli simetrik tabakalanma ve malzeme durumlarına göre literatürde ki ilgili çalışmalar karşılaştırılmıştır.

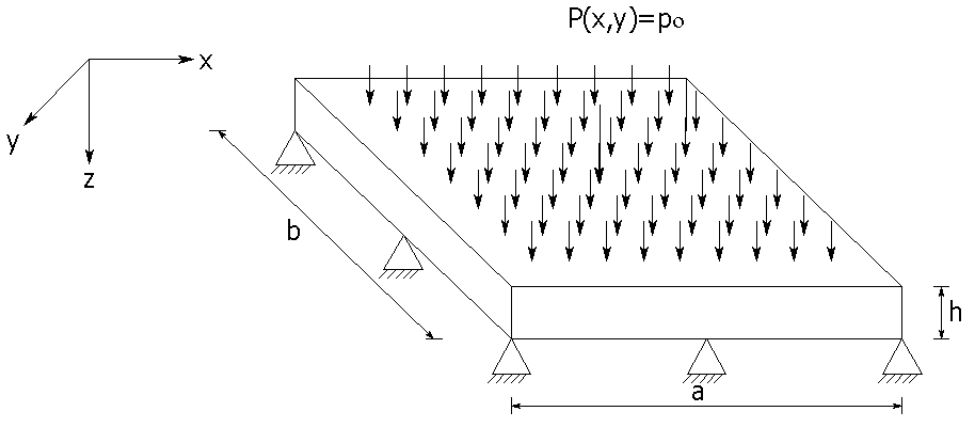
Plak mesnetlenme durumuna göre tüm kenarları basit mesnet (SSSS), ankastre mesnet (CCCC), karşılıklı iki kenar basit, diğerleri ankastre mesnet (CSCS) şeklinde belirtilmiştir.

5.1 Sayısal Örnekler

5.1.1 Tek tabakalı izotrop

Bu örnekte üniform yüke maruz kenarlarından basit mesnetlenmiş izotrop kare plak gözönüne alınmıştır (Şekil 1.15). Basit mesnetli kalın plakların çözümü için, Denklem 4.13' teki eleman matrisindeki w=0 , M_n=0 , Ω_t=0 sınır koşulları kullanılarak, Fortranda kodlama ile sistem matrisi elde edilmiştir. Farklı eleman sayıları için elde edilmiş sonuçlar Çizelge 1.1'de boyutsuzlaştırılıp literatürdeki diğer örneklerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılan çalışmada, μ = 0.30, a/h = 5 olarak alınmıştır. Simetri koşulları kullanılarak dörtte bir plak için çözüm yapılmıştır.

$$\left(w(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \bar{w} = w\frac{Eh^3}{q_0 a^4}10^2 \quad , \quad M_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{M}_x = \frac{M_x}{q_0 a^2} \right)$$



Şekil 1.15 : Üniform yüklü dörtgen plak

Çizelge 1.1 : Basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde izotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS)

Eleman Sayısı	$\overline{w}$			$\overline{M}_x$		
	M.Ç.	[18]	[17]	M.Ç.	[18]	[17]
4	5.3240	5.3280	5.3556	4.5800	4.5730	-
9	5.5680	5.5720		5.2880	5.2280	
16	5.2640	5.2630		4.7720	4.7720	
25	5.3380	5.3400		5.0080	5.0080	
36	5.2400	5.2390		4.8140	4.8130	
49	5.2780	5.2780		4.9300	4.9310	
64	5.2310	5.2320		4.8280	4.8290	
81	5.2540	5.2550		4.8980	4.8980	
100	5.2260	5.2240		4.8360	4.8360	
121	5.2420	5.2440		4.8820	4.8820	
144	5.2240	5.2240		4.8400	4.8390	
169	5.2350	5.2360		4.8720	4.8700	
196	5.2220	5.2200		4.8420	4.8400	
225	5.2310	5.2310		4.8660	4.8670	

5.1.2 Tek tabakalı ortotrop

5.1.2.1 Basit mesnetli tek tabakalı üniform yüklü ortotrop kalın plaklar

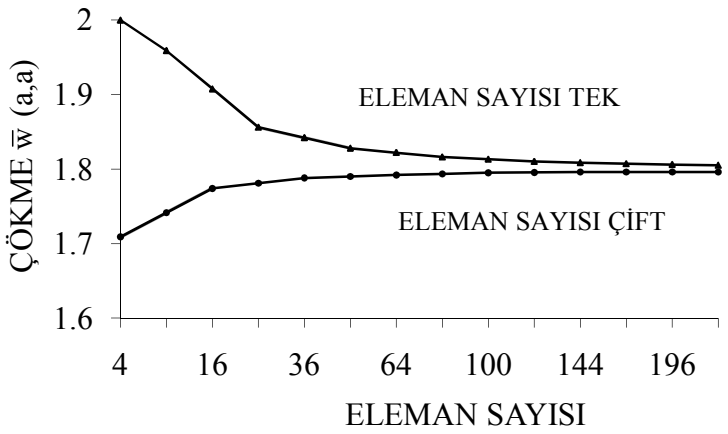
Çizelge 1.2' de üniform yüke maruz kenarlarından basit mesnetlenmiş ortotrop kare plak gözönüne alınmıştır. Basit mesnetli kalın plakların çözümü için, Denklem 4.13'teki eleman matrisindeki w=0, M_n=0, Ω_t=0 sınır koşulları kullanılarak, Fortranda kodlama ile sistem matrisi elde edilmiştir. Farklı eleman sayıları için elde edilmiş sonuçlar Çizelge 1.2'de boyutsuzlaştırılıp literatürdeki diğer örneklerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılan çalışmada, E_x / E_y = 25 ; μ_{xy} = μ_{xy} = μ_{xy} = 0.25 ; G_{xy} = G_{xz} = 0.5 E_y ; G_{yz} = 0.2 E_y ; a/h = 5 olarak alınmıştır. Simetri koşulları kullanılarak dörtte bir plak için çözüm yapılmıştır. Çift ve tek eleman sayısı sonuçlarına göre diagramın alt ve üst sınır halinde yakınsadığı gözlemlenmiştir (Şekil 1.16).

$$\left(w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{w} = w\frac{E_y h^3}{q_0 a^4}10^2 \quad , \quad M\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) \rightarrow \overline{M} = \frac{M}{q_0 a^2} \right)$$

Çizelge 1.2 : Basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS)

Eleman Sayısı	$\bar{w}$			$\overline{M}_x$			$\overline{M}_y$		
	M.Ç.	[18]	[17]	M.Ç.	[18]	[17]	M.Ç.	[18]	[17]
4	1.7090	1.7097	1.8159	0.1138	0.1138	0.1206	0.0085	0.0085	0.0109
9	1.9590	1.9584		0.1315	0.1316		0.0125	0.0125	
16	1.7740	1.7746		0.1189	0.1189		0.0100	0.0100	
25	1.8560	1.8565		0.1245	0.1246		0.0115	0.0115	
36	1.7880	1.7885		0.1199	0.1199		0.0104	0.0104	
49	1.8280	1.8271		0.1226	0.1226		0.0112	0.0112	
64	1.7920	1.7931		0.1202	0.1202		0.0106	0.0106	
81	1.8160	1.8163		0.1218	0.1218		0.0111	0.0111	
100	1.7950	1.7947		0.1204	0.1203		0.0107	0.0107	
121	1.8100	1.8101		0.1214	0.1214		0.0110	0.0110	
144	1.7960	1.7962		0.1204	0.1204		0.0107	0.0107	
169	1.8070	1.807		0.1212	0.1212		0.0110	0.0110	
196	1.7960	1.7963		0.1205	0.1205		0.0108	0.0108	
225	1.8050	1.8039		0.1211	0.1206		0.0109	0.0109	

M.Ç. : Mevcut Çalışma



Şekil 1.16 : Ortotrop kenarlarından basit mesnetli üniform yüke maruz kalın plakta çökme için yaklaşım testi

5.1.2.2 Ankastre mesnetli tek tabakalı üniform yüklü ortotrop kalın plaklar

Çizelge 1.3' de üniform yüke maruz kenarlarından ankastre mesnetlenmiş ortotrop kare plak gözönüne alınmıştır. Ankastre mesnetli kalın plakların çözümü için, Denklem 4.13' teki eleman matrisindeki w=0 , Ω_n=0 , Ω_t=0 sınır koşulları kullanılarak, Fortranda kodlama ile sistem matrisi elde edilmiştir. Farklı eleman sayıları için elde edilmiş sonuçlar Çizelge 1.3'de boyutsuzlaştırılıp literatürdeki diğer örneklerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılan çalışmada, $E_x / E_y = 25$; $\mu_{xy} = \mu_x = \mu_{xy} = 0.25$; $G_{xy} = G_{xz} = 0.5\ E_y$; $G_{yz} = 0.2\ E_y$; a/h = 5 olarak alınmıştır. Simetri koşulları kullanılarak dörtte bir plak için çözüm yapılmıştır.

$$\left(w(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{w} = w\frac{E_y h^3}{q_0 a^4}10^2 \quad , \quad M(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{M} = \frac{M}{q_0 a^2} \right)$$

Çizelge 1.3 : Ankastre mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (CCCC)

Eleman Sayısı	$\overline{w}$		$\overline{M}_x$		$\overline{M}_y$	
	M.Ç.	[18]	M.Ç.	[18]	M.Ç.	[18]
4	1.3470	1.3471	6.1320	6.1333	1.2438	1.2439
9	1.2890	1.2886	3.5620	3.5628	0.4906	0.4905
16	1.2880	1.2879	4.6080	4.6089	0.8622	0.8622
25	1.2650	1.2651	3.8620	3.8628	0.6270	0.6272
36	1.2710	1.2709	4.2980	4.2983	0.7794	0.7794
49	1.2600	1.2599	3.9480	3.9483	0.6680	0.6683
64	1.2640	1.2643	4.1860	4.1867	0.7496	0.7494
81	1.2580	1.2581	3.9840	3.9844	0.6852	0.6850
100	1.2610	1.2612	4.1340	4.1339	0.7356	0.7356
121	1.2570	1.2572	4.0020	4.0022	0.6938	0.6939
144	1.2590	1.2595	4.1060	4.1056	0.7282	0.7283
169	1.2570	1.2567	4.0140	4.0133	0.6988	0.6989
196	1.2580	1.2584	4.0880	4.0883	0.7236	0.7233
225	1.2560	1.2564	4.0200	4.0200	0.7018	0.7017

5.1.3 Farklı a/h oranları için ortotrop tabakalarda gerilme durumu

Örnek 5.1 : Bu örnekte üniform yüke maruz kenarlarından basit mesnetlenmiş ortotrop tabakalı kare plak gözönüne alınmıştır. Basit mesnetli kalın plakların çözümü için, Denklem 4.13' teki eleman matrisindeki w=0 , M_n=0 , Ω_t=0 sınır koşulları kullanılarak, Fortranda kodlama ile sistem matrisi elde edilmiştir. Çözüm için 5x5'lik sonlu eleman kullanılmıştır. Farklı a/h oranları için elde edilmiş sonuçlar Çizelge 1.4'de boyutsuzlaştırılıp literatürdeki diğer örneklerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılan çalışmada, $E_1 = 31.8 \times 10^6$ psi ; $E_2 = 1.02 \times 10^6$ psi ; $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.96 \times 10^6$ psi ; $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.31$ olarak alınmıştır. Boyutsuzlaştırma için $w(a/2, a/2) \rightarrow \bar{w} = w(E_2 h^3 / q_0 a^4) 10^2$ kullanılmıştır.

Çizelge 1.4 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kalın plakta farklı a/h oranları için *w* çökme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Mevcut Çalışma	Alıntı Çözüm	Fark %
5	1.0810	1.0925	1.05
10	0.6698	0.6687	0.16

Örnek 5.2 : Karşılaştırma yapılan çalışmada, $E_1 = 25 \times 10^6$ psi ; $E_2 = 10^6$ psi ; $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$; $G_{23} = 0.2E_2$; $\mu_{12} = 0.25$ olarak alınmıştır. Farklı a/h oranları için plakta meydana gelen çökme değerleri Çizelge 1.5'de verilmiştir. Boyutsuzlaştırma için $w(a/2, a/2) \rightarrow \bar{w} = w(E_2 h^3 / q_0 a^4) 10^2$ kullanılmıştır.

Çizelge 1.5 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kalın plakta farklı a/h oranları için *w* çökme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Mevcut Çalışma	[21]	Fark %
2	7.6520	7.7062	0.703
4	2.6640	2.6596	0.165

5.1.4 Farklı tabakalanma ve farklı a/h durumları için gerilme durumu

Çizelge 1.6, Çizelge 1.7, Çizelge 1.8'de tüm kenarlarından basit mesnetlenmiş ortotrop simetrik tabakalı kare plak için üniform yükleme yapılmıştır. Karşılaştırma yapılan çalışmada, $E_1 = 25E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$; $\mu_{12} = 0.25$ alınmıştır. Farklı a/h oranları için çökme değerleri bulunmuştur. ($w(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \bar{w} = w\frac{E_2 h^3}{q_0 a^4}10^2$)

Çizelge 1.6 : (0˚/90˚/ 0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta eleman sayısına göre çökme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Mevcut Çalışma	[19]	[20]
10	1.0160	1.0219	1.0221
20	0.7548	0.7572	0.7574
100	0.6681	0.6697	0.6698

Çizelge 1.7 : (0˚/90˚/90˚/0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta çökme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Mevcut Çalışma	[19]	Fark %
10	1.0460	1.0250	2.05
20	0.7808	0.7694	1.48
100	0.6919	0.6833	1.26

Çizelge 1.8 : (0˚/90˚/90˚/0˚) dik katmanlı kenarlarından basit mesnetli üniform yayılı yük etkisinde ortotrop kalın plakta çökme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Mevcut Çalışma	[19]	Fark %
10	0.9705	0.9727	0.23
20	0.7449	0.7581	1.74
100	0.6710	0.6874	2.38

5.1.5 Farklı a/b ve a/h oranları için tabakalı ortotrop kalın plak çözümü

Karşılaştırma yapılan çalışmada, $E_1 = 20.83 \times 10^6$ psi ; $E_2 = 10.94 \times 10^6$ psi ; $G_{12} = 6.1 \times 10^6$ psi; $G_{13} = 3.71 \times 10^6$ psi; $G_{23} = 6.19 \times 10^6$ psi; $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.44$ olarak alınmıştır. Çözümler dörtte bir plak için 13x13'lük sonlu eleman kullanılmıştır. Farklı boyut ve kalınlıktaki plaklarda meydana gelen çökme değerleri Çizelge 1.9'da verilmiştir. ($w(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{w} = w\left(\frac{10^6}{p_0}\right)$)

Çizelge 1.9 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı a/b ve h/a oranları için çökme değerleri (CCCC)

$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{a}$	$\overline{w}$		
		Mevcut Çalışma	[22]	Fark %
1	0.2	42.1000	41.7590	0.817
	0.14	93.8200	92.7280	1.178
3	0.2	3.8680	3.8696	0.041
	0.14	6.7160	6.6931	0.342
5	0.2	1.2160	1.2192	0.262
	0.14	1.8900	1.8902	0.011

5.1.6 Farklı a/h ve E_x/E_y oranları için tabakalı ortotrop kalın plak çözümü

Çizelge 1.10, Çizelge 1.11, Çizelge 1.12 ve Çizelge 1.13' de farklı kalınlık ve E_x/E_y oranlarının sonuçlara etkisi incelenmiştir. Yapılan çalışmada a/h=5, 10, 20, 50, 100 ve E_x/E_y =1; 1.5; 3; 10; 25; 40 için dört tarafından basit ve ankastre mesnetli plaklar için yapılmıştır. 0˚/90˚/0˚ simetrik tabakalanma için $G_{xy}=G_{xz}=0.5E_y$, $G_{yz}=0.2E_y$, $\mu_{xy}=\mu_{xz}=\mu_{yz}=0.3$ alınmıştır. Boyutsuzlaştırma için $w(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{w} = w(\frac{E_y h^3}{qa^4})x10^2$,

$M(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \rightarrow \overline{M} = M/qa^2$, $Q(\frac{a}{2},0) \rightarrow \overline{Q} = Q/qa$ kullanılmıştır.

Çizelge 1.10 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından basit mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için çökme ve moment değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y=1$			$E_x/E_y=1.5$			$E_x/E_y=3$		
	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	4.9190	0.0445	0.0428	4.5680	0.0540	0.0391	3.8010	0.0726	0.0326
10	4.2410	0.0433	0.0429	3.8990	0.0533	0.0387	3.1070	0.0740	0.0309
20	4.0710	0.0430	0.0429	3.7320	0.0531	0.0386	2.9320	0.0744	0.0305
50	4.0240	0.0429	0.0429	3.6850	0.0530	0.0386	2.8830	0.0745	0.0304
100	4.0170	0.0429	0.0429	3.6790	0.0531	0.0386	2.8760	0.0745	0.0303

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y=10$			$E_x/E_y=25$			$E_x/E_y=40$		
	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\bar{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	2.5280	0.1003	0.0243	1.9270	0.1098	0.0236	1.7270	0.1108	0.0255
10	1.6850	0.1081	0.0188	0.9953	0.1225	0.0143	0.7826	0.1258	0.0139
20	1.4640	0.1105	0.0171	0.7395	0.1266	0.0110	0.5167	0.1310	0.0095
50	1.4010	0.1112	0.0166	0.6655	0.1278	0.0100	0.4388	0.1324	0.0081
100	1.3920	0.1114	0.0165	0.6548	0.1280	0.0099	0.4276	0.1326	0.0079

Çizelge 1.10'da elde edilen sonuçlara bakıldığında, E_x/E_y oranı arttığında M_x büyürken M_y eğilme momenti küçülmektedir. Bu durum plağın tek doğrultuda çalışmaya başladığını göstermektedir.

Çizelge 1.11 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından basit mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için kesme değerleri (SSSS)

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y=1$		$E_x/E_y=1.5$		$E_x/E_y=3$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.3370	0.3328	0.3588	0.3138	0.3994	0.2758
10	0.3348	0.3337	0.3584	0.3142	0.4043	0.2728
20	0.3341	0.3339	0.3583	0.3144	0.4057	0.2720
50	0.3340	0.3338	0.3582	0.3144	0.4060	0.2718
100	0.3339	0.3339	0.3582	0.3144	0.4061	0.2718

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 10$		$E_x / E_y = 25$		$E_x / E_y = 40$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.4572	0.2188	0.4740	0.2014	0.4732	0.2024
10	0.4772	0.2008	0.5073	0.1687	0.5138	0.1616
20	0.4830	0.1959	0.5170	0.1582	0.5265	0.1470
50	0.4846	0.1945	0.5198	0.1553	0.5296	0.1429
100	0.4849	0.1943	0.5203	0.1549	0.5302	0.1424

Çizelge 1.12 : (0˚/90˚/0˚) tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için çökme ve moment değerleri (CCCC)

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 1$			$E_x / E_y = 1.5$			$E_x / E_y = 3$		
	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	2.4480	0.0258	0.0235	2.2340	0.0288	0.0209	1.8940	0.0332	0.0173
10	1.6420	0.0233	0.0225	1.4480	0.0272	0.0194	1.0970	0.0335	0.0143
20	1.4250	0.0225	0.0223	1.2410	0.0267	0.0190	0.8873	0.0339	0.0133
50	1.3610	0.0223	0.0222	1.1800	0.0265	0.0188	0.8265	0.0340	0.0129
100	1.3520	0.0222	0.0222	1.1710	0.0265	0.0188	0.8177	0.0341	0.0129

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 10$			$E_x / E_y = 25$			$E_x / E_y = 40$		
	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	1.5040	0.0371	0.0145	1.3330	0.0374	0.0151	1.2640	0.0369	0.0160
10	0.6540	0.0403	0.0090	0.4854	0.0416	0.0083	0.4328	0.0413	0.0089
20	0.4130	0.0424	0.0064	0.2341	0.0447	0.0044	0.1843	0.0451	0.0042
50	0.3408	0.0432	0.0055	0.1556	0.0457	0.0028	0.1045	0.0462	0.0022
100	0.3303	0.0433	0.0053	0.1439	0.0458	0.0026	0.0926	0.0462	0.0019

Çizelge 1.13 : 0˚/90˚/0˚ tabakalı kenarlarından ankastre mesnetli kalın plakta farklı kalınlık ve E_x/E_y oranları için kesme değerleri (CCCC)

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y = 1$		$E_x/E_y = 1.5$		$E_x/E_y = 3$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.3946	0.3708	0.4098	0.3442	0.4292	0.3052
10	0.4235	0.4181	0.4428	0.3824	0.4706	0.3214
20	0.4430	0.4430	0.4625	0.4063	0.4916	0.3378
50	0.4518	0.4520	0.4704	0.4156	0.4988	0.3454
100	0.4535	0.4536	0.4719	0.4171	0.4999	0.3466

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y = 10$		$E_x/E_y = 25$		$E_x/E_y = 40$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.4408	0.2698	0.4324	0.2670	0.4236	0.2706
10	0.4954	0.2495	0.4936	0.2315	0.4859	0.2323
20	0.5210	0.2445	0.5275	0.2098	0.5265	0.2027
50	0.5276	0.2456	0.5338	0.2034	0.5346	0.1909
100	0.5283	0.2459	0.5338	0.2028	0.5340	0.1894

Çizelge 1.12 ve Çizelge 1.13' de üniform yüke maruz kenarlarından ankastre mesnetlenmiş simetrik tabakalı ortotrop kare plak gözönüne alınmıştır. Yapılan çalışmada farklı kalınlık ve E_x/E_y oranlarının sonuçlara etkisi incelenmiştir. Kenarlarından basit mesnetlenmiş plak çözümünde olduğu gibi, ankastre mesnette de E_x/E_y oranı arttığında M_x büyürken M_y eğilme momenti küçülmektedir.

5.1.7 Farklı sınır koşullarına sahip tabakalı ortotrop kalın plak çözümü

Karışık sınır koşulları olması durumunda simetrik tabakalı plaklarda çökme, moment ve kesme değerleri incelenmiştir. Çözüm için 0˚/90˚/90˚/0˚ şeklinde simetrik tabakalı üniform yayılı yüke maruz ortotrop plak seçilmiştir. Yapılan çalışmada a/h=5, 10, 20, 50, 100 ve E_x/E_y=1; 1.5; 3; 10; 25; 40 , $G_{xy}=G_{xz}=0.5E_y$, $G_{yz}=0.2E_y$, $\mu_{xy}=\mu_{xz}=\mu_{yz}=0.3$ alınmıştır. Karşılıklı iki kenarı ankastre, diğer kenarları basit mesnetli olarak çözümler yapılmıştır. Çizelge 1.15' de çökme ve moment değerleri, Çizelge 1.16'da kesme değerleri tablo halinde verilmiştir. Boyutsuzlaştırma için $w(a/2,a/2) \rightarrow \overline{w} = w(E_y h^3 / qa^4)x10^2$, $M(a/2,a/2) \rightarrow \overline{M} = M/qa^2$, $Q(a/2,0) \rightarrow \overline{Q} = Q/qa$ kullanılmıştır.

Çizelge 1.14 : Karşılıklı iki kenarı ankastre, diğer kenarları basit oturan üniform yayılı yük etkisinde a/h oranlarına göre çökme ve moment değerleri (CSCS)

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y=1$			$E_x/E_y=1.5$			$E_x/E_y=3$		
	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	3.2510	0.0292	0.0326	3.0810	0.0352	0.0315	2.6590	0.0475	0.0296
10	2.3320	0.0248	0.0318	2.2070	0.0303	0.0309	1.8570	0.0427	0.0292
20	2.0810	0.0235	0.0316	1.9690	0.0288	0.0308	1.6410	0.0409	0.0292
50	2.0080	0.0231	0.0315	1.9000	0.0283	0.0307	1.5780	0.0403	0.0292
100	1.9980	0.0230	0.0315	1.8900	0.0282	0.0307	1.5690	0.0403	0.0292

$\frac{a}{h}$	$E_x/E_y=10$			$E_x/E_y=25$			$E_x/E_y=40$		
	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$\overline{w}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$
5	1.8510	0.0667	0.0271	1.4260	0.0731	0.0266	1.2870	0.0742	0.0268
10	1.1000	0.0656	0.0262	0.6740	0.0758	0.0250	0.5338	0.0779	0.0248
20	0.9074	0.0651	0.0261	0.4842	0.0777	0.0245	0.3439	0.0811	0.0241
50	0.8524	0.0648	0.0261	0.4305	0.0784	0.0244	0.2901	0.0828	0.0239
100	0.8445	0.0648	0.0261	0.4227	0.0786	0.0244	0.2824	0.0831	0.0238

Çizelge 1.15 : Karşılıklı iki kenarı ankastre, diğer kenarları basit oturan üniform yayılı yük etkisinde a/h oranlarına göre kesme kuvveti değerleri (CSCS)

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 1$		$E_x / E_y = 1.5$		$E_x / E_y = 3$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.2682	0.4632	0.2822	0.4490	0.3078	0.4184
10	0.2589	0.4964	0.2727	0.4861	0.2996	0.4591
20	0.2558	0.5085	0.2696	0.5005	0.2967	0.4765
50	0.2554	0.5132	0.2692	0.5058	0.2962	0.4830
100	0.2554	0.5141	0.2692	0.5067	0.2962	0.4840

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 10$		$E_x / E_y = 25$		$E_x / E_y = 40$	
	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$	$\overline{Q}_x$	$\overline{Q}_y$
5	0.3422	0.3676	0.3492	0.3470	0.3480	0.3420
10	0.3441	0.4001	0.3605	0.3665	0.3618	0.3557
20	0.3450	0.4199	0.3685	0.3850	0.3741	0.3725
50	0.3454	0.4272	0.3718	0.3934	0.3802	0.3818
100	0.3456	0.4284	0.3724	0.3947	0.3812	0.3833

6. SONUÇLAR

1. Bu çalışmada simetrik çapraz tabakalı kompozit ortotrop kalın plakların statik analizi Reissner plak teorisi kullanılarak yapılmıştır.

2. İlk olarak Gâteaux türevi yöntemi kullanılarak dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte kalın plakların fonksiyoneli elde edilmiştir. Yaklaşık çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Sonlu elemanlar modeli, her nodda eğilme ve burulma momentleri (M_x, M_y, M_{xy}), kesme kuvvetleri (Q_x, Q_y), dönmeler (Ω_x, Ω_y), ve çökme (w) olmak üzere toplam 8 adet bilinmeyene sahiptir. Dolayısıyla dörtgen bir plak elemanda bilinmeyen sayısı toplam 4x8=32 adettir.

3. Sonlu elemanlar modelinin elde edilmesinden sonra, tabakalanma davranışının anlaşılması için, çapraz tabakalı kompozit plakların farklı tabakalanma durumlarında, tabakaların iç kuvvetlerinde ve tabakaların rijitliklerinde meydana gelen değişim incelenmiştir. Bu nedenle farklı tipteki malzemeler için tabakalı kompozitlerin rijitlik ve esneklik matrisleri Hooke denklemleri yardımıyla elde edilmiş, daha sonra ortotropik malzemeler için genel denklemler matris formunda yazılmıştır. Tek tabakalı plaklar için oluşturulan rijitlik ve esneklik matrisleri önce açılı tek tabakalı plaklara uygulanmış ve daha sonra çok tabakalı plaklar için geliştirilmiştir.

4. Statik çözümün yapılabilmesi için Fortran dilinde bir program geliştirilmiştir. Bu programda çözümü istenilen eleman ağına ait bilgiler sistem matrisine aktarılmakta ve elde edilen bu sistem matrisi plak elemanların statik analizinde kullanılmaktadır. Plak elemana ait elastisite modülü (E_x, E_y, E_z) , kayma modülü (G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}), poission oranı (μ_{xy}, μ_{xz}, μ_{yz}), plak kalınlığı (h) ve boyutları (a, b), yükleme (q) ve plak sınır koşullarının tümü kodlama ile sistem matrisine aktarılmaktadır.

5. Elde edilen formülasyonun ve programın geçerliliğini gösterebilmek için dörtgen plak elemanlarda ilk olarak tek tabakalı kompozit izotrop ve ortotrop kalın plak çözülmüştür. Değişimin incelenmesi için tek ve çift eleman sayılarına göre sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar neticesinde tek ve çift elemanda gerçek çözüme alt ve üst limitler halinde yaklaştığı izlenmiştir. Eleman sayısı arttıkça gerçek çözüme yaklaşma görülmüştür.

6. Tek tabaka çözümünden sonra simetrik çok tabakalı ortotrop plak çözümüne geçilmiştir. Basit ve ankastre mesnetli 0˚/90˚/0˚-0˚/90˚/90˚/0˚-0˚/90˚/0˚/90˚/0˚ tabaka diziliminde, farklı E_x/E_y oranları için incelemeler yapılarak literatür ile karşılaştırıldığında uygun sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Tarun Kant Manohar G. Gadhil. 2002. Analysis of Orthotropic Plates Based on Three Theories by Segmentation Method. *Mechanics of advanced Materials and Structures*. Vol. 9. pp. 189-239.

[2] Reddy, J., N., and Gera. R., 1979. An improved finite difference analysis of bending of thin rectangular elastic plates. *Computers and Structures*. Vol. 10. pp. 432-438.

[3] Iyenar, K.T.S.R., 1983. Analysis of Orthotropic Rectangular Thick Plates. *Fire Science and Technology*. Vol. 18. pp. 19-36.

[4] Gopalsamy, S., Balasundaram, P., K., Bhattcharyya, 1989. On an Mixed finite element method for clamped anisotropic plate bending problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. Vol. 28. pp. 1351-1370.

[5] Ozçelikörs, Y., Omurtag, M., H., ve Demir, H.,1997. Analysis of Ortotrophic Plate Foundation Interaction by Mixed Finite Element Formulation Using Gâteaux Differential. *Computers&Structure* . Vol. 62. no.1. pp. 93-106.

[6] Srinivas, S., and Rao, A., K., 1970. Bending. Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates. *International Journal of Solids and Structures* . Vol. 6. pp. 1463-1481.

[7] Dumir, P., C., and Bhaskar, A., 1988. Nonlinear static analysis of rectangular plates on elastic foundations by the orthogonal point collocation method. *Comput. Method in Applied Mech. And Engineering.* Vol. 67. pp. 111-124.

[8] Pervez, T., Seibi, A., C., and Al-Jahwari, F., K., S., 1970. Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory. *Composite Structures*. Vol. 71. no. 3-4. pp. 414-422.

[9] Daia, K., Y., Liua, G., R., Lima, K. M., and Chena, X., L., 2004. A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates. *Journal of Sound and Vibrations*. Vol. 269. no. 3-5. pp. 633-652.

[10] Doğan, A., Yağcı. E., and Arslan, H., M., 2008. Tabakalı kompozit ince plakların plak düzlemine dik yükleme etkisi altındaki eğilme analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi.* Vol. 23. no. 2. pp. 109-125.

[11] Omurtag, M., H., 2001. Tabakalı kompozit plakların karışık SEM ile static analizi. *Teknik Dergi.* Vol. 12. no. 1. pp. 2317-2330.

[12] H., R., H., Kabir 1994. Static responses of anti-symmetrical angle-ply laminated shear-flexible clamped plates. *Computers and Structures.* Vol. 53. no. 1. pp. 201-208.

[13] Jones. R., M., 1999. "Mechanics of Composite Materials". Taylor&Francis. Inc. Philadelphia. USA. 187-201.

[14] Kaw. A., K., 1997. "Mechanics of Composite Materials". CRC Press. Boca Raton. London New York Washington. D.C. 329.

[15] Jones. R.M., 1975. Mechanics of Composite Materials. Scripta Book Company. Washington D.C., 355.

[16] Szilard R., 1974. Theory and Analysis of Plates. *Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs. New Jersey.* 1-5. pp. 374-377

[17] Reddy. J. N., 1984. Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. John Wiley&Sons.

[18] Çalışkan, H., 2007. Ortotrop Kalın Plakların Statik ve Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[19] Reddy, J. N., 1945. "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis" Second Edition, 2004 by CRC Press LLC.

[20] Civalek, Ö., 2008. Analysis of Thick Rectangular Plates with Symmetric Cross-ply Laminates Based on First-order Shear Deformation Theory. *Journal of Composite Materials.* Vol. 42. no. 26. pp.2853-2867.

[21] Reddy, J., N., 1984. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics.* Vol. 51. December pp. 745-752.

[22] Liew, K., M., Han, J., B., and Xiao Z., M., 1996. Differantial Quadrature Method For Thick Symmetric Cross-Ply Laminates With First-Order Shear Flexibility. *International Journal of Solids and Structuress.* Vol. 33. no.18. pp. 2647-2658.

[23] Eratlı, N., Aköz, A.Y., 2002. Free Vibration Analysis of Reissner Plates by Mixed Finite Element. *Structural Engineering and Mechanics Computers*, Vol.13. no.3. pp. 277-298.

[24] Eratlı, N., 1995. Katlanmış plaklar için sonlu elemanlar formülasyonu Elastisite Teorisi, Doktora tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Nurten ATEŞ

Doğum Yeri ve Tarihi: Ankara-1985

Adres: Maltepe / İstanbul

Lisans Üniversite: Yıldız Teknik Üniversitesi(2007)