İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNİN DEĞİŞKEN HIZLI VE ŞİDDETİ ZAMANLA ARTAN TEKİL YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ozan ÇELİK

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim BAKIRTAŞ

HAZİRAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNİN DEĞİŞKEN HIZLI VE ŞİDDETİ ZAMANLA ARTAN TEKİL YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ozan ÇELİK
501091137

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Mayıs 2011
Tezin Savunulduğu Tarih : 07 Haziran 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İbrahim BAKIRTAŞ (İTÜ)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdul Hayır (İTÜ)
Prof. Dr. İrfan Coşkun (YTÜ)

HAZİRAN 2011

Aileme,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimimin kazandırmış olduğu pek çok niteliğin ürünü olan bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında tüm lisans ve yüksek lisans hayatım boyunca gerek akademik gerekse sosyal hayata dair pek çok alanda bilgisini, tecrübelerini benimle paylaşma inceliğini göstermiş olan hocam Sayın Prof. Dr. İbrahim Bakırtaş' a en derin saygı ve sevgilerimle teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma sürecinde pek çok defa değerli görüşlerine başvurduğum Sayın Prof. Dr. Abdul Hayır' a, yenilikçi fikirlerinden ve özverili yardımlarından yararlandığım dostum Sayın Araş. Gör. H. Faik Kara' ya, her zaman yanımda olan ve desteğine minnettar olduğum dostum Sayın Araş. Gör. Akif KUTLU' ya ve bu günlere gelişimde emeği geçen tüm İnşaat Fakültesi ailesine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2011

Ozan Çelik

(İnş. Müh.)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı 1
1.2 Literatür Özeti 1
2. TIMOSHENKO KİRİŞİ KURAMININ DİNAMİK TÜREVLİ DENKLEMLERİ **5**
2.1 Genel Bilgiler 5
2.2 Timoshenko Kirişinin Moment, Kesme Kuvveti ve Esneklik Eğrisi Bağıntıları 7
2.3 Timoshenko Kirişinin Dinamik Denklemi 9
2.3.1 Pasternak temeline oturan Timoshenko kirişinin dinamik esneklik eğrisi denklemi 9
3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU ve ÇÖZÜMLER **13**
3.1 Problemin Görsel Modellemesi ve Yükleme Koşullarının Gösterimi 13
3.2 Çözüm 14
3.2.1 İvmeli yerdeğiştiren ve şiddeti zamanla artan tekil kuvvet çözümü 15
3.3 Sayısal Örnekler 21
3.3.1 İvmeli yer değiştiren ve şiddeti zamanla artan tekil kuvvet çözümü 21
4. SONUÇLAR **37**
KAYNAKLAR **39**

KISALTMALAR

u_x : x yönündeki yer değiştirme
w, u_z : z yönündeki yer değiştirme
θ_y : y ekseni etrafında dönme
M_y : y ekseni etrafında moment
γ_{xz} : Kesme etkisinden kaynaklanan açı değişimi
V_z : Kesme kuvveti
ρ_y : Eğrilik yarıçapı
σ_{xx} : x yönünde normal gerilme
E : Elastisite modülü
A : Kesit alanı
α : Ortalama kayma gerilmesi çarpanı
G : Kayma modülü
σ_{xz} : Kayma gerilmesi
I_y : Eylemsizlik momenti
$q_z(..)$: Kiriş eksenine dik yayılı yük
G_p : Birim boy kütlesi
ρ : Özgül kütle
k : Zemin yay parametresi
b : Kesit genişliği
G_p : Zemin yaylanırlık parametresi
E_z : Zemin elastisite modülü
H : Zemin tabaka yüksekliği
v_z : Zemin Poisson oranı
$\delta(..)$: Dirac delta fonksiyonu
v : Hız
a : İvme
T : Keyfi seçilen zaman parametresi
$\tilde{f}_s(..)$: Fourier sinüs dönüşmüşü
$f_s^{-1}(..)$: Ters Fourier sinüs dönüşmüşü
$\tilde{w}_s$: Çökme fonksiyonu Fourier dönüşmüşü
w_i : Kiriş başlangıç çökmesi
w_j : Kiriş bitiş çökmesi
M_i : Kiriş başlangıç moment
M_j : Kiriş bitiş moment
$S(..)$: Fresnel sinüs fonksiyonu

C(..)	**:** Fresnel cosinüs fonksiyonu
GPa	**:** Gigapascal
N	**:** Newton
kN	**:** KiloNewton

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : UIC60 tipi rayın, zeminin ve hareketli yükün özellikleri..... 21

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Çubuk dik kesitinin Euler-Bernoulli kuramına göre yaklaşık şekil değiştirmesi..... 5
Şekil 2.2 : Çubuk dik kesitinin Timoshenko kirişi kuramına göre yaklaşık şekil değiştirmesi..... 6
Şekil 2.3 : Timoshenko kirişinin çubuk eksenine dik kesit düzlemi..... 7
Şekil 2.4 : Yükleme altında Winkler zemin modeli..... 9
Şekil 2.5 : Esnek cisim zemini..... 10
Şekil 2.6 : Pasternak zemin modelinde kayma etkisi..... 10
Şekil 2.7 : Pasternak zeminine oturan kendi ekseni boyunca yüklemiş kiriş..... 11
Şekil 3.1 : İvmeli yer değiştiren ve zamanla şiddeti artan tekil kuvvet..... 13
Şekil 3.2 : Fresnel integrallerinin belirli bir x aralığında çizimi..... 20
Şekil 3.3 : n=1, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 22
Şekil 3.4 : n=2, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 23
Şekil 3.5 : n=3, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 24
Şekil 3.6 : n=5, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 25
Şekil 3.7 : n=10, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler. 26
Şekil 3.8 : n=50, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 27
Şekil 3.9 : n=50, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler..... 28
Şekil 3.10 : Seri indisinin n=1,2,3,10,50 ve 100 olması durumlarında sonuçlar..... 29
Şekil 3.11 : Statik-dinamik karşılaştırma. 30
Şekil 3.12 : Ladislav Friba iki ucu mafsallı sabit mesnetli kiriş karşılaştırması. 31
Şekil 3.13 : Farklı hız değerlerine göre yer değiştirme değişimi..... 32
Şekil 3.14 : Farklı ivme değerlerine göre yer değiştirmenin değişimi. 33
Şekil 3.15 : Artan k parametresine göre yer değiştirme durumları..... 34
Şekil 3.16 : Artan G_p parametresine göre yer değiştirmenin değişimi. 34

PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİNİN DEĞİŞKEN HIZLI VE ŞİDDETİ ZAMANLA ARTAN TEKİL YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada iki parametreli elastik zemine oturan sonlu bir kirişin değişken hızlı hareket eden tekil yükleme altında dinamik davranışı incelenmiştir. Çalışma kapsamında kiriş modellemesi yapılırken Timoshenko kirişi kullanılmıştır. Problemin formülasyonunda iki parametreli elastik zemin özelliğinden kaynaklanan etkiler ve model olarak seçilen Timoshenko kirişinin kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınmıştır. Çözüm yöntemi olarak sonlu Fourier dönüşümünden yararlanılmış ve çözümler kapalı formda elde edilmiştir. Hareketli yükün hız, ivme ve şiddet değişimi, zemin parametrelerinin farklı değerleri ve bunların davranışa katkısı gibi durumlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sonuçlar kısmında ise özgün birtakım örneklere yer verilerek bu değişiklikler görsel olarak sunulmuştur.

DYNAMIC RESPONSE OF A TIMOSHENKO BEAM RESTING ON A PASTERNAK FOUNDATION UNDER A CONCENTRATED FORCE AT VARIABLE SPEEDS AND WITH VARIABLE MAGNITUDE

SUMMARY

In this present study, the dynamic response of a Timoshenko beam resting on two-parameter elastic Pasternak foundation and under a moving concentrated force with various speed is investigated. During the formulation process of the problem, the supporting effects of two-parameter foundation and shear deformations based on the Timoshenko beam theory are taken into consideration. As a solution method to our problem, finite Fourier transform is used and a closed form solution is obtained. The changing effects of moving velocity, acceleration,magnitude of the force and foundation support are studied in detail. In conlusion, visual results to some individual problems are presented.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

Elastik zemine oturan kiriş problemlerinin incelenmesi geçmişten günümüze inşaat mühendisliğinin pek çok alanında artan bir ilgi ile devam etmiş, üzerine oldukça fazla çalışma yapılmış ve günümüzde de güncelliğini korumaktadır. Bu tip problemlerin incelenmesi statik analiz ile başlamış olsa dahi günümüzde yapılan çalışmalarda üzerinde önemle durulan problemlerin başında dinamik davranış gelmektedir. Dinamik davranışın içerisinde ise özel bir durum olarak ve pratik hayattaki mühendislik uygulamaları için de daha anlamlı olacak şekilde hareketli yüklerin kirişler üzerindeki zorlanmalarının tespiti önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Literatürde incelenen kiriş problemlerinin çok büyük bir kısmında kirişlerin özel yükleme durumları yanında bu yükler altında üzerinde yer aldıkları zeminin probleme kazandırdığı etkiler de çok önemli yere sahiptir. Ortada fazla sayıda zemin modeli olmasına karşın çalışmalara yaygın bir biçimde konu olan Winkler tipi zemin modeli, sonraları yerini daha gerçekçi bir modelleme yaklaşımına sahip olan Pasternak modeline bırakmıştır. Zamanla vikoelastik zemin modellerinin de incelenmesi ile oldukça geniş bir veri topluluğu elimizde mevcuttur.

Bu çalışmanın amacı, Pasternak zeminine oturan sonlu bir Timoshenko kirişinin, ivmeli olarak hareket edebilen ve hareketi sırasında şiddeti zamanla artan bir tekil yük altında davranışını incelemektir.

1.2 Literatür Özeti

Elastik zeminlere oturan kirişlerin titreşim, burkulma ve eğilme problemleri pek çok araştırmacı tarafından incelenmiş bir konudur. Bu araştırmaların temel nedeni demiryolu, yapı temelleri için pratik yaşamda karşılaşılabilecek özel bir takım problemlere cevap aramak olmuştur.

Achenbach ve Sun (1964), sonsuz uzunlukta bir kirişin üzerinde sabit hızlı hareket eden tekil yük altında davranışını incelemiştir. Çözümler, yükün hızı ile eşdeğer hareket eden zamandan bağımsız koordinat sistemi ile elde edilmiştir. Kirişin üzerinde bulunduğu zemin sönümleme etkilerine sahiptir. Sönüm katsayısının ve yük hızının davranışa etkisi incelenmiş, sönümsüz etkiler ve rezonans etkileri açıklanmıştır. Sonuçlarda sönümleme etkisinin yer değiştirme ve eğilme momenti büyüklüklerinde azalmaya yol açtığı ortaya konmuştur. Tekil yük altındaki yer değiştirme fonksiyonunun eğimine ait süreksizlikler ve dönmenin ikinci türevi sönümden etkilenmemektedir.

Chen, Huang ve diğ. (2001) harmonik hareketli yük altında viskoelastik zemine oturan Timoshenko kirişinin dinamik rijitlik matrisini harmonik yükün hızı ve uyarılma frekansına bağlı bir fonksiyon olarak tanımlamışlardır. Kritik hız değerleri ve resonans frekansları belirlenmiştir.

Sun (2001) viskoelastik zemine oturan bir kirişin hareketli tekil yük altında davranışını incelemiştir. Çözüm yöntemi olarak Fourier dönüşümü kullanılmış ve çözümün Green fonksiyonu elde edilmiştir. Genelleştirilmiş integralin çözümü içinse rezidü teoremi kullanılmıştır. Sayısal örneklerle desteklenen sonuçlarda sönümleme etkisindeki kirişte yerdeğiştirmelerin asimetrik olduğu ve en büyük yer değiştirmenin ise hareketli yükün arkasında meydana geldiği görülmüştür. Ayrıca sönümleme etkisi ve yük hızının yer değiştirme üzerinde benzer etkilere sahip olduğu gözlemlenmiştir. Kargarnovin, Younesian ve diğ. (2005) nonlineer viskoelastik zemine oturan hareketli harmonik yük altında sonsuz kirişleri incelemişlerdir. Bu amaçla problemi ifade eden denklemler karmaşık Fourier dönüşümleri ile birlikte pertürbasyon metodu kullanılarak çözülmüştür. Lineer ve nonlineer viskoelastik zemin modelleri karşılaştırılmış ve sonuçların düşük frekanslar altında çok farklı olduğu ancak yüksek frekanslarda hemen hemen üst üste düştüğü görülmüştür. İki yükün süperpozisyonu incelenerek en büyük yer değiştirmede ve diğer yer değiştirmelerin dağılımında büyük hatalara neden olduğu görülmüştür.

Mallik, Chandra ve diğ. (2006) bir ve iki parametreli elastik zemin üzerindeki üniform sonsuz bir kirişin zamandan bağımsız davranışını incelemişlerdir. Çözüm için Fourier dönüşüm yöntemleri kullanılmıştır. Yapılan çalışma sonucu yükün süperkritik hızlarında yükün arkasında kayda değer yer değiştirmeler tespit edilmiş, buna karşılık eğilme momenti değerlerinin yükün önünde daha yüksek olduğu

görülmüştür. En büyük yer değiştirme noktası artan hız ve sönüm altında değişmektedir.

Kien (2008) iki parametreli elastik zemin üzerine kısmi yada tamamen oturan öngerilmeli Timoshenko kirişinin dinamik davranışını sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir. Sonlu eleman formülasyonu kullanılarak farklı sınır koşulları altında çözüm Newmark metodu ile elde edilmiştir. Çözüm sonrası elde edilen sonuçlar göstermiştir ki harmonik tekil yükün uyarılma frekansı sistemin birinci doğal frekansı altında kaldığı sürece eksenel yük kirişin eğilme rijitliğini düşürmekte ve bunun doğal bir sonucu olarak da bu frekanslar dolayında artan eksenel yük ile birlikte yer değiştirmeler de artmaktadır. Ancak yükün uyarılma frekansının birinci doğal frekanstan kayda değer şekilde yüksek olduğu durumda tam tersi bir etki söz konusu olmaktadır. Ayrıca zemin rijitliği ile doğrudan ilintili bir kritik hız değeri tanımlanmış ve bu değerde yer değiştirmenin en yüksek değere ulaştığı görülmüştür.

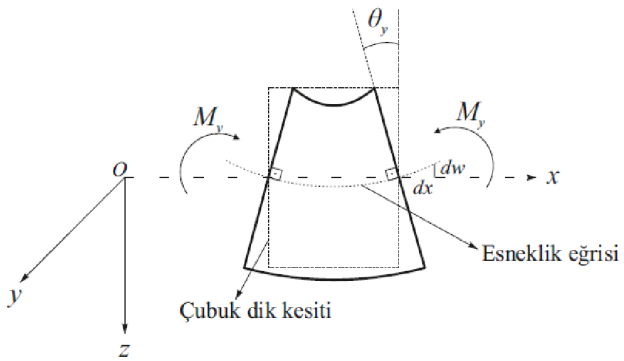
Chang-yong ve Yang (2008) Pasternak zeminine oturan Bernoulli varsayımına dayanan elastik kirişin hareketli tekil yük altındaki davranışını incelemişlerdir. Çözüm yöntemi olarak çift katlı (hızlı) Fourier dönüşümü ve ters dönüşümü metodunu kullanmışlardır. Kapalı çözüm ise rezidü teoremi ile elde edilmiştir. Sonuçlar arasında hareketli yük hızının artmasıyla en büyük yer değiştirmenin de küçük miktarlarda arttığı ancak sabit bir hız değerinde zeminin azalan kayma modülü ile kayda değer bir şekilde arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca Pasternak zemininde, yer değiştirmelerin Winkler zeminine oranla daha küçük olduğu gözlemlenmiştir.

Arboleda-Monsalve, Zapata Medina ve diğ. (2008) iki parametreli elastik zemin üzerinde genelleştirilmiş sınır koşullarına sahip sonlu bir Timoshenko kirişi için yük vektörü ve dinamik rijitlik matrisini tanımlamışlardır. Önerilen metod frekans etkilerini gözönüne alması yanında eleman boyunca eğilme ve kayma deformasyonlarını, kiriş sonlarındaki yer değiştiren ve dönen toplanmış kütleleri, açıklık boyunca düzgün dağılmış yer değiştirme ve dönme kütlelerini ve eksenel kuvvetleri dikkate almıştır. Sonuçlar göstermiştir ki kiriş-kolonlardan yapılmış olan çerçeve sistemlerin statik, dinamik ve stabilite davranışı bu ek davranışlara karşı aşırı hassastır.

2. TIMOSHENKO KİRİŞİ KURAMININ DİNAMİK TÜREVLİ DENKLEMLERİ

2.1 Genel Bilgiler

Eksenlerine dik kuvvetlerin (kendi ağırlıkları dahil) etkisi altındaki çubuklar kiriş olarak adlandırılmaktadır. Kirişlerin küçük şekil değiştirmesine ilişkin ilk kuram Euler - Bernoulli ya da diğer adıyla Bernoulli - Navier kuramıdır. Bu kurama göre, kiriş eksenine dik ve düzlem olan kesit alanları şekil değiştirme sonrasında da düzlem kalarak şekil değiştirmiş çubuk eksenine (elastik eğri, elastika) yine dik olmaktadırlar. Bernoulli - Navier kuramının geliştirilmesinde çubuk kesitine uygulanan moment göz önüne alınmıştır ve bu durum pratik anlamda pek çok alanda yeterli yakınsaklığı sağlamaktadır. Ancak yük miktarı fazla olan kısa ve yüksek kirişler gibi çubuk kesitine uygulanan kesme kuvvetlerinin yüksek mertebeden olduğu durumlarda, kesme kuvvetlerinin çubuk dik kesitlerinde oluşturduğu kayma gerilmelerinin şekil değiştirmelerini hesaba katmak gerekmektedir. Burada kayma gerilmelerinin artışı nedeniyle Bernoulli - Navier kuramı yerine çubuk dik kesitlerinin şekil değiştirme sonrası düzlem kalmayarak çarpılacağını ve bu nedenle elastik eğri ile belli bir açı yapacağını öngören Timoshenko kuramı daha doğru sonuçlar vermektedir. Timoshenko kuramı, eğilme nedeniyle oluşan şekil değiştirmenin kesme etkisi nedeniyle oluşacak şekil değiştirme ile birlikte hesaba katıldığı durumu temsil etmektedir.

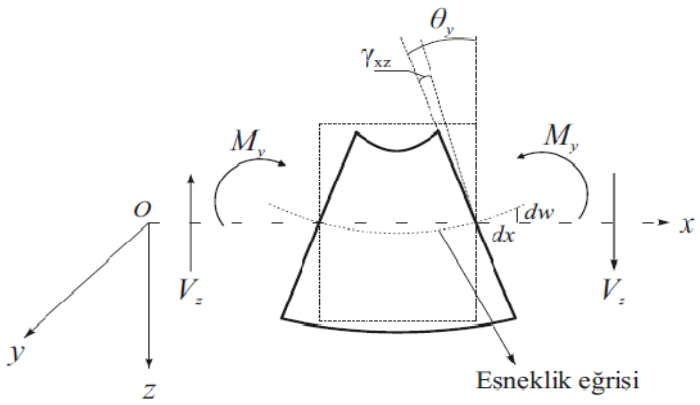


Şekil 2.1 : Çubuk dik kesitinin Euler-Bernoulli kuramına göre şekil değiştirmesi.

Şekil 2.1' de görülen Euler - Bernoulli kuramına göre θ_y kiriş dik kesidinin dönme açısı ile u_x çubuk dik kesidinin öteleme yer değiştirmeleri sırasıyla:

$$\left.\begin{aligned} w &= u_z \\ \theta_y &= -\frac{dw}{dx} \\ u_x &= z\theta_y = -z\frac{dw}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.1)}$$

bağıntıları ile verilir.



Şekil 2.2 : Çubuk dik kesitinin Timoshenko kirişi kuramına göre şekil değiştirmesi.

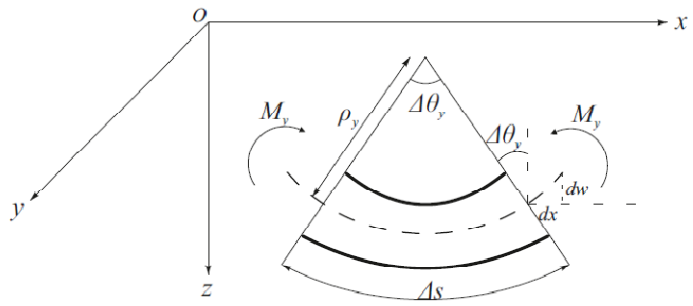
Timoshenko kuramında (şekil 2.2), çubuk dik kesitinin şekil değiştirmeden sonra yaklaşık bir ortalama olarak Bernoulli-Navier kuramındaki gibi düzlem kaldığı ancak kayma gerilmelerinin hesaba katılması ve bu gerilmelerin ek bir deformasyon yaratması nedeniyle çubuk esneklik eğrisine dik olmadığı ifade edilmektedir. Bu kabul altında kiriş için şekil değiştirme bağıntıları:

$$\left.\begin{aligned} \theta_y &\neq -\frac{dw}{dx} \\ u_x &= z\theta_y \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.2)}$$

biçiminde yazılır. (2.1) denklemlerinde verilmiş olan dönme ifadesinin Timoshenko kirişi için ifade edilen yeni denklem takımında değişmiş olduğu görülmektedir.

2.2 Timoshenko Kirişinin Moment, Kesme Kuvveti ve Esneklik Eğrisi Bağıntıları

Oxz düzleminde ve oz ekseninin pozitif yönünde dış yükler etkisindeki Timoshenko kirişinin şekil değiştirmeden sonra düzlem kaldığı ancak kesme kuvvetleri etkisi ile esneklik eğrisine dik olmadığı varsayılan dik kesit düzleminin θ_y açısı ile κ_y eksen eğriliği arasındaki geometrik bağıntı şekil 2.3 de verilmiştir.



Şekil 2.3 : Timoshenko kirişinin çubuk eksenine dik kesit düzlemi.

Kirişin κ_y eğriliği ile ds boy elementinin $d\theta_y$ dik kesit alanı dönme açısı diferansiyeli arasında:

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{d\theta_y(x)}{dx} \tag{2.3}$$

bağıntısı vardır.

Timoshenko kirişinin M_y momenti ve V_z kesme kuvveti ile θ_y dönme açısı arasındaki bağıntıları denge denklemlerinde yerine koyarak buluruz:

$$M_y = \int_A z(\sigma_{xx} dA) = E\frac{d\theta_y}{dx}\int_A (z^2 dA) \tag{2.4}$$

$$V_z = \int_A \sigma_{xz} dA = \int_A \alpha G(\theta_y(x) + \frac{dw(x)}{dx}) dA = \alpha G(\theta_y(x) + \frac{dw(x)}{dx}) A = \sigma_{xz} A \tag{2.5}$$

Bu ifadede yer alan α katsayısı, biçim çarpanı olarak adlandırılmaktadır. $\gamma_{xz}(x,z)$ açısal şekil değiştirmesi ve dolayısıyla $\sigma_{xz}(x,z)$ kayma gerilmeleri çubuk dik kesitlerinde düzgün olmayıp sınırlardan kiriş kütle merkezine doğru mutlak değerce arttığından bu çarpan ile çarpılarak ortalama değere dönüştürülebilirler. Sonuç olarak Timoshenko kirişi için bulunan (2.4) ve (2.5) bağıntıları düzenlenerek tekrar yazılırsa:

$$\left.\begin{aligned} M_y &= EI_y(x)\frac{d\theta_y(x)}{dx}, \\ \theta_y(x) &= -\frac{dw(x)}{dx}+\frac{V_z(x)}{\alpha GA(x)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Timoshenko kirişinin esneklik eğrisini bulmak için (2.6) denklemlerinden $\theta_y(x)$ açısı yok edilirse:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{EI_y(x)\left[-\frac{d^2w(x)}{dx^2}-\frac{1}{\alpha GA(x)}q_z(x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{V_z(x)}{\alpha GA(x)}\right)\right]\right\}=-q_z(x) \qquad \textbf{(2.7)}$$

bulunur. Bu son denklemin düzenlenmesi ile değişken kesitli ve türdeş Timoshenko kirişi için esneklik eğrisini:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left\{-\frac{EI_y(x)}{\alpha GA(x)}q_z(x)+EI_y(x)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha GA(x)}\right)\right]V_z(x)\right\} \\ &+q_z(x) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.8)}$$

olarak buluruz.

Timoshenko kirişinin türdeş ve sabit kesitli olduğu özel durumda, (2.8) esneklik eğrisi ifadesi aşağıdaki yalın biçimi alır:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4}=\frac{1}{EI}q(x)-\frac{1}{\alpha GA}\frac{d^2q(x)}{dx^2} \qquad \textbf{(2.9)}$$

$q(x)=q_z(x)$ in sabit ya da doğrusal değişken olması durumunda (2.9) un sağ yanının ikinci terimi sıfır olacağından, Timoshenko kirişinin esneklik eğrisi ile Euler - Bernoulli kirişinin esneklik eğrisi arasında ayrım kalmaz.

2.3 Timoshenko Kirişinin Dinamik Denklemi

Kirişin yapıldığı malzemeden kaynaklanan özgül kütlesi $\rho(x)$, dik kesit alanı $A(x)$ ve birim çubuk boyunun çarpımı:

$$m = \rho(x)A(x)1 \tag{2.10}$$

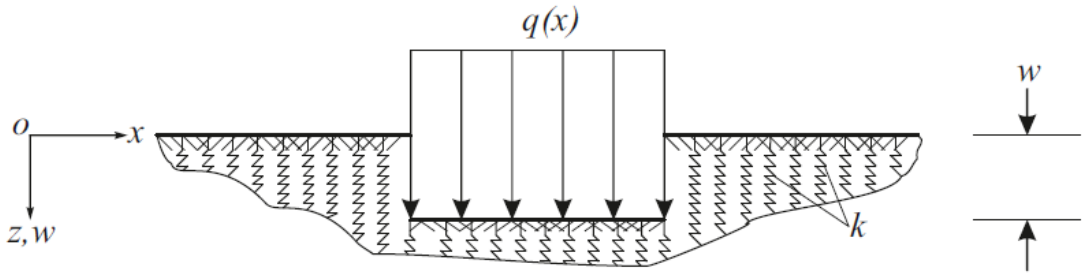
birim çubuk boyu kütlesidir. Bu niceliğin $\partial^2 w/\partial t^2$ ivmesi ile çarpımının eksi (-) imlisi, $q_z(x)$ yayılı yüküne eklenmiş d'Alembert kuvveti olarak göz önüne alınabilir. Böylece (2.8) de $q_z(x)$ yerine $q_z(x) - m\partial^2 w/\partial t^2$ ve (2.9) da $q(x) - m\partial^2 w/\partial t^2$ konularak Timoshenko kirişinin dinamik denklemleri bulunur. (2.9) için dinamik denklem açık olarak yazılırsa:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{m}{\alpha GA}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{EI}q(x) - \frac{1}{\alpha GA}\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} \tag{2.11}$$

elde edilir.

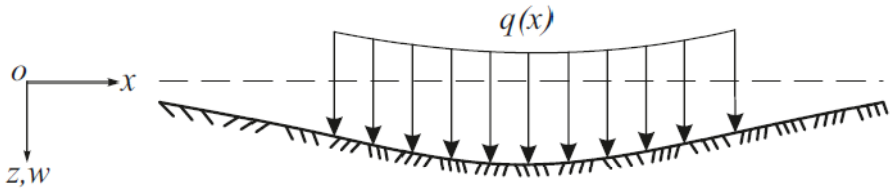
2.3.1 Pasternak temeline oturan Timoshenko kirişinin dinamik esneklik eğrisi denklemi

Winkler zemin modeli, çok yalın olduğu için E. Winkler'in 1867 yılında yayımlanan makalesinden beri yaygın biçimde kullanılagelmiştir. Winkler zemin modelinde, şekil 2.4, zeminin yan yana sık olarak dizilmiş yaylardan oluştuğu varsayılmıştır.



Şekil 2.4 : Yükleme altında Winkler zemin modeli.

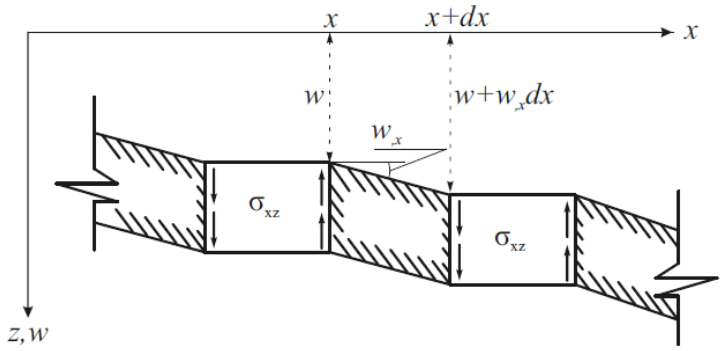
Bu yayların bir bölümüne etkiyen dış yükün öteki yaylara şekil değiştirme aktarmayışı Winkler zemin modelinin önemli bir yetersizliği olmuştur. Winkler zemininin dış yük etkisindeki bölümünün sınırlarında yer değiştirme süreksizlikleri oluşmaktadır. Ancak esnek cisim modelinde süreksizlik oluşmaması gerekmektedir.



Şekil 2.5 : Esnek cisim zemini.

Esnek cisim zeminine oturması durumunda bir temel kirişinin eğilme biçimi şekil 2.5 de verilmiştir.

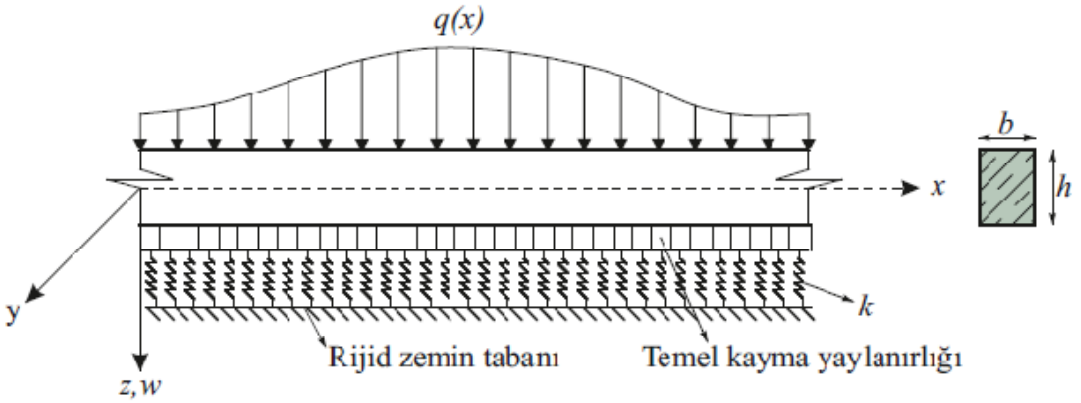
Winkler modelinin yetersizliklerini azaltmak amacıyla Pasternak (1954) tarafından yeni bir model ortaya atılmıştır. Pasternak modelinde, Winkler modeline ek olarak yanyana sık döşenmiş yaylar üstüne bir kayma yaylanırlığı katmanı eklenmiştir. Bu yeni model ile yaylar arasında bir kayma etkisi sağlanmış olmaktadır (şekil 2.6).



Şekil 2.6 : Pasternak zemin modelinde kayma etkisi.

Bu kayma tabakası yok sayıldığında zemin modeli Winkler modeline geri dönmektedir.

Pasternak zemini üzerinde yer alan bir kiriş düşünüldüğünde zeminle etkileştiği yüzünün genişliği b olmak üzere şekil 2.7 de verilen durum gibi bir modelleme yapılabilir. Şekil 2.7'de görülen modellemede kiriş yayılı yük altında görülmektedir. Zemin ise hem Winkler yayları hemde Pasternak zeminine özgü kayma etkilerini ortaya çıkaracak olan kayma tabakası ile gösterilmiştir. Kiriş kesiti ise "h" yüksekliğinde ve "b" genişliğindedir.



Şekil 2.7 : Pasternak zeminine oturan kendi ekseni boyunca yüklemiş kiriş.

Şekil 2.7 de görülen modelleme altında zeminin $q_z(x)$ tepkisi:

$$q_z(x,t) = q(x,t) - kbw(x,t) + G_p \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.12}$$

bağıntısı ile verilir. (2.12) bağıntısında yer alan k uzama ve G_p kayma rijidlikleri, V. Z. Vlasov ve N. N. Leontiev tarafından:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{E_z}{H(1+\upsilon_z)(1-2\upsilon_z)} \\ G_p &= \frac{E_z H}{6(1+\upsilon_z)} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

bağıntıları ile verilmiştir. E_z zemin Young modülü, υ_z zemin Poisson oranı ve H zemin katman yüksekliğidir.

G_p ve k iki ayrı yaylanırlık parametresi olarak temel kirişi eğilme hesabına girdiğinden, Pasternak zemini "iki parametreli zemin" olarak da adlandırılır. Şimdi (2.11) denkleminde (2.12) ifadesi yerleştirilerek düzenlenirse Pasternak zeminine oturan Timoshenko kirişinin dinamik esneklik eğrisi denklemi:

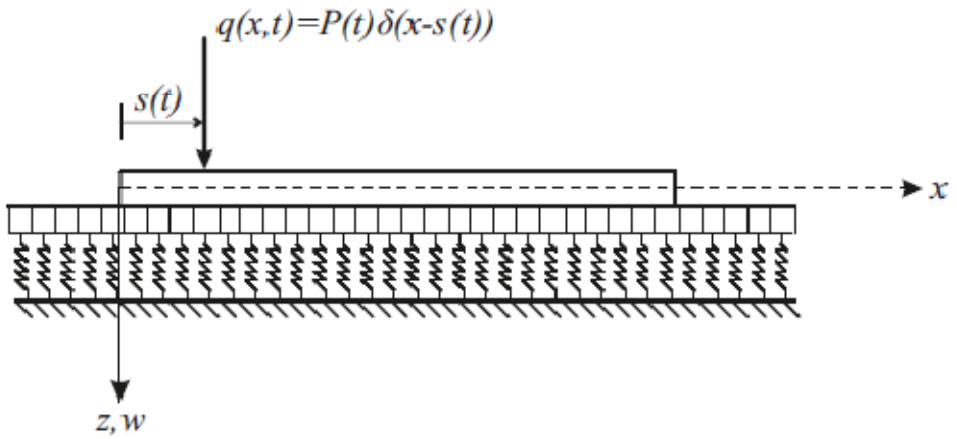
$$\left(1+\frac{G_p}{\alpha GA}\right)\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{m}{\alpha GA}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\frac{kb}{\alpha GA}+\frac{G_p}{EI}\right)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{kb}{EI}w(x,t) = \frac{1}{EI}q(x,t) - \frac{1}{\alpha GA}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.14}$$

olarak bulunur.

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU ve ÇÖZÜMLER

3.1 Problemin Görsel Modellemesi ve Yükleme Koşullarının Gösterimi

Bu kısımda çalışma kapsamında çözülmesi amaçlanan problem için tasarlanmış yüklemenin ayrıntıları verilerek ve görsel olarak oluşturulan şekiller ile problemin koşulları sunulmaya çalışılmaktadır.



Şekil 3.1 : İvmeli yer değiştiren ve zamanla şiddeti artan tekil kuvvet.

Söz konusu problemimizin çözümü için tasarlamış olduğumuz görsel modelde (şekil 3.1) kesiti x ekseni ile çakışık olarak devam eden ve z ekseni boyunca yerdeğiştirme yapan kiriş görülmektedir. Kiriş üzerinde tekil yükümüzü ifade etmek için mekanikte tekil yüklemeler için oldukça yaygın olarak kullanılabilen ve problemlerimiz için yeter düzeyde kullanışlı olan Dirac delta fonksiyonu kullanılmaktadır. Şekil 3.1 de tekilliğin konumunu belirtmek adına kullanılan $s(t)$ fonksiyonu P tekil kuvvetinin kiriş üzerinde zamana bağlı konumu(x=0' dan uzaklığını) belirtmektedir. Ancak bu kuvvet konumu sabit hızla değiştirmeyip;

$$s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \qquad \textbf{(3.1)}$$

(3.1) denklemine uygun olarak belirli bir ivme değeri ile hızı ve dolayısıyla konumu zamanla artmaktadır. Kirişin hemen altında iki parametreli zeminimizi temsil eden kayma tabakası ve ardından gelen Winkler yayları yer almaktadır.

Bunun yanında problemin özel bir diğer koşulu da hareket eden tekil kuvvetin şiddetinin artıyor olmasıdır. Bu artışı gösterebilmek adına kiriş üzerinde görülen zamana bağlı olarak tanımlanan $P(t)$ kuvvetinin şiddeti;

$$P(t) = P\left(\frac{t}{T}\right) \tag{3.2}$$

(3.2) denklemine uygun olarak zamanla artmaktadır. Burada t parametresi yüklemenin kiriş üzerinde kaldığı süreyi tanımlarken T ise istenilen şekilde seçilebilmektedir. Örneğin kuvvetin kiriş üzerinde yol aldığı toplam zaman olarak tanımlanabilir. Bu sayede kuvvetin şiddetinin zamanla artması sağlanmış olmaktadır.

3.2 Çözüm

Çözüm için uygulayacağımız sonlu Fourier dönüşümünün hangi tipte olduğuna karar vermek gerekmektedir. Sonlu Fourier sinüs ya da sonlu Fourier kosinüs dönüşümlerinden hangisinin kullanışlı olacağına karar vermek için kirişin tahmini dinamik davranışını sınır koşullarına bağlı olarak ifade etrmek yeterli olacaktır.

Sonlu kirişin sınır koşulları iki ucu mafsallı sabit mesnet olarak düşünülürse kiriş esneklik eğrisinin bir çift fonksiyon şeklinde davranacağı göz önünde bulundurulabilir. Bu halde çözüme uygun bir yöntem olarak sonlu Fourier sinüs dönüşümü seçilebilir. Bir fonksiyonun sonlu bir aralıkta Fourier sinüs dönüşümü:

$$\tilde{f}_s(n) = f_s[f(x);n] = \int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{3.3}$$

olarak tanımlanır. Sonlu ters Fourier sinüs dönüşmüşü ise:

$$f(x) = f_s^{-1}[\tilde{f}_s(n);x] = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_s(n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.4}$$

ile ifade edilir.

Problemimizin yönetici denkleminin çözümü esnasında çeşitli mertebeden türevli terimlerin sinüs dönüşmüşleri lazım olacaktır. Örneğin birinci mertebeden türevli bir fonksiyonun Fourier sinüs dönüşümü bulunmak istenirse:

$$\begin{aligned} f_s\left[\frac{\partial f}{\partial x};n\right] &= \int_0^L \frac{\partial f}{\partial x}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ &= \left(-\frac{n\pi}{L}\right)\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \left[f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\ &= \left(-\frac{n\pi}{L}\right)\tilde{f}_c(n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Benzer ardışık bölümsel tümlevleme işlemleriyle:

$$\left.\begin{aligned} f_s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};n\right] &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tilde{f}_s(n) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)[(-1)^{n+1}f(L)+f(0)] \\ f_s\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4};n\right] &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \tilde{f}_s(n) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 [-(-1)^n f(L)+f(0)] \\ &\quad + \left(\frac{n\pi}{L}\right)[-(-1)^n f''(L)+f''(0)] \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

dönüşmüşleri elde edilir.

3.2.1 İvmeli yerdeğiştiren ve şiddeti zamanla artan tekil kuvvet çözümü

(2.14) denkleminde söz konusu problemimizdeki yükleme koşulu yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{G_p}{\alpha GA}\right)\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{m}{\alpha GA}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \left(\frac{kb}{\alpha GA}+\frac{G_p}{EI}\right)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{m}{EI}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \\ &+\frac{kb}{EI}w(x,t) = \frac{P}{EI}\left(\frac{t}{T}\right)\delta(x-s(t)) - \frac{P}{\alpha GA}\left(\frac{t}{T}\right)\frac{\partial^2 \delta(x-s(t))}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Dördüncü mertebeden bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü için her bir terimin (3.5) ve (3.6) denklemleri gereğince sonlu Fourier dönüşmüşünü bulmak gerekecektir. Aşağıda tüm terimler için yapılan dönüşümler yer almaktadır.

$$\tilde{w}_s\left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4};x\to n\right]=$$
$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\tilde{w}_s(n,t)-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\left[w(0,t)-(-1)^n w(L,t)\right]$$
$$+\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left[\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}-(-1)^n\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}\right] \qquad \textbf{(3.8)}$$
$$=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\tilde{w}_s(n,t)-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\left[w_i-(-1)^n w_j\right]+\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left[-\frac{M_i}{EI}-(-1)^n\left(-\frac{M_j}{EI}\right)\right]$$

(3.8) denkleminde yer alan w_i, w_j, M_i ve M_j değerleri:

$$\left.\begin{aligned} w_i &= w(0,t);\\ w_j &= w(L,t);\\ -\frac{M_i}{EI} &= \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2};\\ -\frac{M_j}{EI} &= \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.9)}$$

olarak tanımlanan sınır koşullarıdır. Bu koşullar iki ucu mafsallı sabit mesnet olarak seçildiği için ilerleyen adımlarda sıfır olarak tanımlanabilecektir. Diğer terimler için de devam edilirse:

$$\tilde{w}_s\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right);x\to n\right]=$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\tilde{w}_s(n,t)+\frac{n\pi}{L}\left((-1)^{n+1}w(L,t)+w(0,t)\right)\right] \qquad \textbf{(3.10)}$$
$$=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{w}_s(n,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{n\pi}{L}\left((-1)^{n+1}w_j+w_i\right)\right]$$

$$\tilde{w}_s\left[w(x,t);x\to n\right]=\tilde{w}_s(n,t) \qquad \textbf{(3.11)}$$

$$\tilde{f}_s\left[\delta(x-s(t));x\to n\right]=\int_0^L\delta(x-s(t))\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$=\sin\left(\frac{n\pi s(t)}{L}\right) \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$\tilde{f}_s\left[\frac{\partial^2\delta(x-s(t))}{\partial x^2};x\to n\right]=\int_0^L\frac{\partial^2\delta(x-s(t))}{\partial x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi s(t)}{L}\right) \quad \textbf{(3.13)}$$

Her bir terim için yapılan sonlu Fourier dönüşümü sonucu ortaya çıkan dönüşmüşler toparlanıp yazılırsa:

$$K_1\frac{\partial^2 w_s(n,t)}{\partial t^2}+K_2 w_s(n,t)=K_3+K_4\left(\frac{t}{T}\right)\sin\frac{n\pi s(t)}{L}+K_5\left(\frac{t}{T}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sin\frac{n\pi s(t)}{L} \quad \textbf{(3.14)}$$

Burada K_1, K_2, K_3, K_4 ve K_5 sabitleri sırasıyla:

$$\left.\begin{aligned}
K_1&=\frac{m}{\alpha GA}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{m}{EI}\\
K_2&=\left(1+\frac{G_p}{\alpha GA}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{kb}{\alpha GA}+\frac{G_p}{EI}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{kb}{EI}\\
K_3&=\left(1+\frac{G_p}{\alpha GA}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\left[w_i-(-1)^n w_j\right]-\left(1+\frac{G_p}{\alpha GA}\right)\frac{n\pi}{L}\left[M_i-(-1)^n M_j\right]\\
&\quad+\frac{m}{\alpha GA}\frac{n\pi}{L}\left((-1)^{n+1}w_j+w_i\right)+\left(\frac{kb}{\alpha GA}+\frac{G_p}{EI}\right)\frac{n\pi}{L}\left((-1)^{n+1}w_j+w_i\right)\\
K_4&=\frac{P}{EI}\\
K_5&=\frac{P}{\alpha GA}
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.15)}$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.14) denklemi tekrar düzenlenerek yazılırsa:

$$\frac{\partial^2 w_s(n,t)}{\partial t^2}+\frac{K_2}{K_1}w_s(n,t)=\frac{K_3}{K_1}+\left(\frac{t}{T}\right)\left[\frac{K_4}{K_1}+\frac{K_5}{K_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi s(t)}{L} \quad \textbf{(3.16)}$$

elde edilir. Son formda adi türevli denkleme indirgenmiş ifademiz aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 w_s(n,t)}{\partial t^2}+\sigma w_s(n,t)=\tau+\gamma\left(\frac{t}{T}\right)\sin\frac{n\pi s(t)}{L} \quad \textbf{(3.17)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{K_2}{K_1} \\ \tau &= \frac{K_3}{K_1} \\ \gamma &= \left[\frac{K_4}{K_1} + \frac{K_5}{K_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Problemimizin çözümü için ikinci derece adi türevli denklemimize iki adet başlangıç koşulu tanımlamamız gerekecektir. Dinamik davranış gösterecek kirişimizin başlangıçta şeklinin düz ve hızının sıfır olduğu kabul edilerek;

$$\left.\begin{aligned}w(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.19)}$$

şeklinde başlangıç koşulları belirlenmiştir. Belirlenen bu sınır koşullarına sonlu Fourier sinüs dönüşümü uygulanırsa:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{w}_s(n,0) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{w}_s(n,0)}{\partial t} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.20)}$$

bulunacaktır.

Sonlu Fourier sinüs dönüşümü uygulanarak bayağı türevli denkleme indirgediğimiz yönetici denklemimiz (3.20) başlangıç koşulları kullanılarak çözülecektir. Çözümden elde edilecek olan dönüşmüş fonksiyon çözüm fonksiyonu olacaktır. Ancak konum uzayında dönüşmüş halde bulunan bu denkleme sonrasında ters dönüşüm uygulanarak aradığımız yer değiştirme ifadesi bulunmuş olacaktır. Ters dönüşümü bulmak için (3.4) denkleminden yararlanılacaktır. Bu koşullar altında çözüm aşağıdaki şekli almaktadır:

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_s(n,t) = \frac{1}{2a^{3/2}\sigma n^{3/2}\pi T}\Bigg\{ & 2a^{3/2}\tau n^{3/2}\pi T - 2a^{3/2}\tau n^{3/2}\pi T\cos\left(\sqrt{\sigma}t\right) \\
& + \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)\cos\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& + \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)\cos\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& - \sigma\gamma L^{3/2}\cos\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& + \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v\cos\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& - \sigma\gamma L^{3/2}\cos\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& - \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v\cos\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) C\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right) \\
& + 2\sqrt{a}\sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{n}\sin\left(\sqrt{\sigma}t\right) \\
& + \sigma\gamma L^{3/2} S\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& + \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v S\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& + \sigma\gamma L^{3/2} S\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& - \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v S\left(\frac{-\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t - \frac{\left(\sqrt{\sigma}L - n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& + \sigma\gamma L^{3/2} S\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& + \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v S\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi v}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& - \sigma\gamma L^{3/2} S\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right) \\
& - \sqrt{\sigma}\gamma\sqrt{L}n\pi v S\left(\frac{\sqrt{\sigma}L + n\pi(at+v)}{\sqrt{a}\sqrt{L}\sqrt{n\pi}}\right)\sin\left(\sqrt{\sigma}t + \frac{\left(\sqrt{\sigma}L + n\pi v\right)^2}{2aLn\pi}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.21)}
$$

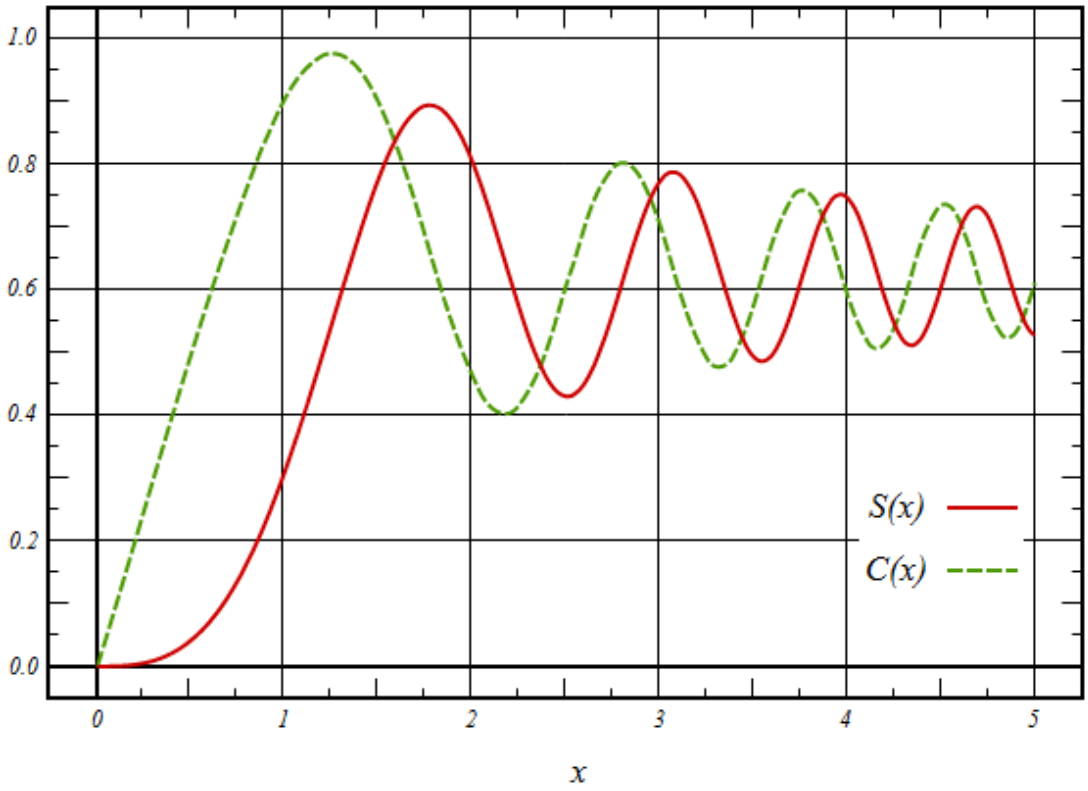
(3.21) de C ve S ile gösterilen fonksiyonlar özel tipte olup sırasıyla Fresnel kosinüs ve Fresnel sinüs integrallerini ifade etmektedir. Fresnel integralleri açık formda yazılmak istenirse:

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin k^2 dk \\ C(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos k^2 dk \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.22)}$$

Fresnel integralleri, tüm x değerleri için yakınsak olan aşağıdaki kuvvet serilerine açılarak hesaplanabilmektedirler:

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} \\ C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.23)}$$

Şekil 3.2 de Fresnel integrallerinin belirli bir argüman için çizimi verilmektedir.



Şekil 3.2 : Fresnel integrallerinin belirli bir x aralığında çizimi.

Çözümün Green fonksiyonunun bulunmasının ardından Fourier döşümü uygulanmış olan denkleme ters Fourier dönüşümü uygulanarak dinamik davranış gösteren kirişimizin çökme fonksiyonunu bulmuş oluruz:

$$w(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_s(n,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \textbf{(3.24)}$$

3.3 Sayısal Örnekler

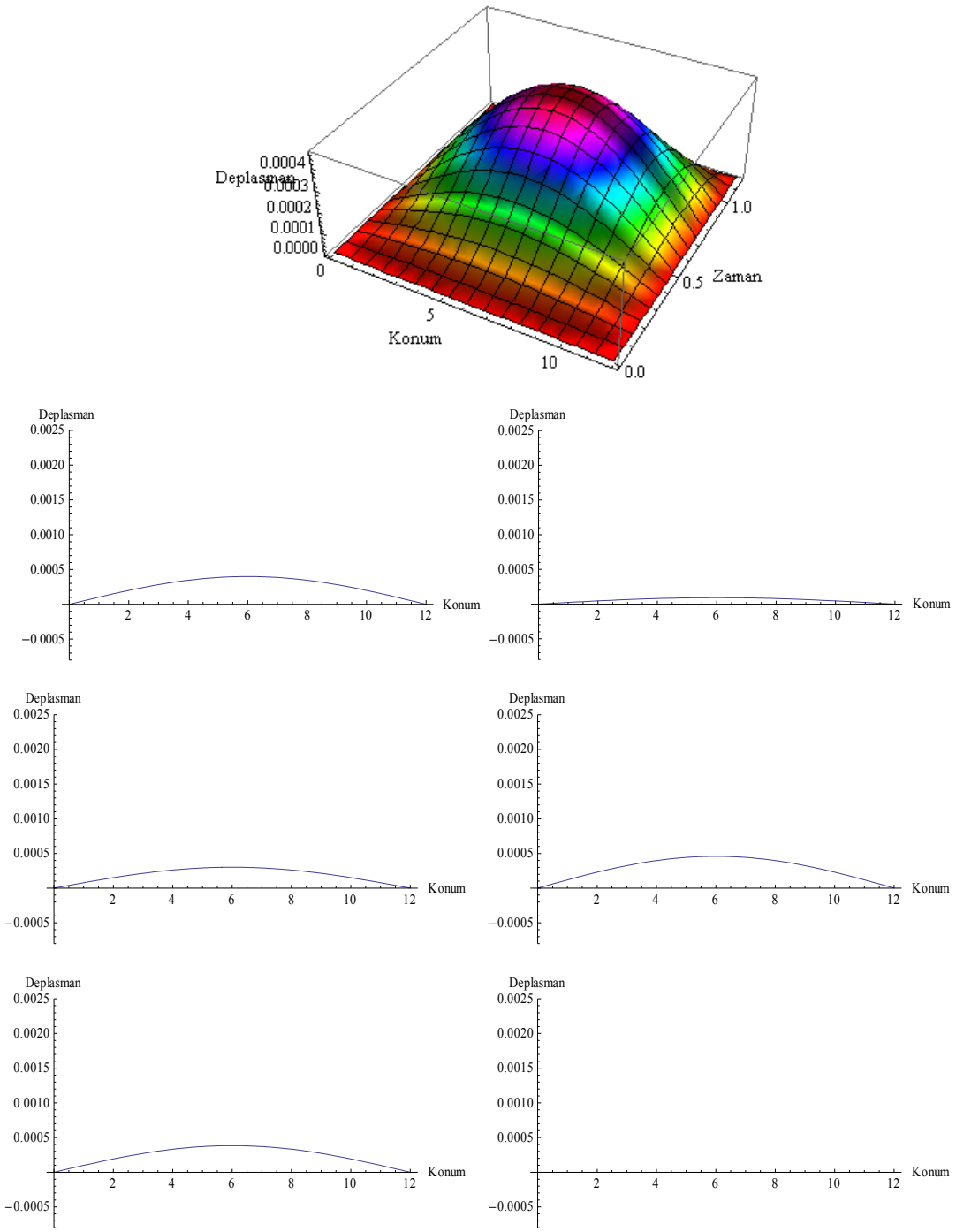
3.3.1 İvmeli yer değiştiren ve şiddeti zamanla artan tekil kuvvet çözümü

Çözüm fonksiyonunun elde edilmesinin ardından sonuçları analiz etmek için gerçek bir demiryolu profili üzerinden parametrik bir çalışma sunulacaktır. Çizelge 3.1 de örnek olarak alınacak demiryolunun fiziksel ve geometrik özellikleri görülmektedir.

Çizelge 3.1 : UIC60 tipi rayın, zeminin ve hareketli yükün özellikleri.

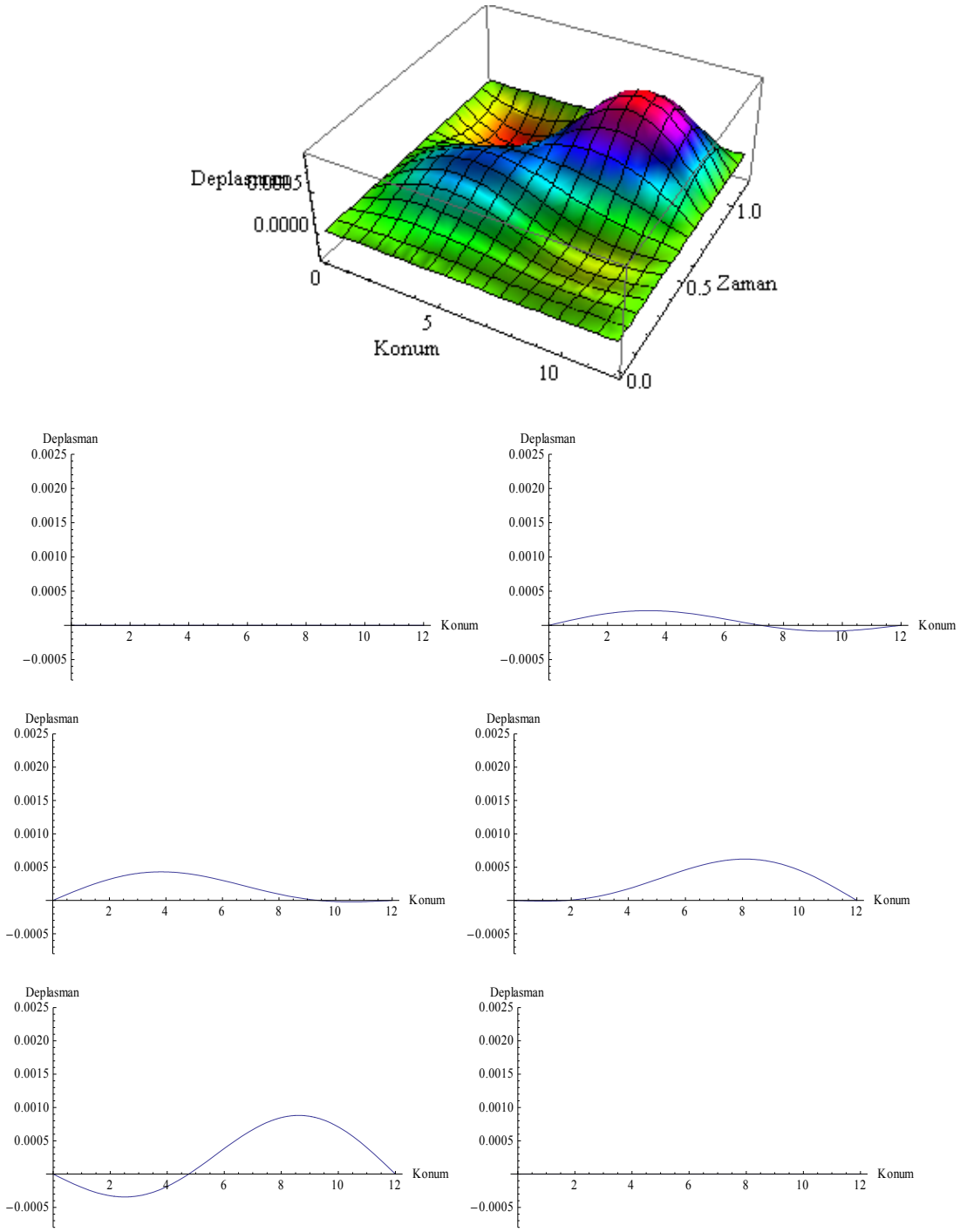
Öğe	Simge	Değer
Ray		
Elastisite modülü	E	210 GPa
Kayma modülü	G	77 GPa
Brimi hacim kütlesi	ρ	7850 kg/m^3
Kesit alanı	A	7.69 x 10^{-3} m^2
Eylemsizlik momenti	I	30.55 x 10^{-6} m^4
Kayma katsayısı	α	0.40
Boy	L	12 m
Zemin		
Rijitlik katsayısı	k	138.60 x 10^6 N/m^3
Kayma yaylanırlığı	G_p	666875 N
Hareketli Yük		
Yük	P	100 kN

Fourier dönüşümü kullanarak yapmış olduğumuz çözümün bir seri çözümü olması dolayısı ile sonuçların belirli bir yakınsaklığa ulaşması söz konusu olacaktır. Bu amaçla serinin "n" indisinin değişimine göre üç boyutlu grafiğimizin aldığı şekil ve yakınsama durumları aşağıda verilmektedir. Verilen sonuçlarda okunması gereken büyüklüklerin birimleri yer değiştirme için metre, zaman için saniye ve konum için yine metredir.

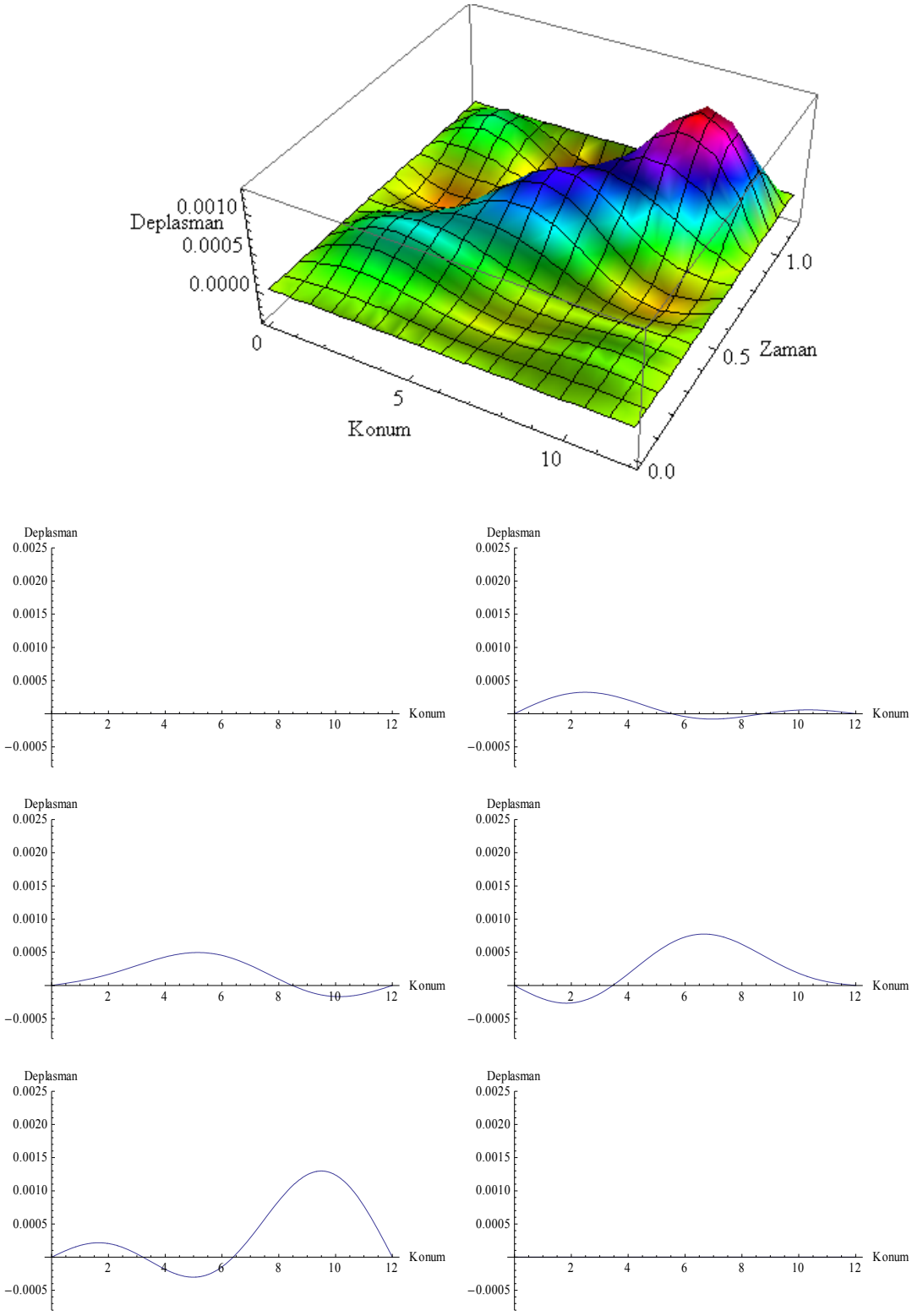


Şekil 3.3 : n=1, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.

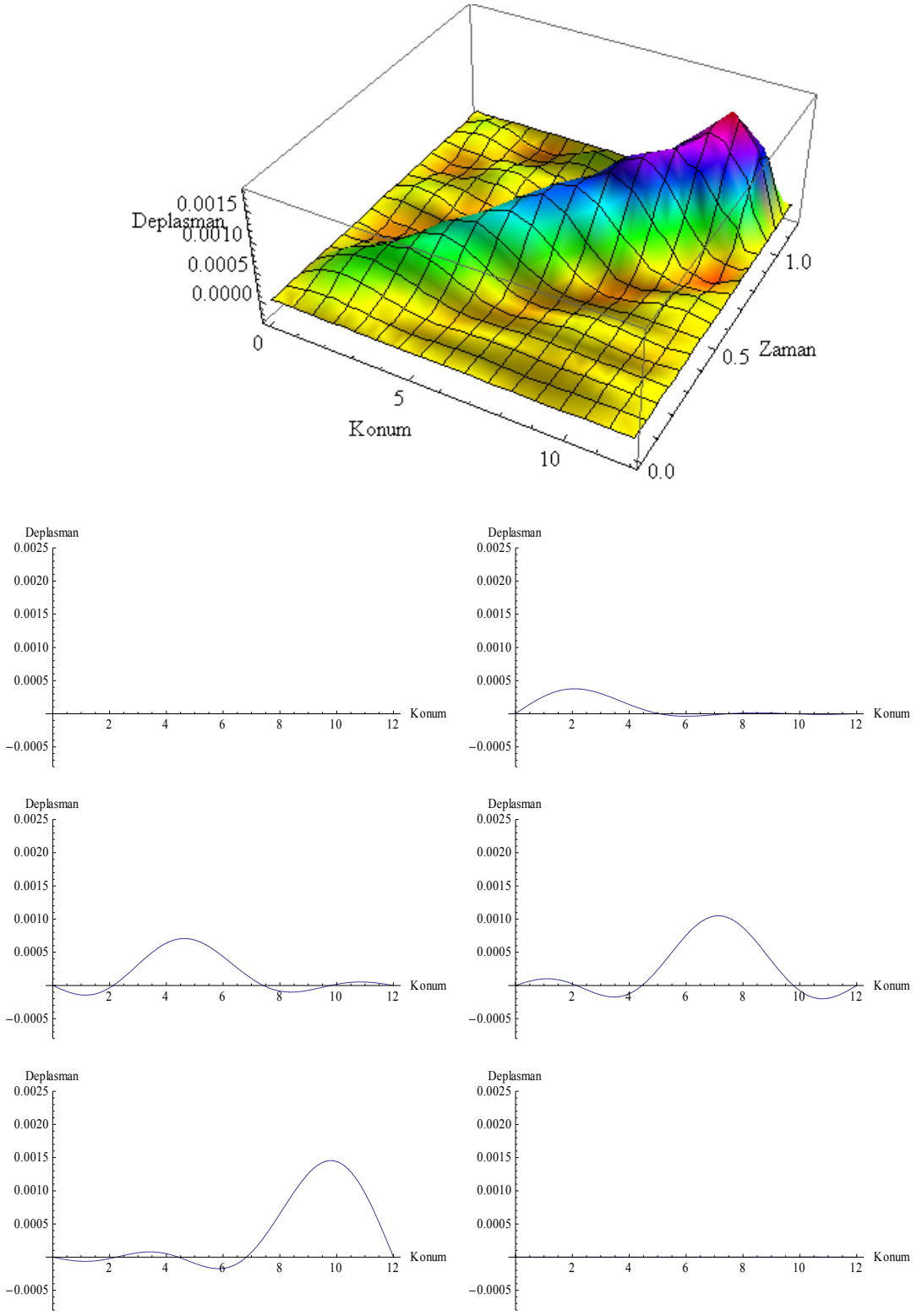
şekilde n=1 iken seri çözümümüzün bize sunduğu veriler görülmektedir. Üç boyutlu çizimimiz hareketli yükümüzün kiriş üzerinde kaldığı tüm zaman dilimi olan t_t kapsıyorken hemen altında verilmiş olan grafikler, $t=t_t/5$ eşit aralıklı altı farklı zaman dilimi için meydana gelen elastik eğriyi göstermektedir. Bu noktadan itibaren verilecek olan aşağıdaki grafiklerde çözümümüzün "n" parametresinin aldığı diğer değerlere göre yakınsaklığı gösterilerek devam edilmektedir.



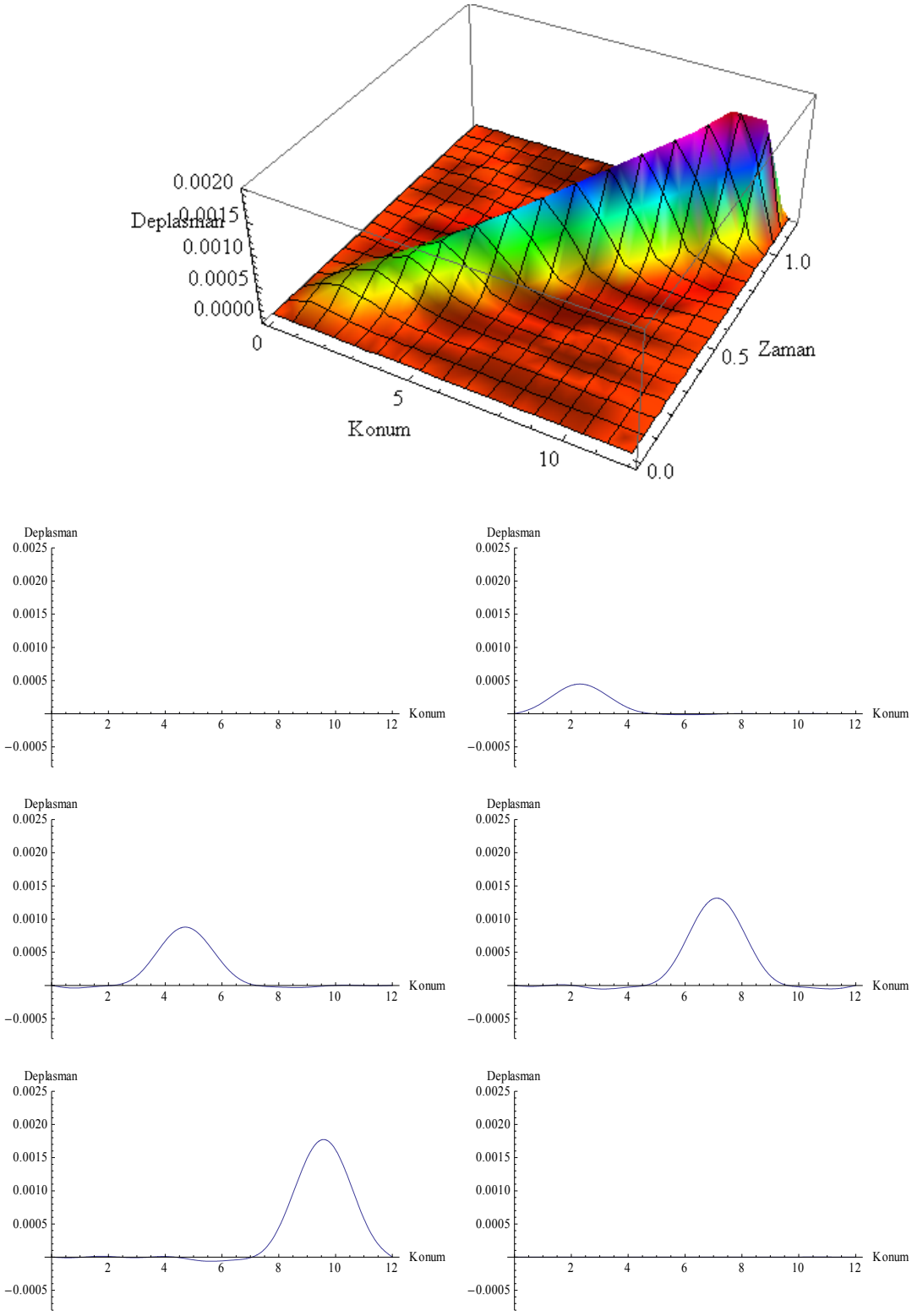
Şekil 3.4 : n=2, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve $t=t_t/5$ durumlarına ait kesitler.



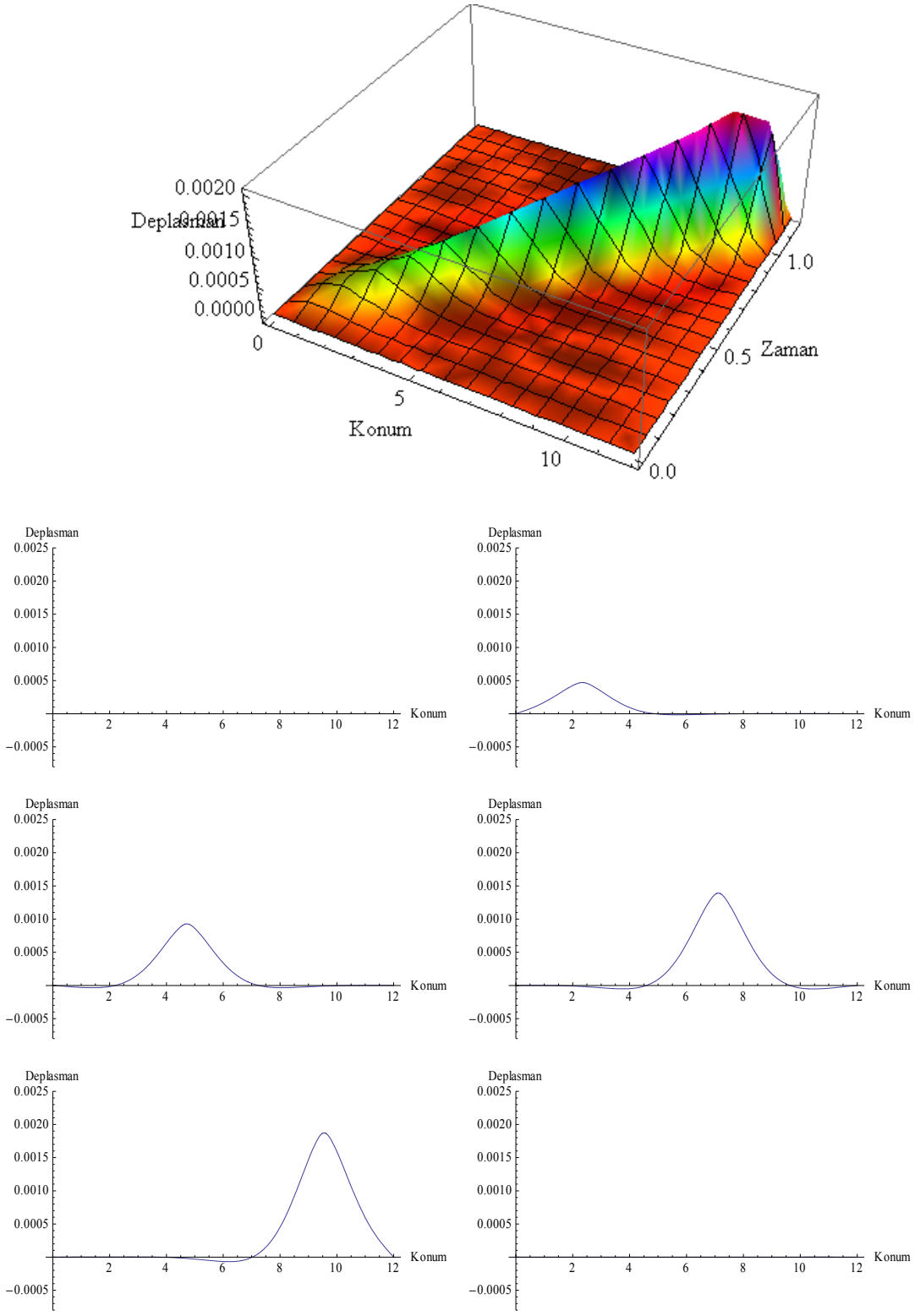
Şekil 3.5 : n=3, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.



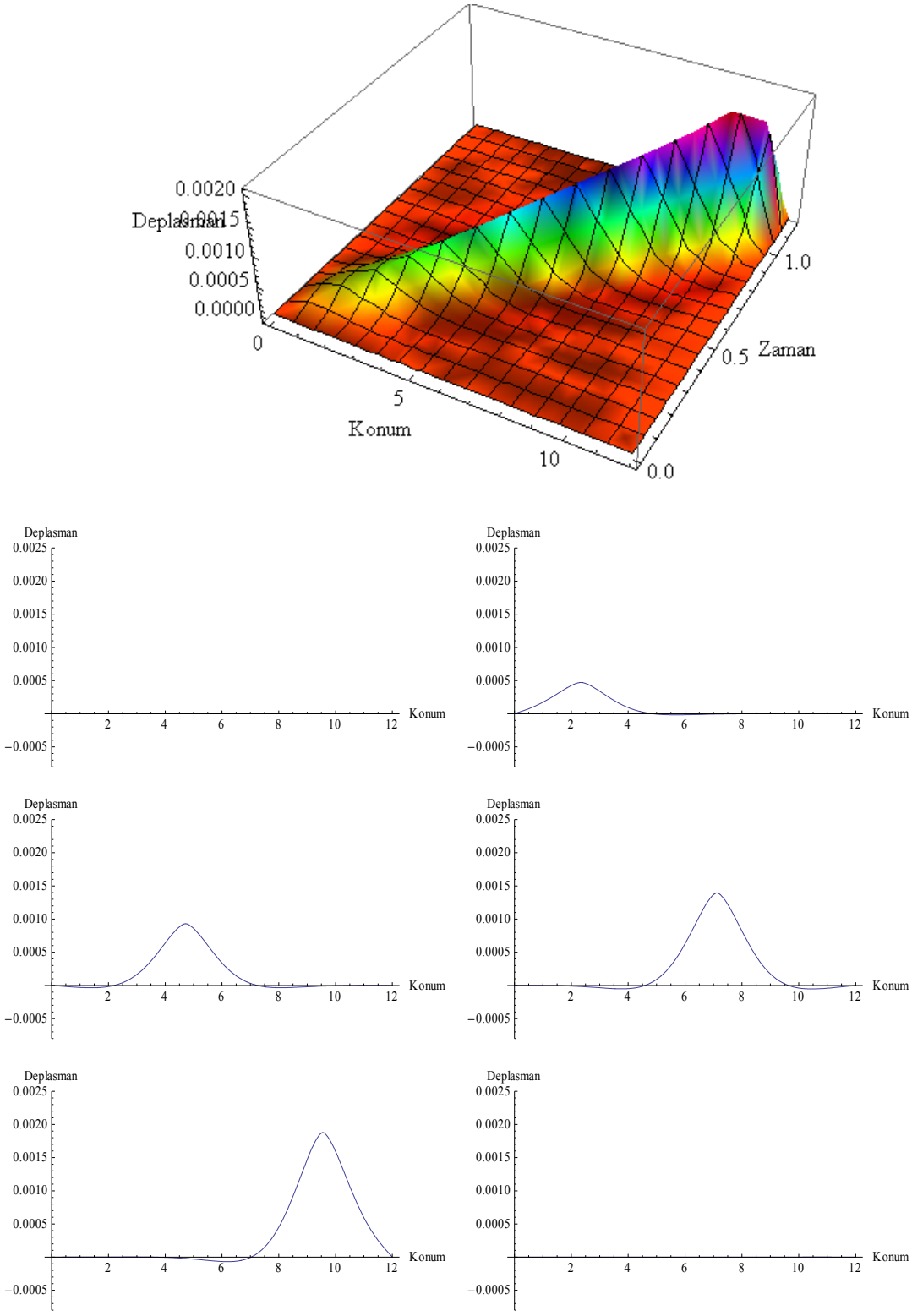
Şekil 3.6 : n=5, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.



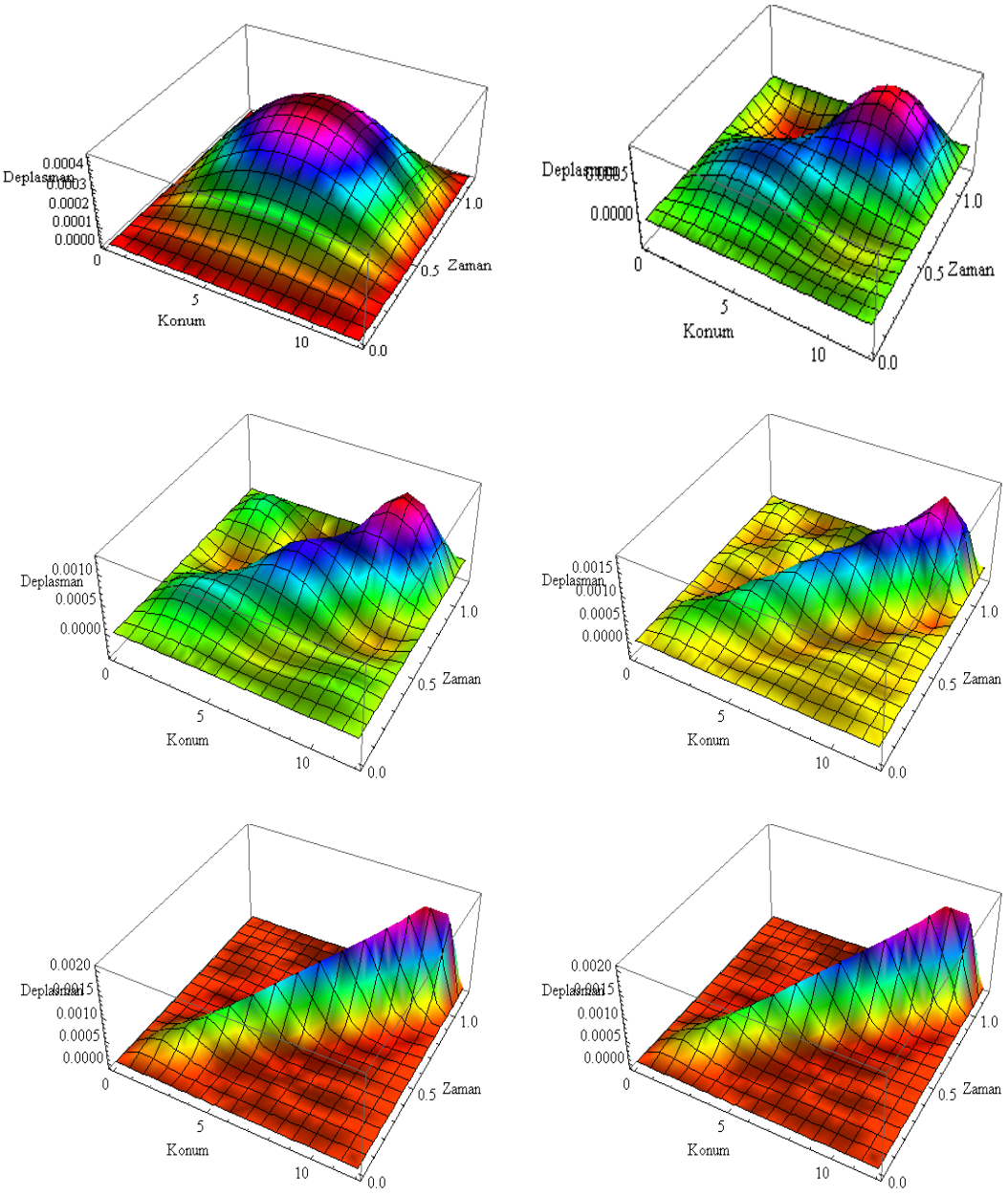
Şekil 3.7 : n=10, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.



Şekil 3.8 : n=50, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.



Şekil 3.9 : n=50, v=10 m/s, a=0.5m/s^2 durumunda tüm zaman dilimlerine ait üç boyutlu çizim ve ve t=t_t/5 durumlarına ait kesitler.

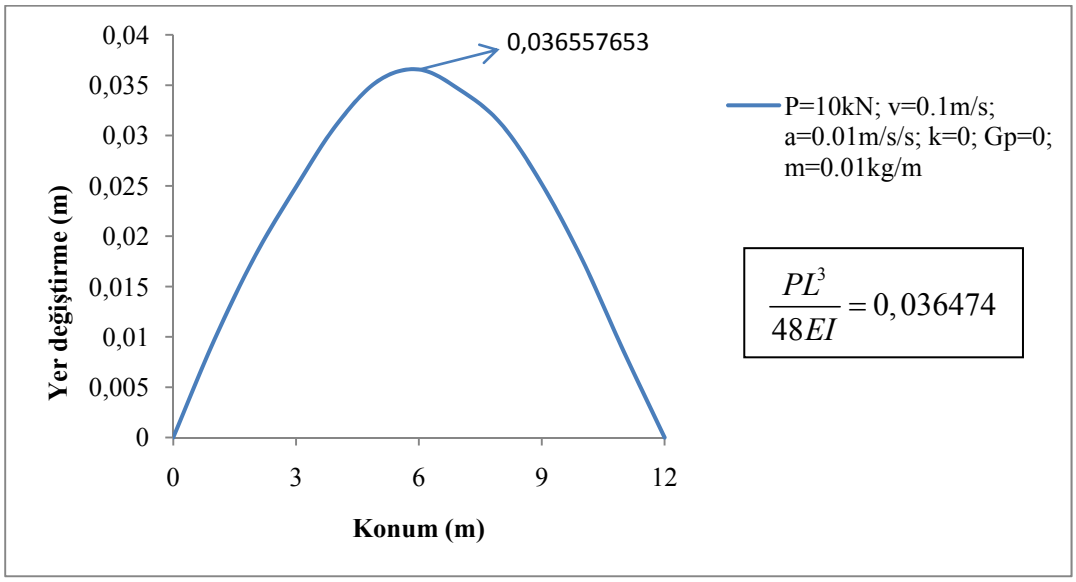


Şekil 3.10 : Seri indisinin n=1,2,3,10,50 ve 100 olması durumlarında sonuçlar.

Önceki şekillerde ayrı ayrı incelenmiş olan grafikler şk'de bir arada verilerek sonuçların daha rahat görülmesi amaçlanmıştır. Gösterilen grafiklerden de anlaşılacağı üzere seri çözümde ilk bir kaç terimden sonra süratli bir yakınsama sonucunda deplasman değerleri sabit bir değer almaktadır.

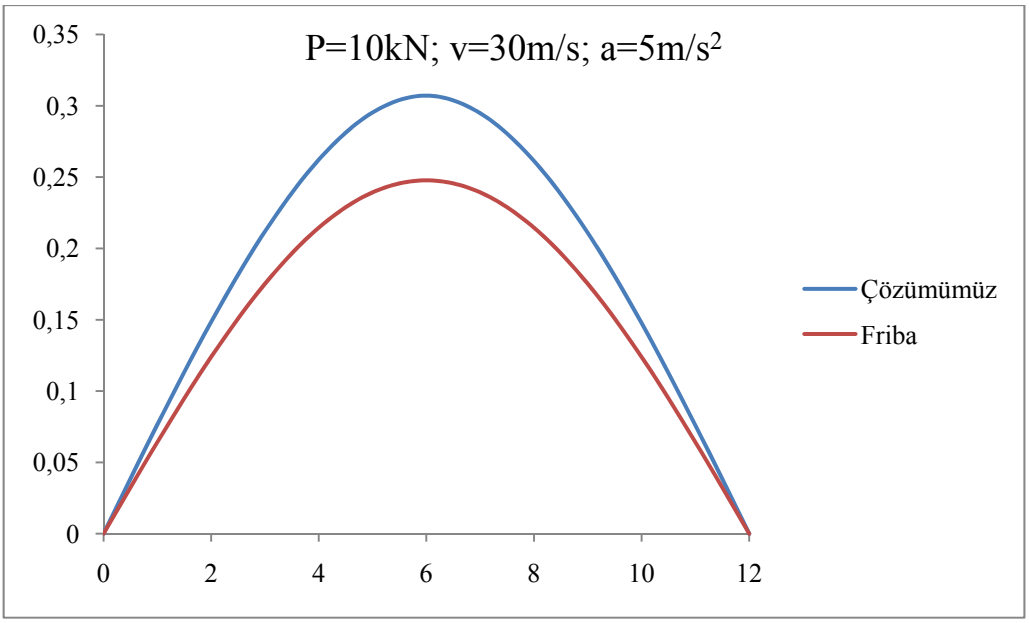
Kirişin üzerinde yer alan yükün başlangıç değeri olan $x = 0$ konumundan kirişin sonlandığı noktaya giderken şiddetindeki artışın doğal bir sonuç olarak yer değiştirme değerinde meydana getirmiş olduğu artış rahatlıkla görülebilmektedir.

Çözüm fonksiyonumuzda yeterli yakınsaklık değerine ulaşabilmek için terim sayısının belirlenmesinin ardından, alınan sonuçların ne derece doğru olduğunu sınamak adına statik durumdaki çökme ile karşılaştırma yapılacaktır. Dinamik çözümde statik çözüme eşdeğer bir sonuç alabilmek adına önce iki parametreli zeminin parametre değerleri sıfırlanarak sözkonusu model basit kiriş durumuna getirilmektedir. Ardından hız ve ivme değerleri de çok küçük alınarak d'Alembert etkisi de ihmal edilmektedir.



Şekil 3.11 : Statik-dinamik karşılaştırma.

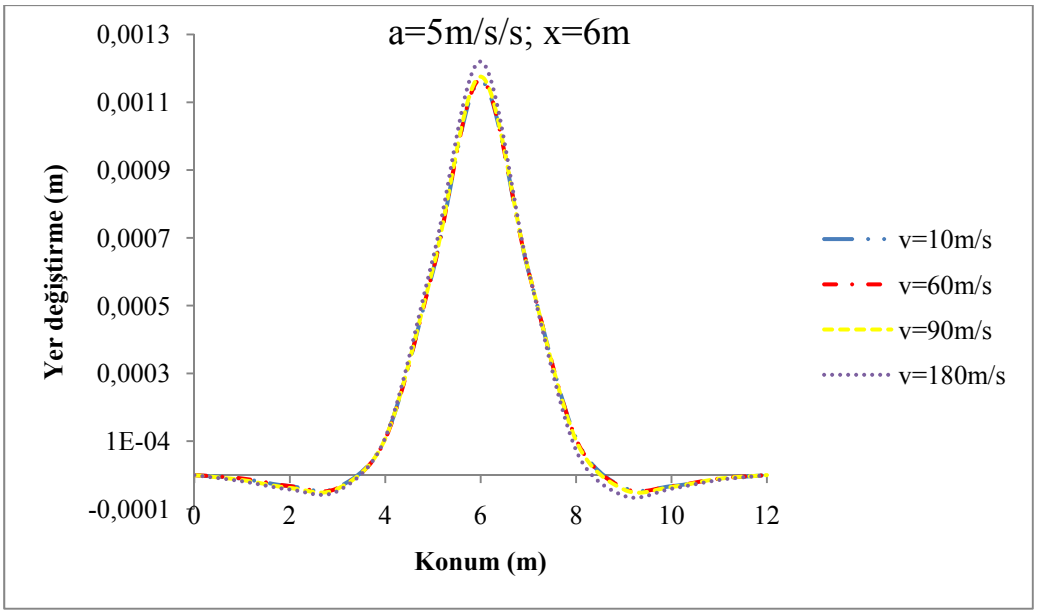
Şek görülen grafikte basit mesnetli bir kirişin statik bir P yükü altında orta noktasındaki çökme değerinin dinamik çözümdeki değerler statik duruma yaklaştırıldığında karşılığı görülmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta bulunmaktadır. Çözmüş olduğumuz problemde hareketli tekil yükün ivmeli olarak hareket etmesinin yanında şiddeti de zamanla $P\left(\frac{t}{T}\right)$ gibi bir çarpanla artırılmaktadır. Dolayısı ile dinamik çözümde kiriş ortasında statik durumdakine eşdeğer bir yükü yakalamak adına T için, verilen ivme ve hız değerleri altında yükün kiriş üzerinde kaldığı toplam süre, t için ise yük kirişin tam ortasında iken geçen süre dikkate alınmıştır. Statik durumdaki P değeri için buradan ortaya çıkacak oranın tekil yük büyüklüğü ile çarpımı yükleme olarak verilmiştir. Sonuç olarak verilen koşullar altında çözümlerin örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 3.12 : Ladislav Friba iki ucu mafsallı sabit mesnetli kiriş karşılaştırması.

Şek 3.12' de görülmekte olan grafikte Friba(1972) 'nin ivmeli hareket eden tekil yük altında iki ucu mafsallı bir kirişin dinamik davranışına dair vermiş olduğu çözüm ile tez kapsamında önerilen çözüm karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırma için zeminin kayma ve yay parametreleri sıfırlanmış ve P kuvvetinin her iki durumda da eşit olmasını sağlamak amacıyla yukarıdaki anlatımda belirtilen yol (Çözmüş olduğumuz problemde hareketli tekil yükün ivmeli olarak hareket etmesinin yanında şiddeti de zamanla $P\left(\frac{t}{T}\right)$ gibi bir çarpanla artırılmaktadır. Dolayısı ile dinamik çözümde kiriş ortasında statik durumdakine eşdeğer bir yükü yakalamak adına T için, verilen ivme ve hız değerleri altında yükün kiriş üzerinde kaldığı toplam süre, t için ise yük kirişin tam ortasında iken geçen süre dikkate alınmıştır.) izlenmiştir. Önerilen çözümde maksimum çökme değeri 0,295m, Friba(1972) çözümünde ise 0,247m olmaktadır.

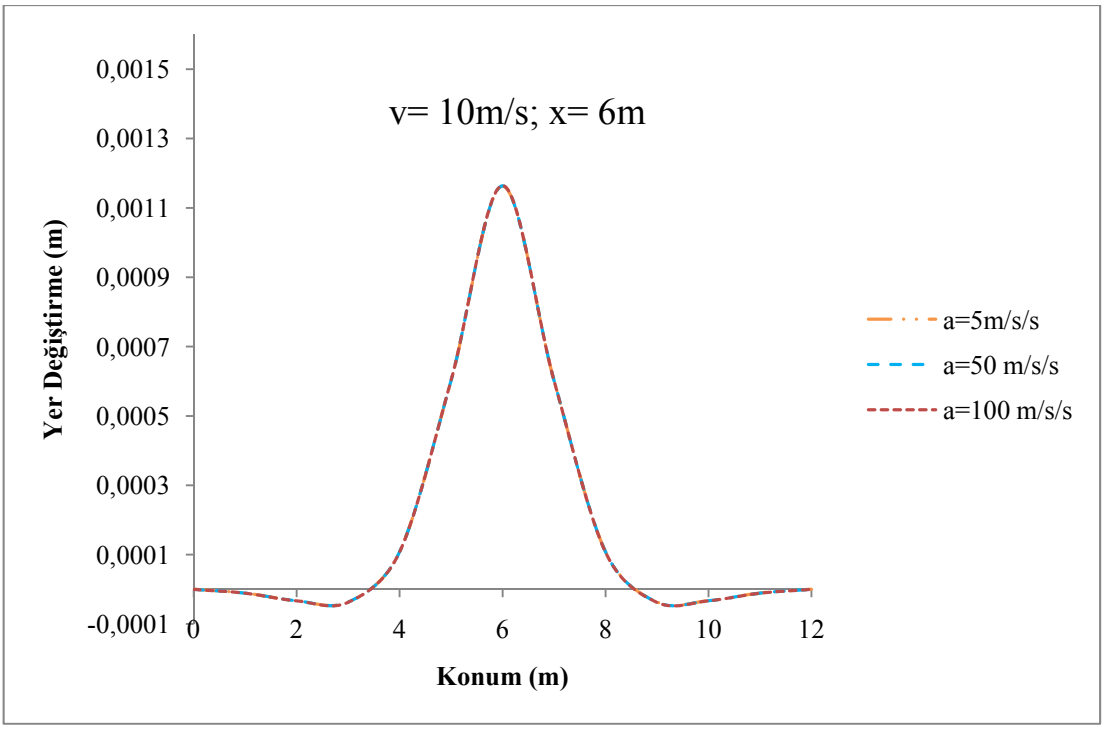
Yer değiştirmede kuvvetin zamanla artışının etkisini değerlendirmek üç boyutlu grafiklerde oldukça rahat olmaktadır. Ancak hız değerlerindeki değişimin dinamik davranışa etkisini görmek için daha ayrıntılı görsellere ihtiyaç vardır.



Şekil 3.13 : Farklı hız değerlerine göre yer değiştirme değişimi.

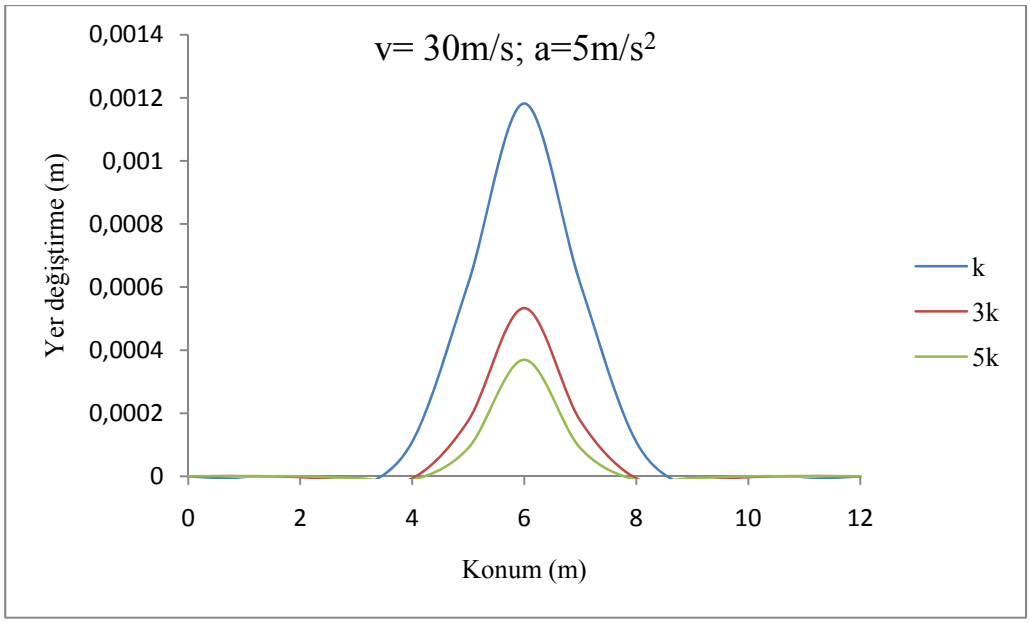
Şekil 3.13' de sunulmuş olan grafikte söz konusu problemimiz için farklı hız değerlerinin etkisi görülmektedir. İvme değeri sabit alınmış ve hareketli tekil yükün kirişin ortasına ulaştığı andaki durumu incelenmiştir. Grafikte konum ismiyle adlandırılmış olan yatay eksen 12m'lik kiriş üzerinde yayılı yükün konumunu tanımlamaktadır. Rahatlıkla görülebilir ki yer değiştirme tekil yük ile simetriktir. En büyük deplasmanın tekil yükün hemen altında ortaya çıktığı görülmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta seçilen eksene de bağlı olarak düşey yer değiştirmelerin pozitif olarak gösterildiğidir. Böyle bir durumda pozitif yer değiştirme(aşağı yönlü) mevcutken kirişin alt kısmının çekme gerilmelerinden etkileneceği akla gelecektir.

Çizimin bize göstermekte olduğu en önemli sonuçlardan biri de en büyük yer değiştirmenin artan hız değerleri ile doğru orantılı olarak daha büyük değerlere ulaşmasıdır. Buna ek olarak kirişin tekil yükün önünde ve arkasında küçük miktarda negatif(yukarı yönlü) yer değiştirmeler yaptığı görülmektedir. Yukarı yönlü bu yer değiştirmelerin yükün hızı, kirişin elastisite modülü, zeminin kayma modülü ve yine kirişin rijitliğine bağlı olarak değişeceği söylenebilir.



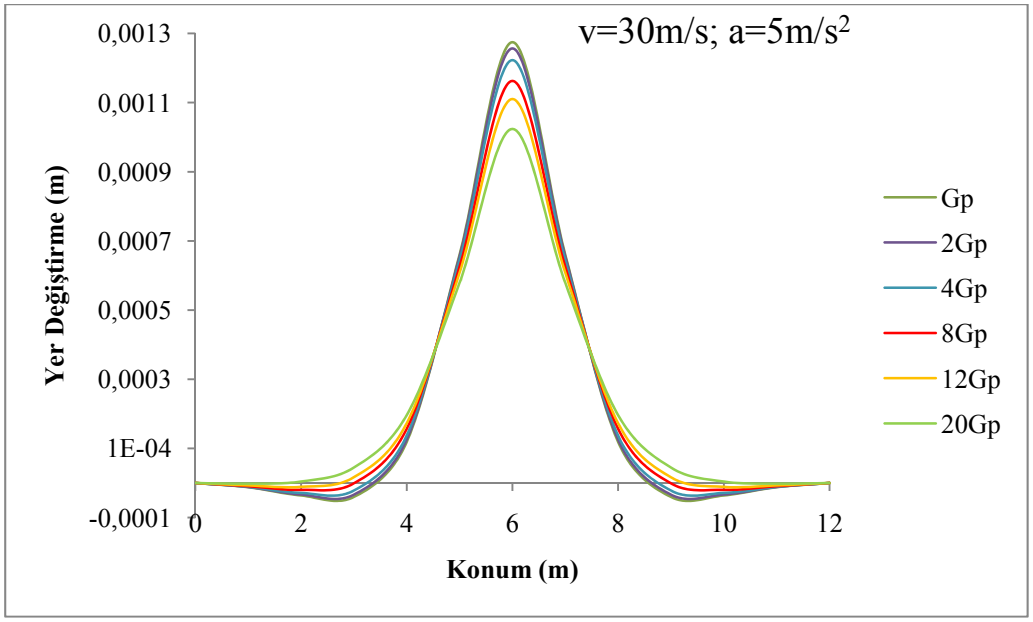
Şekil 3.14 : Farklı ivme değerlerine göre yer değiştirmenin değişimi.

Yer değiştirmelerin hız büyüklüğündeki değişime verdiği yanıtın incelenmesinin ardından farklı ivme değerlerinde meydana gelecek davranış da şekil 3.14' de görülmektedir. Söz konusu şekilde hız değeri için $v = 10m/s$ değeri seçilmiş ve bu hız, artan ivmelerle değiştirilmiştir. İvmedeki artışlar seçilirken pratikten farklı olarak çok yüsek değerler alınmış olmasının nedeni ortaya çıkacak küçük farkların büyüklüklerini artırarak grafikte daha anlaşılır bir görsellikte sunulmasını sağlamaktır. Burada da hız değişimdeki davranışa eşdeğer olarak en büyük yer değiştirmenin artan ivme değerleri ile doğru orantılı olarak daha büyük değerlere ulaştığı görülmektedir. Ancak grafikte belirgin olmayan bu durum sayılarla ifade edilmek istediğinde $a = 5m/s^2$ için 0,0011626m, $a = 50m/s^2$ için 0,0011634m, $a = 100m/s^2$ için 0,0011643m olmaktadır. Buna ek olarak kirişin tekil yükün önünde ve arkasında küçük miktarda negatif(yukarı yönlü) yer değiştirmeleri yine ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.15 : Artan k parametresine göre yer değiştirme durumları.

Şekil 3.15' de temel parametrelerimizin ikisinden biri olan yay parametresi *k* 'nın farklı değerlerine göre yer değiştirmelerin değişimi görülmektedir. Yay parametresinin artışına bağlı olarak zemin rijitliği artmakta ve bunun sonucu olarak yer değiştirmeler azalmaktadır. Söz konusu örneğimizde yay parametresi üç katına çıktığında yer değiştirmelerinde yaklaşık %50 azalmış olduğu görülmektedir.



Şekil 3.16 : Artan G_p parametresine göre yer değiştirmenin değişimi.

Temel yay parametresinin davranışa katkısının incelenmesinin ardından diğer bir parametre olan kayma yaylanırlığı parametresinin değişiminin etkisi de şek görülmektedir. Beklendiği gibi bu parametrenin artışına bağlı olarak yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir. Ancak şek ve şek bakarak k parametresinin G_p parametresine göre daha etkin olduğu söylenebilir.(Şekil 3.16)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada iki parametreli elastik zemine oturan sonlu bir kirişin değişken hızlı hareket eden tekil yükleme altında dinamik davranışı incelenmiştir. Çalışma kapsamında kiriş modellemesi yapılırken Timoshenko kirişi kullanılmıştır. Problemin formülasyonunda iki parametreli elastik zemin özelliğinden kaynaklanan etkiler ve model olarak seçilen Timoshenko kirişinin kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınmıştır. Çözüm yöntemi olarak sonlu Fourier dönüşümünden yararlanılmış ve çözümler kapalı formda elde edilmiştir. Hareketli yükün hız, ivme ve şiddet değişimi, zemin parametrelerinin farklı değerleri ve bunların davranışa katkısı gibi durumlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sonuçlar kısmında ise özgün birtakım örneklere yer verilerek bu değişiklikler görsel olarak sunulmuştur.

- ✓ Değişken hızlarla hareket eden ve şiddeti zamanla artan tekil yük altında Pasternak zemini üzerine yerleştirilmiş kirişin dinamik davranışı için kapalı çözüm elde edilmiştir. Çözüm için problemin sınır koşullarına uygun olarak görülen sonlu Fourier sinüs dönüşümü uygulanmış ve sonuç olarak Fourier serisi ile ifade edilebilecek bir fonksiyon elde edilmiştir.
- ✓ İstenen keyfi bir anda deplasmanın şekli kuvvetin konumuna göre simetrik olmaktadır. En büyük çökme hareketli yükün bulunduğu yerde oluşuyor görünmektedir. En büyük yer değiştirme değeri artan hız miktarları ile birlikte küçük farklarla da olsa artmaktadır.
- ✓ Artan hız miktarlarındaki duruma benzer olarak artan ivme miktarları ile beraber en büyük yer değiştirme yine artmaktadır. Ancak kirişin sonlu olması, zamanın çok kısa olması nedeniyle artan ivmelerin hızı artırma etkileri yeteri düzeyde olmamakta ve buna bağlı olarak deplasmanlardaki artış çok küçük olmaktadır. Sonuçlarda sayısal olarak rahatlıkla görülen bu artış grafiksel ölçütlendirmede yeterince ayrıntılı görülmeyebilmektedir. Benzer şekilde negatif ivmelerde de deplasmanlar küçülmektedir.

- ✓ Pasternak zemininde görülen yer değiştirmeler, Winkler zemin modeline göre daha düşük olmaktadır. Bu durum nedeni süreksizlik ile çöken yaylara ek olarak bu yaylar arasındaki kayma etkilerinin de Pasternak modelinde düşünülmüş olmasıdır.
- ✓ Winkler modeline ait olan k yay parametresinin değeri arttıkça rijitlik artmakta ve buna bağlı olarak yer değiştirmeler azalmaktadır.
- ✓ Pasternak modelinde ek olarak gelen kayma yaylanırlığı paramatresi G_p nin artışına bağlı olarak yer değiştirmeler azalmaktadır.
- ✓ Hareketli tekil yükün şiddetinin kirişin üzerinde bulunduğu süre içerisinde sürekli artması dolayısı ile yer değiştirmeler de sürekli artmaktadır.

KAYNAKLAR

Achenbach, J.D., Sun, C.T., Moving Load On A Flexibly Supported Timoshenko Beam, *Int. J. Solids Structures,* 1965, Vol. 1, pp. 353 to 370. Pergamon Press Ltd.

Arboleda-Monsalve, L. G., Zapata-Medina, D.G., Aristizabal-Ochoa, J.D., Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector, *Journal of Sound and Vibration,* 310 (2008) 1057-1079.

CAO Chang-yong, ZHONG Yang, Dynamic response of a beam on a Pasternak foundation and under a moving load [J]. J Chongqing Univ: Eng Ed [ISSN 1671-8224], 2008, 7(4): 311-316.

Chen, Y.-H., Huang, Y.-H., ve Shih, C.-T., Response Of An Infinite Timoshenko Beam On A Viscoelastic Foundation To A Harmonic Moving Load, *Journal of Sound and Vibration,* (2001) **241**(5), 809-824.

Friba, L., Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, *ASCE Press,* 1972, USA, ISBN: 0-7277-2741-9.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series, and Products, *Academic Press*, 1965

Hayır, A., Dynamic Behavior Of An Elastic Beam On A Winkler Foundation Under A Moving Load. *Fifth International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics and Symposium in Honor of Professor I.M. Idriss,*San Diego, California, May 24-29, 2010.

Kargarnovin, M. H., Younesian, D. ve diğ., Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads, *Computers and Structures,* 83 (2005) 1865-1877 Orlando, Florida, USA, April 19-23.

Mallik, A.K., Chandra, S., B. Singh, A., Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load, *Journal of Sound and Vibration,* 291 (2006) 1148 - 1169

Nguyen, D. K., Dynamic Response of Prestressed Timoshenko Beams Resting On Two-Parameter Foundation to Moving Harmonic Load, *Technische Mechanik,* Band 28, Heft 3-4, (2008), 237–258.

Sun, L., Dynamic displacement response of beam-type structures to moving line loads, *International Journal of Solids and Structures,* 38 (2001) 8869 - 8878

Sun, L., A closed-form solution of beam on viscoelastic subgrade subjected to moving loads, *Computers and Structures,* 80 (2002) 1-8

Url-1 <*http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral*>, alındığı tarih 12.12.2010

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Ozan Çelik

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul 1986

Adres: İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
34469 Maslak - İstanbul

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi