İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLERDE İŞARET VE GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ İÇİN YENİ YÖNTEMLER

DOKTORA TEZİ

Ahmet Korhan TANÇ

Anabilim Dalı: Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği

Programı: Telekomünikasyon Mühendisliği

MAYIS 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLERDE İŞARET VE GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ İÇİN YENİ YÖNTEMLER

DOKTORA TEZİ

Ahmet Korhan TANÇ
(504042311)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 28 Ocak 2011
Tezin Savunulduğu Tarih: 6 Mayıs 2011

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet H. KAYRAN (İTÜ)
Jüri Üyeleri: Prof. Dr. M. Ertuğrul ÇELEBİ (İTÜ)
Prof. Dr. Aydın AKAN (İÜ)
Prof. Dr. Hakan A. ÇIRPAN (İTÜ)
Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU (Uludağ Ü)

MAYIS 2011

Anneme ve eşime,

ÖNSÖZ

Uzun ve yorucu bir çalışmanın sonunda doktora tezimi tamamlamış bulunmaktayım. Öncelikle, doktora çalışmamın her aşamasında değerli zamanını benden esirgemeyen ve engin bilgisiyle beni yönlendiren danışmanım Prof. Dr. Ahmet Hamdi Kayran'a minnettar olduğumu belirtmek isterim. Ayrıca, doktora tezimin gelişimine önemli katkılarda bulunan hocalarım Prof. Dr. Mehmet Ertuğrul Çelebi'ye, Prof. Dr. Aydın Akan'a ve Yrd. Doç. Dr. Ender Mete Ekşioğlu'na teşekkürlerimi sunmak istiyorum. Bana güvenen aileme, arkadaşlarıma ve hocalarıma da çok teşekkür ederim.

Ocak 2011 Ahmet Korhan Tanç

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xi**
ÖZET ..... **xiii**
SUMMARY ..... **xv**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Literatüre Katkıları 2
2. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER **5**
2.1 Sistem Modeli 5
2.2 Çoklu-Hızlı Rastgele İşaretler 6
2.3 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Giriş İşaretinin Kestirimi 7
2.3.1 Wiener filtresi 7
2.3.2 En küçük ortalama kareler (LMS) yöntemi 8
2.3.3 En küçük kareler (LS) yöntemi 9
2.3.4 Doğrusal en küçük ortalama karesel hata (LMMSE) kestirimi 10
2.4 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Giriş İşaretinin Güç Spektrumunun Kestirimi 11
2.4.1 Maksimum entropi yöntemi 13
2.4.2 İzdüşümler yöntemi 14
2.5 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Varış Zamanı Farkı (TDOA) Kestirimi 16
3. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN UYARLAMALI DİK KAFES FİLTRESİ **19**
3.1 Motivasyon 19
3.2 Çok Kanallı Uyarlamalı Dik Kafes Filtresi 19
3.3 Periyodik Zamanla Değişen Çok Kanallı Uyarlamalı Dik Kafes Filtresi 22
3.4 Benzetim Sonuçları 23
3.4.1 Örnek 3.1 23
3.4.2 Örnek 3.2 24
4. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN İTERATİF MAKSİMUM ENTROPİ GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ **27**
4.1 Motivasyon 27
4.2 Sistem Modeli 27
4.3 Sonlu Frekans Noktalı Maksimum Entropi Güç Spektrumu 29
4.4 Hesaplama Algoritması 31
4.5 Benzetim Sonuçları 33
4.5.1 Örnek 4.1 33
4.5.2 Örnek 4.2 35
5. İKİ-BOYUTLU ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ **39**
5.1 Motivasyon 39

5.2 Sistem Modeli 39
5.3 İki-Boyutlu ve Sonlu Frekans Noktalı Maksimum Entropi Güç Spektrumu . 40
5.4 Hesaplama Algoritması 44
5.5 İki-Boyutlu ve Sonlu Frekans Noktalı L2 Güç Spektrumu 47
5.6 Benzetim Sonuçları 50
5.6.1 Örnek 5.1 50
5.6.2 Örnek 5.2 52
6. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN SEYREK İŞARET KESTİRİMİ 55
6.1 Motivasyon 55
6.2 Sistem Modeli 55
6.3 Seyrek L1 İşaret Kestirimi 56
6.4 Benzetim Sonuçları 58
6.4.1 Örnek 6.1 58
6.4.2 Örnek 6.2 59
7. SONUÇLAR 61
KAYNAKLAR 63
ÖZGEÇMİŞ 67

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Örnek 4.2 için periyodik olarak zamanla değişen Wiener filtresinin normalize ortalama karesel hatası 38
Çizelge 5.1 : Örnek 5.1 için önerilen 2-B maksimum entropi güç spektrumu kestirim algoritmasının yakınsaması 51
Çizelge 5.2 : Örnek 5.2 için önerilen 2-B maksimum entropi güç spektrumu kestirim algoritmasının yakınsaması 53
Çizelge 5.3 : Örnek 5.2 için 32x32 noktalı güç spektrumu kestirimlerinin normalize özilinti kestirim uyumsuzlukları 53

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Çoklu-hızlı sistem modeli 5
Şekil 3.1 : *L*-kanallı modüler dik kafes filtresinin *m*. hücresi 20
Şekil 3.2 : İşleme ve ortogonal işleme hücreleri 21
Şekil 3.3 : Örnek 3.1 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin öğrenme eğrileri 24
Şekil 3.4 : Örnek 3.1 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin birim zamandaki toplam çarpma-bölme sayıları 24
Şekil 3.5 : Örnek 3.2 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin öğrenme eğrileri 25
Şekil 3.6 : Örnek 3.2 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin birim zamandaki toplam çarpma-bölme sayıları 26
Şekil 4.1 : Örnek 4.1 için 128-noktalı en küçük kareler ve maksimum entropi güç spektrumları 34
Şekil 4.2 : Örnek 4.1 için önerilen iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi 34
Şekil 4.3 : Örnek 4.2 için 128-noktalı en küçük kareler, maksimum entropi ve orjinal güç spektrumları 36
Şekil 4.4 : Örnek 4.2 için önerilen iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi 36
Şekil 4.5 : Çoklu-hızlı sistemler için birleşik güç spektrumu ve işaret kestirimi 37
Şekil 4.6 : Örnek 4.2 için 128-noktalı maksimum entropi güç spektrumunu kullanan ve periyodik olarak zamanla değişen Wiener filtresinin örnek gerçekleme sonucu 38
Şekil 5.1 : 2-B çoklu-hızlı sistem modeli 39
Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı maksimum entropi güç spektrumu 51
Şekil 5.3 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı en küçük kareler güç spektrumu 52
Şekil 5.4 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı L2 güç spektrumu 52
Şekil 6.1 : Örnek 6.1 için en küçük kareler ve seyrek L1 işaret kestirimlerinin normalize ortalama karesel hata başarımları 59
Şekil 6.2 : Örnek 6.2 için en küçük kareler ve seyrek L1 işaret kestirimlerinin normalize ortalama karesel hata başarımları 60

ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLERDE İŞARET VE GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ İÇİN YENİ YÖNTEMLER

ÖZET

Son zamanlarda çoklu-hızlı sistemler, algılayıcı ağlarını modellemek için kullanılmaya başlanmıştır. Bilgi işaretinin birçok düşük kapasiteli algılayıcı tarafından gözlendiği algılayıcı ağları, ciddi maliyet kazancı sağlamakta ve hızla yaygınlaşmaktadır. Bu durumun bir sonucu olarak, çoklu-hızlı sistemlerin önemi artmakta, klasik çoklu-hızlı işaret işleme yöntemlerinin yerini de stokastik yöntemler almaktadır. Bu tezde, algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemler ele alınmakta, işaret ve güç spektrumu kestirimi için dört yeni yöntem önerilmektedir.

İlk olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin kestirilmesine yönelik uyarlamalı dik kafes filtresi önerilmektedir. Katsayıları en küçük kareler ilkesine göre belirlenen ve periyodik olarak zamanla değişen bu filtre, çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki gözlemleri verimli olarak dikleştirmektedir. Bu sayede, işlem yükü ve sayısal kararsızlık önemli ölçüde azalmaktadır.

Tezde ikinci olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesine yönelik iteratif bir yöntem önerilmektedir. Maksimum entropi güç spektrumunun örneklenmesine dayanan bu yöntemde, basit matris ve vektör işlemleriyle çözüm hesaplanabilmektedir. Sonuç olarak hesaplama verimliliği artmakta, çözümün yaklaşıklığı da kabul edilebilir bir düzeyde olmaktadır.

Tezde yapılan üçüncü çalışma ise, iki-boyutlu (2-B) işaretlerin algılanmasında kullanılan çoklu-hızlı sistemlerde 2-B giriş işaretinin güç spektrumunun kestirilmesine yöneliktir. Bu çalışmada, ilgili kestirim problemi açıklanmakta ve problemin maksimum entropi ilkesiyle çözülmesi için elverişli bir yöntem önerilmektedir. 2-B maksimum entropi güç spektrumunun sonlu frekans noktalı olarak hesaplandığı bu yöntemin başarımı karşılaştırmalı olarak incelenmektedir.

Bu tezde yapılan son çalışmada, çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin belirli bir domende seyrek olması durumunda, giriş işaretinin nasıl kestirilmesi gerektiği tartışılmaktadır. Bu çalışmada, seyrek işaret kestirim yöntemi çoklu-hızlı sistemler için uyarlanmakta ve benzetimlerle başarım incelenmektedir.

NOVEL METHODS FOR SIGNAL AND POWER SPECTRUM ESTIMATION IN MULTI-RATE SYSTEMS

SUMMARY

Recently, multi-rate systems have been utilized for modeling of sensor networks. Sensor networks enable the sensing of information signal with multiple low capacity sensors. These networks provide serious cost efficiency, and they have become widespread. Consequently multi-rate systems have received more attention, and various multi-rate stochastic signal processing methods have been introduced. In this thesis, we consider the multi-rate systems which model the sensor networks, and we propose four novel methods for signal and power spectrum estimation.

At first, we propose an adaptive orthogonal lattice filter for input information signal estimation in multi-rate systems. The proposed lattice filter uses the minimum mean square error criterion, and its coefficients are updated in a periodical manner. The virtue of this filter is that it orthogonalizes the multi-rate measurements efficiently. Hence, the proposed lattice filter has lower computational load and higher numerical stability.

Our second contribution is an iterative maximum entropy method which estimates the power spectrum of an information signal using multi-rate measurements. This method is based on sampling of the maximum entropy power spectrum, and it relies on simple matrix and vector calculations. Accordingly, our iterative method provides high computational efficiency, and it has moderate approximation.

The third study aims to estimate the power spectrum of a two-dimensional (2-D) information signal using 2-D multi-rate measurements. We explain the related estimation problem and propose an efficient solution procedure which approximates the 2-D maximum entropy power spectrum with finite frequency points. We investigate the performance of our method by comparisons.

Finally, we consider the case where the information signal at the input of the multi-rate system is sparse in a definite domain. In order to estimate this signal by using multi-rate measurements, we adopt the sparse signal estimation method. The performance of our technique is examined via simulations.

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Bilindiği gibi çoklu-hızlı sistemler, sayısal işaret işlemenin önemli inceleme alanlarından bir tanesidir ve işaretlerin ayrıştırılmasında yaygın olarak kullanılmaktadır. Tekli-girişli ve çoklu-çıkışlı olan çoklu-hızlı sistemin her bir kanalındaki filtreleme ve alt-örnekleme işlemlerinin sonucunda, sistemin girişindeki işaretin alt-bantları elde edilmekte ve daha az bilgi taşıyan alt-bantların zayıflatılması veya çıkarılması sonucunda işaret daha verimli olarak ifade edilebilmektedir [1-2]. Bu tür uygulamalara, çoğulortam ve biyomedikal işaretlerin alt-bant kodlaması örnek olarak verilebilir. Benzer şekilde uyarlamalı işaret işleme uygulamalarında, işaretin alt-bantlarına ayrıştırıldıktan sonra işlenmesi hesaplama yükünü azaltmaktadır. Ayrıca çoklu-hızlı sistemler, işaretlerin çoğullanıp iletilmesinde de kullanılmaktadır [3].

Son zamanlarda ise çoklu-hızlı sistemler, algılayıcı ağlarını modellemek için kullanılmaya başlanmıştır. Bilgi işaretinin birçok düşük kapasiteli algılayıcı tarafından gözlendiği algılayıcı ağları, ciddi maliyet kazancı sağlamakta ve hızla yaygınlaşmaktadır [4]. Algılayıcı ağların kullanım alanlarına biyomedikal işaretlerin algılanması, askeri hedeflerin izlenmesi ve tanımlanması, endüstriyel süreçlerin kontrolü, uzaktan algılama ve haberleşme uygulamaları örnek olarak verilebilir. Bu durumun bir sonucu olarak, çoklu-hızlı sistemlerin önemi artmakta, klasik çoklu-hızlı işaret işleme yöntemlerinin yerini de stokastik yöntemler almaktadır [5].

Algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemlerle ilgili literatür incelendiğinde, son yıllarda birçok çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Therrien'in öncülük ettiği çalışmalarda, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin istatistiksel işaret işleme [6-8] ve uyarlamalı işaret işleme [9-10] yöntemleriyle kestirilmesi üzerinde durulmuştur. Bu çalışmaları iki-boyutlu (2-B) çoklu-hızlı sistemlere genişletmek için, yine Therrien bazı çalışmalara öncülük etmiştir [11-12]. Jahromi, Francis ve Kwong ise çoklu-hızlı sistemi bilgi kuramı açısından incelemiş [13], sistemin girişindeki bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesi için maksimum entropi ilkesinin kullanıl-

masını önermiştir [14-16]. Ayrıca Jahromi ve Aarabi, çoklu-hızlı sistemlerde gözlemler arasındaki zaman farkının hesaplanması [17] ve çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin güç spektrumunun bulunması için izdüşümler yönteminin kullanılması ile ilgili çalışmalar yapmıştır [5,18]. Georgiou ve öğrencileri de, çoklu-hızlı sistemlerde güç spektrumu kestiriminin kesin olarak hesaplanmasıyla ilgili çalışmalar yayınlamıştır [19-20].

Yukarıda özetlenen işaret işleme tabanlı çalışmaların dışında, konuyu kontrol teorisi açısından ele alan güncel çalışmalar da bulunmaktadır. Yan, Liu ve Zhou, durum uzayı modelini kullanarak eş-zamanlı olmayan çoklu-hızlı sistemlerin modellenmesi ile ilgili çalışmalar yapmıştır [21-22]. Liang, Chen ve Pan ise çoklu-hızlı sistemlerde optimum durum kestirimi üzerinde durmuş [23], dinamik kontrol sistemlerine uygulanabilecek H_∞ durum kestiricisi geliştirmiştir [24]. Ayrıca literatürde, değişken hızlı çoklu-hızlı sistemlerde optimum durum kestirimiyle ilgili yapılmış çalışmalar da bulunmaktadır [25-26].

1.2 Tezin Literatüre Katkıları

Bu tezde, algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemler için yeni işaret işleme yöntemleri önerilmektedir. İlk olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin kestirilmesine yönelik uyarlamalı dik kafes filtresi önerilmektedir. Katsayıları en küçük kareler ilkesine göre belirlenen ve periyodik olarak zamanla değişen bu filtre, çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki gözlemleri verimli olarak dikleştirmektedir. Bu sayede, işlem yükü ve sayısal kararsızlık önemli ölçüde azaltmaktadır. Yapılan bu çalışma konferans bildirisi olarak yayınlanmıştır:

“A. K. Tanc, E. M. Eksioglu ve A. H. Kayran, 2009: Adaptive multirate signal estimation with lattice orthogonalization, *Proc. 16th IEEE ICECS*, Tunisia, 117-119.”

Tezde ikinci olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesine yönelik iteratif bir yöntem önerilmektedir. Maksimum entropi güç spektrumunun örneklenmesine dayanan bu yöntemde, basit matris ve vektör işlemleriyle çözüm hesaplanabilmektedir. Sonuç olarak hesaplama verimliliği artmakta, çözümün yaklaşıklılığı da kabul edilebilir bir düzeyde olmaktadır. Yapılan bu çalışma dergi makalesi olarak yayınlanmıştır:

"A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2010: Iterative maximum entropy power spectrum estimation for multirate systems, *Int. J. Electron. Commun. (AEU)*, vol. 64, 93-98."

Tezde yapılan üçüncü çalışma ise, 2-B işaretlerin algılanmasında kullanılan çoklu-hızlı sistemlerde 2-B giriş işaretinin güç spektrumunun kestirilmesine yöneliktir. Bu çalışmada, ilgili kestirim problemi açıklanmakta ve problemin maksimum entropi ilkesiyle çözülmesi için elverişli bir yöntem önerilmektedir. 2-B maksimum entropi güç spektrumunun sonlu frekans noktalı olarak hesaplandığı bu yöntemin başarımı karşılaştırılmalı olarak incelenmektedir. Yapılan bu çalışma dergi makalesi olarak yayınlanacaktır:

"A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2011: Maximum entropy power spectrum estimation for 2-D multirate systems, *Circuits Syst. Signal Process*., DOI: 10.1007/s00034-011-9286-9."

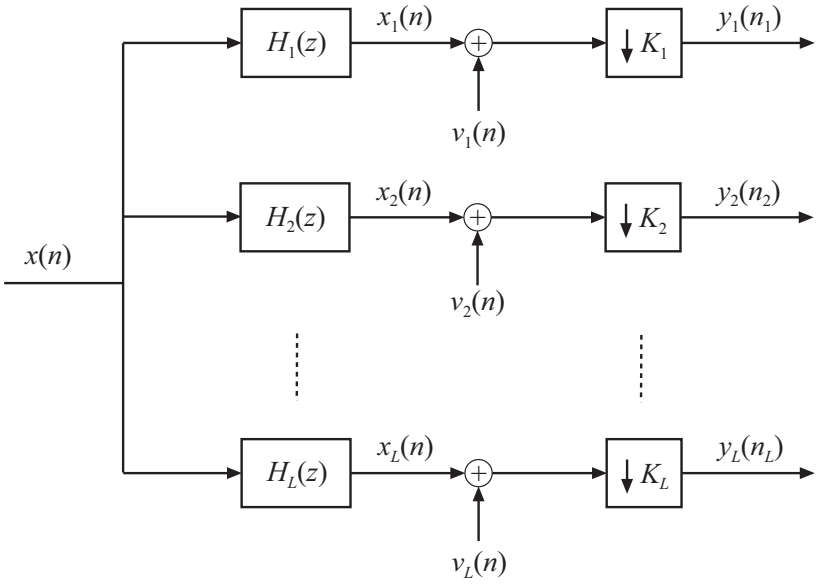
Bu tezde yapılan son çalışmada, çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin belirli bir domende seyrek olması durumunda, giriş işaretinin nasıl kestirilmesi gerektiği tartışılmaktadır. Seyrek işaret kestirim yönteminin çoklu-hızlı sistemler için uyarlandığı ve başarımın benzetimlerle incelendiği bu çalışma, konferans bildirisi olarak yayınlanmıştır:

"E. M. Eksioglu, A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2010: A compressive sensing framework for multirate signal estimation, *Proc. 10th Int. Conf. ISSPA*, Malaysia, 716-719."

2. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER

2.1 Sistem Modeli

L kanallı çoklu-hızlı sistemin blok diyagramı Şekil 2.1'de verilmektedir. Sistemin girişindeki $x(n)$ ayrık-zamanlı, nedensel bilgi işaretidir ve L adet algılayıcı tarafından dolaylı olarak gözlenmektedir. Algılayıcıların bant genişliği sınırlamaları $H_i(z)$ nedensel ve doğrusal zamanla değişmeyen filtreler ile modellenmektedir. Kararlı oldukları varsayılan bu filtreler aynı zamanda yayılım etkilerini modellemek için de kullanılmaktadır. Algılayıcıların örnekleme hızlarındaki sınırlamalar ise K_i alt-örnekleyicileri ile modellenmektedir. $v_i(n)$ ile gösterilen toplamsal gözlem gürültüsünün varlığında, $y_i(n_i)$ çoklu-hızlı gözlemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir,



Şekil 2.1 : Çoklu-hızlı sistem modeli [7].

$$x_i(n) = x(n) * h_i(n)$$

$$y_i(n_i) = x_i(K_i n_i) + v_i(K_i n_i) \qquad \textbf{(2.1)}$$

$i = 1, 2, \ldots, L.$

Bu denklemlerde, konvolüsyon operatörü $*$ sembolü ile, kanal filtrelerinin dürtü yanıtları da $h_i(n)$ ile gösterilmektedir. K_i değerlerinin tam sayı oldukları varsayılmış

ve her bir kanal gözlemi için n_i ile gösterilen zaman indeksleri tanımlanmıştır. Kanal gözlemlerinin örnekleme hızlarının farklı olması nedeniyle tercih edilen bu indeksleme biçimi, sistemin çoklu-hızlı olmasının bir sonucudur.

2.2 Çoklu-Hızlı Rastgele İşaretler

Çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ bilgi işaretinin sıfır ortalamalı ve geniş anlamda durağan olduğunu varsayalım. $x(n)$ işaretinin özilinti fonksiyonunu

$$r_x(k) = E\left\{x(n)x^*(n-k)\right\} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada E beklenen değer, * karmaşık eşlenik operatörleridir. $H_i(z)$ doğrusal ve kararlı kanal filtreleri zamanla değişmediği için, $x_i(n)$ işaretleri de geniş anlamda durağan olacaktır. Bu işaretlerin özilinti fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned} &r_{xi}(k) = r_x(k) * h_i(k) * h_i^*(-k) = r_x(k) * g_i(k) \\ &i = 1,\ 2,\ ...,\ L. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Çoklu-hızlı sistemdeki toplamsal gürültü terimlerinin sıfır ortalamalı ve ortak geniş anlamda durağan olduklarını da varsayalım. Böylelikle, alt-örnekleyicilerin girişindeki işaretler de ortak geniş anlamda durağan olacaktır. Alt-örnekleyici oranları tam sayı olduğundan, her bir kanal gözlemi de geniş anlamda durağan olacaktır. Toplamsal gürültü terimleriyle çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin ilintisiz olduğunu varsayarak, $y_i(n_i)$ işaretlerine ilişkin özilinti fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} &r_{yi}(k) = r_{xi}(K_i k) + r_{vi}(K_i k) \\ &i = 1,\ 2,\ ...,\ L \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna karşın, giriş işareti ve tüm kanal gözlemleri ortak geniş anlamda çevrimsel durağan olacaktır. Çünkü, giriş işaretinin ve tüm kanal gözlemlerinin örnekleme hızları aynı değildir. Bu çevrimselliğin periyodu ise alt-örnekleyici oranlarının ortak katlarının en küçüğüdür [7],

$$K = \mathrm{OKEK}\left\{K_1, K_2, \ldots, K_L\right\}. \tag{2.5}$$

Bu değer, çoklu-hızlı sistemin periyodu olarak da adlandırılmaktadır.

2.3 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Giriş İşaretinin Kestirimi

Algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemlere ilişkin en önemli problemlerden bir tanesi, gürültülü çoklu-hızlı gözlemlerden sistemin girişindeki bilgi işaretinin kestirilmesidir. Giriş işareti ve tüm çoklu-hızlı gözlemler ortak geniş anlamda çevrimsel durağan olduğu için, giriş işaretinin kestiriminde kullanılacak olan ortalama karesel hata açısından en iyi doğrusal filtrenin periyodik olarak zamanla değişmesi gerekir [6],

$$\hat{x}(n-\Delta)=\sum_{i=1}^{L}\sum_{m=1}^{M_i}c_i(n,m)\,y_i\left(\lfloor n/K_i\rfloor-m+1\right)$$
$$c_i(n,m)=c_i(n+K,m),\quad \text{tüm } i,\ n \text{ ve } m \text{ için.} \tag{2.6}$$

Bu denklemlerde kestirim gecikmesi Δ ile, filtrenin dal sayıları M_i ile, filtre katsayıları $c_i(n,m)$ ile, taban (floor) fonksiyonu ise $\lfloor\ \rfloor$ ile gösterilmektedir. Böylelikle, periyodik olarak zamanla değişen filtrenin toplam katsayı sayısı K ($M_1 + M_2 + \ldots + M_L$) olmaktadır. Filtre katsayıları ise ortalama karesel hatayı en küçük yapacak şekilde seçilmelidir,

$$c_i(n,m)=\arg\min\ E\left\{\varepsilon(n)\right\}$$
$$\varepsilon(n)=\left|x(n)-\hat{x}(n)\right|^2. \tag{2.7}$$

Kestirim için kullanılan bu filtre periyodik olarak zamanla değiştiği için, filtrenin çıkışında elde edilen $\hat{x}(n)$ işareti K ile geniş anlamda çevrimsel durağan olacaktır [27],

$$r_{\hat{x}}(n,k)=r_{\hat{x}}(n+K,k),\quad \text{tüm } n \text{ ve } k \text{ için.} \tag{2.8}$$

2.3.1 Wiener filtresi

Yukarıda özetlenen doğrusal ve periyodik olarak zamanla değişen filtrenin katsayıları, Wiener-Hopf denklemlerinin çözülmesiyle elde edilebilir [7-8]. Bunun için, öncelikle kestirim için kullandığımız filtrenin girişindeki çoklu-hızlı gözlemleri vektörel olarak ifade edelim,

$$\mathbf{y}^T(n)=\left[\mathbf{y}_1^T(n)\quad \mathbf{y}_2^T(n)\quad \ldots\quad \mathbf{y}_L^T(n)\right]$$
$$\mathbf{y}_i^T(n)=\left[y_i\left(\lfloor n/K_i\rfloor\right)\quad y_i\left(\lfloor n/K_i\rfloor-1\right)\quad \ldots\quad y_i\left(\lfloor n/K_i\rfloor-M_i+1\right)\right]. \tag{2.9}$$

Bu denklemlerde kullanılan taban fonksiyonları nedeniyle, Wiener filtre katsayılarının hesaplanması için ihtiyaç duyulan özilinti matrisi ve çapraz ilinti vektörü K ile periyodik olarak zamanla değişecektir,

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_y(n) = E\left\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\right\} \\ &\mathbf{R}_y(n) = \mathbf{R}_y(n+K), \quad \text{tüm } n \text{ için,} \end{aligned} \tag{2.10}$$

ve

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_{yx}(n) = E\left\{\mathbf{y}(n)x^*(n-\Delta)\right\} \\ &\mathbf{r}_{yx}(n) = \mathbf{r}_{yx}(n+K), \quad \text{tüm } n \text{ için.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Doğrusal ve periyodik olarak zamanla değişen filtrenin katsayıları ortalama karesel hatayı en küçük yapacak şekilde seçildiğinde

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}^*(n) = \mathbf{R}_y^{-1}(n)\mathbf{r}_{yx}(n) \\ &\mathbf{c}^T(n) = \left[\mathbf{c}_1^T(n) \quad \mathbf{c}_2^T(n) \quad \ldots \quad \mathbf{c}_L^T(n)\right] \\ &\mathbf{c}_i^T(n) = \left[\mathbf{c}_i(n,1) \quad \mathbf{c}_i(n,2) \quad \ldots \quad \mathbf{c}_i(n,M_i)\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. Bulunan bu katsayılar (2.6)'da verildiği gibi çoklu-hızlı sistemin periyodu ile periyodiktir. Yani, her n anında filtre katsayılarının bulunması gerekmemektedir. İlk K anındaki filtre katsayıları bulunduktan sonra, daha sonraki filtre katsayıları (2.6)'ya göre hesaplanır.

Çoklu-hızlı Wiener filtresinin çıkışındaki $\hat{x}(n)$ işareti K ile periyodik olarak zamanla değiştiği için, en küçük ortalama karesel kestirim hatası da periyodik olarak zamanla değişecektir,

$$\begin{aligned} &E\left\{\varepsilon_{\min}(n-\Delta)\right\} = r_x(0) - \mathbf{r}_{yx}^H(n)\mathbf{R}_y^{-1}(n)\mathbf{r}_{yx}(n) \\ &E\left\{\varepsilon_{\min}(n)\right\} = E\left\{\varepsilon_{\min}(n+K)\right\}, \quad \text{tüm } n \text{ için.} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.2 En küçük ortalama kareler (LMS) yöntemi

Çoklu-hızlı Wiener filtresi ortalama karesel hata açısından en iyi sonucu vermesine karşılık, Wiener filtre katsayılarının hesaplanması için özilinti matrisinin ve çapraz ilinti vektörünün değerlerinin önceden bilinmesi gerekmektedir. Ayrıca Wiener filtresi, matris tersi alınmasına da ihtiyaç duymaktadır. Bu dezavantajları ortadan kaldırmak için en küçük ortalama kareler yöntemi kullanılabilir [10].

Çoklu-hızlı sistemler için kullanılan en küçük ortalama kareler yönteminde filtre katsayıları, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretiyle filtrenin eğitilmesi sonucunda bulunmaktadır. Filtre katsayıların uyarlamalı hesaplanmasına başlanmadan önce filtre katsayılarının ilk değerleri aşağıdaki gibi seçilir,

$$\hat{\mathbf{c}}(-1) = \hat{\mathbf{c}}(-2) = \ldots = \hat{\mathbf{c}}(-K) = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Daha sonra $n = -K$ değerinden başlayarak filtre katsayıları özyinelemeli (recursive) olarak aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\begin{aligned} e(n) &= x(n-\Delta) - \hat{\mathbf{c}}^T(n)\mathbf{y}(n) \\ \hat{\mathbf{c}}(n+K) &= \hat{\mathbf{c}}(n) + \alpha\, e(n)\mathbf{y}^*(n). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Bu denklemlerde adım boyu α ile gösterilmiştir ve aşağıdaki gibi seçilmelidir,

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}. \tag{2.16}$$

$\lambda_{\max}$ ise (2.10)'da verilen çoklu-hızlı gözlemlere ilişkin periyodik olarak zamanla değişen özilinti matrisinin tüm özdeğerlerinin en büyüğüdür. (2.15)'te verildiği gibi n anındaki filtre katsayıları, kestirim hatası ve gözlemler kullanılarak, $n + K$ anındaki filtre katsayıları bulunmaktadır. Bunun nedeni, kestirilmeye çalışılan işaretle çoklu-hızlı gözlemlerin ortak geniş anlamda K ile çevrimsel durağan olmasıdır.

En küçük ortalama kareler yönteminde durağan duruma gelindiğinde, elde edilen filtre katsayılarının beklenen değerleri Wiener filtresinin katsayılarına eşit olacaktır. Buna karşılık, durağan durumdaki ortalama karesel hata, (2.13)'te verilen en küçük ortalama karesel hatadan daha fazla olacaktır. En küçük kareler yönteminde adım boyunu küçültmek, ortalama karesel hatayı azaltmaktadır. Fakat bu durumda yakınsama hızı da azalmaktadır [28].

2.3.3 En küçük kareler (LS) yöntemi

En küçük ortalama kareler yönteminin başarımı çoğu zaman tatmin edici değildir. Bu gibi durumlarda, matris tersine ihtiyaç duymasına rağmen en küçük kareler yöntemi tercih edilebilir. En küçük kareler yönteminde Wiener-Hopf denklemleri, istatistiksel ortalamalar yerine zamansal ortalamalar kullanılarak ifade edilmekte ve çözülmektedir. Çoklu-hızlı sistemler için (2.6)'da verilen doğrusal ve periyodik olarak

zamanla değişen filtrenin katsayıları, en küçük kareler yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir [9],

$$\hat{\mathbf{c}}(n) = \left(\mathbf{Y}^T(n)\right)^+ \mathbf{x}(n-\Delta)$$

$$\mathbf{Y}(n) = \left[\mathbf{y}(n) \quad \mathbf{y}(n-K) \quad \ldots \quad \mathbf{y}\left(n - \left\lfloor \frac{n-M+1}{K} \right\rfloor K\right)\right] \tag{2.17}$$

$$\mathbf{x}^T(n-\Delta) = \left[x(n-\Delta) \quad x(n-\Delta-K) \quad \ldots \quad x\left(n-\Delta-\left\lfloor \frac{n-M+1}{K} \right\rfloor K\right)\right].$$

Bu denklemlerde $^+$ Moore-Penrose sözde ters operatörünü temsil etmektedir. $\mathbf{Y}(n)$ matrisini oluştururken kovaryans pencereleme varsayılmış ve

$$M = \max K_i M_i \qquad i = 1, 2, ..., L \tag{2.18}$$

olarak tanımlanmıştır. Çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretiyle eğitimin $N_x - 1$ anına kadar olduğunu varsayarsak, periyodik olarak zamanla değişen filtre katsayıları $n = N_x + \Delta - 1, N_x + \Delta - 2, \ldots, N_x + \Delta - K$ değerleri için (2.17)'deki denklemler kullanılarak hesaplanacaktır. Elde edilen katsayıların beklenen değerleri ise Wiener filtresinin katsayılarına eşit olacaktır, diğer bir deyişle kestirim yansızdır.

2.3.4 Doğrusal en küçük ortalama karesel hata (LMMSE) kestirimi

Buraya kadar verilen yöntemlerde, çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ bilgi işaretinin örnekleri sırayla kestirilmektedir. $x(n)$ işaretinin kestirelecek örnek sayısı fazla değilse, kestirim toplu şekilde de yapılabilir.

$x(n)$ işaretinin ilk N_x örneğinin kestirilmek istendiğini, bunun için de her bir kanalın çıkışındaki çoklu-hızlı işaretin ilk N_{yi} örneğinin kullanılacağını varsayalım. Kestirilmek istenen işareti ve kullanılacak olan çoklu-hızlı gözlemleri aşağıdaki gibi ifade edersek,

$$\mathbf{x}^T = \left[x(N_x - 1) \quad x(N_x - 2) \quad \ldots \quad x(0)\right]$$

$$\mathbf{y}^T = \left[\mathbf{y}_1^T \quad \mathbf{y}_2^T \quad \ldots \quad \mathbf{y}_L^T\right] \tag{2.19}$$

$$\mathbf{y}_i^T = \left[y_i(N_{yi} - 1) \quad y_i(N_{yi} - 2) \quad \ldots \quad y_i(0)\right]$$

ortalama karesel kestirim hatalarının toplamını en küçük yapan doğrusal kestirici

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{y}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{R}_{xy} = E\left\{\mathbf{x}\mathbf{y}^{H}\right\} \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$\mathbf{R}_{y} = E\left\{\mathbf{y}\mathbf{y}^{H}\right\}$$

şeklinde olacaktır [5,14]. Bu durumda, toplam ortalama karesel kestirim hatası ise kestirim hatalarının özilinti matrisinin izidir

$$E\left\{\left\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right\|_2^2\right\} = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{R}_x - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{R}_{xy}^{H}\right\}. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Bu doğrusal kestirici, **x** ve **y** vektörleri ortak Gauss dağılımlı olduğunda ortalama karesel hata açısından olabilecek en iyi kestiricidir. Aksi takdirde bu kestirici ortalama karesel hata açısından olabilecek en iyi doğrusal kestiricidir.

Buraya kadar açıklanan yöntemler şunu göstermektedir: Çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ bilgi işareti, çoklu-hızlı ve gürültülü gözlemlerden zamansal veya istatistiksel ortalamalar kullanılarak kestirilebilmektedir. Kestirimde zamansal ortalamaların kullanılabilmesi için, $x(n)$ bilgi işaretinin yeteri kadar değerinin alıcıda önceden bilinmesi gerekmektedir. Kestirimde istatistiksel ortalamalar kullanılmak istendiğinde ise, kanal filtrelerinin, alt-örnekleyici oranlarının ve gürültünün ikinci dereceden istatistiksel özelliklerinin yanı sıra $x(n)$ bilgi işaretinin özilinti fonksiyonunun da önceden bilinmesi gerekmektedir.

Birçok uygulamada, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin yeteri kadar örneğinin veya özilinti fonksiyonunun önceden bilinmesi mümkün değildir. Bu gibi durumlarda, zamansal ortalamalara dayalı yöntemler kullanılamaz. İstatistiksel ortalamalara dayalı yöntemlerin kullanılabilmesi için ise, öncelikle çoklu-hızlı gözlemlerden sistemin girişindeki bilgi işaretinin özilinti fonksiyonunun kestirilmesi gerekmektedir.

2.4 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Giriş İşaretinin Güç Spektrumunun Kestirimi

Algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemlerde karşılaşılan en önemli problemlerden bir diğeri ise, gürültülü çoklu-hızlı gözlemlerden çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesidir. Bilindiği gibi bir işaretin özilinti fonksiyonunun Fourier dönüşümü, o işaretin güç spektrumunu vermektedir,

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-jk\omega}. \qquad \textbf{(2.22)}$$

Gerçel ve pozitif olan güç spektrumu, işaretin gücünün frekansa göre dağılımını vermektedir. Özilinti fonksiyonu ayrık ve aperiyodik olduğundan, güç spektrumu 2π ile periyodiktir ve süreklidir.

Çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin güç spektrumu $P_x(e^{j\omega})$, gürültülü çoklu-hızlı gözlemlere ve gürültüye ilişkin özilinti fonksiyonlarının yardımıyla aşağıdaki şekilde belirlenebilir,

$$P_x(e^{j\omega}) > 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_x(e^{j\omega}) G_i(e^{j\omega}) e^{jK_i k\omega} d\omega = r_{yi}(k) - r_{vi}(K_i k) \qquad \textbf{(2.23)}$$

$i = 1, 2, \ldots, L.$

Bu problemde eşitlik kısıtını belirleyen $G_i(e^{j\omega})$ spektrumu, (2.3)'te tanımlanan $g_i(k)$ fonksiyonun Fourier dönüşümüdür. $x(n)$ bilgi işaretinin güç spektrumu belirlenirken çoklu-hızlı gözlemlere ilişkin çapraz ilinti fonksiyonları da kullanılabilir. Fakat çapraz ilinti fonksiyonlarının kullanılması pratikte bazı güçlükler ortaya çıkarmaktadır. Öncelikle, çapraz ilinti fonksiyonlarının çoklu-hızlı gözlemlerden hesaplanması için çoklu-hızlı gözlemlerin eş-zamanlılığının sağlanması gerekmektedir. Eş-zamanlılık (synchronization) sağlansa bile, çapraz ilinti fonksiyonlarının kestirimindeki karesel hata, özilinti fonksiyonlarının kestirimindeki karesel hataya göre çok daha fazladır [15]. Bu nedenle, çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin güç spektrumunun belirlenmesinde çoklu-hızlı gözlemlere ilişkin çapraz ilinti fonksiyonlarını kullanmamayı tercih ediyoruz.

Alt-örnekleyicilerin varlığı nedeniyle (2.23)'te verilen ters problemin çoğunlukla sonsuz sayıda çözümü bulunmaktadır [13]. Bu gibi durumlarda çözümü teke indirmek için, güç spektrumu üzerinde fazladan bir kısıt tanımlanmalıdır.

(2.23)'te verilen ters problemin çözümünde karşılaşılan bir diğer zorluk ise, gürültülü çoklu-hızlı gözlemlere ilişkin özilinti fonksiyonlarının sonlu uzunluktaki işaretlerden kestirilmesi durumunda ortaya çıkmaktadır,

$$\hat{r}_{yi}(k) = \frac{1}{N_{yi} - k} \sum_{n_i=0}^{N_{yi}-1} y_i(n_i) y_i^*(n_i - k). \qquad \textbf{(2.24)}$$

Bu durumda, eğer çoklu-hızlı gözlemlere ilişkin özilinti fonksiyonlarının kestirimleri tutarlı değilse problemin hiçbir çözümü de olmayabilir.

2.4.1 Maksimum entropi yöntemi

Kötü koşullanmış olan (2.23)'teki ters problemin çözümünde maksimum entropi yöntemi kullanılabilir [5]. Maksimum entropi yönteminde, sonsuz elemanlı çözüm kümesi içinden entropisi en fazla olan çözüm seçilmektedir. Entropi rastgeleliğin ölçüsü olduğundan, problem üzerinde tanımlanan fazladan kısıt mümkün olabildiğince az varsayım içerecektir [29-30].

Çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ bilgi işaretinin Gauss dağılımlı olduğunu varsayarsak, çoklu-hızlı sistemler için maksimum entropi güç spektrumu kestirim problemini aşağıdaki koşul ve kısıtlarla tanımlayabiliriz,

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \arg\max \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln P_x(e^{j\omega}) d\omega \qquad \textbf{(2.25.a)}$$

$$P_x(e^{j\omega}) > 0 \qquad \textbf{(2.25.b)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_x(e^{j\omega}) G_i(e^{j\omega}) e^{jK_i k\omega} d\omega = r_{yi}(k) - r_{vi}(K_i k) \qquad \textbf{(2.25.c)}$$

$$i = 1, 2, ..., L.$$

Entropi fonksiyonu içbükey (concave) olduğundan, (2.23)'te verilen ters problemin çözümü mevcut olduğunda maksimum entropi yöntemiyle tek bir çözüm elde edilecektir. Bu tek çözüm Lagrange çarpanları yardımıyla aşağıdaki gibi bulunabilir [15],

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{L} G_i(e^{j\omega}) \Lambda_i(e^{jK_i\omega})} \qquad \textbf{(2.26)}$$

$$\Lambda_i(e^{j\omega}) = \sum_k \lambda_i(k) e^{jk\omega}, \quad \lambda_i(k) = \lambda_i^*(-k).$$

Bu denklemlerde, Lagrange çarpanları $\lambda_i(k)$ ile gösterilmektedir. Maksimum entropi güç spektrumunu belirleyen bu çarpanların (2.25.b) ve (2.25.c)'deki kısıtları sağlayacak şekilde seçilmeleri gerekmektedir.

Eğer gürültülü çoklu-hızlı gözlemlere ait özilinti değerleri sonlu uzunluklu işaretlerden hesaplanırsa, kestirilen özilinti değerleri tutarlı olmayabilir. Yani, (2.23)'te

verilen ters problemin çözüm kümesi boş küme olabilir. Bu durumda Lagrange katsayılarının sağlaması gereken (2.25.c)'deki eşitlik kısıtları en küçük kareler ilkesine göre aşağıdaki gibi gevşetilebilir [15],

$$\lambda_i(k) = \arg\min \sum_{i=1}^{L} \sum_{k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G_i(e^{j\omega}) e^{jK_i k\omega}}{\sum_{i=1}^{L} G_i(e^{j\omega}) \Lambda_i(e^{jK_i\omega})} d\omega - \hat{r}_{yi}(k) + r_{vi}(K_i k) \right)^2 \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$\Lambda_i(e^{j\omega}) = \sum_k \lambda_i(k) e^{jk\omega}, \quad \lambda_i(k) = \lambda_i^*(-k).$$

Böylelikle, (2.26)'da verilen maksimum entropi güç spektrumu (2.25.b) ve (2.27)'deki ifadeleri sağlayacak şekilde seçildiğinde çözüm genelleştirilmiş olacaktır. Yani çözümün varlığı garanti altına alınacaktır.

(2.26)'da verilen maksimum entropi güç spektrumunun sayısal olarak hesaplanması, çözüm için gerekli olan integral hesaplamaları nedeniyle oldukça güçtür. Çözüm ancak diferansiyel denklem çözücü paketlerin yardımıyla hesaplanabilmektedir [19]. Bu nedenle, maksimum entropi çözümünü hesaplamak için parametrik güç spektrumu kestirim yöntemleri kullanılabilir. Lagrange katsayılarının bir fonksiyonu olan $\Lambda_i(e^{j\omega})$'nın spektral ayrışımı sağladığı varsayılarak,

$$\Lambda_i(e^{j\omega}) = \left| A_i(e^{j\omega}) \right|^2 \qquad \textbf{(2.28)}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle, öz bağlanımlı ve kayan ortalamalı (ARMA) süreçler için kullanılan güç spektrumu kestirim yöntemlerinin maksimum entropi çözümünün hesaplanmasında kullanılması mümkün olmaktadır. Fakat (2.28)'de yapılan varsayım, maksimum entropi probleminin çözümünde yaklaşıklığa neden olmaktadır. Bunun nedeni, Lagrange katsayılarının (2.28)'deki ifadeyi her zaman sağlamamasıdır [15].

2.4.2 İzdüşümler yöntemi

Çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin güç spektrumunu kestirmek için kullanılan bir diğer yöntem de izdüşümler yöntemidir [5]. Bu yöntemde, sonsuz elemanlı çözüm kümesi içinden tek bir çözüm elde etmek için spektral uzaklık fonksiyonları kullanılmaktadır,

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \arg\min\ D\left\{P_x(e^{j\omega}), P_0(e^{j\omega})\right\}$$

$$P_x(e^{j\omega}) > 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_x(e^{j\omega})G_i(e^{j\omega})e^{jK_i k\omega}d\omega = r_{yi}(k) - r_{vi}(K_i k) \qquad \textbf{(2.29)}$$

$$i = 1,\ 2,\ ...,\ L.$$

Bu denklemlerde, D spektral uzaklık fonksiyonunu ve $P_0(e^{j\omega})$ da çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin güç spektrumunun ön tahminini temsil etmektedir. Çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin güç spektrumu ile ilgili ön tahminin mevcut olmadığı durumlarda, $P_0(e^{j\omega})$ aşağıdaki gibi seçilmektedir,

$$P_0(e^{j\omega}) = 1, \quad 0 \le \omega < 2\pi. \qquad \textbf{(2.30)}$$

Spektral uzaklık fonksiyonu olarak, aşağıdaki dışbükey (convex) fonksiyonlar yaygın olarak kullanılmaktadır,

$$D_1\left\{P(e^{j\omega}), P_0(e^{j\omega})\right\} = \int_0^{2\pi}\left(P(e^{j\omega}) - P_0(e^{j\omega})\right)^2 d\omega$$

$$D_2\left\{P(e^{j\omega}), P_0(e^{j\omega})\right\} = \int_0^{2\pi}\left(P(e^{j\omega})\ln\frac{P(e^{j\omega})}{P_0(e^{j\omega})} + P_0(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})\right)d\omega \qquad \textbf{(2.31)}$$

$$D_3\left\{P(e^{j\omega}), P_0(e^{j\omega})\right\} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{P(e^{j\omega})}{P_0(e^{j\omega})} - \ln\frac{P(e^{j\omega})}{P_0(e^{j\omega})} - 1\right)d\omega.$$

Bu fonksiyonlardan, D_1 Euclid uzaklığı, D_2 Kullback-Leibler ıraksaklığı, D_3 ise Burg çapraz entropisidir. Güç spektrumu ile ilgili ön tahminin ve spektral uzaklık fonksiyonunun seçimi, doğal olarak bulunacak çözümü etkilemektedir.

İzdüşümler yönteminde çözüm yine Lagrange katsayıları kullanılarak bulunabilir. İzdüşümler yönteminin asıl avantajı ise, (2.23)'te verilen problemin çözümünün paralel hesaplama yöntemleriyle bulunmasına olanak sağlamasıdır. Literatürdeki yıldız algoritmasında [18], güç spektrumunun tahmini her bir algılayıcı için ayrı ayrı güncellenmektedir. Daha sonra tahminler birleştirilmekte ve yeni bir tahmin oluşturulmaktadır. Bulunan yeni tahmin tekrar algılayıcılara iletilmekte ve döngü, algoritma yakınsaya kadar devam ettirilmektedir.

2.5 Çoklu-Hızlı Sistemlerde Varış Zamanı Farkı (TDOA) Kestirimi

Bu bölümde incelenek olan son problem, çoklu-hızlı sistemlerde kanallar arası varış zamanı farkının kestirimi problemidir. Sistemin girişindeki bilgi işaretinin gürültülü çoklu-hızlı gözlemlerden istatistiksel ortalamalar kullanılarak kestirilebilmesi, bu alt-bölümde incelenecek olan problemin doğru olarak çözülmesine bağlıdır.

Analizi kolaylaştırmak için, alt-örnekleyici oranları $K_1 = K_2 = 2$ olan iki kanallı bir çoklu-hızlı sistem düşünelim,

$$\begin{aligned} y_1(n_1) &= x_1(2n_1) + v_1(2n_1) \\ y_2(n_1) &= x_2(2n_1 - \Delta_2) + v_2(2n_1). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Toplamsal gürültü işaretlerinin birbirleriyle ilintisiz olduğunu ve kanal filtrelerinin

$$\begin{aligned} \measuredangle G_{12}(e^{j\omega/2}) &= \measuredangle G_{12}(e^{j(\omega-2\pi)/2}) \\ G_{12}(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega}) H_2^*(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{2.33}$$

şeklinde verilen faz koşulunu sağladığını varsayarak, iki kanal arasındaki varış zamanı farkı Δ_2'yi yansız olarak aşağıdaki gibi kestirilebiliriz [17],

$$\hat{\Delta}_2 = \arg\max \int_0^{2\pi} \cos\left\{ -\Delta_2 \frac{\omega}{2} - \left(\measuredangle P_{y1y2}(e^{j\omega}) \right) + \left(\measuredangle G_{12}(e^{j\omega/2}) \right) + \gamma(\omega) \right\} d\omega. \tag{2.34}$$

Bu denklemde, $\measuredangle$ faz bilgisini göstermekte ve çapraz güç spektrumu

$$\begin{aligned} P_{y1y2}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{y1y2}(k) e^{-jk\omega} \\ r_{y1y2}(k) &= E\left\{ y_1(n_1) y_2^*(n_1 - k) \right\} \end{aligned} \tag{2.35}$$

olarak tanımlanmaktadır. Düzeltme terimi ise

$$\gamma(\omega) = \measuredangle \left\{ P_x(e^{j\omega/2}) \left| G_{12}(e^{j\omega/2}) \right| + e^{j\pi\Delta_2} P_x(e^{j(\omega-2\pi)/2}) \left| G_{12}(e^{j(\omega-2\pi)/2}) \right| \right\} \tag{2.36}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Varış zamanı farkı Δ_2 çift tam sayı olduğunda, $\gamma(\omega)$ düzeltme terimi 0 olmaktadır. Varış zamanı farkı tek tam sayı olduğunda ise, düzeltme terimi çoğu zaman 0 olmaktadır. Varış zamanı farkının tam sayı olmadığı durumlarda, giriş işaretinin güç spektrumunun önceki alt-bölümde verilen yöntem-lerden biriyle kestirilmesi ve varış zamanı farkı hesabında düzeltme teriminin göz önüne alınması gerekmektedir.

Varış zamanı farkı kestirim probleminin çözümünde karşılaşılan asıl sorun ise, çapraz güç spektrumunun gürültülü ve sonlu uzunluklu çoklu-hızlı gözlemlerden hesaplanmasıdır. Bilindiği gibi, zamansal ortalamalar kullanılarak çapraz ilinti fonksiyonu kestirilebilmektedir. Kestirilen çarpaz ilinti fonksiyonunun Fourier dönüşümü de çapraz güç spektrumunun kestirimini vermektedir. Fakat bu kestirimin güvenilir olması için, gözlemlerin yeterince uzun olması gerekmektedir.

3. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN UYARLAMALI DİK KAFES FİLTRESİ

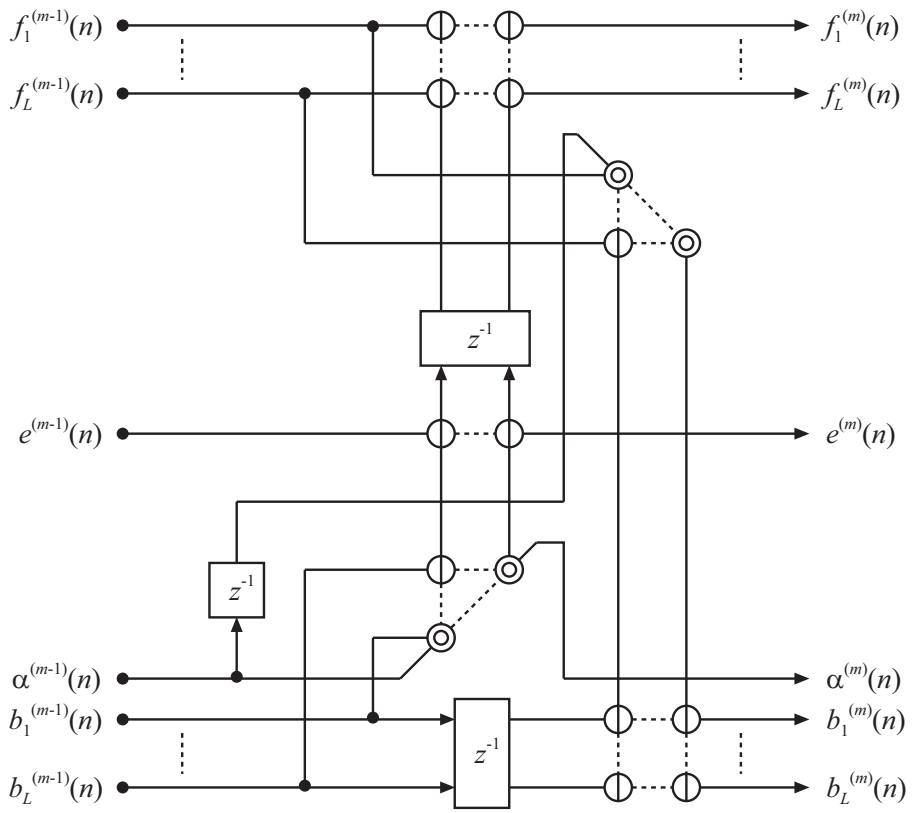
3.1 Motivasyon

Önceki bölümde açıklandığı gibi, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin özilinti fonksiyonunun önceden bilinemediği, sadece bilgi işaretinin değerlerinin bir kısmının önceden bilinebildiği durumlarda, çoklu-hızlı işaret kestirim problemi zamansal ortalamalar kullanılarak çözülebilir. Bu gibi durumlarda yüksek başarım elde etmek için en küçük kareler yöntemi kullanılmaktadır. Ayrıca, Wiener filtresinin ve doğrusal en küçük ortalama karesel hata kestiriminin ihtiyaç duyduğu istatistiksel ortalamalar, sonlu uzunluklu işaretlerden kestirilerek bu iki başarılı yöntemin de problemin çözümünde kullanılabilmesi sağlanabilir. Fakat tüm bu yöntemlerin işlem yükü oldukça fazladır. Bununla birlikte, matris tersine ihtiyaç duyulduğundan sayısal kararlılık da olumsuz yönde etkilenmektedir.

İşlem yükünü azaltmak ve sayısal kararlılığı arttırmak için, en küçük kareler yönteminin gerçeklenmesinde dikleştirici kafes (lattice) yapılar kullanılabilir. Dikleştirici kafes yapıdaki gerçeklemede, kestiricinin girişindeki işaret vektörünün elemanları Gram-Schmidt veya benzeri yöntemlerle birbirlerine dikleştirilmekte, böylece transversal (enine) gerçeklemenin aksine sadece skaler işlemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Sonuç olarak işlem yükü azalmakta, matris tersine ihtiyaç duyulmadığından sayısal kararlılık da artmaktadır. Ayrıca, dikleştirici kafes yapılar modüler olduğundan, dikleştirici kafes yapıdaki gerçeklemeler çok büyük çaptaki tümleşim (VLSI) uygulamaları için daha uygundur [28].

3.2 Çok Kanallı Uyarlamalı Dik Kafes Filtresi

Çoklu-hızlı sistemde, alt-örnekleme oranlarının $K_1 = K_2 = ... = K_L = 1$ olduğunu düşünelim. Bu durumda, sistemin girişindeki bilgi işaretini en küçük kareler ilkesine göre kestiren L-kanallı modüler dik kafes filtresinin bir hücresi Şekil 3.1'de verilmiştir [31].

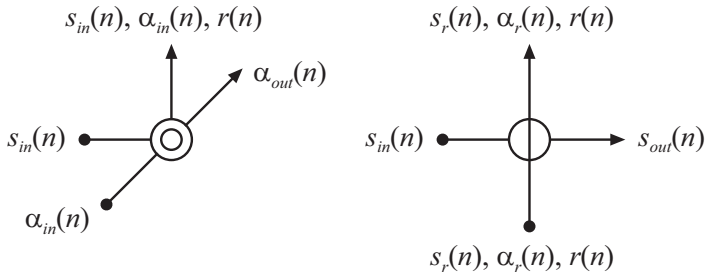


Şekil 3.1 : *L*-kanallı modüler dik kafes filtresinin *m*. hücresi.

Yukarıdaki şekilde, ileri yöndeki öngörü hataları $f_i(n)$ ile, geri yöndeki öngörü hataları $b_i(n)$ ile, kestirim hatası $e(n)$ ile, olabilirlik değişkeni de $\alpha(n)$ ile ifade edilmektir. Ayrıca, işleme hücreleri çift yuvarlak ile, ortogonal işleme hücreleri de tek yuvarlak ile gösterilmektedir. Her bir dik kafes filtresi hücresinde, ileri ve geri yöndeki öngörü hatalarını dikleştirmek için toplam $L^2 - 2L$ tane ortogonal işleme hücresi, $2L$ tane de işleme hücresi kullanılmaktadır. Ayrıca, kestirim hatasını güncellemek için L tane, ileri ve geri yöndeki öngörü hatalarını güncellemek için ise toplam $2L^2$ tane ortogonal işleme hücresi kullanılmaktadır. Sıralı olarak birbirlerine bağlanan dik kafes filtresi hücreleri için başlangıç koşulları ise

$$
\begin{aligned}
& e^{(0)}(n) = x(n-\Delta) \\
& \alpha^{(0)}(n) = 1 \\
& f_i^{(0)}(n) = b_i^{(0)}(n) = y_i(n) \\
& i = 1,\ 2,\ ...,\ L
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.1)}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer M_i ile gösterilen filtre dal sayıları birbirlerinden farklıysa, filtre hücrelerinde küçük değişiklikler yapılarak dik kafes filtresi oluşturulmaktadır [31].



Şekil 3.2 : İşleme ve ortogonal işleme hücreleri.

Çok kanallı dik kafes filtresinin en önemli özelliği, kestirim hatasını belirleyen geri yöndeki öngörü hatalarının tümünü dikleştirmesidir [32]. Bu sayede, sadece skaler işlemlere gerek duyulmaktadır. Uyarlamalı olarak yapılan dikleştirmenin ve kestirimin ayrıntıları, kullanılacak olan uyarlamalı en küçük kareler algoritmasına göre değişiklik göstermektedir. Bu algoritma sonsal hatayı güncelleyecek şekilde seçildiğinde, Şekil 3.2'de verilen işleme ve ortogonal işleme hücrelerinin giriş-çıkış ilişkileri aşağıdaki gibi belirlenebilir [33],

$$r(n) = \eta r(n-1) + \frac{|s_{in}(n)|^2}{\alpha_{in}(n)} \qquad \textbf{(3.2.a)}$$

$$\alpha_{out}(n) = \alpha_{in}(n) - \frac{|s_{in}(n)|^2}{r(n)} \qquad \textbf{(3.2.b)}$$

$$k(n) = \eta k(n-1) + \frac{s_{in}^*(n) s_r(n)}{\alpha_r(n)} \qquad \textbf{(3.3.a)}$$

$$s_{out}(n) = s_{in}(n) - \frac{k^*(n) s_r(n)}{r(n)}. \qquad \textbf{(3.3.b)}$$

Bu denklemlerde, algoritmanın hafızasını belirleyen unutma faktörü η ile gösterilmektedir ve $0 < \eta \leq 1$ şeklinde seçilmelidir. Algoritmanın döngüsü başlatılmadan önce, karesel hata değişkeninin başlangıç koşulu $r(-1) = \delta$ ve kazanç değişkenin başlangıç koşulu $k(-1) = 0$ olarak belirlenebilir. Düzenleme parametresi olarak adlandırılan ve pozitif değerli olan δ parametresinin, işaret-gürültü oranına göre seçilmesi faydalı olacaktır. Algoritma, sonsal hatayı bulmaya yönelik olduğundan, bir dik kafes filtresi hücresinin çıkışındaki karesel hata ise şu şekilde bulunabilir,

$$\varepsilon^{(m)}(n-\Delta)=\left|\frac{e^{(m)}(n)}{\alpha^{(m)}(n)}\right|^2 . \qquad \textbf{(3.4)}$$

3.3 Periyodik Zamanla Değişen Çok Kanallı Uyarlamalı Dik Kafes Filtresi

Çok kanallı dik kafes filtresinde bazı değişiklikler yapılarak bu filtrenin çoklu-hızlı sistemlerde işaret kestirimi için kullanılması sağlanabilir. Çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretiyle, sistemin çıkışındaki gözlemlerin örnekleme hızları aynı olmadığından, çoklu-hızlı gözlemlerin üst-örneklendikten sonra çok kanallı dik kafes filtresine uygulanmaları gerekmektedir,

$$f_i^{(0)}(n)=b_i^{(0)}(n)=\begin{cases} y_i(n/K_i), & n=0,\ K_i,\ 2K_i,\ ... \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad \textbf{(3.5)}$$

$i=1,\ 2,\ ...,\ L.$

Böylelikle, çoklu-hızlı gözlemlerin çok kanallı dik kafes filtresi tarafından zamanda ardışık olarak işlenmesi mümkün hale gelecektir.

Çok kanallı dik kafes filtresinde yapılması gereken ikinci değişiklik, filtrenin girişine uygulanacak olan arzu edilen işaretle üst-örneklenmiş çoklu-hızlı gözlemlerin ortak geniş anlamda durağan olmamasından kaynaklanmaktadır. Bu işaretler çoklu-hızlı sistemin periyodu K ile ortak geniş anlamda çevrimsel durağan olduğundan, ortalama karesel hatayı en küçük yapmak için işleme ve ortogonal işleme hücrelerindeki uyarlamalar aşağıdaki gibi yapılmalıdır,

$$r(n)=\eta r(n-K)+\frac{\left|s_{in}(n)\right|^2}{\alpha_{in}(n)} \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$k(n)=\eta k(n-K)+\frac{s_{in}^*(n)s_r(n)}{\alpha_r(n)}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Başlangıç koşulları ise, $-K \le n < 0$ için $r(n)=\delta$ ve $k(n)=0$ şeklinde belirlenebilir. Çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin kestirimi için kullanılabilecek olan bu filtrenin girişine üst-örneklenmiş çoklu-hızlı gözlemler uygulandığından, işleme ve ortogonal işleme hücrelerinde periyodik olarak 0 ile çarpım veya toplama işlemlerinin yapılması gerekmektedir. Bu durumdan kaynaklanan gereksiz işlem yükünü azaltmak için işleme hücrelerinde

$\mathrm{s}_{in}(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(n)$ hesaplanmaz, $\alpha_{out}(n) = \alpha_{in}(n)$

ortogonal işleme hücrelerinde ise

$\mathrm{s}_{in}(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(n)$ hesaplanmaz, $s_{out}(n) = 0$

$\mathrm{s}_{r}(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(n)$ hesaplanmaz, $s_{out}(n) = s_{in}(n)$

sadeleştirmeleri yapılmalıdır. Böylelikle, çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin kestirimi için kullanılan en küçük kareler yöntemi, uyarlamalı dik kafes yapıda verimli olarak gerçeklenebilir.

3.4 Benzetim Sonuçları

3.4.1 Örnek 3.1

İlk örnekte iki kanallı bir çoklu-hızlı sistem ele alınmaktadır. Çoklu-hızlı sistemin kanal filtreleri

$$H_1(z) = 0.1129 + 0.2898z^{-1} + 0.8981z^{-2} + 0.2898z^{-3} + 0.1129z^{-4}$$

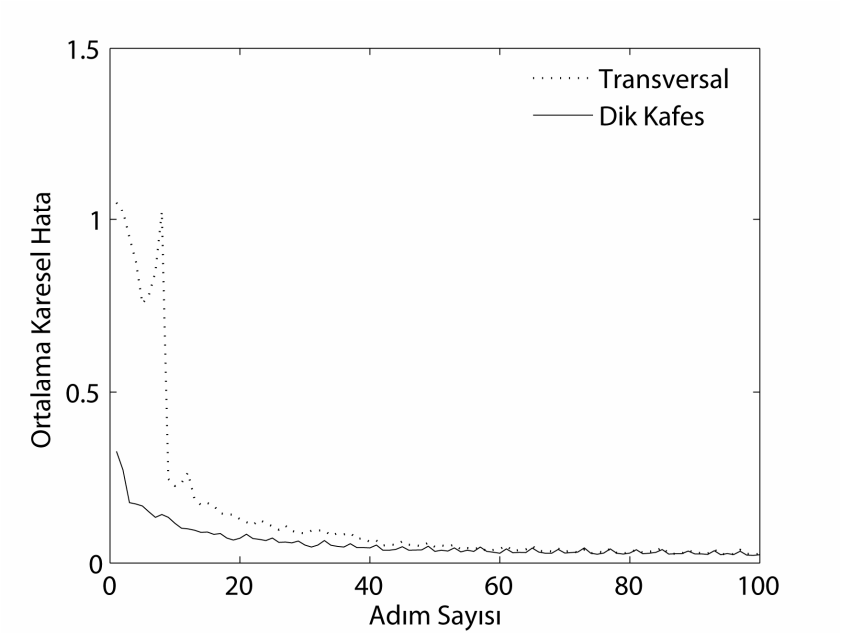
$$H_2(z) = 0.4559 - 0.1377z^{-1} - 0.7982z^{-2} - 0.1377z^{-3} - 0.3423z^{-4}$$

ve alt-örnekleyici oranları $K_1 = 2$, $K_2 = 4$ şeklindedir. Bu sistemin girişine sıfır ortalamalı, Gauss dağılımlı, birim güçlü ve model parametreleri $a_1 = 1.75$, $a_2 = 0.95$ olan bir öz-bağlanımlı süreç uygulanmaktadır. Toplamsal gürültü bileşenleri ise birbirlerinden bağımsız, sıfır ortalamalı, Gauss dağılımlı ve 0.01 güçlü beyaz gürültü süreçleri olarak modellenmiştir.

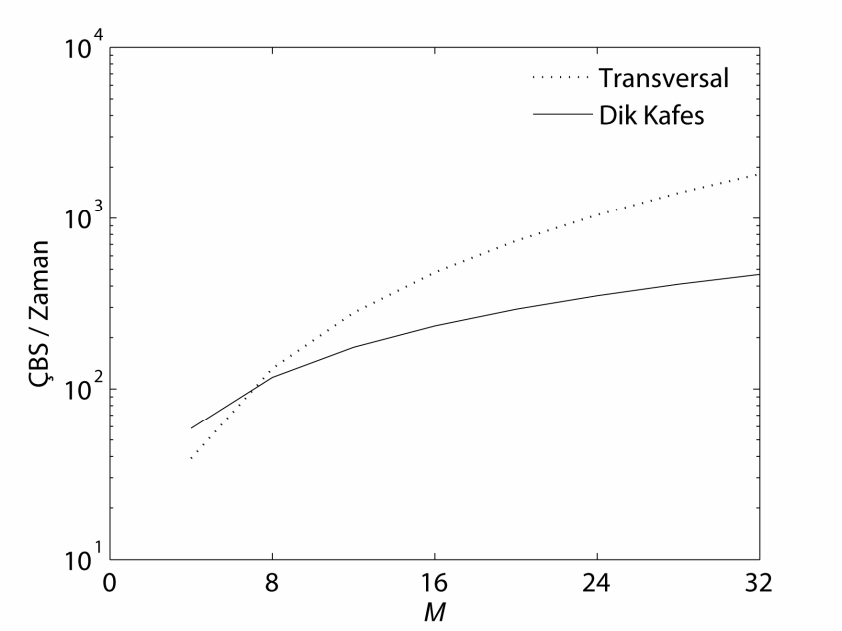
Alıcıda $y_1(n_1)$ işareti K_1 ile, $y_2(n_2)$ işareti de K_2 ile üst-örneklenip $x(n - 6)$ işaretini kestirmek için $M = 16$ hücreli ($M = 2M_1 = 4M_2$), $K = 4$ ile periyodik, uyarlamalı en küçük kareler dik kafes filtresine uygulanmaktadır. Benzetim sonuçları için 500 bağımsız gerçekleme varsayılmış, $\eta = 0.995$ ve $\delta = 1$ seçilmiştir.

Önerdiğimiz uyarlamalı dik kafes filtresinin öğrenme eğrisi Şekil 3.3'te verilmektedir. Karşılaştırma için, Bölüm 2.3.3'te incelenen çoklu-hızlı en küçük kareler filtresi uyarlamalı olarak gerçeklenmiştir. Transversal yapıda olan bu gerçeklemenin öğrenme eğrisi de Şekil 3.3'te verilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, dik kafes yapı transversal yapıya göre biraz daha hızlı yakınsamaktadır. Her iki yapının birim zamanda ihtiyaç duyduğu çarpma-bölme sayısı da Şekil 3.4'te verilmektedir. Görüldüğü gibi, $M \geq 8$ için dik kafes yapı işlem yükü açısından daha

avantajlıdır. Çünkü, dik kafes yapının işlem yükü M ile doğru orantılıyken, transversal yapının işlem yükü M^2 ile doğru orantılıdır.



Şekil 3.3 : Örnek 3.1 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin öğrenme eğrileri.



Şekil 3.4 : Örnek 3.1 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin birim zamandaki toplam çarpma-bölme sayıları (ÇBS).

3.4.2 Örnek 3.2

Bu örnekte ise üç kanallı bir çoklu-hızlı sistem incelenmektedir. Bu çoklu-hızlı sistemin kanal filtreleri

$$H_1(z) = 0.1129 + 0.2898z^{-1} + 0.8981z^{-2} + 0.2898z^{-3} + 0.1129z^{-4}$$

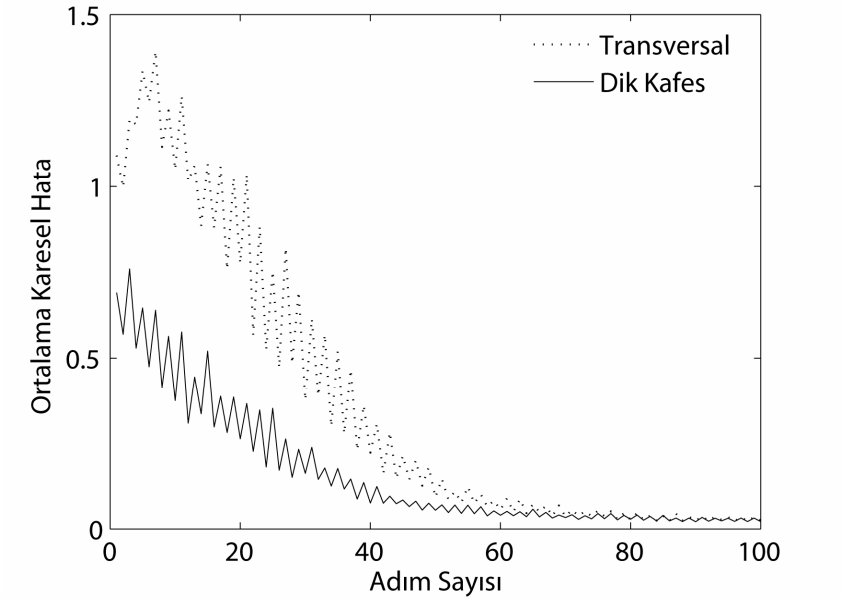
$$H_2(z) = 0.4780 + 0.0697z^{-1} + 0.7303z^{-2} + 0.0697z^{-3} + 0.4780z^{-4}$$

$$H_3(z) = 0.3589 + 0.1444z^{-1} + 0.8370z^{-2} + 0.1444z^{-3} + 0.3589z^{-4}$$

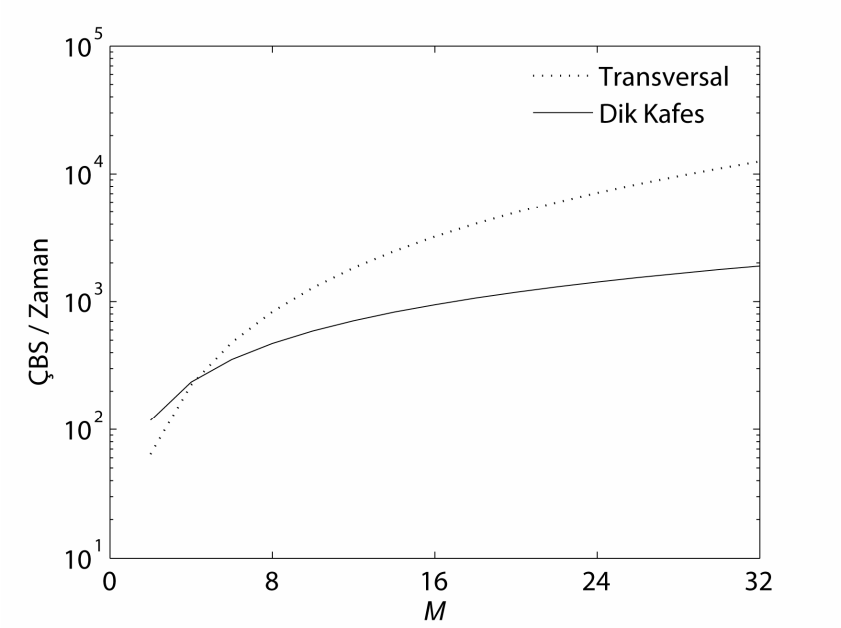
ve alt-örnekleyici oranları $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 2$ olarak verilmektedir. Sistemin girişindeki bilgi işareti sıfır ortalamalı, Gauss dağılımlı ve birim güçlü beyaz gürültü sürecidir. Gözlem gürültüsünün özellikleri ise önceki örnekteki gibi seçilmiştir.

Alıcıda çoklu-hızlı gözlemler, kendi alt-örnekleme oranlarıyla üst-örneklenip $x(n - 8)$ işaretini kestirmek için $M = 20$ hücreli ($M = M_1 = 2M_2 = 2M_3$), $K = 2$ ile periyodik, uyarlamalı en küçük kareler dik kafes filtresine uygulanmaktadır. Bu örnekte de 500 bağımsız gerçekleme varsayılmış, $\eta = 0.995$ ve $\delta = 1$ seçilmiştir.

Şekil 3.5'te dik kafes filtresinin ve transversal filtrenin öğrenme eğrileri verilmektedir. Ayrıca, her iki filtrenin birim zamanda gereksinim duyduğu çarpma-bölme sayısı da Şekil 3.6'da gösterilmektedir. Görüldüğü gibi, $M > 4$ için dik kafes filtresi transversal filtreye göre daha az işlem yükü gerektirmektedir. Bu çoklu-hızlı sistemde, birinci kanala ek olarak ikinci ve üçüncü kanalların kullanılmasının yaklaşık 1.4 dB'lik ortalama karesel hata kazancı sağladığı da ölçülmüştür.



Şekil 3.5 : Örnek 3.2 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin öğrenme eğrileri.



Şekil 3.6 : Örnek 3.2 için gerçeklenen uyarlamalı filtrelerin birim zamandaki toplam çarpma-bölme sayıları (ÇBS).

4. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN İTERATİF MAKSİMUM ENTROPİ GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ

4.1 Motivasyon

İkinci bölümde incelendiği gibi, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesi için maksimum entropi ve izdüşümler yöntemleri literatürde önerilmiştir. Bu yöntemlerden maksimum entropi yöntemi, kestirilmek istenen güç spektrumuyla ilgili en az varsayımda bulunduğundan, öncelikli olarak tercih edilmektedir. Fakat çoklu-hızlı sistemler için önerilen maksimum entropi güç spektrumu kestirim yönteminde çözümün sayısal olarak hesaplanması oldukça güçtür. Çözüm yaklaşık olarak hesaplandığında bile bazı işaret işleme ve optimizasyon paketlerinin kullanılması gerekmektedir [14-16]. Sonuç olarak maksimum entropi yönteminin uygulanabilirliği azalmaktadır.

Hesaplama verimliliğini arttırmak için, maksimum entropi güç spektrumunun yaklaşık olarak hesaplanmasında kullanılan mevcut parametrik yaklaşım yerine frekansta örnekleme yöntemi [34-35] kullanılabilir. Maksimum entropi güç spektrumunun frekansta düzgün aralıklarla örneklenmesi sayesinde, ayrık Fourier dönüşümüne dayanan daha basit hesaplama algoritmalarının geliştirilmesi mümkün olacaktır. Ayrıca frekanstaki örnek sayısı özilinti domeninde örtüşmeye neden olmayacak kadar büyük seçildiğinde, maksimum entropi çözümündeki yaklaşıklık da makul düzeyde olacaktır.

4.2 Sistem Modeli

Çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ işaretinin güç spektrumunun, $[0, 2\pi)$ arasında eşit aralıklı N noktada örneklendiğini düşünelim. Güç spektrumunun örneklerinden oluşturulan vektörün elemanları

$$\mathbf{p}_x[k] = P_x(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi(k-1)}{N}} \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$k = 1, 2, ..., N$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu vektörün ters ayrık Fourier dönüşümü alındığında ise özilinti vektörü elde edilmektedir,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & F_N & F_N^2 & \cdots & F_N^{N-1} \\ 1 & F_N^2 & F_N^4 & \cdots & F_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_N^{N-1} & F_N^{2(N-1)} & \cdots & F_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad F_N = e^{-j2\pi/N}. \tag{4.2}$$

N nokta sayısının özilinti domeninde örtüşmeye neden olmayacak kadar büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda, özilinti vektörünün elemanları

$$\mathbf{r}_x^T = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x\left(\frac{N}{2}\right) & r_x\left(-\frac{N}{2}+1\right) & \cdots & r_x(-1) \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

şeklinde olacaktır.

Yine N nokta sayısının yeterince büyük olduğunu varsayarak, kanal filtrelerinin çıkışındaki işaretlerin özilinti değerlerini dairesel konvolüsyon kullanarak ifade edebiliriz,

$$\mathbf{r}_{xi} = \mathbf{G}_i \mathbf{r}_x$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1}\mathrm{diag}\{\mathbf{F}\,\mathbf{g}_i\}\mathbf{F} \tag{4.4}$$

$i = 1, 2, \ldots, L.$

Bu denklemlerde, Hermityen olan dairesel konvolüsyon matrisi $\mathbf{G}_i$ ile gösterilmektedir. (4.3)'te verilen vektörel sıralama kullanılarak, $r_{xi}(k)$ ve $g_i(k)$ değerlerinden $\mathbf{r}_{xi}$ ve $\mathbf{g}_i$ vektörleri oluşturulmaktadır. diag{ } işlemi de köşegen matris oluşturmak için kullanılmaktadır.

Çoklu-hızlı sistemdeki alt-örnekleyiciler nedeniyle, $r_{xi}(k)$ değerlerinin sadece bir kısmı çoklu-hızlı gözlemler kullanılarak belirlenebilir,

$$r_{xi}(k) = r_{yi}(k / K_i) - r_{vi}(k)$$

$$k = 0, \pm K_i, \pm 2K_i, \ldots \tag{4.5}$$

$i = 1, 2, \ldots, L.$

Bu kısıtlamanın, $r_x(k)$ değerlerinin belirlenmesindeki etkisini pencere fonksiyonları kullanarak ifade etmek mümkündür,

$$\mathbf{W}_i \mathbf{G}_i \mathbf{r}_x = \mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi}$$

$$\mathbf{W}_i = \text{diag}\{\mathbf{w}_i\} \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$i = 1, 2, ..., L.$$

Bu denklemlerde, yine (4.3)'te verilen vektörel sıralama kullanılarak $w_i(k)$ değerlerinden $\mathbf{w}_i$ vektörleri oluşturulmaktadır. $w_i(k)$ pencere fonksiyonunun değerleri ise

$$w_i(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm K_i, \pm 2K_i, ... \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad \textbf{(4.7)}$$

şeklindedir. (4.6)'da verilen denklemlerde, $\mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi}$ vektörünün sıfırdan farklı elemanlarının, çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki işaretin ve gözlem gürültüsünün özilinti değerleri tarafından belirlendiğine dikkat edilmelidir.

4.3 Sonlu Frekans Noktalı Maksimum Entropi Güç Spektrumu

Önceki alt bölümde geliştirilen gösterim tarzı kullanılarak, (2.25)'te tanımlanan maksimum entropi güç spektrumunu sonlu frekans noktalı olarak aşağıdaki koşul ve kısıtlarla ifade etmek mümkündür,

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \arg\max \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \ln \mathbf{p}_x[k] \qquad \textbf{(4.8.a)}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.8.b)}$$

$$\mathbf{W}_i \mathbf{G}_i \mathbf{F}^{-1} \mathbf{p}_x = \mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi}$$
$$i = 1, 2, ..., L. \qquad \textbf{(4.8.c)}$$

Tüm-sonsuz ve tüm-sıfır vektörlerinin ∞ ve $\mathbf{0}$ ile gösterildiği bu ifadeler incelendiğinde, N ile gösterilen frekanstaki nokta sayısının sonsuza yaklaşması durumunda, sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunun (2.25)'te tanımlanan maksimum entropi güç spektrumuna yakınsayacağı görülebilir. Öte yandan, frekanstaki nokta sayısının özilinti değerlerinde örtüşmeye neden olmayacak ve doğrusal konvolüsyon işlemini doğru olarak gerçekleştirecek şekilde seçildiği durumlarda, (4.8)'de verilen problemin çözülmesiyle maksimum entropi güç spektrumunun örnekleri elde edilecektir.

N frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunun var olabilmesi için, (4.8.b) ve (4.8.c)'de verilen kısıtlarla tanımlanan alt-problemin çözüm kümesinin boş küme

olmaması gerekmektedir. Bu koşul sağlandığında, entropi fonksiyonunun içbükey olmasından dolayı tek bir çözüm elde edilecektir.

(4.8)'de verilen problemin çözümünü kolaylaştırmak için, öncelikle (4.8.c)'de verilen eşitlik kısıtlarını en küçük kareler yöntemiyle düzenli bir biçimde ifade edelim,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x}\left\{\sum_{i=1}^{L}\left(\mathbf{W}_i\mathbf{G}_i\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x-\mathbf{W}_i\mathbf{r}_{xi}\right)^H\left(\mathbf{W}_i\mathbf{G}_i\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x-\mathbf{W}_i\mathbf{r}_{xi}\right)\right\}=\mathbf{0}. \tag{4.9}$$

Güç spektrumu gerçel, $\mathbf{G}_i$ matrisi hermityen ve $\mathbf{W}_i$ köşegen matrisinin elemanları 0 veya 1 olduğundan, (4.9)'daki denklemin çözümü

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x=\mathbf{r}_{eq}\\&\mathbf{A}=\mathbf{G}_1\mathbf{W}_1\mathbf{G}_1+\ldots+\mathbf{G}_L\mathbf{W}_L\mathbf{G}_L\\&\mathbf{r}_{eq}=\mathbf{G}_1\mathbf{W}_1\mathbf{r}_{x1}+\ldots+\mathbf{G}_L\mathbf{W}_L\mathbf{r}_{xL}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde verilebilir. Sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunun, tek başına (4.10)'daki eşitlik kısıtı tarafından belirlenemeyen kısmını ifade edebilmek için ise

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x=\mathbf{r}_{eq}\\&\mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x=\mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{r}_{eq}\end{aligned}$$

bağıntılarını kullanarak bir $\mathbf{p}_{ex}$ vektörü tanımlayabiliriz [36],

$$\mathbf{p}_x=\mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{r}_{eq}+\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\right)\mathbf{p}_{ex}. \tag{4.11}$$

Bu $\mathbf{p}_{ex}$ vektörü entropiyi maksimize edecek şekilde seçildiğinde, (4.8.a)'da verilen koşula eşdeğer bir eşitlik kısıtı bulunabilir,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{ex}}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln \mathbf{p}_x[k]\right\}=\mathbf{0}. \tag{4.12}$$

Bu türevin çözümünü ifade edebilmek için elemanları

$$\begin{aligned}&\mathbf{q}_x[k]=\frac{1}{\mathbf{p}_x[k]}\\&k=1,\,2,\,\ldots,\,N\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde verilen bir $\mathbf{q}_x$ vektörü tanımlayalım,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{ex}}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln \mathbf{p}_x[k]\right\} = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial \mathbf{p}_{ex}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln \mathbf{p}_x[k]\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial \mathbf{p}_{ex}}\mathbf{q}_x$$

$$= \frac{1}{N}\left(\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\right)^{T}\mathbf{q}_x.$$

$\mathbf{q}_x$ vektörünün elemanları gerçel ve **A** matrisi de hermityen olduğundan,

$$\left(\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\right)^{T}\mathbf{q}_x = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{I}_N - \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}_x = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{I}_N - \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}_x = \mathbf{0}$$

elde edilmektedir. Böylelikle, en küçük kareler yöntemiyle desteklenmiş sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunu aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür,

$$\left(\mathbf{I}_N - \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}_x = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.14.a)}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.14.b)}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x = \mathbf{r}_{eq}. \qquad \textbf{(4.14.c)}$$

Bu kısıtlar incelendiğinde, çözümün doğrusal olmayan denklemlerle bulunması gerektiği görülebilir. Çünkü (4.14.a) ve (4.14.c)'deki kısıtların birbirleriyle ilişkilendirmesini sağlayan (4.13)'teki bağıntı doğrusal değildir. Dolayısıyla, (4.14)'te verilen problemin çözümünü elde etmek için sayısal yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

4.4 Hesaplama Algoritması

(4.14)'te verilen iki eşitlik ve bir eşitsizlik kısıtıyla tanımlanmış sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunun verimli olarak hesaplanabilmesi için, Lim ve Malik tarafından iki-boyutlu ve tek kanallı sistemler için önerilen iteratif (döngülü) ve sonlu frekans noktalı maksimum entropi algoritmasından faydalanabiliriz. Adı geçen algoritmanın her adımında, güç spektrumu pozitif kalmaya zorlanmakta ve eşitlik kısıtları kullanılarak güç spektrumu güncellenmektedir [34-35]. Skaler işlem-

lere dayanan bu algoritma, (4.14)'te tanımlanan problemin çözümünü elde etmek için aşağıdaki gibi uyarlanabilir:

Aşama I. Algoritmanın başlangıcı:

Adım sayısı parametresini $t = 0$ olarak başlat. Seçilen N frekans noktası sayısı, $0 \le \alpha < 1$ ve $0 \le \beta < 1$ değerleri için,

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T\right\},$$

$$\mathbf{p}_x^{(0)} = \mathbf{F}\,\mathbf{D}\,\mathbf{A}^{+}\mathbf{r}_{eq}.$$

Adım sayısı parametresinin değerini bir arttır.

Aşama II. (4.14.c)'deki kısıt kullanılarak güç spektrumunun güncellenmesi:

$$\mathbf{p}_x^{(\prime)} = \mathbf{p}_x^{(t-1)} + \left(1-\alpha\right)\mathbf{F}\,\mathbf{A}^{+}\left(\mathbf{r}_{eq} - \mathbf{A}\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right).$$

Aşama III. (4.14.a)'daki kısıt kullanılarak güç spektrumunun güncellenmesi:

$$\mathbf{q}_x^{(\prime)}[k] = \frac{1}{\mathbf{p}_x^{(\prime)}[k]}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ N.$$

$$\mathbf{q}_x^{(t)} = \beta\,\mathbf{q}_x^{(t-1)} + \left(1-\beta\right)\mathbf{F}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{+}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}_x^{(\prime)},$$

$$\mathbf{p}_x^{(t)}[k] = \frac{1}{\mathbf{q}_x^{(t)}[k]}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Aşama IV. Maliyet fonksiyonunun hesaplanması ve adım sonu:

$$\varepsilon_1^{(t)} = \frac{\left\|\mathbf{r}_{eq} - \mathbf{A}\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t)}\right\|_2}{\left\|\mathbf{r}_{eq}\right\|_2},$$

$\mathbf{p}_x^{(t)} \in$ (4.14.b) ve $\varepsilon_1^{(t)} \le 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{p}}_x = \mathbf{p}_x^{(t)}.$

$\mathbf{p}_x^{(t)} \in$ (4.14.b) ve $\varepsilon_1^{(t)} > 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = t+1$ ve Aşama II'ye dön.

Yukarıda önerdiğimiz iteratif algoritmada α ve β sabitleri, güç spektrumunun her adımda (4.14.b)'de verilen eşitsizlik kısıtına uymasını sağlamaktadır. α ve β sabitlerinin dikkatlice seçilmesi gerekmektedir, çünkü bu sabitler küçük seçildiğinde algoritma yakınsamayabilir. Buna karşılık, sabitler büyük seçildiğinde ise çözümün elde edilmesi için gereken adım sayısı artabilir.

N frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunun var olmadığı, yani (4.14.b) ve (4.14.c)'deki kısıtlarla tanımlanan alt-problemin herhangi bir çözümünün olma-

dığı durumlarda ise, iteratif algoritmanın yakınsaması için son aşamada kontrol edilen eşik maliyet fonksiyonu değerinin arttırılması gerekmektedir.

Önerdiğimiz algoritmanın en önemli özelliği, çözümün basit matris ve vektör işlemleriyle hesaplanabilmesidir. Bu sayede, literatürde verilen parametrik yönteme göre hesaplama verimliliği artmaktadır. Ayrıca, N frekans noktası sayısı yeterince büyük seçildiğinde, önerdiğimiz yöntemin yaklaşıklığı da kabul edilebilir düzeyde olacaktır.

4.5 Benzetim Sonuçları

4.5.1 Örnek 4.1

İlk örnekte kanal filtreleri

$$H_1(z) = 0.0389 + 0.2316z^{-1} + 0.4049z^{-2} + 0.2316z^{-3} + 0.0389z^{-4}$$

$$H_2(z) = -0.1145 - 0.1792z^{-1} + 0.6457z^{-2} - 0.1792z^{-3} - 0.1145z^{-4}$$

ve alt-örnekleyici oranları $K_1 = 2$, $K_2 = 3$ olan bir çoklu-hızlı sistem ele alınmaktadır. Sistemin girişine ise, özilinti fonksiyonu

$$r_x(k) = \cos(2\pi\, 0.08k) + \cos(2\pi\, 0.23k) + \delta(k)$$

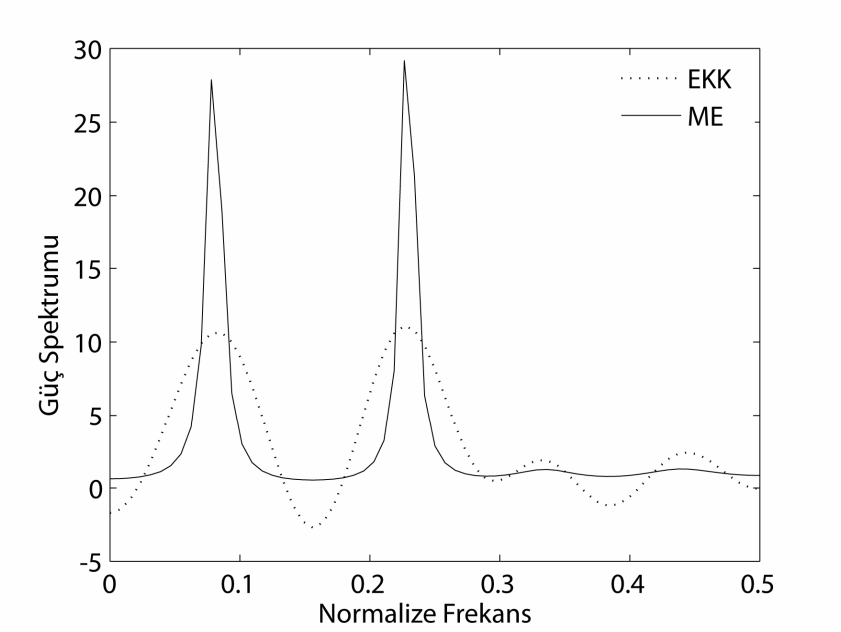
olan bir harmonik işaret uygulanmaktadır. Bu rastgele işaretin güç spektrumunu kestirmek için kullanılacak olan çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki işaretlerin özilinti değerlerinin gürültüsüz ve kesin olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca işlem yükünü arttırmamak için, kullanılacak olan özilinti değerlerinin maksimum gecikmeleri 4 ile sınırlandırılmaktadır.

Şekil 4.1'de, önerdiğimiz iteratif yöntemle elde edilen $x(n)$ işaretine ait 128-noktalı maksimum entropi güç spektrumu kestirimi gösterilmektedir. Bu güç spektrumunun elde edilmesi için $\alpha = \beta = 0.8$ seçilmiş ve $t = 92$ iterasyon sonucunda yakınsama sağlanmıştır. Karşılaştırma için,

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \mathbf{F}\,\mathbf{A}^{+}\mathbf{r}_{eq} \quad \left(\hat{\mathbf{p}}_{ex} = \mathbf{0}\right) \tag{4.15}$$

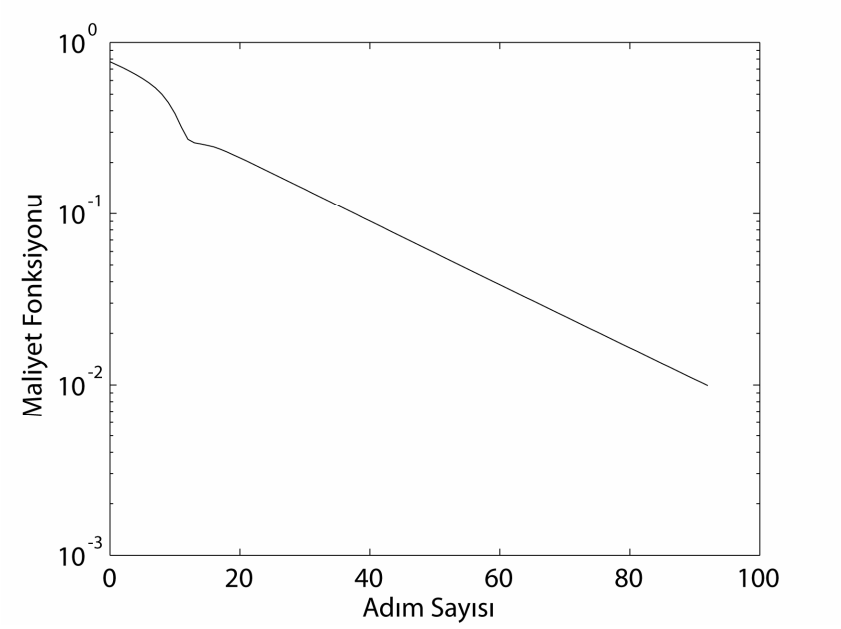
şeklinde verilen $x(n)$ işaretine ait en küçük kareler güç spektrumu kestirimi de Şekil 4.1'de verilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, maksimum entropi güç spektrumu harmonik işaretin frekanslarını doğru olarak kestirmektedir. Buna karşılık, en küçük

kareler güç spektrumunun çözünürlüğü yeterli düzeyde değildir. Ayrıca bu güç spektrumu pozitiflik kısıtını da sağlayamamaktadır.



Şekil 4.1 : Örnek 4.1 için 128-noktalı en küçük kareler (EKK) ve maksimum entropi (ME) güç spektrumları.

Önerdiğimiz yöntemin başarımını daha iyi incelemek için, iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi de Şekil 4.2'de verilmektedir. Algoritma yakınsadığında (4.14.a)'da verilen kısıtın ne ölçüde sağlandığını kontrol etmek için,



Şekil 4.2 : Örnek 4.1 için önerilen iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi.

$$\varepsilon_2 = \frac{\left\| \hat{\mathbf{q}}_x - \mathbf{F}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{+}\mathbf{F}^{-1}\hat{\mathbf{q}}_x \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{q}}_x \right\|_2} \qquad \textbf{(4.16)}$$

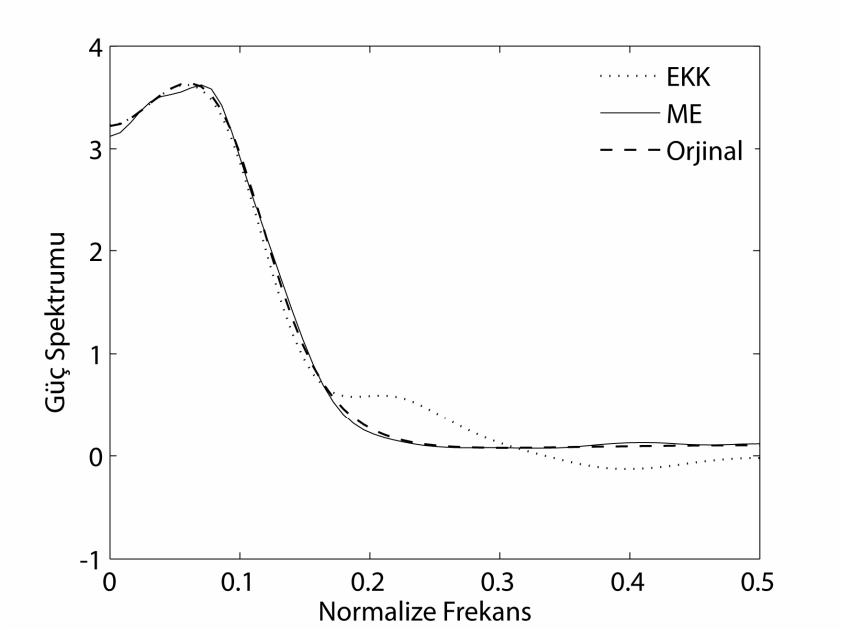
şeklinde ikinci bir maliyet fonksiyonu tanımlayalım. Buna göre, iteratif algoritma yakınsadığında (t = 92), ikinci maliyet fonksiyonunun değeri $\varepsilon_2 = 8.71\text{x}10^{-12}$ olmaktadır. Özilinti domenindeki örtüşme ise ihmal edilebilecek düzeydedir.

4.5.2 Örnek 4.2

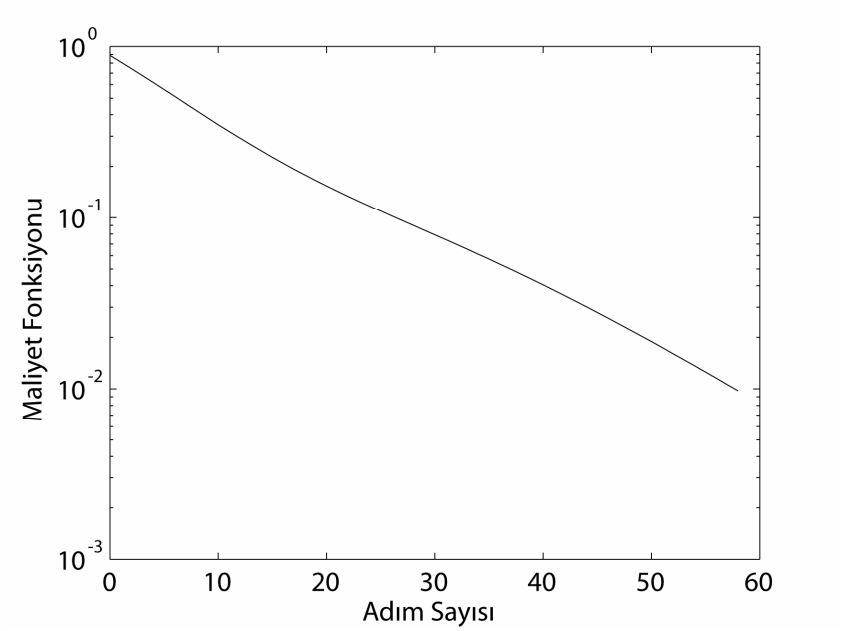
Bu örnekte, kanal filtreleri önceki örnekteki gibi olan fakat alt-örnekleyici oranları K_1 = 3, K_2 = 5 olarak seçilen bir çoklu-hızlı sistem incelenmektedir. Bu çoklu-hızlı sistemin girişine sıfır ortalamalı, Gauss dağılımlı, birim güçlü ve model parametreleri a_1 = –1.7679, a_2 = 1.1674, a_3 = –0.3034, b_0 = 0.5646, b_1 = –0.4448, b_2 = 0.1987, b_3 = –0.1460 olan öz bağlanımlı ve kayan ortalamalı bir süreç uygulanmaktadır. Bu sürece ait güç spektrumunu kestirmek için kullanılacak olan $r_{yi}(k)$ değerlerinin gürültüsüz ve kesin olduğu varsayılmakta, gecikmeler de $|k| \leq 5$ olarak sınırlandırılmaktadır.

Önerdiğimiz iteratif yöntem ($\alpha = \beta = 0.7$, t = 58) ile elde edilen çoklu-hızlı sistemin girişindeki işarete ait 128-noktalı maksimum entropi güç spektrumu kestirimi Şekil 4.3'te verilmektedir. Karşılaştırma için, orjinal güç spektrumu ve (4.15)'teki bağıntıyla elde edilen en küçük kareler güç spektrumu kestirimi de aynı şekil üzerinde gösterilmektedir. Şekil 4.3'te görüldüğü gibi, maksimum entropi güç spektrumu orjinal güç spektrumunu başarıyla kestirmektedir. Öte yandan, en küçük kareler güç spektrumu kestiriminin başarımı ise yine tatmin edici değildir.

Bu örnek için iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi de Şekil 4.4'te verilmektedir. Algoritma yakınsadığında ise (4.16)'da tanımlanan ikinci maliyet fonksiyonun değeri $1.36\text{x}10^{-11}$ olmaktadır. Özilinti domeninde ise örtüşme oluşmamaktadır.

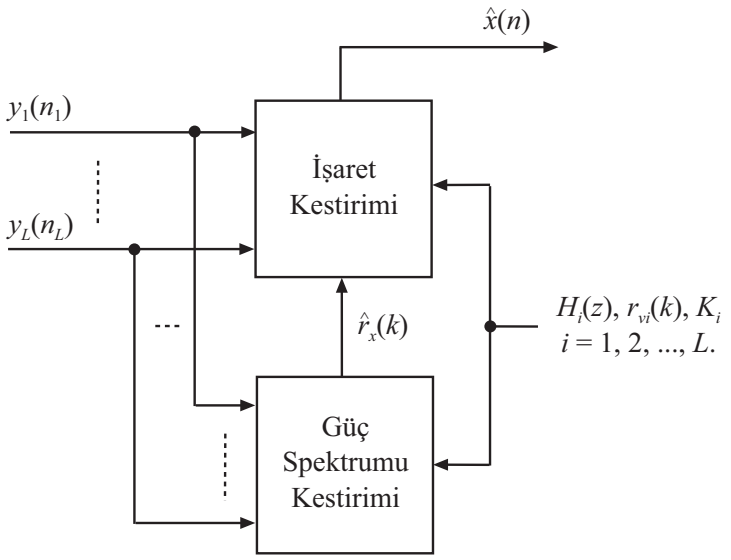


Şekil 4.3 : Örnek 4.2 için 128-noktalı en küçük kareler (EKK), maksimum entropi (ME) ve orjinal güç spektrumları.



Şekil 4.4 : Örnek 4.2 için önerilen iteratif algoritmanın yakınsama eğrisi.

Son olarak, önerdiğimiz yöntemin periyodik olarak zamanla değişen Wiener filtresiyle birlikte kullanılması durumunda elde edilen işaret kestiriminin başarımı incelenecektir. Bu amaç için kullanılacak olan genel alıcının blok diyagramı Şekil 4.5'te gösterilmektedir.



Şekil 4.5 : Çoklu-hızlı sistemler için birleşik güç spektrumu ve işaret kestirimi.

İncelediğimiz çoklu-hızlı sistemde $x(n)$ işaretinin 1000 uzunluklu olduğunu ve toplamsal gözlem gürültüsünün de birbirlerinden bağımsız, sıfır ortalamalı, σ_{vi}^2 güçlü ve Gauss dağılımlı beyaz gürültü süreçleri olarak modellendiğini varsayalım. Varsaydığımız çoklu-hızlı alıcıda ise, ilk olarak gürültülü ve sonlu uzunluklu çoklu-hızlı gözlemlerin özilinti değerleri (2.24)'te verilen bağıntı kullanılarak kestirilmektedir. Daha sonra, bu özilinti değerleri kullanılarak $x(n)$ işaretinin 128-noktalı güç spektrumu kestirilmektedir. Kestirilen güç spektrumu, K = 15 ile periyodik Wiener filtresine (M_1 = 10, M_2 = 6, Δ = 20) uygulanmakta ve $x(n)$ işaretinin kestirimi elde edilmektedir. İşaret kestiriminin başarımını belirlemek için

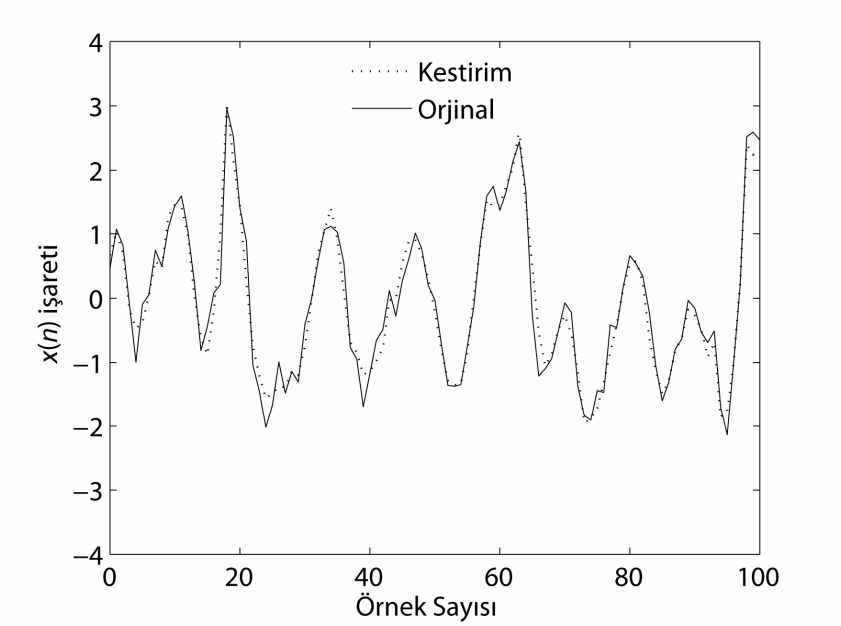
$$NOKH = E\left\{\frac{\left\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right\|_2^2}{\left\|\mathbf{x}\right\|_2^2}\right\} \qquad \textbf{(4.17)}$$

olarak tanımlanan normalize ortalama karesel hata değeri kullanılmaktadır. Bu benzetim senaryosu için, 1000 bağımsız gerçekleme sonucunda elde edilen Wiener filtresinin çıkışındaki normalize ortalama karesel hata Çizelge 4.1'de verilmektedir. İşaret kestiriminde kullanılan güç spektrumunun önerdiğimiz yöntemle ($\alpha = \beta = 0.7$) elde edilmesi durumunda, başarım kaybının düşük olacağı çizelgede görülmektedir. Ayrıca, en küçük kareler güç spektrumunun işaret kestiriminde kullanılmasının verimli olmadığını da aynı çizelgede görebiliriz.

Çizelge 4.1 : Örnek 4.2 için periyodik olarak zamanla değişen Wiener filtresinin normalize ortalama karesel hatası.

$\sigma_{v1}^2 = \sigma_{v2}^2$	Varsayılan Güç Spektrumu		
	EKK	Önerilen Yöntem	Orjinal
0.1	$2.36\text{x}10^{-1}$	$2.04\text{x}10^{-1}$	$2.00\text{x}10^{-1}$
0.01	> 1	$8.74\text{x}10^{-2}$	$8.59\text{x}10^{-2}$
0.001	> 1	$7.08\text{x}10^{-2}$	$6.96\text{x}10^{-2}$

Ortalama başarımı yansıtan bir gerçekleme için, önerdiğimiz algoritmayla birleşik çalışan Wiener filtresiyle elde edilen işaret kestirimi Şekil 4.6'da gösterilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, kestirim görsel olarak tatmin edici düzeydedir.



Şekil 4.6 : Örnek 4.2 için 128-noktalı maksimum entropi güç spektrumunu kullanan ve periyodik olarak zamanla değişen Wiener filtresinin örnek gerçekleme sonucu ($\sigma_{v1}^2 = \sigma_{v2}^2 = 0.01$).

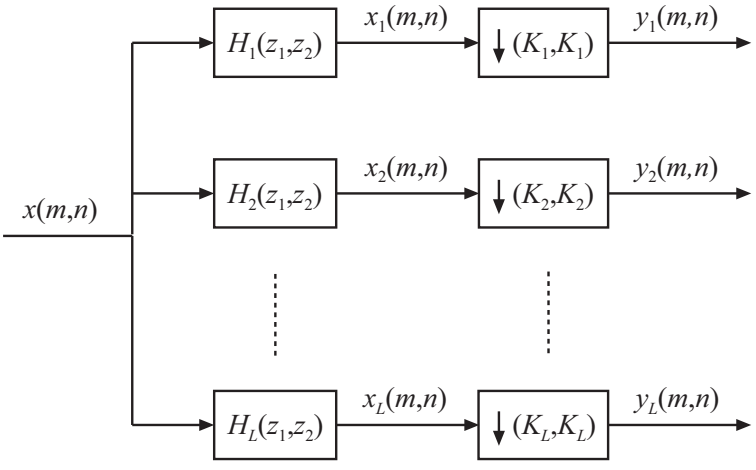
5. İKİ-BOYUTLU ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN GÜÇ SPEKTRUMU KESTİRİMİ

5.1 Motivasyon

Bu bölümün konusu, iki-boyutlu (2-B) işaretlerin algılanmasında kullanılan çoklu-hızlı sistemlerde, giriş işaretinin güç spektrumunun kestirilmesidir. Her ne kadar 2-B çoklu-hızlı sistemlerde işaret kestirimiyle ilgili bazı çalışmalar mevcut olsa da [11-12], 2-B çoklu-hızlı sistemlerde güç spektrumu kestirimiyle ilgili literatürde herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Yapılacak olan çalışma sayesinde, çoklu-algılayıcılı görüntüleme konusundaki önemli bir boşluğun doldurulması hedeflenmektedir.

5.2 Sistem Modeli

İki-boyutlu ve L-kanallı çoklu-hızlı sistemin blok diyagramı Şekil 5.1'de verilmektedir. Sistemin girişindeki $x(m,n)$ ayrık-zamanlı, nedensel bilgi işaretidir ve L adet algılayıcı tarafından dolaylı olarak gözlemlenmektedir. Algılayıcıların bant-genişliği sınırlamaları ve olası yayılım etkileri, nedensel ve kararlı olan $H_i(z_1,z_2)$ kanal filtreleriyle modellenmektedir. Öte yandan, algılayıcıların örnekleme hızlarındaki sınırlamaları modellemek için iki-boyutlu alt-örnekleyiciler kullanılmaktadır [37-38].



Şekil 5.1 : 2-B çoklu-hızlı sistem modeli.

2-B çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(m,n)$ bilgi işaretinin sıfır ortalamalı ve geniş anlamda durağan olduğunu varsayalım. Böylelikle, $x(m,n)$ işaretinin özilinti fonksiyonu

$$r_x(k,l) = E\left\{x(m,n)x^*(m-k,n-l)\right\} \tag{5.1}$$

olarak ifade edilebilir. İki-boyutlu kanal filtrelerinin doğrusal ve ötelemeyle değişmediğini varsayarak, $x_i(m,n)$ işaretinin özilinti fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$\begin{aligned} &r_{xi}(k,l) = r_x(k,l) * h_i(k,l) * h_i^*(-k,-l) = r_x(k,l) * g_i(k,l) \\ &i = 1,\ 2,\ ...,\ L. \end{aligned} \tag{5.2}$$

K_i alt-örnekleme oranının tam sayı olduğu ve gözlem gürültüsünün bulunmadığı durumlarda, $y_i(m,n)$ işaretinin özilinti fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} &r_{yi}(k,l) = r_{xi}(K_i k, K_i l) \\ &i = 1,\ 2,\ ...,\ L \end{aligned} \tag{5.3}$$

şeklinde olacaktır. Bu özilinti fonksiyonunun değerleri, çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(m,n)$ bilgi işaretinin güç spektrumu $P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$'yı belirlemek için kullanılabilir,

$$\begin{aligned} &P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) > 0 \\ &\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) G_i(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{jK_i k\omega_1} e^{jK_i l\omega_2} d\omega_1 d\omega_2 = r_{yi}(k,l) \\ &i = 1,\ 2,\ ...,\ L. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Bu kısıtlarda, $G_i(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ spektrumu $g_i(k,l)$ fonksiyonunun 2-B Fourier dönüşümüdür. Alt-örnekleyicilerin varlığı nedeniyle, (5.4)'te verilen ters problemin çoğunlukla sonsuz sayıda çözümü bulunmaktadır. Ayrıca özilinti değerlerinin sonlu uzunluklu işaretlerden kestirildiği durumlarda, bu ters problemin herhangi bir çözümü de var olmayabilir.

5.3 İki-Boyutlu ve Sonlu Frekans Noktalı Maksimum Entropi Güç Spektrumu

(5.4)'te tanımlanan ters problemin sonsuz sayıda çözümü olduğunda, tek bir çözüm elde etmek için maksimum entropi ilkesi kullanılabilir. $x(m,n)$ işaretinin Gauss

dağılımlı olduğunu varsayarak, 2-B çoklu-hızlı sistemler için maksimum entropi güç spektrumu kestirim problemini aşağıdaki koşul ve kısıtlarla ifade edebiliriz,

$$\hat{P}_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \arg\max \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) d\omega_1 d\omega_2$$

$$P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) > 0 \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) G_i(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{jK_i k\omega_1} e^{jK_i l\omega_2} d\omega_1 d\omega_2 = r_{yi}(k,l)$$

$i = 1, 2, ..., L.$

Bu problemin çözümü, çözüm için gerekli olan integral hesaplamaları nedeniyle oldukça güçtür. Ayrıca 1-B maksimum entropi probleminden farklı olarak, 2-B maksimum entropi probleminin çözümünde spektral ayrışıma dayanan yöntemlerin kullanılması da çoğu zaman mümkün değildir [39]. Bu nedenle, (5.5)'te verilen problemin çözümünün hesaplanması için elverişli yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

İşlem yükünü azaltmak için $x(m,n)$ işaretinin güç spektrumunun (0,0) noktasından başlayarak eşit aralıklarla örneklendiğini düşünelim,

$$\mathbf{P}_x[k,l] = P_x(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})\Big|_{\omega_1 = \frac{2\pi(k-1)}{N},\ \omega_2 = \frac{2\pi(l-1)}{N}} \tag{5.6}$$

$k = 1, 2, ..., N$ ve $l = 1, 2, ..., N.$

N yeterince büyük olduğunda, elde edilen NxN boyutlu güç spektrumu matrisinin ters 2-B ayrık Fourier dönüşümü, $x(m,n)$ işaretinin özilinti matrisini vermektedir

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0,0) & \cdots & r_x(0,N/2) & \cdots & r_x(0,-1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_x(N/2,0) & \cdots & r_x(N/2,N/2) & \cdots & r_x(N/2,-1) \\ r_x(-N/2+1,0) & \cdots & r_x(-N/2+1,N/2) & \cdots & r_x(-N/2+1,-1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_x(-1,0) & \cdots & r_x(-1,N/2) & \cdots & r_x(-1,-1) \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Sonlu frekans noktalı optimizasyonu vektörel biçimde gerçekleştirmek için, (5.7)' deki özilinti matrisinin 1-B dilimlerini kullanabiliriz. Düşey yönde tarama yapılarak elde edilecek olan $\mathbf{r}_x$ vektörü

$$\mathbf{r}_x^T = \begin{bmatrix} r_x(0,0) & \cdots & r_x(N/2,0) & r_x(-N/2+1,0) & \cdots & r_x(-1,0) & r_x(0,1) \\ & & & \cdots & r_x(-1,-1) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu vektörle, $\mathbf{P}_x$ matrisinin düşey yönde taranmasıyla elde edilecek olan $\mathbf{p}_x$ vektörü arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir [40],

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_x = \mathbf{C}\mathbf{r}_x, \\ &\mathbf{C} = \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Bu denklemlerde, NxN elemanlı 1-B ayrık Fourier dönüşüm matrisi $\mathbf{F}$ ile ve Kronecker çarpımı da $\otimes$ ile gösterilmektedir.

Frekans noktası sayısının 2-B özilinti domeninde örtüşmeye neden olmayacak kadar büyük seçildiğini varsayarak, (5.2)'de verilen 2-B konvolüsyon işlemini

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_{xi} = \mathbf{G}_i \mathbf{r}_x \\ &\mathbf{G}_i = \mathbf{C}^{-1}\text{diag}\{\mathbf{C}\mathbf{g}_i\}\mathbf{C} \\ &i = 1, 2, ..., L \end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde gerçekleştirebiliriz [41]. Bu denklemde $\mathbf{r}_{xi}$ ve $\mathbf{g}_i$ vektörleri, $r_{xi}(k,l)$ ve $g_i(k,l)$ değerlerinin (5.8)'deki gibi 1-B taranmasıyla elde edilmektedir. $\mathbf{G}_i$ matrisi ise NxN noktalı dairesel konvolüsyonu gerçekleyen matristir. (5.3)'te verilen denklemde görüldüğü gibi, $r_{xi}(k,l)$ değerlerinin sadece bir kısmı çoklu-hızlı sistemin çıkışından belirlenebilmektedir. Bu kısıtlamayı ifade etmek için 2-B pencere fonksiyonları tanımlayalım,

$$w_i(k,l) = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm K_i, \pm 2K_i, \text{ ... ve } l = 0, \pm K_i, \pm 2K_i, \text{ ...} \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases} \tag{5.11}$$

Böylelikle, (5.5)'te verilen eşitlik kısıtlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}_i \mathbf{G}_i \mathbf{r}_x = \mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi} \\ &\mathbf{W}_i = \text{diag}\{\mathbf{w}_i\} \\ &i = 1, 2, ..., L. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Bu denklemlerde $\mathbf{w}_i$ vektörü, $w_i(k,l)$ değerlerinin (5.8)'deki gibi 1-B taranmasıyla elde edilmektedir. $\mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi}$ vektörünün sıfırdan farklı elemanları ise $r_{yi}(k,l)$ değerleri kullanılarak belirlenmektedir.

Böylelikle (5.5)'te tanımlanan 2-B maksimum entropi güç spektrumunu sonlu frekans noktalı olarak aşağıdaki koşul ve kısıtlarla tanımlayabiliriz,

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \arg\max \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N^2} \ln \mathbf{p}_x[k] \qquad \textbf{(5.13.a)}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0} \qquad \textbf{(5.13.b)}$$

$$\mathbf{W}_i \mathbf{G}_i \mathbf{C}^{-1} \mathbf{p}_x = \mathbf{W}_i \mathbf{r}_{xi} \qquad \textbf{(5.13.c)}$$
$$i = 1, 2, ..., L.$$

Bu doğrusal olmayan problemin çözümünün var olması için (5.13.b) ve (5.13.c)'deki kısıtlarla tanımlanan alt-problemin çözümünün boş küme olmaması gerekmektedir. Bu koşul sağlandığında, (5.13.a)'daki fonksiyon içbükey olduğundan tek bir $\hat{\mathbf{p}}_x$ elde edilecektir. Eğer 2-B özilinti domeninde örtüşme oluşmuyorsa, elde edilen sonlu frekans noktalı güç spektrumu (5.5)'te tanımlanan maksimum entropi güç spektrumunun örnekleri olacaktır.

2-B ve sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunu belirlemek için kullanılan $r_{yi}(k,l)$ değerleri sonlu uzunluklu işaretlerden kestirildiği durumlarda, özilinti değerleri birbirleriyle tutarlı olmayabilir. Yani (5.13.c)'de verilen denklemlerin herhangi bir çözümü bulunmayabilir. Bu durumda, en küçük kareler yöntemi kullanılarak (5.13.c)'deki eşitlik kısıtlarını aşağıdaki gibi düzenli olarak ifade edebiliriz,

$$\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x = \mathbf{r}_{eq}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_1\mathbf{W}_1\mathbf{G}_1 + \ldots + \mathbf{G}_L\mathbf{W}_L\mathbf{G}_L \qquad \textbf{(5.14)}$$
$$\mathbf{r}_{eq} = \mathbf{G}_1\mathbf{W}_1\mathbf{r}_{x1} + \ldots + \mathbf{G}_L\mathbf{W}_L\mathbf{r}_{xL}.$$

Yapılan bu düzenleme, (5.13.c)'deki kısıtlarla tanımlanan alt-problemin çözümünün varlığını garanti altına almaktadır. Fakat olası özilinti kestirim hataları nedeniyle, (5.13.b) ve (5.14)'teki kısıtlarla tanımlanan alt-problemin çözümü var olmayabilir. Bu durumda, (5.14)'teki eşitlik kısıtının gevşetilmesi gerekmektedir [42]. Eşitlik kısıtını gevşetmenin en kolay yolu ise $\mathbf{r}_{eq}$ vektörüne $\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$ vektörünün eklenmesidir. Burada $\mathbf{e}$ vektörünün tüm değerleri $e > 0$ olan bir vektör olduğuna dikkat edilmelidir.

İncelediğimiz 2-B güç spektrumu kestirim probleminde çoklu-hızlı sistemin çıkışına ait özilinti değerleri, sistemin girişindeki işaretin güç spektrumunu belirlemek için yeterli olmadığından (5.14)'te tanımlanan $\mathbf{A}$ matrisi tam-rank bir matris değildir. Bu nedenle, (5.14)'teki denklemi verimli bir şekilde ifade edebilmek için tekil (singular)

değer ayrışımından faydalanabiliriz. **A** matrisinin rankının $M < N^2$ ve tekil değer ayrışımının

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H \tag{5.15}$$

şeklinde verildiğini düşünelim. Bu durumda, köşegen bir matris olan $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin son $N^2 - M$ köşegen elemanı 0 olacaktır. Dolayısıyla, (5.14)'teki denklem

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x = \hat{\mathbf{r}}_{eq} \tag{5.16}$$

olarak sadeleştirilebilir. Bu denklemde $\hat{\mathbf{A}}$ matrisi $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H$ matrisinin ilk M satırıdır. Öte yandan $\hat{\mathbf{r}}_{eq}$ vektörü de $\mathbf{U}^H\mathbf{r}_{eq}$ vektörünün ilk M elemanıdır. Yaptığımız bu düzenlemeler sayesinde, 2-B ve sonlu frekans noktalı maksimum entropi güç spektrumunu belirleyen kısıtlardan (5.13.c)'deki eşitlik kısıtlarını daha verimli olarak ifade edebiliriz.

5.4 Hesaplama Algoritması

(5.13.a), (5.13.b) ve (5.16)'daki koşul ve kısıtlarla tanımlanan, düzenlenmiş sonlu frekans noktalı maksimum entropi probleminin çözümünün hesaplanması sırasında işlem yükünü azaltmak için Lagrange çarpanları yöntemini [36,43] kullanabiliriz. Bu yöntem uygulandığında, (5.13.a), (5.13.b) ve (5.16)'daki koşul ve kısıtlarla tanımlanan problemin duali aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\left\{\hat{\mathbf{p}}_x, \hat{\boldsymbol{\lambda}}\right\} = \arg\min\, J\left\{\mathbf{p}_x, \boldsymbol{\lambda}\right\} \tag{5.17.a}$$

$$\frac{\partial J\left\{\mathbf{p}_x, \boldsymbol{\lambda}\right\}}{\partial \mathbf{p}_x} = \mathbf{0} \tag{5.17.b}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0}. \tag{5.17.c}$$

Burada $\boldsymbol{\lambda}$ Lagrange katsayıları vektörünü temsil etmekte, değeri iki vektöre bağlı olan maliyet fonksiyonu ise

$$J\left\{\mathbf{p}_x, \boldsymbol{\lambda}\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N^2} \ln \mathbf{p}_x[k] - \boldsymbol{\lambda}^H\left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x - \hat{\mathbf{r}}_{eq}\right) \tag{5.18}$$

olarak tanımlanmaktadır. (5.17)'de verilen problemin çözümünü ifade etmek için

$$\mathbf{q}_x[k] = \frac{1}{\mathbf{p}_x[k]}, \quad k = 1, 2, ..., N^2 \tag{5.19}$$

şeklinde bir $\mathbf{q}_x$ vektörü tanımlayalım.

$$\frac{\partial J\{\mathbf{p}_x,\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \mathbf{p}_x}=\frac{1}{N^2}\mathbf{q}_x-\mathbf{C}^{-T}\hat{\mathbf{A}}^T\boldsymbol{\lambda}^*=\mathbf{0}$$

ve $\mathbf{q}_x$ vektörünün elemanları gerçel olduğundan, (5.17)'deki dual problem aşağıdaki şekilde sadeleştirilebilir,

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}=\arg\min\ J\{\boldsymbol{\lambda}\} \qquad \textbf{(5.20.a)}$$

$$\mathbf{q}_x=\mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^H\boldsymbol{\lambda} \qquad \textbf{(5.20.b)}$$

$$\infty>\mathbf{q}_x>\mathbf{0}. \qquad \textbf{(5.20.c)}$$

Sadece Lagrange çarpanları vektörüne bağlı olan maliyet fonksiyonu ise

$$J\{\boldsymbol{\lambda}\}=-\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N^2}\ln\mathbf{q}_x[k]+\boldsymbol{\lambda}^H\hat{\mathbf{r}}_{eq}-1 \qquad \textbf{(5.21)}$$

şeklinde olacaktır. Bu gerçel değerli fonksiyonun $\boldsymbol{\lambda}$'ya göre türevi alındığında

$$\frac{\partial J\{\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=-\left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x-\hat{\mathbf{r}}_{eq}\right)^* \qquad \textbf{(5.22)}$$

elde edilir. (5.21)'deki fonksiyonun Hessian matrisi [44] hesaplandığında ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}^*}\left(\frac{\partial J\{\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T&=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}^*}\left(-\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x+\hat{\mathbf{r}}_{eq}\right)^H\\&=-\frac{\partial \mathbf{q}_x}{\partial \boldsymbol{\lambda}^*}\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial \mathbf{q}_x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x}\left(\mathbf{p}_x^T\mathbf{C}^{-H}\hat{\mathbf{A}}^H\right)\\&=\left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^H\right)\left(\operatorname{diag}\{\mathbf{p}_x\}\right)^2\left(\mathbf{C}^{-H}\hat{\mathbf{A}}^H\right)\end{aligned}$$

bulunur. Sadeleştirmelerden sonra Hessian matrisini

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}^*}\left(\frac{\partial J\{\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T=N^2\left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\right)\left(\operatorname{diag}\{\mathbf{p}_x\}\right)^2\left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\right)^H \qquad \textbf{(5.23)}$$

olarak ifade edebiliriz. Hermityen olan $\left(\operatorname{diag}\{\mathbf{p}_x\}\right)^2$ matrisi (5.20.c)'deki kısıt gereğince pozitif-tanımlı bir matristir. $\mathbf{C}^{-1}$ matrisi de tam-rank olduğundan, Hessian matrisi pozitif-tanımlı olmaktadır [44-45]. Böylelikle, (5.21)'deki fonksiyonun minimizasyonu sonucunda tek bir çözüm elde edilecektir. Bu çözüm ise

$$\frac{\partial J\{\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

koşulunu sağlamaktadır. Yani, (5.20)'deki problemin çözümü, (5.16)'daki kısıtı doğal olarak karşılamaktadır.

(5.20)'deki problemin çözümünün adım adım hesaplanması sırasında eşitsizlik kısıtının her adımda sağlanması için, minimize edilen maliyet fonksiyonuna fazladan bir bariyer terimi eklenmesi gerekmektedir. Neyse ki (5.21)'deki maliyet fonksiyonu, içerdiği entropi fonksiyonu nedeniyle doğal bir bariyer fonksiyonu işlevi görmektedir [46]. Dolayısıyla, (5.20)'deki problemin çözümünü Newton algoritmasıyla aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

Aşama I. Algoritmanın başlangıcı:

Adım sayısı parametresini $t = 0$ olarak başlat. Seçilen NxN frekans noktası için,

$$\infty > \mathbf{C}\,\widehat{\mathbf{A}}^{H}\,\boldsymbol{\lambda}^{(0)} > \mathbf{0}$$

kısıtını sağlayan bir Lagrange katsayıları vektörü oluştur. Örneklenmiş güç spektrumunun başlangıç değeri olan $\mathbf{p}_x^{(0)}$ vektörünü, (5.20.b) ve (5.19)'daki denklemleri kullanarak hesapla. Adım sayısı parametresinin değerini bir arttır.

Aşama II. Hessian matrisinin tersinin alınması:

$\mathbf{p}_x^{(t-1)}$ için (5.23)'te verilen Hessian matrisini hesapla. Daha sonra bu matrisin tersi olan $\mathbf{S}^{(t-1)}$ matrisini hesapla.

Aşama III. Lagrange katsayılarının güncellenmesi:

$J\left\{\boldsymbol{\lambda}^{(t)}\right\}$ değerini minimize edecek ve $\infty > \mathbf{C}\,\widehat{\mathbf{A}}^{H}\,\boldsymbol{\lambda}^{(t)} > \mathbf{0}$ kısıtını sağlayacak $\alpha^{(t)}$ pozitif katsayısı için

$$\boldsymbol{\lambda}^{(t)} = \boldsymbol{\lambda}^{(t-1)} + \alpha^{(t)}\,\mathbf{S}^{(t-1)}\left(\widehat{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t-1)} - \widehat{\mathbf{r}}_{eq}\right)$$

güncellemesini hesapla.

Aşama IV. Güç spektrumunun güncellenmesi:

Yeni lagrange katsayılarını kullanarak, (5.20.b) ve (5.19)'daki denklemler yardımıyla $\mathbf{p}_x^{(t)}$ vektörünü hesapla.

Aşama V. Maliyet fonksiyonunun hesaplanması ve adım sonu:

$$\varepsilon_1^{(t)} = \frac{\left\| \hat{\mathbf{r}}_{eq} - \hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t)} \right\|_2}{\left\| \hat{\mathbf{r}}_{eq} \right\|_2},$$

$\varepsilon_1^{(t)} \le 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{p}}_x = \mathbf{p}_x^{(t)}.$

$\varepsilon_1^{(t)} > 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = t+1$ ve Aşama II'ye dön.

Yukarıdaki algoritmanın en önemli özelliği güvenilir ve işlem yükü açısından verimli olmasıdır. (5.13.a), (5.13.b) ve (5.16)'daki denklemlerle tanımlanan sonlu frekans noktalı maksimum entropi probleminin çözümü var olduğunda, önerdiğimiz algoritma çözüme adım adım yakınsamaktadır. Ayrıca Aşama III'teki adım boyu seçimi skaler bir dışbükey fonksiyonun minimizasyonu olduğundan, algoritmanın işlem yükü daha da azalmaktadır.

$$\mathbf{d}^{(t-1)} = \mathbf{S}^{(t-1)} \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t-1)} - \hat{\mathbf{r}}_{eq} \right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha^{(t)}} \frac{\partial J\{\boldsymbol{\lambda}\}}{\partial \alpha^{(t)}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha^{(t)}} \left(\frac{\partial J\left\{\boldsymbol{\lambda}^{(t)}\right\}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(t)}} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(t)}}{\partial \alpha^{(t)}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \alpha^{(t)}} \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t)} - \hat{\mathbf{r}}_{eq} \right)^H \mathbf{d}^{(t-1)} \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(t)}} \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t)} \right)^H \mathbf{d}^{(t-1)} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(t)}}{\partial \alpha^{(t)}} \\
&= -\left(\frac{\partial \mathbf{q}_x^{(t)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(t)}} \frac{\partial \mathbf{p}_x^{(t)}}{\partial \mathbf{q}_x^{(t)}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x^{(t)}} \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x^{(t)} \right)^H \mathbf{d}^{(t-1)} \right)^T \mathbf{d}^{(t-1)} \\
&= N^2 \left(\mathbf{d}^{(t-1)} \right)^T \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1} \right)^* \left(\mathrm{diag}\left\{ \mathbf{p}_x^{(t)} \right\} \right)^2 \left(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1} \right)^H \mathbf{d}^{(t-1)} > 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $J\left\{\boldsymbol{\lambda}^{(t)}\right\}$ değerininin $\alpha^{(t)}$ katsayısına göre değişiminin dışbükey olduğu görülmektedir.

5.5 İki-Boyutlu ve Sonlu Frekans Noktalı L2 Güç Spektrumu

2-B çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin güç spektrumunu kestirmek için, maksimum entropi ilkesine alternatif olarak minimum norm ilkesi [47-48] kullanılabilir.

$x(m,n)$ işaretinin güç spektrumunun normunu minimize eden bu alternatif ilkenin uygulanması sonucunda elde edilen güç spektrumuna L2 güç spektrumu adı verilir ve sonlu frekans noktalı olarak aşağıdaki koşul ve kısıtlarla tanımlanabilir,

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \arg\min\ \mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_x \qquad \textbf{(5.24.a)}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0} \qquad \textbf{(5.24.b)}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x = \widehat{\mathbf{r}}_{eq}. \qquad \textbf{(5.24.c)}$$

Maksimum entropi güç spektrumu kestirim probleminde olduğu gibi, (5.24)'te verilen problemin çözümünün var olması için (5.24.b) ve (5.24.c)'deki kısıtlarla tanımlanan alt-problemin çözüm kümesinin boş küme olmaması gerekmektedir. Doğrusal programlama yöntemleriyle kontrol edilebilen bu koşul sağlandığında, (5.24.a)'daki koşul gereğince minimize edilen fonksiyon dışbükey olduğundan tek bir çözüm elde edilecektir [49].

(5.24)'teki problemin çözümü için gereksinim duyulan işlem yükünü azaltmak için öncelikle

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \mathbf{C}\,\widehat{\mathbf{A}}^{+}\widehat{\mathbf{r}}_{eq} \qquad \textbf{(5.25)}$$

şeklinde verilen iki-boyutlu ve sonlu frekans noktalı en küçük kareler (EKK) güç spektrumunun hesaplanması faydalı olacaktır. Çünkü (5.25)'te verilen güç spektrumu (5.24.b)'deki kısıtı sağladığında, bu spektrum aynı zamanda (5.24)'te tanımlanan L2 güç spektrumunu verecektir. Eğer bu özel durum oluşmazsa, (5.24)'teki problemin çözümünün hesaplanması için optimizasyon yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir.

(5.25)'te verilen güç spektrumunun (5.24.b)'deki kısıtı sağlamadığını düşünelim. Bu durumda, (5.24)'teki problemin çözümünü Newton yöntemiyle düzenli olarak hesaplamak için, (5.24.a)'da minimize edilen fonksiyona logaritmik bariyer fonksiyonunu ekleyebiliriz [36,50],

$$\hat{\mathbf{p}}_x = \arg\min\ J\{\mathbf{p}_x\} = \mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_x - \rho \sum_{k=1}^{N^2} \ln \mathbf{p}_x[k] \qquad \textbf{(5.26.a)}$$

$$\infty > \mathbf{p}_x > \mathbf{0} \qquad \textbf{(5.26.b)}$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{p}_x = \widehat{\mathbf{r}}_{eq}. \qquad \textbf{(5.26.c)}$$

Bu problem, pozitif olan ρ değeri düzgün seçildiğinde (5.24)'teki probleme denk olmaktadır. ρ bariyer sabitinin tek seferde belirlenmesi işlem yükünü arttıracağından, aşağıda verilen algoritmada olduğu gibi bu sabitin adım adım belirlenmesi gerekmektedir. Algoritmanın yakınsamasını sağlayan en küçük ρ değerine ulaşıldığında, (5.24)'te verilen problemin çözümü de elde edilmiş olacaktır.

Aşama I. Algoritmanın başlangıcı:

Adım sayısı parametresini $t = 0$ olarak başlat. Seçilen NxN frekans noktası için (5.24.b) ve (5.24.c)'deki kısıtları sağlayan $\mathbf{p}_x^{(0)}$ vektörünü doğrusal programlama yöntemleriyle bul. ρ bariyer sabitinin başlangıç değerini belirle. Adım sayısı parametresinin değerini bir arttır.

Aşama II. Algoritmanın iniş yönünün bulunması:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}}\left(\frac{\partial J\left\{\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right\}}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}}\right)^T \mathbf{d}^{(t-1)} + \frac{\partial J\left\{\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right\}}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}} = \mathbf{C}^{-T}\widehat{\mathbf{A}}^T\left(\boldsymbol{\lambda}^{(t-1)}\right)^*$$

$$\frac{\partial J\left\{\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right\}}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}} = 2\mathbf{p}_x^{(t-1)} - \rho\,\mathbf{q}_x^{(t-1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}}\left(\frac{\partial J\left\{\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right\}}{\partial \mathbf{p}_x^{(t-1)}}\right)^T = 2\mathbf{I} + \rho\left(\operatorname{diag}\left\{\mathbf{p}_x^{(t-1)}\right\}\right)^{-2}$$

olmak üzere $\widehat{\mathbf{A}}\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d}^{(t-1)} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan $\boldsymbol{\lambda}^{(t-1)}$ katsayılarını belirle. Daha sonra bu Lagrange katsayılarını kullanarak $\mathbf{d}^{(t-1)}$ iniş yönünü hesapla.

Aşama III. Güç spektrumunun güncellenmesi:

$J\left\{\mathbf{p}_x^{(t)}\right\}$ değerini minimize edecek ve $\infty > \mathbf{p}_x^{(t)} > \mathbf{0}$ kısıtını sağlayacak $\alpha^{(t)}$ pozitif katsayısı için

$$\mathbf{p}_x^{(t)} = \mathbf{p}_x^{(t-1)} + \alpha^{(t)}\mathbf{d}^{(t-1)}$$

güncellemesini hesapla.

Aşama IV. Adım sonu:

$\left\|\alpha^{(t)}\mathbf{d}^{(t-1)}\right\|_2 > 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = t+1$ ve Aşama II'ye dön.

$\left\|\alpha^{(t)}\mathbf{d}^{(t-1)}\right\|_2 \le 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = t+1$, pozitif ρ değerini azalt ve Aşama II'ye dön.

5.6 Benzetim Sonuçları

Önceki alt-bölümlerde verilen 2-B güç spektrum kestirim yöntemlerinin başarımını araştırmak için, 2-B ve 3-kanallı bir çoklu-hızlı sistem ele alınmaktadır. Bu sistemin kanal filtreleri

$$H_1(z_1,z_2)=\left(0.253+0.493z_1^{-1}+0.253z_1^{-2}\right)\left(0.253+0.493z_2^{-1}+0.253z_2^{-2}\right)$$

$$H_2(z_1,z_2)=1-\left(0.285+0.431z_1^{-1}+0.285z_1^{-2}\right)\left(0.285+0.431z_2^{-1}+0.285z_2^{-2}\right)$$

$$H_3(z_1,z_2)=z_1^{-2}-\left(0.295+0.411z_1^{-1}+0.295z_1^{-2}\right)\left(0.295+0.411z_2^{-1}+0.295z_2^{-2}\right)$$

şeklindedir ve 2-B alt-örnekleyici oranları da $K_1 = 2$, $K_2 = K_3 = 4$ olarak verilmektedir.

5.6.1 Örnek 5.1

İlk örnekte, yukarıda verilen 2-B çoklu-hızlı sistemin girişine özilinti fonksiyonu

$$r_x(k,l)=\cos(2\pi 0.05k+2\pi 0.1l)+\frac{1}{2}\cos(2\pi 0.25k+2\pi 0.15l)+\frac{1}{2}\cos(2\pi 0.2k$$
$$+2\pi 0.2l)+2\delta(k)$$

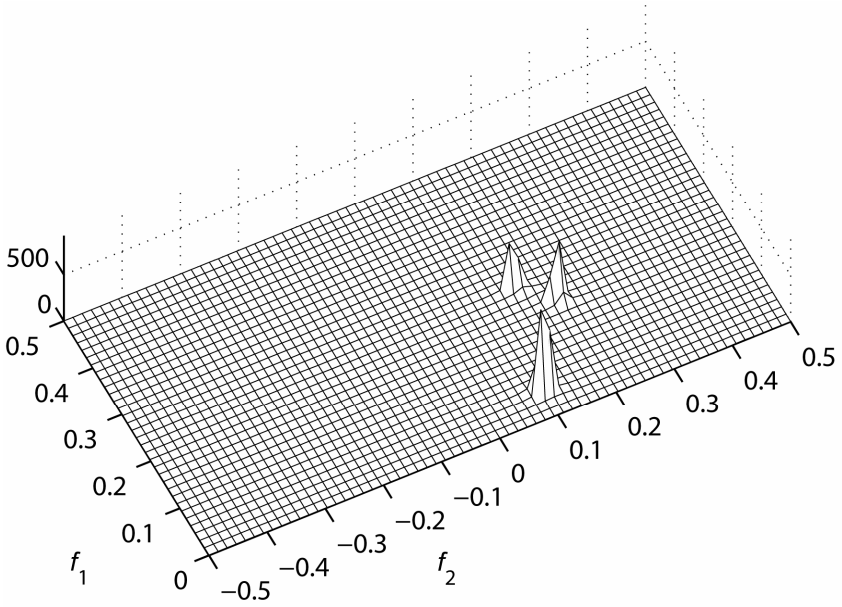
şeklinde olan 2-B harmonik işaret uygulanmaktadır. Bu rastgele işaretin güç spektrumunu kestirmek için kullanılacak olan 2-B çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki işaretlerin özilinti değerlerinin gürültüsüz ve kesin olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca işlem yükünü arttırmamak için, kullanılacak olan $r_{yi}(k,l)$ özilinti değerlerinin gecikmeleri $k \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, $l \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ olarak sınırlandırılmaktadır. Çözümün frekans nokta sayısı ise 64x64 seçilmiştir.

Bölüm 5.4'teki algoritmayla hesaplanan 2-B maksimum entropi güç spektrumu Şekil 5.2'de verilmektedir. 2-B maksimum entropi güç spektrumunu elde etmek için adım adım hesaplamaya

$$\mathbf{p}_x^{(0)}=\mathbf{C}\mathbf{D}\hat{\mathbf{A}}^{+}\mathbf{r}_{eq}$$

$$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T\right\}$$

şeklinde başlanmış ve algoritma 11 adım sonunda yakınsamıştır. Çizelge 5.1'de algoritmanın yakınsaması ayrıntılı olarak gösterilmektedir.



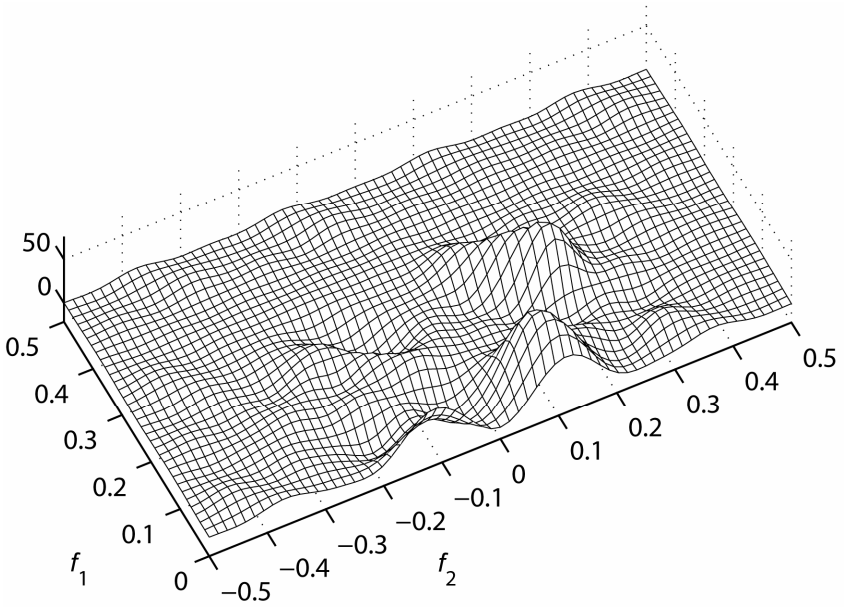
Şekil 5.2 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı maksimum entropi güç spektrumu.

Çizelge 5.1 : Örnek 5.1 için önerilen 2-B maksimum entropi güç spektrumu kestirim algoritmasının yakınsaması.

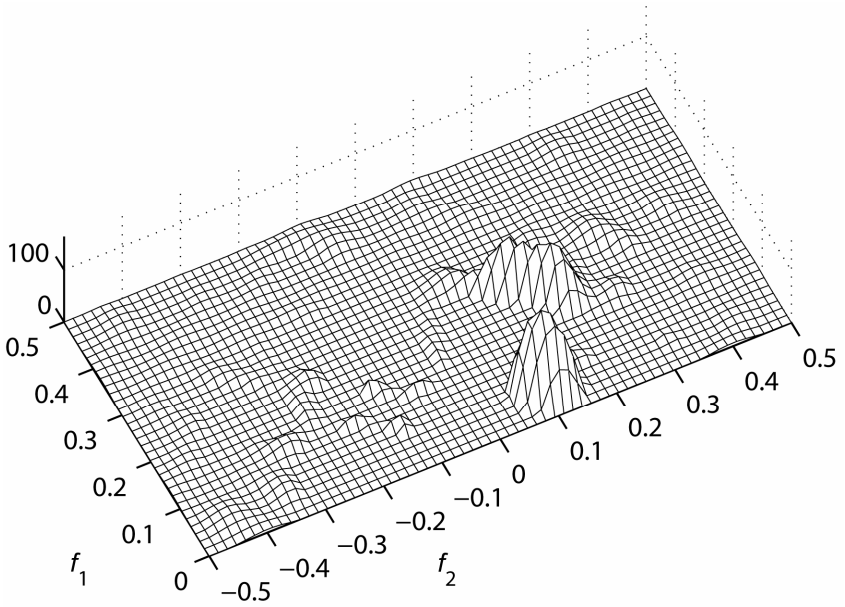
t	$\alpha^{(t)}$	$J\{\boldsymbol{\lambda}^{(t)}\}$	$\varepsilon_1^{(t)}$
0		1.3909	$6.42\text{x}10^{-1}$
1	0.05	1.0584	$5.69\text{x}10^{-1}$
2	0.09	0.9583	$4.26\text{x}10^{-1}$
3	0.19	0.8941	2.45
4	0.40	0.8271	1.89
5	0.88	0.7579	4.12
6	1.28	0.7417	1.74
7	1.46	0.7408	$6.47\text{x}10^{-1}$
8	2.29	0.7402	$1.94\text{x}10^{-1}$
9	1.81	0.7397	$8.81\text{x}10^{-2}$
10	1.64	0.7393	$2.00\text{x}10^{-2}$
11	1.08	0.7393	$3.42\text{x}10^{-3}$

(5.25)'teki denklemle bulunan 2-B en küçük kareler güç spektrumu ise Şekil 5.3'te verilmektedir. Bölüm 5.5'teki algoritmayla bulunan 2-B L2 güç spektrumu da Şekil 5.4'te verilmektedir. Bu güç spektrumunu elde etmek için kullanılan bariyer parametresinin son değeri 0.1'dir. Şekillerde görüldüğü gibi, 2-B maksimum entropi güç

spektrumu harmonik işaretin frekanslarını başarıyla kestirmektedir. Buna karşılık 2-B en küçük kareler ve L2 güç spektrumlarının çözünürlükleri tatmin edici düzeyde değildir.



Şekil 5.3 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı en küçük kareler güç spektrumu.



Şekil 5.4 : Örnek 5.1 için 64x64 noktalı L2 güç spektrumu.

5.6.2 Örnek 5.2

Bu örnekte, incelediğimiz 2-B çoklu hızlı sistemin girişine çeyrek düzlem destekli, nedensel, sıfır ortalamalı ve model parametreleri $a_{0,0} = 1$, $a_{0,1} = –0.34$, $a_{1,0} = –0.28$, $a_{1,1} = –0.23$, $b_{0,0} = 1$, $b_{0,1} = 0.4$, $b_{1,0} = 0.35$, $b_{1,1} = 0.15$ olan özbağlanımlı ve kayan

ortalamalı bir rastgele süreç [51] uygulanmaktadır. Çözüm için varsayılan frekans nokta sayısı, 2-B özilinti domeninde örtüşmeye neden olmayacak şekilde 32x32 seçilmiştir. Diğer tüm benzetim değerleri, önceki örnekteki gibidir.

Bölüm 5.4'te önerdiğimiz 2-B maksimum entropi güç spektrumu kestirim algoritması 7 adım sonunda yakınsamaktır. Çizelge 5.2'de algoritmanın yakınsaması ayrıntılı olarak gösterilmektedir.

Çizelge 5.2 : Örnek 5.2 için önerilen 2-B maksimum entropi güç spektrumu kestirim algoritmasının yakınsaması.

t	$\alpha^{(t)}$	$J\left\{\boldsymbol{\lambda}^{(t)}\right\}$	$\varepsilon_1^{(t)}$
0		1.4548	$8.37\text{x}10^{-1}$
1	0.03	1.2021	$8.11\text{x}10^{-1}$
2	0.11	0.9759	$7.44\text{x}10^{-1}$
3	0.50	0.7304	1.15
4	3.89	0.2319	$1.37\text{x}10^{-1}$
5	0.72	0.2123	$1.57\text{x}10^{-1}$
6	1.25	0.2105	$2.73\text{x}10^{-2}$
7	1.07	0.2105	$1.70\text{x}10^{-3}$

Bu örnek için elde edilen güç spektrumu kestirimlerini karşılaştırmak için, orjinal özilinti değerleri ile kestirilen özilinti değerleri arasındaki hataya dayanan ve

$$NÖKU = \frac{\left\|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}\right\|_2}{\left\|\mathbf{r}\right\|_2} \qquad \textbf{(5.27)}$$

şeklinde tanımlanan normalize özilinti kestirim uyumsuzluğu ölçüsünü kullanabiliriz. Bu ölçüye göre belirlenen 2-B maksimum entropi, en küçük kareler ve L2 (ρ = 0.01) güç spektrumlarının başarımları Çizelge 5.3'te gösterilmektedir. Çizelgede görüldüğü gibi en iyi kestirimi yine maksimum entropi yöntemi sağlamaktadır.

Çizelge 5.3 : Örnek 5.2 için 32x32 noktalı güç spektrumu kestirimlerinin normalize özilinti kestirim uyumsuzlukları.

	Maksimum Entropi	EKK	L2
Normalize Özilinti Kestirim Uyumsuzluğu	$1.14\text{x}10^{-1}$	$1.73\text{x}10^{-1}$	$1.66\text{x}10^{-1}$

6. ÇOKLU-HIZLI SİSTEMLER İÇİN SEYREK İŞARET KESTİRİMİ

6.1 Motivasyon

Son zamanlarda, işaret kestirimi için seyrek (sparse) yöntemlerin kullanılması giderek yaygınlaşmaktadır [52]. Kestirilmek istenen işaretin bir domende seyrek olmasına dayanan bu yöntemler, işaretin yeterince gözlemlenemediği durumlarda kestirim başarımını ciddi ölçüde arttırmaktadır. Ne var ki seyrek yöntemler, algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemlere henüz uygulanmamıştır. Literatürdeki bu boşluğu doldurmak, yapacağımız çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır.

6.2 Sistem Modeli

Çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ işaretinin gerçel olduğunu ve N_x tane örneğinin bulunduğunu düşünelim,

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(N_x - 1) \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Kanal filtrelerinin çıkışındaki $x_i(n)$ işaretlerini ifade etmek için konvolüsyon matrislerini kullanabiliriz,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x},$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{h}_i \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

$i = 1, 2, \dots, L.$

Bu denklemlerde, $\mathbf{H}_i$ konvolüsyon matrisi $(N_x + N_{hi} - 1)$ x N_x boyutludur. N_{hi} ise $h_i(n)$ kanal filtresinin uzunluğu olarak tanımlanmaktadır. Gözlem gürültüsünün olmadığını varsayarak, çoklu hızlı sistemin çıkışındaki gözlemleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{H}_i \mathbf{x}$$
$$i = 1, 2, \ldots, L. \tag{6.3}$$

Alt-örnekleme işlemini ifade etmek için kullanılan $\mathbf{D}_i$ matrisinin elemanları ise

$$\mathbf{D}_i[k,l] = \begin{cases} 1, & l = (k-1)K_i + 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{N_x + N_{hi} - 1}{K_i} \right\rceil \tag{6.4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, L.$$

şeklinde, tavan (ceil) fonksiyonu kullanılarak tanımlanmaktadır. Çoklu-hızlı sistemin çıkışındaki bütün gözlemler tek bir vektörle ifade edilmek istendiğinde,

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_L \mathbf{H}_L \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

şeklindeki bağıntıyı da kullanabiliriz.

Alt-örnekleyicilerin varlığı nedeniyle, çoklu-hızlı sistemin giriş-çıkış ilişkisini veren (6.5)'teki denklemin çoğunlukla sonsuz sayıda çözümü bulunmaktadır. Giriş işaretini kestirmek için akla gelen ilk çözüm ise, en küçük kareler yönteminin uygulanmasıdır,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{+}\mathbf{y}. \tag{6.6}$$

6.3 Seyrek L1 İşaret Kestirimi

Birçok uygulamada, çoklu-hızlı sistemin girişindeki $x(n)$ işareti sıkıştırılabilir bir işaret olabilir. Daha özel olarak belirtecek olursak, bir $\mathbf{\Phi}$ dönüşüm matrisi kullanılarak $x(n)$ işareti seyrek olarak ifade edilebilir,

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{s},$$
$$\|\mathbf{s}\|_0 = S \ll N_x. \tag{6.7}$$

Bu durumda $x(n)$ işaretini kestirmek için, (6.5)'teki denklemin sonsuz sayıdaki çözümü içerisinden **s** vektörünün L0 normunu (sıfırdan farklı elemanlarının sayısını) minimum yapan çözüm aranabilir,

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\min \|\mathbf{s}\|_0, \tag{6.8.a}$$

$$\mathbf{H\Phi s} = \mathbf{y}. \tag{6.8.b}$$

Bu seyrek problemin çözümünün, orjinal **s** vektörüne yakın olup olmayacağı bazı faktörlere bağlıdır. Buna göre, S değeri azaldıkça, gözlem sayısı arttıkça, **H** ve **Φ** matrisleri arasındaki ilinti azaldıkça seyrek yöntemin başarımı artmaktadır.

(6.8)'de verilen seyrek işaret kestirim probleminin çözümünün hesaplanması için, öncelikle $\hat{\mathbf{s}}$ vektörünün sıfır değerli elemanlarının yerlerinin bulunması gerekmektedir. Daha sonra **HΦ** matrisinin kullanılmayan sütunları elenerek çözüm hesaplanır. Fakat çözümün ilk aşaması, olası tüm kombinasyonların tek tek denenmesini gerektirmektedir. Dolayısıyla seyrek yönteminin uygulanabilirliği ciddi ölçüde azalmaktadır [53].

Çözümün hesaplanması için gereken işlem yükünü azaltmak için, seyrek işaret kestirim problemi L0 normu yerine L1 normu kullanılarak yaklaşık olarak tanımlanabilir,

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\min \|\mathbf{s}\|_1, \tag{6.9.a}$$

$$\mathbf{H\Phi s} = \mathbf{y}. \tag{6.9.b}$$

Bu problem, (6.8)'de verilen orjinal problemin aksine, doğrusal programlama ile çözülebilen bir dışbükey optimizasyon problemidir.

Seyrek L1 yönteminde çözümün hesaplanması için öncelikle N_s elemanlı olan **s** vektörünü, negatif değerli elemanı olmayan iki vektörün farkı olarak ifade edelim,

$$\begin{aligned} &\mathbf{s} = \mathbf{s}_+ - \mathbf{s}_- \\ &\mathbf{s}_+ \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s}_- \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Bu ifade biçimi bilinmeyen sayısını iki katına çıkarsa da, (6.9)'daki problemi basite indirgemektedir,

$$\hat{\mathbf{z}} = \arg\min \mathbf{1}^T \mathbf{z}, \tag{6.11.a}$$

$$\mathbf{H\Phi B z} = \mathbf{y}, \tag{6.11.b}$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \qquad \textbf{(6.11.c)}$$

(6.9)'da verilen problemin eşdeğeri olan bu problemde,

$$\mathbf{z}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_+^T & \mathbf{s}_-^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Ns} & -\mathbf{I}_{Ns} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.12)}$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylelikle, seyrek L1 yönteminin çözümü doğrusal programlama paketleri kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilmektedir [54].

6.4 Benzetim Sonuçları

6.4.1 Örnek 6.1

İlk örnekte kanal filtrelerinin uzunlukları $N_{h1} = N_{h2} = 5$ ve alt-örnekleyici oranları $K_1 = 2$, $K_2 = 4$ olan bir çoklu-hızlı sistem incelenmektedir. Kanal filtrelerinin katsayılarının ise birbirlerinden bağımsız, sıfır ortalamalı, birim güçlü ve Gauss dağılımlı olduğu varsayılmaktadır. Bu çoklu-hızlı sistemin girişine, N_x noktalı ayrık kosinüs dönüşümü [41] kullanılarak seyrek olarak ifade edebilen bir işaret uygulanmaktadır,

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}, \quad \|\mathbf{s}\|_0 = S.$$

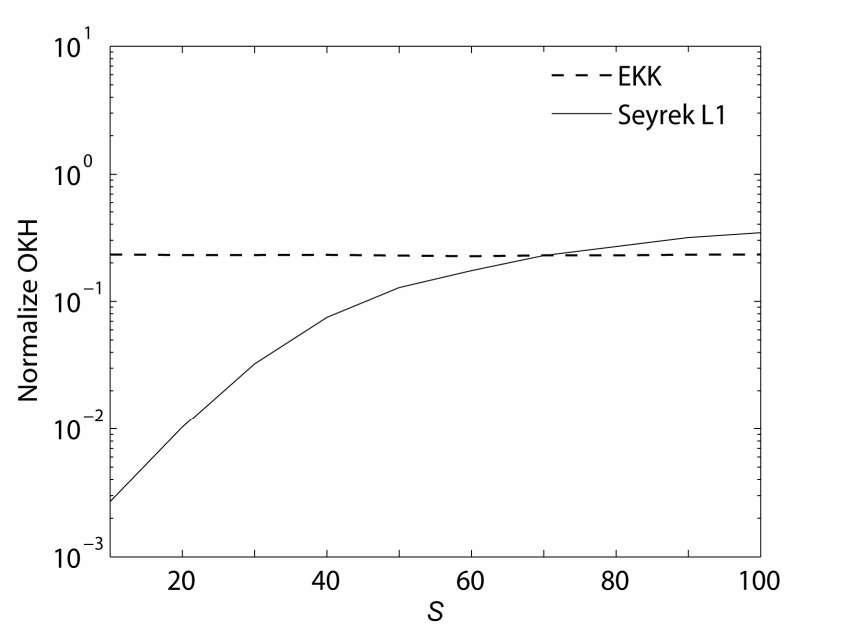
$$\mathbf{\Phi}[k,l] = w(k)\cos\left(\frac{\pi(k-1)(2l-1)}{2N_x}\right),$$

$$w(k) = \begin{cases} N_x^{-1/2}, & k = 1 \\ (N_x/2)^{-1/2}, & k = 2, \ldots, N_x. \end{cases}$$

$N_s = N_x$ elemanlı olan $\mathbf{s}$ vektörünün sıfırdan farklı S elemanı, konumları rastgele ve değerleri de birbirlerinden bağımsız, sıfır ortalamalı, birim güçlü, Gauss dağılımlı olarak modellenmektedir. İşaret kestirimin başarımını belirlemek için, (4.17)'de verilen normalize ortalama karesel hata ölçüsü kullanılmaktadır.

Bu benzetim değerleri ve $N_x = 100$ için, 1000 bağımsız gerçekleme sonucunda elde edilen seyrek L1 yönteminin başarımı Şekil 6.1'de verilmektedir. Karşılaştırma için, (6.6)'da tanımlanan en küçük kareler yönteminin başarımı da aynı şekil üzerinde verilmektedir. Şekil 6.1'de görüldüğü gibi, düşük S değerleri için seyrek L1 yönteminin başarımı oldukça tatmin edicidir. Buna karşılık, S değeri arttıkça seyrek

L1 yönteminin başarımı azalmaktadır. Ayrıca, en küçük kareler yönteminin başarımının S değerinden bağımsız olduğu da Şekil 6.1'de görülmektedir.

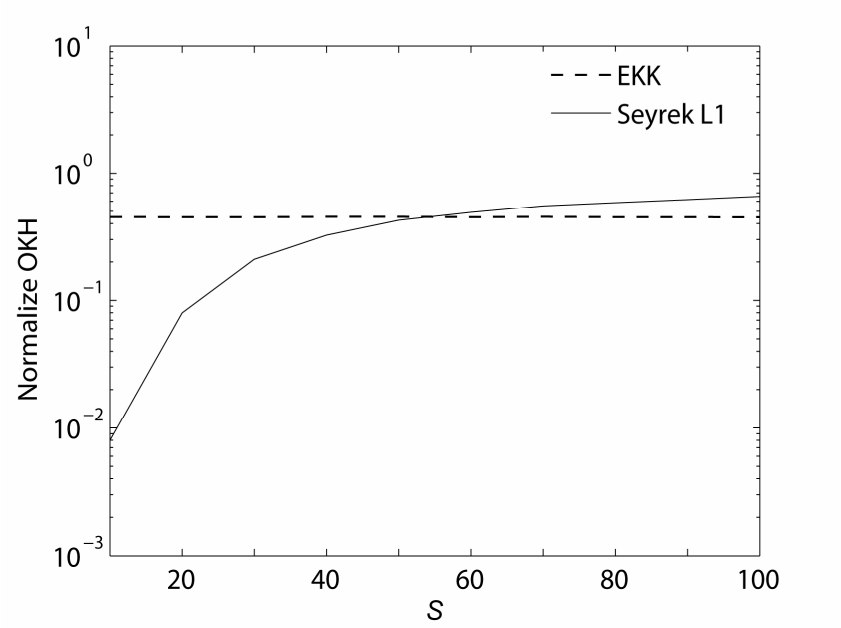


Şekil 6.1 : Örnek 6.1 için en küçük kareler (EKK) ve seyrek L1 işaret kestirimlerinin normalize ortalama karesel hata (OKH) başarımları (N_x = 100).

6.4.2 Örnek 6.2

İkinci örnekte ise alt-örnekleyici oranları K_1 = 3, K_2 = 5 olan bir çoklu-hızlı sistem incelenmektedir. Bu sisteme ait diğer benzetim parametreleri ise önceki örnekteki gibi seçilmiştir.

Varsayılan senaryo için seyrek L1 ve en küçük kareler yöntemlerinin normalize ortalama karesel hata başarımları Şekil 6.2'de verilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, alt-örnekleyici oranlarının artması her iki yöntemin başarımını da olumsuz yönde etkilemektedir. Çünkü, alt-örnekliyici oranlarının artması, sabit N_x için gözlem sayısını azaltmaktadır. İki örnek birlikte incelendiğinde ise, seyrek L1 yönteminde normalize ortalama karesel hata değerinin 0.01'nin altına düşmesi için gözlem sayısının S değerinin en az 4-5 katı olması gerektiği görülmektedir.



Şekil 6.2 : Örnek 6.2 için en küçük kareler (EKK) ve seyrek L1 işaret kestirimlerinin normalize ortalama karesel hata (OKH) başarımları (N_x = 100).

7. SONUÇLAR

Bu tezde, algılayıcı ağlarını modelleyen çoklu-hızlı sistemlerde işaret ve güç spektrumu kestirimi için dört farklı yöntem geliştirilmiştir.

İlk olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretini kestiren uyarlamalı dik kafes filtresi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu filtre, standart çok-kanallı ve uyarlamalı dik kafes filtresine göre bazı değişiklikler içermektedir: Çoklu-hızlı gözlemlerin kendi alt-örnekleme oranlarıyla üst-örneklendikten sonra işlenmesi, güncellemelerin zamanda periyodik olarak yapılması ve üst-örneklemeden kaynaklanan gereksiz işlem yükünün azaltılması. Dik kafes filtrelerin hesaplama verimliliği, modülerlik ve sayısal kararlılık gibi ortak avantajlarını taşıyan bu yeni filtrenin başarımı, referans transversal filtrenin başarımıyla karşılaştırılmıştır. Geliştirilen uyarlamalı dik kafes filtresinin, başarımdan ödün vermeden gereksinim duyulan işlem yükünü önemli ölçüde azalttığı görülmüştür.

İkinci olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin maksimum entropi güç spektrumunu kestiren iteratif bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemi geliştirmek için öncelikle maksimum entropi güç spektrumu sonlu frekans noktalı olarak ifade edilmiştir. Daha sonra, benzer ama daha basit problemlerin çözümü için Lim ve Malik tarafından önerilmiş olan iteratif hesaplama algoritmasının temel çatısı kullanılarak yeni bir hesaplama algoritması geliştirilmiştir. Literatürdeki yöntemlerin aksine hesaplama verimliliği sağlayan yeni yöntemin özellikleri verildikten sonra, başarım analizi için bazı benzetimler yapılmıştır. Benzetim sonuçları, geliştirilen algoritmanın maksimum entropi çözümüne yakınsadığını ve bulunan güç spektrumu kestiriminin çoklu-hızlı sistemin girişindeki bilgi işaretinin kestiriminde başarıyla kullanılabileceğini göstermiştir.

Üçüncü olarak, 2-B işaretlerin algılanmasında kullanılan çoklu-hızlı sistemlerde sistemin girişindeki 2-B bilgi işaretinin güç spektrumunun kestirilmesi üzerinde durulmuştur. İlgili kestirim probleminin tanımlanmasından ve özelliklerinin verilmesinden sonra, problemin çözümünde 2-B maksimum entropi ilkesinin kullanılması

önerilmiştir. Sonrasında 2-B maksimum entropi güç spektrumunun elverişli olarak hesaplanması için 2-B maksimum entropi güç spektrumu örneklenmiş, örnekler 1-B olarak ifade edilmiş ve konveks programlamadaki dualite ilkesinden faydalanarak verimli bir hesaplama algoritması geliştirilmiştir. Karşılaştırmalarda kullanılan 2-B L2 güç spektrumunun hesaplanması üzerinde de ayrıntılı olarak durulmuştur. Yapılan benzetimler, geliştirdiğimiz 2-B maksimum entropi yönteminin üstün kestirim başarımını göstermiştir.

Dördüncü olarak, çoklu-hızlı sistemin girişindeki işaretin belirli bir domende seyrek olması durumunda, giriş işaretinin kestiriminin nasıl iyileştirilebileceği üzerinde durulmuştur. Mevcut seyrek L0 ve L1 işaret kestirim yöntemleri, ilgili kestirim problemine uyarlanmış ve bazı benzetimler yapılmıştır. Benzetim sonuçları, çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin kestiriminde seyrek işaret kestirim yöntemlerinin başarıyla kullanılabileceğini göstermiştir.

Gelecek çalışma olarak, 2-B çoklu-hızlı sistemler için önerdiğimiz maksimum entropi güç spektrumu kestirim yönteminin süper-çözünürlüklü görüntüleme probleminin çözümünde kullanılması düşünülmektedir. Ayrıca çoklu-hızlı sistemlerde giriş işaretinin gürültülü gözlemlerden kestirilmesi için, seyrek işaret kestirim yöntemlerinin kullanılması da planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **G. Strang ve T. Nguyen**, 1996. *Wavelets and filter banks*, Wellesley, United States.

[2] **R. C. Gonzales ve R. E. Woods**, 2002. *Digital image processing*, Prentice-Hall, United States.

[3] **P. P. Vaidyanathan**, 1990. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: A tutorial, *Proc. IEEE*, vol. 78, 56-93.

[4] **I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam ve E. Cayirci**, 2002. A survey on sensor networks, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 40, 102-114.

[5] **O. S. Jahromi**, 2007. *Multirate statistical signal processing*, Springer, The Netherlands.

[6] **C. W. Therrien**, 2001. Issues in multirate statistical signal processing, *Proc. 35th Asilomar Conf. SSC*, United States, 573-576.

[7] **R. J. Kuchler ve C. W. Therrien**, 2003. Optimal filtering with multirate observations, *Proc. 37th Asilomar Conf. SSC*, United States, 1208-1212.

[8] **R. J. Kuchler**, 2005. Theory of multirate statistical signal processing and applications, *Ph.D. Thesis*, Naval Postgraduate School, United States.

[9] **C. W. Therrien ve A. H. Hawes**, 2002. Least squares optimal filtering with multirate observations, *Proc. 36th Asilomar Conf. SSC*, United States, 1782-1786.

[10] **A. H. Hawes ve C. W. Therrien**, 2003. LMS adaptive filtering with multirate observations, *Proc. 37th Asilomar Conf. SSC*, United States, 567-570.

[11] **J. W. Scrofani ve C. W. Therrien**, 2005. A stochastic multirate signal processing approach to high-resolution signal reconstruction, *Proc. IEEE ICASSP*, United States, vol. 4, 561-564.

[12] **J. W. Scrofani**, 2005. Theory of multirate signal processing with application to signal and image reconstruction, *Ph.D. Thesis*, Naval Postgraduate School, United States.

[13] **O. S. Jahromi, B. A. Francis ve R. H. Kwong**, 2004. Relative information of multi-rate sensors, *Inf. Fusion*, vol. 5, 119-129.

[14] **O. S. Jahromi, B. A. Francis ve R. H. Kwong**, 2001. Multirate signal estimation, *Proc. Canadian Conf. ECE*, Canada, 147-152.

[15] **O. S. Jahromi, B. A. Francis ve R. H. Kwong**, 2004. Spectrum estimation using multirate observations, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, 1878-1890.

[16] **O. S. Jahromi**, 2002. Theory of multirate statistical signal processing, *Ph.D. Thesis*, University of Toronto, Canada.

[17] **O. S. Jahromi ve P. Aarabi**, 2005. Theory and design of multirate sensor arrays, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, 1739-1753.

[18] **O. S. Jahromi ve P. Aarabi**, 2004. Distributed spectrum estimation in sensor networks, *Proc. IEEE ICASSP*, Canada, vol. 3, 849-852.

[19] **A. N. Amini, M. S. Takyar ve T. T. Georgiou**, 2006. A homotopy approach for multirate spectrum estimation, *Proc. IEEE ICASSP*, France, vol. 3, 532-535.

[20] **A. N. Amini, M. S. Takyar ve T. T. Georgiou**, 2006. Spectral analysis from multi-rate observations: Itakura-Saito based approximation of power spectra and capon-like spectral envelopes, *Proc. IEEE SAM*, United States, 521-525.

[21] **L. P. Yan, B. S. Liu ve D. H. Zhou**, 2006. The modeling and estimation of asynchronous multirate multisensor dynamic systems, *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 10, 63-71.

[22] **L. P. Yan, B. S. Liu ve D. H. Zhou**, 2007. Asynchronous multirate multisensor information fusion algorithm, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 43, 1135-1146.

[23] **Y. Liang, T. Chen ve Q. Pan**, 2009. Multi-rate optimal state estimation, *Int. J. Control*, vol. 82, 2059-2076.

[24] **Y. Liang, T. Chen ve Q. Pan**, 2010. Multi-rate stochastic H_∞ filtering for networked multi-sensor fusion, *Automatica*, vol. 46, 437-444.

[25] **H. Zhang, M. V. Basin ve M. Skliar**, 2007. Ito-Volterra optimal state estimation with continuous, multirate, randomly sampled, and delayed measurements, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, 401-416.

[26] **W. Li, S. L. Shah ve D. Xiao**, 2008. Kalman filters in non-uniformly sampled multirate systems: For FDI and beyond, *Automatica*, vol. 44, 199-208.

[27] **V. P. Sathe ve P. P. Vaidyanathan**, 1993. Effects of multirate systems on the statistical properties of random signals, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, 131-146.

[28] **S. Haykin**, 2002. *Adaptive filter theory*, Prentice-Hall, United States.

[29] **J. P. Burg**, 1975. Maximum entropy spectral analysis, *Ph.D. Thesis*, Stanford University, United States.

[30] **M. H. Hayes**, 1996. *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, United States.

[31] **F. Ling ve J. G. Proakis**, 1984. A generalized multichannel least squares lattice algorithm based on sequential processing stages, *IEEE Trans. ASSP*, vol. 32, 381-389.

[32] **M. T. Ozden, A. H. Kayran ve E. Panayirci**, 1996. Satellite channel identification with lattice orthogonalisation, *Electron. Lett.* vol. 32, 302-304.

[33] **M. T. Ozden, A. H. Kayran ve E. Panayirci**, 1996. Adaptive Volterra filtering with complete lattice orthogonalization, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, 2092-2098.

[34] **J. S. Lim ve N. A. Malik**, 1981. A new algorithm for two-dimensional maximum entropy power spectrum estimation, *IEEE Trans. ASSP*, vol. 29, 401-413.

[35] **J. S. Lim ve N. A. Malik**, 1981. Maximum entropy power spectrum estimation of signals with missing correlation points, *IEEE Trans. ASSP*, vol. 29, 1215-1217.

[36] **A. Antoniou ve W. S. Lu**, 2007. *Practical optimization: Algorithms and engineering applications*, Springer, United States.

[37] **S. C. Park, M. K. Park ve M. G. Kang**, 2003. Super-resolution image reconstruction, *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 20, 21-36.

[38] **H. Greenspan**, 2009. Super-resolution in medical imaging, *Comput. J.*, vol. 52, 43-63.

[39] **N. Srinivasa, K. R. Ramakrishnan ve N. Rajgopal**, 1992. On two-dimensional maximum entropy spectral estimation, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, 241-244.

[40] **M. A. Ghouse**, 1993. 2D grid architectures for the DFT and the 2D DFT, *J. VLSI Signal Process.*, vol. 5, 57-74.

[41] **J. W. Woods**, 2006. *Multidimensional signal, image, and video processing and coding*, Academic Press, United States.

[42] **I. W. Newman**, 1979. Extension to the maximum entropy method II, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 25, 705-708.

[43] **S. W. Lang ve J. H. McClellan**, 1982. Multidimensional MEM spectral estimation, *IEEE Trans. ASSP*, vol. 30, 880-887.

[44] **A. H. Sayed**, 2008. *Adaptive filters*, John Wiley & Sons, United States.

[45] **R. A. Horn ve C. R. Johnson**, 1985. *Matrix analysis*, Cambridge University Press, United Kingdom.

[46] **J. H. McClellan**, 1982. Multidimensional spectral estimation, *Proc. IEEE*, vol. 70, 1029-1039.

[47] **R. K. Goodrich ve A. Steinhardt**, 1986. L2 spectral estimation, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 46, 417-426.

[48] **H. Yin, C. Ling ve L. Qi**, 2006. Convergence rate of Newton's method for L2 spectral estimation, *Math. Program.*, vol. 107, 539-546.

[49] **S. Lakshmanan ve H. Derin**, 1993. Extendibility tests for multidimensional covariance sequences, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, 1836-1846.

[50] **D. G. Luenberger ve Y. Ye**, 2008. *Linear and nonlinear programming*, Springer, United States.

[51] **A. Kizilkaya ve A. H. Kayran**, 2006. Computation of the exact Cramer-Rao lower bound for 2-D ARMA parameter estimation-I: The quarter plane case, *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 53, 23-27.

[52] **E. J. Candes ve M. B. Wakin**, 2008. An introduction to compressive sensing, *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 25, 21-30.

[53] **R. G. Baraniuk**, 2007. Compressive sensing, *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, 118-120 ve 124.

[54] **S. Mallat**, 2009. *A wavelet tour of signal processing: The sparse way*, Academic Press, United States.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ahmet Korhan Tanç.

Doğum Yeri ve Tarihi: İzmir, 1978.

Lisans: Dokuz Eylül Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Müh., 2001.

Yüksek Lisans: Dokuz Eylül Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Müh., 2004.

Uluslararası Yayınları:

- A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2011: Maximum entropy power spectrum estimation for 2-D multirate systems, *Circuits Syst. Signal Process.*, DOI: 10.1007/s00034-011-9286-9.
- A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2010: Iterative maximum entropy power spectrum estimation for multirate systems, *Int. J. Electron. Commun. (AEU)*, vol. 64, 93-98.
- H. Karaca, A. K. Tanc ve S. Kilinc, 2002: Analysis of tuning in resonant inverter, *Electron. Lett.*, vol. 38, 1155-1156.
- A. H. Kayran, E. Camcioglu, E. M. Eksioglu, A. K. Tanc ve S. Seker, 2011: Generalized 2D lattice structure for causal and noncausal modeling of random fields, *Proc. 44th IEEE ISCAS*, Brazil, 1756-1759.
- E. M. Eksioglu, A. K. Tanc ve A. H. Kayran, 2010: A compressive sensing framework for multirate signal estimation, *Proc. 10th Int. Conf. ISSPA*, Malaysia, 716-719.
- A. K. Tanc, E. M. Eksioglu ve A. H. Kayran, 2009: Adaptive multirate signal estimation with lattice orthogonalization, *Proc. 16th IEEE ICECS*, Tunisia, 117-119.