İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEPREM ETKİSİNDE ZEMİNLE ETKİLEŞEN YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ

Ali Ruzi ÖZUYGUR

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

OCAK 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEPREM ETKİSİNDE ZEMİNLE ETKİLEŞEN YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ

DOKTORA TEZİ
Ali Ruzi ÖZUYGUR
(501032009)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Haziran 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ocak 2011

Tez Danışmanı : Doç. Dr. A. Necmettin GÜNDÜZ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Zekai CELEP (İTÜ)
Prof. Dr. Feridun ÇILI (İTÜ)
Prof. Dr. Ünal ALDEMİR (İTÜ)
Doç. Dr. Mustafa ZORBOZAN (YTÜ)

OCAK 2011

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanışı sırasında ve İstanbul Teknik Üniversitesi'nde eğitim gördüğüm sürede bana yardımlarını ve teşviklerini esirgemeyen, konu içi ve dışı her türlü soruyu çekinmeden sorabildiğim, beni sadece öğrencisi değil aynı anda bir kardeşi olarak kabul eden hocam Doç. Dr. A. Necmettin GÜNDÜZ'e; engin bilgi birikimi, hoşgörüsü ve kibarlığıyla her zaman öğrencisinin yanında olan hocam Prof. Dr. Zekai CELEP'e; teze olan yakın ilgisi ve değerli katkılarından dolayı hocalarım Prof. Dr. Feridun ÇILI, Prof. Dr. Ünal ALDEMİR ve Doç. Dr. Mustafa ZORBOZAN'a en içten saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca, bu çalışmanın gerçekleşmesinde maddi ve manevi katkısı bulunan herkese kalbi teşekkürlerimi bildiririm. Beni yetiştiren annem babam hayatımın her anında adlarını sonsuz şükran ve saygıyla anacağım en değerli iki insandır. Son olarak her zaman Uygur Türklerinin kimsesi olan, bana İstanbul Teknik Üniversitesi gibi Türkiye'nin seçkin bir üniversitesinde yüksek lisans ve doktora yapma imkanını sağlayan Türkiye Cumhuriyeti'ne teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ocak 2011 Ali Ruzi ÖZUYGUR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ... **iii**
İÇİNDEKİLER ... **v**
KISALTMALAR ... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xi**
SEMBOL LİSTESİ ... **xiii**
ÖZET ... **xv**
SUMMARY ... **xvii**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Kontrol Mühendisliği ve Yapısal Kontrol ... 1
1.2 Yapısal Kontrol Yöntemleri ... 3
1.2.1 Pasif kontrol ... 4
1.2.2 Aktif kontrol ... 5
1.2.3 Yarı aktif kontrol ... 6
1.2.4 Karma kontrol ... 7
1.3 Bu Çalışmanın Konusu ve Amacı ... 8
2. YAPI DİNAMİĞİNDE DURUM UZAYI YÖNTEMİ ... **11**
2.1 Giriş ... 11
2.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sürekli Zaman Aralığındaki Çözümü ... 11
2.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Ayrık Zaman Aralığındaki Çözümü ... 13
2.4 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Sürekli Zaman Aralığındaki Çözümü ... 16
2.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Ayrık Zaman Aralığındaki Çözümü ... 17
3. LİNEER OPTİMAL KONTROL ... **23**
3.1 Giriş ... 23
3.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Yapısal Kontrolü ... 23
3.2.1 Kapalı çevrim kontrolü ... 24
3.2.2 Açık çevrim kontrolü ... 24
3.2.3 Kapalı-açık çevrim kontrolü ... 25
3.3 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Yapısal Kontrolü ... 25
3.3.1 Kapalı çevrim kontrolü ... 27
3.3.2 Açık çevrim kontrolü ... 28
3.3.3 Kapalı-açık çevrim kontrolü ... 28
3.4 Optimal Kontrol ... 28
3.4.1 Gerekli matematik bilgisi ... 29
3.4.2 Dış yüksüz sistemlerin sürekli zaman aralığındaki lineer optimal kontrolü ... 36
3.4.3 Deprem etkisindeki yapıların ayrık zaman aralığındaki optimal kontrolü ... 42
4. DİNAMİK YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ ... **57**
4.1 Giriş ... 57
4.2 Dinamik Yapı-Zemin Etkileşimi Hesap Yöntemleri ... 57

4.2.1 Doğrudan hesap yöntemi 57
4.2.2 Altsistem hesap yöntemi 58
4.3 Empedans Katsayılarının Belirlenmesi 59
4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Altsistem Yöntemiyle Yapı-Zemin Etkileşimi Hesabı 63
4.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Altsistem Yöntemiyle Yapı-Zemin Etkileşimi Hesabı 74
5. ZEMİNLE ETKİLEŞEN YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ 83
5.1 Giriş 83
5.2 Literatür Taraması 83
5.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler 84
5.4 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler 94
6. ÜÇ BOYUTLU YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ VE YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ ANALİZİ 105
6.1 Giriş 105
6.2 Üç Boyutlu Yapıların Durum Uzayı Yöntemiyle Çözümü 105
6.3 Üç Boyutlu Yapıların Optimal Kontrolü 110
6.4 Üç Boyutlu Yapıların Yapı-Zemin Etkileşimi Analizi 111
7. SONUÇ VE KONU ÜZERİNDE YAPILABİLECEK ÇALIŞMALAR 125
KAYNAKLAR 127
EKLER 137
ÖZGEÇMİŞ 141

KISALTMALAR

PEY : Pasif enerji yutucular
AKS : Aktif kütlesel sönümleyici
ADS : Aktif değişken rijitlikli sistem
KKS : Karma kütlesel sönümleyici
AGS : Aktif giroskopik sabitleyici
YS : Yarı-aktif sönümleyici
ATY : Akıllı taban yalıtımı
YKS : Yarı-aktif ayarlı kütle sönümleyicisi
KK : Karma control
YZE : Yapı-zemin etkileşimi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1 : Aktif ve yarı-aktif kontrol uygulama örnekleri [6]. 9
Çizelge 4.1 : $\nu = 1/3$ için k ve c katsayıları 62
Çizelge 4.2 : Maksimum temel dönmeleri ve yanal yerdeğiştirmeleri 74
Çizelge 4.3 : Üstyapı kütlesi maksimum yanal yerdeğiştirmeleri 74
Çizelge 4.4 : Üstyapı kütlesi maksimum yanal yerdeğiştirmeleri 81
Çizelge 5.1 : Ankastre ve zeminle etkileşen sisteme uygulanan kontrol kuvveti (kN)..... 93
Çizelge 5.2 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin üstyapı yerdeğiştirmeleri (m) 93
Çizelge 5.3 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin temel yanal yerdeğiştirmeleri (m) 93
Çizelge 5.4 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin temel dönmeleri (rad) 93
Çizelge 5.5 : Ankastre ve zeminle etkileşen sisteme uygulanan kontrol kuvveti (kN)..... 103
Çizelge 5.6 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin maksimum yerdeğiştirmesi (m)..... 103

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [33] 6
Şekil 1.2 : Yarı aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [74] 7
Şekil 1.3 : Karma kontrol yönteminin çalışma prensibi [74] 7
Şekil 2.1 : Tek serbestlik dereceli sistem 11
Şekil 2.2 : 1940 El-Centro depremi ivme kaydı. 14
Şekil 2.3 : Tek serbestlik dereceli sistemin (a) yerdeğiştirmesi, (b) hızı, (c) ivmesi. 15
Şekil 2.4 : İki serbestlik dereceli sistem 16
Şekil 2.5 : Üç serbestlik dereceli sistem. 19
Şekil 2.6 : Üç serbestlik dereceli sistemin yerdeğiştirme ve ivme yanıtı. 20
Şekil 3.1 : Kontrol kuvveti uygulanmış tek serbestlik dereceli sistem 23
Şekil 3.2 : Kontrol kuvveti uygulanmış çok serbestlik dereceli sistem 26
Şekil 3.3 : Dış yüksüz sisteme ait optimal kontrol blok diyagramı 41
Şekil 3.4 : Deprem etkisindeki sisteme ait optimal kontrol blok diyagramı 48
Şekil 3.5 : Gerçek ve tahmin edilen ivme grafiği 51
Şekil 3.6 : (a) Tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti, (b) sistemin kontrollü-kontrolsüz durumdaki yerdeğiştirmesi. 51
Şekil 3.7 : Optimal kontrollü üç serbestlik dereceli sistem. 52
Şekil 3.8 : Kontrollü ve kontrolsüz üç serbestlik dereceli sistemin yerdeğiştirmesi. 55
Şekil 3.9 : Üç serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti. 56
Şekil 4.1 : Doğrudan hesap yöntemi için sonlu elemanlar modeli 58
Şekil 4.2 : Elastik yarı sonsuz ortamın idealleştirilmesi 59
Şekil 4.3 : Elastik yarı sonsuz ortamın idealleştirilmesi 60
Şekil 4.4 : k_1, c_1, k_2 ve c_2 katsayılarının polinomlarla gösterimi 62
Şekil 4.5 : Yarı sonsuz ortama oturan tek serbestlik dereceli sistem [99] 64
Şekil 4.6 : 1940 El-Centro depremi (a) ivme, (b) hız ve (c) yerdeğiştirme zaman geçmişi. 70
Şekil 4.7 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 0.2 s) 70
Şekil 4.8 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 0.5 s) 71
Şekil 4.9 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 1.0 s) 71
Şekil 4.10 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 3.0 s) 71
Şekil 4.11 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 5.0 s) 72
Şekil 4.12 : Üstyapının yanal yerdeğiştirmesi, (a) T_n = 0.2 s, (b) T_n = 0.5 s, (c) T_n = 1.0 s, (d) T_n = 3.0 s, (e) T_n = 5.0 s. 73
Şekil 4.13 : Yarı sonsuz ortama oturan çok serbestlik dereceli sistem 75
Şekil 4.14 : Yarı sonsuz ortama oturan üç serbestlik dereceli sistem 79
Şekil 4.15 : Üstyapının yanal yerdeğiştirmesi. 80
Şekil 4.16 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi. 81
Şekil 5.1 : Kontrollü, zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sistem için hesap yöntemi 88
Şekil 5.2 : Tek serbestlik dereceli kontrollü zeminle etkileşen sistem 89

Şekil 5.3 : Zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti 91
Şekil 5.4 : Zeminle etkileşen kontrollü kontrolsüz sistemin üstyapı yerdeğiştirmesi 92
Şekil 5.5 : Kontrollü zeminle etkileşen çok serbestlik dereceli sistem için hesap yöntemi 97
Şekil 5.6 : Üç serbestlik dereceli kontrollü zeminle etkileşen sistem 98
Şekil 5.7 : Zeminle etkileşen sisteme uygulanan optimal kontrol kuvveti 101
Şekil 5.8 : Kontrollü, zeminle etkileşen sistemin üstyapı yerdeğiştirmeleri 102
Şekil 5.9 : Kontrollü, zeminle etkileşen sistemin temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi 102
Şekil 6.1 : Bir kütlenin genel halde serbestlik derecesi105
Şekil 6.2 : Rijit diyaframın serbestlik derecesi, planda simetrik olmayan yapı [131] 106
Şekil 6.3 : Planda simetrik olmayan tek katlı bir yapının rijitlik matrisi [131] 108
Şekil 6.4 : Zeminle etkileşen üç boyutlu sisem 111
Şekil 6.5 : Planda simetrik olmayan kontrollü üç boyutlu yapı 117
Şekil 6.6 : Katlara uygulanan optimal kontrol kuvveti 119
Şekil 6.7 : Üç katlı yapının *y* yönü kat yerdeğiştirmeleri 120
Şekil 6.8 : Üç katlı yapının kat dönmeleri 120
Şekil 6.9 : Zeminle etkileşen planda simetrik olmayan üç boyutlu yapı 121
Şekil 6.10 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının temel yerdeğiştirmeleri 122
Şekil 6.11 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının *y* yönü kat yerdeğiştirmeleri 123
Şekil 6.12 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının kat dönmeleri 123
Şekil B.1 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 0.2 s 138
Şekil B.2 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 0.5 s 138
Şekil B.3 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 1.0 s 139
Şekil B.4 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 3.0 s 139
Şekil B.5 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 5.0 s 140

SEMBOL LİSTESİ

a : doğrusal tahmin filtresi katsayıları
c : sistemin sönümü
c_s : kayma dalgasının yayılma hızı
$\mathbf{C}$: sistemin sönüm matrisi
$\mathbf{D}$: kontrol kuvveti dağılım matrisi
F_c : optimal kontrol kuvveti
F_{ck} : ayrıklaştırılmış kontrol kuvveti
$\mathbf{f}_{ck}$: ayrıklaştırılmış optimal kontrol kuvveti vektörü
$\mathbf{f}_c$: optimal kontrol kuvveti vektörü
$\mathbf{F}_e$: dış yük vektörü
G : zeminin kayma modülü
h : yapı yüksekliği
h_0 : temel kalınlığı
H : Hamiltonian fonksiyonu
I : üstyapı kütlesinin kütlesel atalet momenti
I_0 : temel plağının kütlesel atalet momenti
J : amaç fonksiyonu
k : sistemin rijitliği
$k_{yy}(\omega)$: zeminin frekansa bağlı yanal empedans katsayısı
$k_{\theta\theta}(\omega)$: zeminin frekansa bağlı dönel empedans katsayısı
$\mathbf{K}$: sistemin rijitlik matrisi
L : Lagrangian
m : sistemin kütlesi
m_0 : temel plağının kütlesi
M_0 : temel-zemin sisteminin etkileşim momenti
$\mathbf{M}$: sistemin kütle matrisi
$\mathbf{P}$: Riccati matrisi
P_0 : temel-zemin sisteminin yanal etkileşim kuvvetini
$\mathbf{Q}$: kontrol ağırlık matrisi
$\mathbf{R}$: kontrol ağırlık matrisi
r : dairesel plağın yarıçapı
T : sistemin serbest titreşim periyodu
t : zaman
u : sistemin göreli yerdeğiştirmesi
$\mathbf{u}$: sistemin göreli yerdeğiştirme vektörü
$\dot{u}$: sistemin göreli hızı
$\ddot{u}$: sistemin göreli ivmesi
$\ddot{u}_g$: yer hareketi ivmesi

$\ddot{u}_{gk}$: ayrıklaştırılmış deprem yer hareketi ivmesi

u_0 : temel plağının yanal yerdeğiştirmesi

$\ddot{u}_0$: temel plağının yanal ivmesi

$\mathbf{z}$: durum vektörü

$\boldsymbol{\lambda}_k$: Lagrangian çarpanı

ν : zeminin Poisson oranı

θ_0 : temel plağının dönmesi

$\ddot{\theta}_0$: temel plağının dönel ivmesi

ρ : zeminin kütlesel yoğunluğu

ω_n : sistemin serbest titreşim frekansı

ω : dış etkinin titreşim frekansı

ζ : sistemin sönüm oranı

DEPREM ETKİSİNDE ZEMİNLE ETKİLEŞEN YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ

ÖZET

Yapı-zemin etkileşimi analizinde kullanılan zeminin empedans katsayıları dış yükün frekansına bağlıdır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi analizinde genel olarak kullanılan yöntem önce yapı-zemin sisteminin frekans tanım alanında analiz edilmesi, daha sonra elde dilen büyüklüklerin ters Fourier dönüşümü tekniği yardımıyla zaman tanım alanına dönüştürülmesi şeklindedir. Yapı mühendisliğinde kullanılan klasik optimal kontrol analizi zaman tanım alanında yapılmaktadır. Optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşimi etkilerinin bir arada düşünülmesi, problemi çok karmaşık hale getirmektedir. Karşılaşılan önemli zorluklardan biri, zaman ve frekans tanım alanları arasında Fourier dönüşümü uygulanacak büyüklüklerin her adımda değil, tüm zaman aralığında belli olması gerektiğidir. Dolayısıyla optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşiminin bir arada analizi konusunda çeşitli basitleştirmelere dayanan az sayıda çalışma bulunmaktadır. Optimal kontrol analizinde genel olarak yapı-zemin etkileşimi etkilerinin küçük, özellikle temelin dönme etkisinin ihmal edilebilir mertebede olduğu varsayılmıştır.

Bu tezde optimal kontrol ve yapı-zemin etkileşimi konuları kısaca tanıtıldıktan sonra, zeminle dinamik olarak etkileşen yapıların deprem sırasında optimal olarak kontrol edilebilmesi için gereken kontrol kuvvetlerinin belirlenmesinde kullanılabilecek iki adımlı ardışık yaklaşıma dayanan sayısal bir algoritma geliştirilmiştir. Birinci adımda rijit temele sahip sistem kullanılarak optimal kontrol kuvveti hesaplanmaktadır. Daha sonra bu optimal kontrol kuvveti, Fourier dönüşümü tekniği yardımıyla frekans tanım alanına dönüştürülerek deprem etkisinde zeminle etkileşen sistemin denklem takımına dahil edilmekte ve bu denklem takımından temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi hesaplanmaktadır. Frekans tanım alanında elde edilen bu temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesine ters Fourier dönüşümü tekniği uygulanarak zaman tanım alanındaki değerleri hesaplanmakta; ileriye doğru sonlu farklar yöntemi yardımıyla da temel yanal yerdeğiştirme ve dönmesinin ivmeleri elde edilmektedir. İkinci adımda ise, birinci adımda elde edilen temele ait yanal yerdeğiştirme ve dönme ivmeleri ile deprem yer hareketi ivmesi kullanılarak optimal kontrol kuvveti tekrar hesaplanmaktadır. Zaman tanım alanında hesaplanan bu optimal kontrol kuvveti yukarıda açıklanan yöntemle yapı-zemin sisteminin denklem takımına dahil edilerek temel ve üstyapının davranışları tekrar elde edilmektedir. Son olarak sayısal uygulama ve parametrik çalışmalar yapılarak geliştirilen algoritmanın doğruluğu ve etkinliği gösterilmiştir.

OPTIMAL CONTROL OF STRUCTURES UNDER EARTHQUAKES INCLUDING SOIL-STRUCTURE INTERACTION

SUMMARY

Soil-structure interaction analyses are usually carried out in frequency domain due to the frequency-dependent foundation impedances. The general approach to tackle soil-structure interaction problem is to obtain frequency-domain response of soil-structure system firstly, and then to obtain its time-domain response by using inverse Fourier transform technique. The conventional optimal control analysis used in structural engineering is performed in time domain. Incorporating soil-structure interaction effects with the optimal control makes the problem very complicated. One of the main difficulties is that Fourier transformations between the time domain and the frequency domain are necessarily performed on whole domain, not at each time step. Therefore, there are very few studies dedicated to the analyses of actively controlled soil-structure systems based on various simplifying assumptions in the literature. Generally, it is assumed that soil-structure interaction effects are small, especially foundation rocking is negligible.

In this dissertation, firstly, optimal control and soil-structure interaction problems are introduced briefly; and then a two-step iteration-based numerical algorithm is developed to tackle optimally controlled soil-structure interaction system under earthquake loading. At the first step, optimal control forces are obtained by using fixed-base system. Then the optimal control forces are converted to frequency domain by means of Fourier transform technique so as to be used in the equations of soil-structure interaction system. Lateral displacement and rocking of foundation are obtained from the equations of soil-structure interaction system containing optimal control forces in the frequency domain. The lateral displacement and rocking of foundation are then converted to time domain by means of inverse Fourier transform technique, and accelerations of the lateral displacement and rocking of foundation are obtained by forward finite difference method. At the second step, the optimal control forces are calculated again by using the acceleration values of the lateral displacement and rocking of foundation and the earthquake ground motion. Following the way explained above, the optimal control forces obtained in time domain are employed in the equations of soil-structure system from which the behavior of foundation-structure system is obtained. Numerical examples and parametric studies have shown that the algorithm works effectively and generates acceptable results.

1. GİRİŞ

Depreme dayanıklı yapı tasarımının temel konusu, yapıların deprem yüklerini etkili bir şekilde karşılamasını ve meydana gelen yerdeğiştirmelerin istenilen sınırlar içerisinde kalmasını sağlamaktır. Belli ki, yapıların deprem etkilerine verdiği yanıtını sınırlamak için güçlü elemanlar kullanmak gerekir. Ancak ekonomik nedenlerden dolayı genel olarak yapılar deprem etkilerinin tümünü karşılayacak şekilde tasarlanmazlar. Yapı elemanlarının akma noktasından sonra mekanizma durumuna gelmeden şekil değiştirerek daha fazla enerji tüketmesine imkan veren sünek yapı tasarımı güncel yaklaşımlardan biridir [1]. Bu tasarım felsefesi ile tasarlanan yapıların büyük depremlerden zarar görmesi kaçınılmazdır. Bu yaklaşımın diğer olumsuz yönleri ise deprem etkisinden meydana gelen kalıcı şekil değiştirmelerin yapı ömrünü kısaltması ve onarımın pahalı olmasıdır. Dolayısıyla güvenlik ve ekonomiklik şartlarını sağlayan yapı tasarımı yapmak için yapısal kontrol gibi farklı yaklaşımlar yıllardan beri araştırma konusu olmuştur.

1.1 Kontrol Mühendisliği ve Yapısal Kontrol

Bir sisteme uyarı verildiği zaman sistem ona yanıt verecektir. Verilen yanıtın istenilen ölçüden farklı olması halinde onun düzeltilmesi işlemi devreye girer. Bu işleme kontrol adı verilir. Kontrol mühendisliği bu sebep-sonuç ilişkisini inceleyen bir bilim dalıdır. Tarihten beri adına resmi olarak kontrol mühendisliği denmese de insanlar bir şekilde yaşamı kolaylaştırmak için çeşitli yöntemlere başvurmuşlardır. Son birkaç yüzyılda kontrol mühendisliği makine, elektrik gibi çeşitli mühendislik dallarında geniş olarak kullanılmıştır [2].

Yapı mühendisliğinde kontrol işleminin ilk olarak kullanılması 100 yıl öncesine dayanmaktadır. 100 yıl önce Japonya'da John Milne küçük bir ahşap evi kayıcı mesnetler üzerine yaparak deprem sırasında evin deprem etkisinden korunabileceğini göstermiştir [3]. Kobori ve Minai 1960'larda yapıların aktif kontrolü konusunda analitik çalışmalar yapmıştır [4]. Ancak yapıların aktif kontrolü düşüncesi 1972

yılında Yao tarafından hazırlanan makalede açık olarak formüle edilmiş ve o tarihten sonra yapısal kontrol terimi kullanılmaya başlamıştır [5].

Yapısal kontrolün amacı yapıya bir uyarı verildiğinde yerdeğiştirme, hız veya ivme olarak verdiği yanıtının kontrol edilmesiydi. Bilgisayar ile analizin devreye girmesiyle yapısal kontrol teorileri daha da gelişmiştir ve günümüzde Japonya ve Amerika gibi ülkelerde birçok yapıya başarı ile uygulanmıştır [6].

Olası bir deprem sırasında yapıya kontrol kuvveti uygulayarak yapının hareketini sınırlamak, dolayısıyla yapının sağladığı yaşam konforu, güvenlik ve kullanabilirlik düzeyini yükseltmek mümkündür.

a) Yaşam konforu ve kullanabilirlik: Yüksek yapılarda yanal yerdeğiştirmelerin sınırlandırılması karşılaşılan zorluklardan biridir. Deprem ve rüzgar etkisinde meydana gelen yanal yerdeğiştirmeler ve titreşimler yaşam konforunu, bazı durumlarda kullanabilirlik koşullarını olumsuz yönde etkilemektedir. Yüksek binalarda yaşayan insanların, bina olası bir deprem yüküne maruz kaldığında güvenlik sorunu oluşmasa bile psikolojik olarak olumsuz etkilendikleri yapılan araştırmalarca belirtilmiştir. Uygun kontrol yöntemiyle yanal yerdeğiştirmeler ve titreşimler istenilen düzeyde tutulabilir.

b) Güvenlik: Şiddetli deprem sırasında uygun tasarımı veya inşaatı yapılmamış binalar göçebilir. Benzer şekilde, binalar tasarımında öngörülmeyen büyüklükte deprem yüküne maruz kaldığında da göçebilir veya kalıcı şekil değiştirmeler yaparak kullanılmaz hale gelebilir. Bunun örneğine deprem kuşağında bulunan ülkemizde çokça rastlanılmaktadır. Depremden hemen sonra kullanılması gereken binalar ve çevre felaketi yaratabilecek enerji tesislerinin depremden en az düzeyde etkilenmesini sağlamak bir zorunluluktur. Uygun bir kontrol yöntemiyle binaların depreme karşı güvenliliği arttırılabilmektedir.

c) Ekonomiklik: Ülkelerin teknolojik olarak gelişmişlik durumuna göre uygun kontrol yöntemiyle daha ekonomik yapılar yapılabilir.

Sonuç olarak deprem sırasında yapı davranışının kontrol edilmesi yapının performansı açısından önemlidir.

1.2 Yapısal Kontrol Yöntemleri

Yapısal kontrol yapılara yerleştirilen ilave cihazlar yardımıyla gerçekleşmektedir. Yapıların yanıtını istenilen sınıra çekmek için kullanılan bu yöntemler sadece toptan göçme veya hasarın sınırlandırılması konusunda değil, kullanım konforu konusunda da faydalı olmaktadır. Bu cihazların çalışma şekli itibariyle yapısal kontrol pasif kontrol, aktif kontrol, yarı aktif kontrol ve karma kontrol olarak dörde ayrılır. Housner ve diğerleri tarafından yapılan çalışmada [3] yapısal kontrolle ilgili geniş bilgi bulunmaktadır.

Pasif kontrol yönteminin çalışma prensibi taban yalıtımı cihazları, ayarlı kütle sönümleyicileri ve diğer sönümleyici aletler yardımıyla yapıya gelecek deprem enerjisinin yapıdan ayrı olarak sönümlenmesi şeklindedir. Pasif kontrol yöntemi az bakım gerektirmesi açısından üstünlüğe sahiptir. Ayrıca bu cihazların çalışması dışarıdan sağlanacak güce bağlı değildir. Pasif kontrol yönteminin olumsuz yönü ise kontrol cihazlarının farklı özelliklere sahip dış etkilere karşı bünyesinde hazır beklettiği enerjisini kullanması, dış etkilerin özelliğine göre enerji üretmemesidir.

Buna karşılık aktif kontrol yönteminde kontrol cihazları dış etkiye karşı kontrol kuvveti üreterek yapı davranışının istenilen düzeyde kalmasını sağlar. Aktif kontrol yönteminde dış etkiyi ve yapının ona verdiği yanıtını ölçmek için duyarga cihazları kullanılır. Duyarga cihazları tarafından elde edilen bilgiler kontrol merkezine iletilir. Kontrol merkezi bu bilgileri kullanarak tasarlanan kontrol algoritmasına göre kontrol sinyali üretir. Bu sinyal yeterli güç kaynağıyla desteklenen eyleyiciye iletilince hareket birimi dış etkiye karşı kuvvet üreterek kontrol işlevini yerine getirir. İyi tasarlanmış bir kontrol mekanizması şiddetli dinamik etkiler altında bile yapının yanıtını önemli derecede azaltabilir. Ancak pasif kontrol yöntemi ile karşılaştırıldığında aktif kontrol yöntemi çok fazla belirsizlik ve karmaşıklığa sahiptir. Deprem gibi dış etkilerin özellikleri önceden bilinmez. Buna ilaveten yapının yanıtını anlamlı düzeyde azaltabilmek için çok büyük kontrol kuvvetinin üretilmesi gerekebilir.

Yarı aktif kontrol yönteminde dış etkiye karşı koyan kontrol kuvveti özel sönümleyiciler ve yapıya eklenen ilave rijitlik elemanları tarafından üretilir. Dış etkiye karşı üretilen kontrol kuvvetinin yönetimi basit olarak kontrol aletinin içinde bulunduğu akışkanların kapağını açıp kapama, manyetik alanda değişiklik yapma

veya elektrik akımı oluşturma gibi yöntemlerle gerçekleştirilebilir. Bu bağlamda yarı aktif kontrol yönteminin üstünlüğü kontrol kuvvetinin yönetimi için az miktarda güç kaynağının yeterli olmasıdır. Karma kontrol ise aktif kontrol ve pasif kontrol yöntemlerinin bir arada kullanılmasından oluşur.

1.2.1 Pasif kontrol

Yapıların pasif kontrolünde en sık kullanılan sistemler taban yalıtımı sistemi [1, 7-16], ayarlı kütle sönümleyicileri [17-21], ayarlı akışkan sönümleyiciler [22-23] ve diğer sönümleyici ve enerji yutucu sistemlerdir [24-28]. Taban yalıtımı sisteminin ana prensibi yapının hakim periyodunu büyüterek yapıyı yüksek sismik enerji bölgesinden uzaklaştırmak, böylelikle birinci titreşim moduna daha az sismik enerji gelmesini sağlamaktır. Taban yalıtımı sistemi genel olarak düşey yükleri karşılaması açısından düşey olarak rijit ve yatay olarak esnek olan elastomer mesnet veya kayıcı mesnetten oluşur [29]. Bu sistem esnek olmasının yanında elastomer mesnedin sönümleyici özelliğe sahip olmasından veya kayıcı mesnedin sürtünme hareketinden kaynaklanan yüksek derecede enerji yutma yeteneğine sahiptir.

Ayarlı kütle sönümleyicileri veya titreşimli enerji yutucular esas olarak ana yapıya ilave edilen yardımcı hareketli kütlelerden oluşur. Ana yapının hareketine karşı dinamik kuvvet üretecek şekilde tasarlanan hareketli kütle yapıya gelecek sismik enerjiyi kinetik enerjiye çevirir. Ayarlı kütle sönümleyici ile oluşan yeni sistemin avantajı sistemin frekans yanıtından şu şekilde görülebilir: Cihazın ayarlı olduğu frekans çevresinde rezonansa karşı etki meydana gelir ve daha küçük genliğe sahip iki rezonans noktası oluşur. Rezonans noktasındaki sistem yanıtının genliğini daha da azaltmak için hareketli kütlenin ana yapıya olan bağlantısına enerji sönümleyici özellikler eklenebilir [30]. Bu tür cihazlar daha dar frekans bandına sahip zorlamalara maruz makine sistemlerinde geniş kullanım alanı bulmuştur ve optimum performansın elde edilmesi için cihazın ayarı ve frekans özellikleri konusunda kapsamlı araştırmalar yapılmıştır [31-32]. İnşaat mühendisliği uygulamalarında ayarlı kütle sönümleyicileri genel olarak yapının birinci titreşim periyoduna göre ayarlanır. Dolayısıyla birinci titreşim periyodunun yapının davranışında etkin olduğu durumlarda ayarlı kütle sönümleyicileri daha verimli olmaktadır [33]. Bu durum genel olarak yüksek ve narin yapılarda gerçekleşir. Dış etki olarak deprem yükü söz konusu olduğunda deprem yer hareketinin frekans bandı daha geniş olduğu için

ayarlı kütlenin hareketi yeterince etkili değildir; bu durumda ayarlı kütle sönümleyicinin sönümleme özelliği daha önem kazanır [34]. Geniş bantlı frekansa sahip zorlamalar altında yapının davranışını iyileştirmek için alternatif yöntem olarak çoklu ayarlı kütle sönümleyicilerinin kullanılması da önerilmiştir [35].

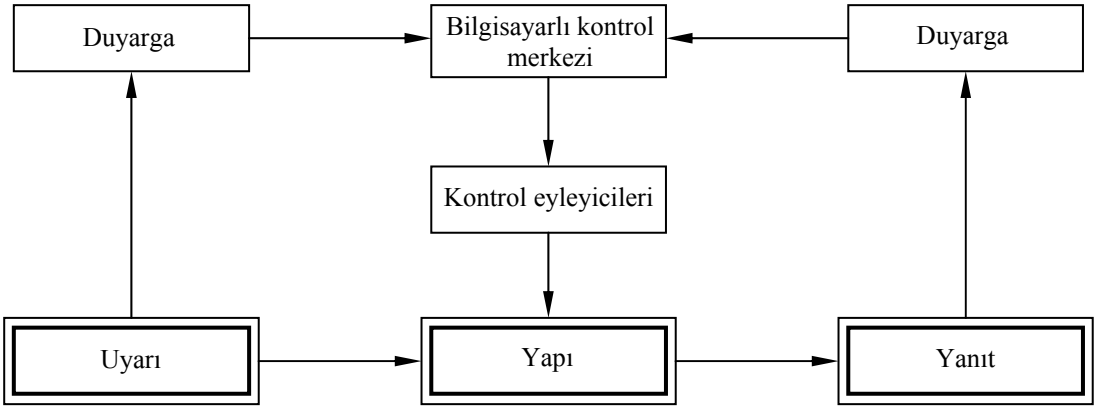
Son olarak pasif koruyucu sistemlerin üçüncü şekli ise enerji yutucu cihazlardır. Bu cihazlar enerjinin bölgesel olarak yutulmasını sağlar. Çok kullanılan enerji yutucu cihazlar ise sürtünmeli sönümleyiciler, viskos sönümleyiciler, metal akma elemanları ve viskoelastik sönümleyicilerdir [29]. Pasif koruyucu sistemler sadece mevcut yapıların güçlendirilmesinde değil, yeni tasarlanan yapılarda da çokça kullanılmaktadır. Köprü ve binalardaki uygulama örnekleri pasif koruyucu sistemler hakkında daha fazla bilgi edinmemize yardımcı olmaktadır [29, 36].

1.2.2 Aktif kontrol

Daha önce açıklandığı gibi aktif kontrol mekanizması dış etkiye karşı doğrudan kuvvet uygulayarak yapının tepkisini azaltır. Şekil 1.1'de aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [33] gösterilmektedir. Aktif kontrol yönteminde genel olarak kullanılan sistemler aktif ayarlı kütle sönümleyiciler, karma kütle sönümleyicileri ve aktif tendon sistemleridir. Aktif ayarlı kütle sönümleyiciler esas itibariyle pasif ayarlı kütle sönümleyicidir ve ana yapı ile olan bağlantısı hidrolik hareketlendirici ile donatılmıştır [37]. Ayarlı kütle sönümleyicinin aktif özelliği aynı durumdaki pasif sönümleyiciye göre daha verimli sonuç almaya yardımcı olur. Aktif ayarlı kütle sönümleyici yine yapının birinci titreşim periyoduna göre ayarlanır. Karma kütle sönümleyici ise bünyesinde aktif ve pasif kontrol özelliğini taşıyan, hareketli kütleden oluşan kontrol cihazlarının genel adıdır. Bu bağlamda aktif ayarlı kütle sönümleyici bir çeşit karma kütle sönümleyici olarak görülebilir [38]. Son olarak aktif tendon sistemi veya aktif çapraz sistemi öngerilmeli tendonlar veya yapısal çaprazlardan oluşur ve tendon veya çaprazlardaki çekme kuvveti hidrolik hareketlendiriciler tarafından kontrol edilir [39].

Genel olarak aktif kontrol algoritmalarının geliştirilmesi aktif kontrol cihazlarının özelliklerinden bağımsız olarak gerçekleşmektedir. Yapılan bazı çalışmalarda kontrol cihazlarının kısıtları dikkate alınmış olsa da çoğu zaman kontrol algoritmaları kontrol hareketinin kısıtlamasına hiç uğramayacağı varsayımıyla geliştirilmiştir. Oysa kontrol cihazının dinamik özellikleri ve kısıtları kontrol sonucunu yakından

ilgilendirir. Aktif kontrol cihazlarının kontrol algoritmasını belirlememesi gerçeği elektrik, makine ve uzay mühendisliğinde geçerlidir. Bu alanlarda kontrol algoritmasının istediği kontrol hareketini gerçekleştirmek zor değildir. Ancak inşaat mühendisliği yapılarında istenilen kontrol kuvvetinin üretilmesi üzerinde durulması gereken önemli bir husustur.



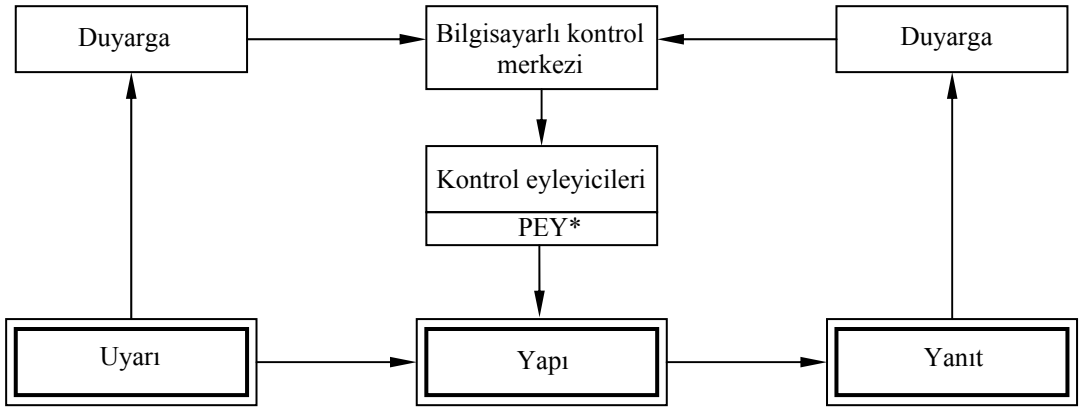
Şekil 1.1 : Aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [33].

Yang ve Soong tarafından belirtildiği gibi inşaat mühendisliği yapılarının kontrolü farklı özellik ve parametrelerin bir arada düşünülmesini gerektirir [37]. Çünkü inşaat mühendisliği yapılarında kontrol edilecek nesnenin boyutu ve dış etkinin belirsiz olan özelliği elektrik, makine ve uzay mühendisliğinde karşılaşılan durumlardan çok farklıdır. Yapının gerçekte karşı koyması gereken deprem yükü veya rüzgar gibi dış etkiler tasarım aşamasında tam olarak tahmin edilemez. Bu düşünce daha sonraki araştırmaların temelini oluşturmuştur. Aktif kontrol kapsamında geliştirilen kontrol yöntemlerinin başlıcaları şunlardır: lineer optimal kontrol [40-47], modal kontrol [48-49], ani optimal kontrol [50], tahmini kontrol [51], lineer olmayan optimal kontrol [52-56], Lyapunov kontrol [57-58], darbe türü kontrol [59-63], sinirsel ağ kontrolü [64-66], H_2 / H_∞ kontrolü [67], kayıcı mod kontrolü [68-72].

1.2.3 Yarı aktif kontrol

Yarı aktif kontrol sistemleri aktif kontrol sistemlerine göre daha az enerji gereksinimi olan veya enerji tasarrufu sağlayan bir çeşit aktif kontrol sistemidir. Yarı aktif kontrol sisteminde dış yüke karşı üretilen kontrol kuvveti değişken sönüm ve/veya rijitlik özelliğine sahip kontrol elemanları tarafından sağlanır [73]. Şekil 1.2'de yarı aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [74] gösterilmektedir. Bu sistemlerin dış

enerjiye fazla ihtiyacı olmadığı için şiddetli deprem sırasında da işlevini yerine getirebilir [75]. Yarı aktif kontrol cihazları yapı sistemine mekanik enerji ilave etmez, ancak yapı sisteminin sönüm yeteneğini maksimum yaparak sistemin durumunu kontrol eder. Yarı aktif kontrol cihazları genel olarak kontrol edilebilen pasif kontrol sistemi olarak kabul edilir [76]. Sık kullanılan yarı aktif kontrol cihazları yarı aktif hidrolik sönümleyiciler, değişken rijitliğe sahip cihazlar, elektro veya manyetik sönümleyiciler ve yarı aktif sürtünme cihazlarıdır.

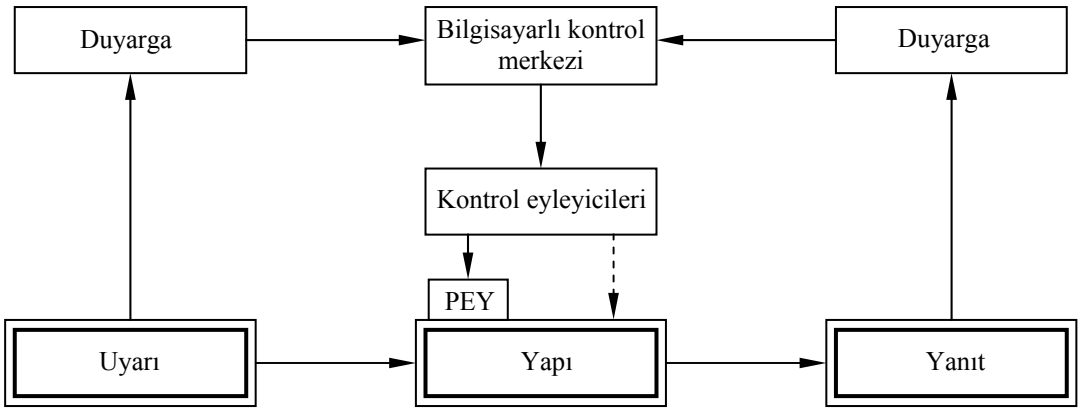


*PEY: Pasif enerji yutucular

Şekil 1.2 : Yarı aktif kontrol yönteminin çalışma prensibi [74].

1.2.4 Karma kontrol

Karma kontrol sistemi tipik olarak aktif ve pasif kontrol cihazlarının bir arada kullanılmasından meydana gelir. Şekil 1.3'te karma kontrol yönteminin çalışma prensibi [74] gösterilmektedir.



PEY: Pasif enerji yutucular

Şekil 1.3 : Karma kontrol yönteminin çalışma prensibi [74].

Viskoelastik sönümleyici ve aktif kütle sönümleyiciye sahip bir yapı veya aktif kontrol eyleyicileri ile donatılmış taban yalıtımlı bir sistem karma kontrol yöntemine örnek teşkil edebilir.

Çizelge 1.1'de farklı ülkelerde uygulanmış aktif, yarı aktif ve karma kontrol örnekleri verilmiştir [6].

1.3 Bu Çalışmanın Konusu ve Amacı

Yapı-zemin etkileşimi analizinde kullanılan zeminin empedans katsayıları dış yükün frekansına bağlıdır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi analizinde genel olarak kullanılan yöntem yapı-zemin sisteminin önce frekans tanım alanında analiz edilmesi, daha sonra elde edilen büyüklüklerin ters Fourier dönüşümü tekniği yardımıyla zaman alanına dönüştürülmesi şeklindedir. Klasik optimal kontrol analizi zaman tanım alanında yapılmaktadır. Optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşimi etkilerinin bir arada düşünülmesi, problemi çok karmaşık hale getirmektedir. Karşılaşılan önemli zorluklardan biri, zaman ve frekans alanı arasında Fourier dönüşümü uygulanacak büyüklüklerin her adımda değil, tüm zaman aralığında belli olması gerektiğidir. Dolayısıyla optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşiminin bir arada analizi konusunda çeşitli basitleştirmelere dayanan az sayıda çalışma bulunmaktadır. Optimal kontrol analizinde genel olarak yapı-zemin etkileşimi etkilerinin küçük, özellikle temelin dönme etkisinin ihmal edilebilir mertebede olduğu varsayılmıştır; çalışmalar şekildeğiştirmeyen temele sahip yapılar üzerinde yoğunlaşmıştır. Ancak yapılan araştırmalar yapı-zemin etkileşiminin yapıların davranışını önemli ölçüde değiştirdiğini, özellikle yumuşak zemine oturan yapılarda ihmal edilemeyecek mertebede olduğunu göstermiştir.

Bu tezde yapısal optimal kontrol ve yapı-zemin etkileşimi konuları kısaca tanıtıldıktan sonra kontrollü zeminle etkileşen sistemlerin analizi için basitleştirmelerin daha aza indirildiği etkin bir hesap yöntemi önerilmiştir ve önerilen yöntem kullanılarak sayısal uygulamalar yapılmıştır.

Çizelge 1.1 : Aktif ve yarı-aktif kontrol uygulama örnekleri [6].

Yapı ismi	Ülke	Bitiş yılı	Yapının kullanımı	Yapı ölçeği	Kont. yönt.*
Kyobashi Center, Tokyo	Japonya	1989	ofis	33 m, 11 kat	AKS
Kajima Tech. Research Institute No.21, Tokyo	Japonya	1990	ofis	12 m, 3 kat	ADS
Sendagaya INTES, Tokyo	Japonya	1991	ofis	58 m, 11 kat	AKS
Shimizu Tech. Lab, Tokyo	Japonya	1991	laboratuar	30 m, 7 kat	KKS
Applause Tower, Osaka	Japonya	1992	ofis/otel	165 m, 34 kat	AKS
Kansai Int. Airport Control Tower, Osaka	Japonya	1992	kontrol kulesi	86 m, 5 kat	KKS
ORC 200 Bay Tower, Osaka	Japonya	1992	ofis/otel	200 m, 50 kat	KKS
High-rise Housing Experiment Tower, Tokyo	Japonya	1993	deney	108 m, 36 kat	AGS
Landic Otemachi, Tokyo	Japonya	1993	ofis	130 m, 21 kat	KKS
Nishimoto Kosan Nishikicho Bldg., Tokyo	Japonya	1993	ofis	54 m, 14 kat	KKS
NTT Kuredo Motomachi Bldg., Hiroshima	Japonya	1993	ofis/otel	150 m, 35 kat	KKS
Yokohama Land Mark Tower, Yokohama	Japonya	1993	ofis/otel	296 m, 70 kat	KKS
Hamamatsu ACT Tower, Hamamatsu	Japonya	1994	ofis/otel/ticari	213 m, 45 kat	KKS
Hikarigaoka J-City Tower, Tokyo	Japonya	1994	ofis	112 m, 24 kat	KKS
Hirobe Miyake Bldg., Tokyo	Japonya	1994	ofis/konut	31 m, 9 kat	KKS
MHI Yokohama Bldg., Yokohama	Japonya	1994	ofis	152 m, 34 kat	KKS
Penta-Ocean Exp. Bldg., Tochigi	Japonya	1994	deney	19 m, 5 kat	KKS
Porte Kanazawa, Kanazawa	Japonya	1994	ofis/otel	131 m, 30 kat	AKS
Riverside Sumida Central Tower, Tokyo	Japonya	1994	ofis/konut	134 m, 33 kat	AKS
Sheridan Grande Ocean Resort, Miyazaki	Japonya	1994	otel	154 m, 43 kat	KKS
Shinjuku Park Tower, Tokyo	Japonya	1994	ofis/otel	235 m, 52 kat	KKS
Nissei Dowa Phoenix Tower, Osaka	Japonya	1995	ofis	145 m, 29 kat	KKS
Osaka WTC Bldg., Osaka	Japonya	1995	ofis	256 m, 55 kat	KKS
Plaza Ichihara, Chiba	Japonya	1995	ofis	58 m, 12 kat	KKS
Kaikyo Dream Tower, Yamaguchi	Japonya	1996	haberleşme	153 m	KKS
Rinku Gate Tower North Bldg., Osaka	Japonya	1996	ofis/otel	256 m, 56 kat	KKS
Herbis Osaka, Osaka	Japonya	1997	otel/ofis	190 m, 40 kat	KKS
Itoyama Tower, Tokyo	Japonya	1997	ofis/konut	89 m,18 kat	KKS
Nisseki Yokohama Bldg., Yokohama	Japonya	1997	ofis	133 m, 30 kat	KKS
TC Tower, Kau-Shon	Tayvan	1997	ofis/otel	348 m, 85 kat	KKS
Bunka Gakuen New Bldg., Tokyo	Japonya	1998	school	93 m, 20 kat	KKS
Daiichi Hotel Ohita Oasis Tower, Ohita	Japonya	1998	ofis/otel	101 m, 21 kat	KKS
Kajima Shizuoka Bldg., Shizuoka	Japonya	1998	ofis	20 m, 5 kat,	YS
Odakyu Southern Tower	Tokyo	1998	ofis/otel	150 m, 36 kat	KKS
Otis Shibayama Test Tower, Chiba	Japonya	1998	laboratuar	154 m, 39 kat	KKS
Yokohama Bay Sheraton Hotel and Towers	Japonya	1998	otel	115 m, 27 kat	KKS
Century Park Tower, Tokyo	Japonya	1999	konut	170 m, 54 kat	KKS
JR Central towers, Nagoya (2 bina)	Japonya	1999	otel/ofis	otel: 226 m, ofis: 245 m	KKS
Laxa Osaka, Osaka	Japonya	1999	otel/ofis	115 m, 27 kat	YKS
Nanjing Tower, Nanjing	Çin	1999	haberleşme	310 m	AKS
Shin-Jei Bldg., Taipei	Tayvan	1999	ofis/ticari	99 m, 22 kat	AKS
Shinagawa Intercity A, Tokyo	Japonya	1999	ofis/ ticari	144 m, 32 kat	KKS
CEPCO Gifu Bldg., Gifu	Japonya	2000	ofis	47 m, 11 kat	YS
Incheon Int. Airport Air-Traffic Control Tower	Kore	2000	hava traf. kon.	100 m	KKS
Keio University Engineering Bldg., Tokyo	Japonya	2000	ofis/laboratuar	29 m, 9 kat	ATY
Cerulean Tower Tokyu Hotel, Tokyo	Japonya	2001	otel/ofis/park	184 m, 40 kat	KKS
Harumi Island Triton Square (3 bina), Tokyo	Japonya	2001	ofis/ticari	195 m, 45 kat 175 m, 40 kat 155 m, 34 kat	KK
Osaka Int. Airport Air-Traffic Control Tower	Japonya	2001	hava traf. kon.	69 m, 5 kat	KKS
Dentsu New Headquarter Office Bldg., Tokyo	Japonya	2002	ofis/ticari/park	210 m, 48 kat	KKS
Hotel Nikko Bayside Osaka	Japonya	2002	otel/park	138 m, 33 kat	KKS

*AKS: Aktif kütlesel sönümleyici
*ADS: Aktif değişken rijitlikli sistem
*KKS: Karma kütlesel sönümleyici
*AGS: Aktif giroskopik sabitleyici
*YS: Yarı-aktif sönümleyici
*ATY: Akıllı taban yalıtımı
*YKS: Yarı-aktif ayarlı kütle sönümleyicisi
*KK: Karma control

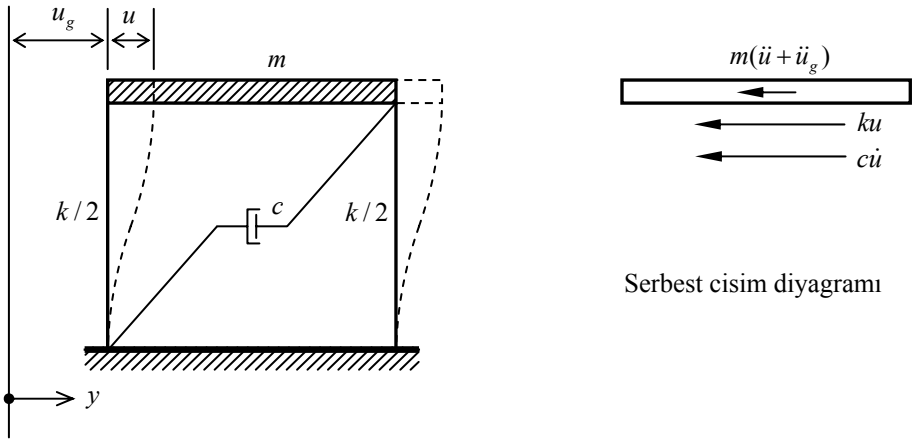
2. YAPI DİNAMİĞİNDE DURUM UZAYI YÖNTEMİ

2.1 Giriş

Yapısal kontrol yöntemlerinde klasik yapı dinamiği denklemleri yerine, kontrol mühendisliği formülasyonlarına uygun olan durum uzayı yöntemi kullanılmaktadır. Durum uzayı yöntemi tüm yapı dinamiği problemlerinde kullanılabilir. Durum uzayı yönteminde, önce dinamik problem sürekli zaman aralığında birinci dereceden diferansiyel denklem sistemi şeklinde yazılır; sonra bu denklem integral şeklinde ifade edilerek çözülür ve ayrık zaman aralığındaki çözümünü elde etmek için denklem ayrıklaştırılır. Bu bölümde durum uzayı yöntemi kısaca tanıtılmıştır. Daha geniş bilgi için konuyla ilgili kaynaklara [77, 78, 2] başvurulabilir.

2.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Sürekli Zaman Aralığındaki Çözümü

Durum uzayı yönteminde yapının yanıtı bağımsız iki değişken olan yerdeğiştirme ve hız cinsinden hesaplanır ve bu değişkenler durum olarak adlandırılır.



Şekil 2.1 : Tek serbestlik dereceli sistem.

Şekil 2.1'de gösterilen deprem etkisindeki tek serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t) \qquad \textbf{(2.1)}$$

şeklindedir. Burada m = sistemin kütlesi, c = sistemin sönümü, k = sistemin rijitliği, u = kütlenin göreli yerdeğiştirmesi, $\dot{u}$ = kütlenin hızı, $\ddot{u}$ = kütlenin ivmesi ve $\ddot{u}_g$ = yer hareketi ivmesidir. Yapının durumu

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanabilir. Denklem **(2.1)**'den $\ddot{u}(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\ddot{u}(t) = -m^{-1}ku(t) - m^{-1}c\dot{u}(t) - \ddot{u}_g(t)\,. \tag{2.3}$$

Denklem **(2.3)**, **(2.2)**'de verilen durum vektörü kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix}. \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

tanımları yapılırsa denklem **(2.4)**

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{F}(t) \tag{2.6}$$

şeklini alır.

Denklem **(2.6)** birinci dereceden lineer diferansiyel denklem takımıdır ve sistemin sürekli zaman aralığındaki durum uzayı hareket denklemi adını alır. Bu denklemde t_0 başlangıç zaman olmak üzere $t \geq t_0$ olan herhangi bir andaki sistemin genel çözümü

$$\mathbf{z}(t) \;=\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0) \;+\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^{t} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem **(2.7)**'deki $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ seri şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \ldots. \tag{2.8}$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ durum dönüşüm matrisi olarak adlandırılır. Eğer başlangıç zaman $t_0 = 0$ alınırsa

durum vektörü $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.9}$$

şeklini alır. Burada $\mathbf{z}_0$ aşağıda verildiği gibidir:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0) = \begin{Bmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix}. \tag{2.10}$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ durum dönüşüm matrisi denklem **(2.8)** ile hesaplanabilir, ancak tek serbestlik dereceli sistemler için kapalı şekilde

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = e^{-\zeta\omega_n t}\begin{bmatrix} \cos\omega_d t + \left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_d t & \dfrac{\sin\omega_d t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ -\dfrac{\omega_n \sin\omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} & \cos\omega_d t - \left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_d t \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

olarak verilebilir. Bu denklemde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.12}$$

şeklindedir.

2.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Ayrık Zaman Aralığındaki Çözümü

Durum uzayı denklemi **(2.7)**'nin çözümü aşağıda verildiği gibidir:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.13}$$

$$t_0 = t_k, \quad t = t_{k+1}, \quad t - t_0 = \Delta t \tag{2.14}$$

denirse denklem **(2.13)**

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.15}$$

şeklini alır. Δt zaman aralığında dış yük fonksiyonu sabit ve bu zaman aralığındaki dış yük fonksiyonunun değeri, zaman aralığının başlangıcındaki değerine eşit kabul edilirse

$$\mathbf{F}(\tau)=\mathbf{F}_k=\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix}\ddot{u}_{gk}, \qquad t_k \le \tau < t_{k+1} \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(2.16)**, **(2.15)**'teki yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}_k \mathrm{d}\tau \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k - \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_{k+1}} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_k}\right)\mathbf{F}_k \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{F}_k \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix}\ddot{u}_{gk} \\ &= \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}\end{aligned} \tag{2.17}$$

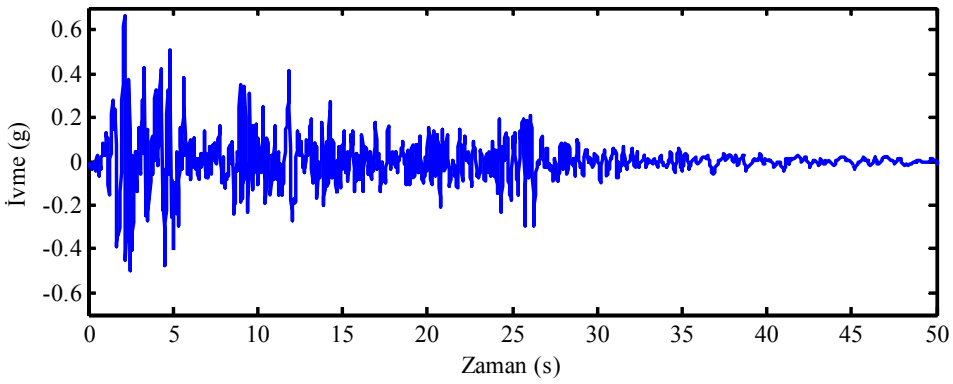
elde edilir. Burada

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad \mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

olarak tanımlanabilir.

Sayısal örnek 2.1:

Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 2.2'de verilen El-Centro, 1940 depremi [79] kullanılmıştır.



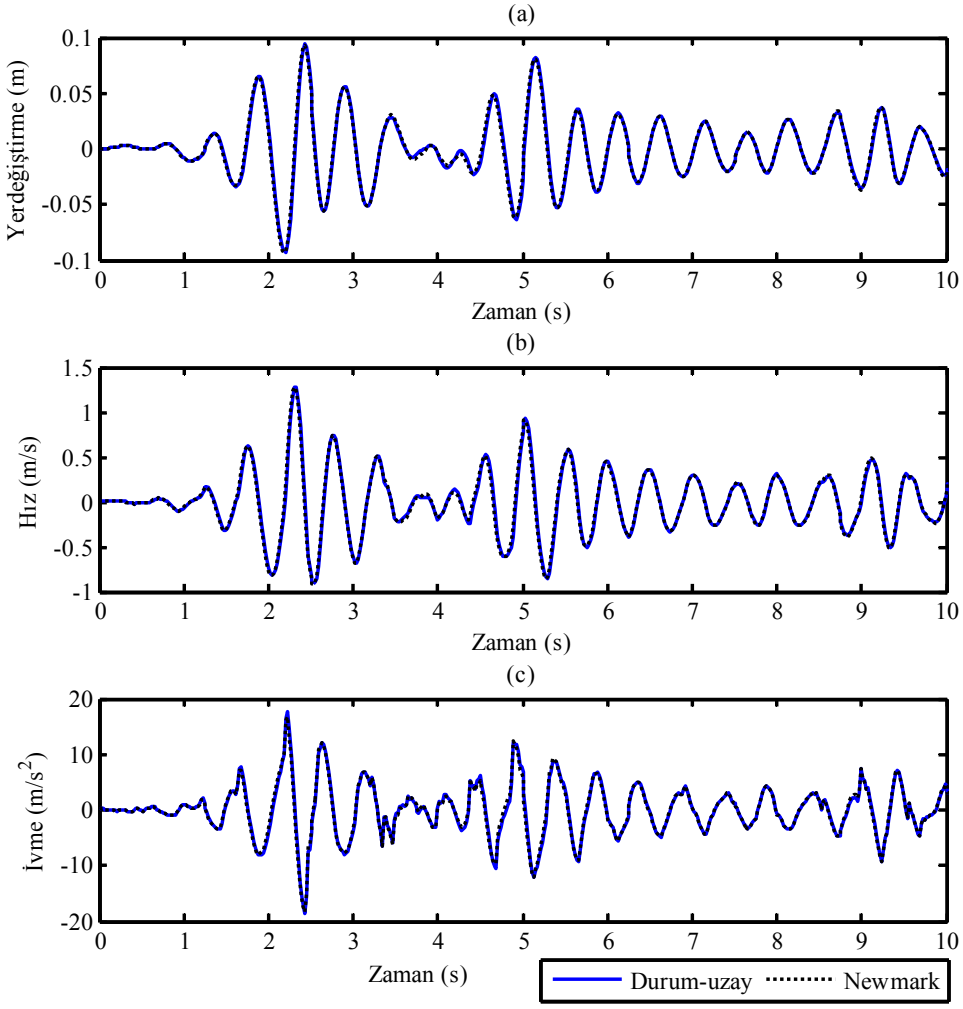
Şekil 2.2 : 1940 El-Centro depremi ivme kaydı.

Şekil 2.1'de verilen tek serbestlik dereceli sistemde $m = 175\ \text{kNs}^2/\text{m}$, $\zeta = 0.05$, $T_n = 0.5\ \text{s}$,

$\omega = 2\pi / T_n = 12.566\ \text{rad/s}$,

$c = 2\zeta\omega_n m = 219.912\ \text{kNs/m}$,

$k = m\omega_n^2 = 27634.89\ \text{kN/m}$.



Şekil 2.3 : Tek serbestlik dereceli sistemin (a) yerdeğiştirmesi, (b) hızı, (c) ivmesi.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -157.9137 & -1.2566 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.9688 & 0.0195 \\ -3.0862 & 0.9443 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.0001972949 \\ -0.0195434951 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk}.$$

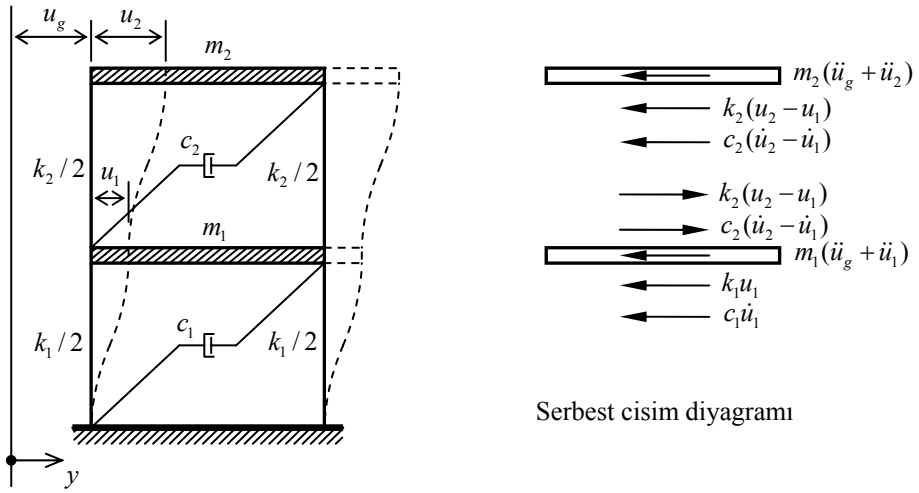
Sistemin yerdeğiştirme, hız ve ivme zaman geçmişi Newmark yöntemiyle yapılan analiz sonuçlarıyla karşılaştırılarak Şekil 2.3'te verilmiştir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

2.4 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Sürekli Zaman Aralığındaki Çözümü

Şekil 2.4'te gösterilen deprem etkisindeki iki serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_g(t)\,. \qquad \textbf{(2.19)}$$



Şekil 2.4 : İki serbestlik dereceli sistem.

Denklem **(2.19)**'daki terimler *n* serbestlik dereceli bir sistem için

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_n \\ 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix},\quad \{\mathbf{I}\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

olarak verilebilir. Durum vektörü $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \dot{\mathbf{u}}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) & \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) & \cdots & \dot{u}_n(t)\end{Bmatrix}^T \tag{2.20}$$

şeklindedir. Denklem **(2.19)** durum uzayı şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{u}}(t)\\ \ddot{\mathbf{u}}(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \dot{\mathbf{u}}(t)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{I}\end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t)\,. \tag{2.21}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{I}\end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) \tag{2.22}$$

tanımları yapılırsa denklem **(2.21)**

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{z}(t)+\mathbf{F}(t) \tag{2.23}$$

şeklini alır. Tek serbestlik dereceli sistemin durum uzayı yöntemiyle çözümünde olduğu gibi denklem **(2.21)**'in çözümü

$$\mathbf{z}(t)\;=\;\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0)\;+\;\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.24}$$

şeklindedir. $\mathbf{z}(t_0)$, $t=t_0$ anındaki sistemin durumunu ifade eder. $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ durum dönüşüm matrisidir ve seri açılımı şeklinde

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\left(\mathbf{A}t\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}t\right)^3+\ldots \tag{2.25}$$

olarak verilebilir. Eğer başlangıç zaman $t_0=0$ alınırsa durum vektörü $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(t)\;=\;\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_0+\;\int_{0}^{t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.26}$$

olarak yazılabilir.

2.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Ayrık Zaman Aralığındaki Çözümü

Bölüm 2.3'te bahsedilen yöntemle çok serbestlik dereceli sistemin durum uzayı denklemi de sayısal olarak çözülebilir. Denklem **(2.24)** ile verilen durum uzayı denkleminin çözümü tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{z}(t) \;=\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0) \;+\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \qquad \textbf{(2.27)}$$

$$t_0 = t_k, \quad t = t_{k+1}, \quad t - t_0 = \Delta t \qquad \textbf{(2.28)}$$

denirse denklem **(2.27)**

$$\mathbf{z}_{k+1} \;=\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k \;+\; \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \textbf{(2.29)}$$

olur. Δt zaman aralığında dış yük fonksiyonu sabit ve bu zaman aralığındaki dış yük fonksiyonunun değeri, zaman aralığının başlangıcındaki değerine eşit kabul edilirse

$$\mathbf{F}(\tau)=\mathbf{F}_k = \begin{Bmatrix}0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots\end{Bmatrix}^T \ddot{u}_{gk}, \quad t_k \le \tau < t_{k+1} \qquad \textbf{(2.30)}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(2.16)**, **(2.15)**'teki yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}_k\mathrm{d}\tau \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_{k+1}} - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_k}\right)\mathbf{F}_k \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{F}_k \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\begin{Bmatrix}0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots\end{Bmatrix}^T \ddot{u}_{gk} \\
&= \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.31)}$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad \mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix}0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots\end{Bmatrix}^T \qquad \textbf{(2.32)}$$

olarak tanımlanabilir. Dikkat edilirse denklem **(2.31)**'deki $\mathbf{z}_{k+1}$'nin değeri, başka bir deyişle sistemin $k+1$ zaman adımındaki yerdeğiştirmesi ve hızı, sadece k adımındaki bilgiye dayalı olarak ifade edilmektedir.

Durum dönüşüm matrisi $\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}$, denklem **(2.25)**'in ilgili zaman adımındaki seri açılımı olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\mathbf{A}\Delta t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}\Delta t\right)^3 + \ldots. \qquad \textbf{(2.33)}$$

Sayısal örnek 2.2:

Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 2.2'de verilen El-Centro 1940 depremi kullanılmıştır. Şekil 2.5'te verilen üç serbestlik dereceli sistemde

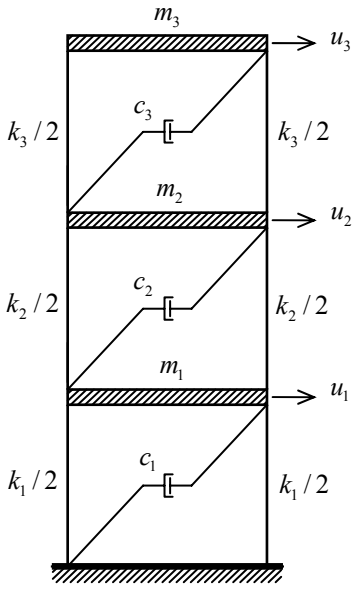
$m_1 = m_2 = 2m_3 = 175 \text{ kNs}^2/\text{m},$

$k_1 = k_2 = k_3 = 27634.89 \text{ kN/m},$

$c_1 = c_2 = c_3 = 219.912 \text{ kNs/m}.$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \\ 0 & 0 & 87.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 439.824 & -219.912 & 0 \\ -219.912 & 439.824 & -219.912 \\ 0 & -219.912 & 219.912 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 55269.78 & -27634.89 & 0 \\ -27634.89 & 55269.78 & -27634.89 \\ 0 & -27634.89 & 27634.89 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



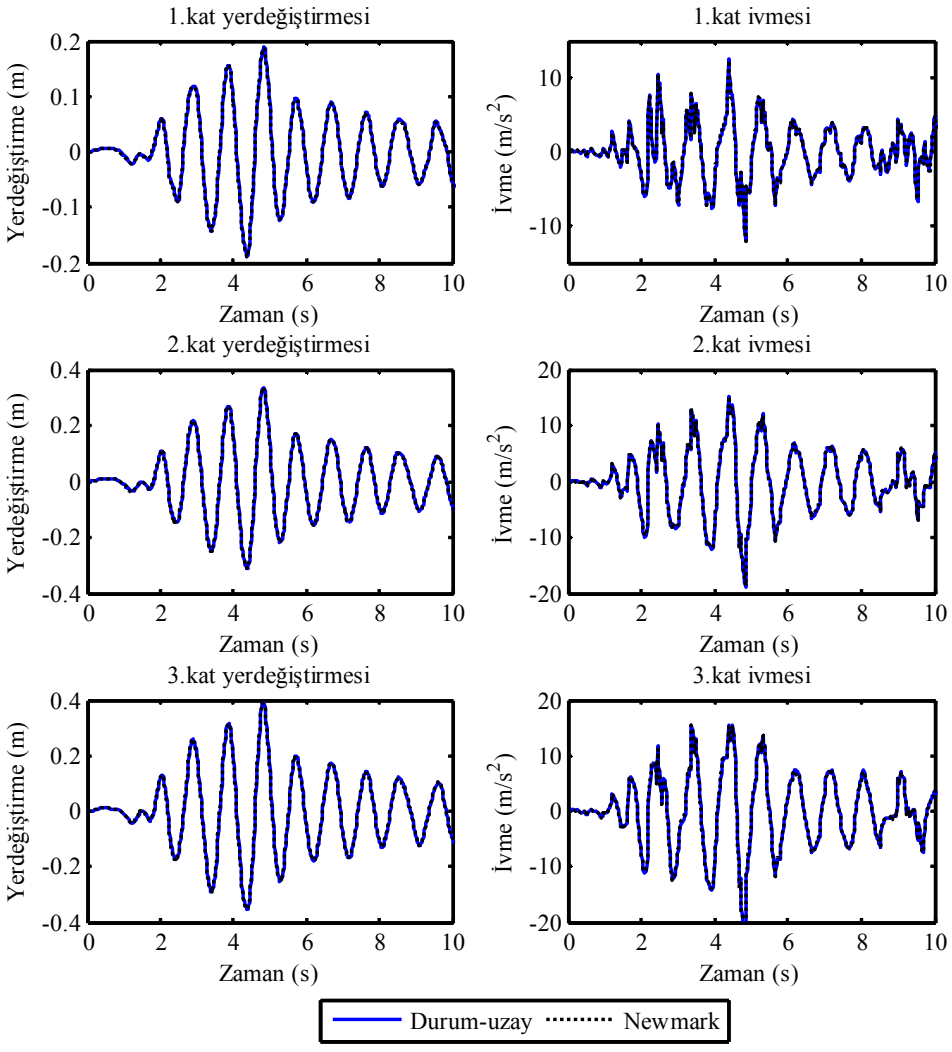
Şekil 2.5 : Üç serbestlik dereceli sistem.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -315.8273 & 157.9137 & 0 & -2.5133 & 1.2566 & 0 \\ 157.9137 & -315.8273 & 157.9137 & 1.2566 & -2.5133 & 1.2566 \\ 0 & 315.8273 & -315.8273 & 0 & 2.5133 & -2.5133 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.938938 & 0.029913 & 0.000409 & 0.019102 & 0.000440 & 0.000005 \\ 0.029913 & 0.939756 & 0.029913 & 0.000440 & 0.019113 & 0.000440 \\ 0.000818 & 0.059826 & 0.939347 & 0.000010 & 0.000881 & 0.019107 \\ -5.963552 & 2.878986 & 0.067982 & 0.891481 & 0.052823 & 0.000950 \\ 2.878986 & -5.827587 & 2.878986 & 0.052823 & 0.893382 & 0.052823 \\ 0.135964 & 5.757973 & -5.895569 & 0.001900 & 0.105647 & 0.892431 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.0001973176 \\ -0.0001999772 \\ -0.0001999997 \\ -0.0195487440 \\ -0.0199947500 \\ -0.0199999178 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk}.$$



Şekil 2.6 : Üç serbestlik dereceli sistemin yerdeğiştirme ve ivme yanıtı.

Sistemin yerdeğiştirme ve ivme zaman geçmişi Newmark yöntemiyle yapılan analiz sonuçlarıyla karşılaştırılarak Şekil 2.6'da verilmiştir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

3. LİNEER OPTİMAL KONTROL

3.1 Giriş

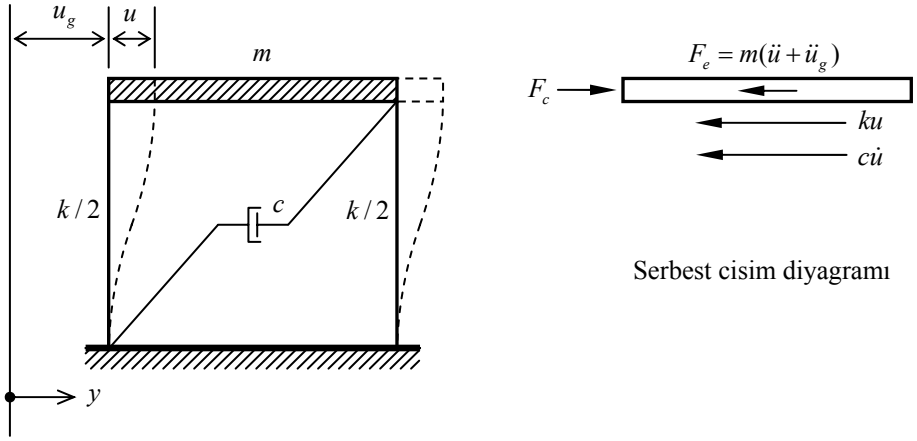
Birinci bölümde yapı mühendisliğinde kullanılmakta olan aktif kontrol yöntemleri kısaca tanıtılmıştır. Bir çeşit aktif kontrol yöntemi olan optimal kontrol yapıların kontrolünde en sık kullanılan yöntemdir. Optimal kontrolün amacı istenen yapı davranışını gerçekleştirmek için yapıya uygulanacak optimal kontrol kuvvetlerini belirlemektir. Bu bölümde lineer optimal kontrol yöntemi kısaca tanıtılmıştır. Daha geniş bilgi için konuyla ilgili kaynaklara [77, 33, 78, 2] başvurulabilir.

3.2 Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Yapısal Kontrolü

Dış etkiye karşı kontrol kuvveti uygulanan tek serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_e(t) + F_c(t) \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde F_e = dış etki, F_c = kontrol kuvvetidir.



Şekil 3.1 : Kontrol kuvveti uygulanmış tek serbestlik dereceli sistem.

Deprem etkisindeki bir sistem için denklem **(3.1)** aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) + F_c(t). \quad \textbf{(3.2)}$$

Yapının yanıtı, dolayısıyla kontrol kuvveti dış etkiye bağlıdır. Dış etkinin özelliklerine göre farklı kontrol yöntemleri geliştirilebilir. Yapı mühendisliğinde genel olarak aşağıda bahsedilen üç çeşit kontrol yöntemi kullanılmaktadır.

3.2.1 Kapalı çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sistemin yerdeğiştirmesi ve hızının fonksiyonu ise bu tür kontrole kapalı çevrim kontrolü denir. Kapalı çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_c(t) = f_{c1}\left[u(t)\right] + f_{c2}\left[\dot{u}(t)\right]. \quad \textbf{(3.3)}$$

Denklem **(3.3)**, denklem **(3.1)**'deki yerine yazılırsa

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_e(t) + f_{c1}\left[u(t)\right] + f_{c2}\left[\dot{u}(t)\right] \quad \textbf{(3.4)}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi kapalı çevrim kontrol probleminin amacı f_{c1} ve f_{c2} için bu ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemin çözümünü bulmak ve daha sonra istenilen yapı davranışını gerçekleştirmek için f_{c1} ve f_{c2}'nin özel şeklini belirlemektir.

Eğer kontrol kuvveti yapı yanıtının doğrusal fonksiyonu ise bu tür kontrol lineer kontroldür. Bu anlamda kapalı çevrim kontrolü bir çeşit lineer kontroldür.

3.2.2 Açık çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sadece dış etkinin fonksiyonu ise bu tür kontrole açık çevrim kontrolü denir. Açık çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_c(t) = f_c\left[F_e(t)\right]. \quad \textbf{(3.5)}$$

Denklem **(3.5)**, denklem **(3.1)**'deki yerine yazılırsa

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_e(t) + f_c\left[F_e(t)\right] \quad \textbf{(3.6)}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi açık çevrim kontrol probleminin amacı önce açık çevrim

kontrol kuvvetini seçmek, daha sonra denklem **(3.6)** ile tarif edilen ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemin çözümünü elde ederek istenilen yapı davranışını sağlamaktır.

3.2.3 Kapalı-açık çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sistemin yerdeğiştirmesi ve hızı ile dış etkinin fonksiyonu ise bu tür kontrole kapalı-açık çevrim kontrolü denir. Kapalı-açık çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_c(t) = f_{c1}\left[u(t)\right] + f_{c2}\left[\dot{u}(t)\right] + f_c\left[F_e(t)\right]. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Denklem **(3.7)**, denklem **(3.1)**'deki yerine yazılırsa

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_e(t) + f_{c1}\left[u(t)\right] + f_{c2}\left[\dot{u}(t)\right] + f_c\left[F_e(t)\right] \qquad \textbf{(3.8)}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi kapalı-açık çevrim kontrol probleminde de denklem **(3.8)**'de gösterilen ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemin çözümünü elde ederek f_{c1}, f_{c2} ve f_c kontrol kuvvetlerinin şeklini belirlemektir.

3.3 Çok Serbestlik Dereceli Sistemin Yapısal Kontrolü

Şekil 3.2'de gösterilen dış etkiye karşı kontrol kuvveti uygulanmış iki serbestlik dereceli bir sistemin hareket denklemi

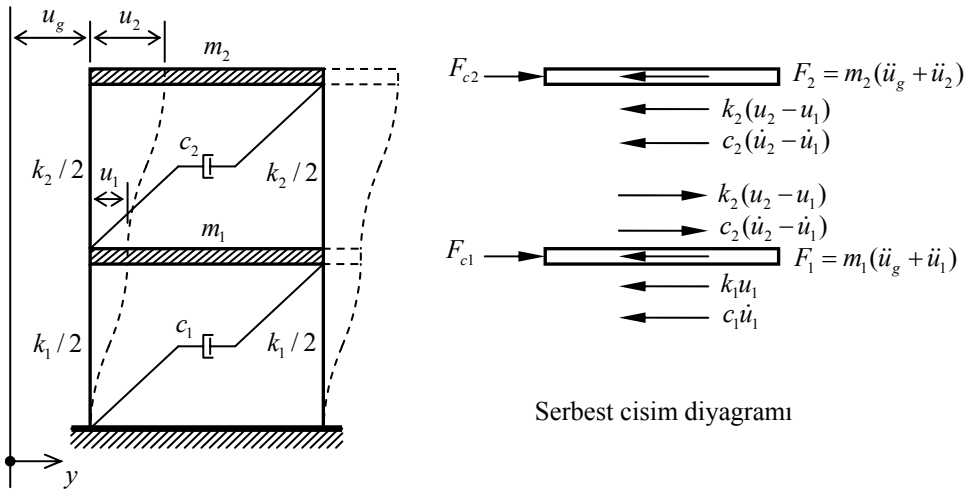
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}_c(t) \qquad \textbf{(3.9)}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(3.9)**'daki terimler *n* serbestlik dereceli bir sistem için

$$\mathbf{F}_e(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) & F_2(t) & \cdots & F_n(t) \end{Bmatrix}^T, \qquad \mathbf{f}_c(t) = \begin{Bmatrix} F_{c1}(t) & F_{c2}(t) & \cdots & F_{cn}(t) \end{Bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada **D** kontrol kuvveti dağılım matrisidir, *n* ise serbestlik derecesi veya kontrol kuvveti sayısıdır.



Şekil 3.2 : Kontrol kuvveti uygulanmış çok serbestlik dereceli sistem.

Durum uzayı denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için sistemin durum vektörü

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin durum denklemi **(3.9)**'un yardımıyla

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{f}_c(t) \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(3.11)**'i basitleştirmek için

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

tanımları yapılırsa denklem **(3.11)** aşağıdaki durum uzayı denklemine dönüşmüş olur:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{F}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t)\,. \tag{3.13}$$

Denklem **(3.13)**'ün çözümü

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0) + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{f}_c(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.14}$$

şeklindedir. Bölüm 2.5'te verilen sayısal çözüm kullanılırsa

$$t_0 = t_k, \quad t = t_{k+1}, \quad t - t_0 = \Delta t \tag{3.15}$$

kabulleri ile denklem **(3.14)** aşağıdaki şekli alır:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{f}_c(\tau)\mathrm{d}\tau \,. \tag{3.16}$$

Bölüm 2.5'te açıklandığı gibi Δt zaman aralığında dış yük fonksiyonu sabit ve bu zaman aralığındaki dış yük fonksiyonunun değeri zaman aralığının başlangıcındaki değerine eşit kabul edilebilir. Buna bağlı olarak

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{F}_k + \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B}\mathbf{f}_{ck} \tag{3.17}$$

şeklini alır. Denklem **(3.17)**'yi basitleştirmek için

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad \mathbf{H}_d = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right), \quad \mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B} \tag{3.18}$$

tanımları yapılırsa denklem **(3.17)** durum uzayı şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d\mathbf{F}_k + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} \,. \tag{3.19}$$

Deprem etkisindeki bir sistem için denklem **(3.9)**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_g(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}_c(t) \tag{3.20}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(3.18)**'deki tanımlar kullanılırsa denklem **(3.19)**

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} \tag{3.21}$$

şeklini alır. Burada $\mathbf{H}_d^{(EQ)}$ aşağıdaki gibi tarif edilebilir:

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \{0 \quad 0 \quad \cdots \quad -1 \quad -1 \quad \cdots\}^T. \tag{3.22}$$

3.3.1 Kapalı çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sistemin yerdeğiştirmesi ve hızının fonksiyonu ise bu tür kontrole kapalı çevrim kontrolü denir. Kapalı çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_{ci}(t) = f_{ci1}\left[\mathbf{u}(t)\right] + f_{ci2}\left[\dot{\mathbf{u}}(t)\right], \quad i = 1,...,n\,. \tag{3.23}$$

3.3.2 Açık çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sadece dış etkinin fonksiyonu ise bu tür kontrole açık çevrim kontrolü denir. Açık çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_{ci}(t) = f_{ci}\left[\mathbf{F}_e(t)\right], \quad i = 1,...,n. \tag{3.24}$$

3.3.3 Kapalı-açık çevrim kontrolü

Kontrol kuvveti sistemin yerdeğiştirmesi ve hızı ile dış etkinin fonksiyonu ise bu tür kontrole kapalı-açık çevrim kontrolü denir. Kapalı-açık çevrim kontrolü yasası aşağıda gösterildiği gibi tarif edilebilir:

$$F_{ci}(t) = f_{ci1}\left[\mathbf{u}(t)\right] + f_{ci2}\left[\dot{\mathbf{u}}(t)\right] + f_{ci}\left[\mathbf{F}_e(t)\right]. \tag{3.25}$$

3.4 Optimal Kontrol

Optimal kontrol bir sistemin çıkışını minimum tasarrufla maksimum yapmayı amaçlar. Literatürde terminal kontrol problemi, minimum zaman kontrol problemi, minimum enerji kontrol problemi ve lineer kuadratik regülatör kontrol problemi gibi optimal kontrol problemleri mevcuttur.

Lineer Kuadratik Regülatör (LQR) kontrol problemi, başlangıçta denge konumundan yerdeğiştirmiş bir sistemin verilen bir performans indisini minimum yaparak asıl denge konumuna getirilmesi problemidir. Görüldüğü gibi yapısal kontrol bir lineer kuadratik regülatör kontrol problemidir.

Yapı mühendisliğinde kullanılan optimal kontrol, bir sisteminin durum denklemi

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t) \tag{3.26}$$

kullanılarak **(3.27)**'de tanımlanan amaç fonksiyonu veya performans indisi J'i verilen zaman aralığında minimum yapan kontrol kuvveti $\mathbf{f}_c$'nin seçilmesi işlemidir;

$$J = \int_0^{t_f} \frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}_c^T(t)\mathbf{R}\mathbf{f}_c(t)\right]\mathrm{d}t\,. \qquad \textbf{(3.27)}$$

Burada, n sistemin serbestlik derecesi olmak üzere **Q**, $2n \times 2n$ boyutunda durum ağırlık matrisi; **R**, $n \times n$ boyutunda kontrol ağırlık matrisidir ve simetriktir. t_f amaç fonksiyonunun hesaplandığı zaman aralığıdır. J her zaman skaler bir büyüklüktür. Amaç fonksiyonunun minimum değerinin elde edilmesi işlemi ağırlık matrisleri **Q** ve **R**'ye yakından ilişkilidir. Eğer verilen zaman aralığında sistemin yerdeğiştirmesi ve hızının daha küçük olması istenirse daha büyük değerlere sahip **Q** matrisi seçilmelidir. Eğer kontrol kuvvetinin daha küçük olması istenirse **R** matrisi daha büyük seçilmelidir.

Soong [33] ve diğer yazarlar tarafından yapı sistemleri için ortaya konan bu optimal kontrol problemi Dreyfus'un varyasyon hesabı yöntemi [80], Pontryagin'in maksimum prensibi [81] veya Bellman'ın dinamik programlama [82] yöntemlerinden biri kullanılarak çözülebilir [83]. Bu yöntemlerin tümü durum ve kontrol vektörleriyle yazılan kuadratik ifadenin integrali şeklinde tanımlanan amaç fonksiyonunu minimum yapan kontrol yasasını verir.

3.4.1 Gerekli matematik bilgisi

3.4.1.1 Varyasyon hesabında maksimum ve minimum problemi

Bu kısımda varyasyon hesabı yardımıyla bir fonksiyonelin maksimum ve minimum değeri belli bir kısıtın olduğu ve olmadığı durumlar için incelenmiştir.

a) Kısıt olmadığı durumdaki fonksiyonelin maksimum ve minimum değeri

Bir amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi\left[x(t),\ \dot{x}(t),\ t\right]\mathrm{d}t\,. \qquad \textbf{(3.28)}$$

Bu amaç fonksiyonu $J(x)$ bir fonksiyoneldir, başka bir deyişle bir fonksiyon olan $x(t)$'nin fonksiyonudur. $[t_0,\ t_f]$ zaman aralığında $J(x)$'i minimum yapan bir $x(t)$ fonksiyonunun bulunması istenmektedir. Bu problemin çözümünde varyasyon hesabı kullanılır.

$x(t)$ ve $\dot{x}(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t) = \hat{x}(t) + \delta x\,, \tag{3.29}$$

$$\dot{x}(t) = \hat{\dot{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t) = \hat{\dot{x}}(t) + \delta\dot{x} \tag{3.30}$$

olarak yazılsın. Burada $\hat{x}(t)$ kabul edilebilir bir optimal trajektördür, başka bir deyişle $\hat{x}(t)$, $J(x)$'i minimum yapan fonksiyondur. $\eta(t)$, $x(t)$'nin sapması ve ε küçük bir sayıdır. Denklem **(3.29)** ve **(3.30)**, **(3.28)**'de yerine yazılır ve daha sonra $\varphi\left(x(t),\ \dot{x}(t),\ t\right)$, $\varepsilon = 0$ noktası etrafında Taylor serisine açılırsa

$$\varphi\left[\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t),\ \hat{\dot{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t),\ t\right] = \varphi\left(\hat{x},\ \hat{\dot{x}},\ t\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\dot{x}}}\varepsilon\dot{\eta}(t) + \text{ydt} \tag{3.31}$$

ifadesi elde edilir. Burada ydt yüksek dereceden terimleri gösterir ve ε'nin iki veya ikiden büyük derecesini içeren tüm Taylor serisi terimlerini kapsar. J'in optimal değerinden küçük sapması ΔJ ile aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$\Delta J = J\left[\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t),\ \hat{\dot{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t),\ t\right] - J\left(\hat{x},\ \hat{\dot{x}},\ t\right). \tag{3.32}$$

Denklem **(3.31)**, **(3.32)**'de yerine yazıldıktan sonra **(3.28)** kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\left\{\varphi\left[\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t),\ \hat{\dot{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t),\ t\right] - \varphi\left(\hat{x},\ \hat{\dot{x}},\ t\right)\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_f}\left\{\varphi\left[\hat{x}(t) + \varepsilon\eta(t),\ \hat{\dot{x}}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t),\ t\right] - \varphi\left(\hat{x},\ \hat{\dot{x}},\ t\right)\right\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}}\varepsilon\eta(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\dot{x}}}\varepsilon\dot{\eta}(t) + \text{ydt}\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\dot{x}}}\delta\dot{x} + \text{ydt}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\delta x = \varepsilon\eta(t)$ ve $\delta\dot{x} = \varepsilon\dot{\eta}(t)$'dir. δJ, ΔJ'in δx ve $\delta\dot{x}$'ya göre lineer kısmı olarak kabul edilirse δJ aşağıdaki şekli alır:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\dot{x}}}\delta\dot{x}\right]\mathrm{d}t\,. \tag{3.34}$$

Teorem 3.1: $x(t) = \hat{x}(t)$ olduğunda J'in maksimum veya minimum olması için gerekli koşul $\delta J = 0$'dır.

Teorem 3.1, denklem **(3.34)**'e uygulandıktan sonra yazım kolaylığı açısından optimal trajektör $\hat{x}$, x şeklinde yazılırsa

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right]\mathrm{d}t=0 \qquad \textbf{(3.35)}$$

elde edilir. Bu integral parçalarla integral alma yöntemiyle daha basit hale getirilebilir. Parçalarla integral alma yöntemi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u\,.$$

Burada

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}} \quad \text{ve} \quad \mathrm{d}v=\delta\dot{x}\mathrm{d}t=\mathrm{d}(\delta x)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelere bağlı olarak

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right]\mathrm{d}t \quad \text{ve} \quad v=\delta x$$

elde edilebilir. Dolayısıyla denklem **(3.35)**'in ikinci terimi

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\mathrm{d}(\delta x)=\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}(\delta x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right]\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3.36)}$$

şeklini alır. Buna bağlı olarak denklem **(3.35)** aşağıdaki şekli alır:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right]\right\}\delta x\,\mathrm{d}t+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0\,. \qquad \textbf{(3.37)}$$

Denklem **(3.37)**'nin sağlanması için aşağıdaki iki koşul aynı anda sağlanmalıdır:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right]=0\,, \qquad \textbf{(3.38)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta x=0, \quad t=t_0,\ t_f. \qquad \textbf{(3.39)}$$

Denklem **(3.38)** Euler-Lagrange denklemidir, **(3.39)** bu denklemin sınır koşullarını belirlemektedir.

Denklem **(3.39)**'da verilen sınır koşullarıyla ilgili olarak aşağıdaki dört durum ortaya çıkabilir:

Durum 1: Trajektör $x(t)$, t_0 ve t_f noktasında sabit ise aşağıdaki durum ortaya çıkar:

$x(t_0) = C_1 \quad \text{ve} \quad x(t_f) = C_2$.

Burada C_1 ve C_2 verilen sabitlerdir. Bu durumda $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}$ üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.

Durum 2: Trajektör $x(t)$, t_0 noktasında sabit ve t_f noktasında serbest ise aşağıdaki durum ortaya çıkar:

$x(t_0) = C_1 \quad \text{ve} \quad t = t_f \text{ için} \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = 0$.

Durum 3: Trajektör $x(t)$, t_0 noktasında serbest ve t_f noktasında sabit ise aşağıdaki durum ortaya çıkar:

$t = t_0 \text{ için} \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \text{ve} \quad x(t_f) = C_2$.

Durum 4: Trajektör $x(t)$, t_0 ve t_f noktasında serbest ise aşağıdaki durum ortaya çıkar:

$t = t_0 \text{ ve } t = t_f \quad \text{için} \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = 0$.

Burada elde edilen sonuçlar $x(t)$'nin skaler fonksiyonu değil, vektör fonksiyonu olduğu durumlar için de genişletilebilir; başka bir ifadeyle

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \varphi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) \mathrm{d}t, \quad \text{burada} \quad \mathbf{x}^T = \left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right). \qquad \textbf{(3.40)}$$

Bu duruma ait Euler-Lagrange denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right] = 0 . \qquad \textbf{(3.41)}$$

Denklemin sınır koşulları, $t = t_0, t_f$ için aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\left(\delta \mathbf{x}\right)^T \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 . \qquad \textbf{(3.42)}$$

Sonuç olarak varyasyon hesabı yardımıyla bir fonksiyonelin maksimum ve minimum değerinin elde edilmesi iki noktalı sınır değer probleminin çözümünden ibarettir.

b) Kısıt altındaki fonksiyonelin maksimum ve minimum değeri

Herhangi bir kısıt olmadığı durumdaki fonksiyonelin maksimum ve minimum değeri için elde edilen sonuçlar, genel durum olan belli kısıt altındaki fonksiyonelin optimizasyonu için genişletilebilir. Bu amaçla kullanılacak amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi verilsin:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \varphi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right)\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3.43)}$$

Bu ifadedeki $\mathbf{x}(t)$ aşağıda verilen denklem takımının kısıtı altındadır:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) = \mathbf{0}, \quad t \in \left[t_0,\ t_f\right]. \qquad \textbf{(3.44)}$$

Amaç fonksiyonu J'in denklem **(3.44)** ile verilen kısıt altındaki maksimum ve minimum değerinin elde edilmesi için Lagrange çarpanları yöntemi uygulanabilir. Bu amaçla yeni bir amaç fonksiyonu J' aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$J' = \int_{t_0}^{t_f}\left[\varphi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right)\right]\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f}\psi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right)\mathrm{d}t . \qquad \textbf{(3.45)}$$

Burada $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n)^T$ olan Lagrange çarpanları vektörüdür ve

$$\psi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right) = \varphi\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) = 0$ olduğu için $\boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ t\right) = 0$'dır, dolayısıyla $J = J'$'dür. Bir önceki bölümde açıklanan adımlar aynı şeklide takip edilirse mevcut durum için aşağıdaki Euler-Lagrange denklemi elde edilebilir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right] = 0 . \qquad \textbf{(3.46)}$$

3.4.1.2 Pontryagin'in maksimum prensibi

Bir önceki bölümde bahsedilen varyasyon hesapları bir fonksiyonelin maksimum ve minimum değerinin elde edilmesinde kullanılan genel yöntemleri içermektedir. Bu bölümde optimal kontrol probleminin incelenmesi amacıyla özel optimizasyon yöntemlerinden biri olan Pontryagin'in maksimum prensibi yöntemi [81] tanıtılmıştır. Bu yöntem varyasyon hesabı kullanarak optimal kontrol problemine genel çözüm vermektedir.

Amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin:

$$J = \theta(\mathbf{x},\ t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \varphi\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right)\mathrm{d}t . \qquad \textbf{(3.47)}$$

Aşağıdaki durum uzayında tanımlanan matematik modelin kısıtı altında bulunan amaç fonksiyonu J'i minimum yapan optimum kontrol vektörü $\mathbf{u}(t)$'nin bulunması amaçlanmaktadır.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right). \qquad \textbf{(3.48)}$$

Bu problemin çözümü için Lagrange çarpanları yöntemi uygulanabilir. Bu amaçla yeni bir amaç fonksiyonu J'

$$J' = \theta(\mathbf{x},\ t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{\varphi\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right) - \dot{\mathbf{x}}\right]\right\}\mathrm{d}t \qquad \textbf{(3.49)}$$

olarak tanımlansın. Açıkça görüldüğü gibi $J = J'$ dür. Hamiltonian fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$H\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right) = \varphi\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right) + \boldsymbol{\lambda}^T\dot{\mathbf{x}} = \varphi\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right) + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t\right). \qquad \textbf{(3.50)}$$

Burada $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n)^T$ olan Lagrange çarpanları vektörüdür.

Denklem **(3.50)**, **(3.49)**'da yerine yazılırsa

$$J' = \theta(\mathbf{x},\ t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[H\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right) - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} \right] \mathrm{d}t \qquad \textbf{(3.51)}$$

elde edilir. Denklem **(3.51)**'e parçalarla integral alma yöntemi uygulanırsa

$$J' = \left[\theta(\mathbf{x},\ t) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x} \right]\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[H\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right) - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x} \right] \mathrm{d}t \qquad \textbf{(3.52)}$$

olur. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{u}$ vektörüne göre birinci diferansiyel $\delta J'$ aşağıdaki gibidir:

$$\delta J' = \left[\delta \mathbf{x}^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right) \right]\Bigg|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \delta \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right] + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right\} \mathrm{d}t\,. \qquad \textbf{(3.53)}$$

Teorem 3.1'e göre J''in minimum veya maksimum olması için gerekli koşul $\delta J' = 0$'dır. Bu koşulun sağlanması için her bir $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$ ve $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{u}$ vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlamalıdır:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0\,, \qquad \textbf{(3.54)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0\,, \qquad \textbf{(3.55)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)\,. \qquad \textbf{(3.56)}$$

Bu denklemlerin sınır koşulları $t = t_0, t_f$ için

$$\delta \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right] = 0 \qquad \textbf{(3.57)}$$

olarak verilebilir. Denklem **(3.54)** - **(3.56)**'nın kontrol mühendisliğinde çok önemli yeri vardır ve kanonik Hamiltonian denklemleri olarak bilinir.

Amaç fonksiyonu J'i minimum yapan kontrol sinyali $\mathbf{u}(t)$ benzer şekilde Hamiltonian fonksiyonunu da minimum yapar, başka bir deyişle

$$H\left(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right) \le H\left(\mathbf{x},\ \tilde{\mathbf{u}},\ \boldsymbol{\lambda},\ t\right). \qquad \textbf{(3.58)}$$

Burada $\tilde{\mathbf{u}}$, optimum kontrol sinyali $\mathbf{u}(t)$'den farklı herhangi bir sinyaldir. Bundan

dolayı bu yöntem minimum prensip yöntemi olarak bilinir, ancak Hamiltonian fonksiyonundaki bir işaret farkından dolayı maksimum prensibi olarak adlandırılmıştır.

3.4.2 Dış yüksüz sistemlerin sürekli zaman aralığındaki lineer optimal kontrolü

Dış yüksüz bir sistemin durum denklemi ve amaç fonksiyonu **(3.26)** ve **(3.27)** tekrar aşağıdaki gibi verilsin:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t), \tag{3.59}$$

$$J = \int_0^{t_f} \frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}_c^T(t)\mathbf{R}\mathbf{f}_c(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{3.60}$$

Denklem **(3.60)**'ta verilen amaç fonksiyonunun minimum değerinin elde edilmesi işleminde aşağıda verilen Lagrangian kullanılır:

$$L = \int_0^{t_f} \left\{\frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}_c^T(t)\mathbf{R}\mathbf{f}_c(t)\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t) - \dot{\mathbf{z}}(t)\right]\right\}\mathrm{d}t. \tag{3.61}$$

Burada $\boldsymbol{\lambda}^T(t)$, aşağıda verildiği gibi Lagrange çarpanı olup bilinmeyen bir vektördür,

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{Bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{Bmatrix}. \tag{3.62}$$

Görüldüğü üzere denklem **(3.26)**, **(3.61)**'de kullanılmıştır ve bu denklemde dış etkinin olmadığı varsayılmıştır. Amaç fonksiyonu J'nin minimum değerinin elde edilmesi Lagrangian L'nin $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{f}_c(t)$ ve $\boldsymbol{\lambda}(t)$'ye göre varyasyonu alınarak sıfıra eşitlenmesiyle sağlanabilir, başka bir deyişle

$$\delta L = \delta\int_0^{t_f} \left\{\frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}_c^T(t)\mathbf{R}\mathbf{f}_c(t)\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t) - \dot{\mathbf{z}}(t)\right]\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{3.63}$$

Zamanın skaler fonksiyonu olan Hamiltonian fonksiyonu

$$H(t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)+\mathbf{f}_c^T(t)\mathbf{R}\mathbf{f}_c(t)\right]+\boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[\mathbf{A}\mathbf{z}(t)+\mathbf{B}\mathbf{f}_c(t)\right] \tag{3.64}$$

olarak tanımlanabilir. Bu tanımla denklem **(3.63)** aşağıdaki şekli alır:

$$\delta L=\delta\int_0^{t_f}\left\{H(t)-\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\right\}\mathrm{d}t=\delta\int_0^{t_f}H(t)dt-\delta\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t=0\,. \tag{3.65}$$

Denklem **(3.65)**'in ikinci teriminin varyasyonu

$$\begin{aligned}\delta\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t&=\int_0^{t_f}\left[\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)+\boldsymbol{\lambda}^T(t)\delta\dot{\mathbf{z}}(t)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{t_f}\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t+\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T(t)\delta\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.66}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(3.66)**'nın ikinci teriminin parçalarla integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T(t)\delta\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t&=\boldsymbol{\lambda}^T(t)\delta\mathbf{z}(t)\Big|_{t=0}^{t=t_f}-\int_0^{t_f}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\delta\mathbf{z}(t)\mathrm{d}t\\&=\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\delta\mathbf{z}(t_f)-\boldsymbol{\lambda}^T(0)\delta\mathbf{z}(0)-\int_0^{t_f}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\delta\mathbf{z}(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir. Denklem **(3.67)**, **(3.66)**'daki yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t&=\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\delta\mathbf{z}(t_f)-\boldsymbol{\lambda}^T(0)\delta\mathbf{z}(0)\\&\quad+\int_0^{t_f}\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\mathbf{z}}(t)\mathrm{d}t-\int_0^{t_f}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\delta\mathbf{z}(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.68}$$

elde edilir. Denklem **(3.65)**'in birinci teriminin varyasyonu aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\delta\int_0^{t_f}H(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_f}\left[\frac{\partial H}{\partial\mathbf{z}}\delta\mathbf{z}(t)+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{f}_c}\delta\mathbf{f}_c(t)+\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\delta\boldsymbol{\lambda}(t)\right]\mathrm{d}t\,. \tag{3.69}$$

Burada

$$\frac{\partial H(t)}{\partial\mathbf{z}}=\left[\frac{\partial H}{\partial z_1}\quad\frac{\partial H}{\partial z_2}\quad\cdots\quad\frac{\partial H}{\partial z_n}\right]=\left[\frac{\partial H}{\partial u_1}\quad\cdots\quad\frac{\partial H}{\partial u_n}\quad\frac{\partial H}{\partial\dot{u}_1}\quad\cdots\quad\frac{\partial H}{\partial\dot{u}_n}\right]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial\mathbf{f}_c}=\left[\frac{\partial H}{\partial f_{c1}}\quad\frac{\partial H}{\partial f_{c2}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H}{\partial f_{cn}}\right]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=\left[\frac{\partial H}{\partial\lambda_1}\quad\frac{\partial H}{\partial\lambda_2}\quad\cdots\quad\frac{\partial H}{\partial\lambda_n}\right]\text{'dir.}$$

Denklem **(3.68)** ve **(3.69)**, **(3.65)**'teki yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta L = &-\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\delta\mathbf{z}(t_f)+\boldsymbol{\lambda}^T(0)\delta\mathbf{z}(0)\\ &+\int_0^{t_f}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\right]\delta\mathbf{z}(t)\mathrm{d}t+\int_0^{t_f}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{f}_c}\delta\mathbf{f}_c(t)\mathrm{d}t\\ &+\int_0^{t_f}\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t)\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T-\dot{\mathbf{z}}(t)\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad \textbf{(3.70)}$$

elde edilir. Denklem **(3.70)**'teki eşitliğin sağlanması için ilgili katsayılar aşağıda ifade edildiği gibi sıfır olmalıdır:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T-\dot{\mathbf{z}}(t)=0,\quad \boldsymbol{\lambda}(t_f)=0 \qquad \textbf{(3.71)}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}\right)^T+\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=0,\quad \mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_0 \qquad \textbf{(3.72)}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{f}_c}\right)^T=0\,. \qquad \textbf{(3.73)}$$

Burada $H(t)$ denklem **(3.64)** ile verilen Hamiltonian fonksiyonudur. Denklem **(3.71)** - **(3.73)**, aynı anda çözülmesi gereken $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{f}_c(t)$ ve $\boldsymbol{\lambda}(t)$ bilinmeyenlerini içeren denklem takımını ifade eder. Denklem **(3.72)**'nin sınır koşulu $\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_0$'dır, dolayısıyla $\delta\mathbf{z}(0)=0$'dır. Ayrıca denklem **(3.71)** ve **(3.72)** iki noktalı sınır değer problemini ifade eder. Bu denklemdeki bir değişkenin sınır koşulu sistemin başlangıç durumu, diğer değişkenin sınır koşulu ise sistemin son durumu olarak verilir.

Denklem takımının sınır koşulları zaman aralığı t_f'in çok büyük olması durumunda $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=0$ yazılabilir. Çünkü sistem her zaman belli oranda sönüme sahip olduğu için büyük t_f zaman aralığından sonra yapının yanıtı sıfırlanır. Aşağıda verilen, matris ile vektör çarpımına uygulanan türev alma işlemi kullanılarak $H(t)$'nin $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{f}_c(t)$ ve $\boldsymbol{\lambda}(t)$'ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\left[\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)\right]=\mathbf{Q}^T,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\left[\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)\right]=\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)\,, \qquad \textbf{(3.74)}$$

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t), \tag{3.75}$$

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{z}}\right)^T = \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t), \tag{3.76}$$

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{f}_c}\right)^T = \mathbf{R}\mathbf{f}_c(t) + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{3.77}$$

elde edilir. Denklem **(3.75) - (3.77)**, **(3.71) - (3.73)**'teki yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T - \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t) - \dot{\mathbf{z}}(t) = 0, \tag{3.78}$$

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{z}}\right)^T + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = 0, \tag{3.79}$$

$$\left(\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{f}_c}\right)^T = \mathbf{R}\mathbf{f}_c(t) + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \tag{3.80}$$

elde edilir. Denklem **(3.80)**'den kontrol kuvveti $\mathbf{f}_c(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{f}_c(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t). \tag{3.81}$$

Denklem **(3.81)**, **(3.78)** ve **(3.79)**'daki yerine aşağıdaki gibi yazılsın:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \tag{3.82}$$

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t), \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0. \tag{3.83}$$

$2n \times 2n$ boyutuna ve aşağıdaki özelliğe sahip bir $\mathbf{P}(t)$ matrisi tanımlanabilir,

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t). \tag{3.84}$$

Denklem **(3.84)**, **(3.82)** ve **(3.83)**'teki yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t), \tag{3.85}$$

$$-\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{z}(t)-\mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)+\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \qquad \textbf{(3.86)}$$

elde edilir. Denklem **(3.85)**, **(3.86)**'daki yerine aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{z}(t)-\mathbf{P}(t)\left(\mathbf{A}\mathbf{z}(t)-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t)\right)=\mathbf{Q}\mathbf{z}(t)+\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t). \qquad \textbf{(3.87)}$$

$\mathbf{z}(t)$ denklem **(3.87)**'nin her terimine çarpandır. Dolayısıyla herhangi bir $\mathbf{z}(t)$ için

$$-\dot{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}-\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q},\quad t\le t_f \qquad \textbf{(3.88)}$$

eşitliği sağlanır. Denklem **(3.88)** Riccati denklemi olarak bilinmektedir.

Riccati denklemindeki $\mathbf{P}(t)$ matrisinin zamana bağlı değişimi çok azdır, dolayısıyla mühendislik uygulamalarında $\mathbf{P}(t)$ sabit katsayılı matris olarak kabul edilmektedir [33]. Ayrıca daha önce bahsedildiği gibi t_f çok büyük bir değere sahip kabul edilebilir. Dolayısıyla

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P},\quad \dot{\mathbf{P}}(t)=0 \qquad \textbf{(3.89)}$$

olarak yazılabilir. Bu varsayımla denklem **(3.88)**

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}+\mathbf{Q}=0 \qquad \textbf{(3.90)}$$

şeklini alır.

Denklem **(3.90)** sabit-durum Riccati denklemi ve **P** ise Riccati matrisi olarak bilinmektedir. Görüldüğü gibi Riccati matrisi **A** (sistemin kütlesi, rijitliği, sönümünün fonksiyonu), **B** (kütle matrisi ve kontrol kuvveti dağılım matrisinin fonksiyonu) ve amaç fonksiyonundaki ağırlık matrisleri **Q** ile **R**'nin fonksiyonudur.

Riccati matrisinin çözümü için çeşitli yöntemler bulunmaktadır [84-85]. Riccati matrisi elde edildikten sonra denklem **(3.84)**, **(3.81)**'deki yerine yazılırsa kontrol kuvveti aşağıda verildiği gibi elde edilir:

$$\mathbf{f}_c(t)=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t). \qquad \textbf{(3.91)}$$

Bu şekilde elde edilen kontrol yasasına lineer optimal kontrol veya lineer kapalı çevrim kontrolü denir, çünkü kontrol kuvveti sistemin yerdeğiştirmesi ve hızının bir

fonksiyonudur. Optimal kontrol kuvveti denklem **(3.91)** ile elde edildikten sonra sistemin durum uzayı denklemi **(3.85)**'ten

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{z}(t) \qquad \textbf{(3.92)}$$

olarak elde edilir. Denklem **(3.92)** sabit katsayılı, birinci dereceli lineer diferansiyel denklemdir ve çözümü

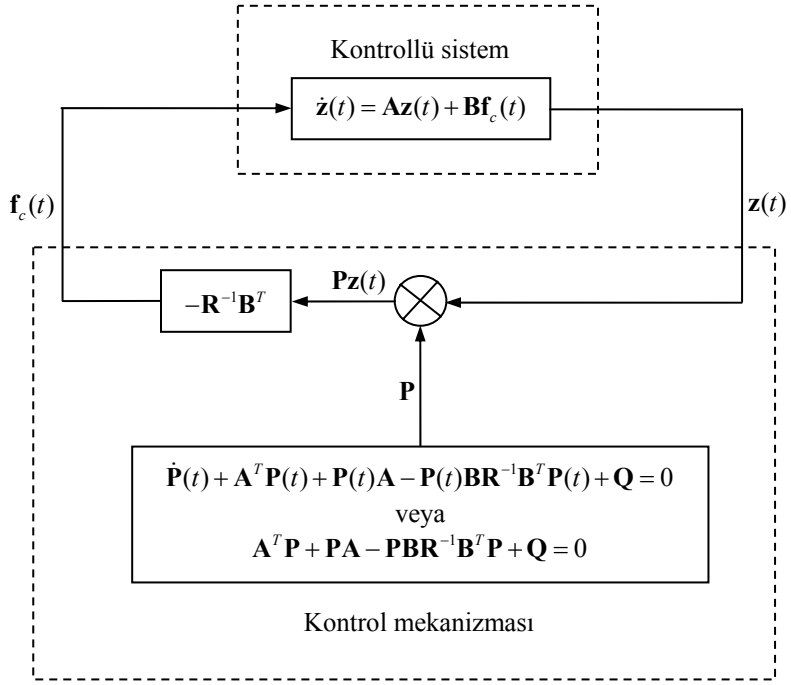
$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{e}^{\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)}\mathbf{z}_0 \qquad \textbf{(3.93)}$$

şeklindedir. Dış yük etkisindeki bir yapı için denklem **(3.26)** aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{F}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c(t)\,. \qquad \textbf{(3.94)}$$

Deprem etkisindeki bir yapı sözkonusu olduğunda problem ayrık zaman tanım alanında çözülür.

Şekil 3.3'te dış yüksüz sisteme ait Riccati denklemiyle yapılan optimal kontrol blok diyagramı gösterilmiştir.



Şekil 3.3 : Dış yüksüz sisteme ait optimal kontrol blok diyagramı.

3.4.3 Deprem etkisindeki yapıların ayrık zaman aralığındaki optimal kontrolü

Deprem etkisindeki bir yapının durum denklemi **(3.21)** tekrar aşağıdaki gibi yazılsın:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} \,. \tag{3.95}$$

Ayrık zaman aralığındaki amaç fonksiyonu

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left(\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{f}_{ck}^T \mathbf{R}\mathbf{f}_{ck}\right) \tag{3.96}$$

olarak yazılabilir. Burada denklem **(3.95)** ile verilen kısıtlar çerçevesinde *J*'nin minimum değerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Lagrangian

$$L = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{f}_{ck}^T \mathbf{R}\mathbf{f}_{ck}\right) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\left(\mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} - \mathbf{z}_{k+1}\right)\right] \tag{3.97}$$

olarak yazılabilir. Burada $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ Lagrange çarpanıdır. Hamiltonian fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$H_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{f}_{ck}^T \mathbf{R}\mathbf{f}_{ck}\right) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\left(\mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck}\right). \tag{3.98}$$

Denklem **(3.98)**, **(3.97)**'de yerine yazılırsa

$$L = \sum_{k=0}^{N-1}\left[H_k - \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}\right] = H_0 - \boldsymbol{\lambda}_N^T \mathbf{z}_N + \sum_{k=1}^{N-1}\left[H_k - \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{z}_k\right] \tag{3.99}$$

elde edilir. Lagrangian *L*'nin $\mathbf{z}_k$, $\mathbf{f}_{ck}$ ve $\boldsymbol{\lambda}_k$'ya göre varyasyonu alınarak sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta H_0 - \delta\left(\boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{z}_1\right) + \delta\sum_{k=1}^{N-1}\left[H_k - \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}\right] \\
&= \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{f}_{c0}}\delta\mathbf{f}_{c0} + \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0}\delta\boldsymbol{\lambda}_0 - \delta\boldsymbol{\lambda}_N^T \mathbf{z}_N - \boldsymbol{\lambda}_N^T \delta\mathbf{z}_N \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}\delta\mathbf{z}_k + \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\delta\mathbf{f}_{ck} + \frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k}\delta\boldsymbol{\lambda}_k - \delta\boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{z}_k - \boldsymbol{\lambda}_k^T \delta\mathbf{z}_k\right] \\
&= \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{f}_{c0}}\delta\mathbf{f}_{c0} + \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0}\delta\boldsymbol{\lambda}_0 - \delta\boldsymbol{\lambda}_N^T \mathbf{z}_N - \boldsymbol{\lambda}_N^T \delta\mathbf{z}_N
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left[\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}-\boldsymbol{\lambda}_k^T\right)\delta\mathbf{z}_k+\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\delta\mathbf{f}_{ck}+\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k}-\mathbf{z}_k^T\right)\delta\boldsymbol{\lambda}_k\right]=0$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}=\left[\frac{\partial H_k}{\partial z_{1k}}\quad\frac{\partial H_k}{\partial z_{2k}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H_k}{\partial z_{2nk}}\right]=\left[\frac{\partial H_k}{\partial u_{1k}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H_k}{\partial u_{nk}}\quad\frac{\partial H_k}{\partial \dot{u}_{1k}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H_k}{\partial \dot{u}_{nk}}\right]$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}=\left[\frac{\partial H_k}{\partial f_{c1k}}\quad\frac{\partial H_k}{\partial f_{c2k}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H_k}{\partial f_{cnk}}\right]$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k}=\left[\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{1k}}\quad\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{2k}}\quad\cdots\quad\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{nk}}\right]\text{'dir.}$$

Sıfır anında kontrol kuvvetinin sıfır olduğu ($\mathbf{f}_{c0}=0$) dikkate alınarak gerekli matematiksel işlemler yapılırsa denklem **(3.100)**

$$\begin{aligned}\delta L=&\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0-\boldsymbol{\lambda}_N^T\delta\mathbf{z}_N+\sum_{k=1}^{N-1}\left[\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}-\boldsymbol{\lambda}_k^T\right)\delta\mathbf{z}_k+\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\delta\mathbf{f}_{ck}\right]\\&+\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k}\delta\boldsymbol{\lambda}_k-\mathbf{z}_{k+1}^T\delta\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\right)\\=&\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0-\boldsymbol{\lambda}_N^T\delta\mathbf{z}_N+\sum_{k=1}^{N-1}\left[\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}-\boldsymbol{\lambda}_k^T\right)\delta\mathbf{z}_k+\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\delta\mathbf{f}_{ck}\right]\\&+\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}}-\mathbf{z}_{k+1}^T\right)\delta\boldsymbol{\lambda}_k=0\end{aligned}\qquad\textbf{(3.101)}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem **(3.101)**'de verilen eşitliğin sağlanması için her bir terimin aşağıda verildiği gibi sıfıra eşit olması gerekir:

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}}\right)^T-\mathbf{z}_{k+1}=0,\quad\boldsymbol{\lambda}_N=0,\qquad\textbf{(3.102)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}\right)^T-\boldsymbol{\lambda}_k=0,\quad\mathbf{z}_0=\mathbf{z}(0),\qquad\textbf{(3.103)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\right)^T=0.\qquad\textbf{(3.104)}$$

Burada H_k denklem **(3.98)** ile verilen Hamiltonian fonksiyonudur. Denklem **(3.102) - (3.104)**, aynı ada çözülmesi gereken $\mathbf{z}_k$, $\mathbf{f}_{ck}$ ve $\boldsymbol{\lambda}_k$ bilinmeyenlerini içeren denklem takımını ifade eder. Denklem **(3.103)**'ün sınır koşulu $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$'dır, dolayısıyla $\delta\mathbf{z}(0) = 0$'dır. Ayrıca denklem **(3.102)** ve **(3.103)** iki noktalı sınır değer problemini temsil eder. Bu denklemdeki bir değişkenin sınır koşulu sistemin başlangıç durumu, diğer değişkenin sınır koşulu ise sistemin son durumu olarak verilir.

Denklem **(3.102)**'deki N genelde büyük bir sayı olarak alınır. Çünkü sistem her zaman belli oranda sönüme sahip olduğu için N büyük olursa sistemin yanıtı sıfırlanır. Denklem **(3.98)** kullanılarak H_k'nin $\mathbf{z}_k$, $\mathbf{f}_{ck}$ ve $\boldsymbol{\lambda}_k$'ya göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}}\right)^T = \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck}\,, \qquad \textbf{(3.105)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}\right)^T = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\,, \qquad \textbf{(3.106)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\right)^T = \mathbf{R}\mathbf{f}_{ck} + \mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\,. \qquad \textbf{(3.107)}$$

Denklem **(3.105) - (3.107)**, denklem **(3.102) - (3.104)**'teki yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}}\right)^T - \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} - \mathbf{z}_{k+1} = 0\,, \qquad \textbf{(3.108)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{z}_k}\right)^T - \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_k = 0\,, \qquad \textbf{(3.109)}$$

$$\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{f}_{ck}}\right)^T = \mathbf{R}\mathbf{f}_{ck} + \mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = 0 \qquad \textbf{(3.110)}$$

elde edilir. Denklem **(3.110)**'dan kontrol kuvveti $\mathbf{f}_c(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{f}_{ck} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1}\,. \qquad \textbf{(3.111)}$$

Denklem **(3.111)**, **(3.108)**'deki yerine yazılırsa **(3.108)** ve **(3.109)**

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 , \tag{3.112}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \tag{3.113}$$

olur. $2n \times 2n$ boyutuna ve aşağıdaki özelliğe sahip bir $\mathbf{P}(t)$ matrisi tanımlanabilir,

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k . \tag{3.114}$$

Denklem **(3.114)**, **(3.112)** ve **(3.113)**'teki yerine yazılırsa

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{z}_{k+1} , \tag{3.115}$$

$$\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}_{k+1}\mathbf{z}_{k+1} \tag{3.116}$$

elde edilir. Denklem **(3.115)**'ten $\mathbf{z}_{k+1}$ ifade edilirse

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\right)^{-1} \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\right)^{-1} \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} \tag{3.117}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(3.117)** lineer optimal kontrol altındaki sistemin $\mathbf{z}_{k+1}$ durum vektörünü vermektedir. Denklem **(3.117)**, **(3.116)**'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}_{k+1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\right)^{-1} \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k \\ + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}_{k+1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\right)^{-1} \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} \end{aligned} \tag{3.118}$$

elde edilir. Denklem **(3.118)**'in sonunda $\ddot{u}_{gk}$ terimi vardır. Görüldüğü gibi Riccati fark denklemi deprem yer hareketinin bir fonksiyonudur. Ancak hesaplarda kolaylık sağlamak amacıyla Riccati fark denklemi deprem yer hareketinden bağımsız olarak kabul edilir. Böylelikle denklem **(3.118)** aşağıdaki şekli alır:

$$\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}_{k+1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1}\right)^{-1} \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k . \tag{3.119}$$

Riccati fark denklemiyle ilgili yapılan bu varsayımla denklem **(3.117)** ile verilen sistemin yanıtı optimal olmaktan uzaklaşır. Dolayısıyla bu çözüm yaklaşık optimaldır. Denklem **(3.119)**'dan $\mathbf{P}_k$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}_{k+1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{F}_s \,. \qquad \textbf{(3.120)}$$

$\mathbf{P}_k$ Riccati matrisinin deprem yer hareketine bağlı olmaması varsayımına ek olarak matris terimlerinin sabit olduğu varsayımı yapılırsa $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}$ olur. Buna bağlı olarak

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P} \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{F}_s \qquad \textbf{(3.121)}$$

şeklini alır. Riccati matrisi elde edildikten sonra denklem **(3.114)**, **(3.111)**'deki yerine yazılırsa kontrol kuvveti

$$\mathbf{f}_{ck} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{z}_{k+1} \qquad \textbf{(3.122)}$$

olarak elde edilir. Denklem **(3.95)**, **(3.122)**'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{f}_{ck} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{P} \left(\mathbf{F}_s \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} \right) \qquad \textbf{(3.123)}$$

elde edilir. Denklem **(3.123)**'ten kontrol kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{F}_s \mathbf{z}_k - \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk} \,. \qquad \textbf{(3.124)}$$

Görüldüğü gibi $\mathbf{f}_{ck}$, $\mathbf{z}_k$ ve $\ddot{u}_{gk}$'nın fonksiyonudur. Denklem **(3.124)**'ün birinci terimi $\mathbf{z}_k$'yı içermektedir. $\mathbf{z}_k$, denklem **(3.95)**'ten

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{F}_s \mathbf{z}_{k-1} + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{g(k-1)} + \mathbf{G}\mathbf{f}_{c(k-1)} \qquad \textbf{(3.125)}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $\mathbf{z}_k$ sistemin $k-1$ zaman adımındaki durumundan hesaplanabilir. Ancak denklem **(3.124)**'ün ikinci terimi, deprem yer ivmesinin k adımındaki yer ivmesinin bilinmesini gerektirir. Başka bir deyişle bu, aynı anda hem deprem yer ivmesinin ve uygulanacak kontrol kuvvetinin bilinmesi demektir. Gerçekte deprem ivmesinin elde edildiği anda yapıya kontrol kuvveti uygulamak mümkün değildir. Kontrol kuvveti, deprem ivmesi elde edildikten bir adım sonra ancak uygulanabilir. Bu durum karşısında kontrol kuvvetinin hesabı için genel olarak izlenen yol deprem ivmesinin sıfır alınmasıdır.

Bu varsayımla denklem **(3.124)**

$$\mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k \qquad \textbf{(3.126)}$$

şeklini alır.

Sistemin $k+1$ adımındaki yanıtını elde etmek için denklem **(3.126)**, **(3.95)**'te yerine yazılırsa

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} \qquad \textbf{(3.127)}$$

şeklini alır. Denklem **(3.127)** Matrisin Ters Lemma özelliği yardımıyla aşağıda gösterildiği gibi daha basit hale getirebilir:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}\,. \qquad \textbf{(3.128)}$$

Denklem **(3.128)** ile elde edilen, sisteme bir adım zaman gecikmesiyle uygulanan optimal kontrol durumuna ait yanıtıdır.

$$\mathbf{F}_f = \left[\mathbf{I} - \mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{F}_s = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s \qquad \textbf{(3.129)}$$

tanımı yapılırsa denklem **(3.128)** aşağıdaki şekli alır:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}\,. \qquad \textbf{(3.130)}$$

Şekil 3.4'te deprem etkisindeki bir sisteme ait Riccati denklemiyle yapılan optimal kontrol blok diyagramı gösterilmiştir.

Matrisin Ters Lemma özelliği:

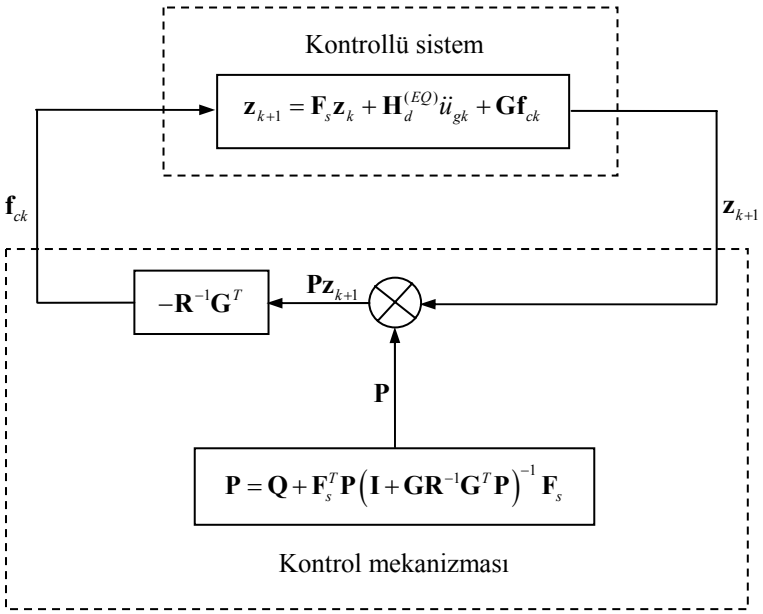
$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)\left[\mathbf{I} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right] \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P} \\
&\qquad\qquad - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P} \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{G}\left[\mathbf{R}^{-1} - \left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\right]\mathbf{G}^T\mathbf{P}
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.131)}$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{G}\left[\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right) - \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right]\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{G}\left[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{I} - \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right]\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{G}[0]\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}$$

$$= \mathbf{I}.$$



Şekil 3.4 : Deprem etkisindeki sisteme ait optimal kontrol blok diyagramı.

Kontrol kuvvetinin önceden tahmin edilen ivme değeriyle hesaplanması:

Daha önce açıklandığı gibi denklem **(3.124)** ile verilen kontrol kuvveti ivme sıfır alınarak hesaplanmaktadır. Buna karşılık eğer k adımındaki kontrol kuvveti hesaplanırken yer ivmesi önceden tahmin edilirse hesaplanan kontrol kuvveti daha gerçekçi olabilir. Deprem ivmesinin bir adım sonraki değeri çeşitli yöntemlerle tahmin edilebilmektedir [86-89]. Aynı adım için tahmin edilen ivme değerini içeren kontrol kuvveti ifadesi **(3.124)**'ten

$$\mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k - \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gkp} \qquad \textbf{(3.132)}$$

olarak yazılabilir. Burada $\ddot{u}_{gkp}$ k adımı için tahmin edilen ivme değeridir.

Sistemin $k+1$ adımındaki yanıtını elde etmek için denklem **(3.132)**, **(3.95)**'te yerine yazılırsa

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right]\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \left[\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} - \mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gkp}\right] \quad \textbf{(3.133)}$$

şeklini alır. Bu ifadeyi daha basit hale getirmek için $\ddot{u}_{gk} \cong \ddot{u}_{gkp}$ varsayımı yapılırsa

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right]\left(\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}\right) \quad \textbf{(3.134)}$$

elde edilir. Denklem **(3.134)** Matrisin Ters Lemma özelliği yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\left(\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}\right). \quad \textbf{(3.135)}$$

Denklem **(3.135)** sistemin, bir adım zaman gecikmesinin gelecek ivme tahmini yöntemiyle telafi edildiği optimal kontrol yanıtını vermektedir.

$$\mathbf{F}_f = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s, \quad \textbf{(3.136)}$$

$$\mathbf{H}_{dp}^{(EQ)} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{H}_d^{(EQ)} \quad \textbf{(3.137)}$$

tanımlarıyla denklem **(3.135)** aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_{dp}^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}. \quad \textbf{(3.138)}$$

Gelecek ivme tahmini:

Otoregresif (AR) modelleri gelecek ivme tahmini için çok kullanılan yöntemlerden biridir [86-89]. Otoregresif modellerindeki otokorelasyon yöntemi yardımıyla, tahmin hatalarının karelerinin toplamı minimum olacak şekilde ivme tahmininde kullanılan Doğrusal Tahmin Filtresi Katsayıları hesaplanabilir. İvmenin güncel adımdaki değeri geçmiş değerlerinden faydalanarak aşağıda verildiği gibi tahmin edilebilir:

$$\ddot{u}_{gp}(k) = -a(2)\ddot{u}_g(k-1) - a(3)\ddot{u}_g(k-2) - \cdots - a(p+1)\ddot{u}_g(k-p). \quad \textbf{(3.139)}$$

Burada $\ddot{u}_{gp}(k)$ k adımı için tahmin edilen ivme, p tahmin filtresi polinomu derecesi, a doğrusal tahmin filtresi katsayılarıdır ve $a = \begin{bmatrix} 1 & a(2) & a(3) & \cdots & a(p+1) \end{bmatrix}$.

Sayısal örnek 3.1:

Bu örnekte tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan optimal kontrol kuvveti ivme sıfır alınarak ve geçmiş değerlerden tahmin edilerek hesaplanmıştır. Her iki duruma ait sonuçlar karşılaştırılmıştır. Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 2.2'de verilen El-Centro 1940 depremi kullanılmıştır.

Şekil 3.1'de verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış tek serbestlik dereceli sistemde $m = 175 \text{ kNs}^2/\text{m}$, $\zeta = 0.05$, $T_n = 0.5 \text{ s}$,

$\omega = 2\pi / T_n = 12.566 \text{ rad/s},$

$c = 2\zeta\omega_n m = 219.912 \text{ kNs/m},$

$k = m\omega_n^2 = 27634.89 \text{ kN/m}.$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27634.89 & 0 \\ 0 & 175 \end{bmatrix}, \quad R = 0.001, \quad D = 1, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

El-Centro depreminin örneklendiği $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ zaman aralığı için

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -157.9137 & -1.2566 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m^{-1}D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00571428 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.968844 & 0.019543 \\ -3.086185 & 0.944285 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.00019729 \\ -0.01954349 \end{Bmatrix},$$

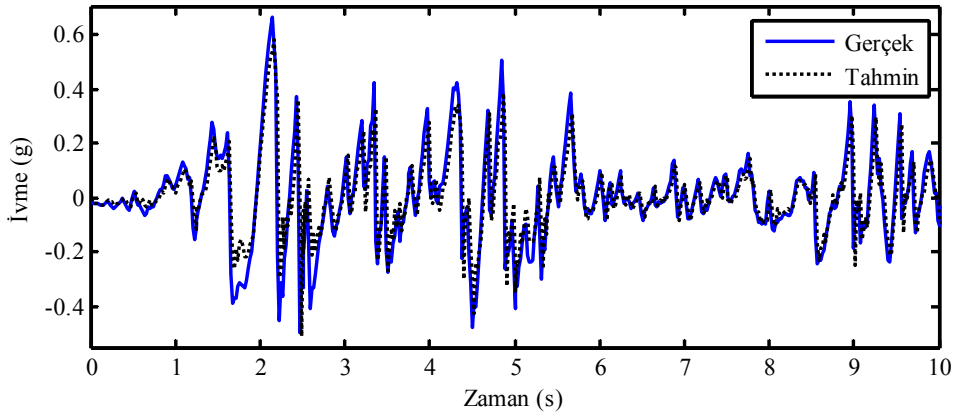
$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0.000001127399 \\ 0.000111677114 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T\mathbf{P}\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 597011.6824 & 4359.5783 \\ 4359.5783 & 3683.2580 \end{bmatrix},$$

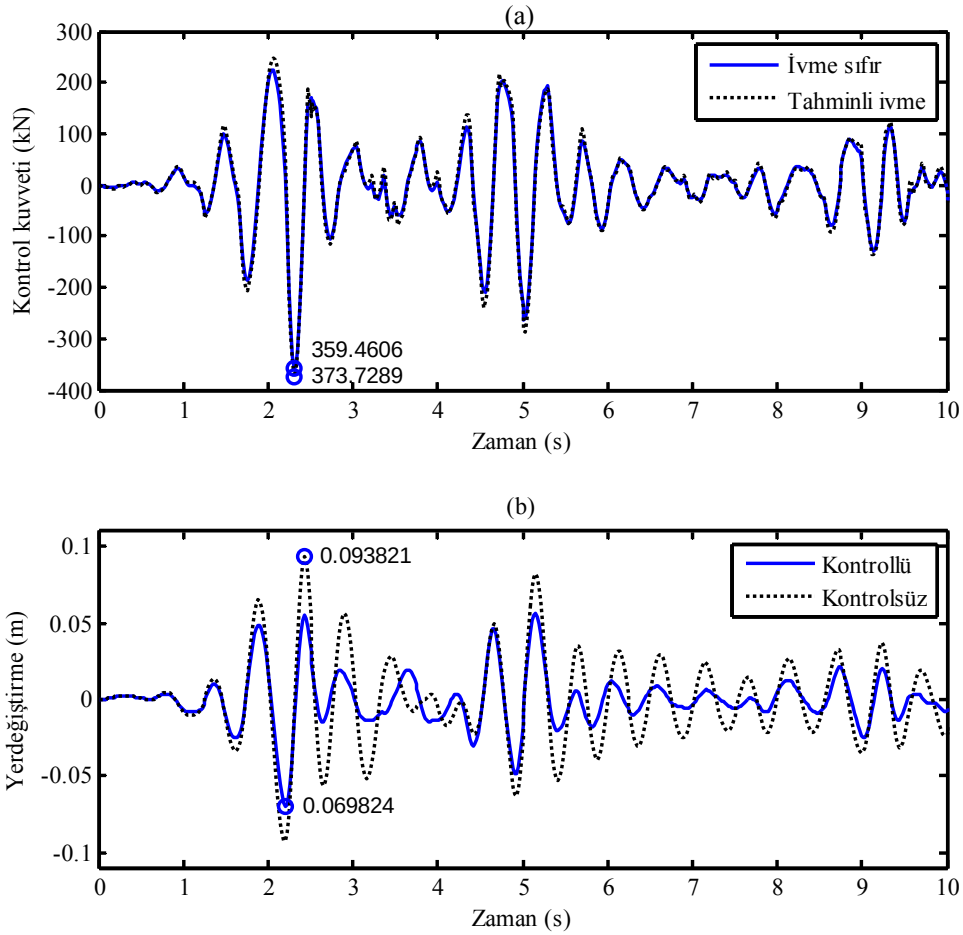
$$\mathbf{F}_f = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} 0.969017 & 0.019096 \\ -3.069043 & 0.899975 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{dp}^{(EQ)} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \begin{Bmatrix} -0.0001883 \\ -0.0186521 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}, \quad \mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k .$$



Şekil 3.5 : Gerçek ve tahmin edilen ivme grafiği.



Şekil 3.6 : (a) Tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti, (b) sistemin kontrollü-kontrolsüz durumdaki yerdeğiştirmesi.

Gerçek ve bir adım sonrası için tahmin edilen ivme grafiği Şekil 3.5'te verilmiştir. Tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti, kontrollü – kontrolsüz durumdaki yerdeğiştirme zaman geçmişi Şekil 3.6'da verilmiştir. Şekil 3.6 (a)'dan görüldüğü gibi ivme sıfır alınarak hesaplanan kontrol kuvveti ile bir adım sonrası için tahmin edilen ivme kullanılarak hesaplanan kontrol kuvveti arasında %4 mertebesinde fark hesaplanmıştır. İvme sıfır alınmadığı durumda daha büyük kontrol kuvveti elde edilmiş olmasına karşın ivme sıfır alınarak hesaplanan kontrol kuvveti de kabul edilebilir mertebededir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

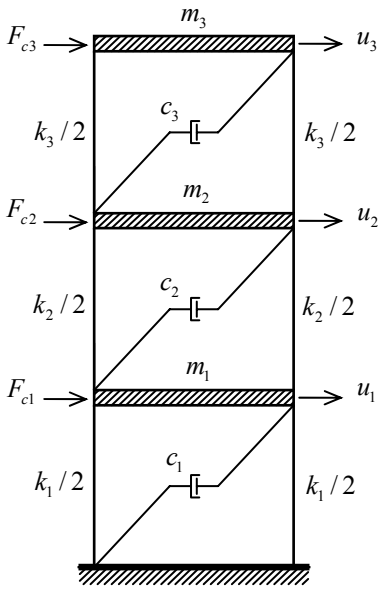
Sayısal örnek 3.2:

Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 2.2'de verilen El-Centro 1940 depremi kullanılmıştır. Şekil 3.7'de verilen optimal kontrol kuvveti altındaki üç serbestlik dereceli sistemde

$m_1 = m_2 = 2m_3 = 175 \text{ kNs}^2/\text{m},$

$k_1 = k_2 = k_3 = 27634.89 \text{ kN/m},$

$c_1 = c_2 = c_3 = 219.912 \text{ kNs/m}.$



Şekil 3.7 : Optimal kontrollü üç serbestlik dereceli sistem.

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}175 & 0 & 0\\ 0 & 175 & 0\\ 0 & 0 & 87.5\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}439.824 & -219.912 & 0\\ -219.912 & 439.824 & -219.912\\ 0 & -219.912 & 219.912\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}55269.78 & -27634.89 & 0\\ -27634.89 & 55269.78 & -27634.89\\ 0 & -27634.89 & 27634.89\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27634.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 175 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 175 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 175 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 175\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}0.001 & 0 & 0\\ 0 & 0.001 & 0\\ 0 & 0 & 0.001\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

El-Centro depreminin örneklendiği $\Delta t = 0.02$ s zaman aralığı için

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -315.8273 & 157.9137 & 0 & -2.5133 & 1.2566 & 0\\ 157.9137 & -315.8273 & 157.9137 & 1.2566 & -2.5133 & 1.2566\\ 0 & 315.8273 & -315.8273 & 0 & 2.5133 & -2.5133\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.00571428 & 0 & 0\\ 0 & 0.00571428 & 0\\ 0 & 0 & 0.01142857\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ -1\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.938938 & 0.029913 & 0.000409 & 0.019102 & 0.000440 & 0.000005 \\ 0.029913 & 0.939756 & 0.029913 & 0.000440 & 0.019113 & 0.000440 \\ 0.000818 & 0.059826 & 0.939347 & 0.000010 & 0.000881 & 0.019107 \\ -5.963552 & 2.878986 & 0.067982 & 0.891481 & 0.052823 & 0.000950 \\ 2.878986 & -5.827587 & 2.878986 & 0.052823 & 0.893382 & 0.052823 \\ 0.135964 & 5.757973 & -5.895569 & 0.001900 & 0.105647 & 0.892431 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.0001973176 \\ -0.0001999772 \\ -0.0001999997 \\ -0.0195487440 \\ -0.0199947500 \\ -0.0199999178 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B} = 1.0\mathrm{e}-3 \begin{bmatrix} 0.00111233184 & 0.00001506922 & 0.00000025682 \\ 0.00001506922 & 0.00111258866 & 0.00003013844 \\ 0.00000025682 & 0.00003013844 & 0.00222492051 \\ 0.10915850262 & 0.00251907556 & 0.00005906085 \\ 0.00251907556 & 0.10921756348 & 0.00503815113 \\ 0.00005906085 & 0.00503815113 & 0.21837606610 \end{bmatrix},$$

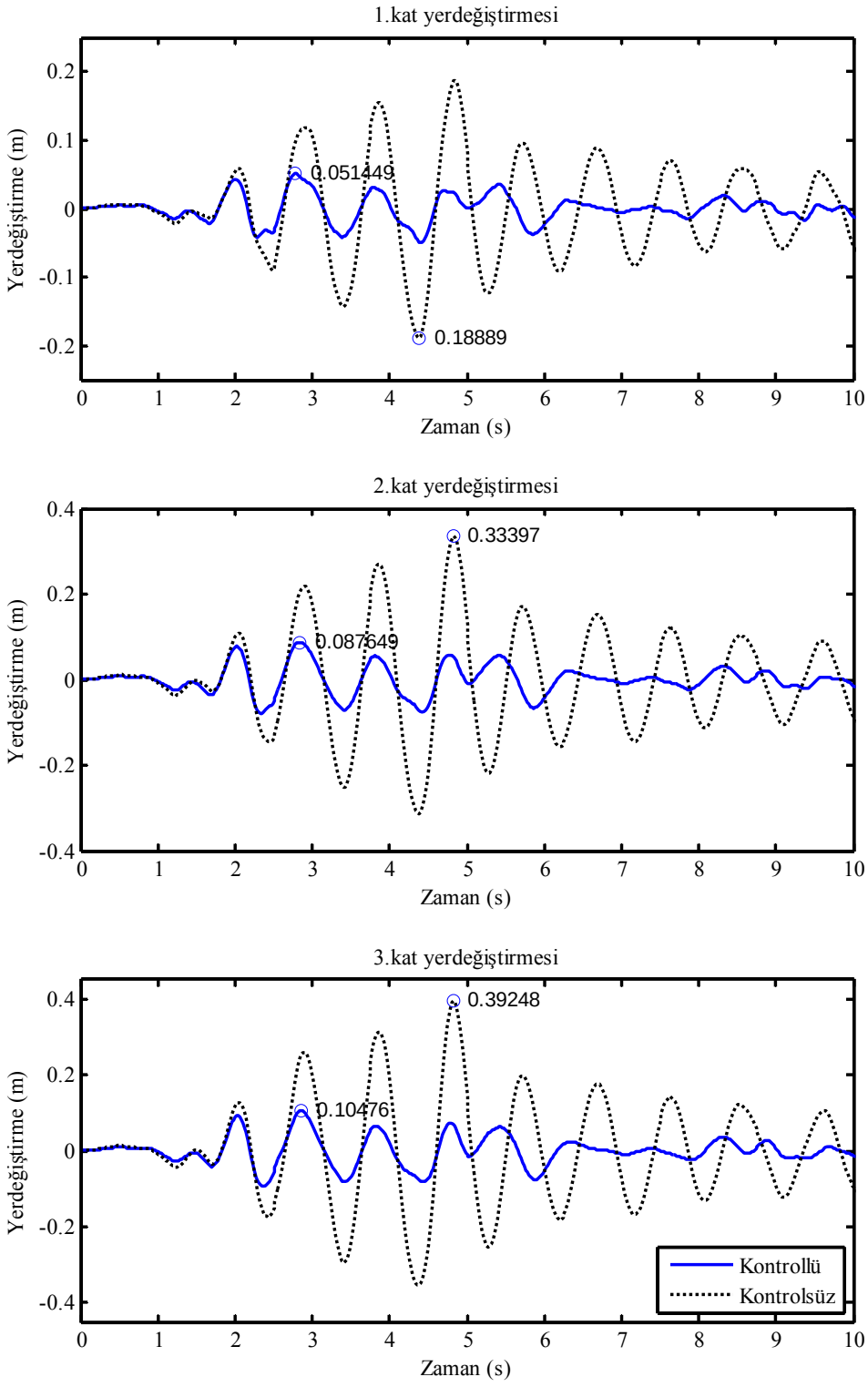
$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s,$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 602061.29 & -129309.42 & -82574.639 & 2279.292 & 37.866 & -1160.49 \\ -129309.42 & 427947.82 & -151928.00 & 976.409 & 2383.632 & 1681.977 \\ -82574.63 & -151928.00 & 263372.170 & 1133.583 & -158.134 & 60.315 \\ 2279.292 & 976.409 & 1133.583 & 2369.997 & 888.035 & 168.511 \\ 37.866 & 2383.632 & -158.134 & 888.035 & 2681.163 & 818.114 \\ -1160.491 & 1681.977 & 60.315 & 168.511 & 818.114 & 1333.545 \end{bmatrix}$$

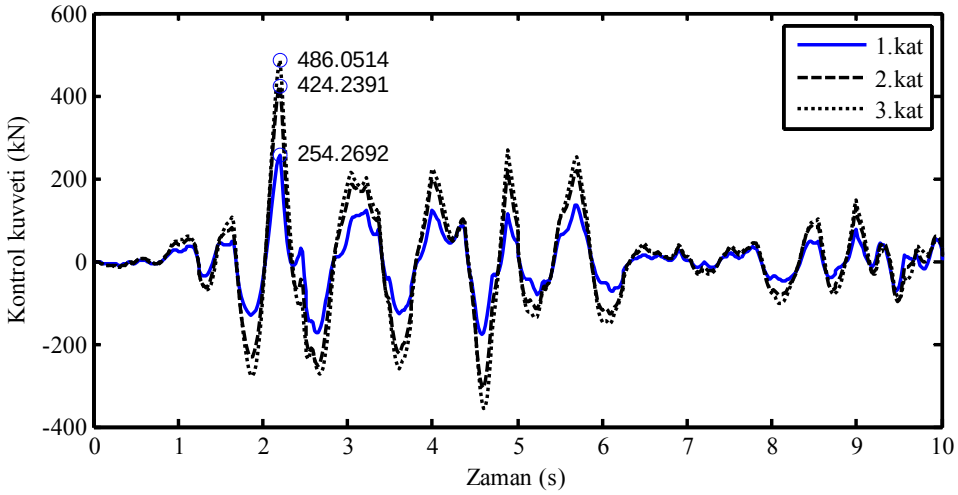
$$\mathbf{F}_f = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s,$$

$$\mathbf{F}_f = \begin{bmatrix} 0.939380 & 0.029625 & 0.000157 & 0.018824 & 0.000323 & -0.000019 \\ 0.029749 & 0.939976 & 0.029752 & 0.000324 & 0.018789 & 0.000330 \\ 0.000986 & 0.058192 & 0.940661 & -0.000072 & 0.000457 & 0.018514 \\ -5.920325 & 2.850927 & 0.043110 & 0.864039 & 0.041040 & -0.001531 \\ 2.863503 & -5.807823 & 2.864162 & 0.041072 & 0.861138 & 0.041456 \\ 0.152107 & 5.598029 & -5.766978 & -0.006406 & 0.063380 & 0.834016 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)} \ddot{u}_{gk}, \quad \mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{F}_s \mathbf{z}_k .$$



Şekil 3.8 : Kontrollü ve kontrolsüz üç serbestlik dereceli sistemin yerdeğiştirmesi.



Şekil 3.9 : Üç serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti.

Üç serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti, kontrollü – kontrolsüz durumdaki yerdeğiştirme zaman geçmişi Şekil 3.8 – 3.9'da verilmiştir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

4. DİNAMİK YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ

4.1 Giriş

Yapıların dinamik analizi genel olarak şekildeğiştirmeyen temele sahip oldukları (ankastre mesnet) kabulüyle yapılır. Ancak gerçekte yapılar çok değişken özelliklere sahip zemine oturmaktadır. Deprem etkisindeki bir yapının mesnetlendiği zemin ortamı hem yapının davranışını değiştirebilir, hem de deprem kaynağından gelen dalgayı büyüterek yapıya iletebilir. Rijit temele sahip bir yapı genel olarak şekildeğiştirebilir temele sahip bir yapıya göre daha büyük zorlamalara maruz kalabilir. Başka bir deyişle daha fazla kesme kuvvet ve devrilme momenti meydana getirebilir. Bu da güvenli tarafta kalan tasarım yapılmasını sağlar. Buna karşılık şekildeğiştirebilir temel zeminine sahip yapı daha fazla yanal yerdeğiştirme meydana getirebilir. Bu da yerdeğiştirme kontrolü ve yapılar arasındaki mesafeyi belirlemede önemli olabilir. Tüm bunların yanında, yapılan araştırmalara göre kritik binalar, nükleer-enerji tesisleri gibi önemli yapıların analizinde gerçek davranışı anlamak için dinamik yapı-zemin etkileşimi analizi gerekli olabilir [90].

Bu bölümde, tezde araştırılması amaçlanan konunun kapsamı gereği yapı-zemin etkileşimi analizi özet olarak verilmiştir. Yapı-zemin etkileşimi problemine ilişkin daha geniş bilgi için ilgili kaynaklara [90-95] başvurulabilir.

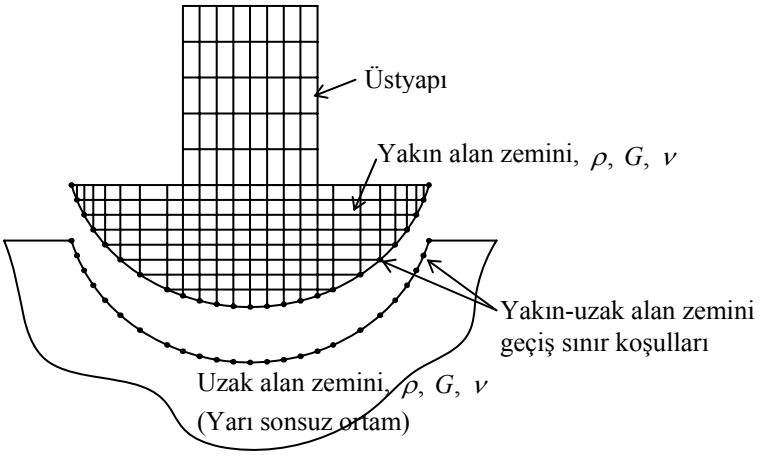
4.2 Dinamik Yapı-Zemin Etkileşimi Hesap Yöntemleri

Şimdiye kadar dinamik yapı-zemin etkileşim problemi için geliştirilen yöntemler şu iki başlık altında toplanabilir: doğrudan hesap yöntemi ve altsistem hesap yöntemi.

4.2.1 Doğrudan hesap yöntemi

Doğrudan hesap yönteminde üst yapı ve yapıyı çevreleyen yakın alandaki sonlu zemin (yakın alan zemini) birlikte standart sonlu elemanlar yöntemiyle modellenir. Yakın alan zemini çevresindeki sonsuz zemin (uzak alan zemini) davranışı yakın alan zemini ile uzak alan zemini arasındaki geçiş sınır koşulları yardımıyla yaklaşık

olarak analiz edilir. Geçmiş çeyrek yüz yılda bu iki alan arasındaki geçiş sınır koşulları için viskos sınırları [96], süperpoze sınırlar [97] ve diğerleri [98] geliştirilmiştir. Şekil 4.1'de üstyapı, yakın alan zemini ve uzak alan zemini gösterilmiştir. Bu yöntem yapıya temel teşkil eden yakın alan zemininin çok sert kayaya oturduğu durumlar için uygundur [99].

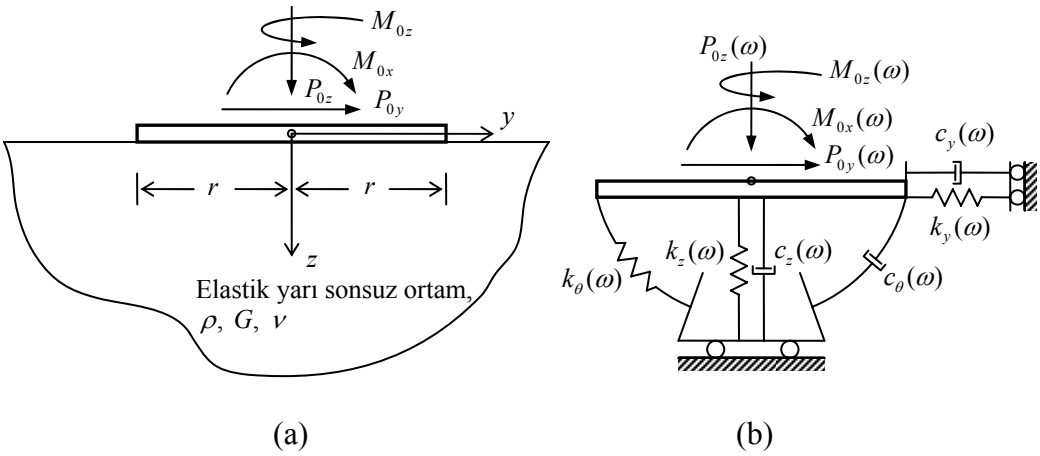


Şekil 4.1 : Doğrudan hesap yöntemi için sonlu elemanlar modeli.

4.2.2 Altsistem hesap yöntemi

Altsistem hesap yönteminde yapı-zemin sistemi yapı ve zemin olmak üzere iki altsisteme ayrılır. Bu iki alt sistem arasındaki ilişki birbirine zıt yönde etkiyen eşit büyüklüğe sahip etkileşim kuvvetleri ile temsil edilir. Yapının altındaki lineer olmayan özelliğe veya düzensiz sınır koşullarına sahip bir kısım zemin yapının bir parçası olarak da görülebilir [90, 100].

Bu yöntemde üstyapının oturduğu zemin Şekil 4.2a'da gösterildiği gibi izotrop, homojen elastik yarı sonsuz ortam olarak kabul edilir. Temel plağı ile zemin yüzeyi arasındaki etkileşim kuvvetleri Veletsos ile Wei [101] ve Luco ile Westman [102] tarafından elastik yarı sonsuz ortama oturan kütlesiz rijit dairesel plağın harmonik yükler altındaki titreşim analizi sonucunda elde edilmiştir. Elastik ortamın üstyapıdan aktarılan etkilere karşı davranışı, yanal yerdeğiştirme ve dönme rijitliklerini temsil eden lineer elastik yaylar ve enerjinin zemin içersine yayılarak sönümlenmesini temsil eden sönümleyiciler yardımıyla belirlenebilir. Şekil 4.2b'de [103] k_y ve c_y yatay yöndeki katsayıları k_θ ve c_θ dönme katsayılarını k_z ve c_z ise düşey yöndeki katsayıları göstermektedir. Zeminin rijitlik ve sönümleme özelliklerini ifade eden bu katsayılar titreşim hareketinin frekansına bağlıdır.



(a) (b)

Şekil 4.2 : Elastik yarı sonsuz ortamın idealleştirilmesi.

4.3 Empedans Katsayılarının Belirlenmesi

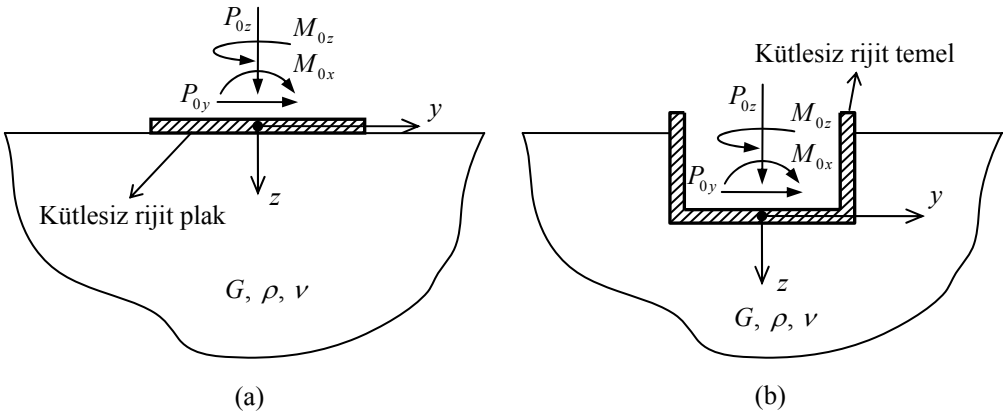
Dinamik yükler altındaki bir sistemin yapı-zemin etkileşimi hesabında zeminin yanal yerdeğiştirme ve dönme rijitliklerini ifade eden empedans katsayılarının belirlenmesi önemli aşamalardan biridir. Empedans katsayılarının elde edilmesi için analitik veya sayısal yöntemlerin kullanıldığı çok sayıda teorik çalışma bulunmaktadır. Bu yöntemler farklı zamanlarda Lysmer [104], Roesset [105-106], Luco [107], Gazetas [108], Novak [109] ve Pais ile Kausel [110] tarafından özetlenmiştir. Teorik çalışmaların yanında deneysel yöntemlere dayanan amprik formüller de geliştirilmiştir [111-112].

Empedans katsayılarının seçimi aşağıda sıralanan temel-zemin sisteminin ve dış yükün özelliklerine bağlıdır:

a) Temel-zemin yüzeyinin şekli (dairesel, mütemadi, dikdörtgen, kare, keyfi),
b) Ne kadar gömülü olduğu (yüzeye oturan, kısmi veya tam gömülü, kazık),
c) Zemin profilinin özelliği (derin ve homojen, tabakalı, kaya üzerinde sığ tabakalar),
d) Dış yükün şekli ve frekansı.

Pratik uygulamalarda kullanılmak amacıyla çok sayıda araştırmacı tarafından analitik çalışmalardan elde edilen sonuçlara dayanan basitleştirilmiş grafikler, tablolar ve formüller geliştirilmiştir. Gazetas [113] ve Mita ile Luco [114] tarafından yapılan çalışmalar bu konu hakkında geniş bilgi içermektedir. Daha basitleştirici bir yaklaşım olarak frekanstan bağımsız sabit empedans katsayıları da önerilmiştir [115-117].

Empedans fonksiyonunun tanımı: Şekil 4.3'te zemin yüzeyine oturan ve gömülü kütlesiz rijit temel gösterilmiştir.



Şekil 4.3 : Elastik yarı sonsuz ortamın idealleştirilmesi.

Her bir özel frekansa sahip harmonik uyarı için empedans fonksiyonu, kuvvet $\tilde{f}_0(\omega)$'nin, kütlesiz temelin merkez noktasının kararlı durum yerdeğiştirmesi $\tilde{d}_0(\omega)$'ye oranı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$k(\omega) = \frac{\tilde{f}_0(\omega)}{\tilde{d}_0(\omega)}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Burada $\tilde{f}_0(\omega)$ temele etkiyen moment, düşey veya yatay kuvvet olabilir; $\tilde{d}_0(\omega)$ ise yatay yerdeğiştirme veya dönme olabilir. Buna bağlı olarak $k(\omega)$ de dönme, düşey veya yatay empedans olabilir.

Yüzeysel veya gömülü olan temellerden dolayı dış yükün ve içindeki elastik dalgaların etkisinde bulunan elastik yarı sonsuz ortamın empedans değerleri sınır değer probleminin çözümünden elde edilebilir. Sınır değer probleminin çözümünde kullanılan yöntemler özet olarak integral dönüşüm teknikleri, sınır eleman yöntemleri, dinamik sonlu elemanlar yöntemleri ve karma yöntemlerdir [113].

Veletsos ve Wei [101] tarafından yapılan çalışmada zemin yüzeyine oturan dairesel kütlesiz rijit plak için etkileşim kuvvetleri P_{0y} ve M_{0x} ile yanal yerdeğiştirme u_{0y} ve dönme θ_{0x} arasındaki bağıntı frekans tanım alanında aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_{0y}(\omega) \\ \tilde{M}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{11} + ia_0(\omega)c_{11})k_y & (k_{12} + ia_0(\omega)c_{12})k_y r \\ (k_{21} + ia_0(\omega)c_{21})k_y r & (k_{22} + ia_0(\omega)c_{22})k_{\theta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{0y}(\omega) \\ \tilde{\theta}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix}. \quad \textbf{(4.2)}$$

Bu denklemde fiktif rijitlik ve sönümle ilgili katsayılar *k* ve *c* ortamın Poisson oranı ν ve frekans parametresi a_0'a bağlı olarak elde edilir. a_0 aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$a_0 = \frac{\omega r}{c_s} \text{ ve } c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad \textbf{(4.3)}$$

Burada ω = dış etkinin titreşim frekansı, *r* = dairesel plağın yarıçapı, c_s = kayma dalgasının yayılma hızı, G = yarı sonsuz ortamın kayma modülü, ρ = yarı sonsuz ortamın kütlesel yoğunluğu ve $i = \sqrt{-1}$'dir.

Dairesel plağın ötelenme ve dönme rijitlikleri sırasıyla

$$k_y = \frac{8Gr}{(2-\nu)} \text{ ve } k_{\theta x} = \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)} \quad \textbf{(4.4)}$$

olarak verilebilir. Ötelenme ile dönme arasındaki etkileşim ihmal edilirse denklem **(4.2)**

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_{0y}(\omega) \\ \tilde{M}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + ia_0c_1)k_y & 0 \\ 0 & (k_2 + ia_0c_2)k_{\theta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{0y}(\omega) \\ \tilde{\theta}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix} \quad \textbf{(4.5)}$$

şeklini alır. Temel empedans katsayıları

$$k_{yy} = (k_1 + ia_0c_1)k_y \text{ ve } k_{\theta\theta x} = (k_2 + ia_0c_2)k_{\theta x} \quad \textbf{(4.6)}$$

olarak yazılırsa denklem **(4.5)** aşağıdaki şekli alır:

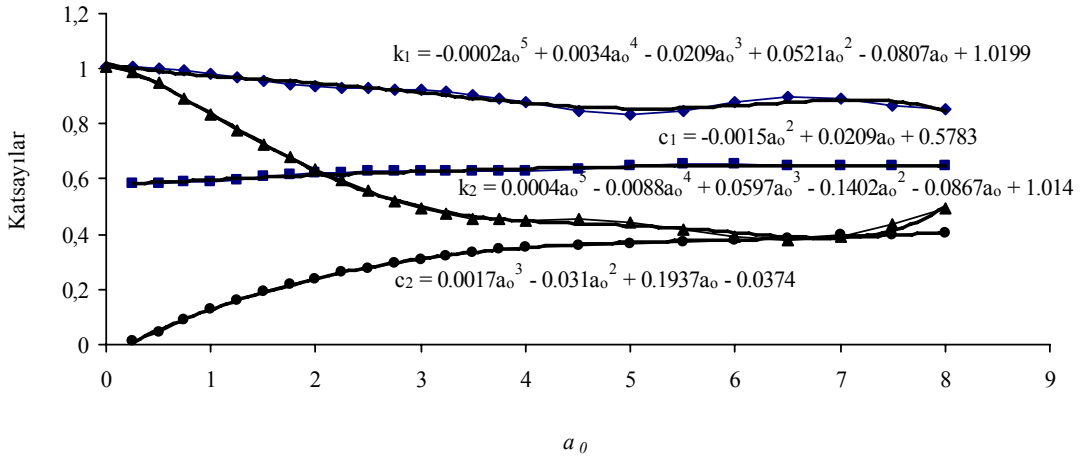
$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_{0y}(\omega) \\ \tilde{M}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & k_{\theta\theta x}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{0y}(\omega) \\ \tilde{\theta}_{0x}(\omega) \end{Bmatrix}. \quad \textbf{(4.7)}$$

Veletsos ve Wei elastik yarı sonsuz ortama ait rijitlik ve sönüm katsayıları *k* ve *c*'yi sayısal olarak vermişlerdir. Çizelge 4.1'de Poisson oranı $\nu = 1/3$'e bağlı olarak *k* ve *c* katsayılarının değerleri verilmiştir.

Çizelge 4.1 : $\nu = 1/3$ için k ve c katsayıları.

a_o	k_1	c_1	k_2	c_2
0.00	1.0076	-	1.0076	-
0.25	1.0064	0.5861	0.9914	0.0138
0.50	1.0013	0.5862	0.9482	0.0456
0.75	0.9922	0.5886	0.8919	0.0867
1.00	0.9800	0.5933	0.8336	0.1271
1.25	0.9663	0.5995	0.7785	0.1628
1.50	0.9532	0.6066	0.7274	0.1929
1.75	0.9423	0.6137	0.6800	0.2184
2.00	0.9348	0.6198	0.6356	0.2405
2.25	0.9306	0.6243	0.5942	0.2602
2.50	0.9286	0.6271	0.5560	0.2781
2.75	0.9268	0.6284	0.5221	0.2946
3.00	0.9234	0.6286	0.4937	0.3100
3.25	0.9169	0.6285	0.4723	0.3240
3.50	0.9071	0.6286	0.4587	0.3362
3.75	0.8942	0.6293	0.4527	0.3463
4.00	0.8794	0.6308	0.4512	0.3539
4.50	0.8477	0.6370	0.4539	0.3624
5.00	0.8335	0.6455	0.4437	0.3666
5.50	0.8477	0.6521	0.4192	0.3712
6.00	0.8772	0.6535	0.3927	0.3781
6.50	0.8955	0.6508	0.3794	0.3867
7.00	0.8895	0.6480	0.3912	0.3952
7.50	0.8664	0.6479	0.4340	0.4008
8.00	0.8519	0.6504	0.4918	0.4018
9.00	-	-	0.5792	0.3948
10.00	0.9084	0.6502	0.5826	0.3874

k_1, c_1, k_2 ve c_2 katsayıları Şekil 4.4'te gösterildiği gibi polinomlarla ifade edilerek bilgisayar programlarında daha elverişli bir şekilde kullanılabilir.



Şekil 4.4 : k_1, c_1, k_2 ve c_2 katsayılarının polinomlarla gösterimi.

Şekil 4.2a'da verilen zemin yüzeyine oturan dairesel kütlesiz rijit plağın burulma etkileşim momenti M_{0z} Veletsos ve Nair [118] tarafından frekansa bağlı burulma empedans fonksiyonu ve burulmanın çarpımı olarak

$$\tilde{M}_{0z}(\omega) = k_{\theta\theta z}(\omega)\tilde{\theta}_{0z}(\omega) \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilmiştir. Temelin burulma empedans fonksiyonu $k_{\theta\theta z}(\omega)$

$$k_{\theta\theta z}(\omega) = \left(k_3 + ia_0 c_3\right) k_{\theta z} \tag{4.9}$$

olarak verilmiştir. Denklem **(4.9)**'daki k_3, c_3 ve $k_{\theta z}$ katsayıları aşağıda verilmiştir:

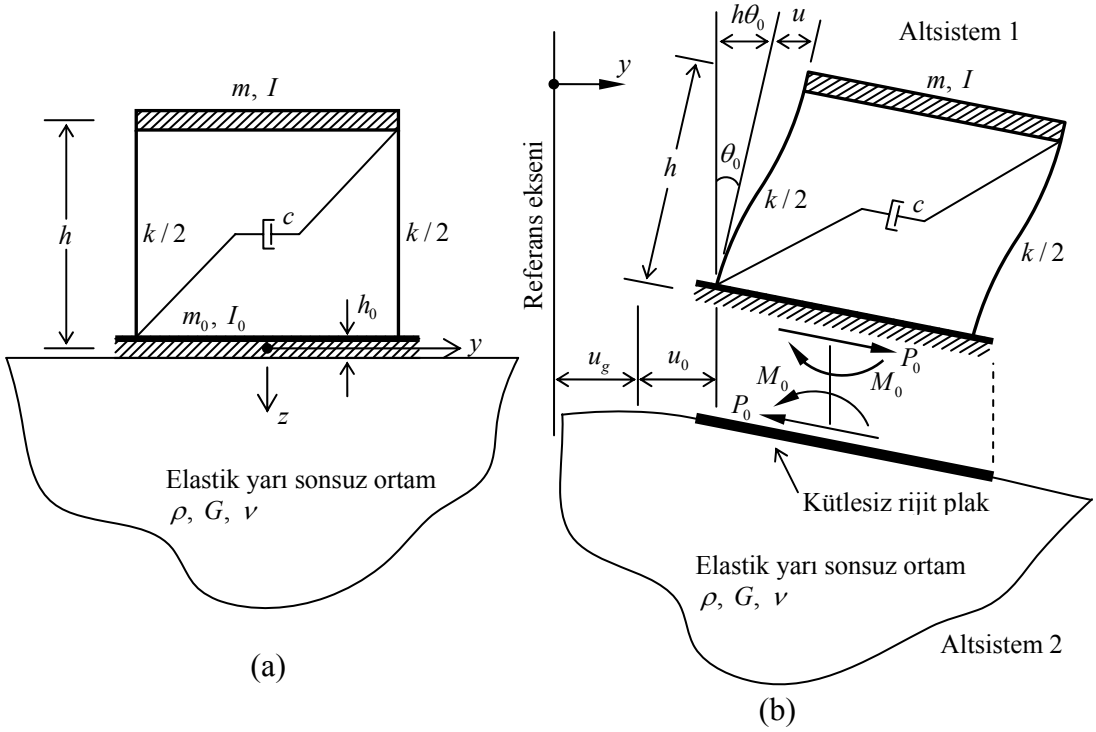
$$k_3 = 1 - c_3, \quad c_3 = 0.425\frac{\left(0.687a_0\right)^2}{\left(1+0.687a_0\right)^2}, \tag{4.10}$$

$$k_{\theta z} = \frac{16c_s^2\rho r^3}{3}. \tag{4.11}$$

4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Altsistem Yöntemiyle Yapı-Zemin Etkileşimi Hesabı

Şekil 4.5a'da rijit temel plağına sahip tek serbestlik dereceli bir sistem elastik yarı sonsuz ortama oturmaktadır ve sistem iki altsisteme ayrılmaktadır. Temel plağının kütlesi m_0 ve x ekseni etrafındaki kütlesel atalet momenti I_0'dır. Yarı sonsuz ortam yüzeyindeki yer ivmesi $\ddot{u}_g$ yapı temelini öteleme ve dönmeye zorlayarak Şekil 4.5b'de gösterildiği gibi etkileşim kuvvetlerini meydana getirir. P_0, y ekseni yönündeki yanal etkileşim kuvvetini, M_0, x ekseni etrafındaki etkileşim momentini, u yapı kütlesinin y ekseni yönündeki yerdeğiştirmesini, u_0 temel plağının yerdeğiştirmesini, u_g zeminin yer değiştirmesini, θ_0 ise temel plağının x ekseni etrafındaki dönmesini gösterir. k, c, m, I sırasıyla üstyapının rijitliği, sönümü, kütlesi ve kütlesel atalet momentidir. h yapı yüksekliği ve h_0 temel kalınlığıdır.

Elastik yarı sonsuz ortamın özelliklerini tanımlayan parametreler ise kütlesel yoğunluk ρ, kayma modülü G ve Poisson oranı ν'dür.



Şekil 4.5 : Yarı sonsuz ortama oturan tek serbestlik dereceli sistem [99].

Üstyapı ve zemin olmak üzere ikiye ayrılan altsistemlere ait hareket denge denklemleri ayrı ayrı yazıldıktan sonra, etkileşim yüzeyindeki geometrik uygunluk ve denge koşulları kullanılarak yazılan denklem takımından temel dönmesi ve yanal yerdeğiştirmesi önce frekans tanım alanında, daha sonra zaman tanım alanında elde edilebilir. Şekil 4.3'ten anlaşılacağı gibi temel ortamının şekil değiştirebilir özelliğinden dolayı yapı sistemi ek olarak u_0 ve θ_0 olmak üzere iki serbestlik derecesine daha sahip olur. Böylece tüm sistem üç yerdeğiştirme bileşeni ile tanımlanabilir. Kütlenin kat hizasında toplandığı, kolonların eksenel olarak şekil değiştirmediği varsayımıyla oluşturulan bir kayma çerçevesi için üstyapı kütlesinin dinamik dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\left[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_0(t) + h\ddot{\theta}_0(t)\right]. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Alt sistemin dinamik dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\left[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_0(t) + h\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{u}(t)\right] + m_0\left[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_0(t)\right] + k_{yy}u_0(t) = 0\,, \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$mh\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t)+\ddot{u}(t)\right]+I_0\ddot{\theta}_0(t)+k_{\theta\theta}\theta_0(t)=0. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Daha önce açıklandığı gibi empedans katsayıları elastik yarı sonsuz ortamın özelliklerine ve titreşim hareketinin frekanslarına bağlıdır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi analizinin frekans tanım alanında yapılması daha uygun olmaktadır. Frekans tanım alanı ile zaman tanım alanı arasındaki karşılıklı geçiş Fourier dönüşüm çifti yardımıyla gerçekleştirilebilir. Fourier dönüşüm çifti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{u}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=F\left[u(t)\right], \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=F^{-1}\left[\tilde{u}(\omega)\right]. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Frekans tanım alanında analiz yapmak için önce dış etkiye ayrık Fourier dönüşümü uygulanarak dış etki harmonik bileşenlere ayrılır. Sistemin analizi gerekli sayıda harmonik bileşen için yapıldıktan sonra zaman tanım alanında belirlenmesi istenen büyüklükler ters Fourier dönüşümü yardımıyla elde edilir.

Denklem **(4.12) - (4.14)**'ün her terimine Fourier dönüşümü uygulanırsa frekans tanım alanındaki ifadesi elde edilebilir. Bu amaçla $F\left[\dot{u}(t)\right]$ ve $F\left[\ddot{u}(t)\right]$ parçalarla integral alma yöntemiyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}F\left[\dot{u}(t)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{u}(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\&=\left[u(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}+\left(i\omega\right)\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\&=\left(i\omega\right)F\left[u(t)\right]\\&=\left(i\omega\right)\tilde{u}(\omega),\end{aligned} \qquad \textbf{(4.17)}$$

$$F\left[\ddot{u}(t)\right]=-\omega^2\tilde{u}(\omega). \qquad \textbf{(4.18)}$$

$F\left[\ddot{u}_g(t)\right]$, $F\left[\ddot{u}_0(t)\right]$ ve $F\left[\ddot{\theta}_0(t)\right]$ terimleri de benzer şekilde ifade edildikten sonra denklem **(4.12)** frekans tanım alanında

$$\left(-m\omega^2+i\omega c+k\right)\tilde{u}(\omega)=m\omega^2\tilde{u}_g(\omega)+m\omega^2\tilde{u}_0(\omega)+m\omega^2h\tilde{\theta}_0(\omega) \qquad \textbf{(4.19)}$$

şeklinde yazılabilir.

Farklı bir ifadeyle, özel bir frekans ω'a sahip bir hareket zamanın fonksiyonu şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(t) = \tilde{u}(\omega)e^{i\omega t} . \quad \textbf{(4.20)}$$

$u(t)$'nin zamana göre türevleri

$$\dot{u}(t) = i\omega\tilde{u}(\omega)e^{i\omega t} , \quad \textbf{(4.21)}$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2\tilde{u}(\omega)e^{i\omega t} \quad \textbf{(4.22)}$$

şeklindedir. Benzer şekilde diğer parametreler de

$$u_0(t) = \tilde{u}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{u}_0(t) = i\omega\tilde{u}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \ddot{u}_0(t) = -\omega^2\tilde{u}_0(\omega)e^{i\omega t} ; \quad \textbf{(4.23)}$$

$$u_g(t) = \tilde{u}_g(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{u}_g(t) = i\omega\tilde{u}_g(\omega)e^{i\omega t}, \quad \ddot{u}_g(t) = -\omega^2\tilde{u}_g(\omega)e^{i\omega t} ; \quad \textbf{(4.24)}$$

$$\theta_0(t) = \tilde{\theta}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{\theta}_0(t) = i\omega\tilde{\theta}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \ddot{\theta}_0(t) = -\omega^2\tilde{\theta}_0(\omega)e^{i\omega t} ; \quad \textbf{(4.25)}$$

$$P_0(t) = \tilde{P}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{P}_0(t) = i\omega\tilde{P}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \ddot{P}_0(t) = -\omega^2\tilde{P}_0(\omega)e^{i\omega t} ; \quad \textbf{(4.26)}$$

$$M_0(t) = \tilde{M}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{M}_0(t) = i\omega\tilde{M}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad \ddot{M}_0(t) = -\omega^2\tilde{M}_0(\omega)e^{i\omega t} \quad \textbf{(4.27)}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(4.12)** - **(4.14)**, **(4.20)** - **(4.27)** eşitlikleri kullanılarak frekans tanım alanında

$$\left(-\omega^2 m + i\omega c + k\right)\tilde{u} = m\omega^2\tilde{u}_g + m\omega^2\tilde{u}_0 + m\omega^2 h\tilde{\theta}_0 , \quad \textbf{(4.28)}$$

$$-m\omega^2\tilde{u} + \left(k_{yy} - m\omega^2 - m_0\omega^2\right)\tilde{u}_0 - m\omega^2 h\tilde{\theta}_0 = \left(m\omega^2 + m_0\omega^2\right)\tilde{u}_g , \quad \textbf{(4.29)}$$

$$-mh\omega^2\tilde{u} - mh\omega^2\tilde{u}_0 + \left(k_{\theta\theta} - mh^2\omega^2 - \omega^2 I_0\right)\tilde{\theta}_0 = mh\omega^2\tilde{u}_g \quad \textbf{(4.30)}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(4.28)** - **(4.30)** özel bir frekans değeri için aynı anda çözülerek $\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ bilinmeyenleri elde edilebilir.

Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\tilde{H}(\omega)=\frac{1}{-\omega^2 m+i\omega c+k}. \tag{4.31}$$

$\tilde{H}(\omega)$ transfer fonksiyonu kullanılarak denklem **(4.28)**'den $\tilde{u}$

$$\tilde{u}=\tilde{H}(\omega)\left(m\omega^2\tilde{u}_0+m\omega^2 h\tilde{\theta}_0+m\omega^2\tilde{u}_g\right) \tag{4.32}$$

olarak ifade edilebilir. $\tilde{u}$ eşitliği denklem **(4.29)** ve **(4.30)**'da yerine yazılarak $m_T=m+m_0$ olmak üzere denklemler yeniden aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}\left(k_{yy}-m_T\omega^2-m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_0-\left(m^2\omega^4 h\tilde{H}(\omega)+m\omega^2 h\right)\tilde{\theta}_0\\ =\left(m_T\omega^2+m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g,\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\left(-m^2 h\omega^4\tilde{H}(\omega)-mh\omega^2\right)\tilde{u}_0+\left(k_{\theta\theta}-mh^2\omega^2-\omega^2 I_0-m^2h^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{\theta}_0\\ =\left(mh\omega^2+m^2h\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Denklem **(4.33)** ve **(4.34)** matris şeklinde yazılırsa

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{\theta}_0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}B_1\\ B_2\end{Bmatrix}\tilde{u}_g \tag{4.35}$$

olur. Bu denklemde

$A_{11}=k_{yy}-m_T\omega^2-m^2\omega^4\tilde{H}(\omega),$

$A_{12}=m^2\omega^4 h\tilde{H}(\omega)+m\omega^2 h,$

$A_{21}=-m^2 h\omega^4\tilde{H}(\omega)-mh\omega^2,$

$A_{22}=k_{\theta\theta}-mh^2\omega^2-\omega^2 I_0-m^2h^2\omega^4\tilde{H}(\omega),$

$B_1=\left(m_T\omega^2+m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right),$

$B_2=\left(mh\omega^2+m^2h\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)$'dir.

Denklem **(4.35)**'ten $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$'nın çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\tilde{u}_0 = \left(\frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \right) \tilde{u}_g = T_V(\omega) \tilde{u}_g ,$$

$$T_V(\omega) = \frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} , \qquad \textbf{(4.36)}$$

$$\tilde{\theta}_0 = \left(\frac{B_2 A_{11} - A_{21} B_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \right) \tilde{u}_g = T_M(\omega) \tilde{u}_g ,$$

$$T_M(\omega) = \frac{B_2 A_{11} - A_{21} B_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} . \qquad \textbf{(4.37)}$$

Denklem **(4.36)** ve **(4.37)** ile tanımlanan transfer fonksiyonları kullanılarak denklem **(4.32)**'den üstyapı kütlesinin davranışı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\tilde{u} = \tilde{H}(\omega) \left[m\omega^2 T_V(\omega) + m\omega^2 h T_M(\omega) + m\omega^2 \right] \tilde{u}_g = \tilde{H}(\omega) S(\omega) \tilde{u}_g . \qquad \textbf{(4.38)}$$

Buradaki $S(\omega)$

$$S(\omega) = m\omega^2 T_V(\omega) + m\omega^2 h T_M(\omega) + m\omega^2 \qquad \textbf{(4.39)}$$

ile tanımlanan transfer fonksiyonudur.

$\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü ile zaman tanım alanındaki değerleri elde edilir.

Bu büyüklüklerin zaman tanım alanındaki hızı ve ivmesinin elde edilmesi için sayısal türev yöntemleri kullanılabilir. Bu yöntemlerden biri olan sonlu farklar yöntemi [119] verilen fonksiyon $u(t)$'in t etrafında yazılan Taylor serisini kullanır, başka bir deyişle

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \; \dot{u}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} u^{(3)}(t) + \frac{\Delta t^4}{24} u^{(4)}(t) + \cdots \qquad \textbf{(4.40)}$$

$$u(t + 2\Delta t) = u(t) + 2\Delta t \; \dot{u}(t) + 2\Delta t^2 \; \ddot{u}(t) + \frac{4\Delta t^3}{3} u^{(3)}(t) + \frac{2\Delta t^4}{3} u^{(4)}(t) + \cdots \qquad \textbf{(4.41)}$$

Gerekli matematiksel işlemden sonra

$$u(t+2\Delta t)-4u(t+\Delta t)=-3u(t)-2\Delta t\ \dot{u}(t)+\frac{2\Delta t^2}{3}u^{(3)}(t)+\cdots \qquad \textbf{(4.42)}$$

eşitliği elde edilebilir. Dolayısıyla

$$\dot{u}(t)=\frac{-u(t+2\Delta t)+4u(t+\Delta t)-3u(t)}{2\Delta t}+\frac{\Delta t^2}{3}u^{(3)}(t)+\cdots \qquad \textbf{(4.43)}$$

olarak veya yüksek dereceden terimler ihmal edilerek

$$\dot{u}(t)=\frac{-u(t+2\Delta t)+4u(t+\Delta t)-3u(t)}{2\Delta t}+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right) \qquad \textbf{(4.44)}$$

şeklinde elde edilebilir. Benzer şekilde $\ddot{u}(t)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\ddot{u}(t)=\frac{-u(t+3\Delta t)+4u(t+2\Delta t)-5u(t+\Delta t)+2u(t)}{\Delta t^2}+\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right). \qquad \textbf{(4.45)}$$

Türevin elde edilmesinde ileriye doğru terimler kullanıldığı için bu yönteme ileriye doğru sonlu farklar yöntemi denir. Görüldüğü gibi bu yöntemde türevinin alınması gereken noktanın iki adım ilerisindeki değerlerin bilinmesi gerekir.

Bu tezde yapılan sayısal örneklerde fonksiyonun son iki noktasının türevi bir önceki noktaya eşit kabul edilmiştir.

Sayısal örnek 4.1:

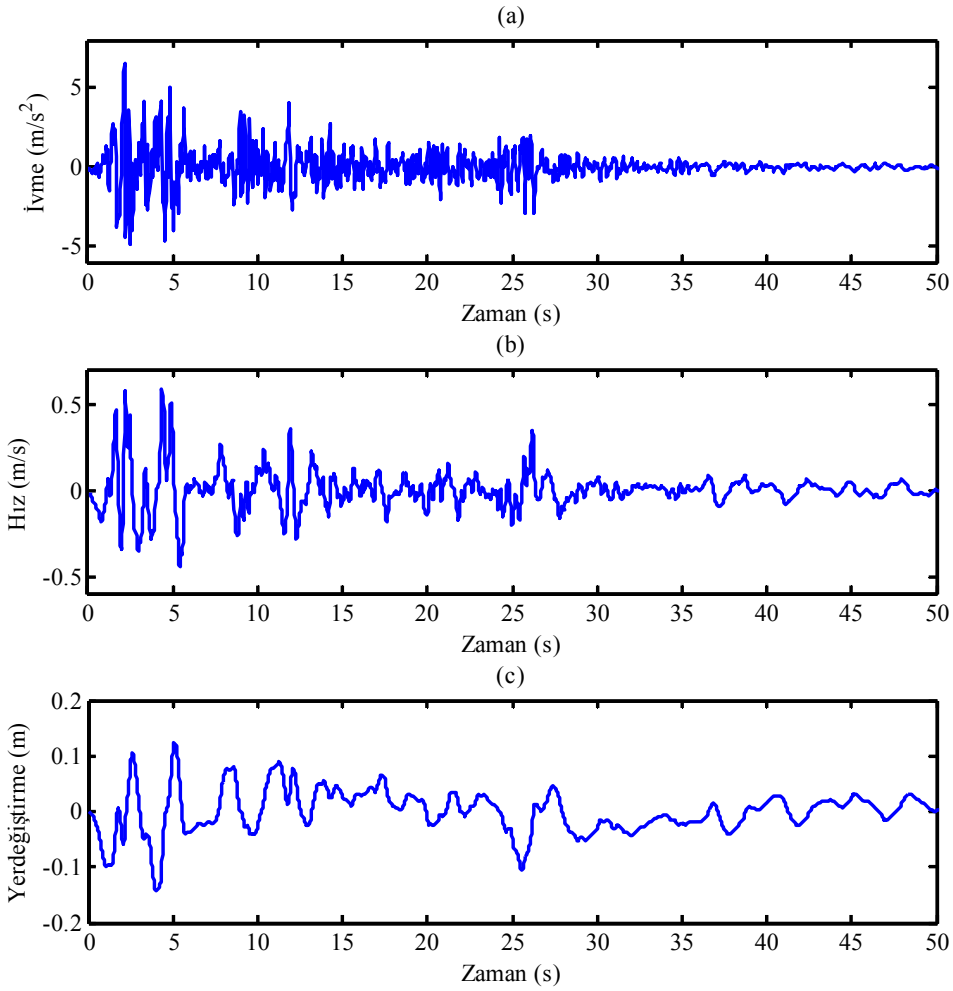
Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 4.6'da verilen El-Centro 1940 depremi kullanılmıştır. Şekil 4.5'te verilen tek serbestlik dereceli sistemde $m=175\ \text{kNs}^2/\text{m}$, $\zeta=0.05$, $T_n=0.2$ s, 0.5 s, 1.0 s, 3.0 s, 5.0 s,

$\omega=2\pi/T_n$,

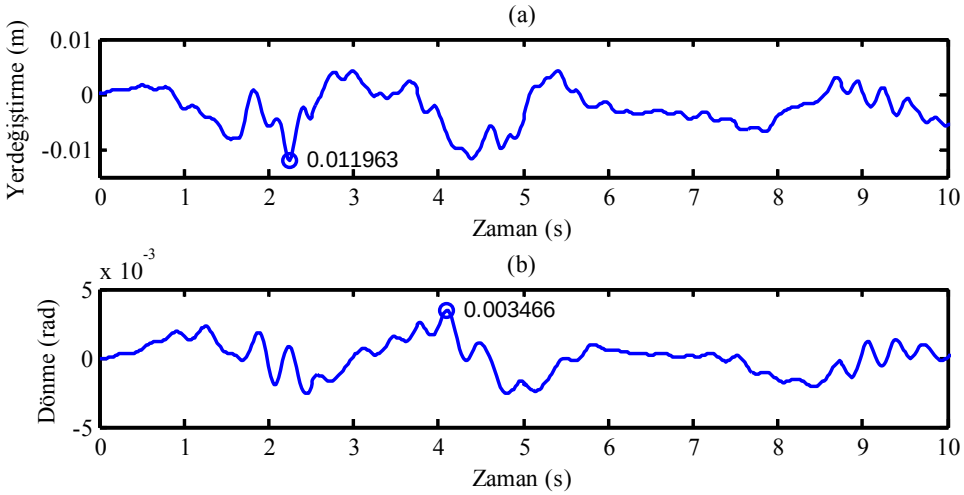
$c=2\zeta\omega_n m$,

$k=m\omega_n^2$.

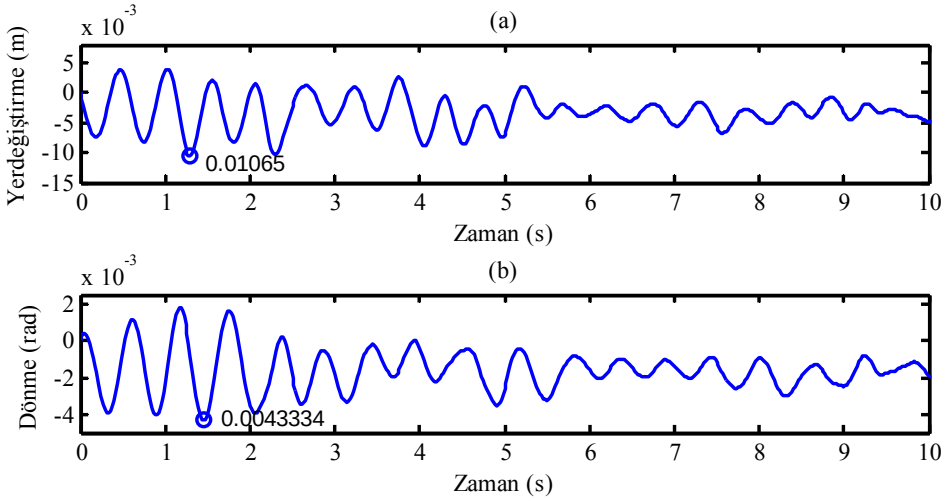
Kat yüksekliği $h=3$ m, temel kütlesi $m_0=0$, kabul edilen dairesel temelin yarıçapı $r=3$ m, zeminin kayma modülü $G=10000\ \text{kN/m}^2$ (orta sertlikte kil), Poisson oranı $\nu=0.33$ ve kütlesel yoğunluğu $\rho=2\ \text{kNs}^2/\text{m}^4$.



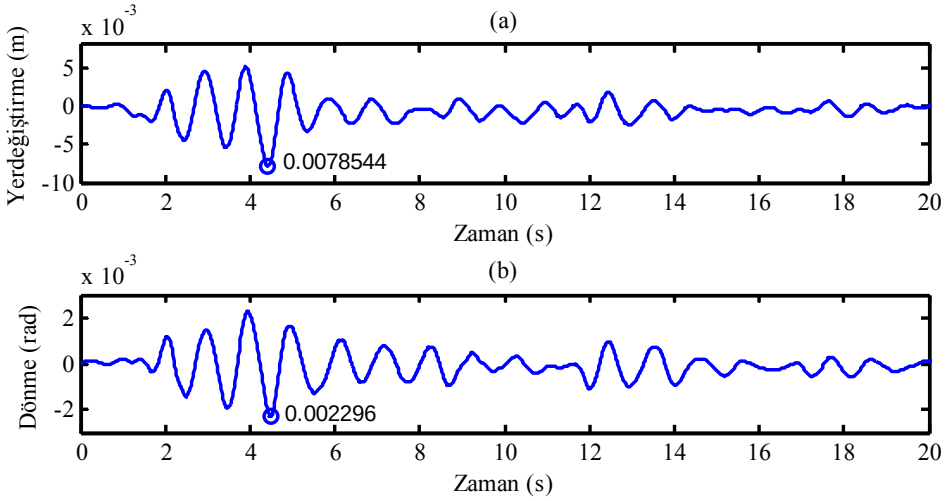
Şekil 4.6 : 1940 El-Centro depremi (a) ivme, (b) hız ve (c) yerdeğiştirme zaman geçmişi.



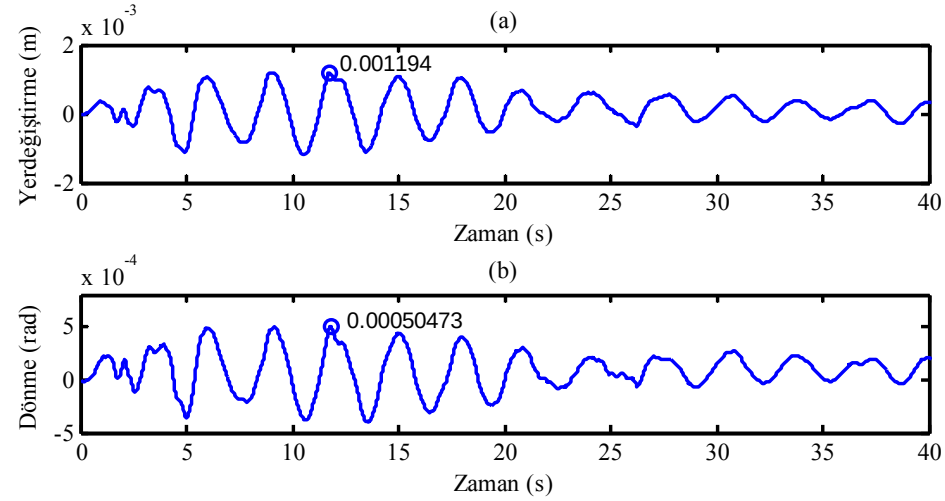
Şekil 4.7 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 0.2 s).



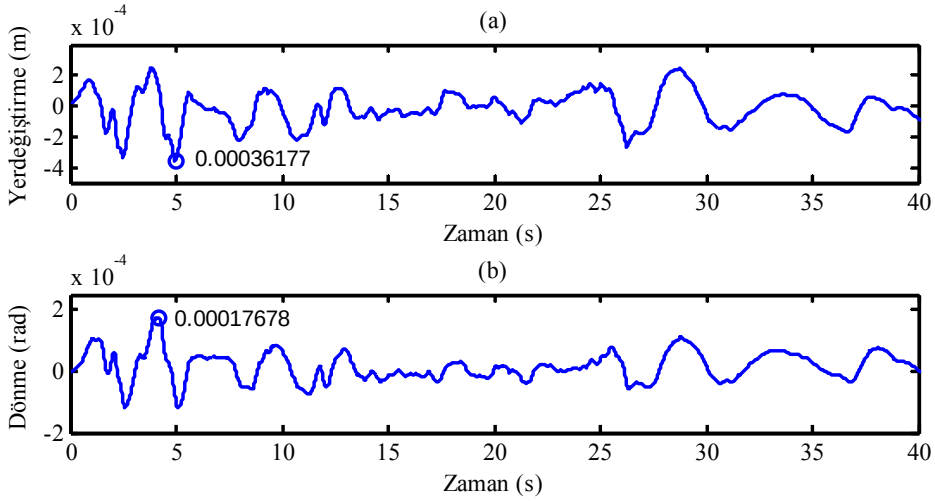
Şekil 4.8 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 0.5 s).



Şekil 4.9 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 1.0 s).



Şekil 4.10 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 3.0 s).



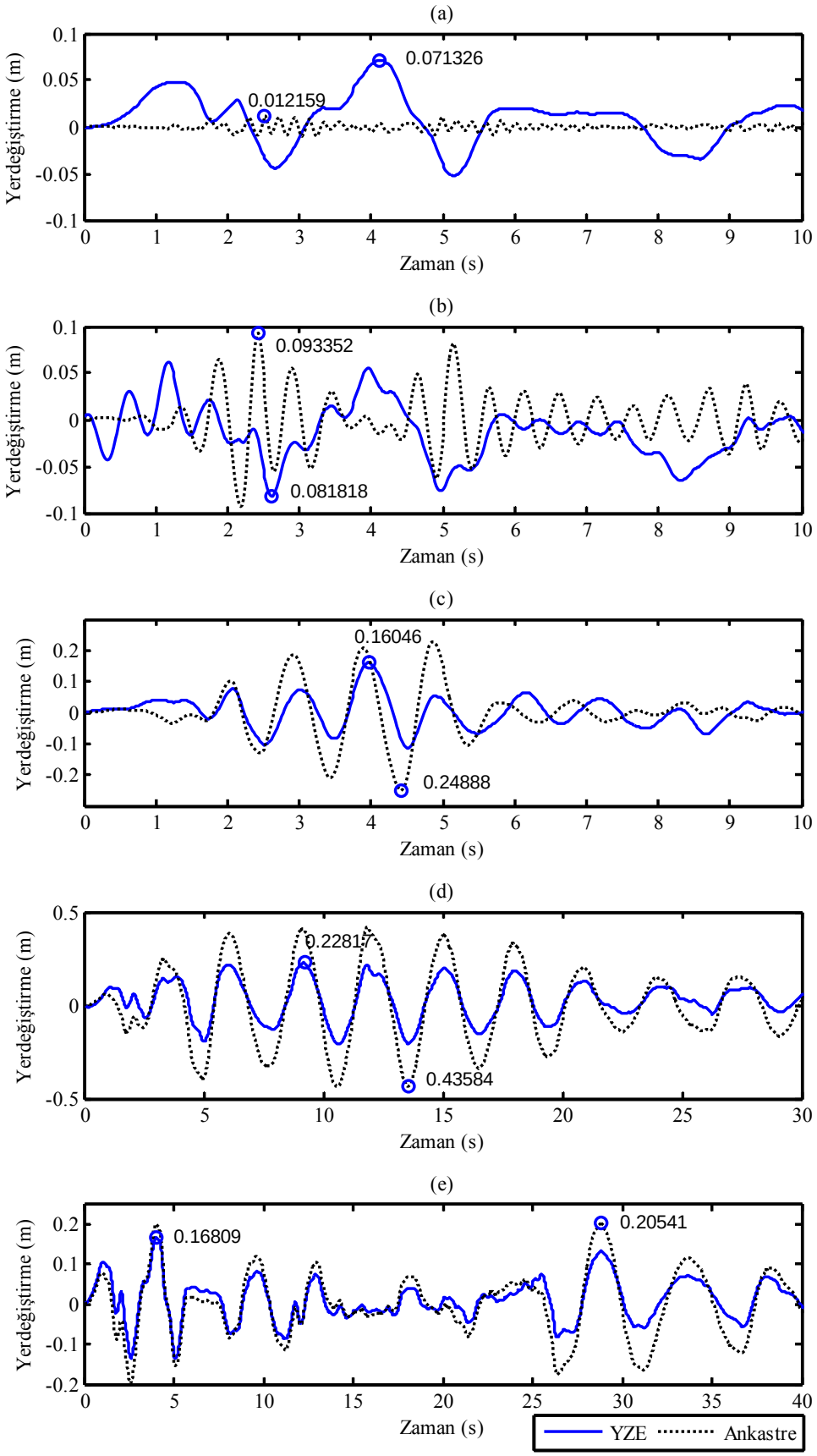
Şekil 4.11 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi (T_n = 5.0 s).

Yapı-zemin etkileşimi analizi yapılan tek serbestlik dereceli sistemin temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi Şekil 4.7 – 4.11'de verilmiştir. Farklı periyotlar için hesaplanan temel dönmeleri ve yanal yerdeğiştirmelerin maksimum değerleri Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Hesap sonuçlarından görüldüğü gibi T_n = 0.2 s olduğu durumda en büyük temel dönmesi ve yanal yerdeğiştirmesi; T_n = 5.0 s olduğu durumda ise en küçük temel dönmesi ve yanal yerdeğiştirmesi elde edilmiştir. Başka bir deyişle, görece rijit yapılarda yapı-zemin etkileşiminden dolayı daha fazla temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi meydana gelmektedir. Yapı yumuşadıkça, temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi daha küçük değerleri alarak ankastre mesnetli sisteme benzer şekilde davranış sergilemektedir.

Üstyapı kütlesinin yanal yerdeğiştirmesi ankastre mesnede sahip aynı özellikteki sistemin yanal yerdeğiştirmesi ile karşılaştırılarak Şekil 4.12'de verilmiştir. Farklı periyotlar için hesaplanan üstyapı kütlesi yanal yerdeğiştirmelerin maksimum değerleri Çizelge 4.3'te verilmiştir. Hesap sonuçlarından görüldüğü gibi görece rijit olan sistemde yapı-zemin etkileşimi üstyapı yerdeğiştirmesini büyütmektedir. Yapı yumuşadıkça üstyapı, ankastre mesnetli sistemin davranışına benzer davranış sergilemektedir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.



Şekil 4.12 : Üstyapının yanal yerdeğiştirmesi, (a) T_n = 0.2 s, (b) T_n = 0.5 s, (c) T_n = 1.0 s, (d) T_n = 3.0 s, (e) T_n = 5.0 s.

Çizelge 4.2 : Maksimum temel dönmeleri ve yanal yerdeğiştirmeleri.

T_n (s)	Dönme (rad)	Yanal yerdeğiştirme (m)
0.2	0.00347	0.01196
0.5	0.00433	0.01065
1.0	0.00229	0.00785
3.0	0.00051	0.00119
5.0	0.00018	0.00036

Çizelge 4.3 : Üstyapı kütlesi maksimum yanal yerdeğiştirmeleri.

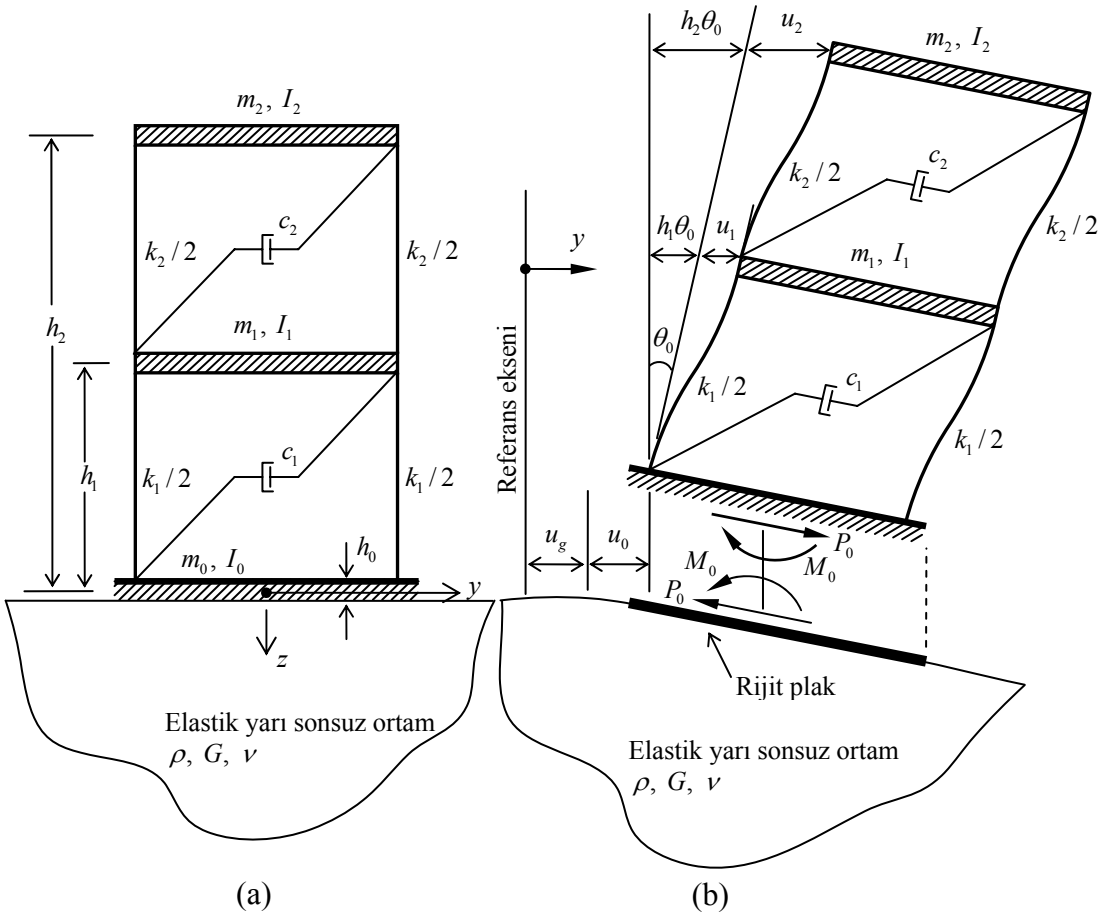
T_n (s)	YZE (m)	Ankastre (m)	YZE/Ankastre
0.2	0.07132	0.01216	5.87
0.5	0.08181	0.09335	0.88
1.0	0.16046	0.24888	0.64
3.0	0.22817	0.43584	0.52
5.0	0.16809	0.20541	0.82

4.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Altsistem Yöntemiyle Yapı-Zemin Etkileşimi Hesabı

Tek serbestlik dereceli sistemin yapı-zemin etkileşimi hesabında izlenen yöntem çok serbestlik dereceli sistemler için genişletilebilir. Şekil 4.13a'da rijit temel plağına sahip iki serbestlik dereceli bir sistem elastik yarı sonsuz ortama oturmaktadır ve sistem iki altsisteme ayrılmaktadır. Temel plağının kütlesi m_0 ve x ekseni etrafındaki kütlesel atalet momenti I_0'dır. Yarı sonsuz ortam yüzeyindeki yer ivmesi $\ddot{u}_g$ yapı temelini öteleme ve dönmeye zorlayarak Şekil 4.13b'de gösterildiği gibi etkileşim kuvvetlerini meydana getirir. P_0, y ekseni yönündeki yanal etkileşim kuvvetini, M_0, x ekseni etrafındaki etkileşim momentini, u yapı kütlesinin y ekseni yönündeki yerdeğiştirmesini, u_0 temel plağının yerdeğiştirmesini, u_g zeminin yerdeğiştirmesini, θ_0 ise temel plağının x ekseni etrafındaki dönmesini gösterir. k_i, c_i, m_i, I_i sırasıyla i. serbestlik derecesinin rijitliği, sönümü, kütlesi ve kütlesel atalet momentidir. h_i ise i. serbestlik derecesinin temelden itibaren yüksekliği ve h_0 temel kalınlığıdır. Elastik yarı sonsuz ortamın özelliklerini tanımlayan parametreler ise kütlesel yoğunluk ρ, kayma modülü G ve Poisson oranı ν'dür.

Çok serbestlik dereceli sistemlerin yapı-zemin etkileşimi hesabı tek serbestlik dereceli sistemlerde olduğu gibi hareket denge denklemlerinin doğrudan çözümü şeklinde yapılabilir. Üstyapı ve zemin olmak üzere ikiye ayrılan altsistemlere ait hareket denge denklemleri ayrı ayrı yazıldıktan sonra, etkileşim yüzeyindeki

geometrik uygunluk ve denge koşulları kullanılarak yazılan denklem takımından temel dönmesi ve yanal yerdeğiştirmesi önce frekans tanım alanında, daha sonra zaman tanım alanında elde edilebilir.



Şekil 4.13 : Yarı sonsuz ortama oturan çok serbestlik dereceli sistem.

Dinamik hareket denklemlerinin doğrudan çözümü yöntemine ilave olarak daha az işlem hacmiyle hesap yapmak için efektif modal analiz yöntemleri geliştirilmiştir [91]. Ancak standart modal analiz yöntemi zeminle etkileşen sistemlere gerçek anlamda uygulanamaz. Çünkü ankastre mesnetli bir sistem orantılı sönüme sahip olsa bile yapı-zemin etkileşimi hesaba katıldığı zaman klasik normal mod şekilleriyle titreşim sergilemez, buna bağlı olarak dinamik hareket denklemleri ayrıklaştırılamaz. Yapı-zemin etkileşimi analizinde kullanılmak üzere geliştirilen modal hesap yöntemleri temel empedanslarının sabit olduğu veya sistemin, sönümlü titreşim modunun sönümsüz titreşim moduna eşit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi hesabında modal analiz yöntemleri kullanılarak yaklaşık sonuçlar elde edilebilir, ayrıca sonuçların gerçek davranışa daha yakın olması için yeteri sayıda mod şekli hesaba katılmalıdır.

Şekil 4.13'ten anlaşılacağı gibi temel ortamının şekil değiştirebilir özelliğinden dolayı yapı sistemi ek olarak u_0 ve θ_0 olmak üzere iki serbestlik derecesine daha sahip olur. Böylece n üstyapının serbestlik derecesi sayısı olmak üzere tüm sistem $n+2$ yerdeğiştirme bileşeni ile tanımlanabilir. Kütlelerin katlar hizasında toplandığı, kolonların eksenel olarak şekil değiştirmediği varsayımıyla oluşturulan bir kayma çerçevesi için üstyapı kütlelerinin dinamik dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+\mathbf{M}\mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=0\,, \qquad \textbf{(4.46)}$$

Alt sistemin dinamik dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]&\\ +m_0\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+k_{yy}u_0(t)=0,&\end{aligned} \qquad \textbf{(4.47)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\{h_i^2\}\ddot{\theta}_0(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+I_0\ddot{\theta}_0(t)&\\ +k_{\theta\theta}\theta_0(t)=0.&\end{aligned} \qquad \textbf{(4.48)}$$

Denklem **(4.46) - (4.48)**'deki terimler *n* serbestlik dereceli bir sistem için

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}m_1&0&0&0\\0&m_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&m_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_1+c_2&-c_2&0&0\\-c_2&c_2+c_3&-c_3&0\\0&-c_3&\ddots&-c_n\\0&0&-c_n&c_n\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2&0&0\\-k_2&k_2+k_3&-k_3&0\\0&-k_3&\ddots&-k_n\\0&0&-k_n&k_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{Bmatrix},\quad \{\mathbf{I}\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{Bmatrix}\quad \mathbf{h}=\begin{Bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{Bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Daha önce açıklandığı gibi empedans katsayıları elastik yarı sonsuz ortamın özelliklerine ve titreşim hareketinin frekanslarına bağlıdır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi analizinin frekans tanım alanında yapılması daha uygun olmaktadır. Frekans alanı ile zaman alanı arasındaki karşılıklı geçiş Fourier dönüşüm çifti yardımıyla gerçekleştirilebilir.

Denklem **(4.46)** - **(4.48)**, $m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i + m_0$ ve $m_0 = 0$ olmak üzere denklem **(4.20)** - **(4.27)** ile verilen Fourier dönüşüm bağıntıları kullanılarak frekans tanım alanında aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_0 - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{\theta}_0 = \omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_g\,, \tag{4.49}$$

$$-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}} + \left(k_{yy} - \omega^2 m_T\right)\tilde{u}_0 - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{\theta}_0 = \omega^2 m_T\tilde{u}_g\,, \tag{4.50}$$

$$-\omega^2\mathbf{h}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{u}_0 + \left(k_{\theta\theta} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_0 = \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{u}_g\,. \tag{4.51}$$

Sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\omega) = \left(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)^{-1}. \tag{4.52}$$

$$\Gamma = \mathbf{M}\{\mathbf{I}\}, \quad \Upsilon = \mathbf{M}\mathbf{h} \tag{4.53}$$

tanımları ile $\tilde{\mathbf{H}}(\omega)$ transfer fonksiyonu kullanılarak denklem **(4.49)**'dan $\tilde{\mathbf{u}}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \omega^2\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\left(\Gamma\tilde{u}_g + \Gamma\tilde{u}_0 + \Upsilon\tilde{\theta}_0\right). \tag{4.54}$$

Denklem **(4.54)**, **(4.50)** ve **(4.51)**'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left[\left(k_{yy} - \omega^2 m_T\right) - \omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right]\tilde{u}_0 + \left(-\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon\right)\tilde{\theta}_0 \\ = \left(\omega^2 m_T + \omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g,\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}\left(-\omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma - \omega^2\Gamma^T\mathbf{h}\right)\tilde{u}_0 + \left[\left(k_{\theta\theta} - \omega^2\Gamma^T\left\{h_i^2\right\}\right) - \omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon\right]\tilde{\theta}_0 \\ = \left(\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon + \omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g\end{aligned} \tag{4.56}$$

denklemleri elde edilir. Denklem **(4.55)** ve **(4.56)** matris şeklinde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{\theta}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}\tilde{u}_g \tag{4.57}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde

$$A_{11} = \left(k_{yy} - \omega^2 m_T\right) - \omega^4 \Gamma^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma ,$$

$$A_{12} = -\omega^4 \Gamma^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon - \omega^2 \left\{\mathbf{I}\right\}^T \Upsilon ,$$

$$A_{21} = -\omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma - \omega^2 \Gamma^T \mathbf{h} ,$$

$$A_{22} = \left(k_{\theta\theta} - \omega^2 \Gamma^T \left\{h_i^2\right\}\right) - \omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon ,$$

$$B_1 = \left(\omega^2 m_T + \omega^4 \Gamma^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right),$$

$$B_2 = \left(\omega^2 \left\{\mathbf{I}\right\}^T \Upsilon + \omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)$$'dir.

Denklem **(4.57)**'den $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$'nın çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\tilde{u}_0 = \left(\frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}\right)\tilde{u}_g = T_V(\omega)\tilde{u}_g, \quad T_V(\omega) = \frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}, \qquad \textbf{(4.58)}$$

$$\tilde{\theta}_0 = \left(\frac{B_2 A_{11} - A_{21} B_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}\right)\tilde{u}_g = T_M(\omega)\tilde{u}_g, \quad T_M(\omega) = \frac{B_2 A_{11} - A_{21} B_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}. \qquad \textbf{(4.59)}$$

Denklem **(4.58)** ve **(4.59)** ile tanımlanan transfer fonksiyonları kullanılarak denklem **(4.54)**'ten üstyapının yanıtı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\omega^2 \left[\Gamma + \Gamma T_V(\omega) + \Upsilon T_M(\omega)\right]\tilde{u}_g = \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{S}(\omega)\tilde{u}_g . \qquad \textbf{(4.60)}$$

Buradaki $\mathbf{S}(\omega)$

$$\mathbf{S}(\omega) = \omega^2 \left[\Gamma + \Gamma T_V(\omega) + \Upsilon T_M(\omega)\right] \qquad \textbf{(4.61)}$$

ile tanımlanan transfer fonksiyonudur.

$\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü ile zaman tanım alanındaki değerleri elde edilir. Bu büyüklüklerin zaman tanım alanındaki hızı ve ivmesinin elde edilmesi için sayısal türev yöntemleri kullanılabilir.

Sayısal örnek 4.2:

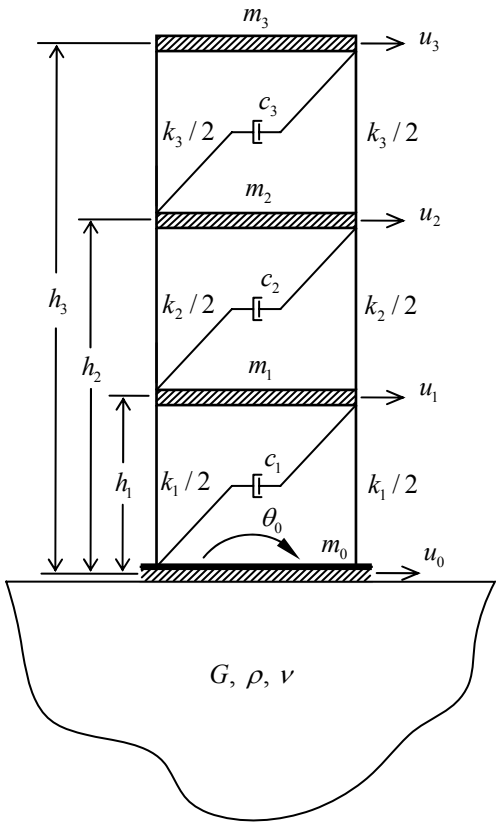
Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 4.6'da verilen El-Centro 1940 depremi kullanılmıştır. Şekil 4.14'te verilen üç serbestlik dereceli sistemde

$m_1 = m_2 = 2m_3 = 175 \text{ kNs}^2/\text{m},$

$k_1 = k_2 = k_3 = 27634.89 \text{ kN/m},$

$c_1 = c_2 = c_3 = 219.912 \text{ kNs/m}.$

Kat yüksekliği $h_1 = 3$ m, $h_2 = 6$ m, $h_3 = 9$ m, temel kütlesi $m_0 = 0$, kabul edilen dairesel temelin yarıçapı $r = 4$ m, zeminin kayma modülü $G = 10000 \text{ kN/m}^2$ (orta sertlikte kil), Poisson oranı $\nu = 0.33$ ve kütlesel yoğunluğu $\rho = 2 \text{ kNs}^2/\text{m}^4$.



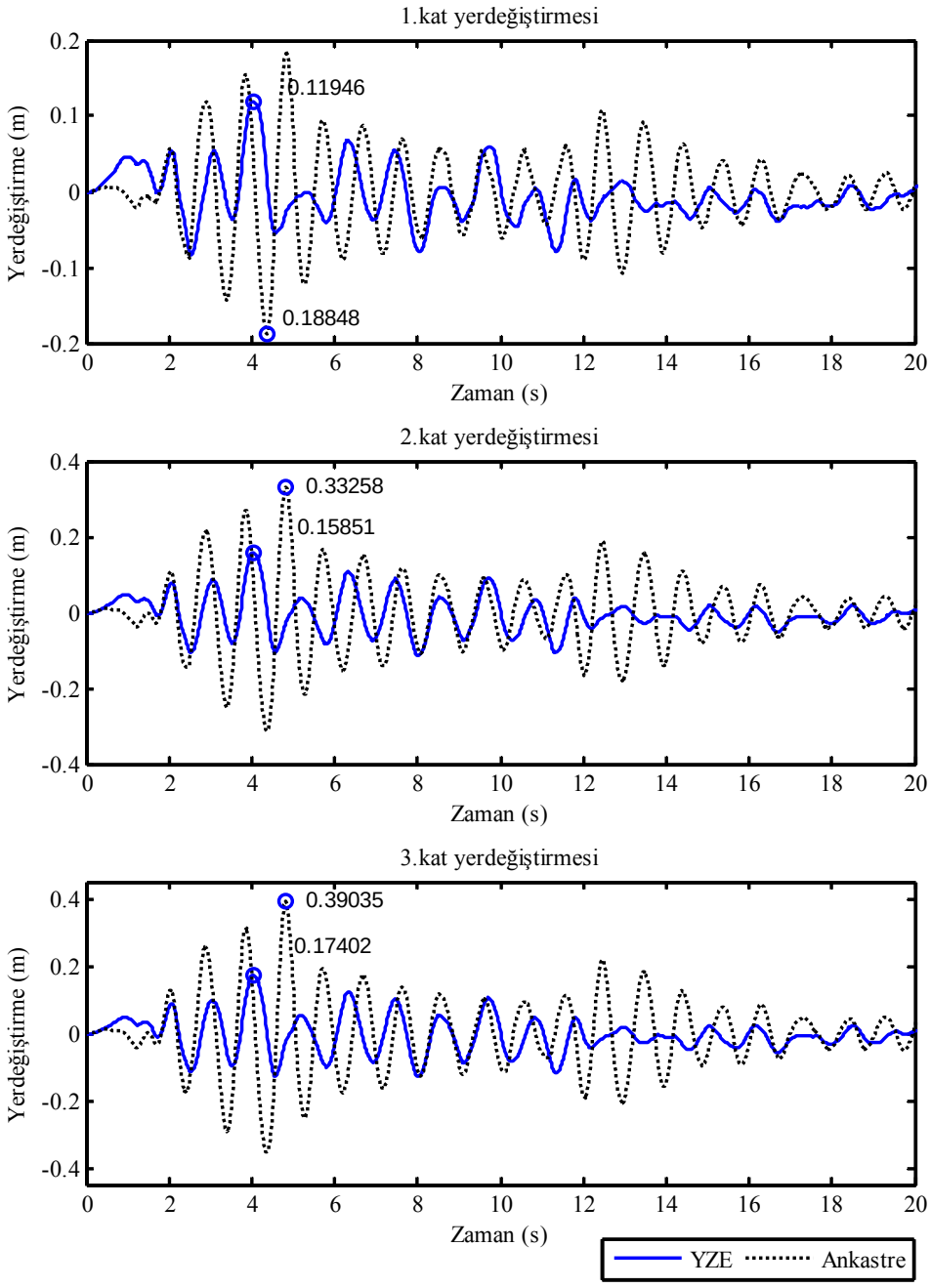
Şekil 4.14 : Yarı sonsuz ortama oturan üç serbestlik dereceli sistem.

Sistemin kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri aşağıdaki gibidir:

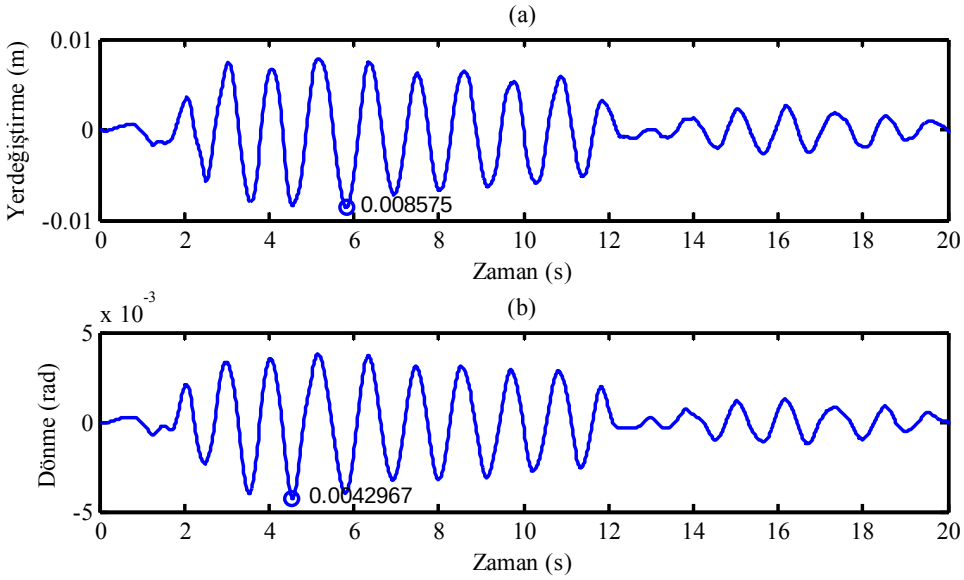
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 \\ 0 & 0 & 87.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 439.824 & -219.912 & 0 \\ -219.912 & 439.824 & -219.912 \\ 0 & -219.912 & 219.912 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 55269.78 & -27634.89 & 0 \\ -27634.89 & 55269.78 & -27634.89 \\ 0 & -27634.89 & 27634.89 \end{bmatrix}.$$



Şekil 4.15 : Üstyapının yanal yerdeğiştirmesi.



Şekil 4.16 : (a) Temelin yanal yerdeğiştirmesi, (b) dönmesi.

Üstyapı kütlesinin yanal yerdeğiştirmeleri ve ankastre mesnede sahip aynı özellikteki sistemin yanal yerdeğiştirmeleri Şekil 4.15'te ve maksimum değerleri Çizelge 4.4'te verilmiştir. Yapı-zemin etkileşimi analizi yapılan üç serbestlik dereceli sistemin temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi Şekil 4.16'da verilmiştir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

Çizelge 4.4 : Üstyapı kütlesi maksimum yanal yerdeğiştirmeleri.

Kat	YZE (m)	Ankastre (m)	YZE/Ankastre
1. kat	0.11946	0.18848	0.63
2. kat	0.15851	0.33258	0.48
3. kat	0.17402	0.39035	0.45

5. ZEMİNLE ETKİLEŞEN YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ

5.1 Giriş

Önceki bölümlerde açıklandığı gibi zeminin empedans katsayıları dış yükün frekansına bağlıdır. Dolayısıyla yapı-zemin etkileşimi analizinde genel olarak kullanılan yöntem önce yapı-zemin sisteminin önce frekans tanım alanında analiz edilmesi, daha sonra elde edilen büyüklüklerin ters Fourier dönüşümü yardımıyla zaman alanına dönüştürülmesi şeklindedir. Klasik optimal kontrol analizi zaman tanım alanında yapılmaktadır. Optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşimi etkilerinin bir arada düşünülmesi problemi çok karmaşık hale getirmektedir. Karşılaşılan önemli zorluklardan biri, zaman ve frekans alanı arasında Fourier dönüşümü uygulanacak büyüklüklerin her adımda değil, tüm zaman aralığında belli olması gerektiğidir. Dolayısıyla literatürde optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşiminin bir arada analizi konusunda çeşitli basitleştirmelere dayanan az sayıda çalışma bulunmaktadır. Optimal kontrol analizinde genel olarak yapı-zemin etkileşimi etkilerinin küçük olduğu, özellikle temelin dönme etkisinin ihmal edilebilir mertebede olduğu varsayılmıştır; yapılan çalışmalar şekildeğiştirmeyen temele sahip yapılar üzerinde yoğunlaşmıştır. Ancak yapılan araştırmalar yapı-zemin etkileşiminin yapıların davranışını önemli ölçüde değiştirdiğini, özellikle yumuşak zemine oturan yapılarda ihmal edilemeyecek mertebede olduğunu göstermiştir.

Bu tezde optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşimi analizinin bir arada yapılması için basitleştirme ve varsayımların en aza indirildiği bir yöntem önerilmiştir.

5.2 Literatür Taraması

Son yıllarda Luco, Smith ve diğer araştırmacılar yapıların optimal kontrolü problemine yapı-zemin etkileşimini dahil ederek çalışmalar yapmışlardır [120-130]. Giriş kısmında bahsedildiği gibi optimal kontrol ile yapı-zemin etkileşimini bir arada düşünmenin esas zorluğu yapı-zemin etkileşimi analizinin frekans tanım alanında,

klasik optimal kontrol probleminin ise zaman tanım alanında ele alınmasıdır. Bu problemin çözümü için, a) Sato ve Toki tarafından geliştirilen bir yöntem, önce kontrolsüz sistem kullanılarak ters Fourier dönüşümü yardımıyla yapı-zemin etkileşimi etkilerinin zaman tanım alanında elde edilmesi, daha sonra bu etkilerin kontrol problemine dahil edilmesi şeklindedir [124]. Bu yöntemde yapı-zemin etkileşimi elde edilirken kontrollü sistemin davranışı esas alınmadığı için kullanılan empedans katsayılarının değeri de doğru değildir. b) Alam ve Baba tarafından kullanılan yöntem, empedans katsayılarını frekanstan bağımsız olarak elde etmek ve kontrol problemine doğrudan dahil etmek şeklindedir [125]. c) Wu ve Smith tarafından geliştirilen yöntemde önce yapı ve zemin frekanslarına bağlı, ankastre mesnede sahip eşdeğer sistem tanımlanmış, bu eşdeğer sistem üzerinde kontrol kuvveti iterasyonla tahmin edilmiştir [126-129]. d) Luco tarafından geliştirilen yöntemde ise kontrol kuvvetlerini kesin olarak tahmin eden, yapı-zemin etkileşimini yaklaşık olarak tahmin eden eşdeğer sistem kullanılmıştır [130].

Bu tezde önerilen yöntemde önce ankastre mesnede sahip sistem kullanılarak optimal kontrol kuvveti hesaplanmakta, sonra da bu kontrol kuvveti ile birinci adımdaki zamana bağlı temel yerdeğiştirme ivmesi ve dönme ivmesi elde edilmektedir. Temele ait bu ivme değerleri ve yer hareketi ivmesi kullanılarak kontrol kuvveti yeniden hesaplanmaktadır. Önerilen bu yöntemde hesap hacmi oldukça fazladır. Ancak günümüzde ortalama donanıma sahip bir kişisel bilgisayar tüm bu analizleri birkaç saniyede yapabilmektedir. Dolayısıyla günümüz bilgisayar teknolojisi ile analizlerde sayısal işlem hacminin fazla olması sorun olmaktan çıkmıştır. Önerilen bu yöntem bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılmıştır.

5.3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler

Şekil 4.4'te verilen deprem etkisindeki bir yapı için yapı-zemin etkileşimi dahil edilerek yazılan dinamik denge denklemi **(4.12),** optimal kontrol kuvveti uygulanmış bir yapı için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t)+\ddot{u}(t)\right]+c\dot{u}(t)+ku(t)-F_c(t)=0\,. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Alt sistemin dinamik dengesi için yazılan denklem **(4.13)** ve **(4.14)** tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t)+\ddot{u}(t)\right]+m_0\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+k_{yy}u_0(t)=0\,, \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$mh\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t)+\ddot{u}(t)\right]+I_0\ddot{\theta}_0(t)+k_{\theta\theta}\theta_0(t)=0. \qquad \textbf{(5.3)}$$

Hareket denklemi **(5.1)**'de verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış bir sistemin yanıtı benzer şekilde Fourier dönüşüm çifti yardımıyla önce frekans tanım alanında, daha sonra zaman tanım alanında elde edilebilir. Hareket denklemi terimlerinin zaman tanım alanından frekans alanına dönüşümünü sağlayan denklem **(4.20)** - **(4.27)**'e ek olarak kontrol kuvveti için

$$F_c(t)=\tilde{F}_c(\omega)e^{i\omega t}\,,\quad \dot{F}_c(t)=i\omega\tilde{F}_c(\omega)e^{i\omega t}\,,\quad \ddot{F}_c(t)=-i\omega^2\tilde{F}_c(\omega)e^{i\omega t} \qquad \textbf{(5.4)}$$

eşitlikleri yazılarak gerekli matematiksel işlemler yapılırsa denklem **(5.1)** - **(5.3)** aşağıdaki şekli alır:

$$\left(-m\omega^2+i\omega c+k\right)\tilde{u}-m\omega^2\tilde{u}_0-m\omega^2h\tilde{\theta}_0=m\omega^2\tilde{u}_g+\tilde{F}_c\,, \qquad \textbf{(5.5)}$$

$$-m\omega^2\tilde{u}+\left(k_{yy}-m\omega^2-m_0\omega^2\right)\tilde{u}_0-m\omega^2h\tilde{\theta}_0=\left(m\omega^2+m_0\omega^2\right)\tilde{u}_g\,, \qquad \textbf{(5.6)}$$

$$-mh\omega^2\tilde{u}-mh\omega^2\tilde{u}_0+\left(k_{\theta\theta}-mh^2\omega^2-\omega^2I_0\right)\tilde{\theta}_0=mh\omega^2\tilde{u}_g. \qquad \textbf{(5.7)}$$

$\tilde{H}(\omega)$ denklem **(4.31)** ile verilen transfer fonksiyonu olmak üzere denklem **(5.5)**'ten $\tilde{u}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{u}=\tilde{H}(\omega)\left(m\omega^2\tilde{u}_0+m\omega^2h\tilde{\theta}_0+m\omega^2\tilde{u}_g+\tilde{F}_c\right). \qquad \textbf{(5.8)}$$

$\tilde{u}$ eşitliği denklem **(5.6)** ve **(5.7)**'de yerine yazılarak $m_T=m+m_0$ olmak üzere denklemler yeniden şu şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned}\left(k_{yy}-m_T\omega^2-m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_0-\left(m^2\omega^4h\tilde{H}(\omega)+m\omega^2h\right)\tilde{\theta}_0\\ =\left(m_T\omega^2+m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g+m\omega^2\tilde{F}_c\tilde{H}(\omega),\end{aligned} \qquad \textbf{(5.9)}$$

$$\begin{aligned}\left(-m^2h\omega^4\tilde{H}(\omega)-mh\omega^2\right)\tilde{u}_0+\left(k_{\theta\theta}-mh^2\omega^2-\omega^2I_0-m^2\omega^4h^2\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{\theta}_0\\ =\left(mh\omega^2+m^2h\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g+mh\omega^2\tilde{F}_c\tilde{H}(\omega).\end{aligned} \qquad \textbf{(5.10)}$$

Denklem **(5.9)** ve **(5.10)** matris şeklinde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{\theta}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(5.11)}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde

$$A_{11} = k_{yy} - m_T\omega^2 - m^2\omega^4\tilde{H}(\omega),$$

$$A_{12} = m^2\omega^4 h\tilde{H}(\omega) + m\omega^2 h,$$

$$A_{21} = -m^2 h\omega^4\tilde{H}(\omega) - mh\omega^2,$$

$$A_{22} = k_{\theta\theta} - mh^2\omega^2 - \omega^2 I_0 - m^2h^2\omega^4\tilde{H}(\omega),$$

$$B_1 = \left(m_T\omega^2 + m^2\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g + m\omega^2\tilde{F}_c\tilde{H}(\omega),$$

$$B_2 = \left(mh\omega^2 + m^2h\omega^4\tilde{H}(\omega)\right)\tilde{u}_g + mh\omega^2\tilde{F}_c\tilde{H}(\omega)$$ 'dir.

Denklem **(5.11)**'deki $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$'nın çözümü sırasıyla

$$\tilde{u}_0 = \frac{B_1A_{22} - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \qquad \textbf{(5.12)}$$

$$\tilde{\theta}_0 = \frac{B_2A_{11} - A_{21}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \qquad \textbf{(5.13)}$$

şeklindedir. $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü ile zaman tanım alanındaki değerleri elde edilir.

Denklem **(5.5)** - **(5.7)**'deki $\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$, $\tilde{\theta}_0$'ın elde edilebilmesi için $\tilde{F}$'nın bilinmesi gerekir. Önceki bölümlerde açıklandığı gibi optimal kontrol kuvveti durum uzayı denklemi kısıtı altında çeşitli şekilde tanımlanan amaç fonksiyonundan elde edilir. Dolayısıyla optimal kontrol kuvveti $\tilde{F}$ denklem **(5.5)** - **(5.7)**'den doğrudan elde edilemez. Bu tezde zeminle etkileşen sistemlerin lineer optimal kontrolü için bir yöntem önerilmiştir.

Önerilen hesap yöntemi: Birinci adımda kontrollü zeminle etkileşen sistemin hareket denklemi **(5.1)**'de kullanılacak kontrol kuvveti, ankastre mesnetli sistemin hareket denklemi **(3.2)**'den elde edilir. Kontrol kuvveti belli olduktan sonra birinci adıma ait zaman tanım alanındaki temel yanal yerdeğiştirme ivmesi $\ddot{u}_0(t)$ ve dönme ivmesi $\ddot{\theta}_0(t)$ Fourier dönüşümü ve denklem **(4.44)**, **(4.45)**'te verilen sayısal yöntemler yardımıyla hesaplanabilir. İkinci adımda $\ddot{u}_0(t)$ ile $\ddot{\theta}_0(t)$ ankastre mesnetli kontrollü sistemin hareket denklemi **(3.2)**'ye dahil edilerek aşağıda verilen, zaman tanım alanında çözümü yapılabilen, kontrollü zeminle etkileşen sisteme eşdeğer yeni bir sistem oluşturulabilir:

$$m\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t)+\ddot{u}(t)\right]+c\dot{u}(t)+ku(t)-F_c(t)=0\,. \qquad \textbf{(5.14)}$$

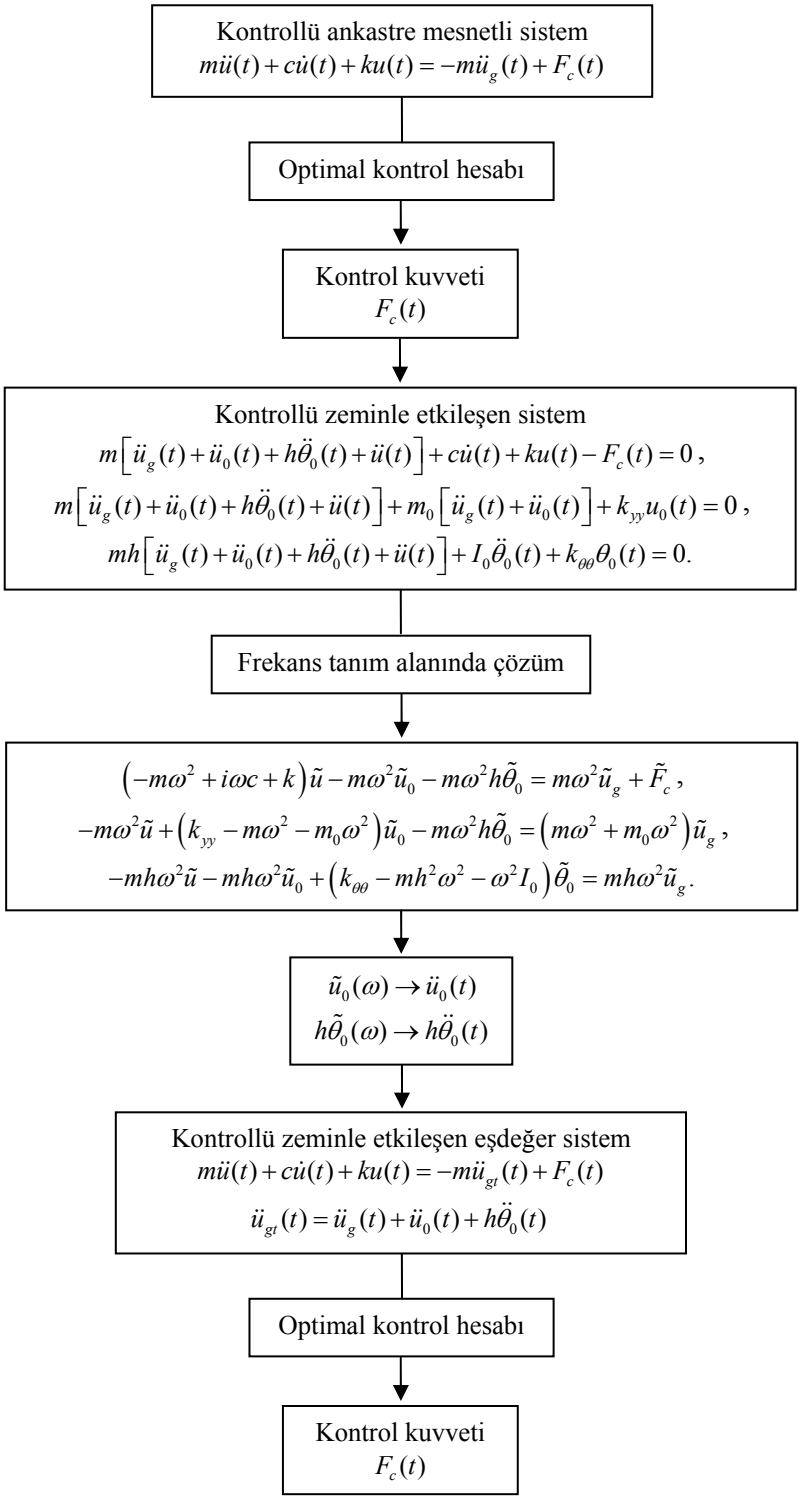
$$\ddot{u}_{gt}(t)=\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)+h\ddot{\theta}_0(t) \qquad \textbf{(5.15)}$$

olmak üzere denklem **(5.14)** tekrar

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_{gt}(t)+F_c(t) \qquad \textbf{(5.16)}$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi denklem **(5.16), (3.2)** ile aynı şekle sahiptir. Dolayısıyla, $F_c(t)$ optimal kontrol kuvvetinin elde edilmesi için 3. Bölüm'de açıklanan optimal kontrol hesap aşamaları benzer şekilde takip edilebilir. Bu şekilde, sisteme uygulanacak optimal kontrol kuvveti hesaplanırken elastik zemine oturan temelin yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi de hesaba dahil edilmiş olur. Önerilen hesap yöntemi Şekil 5.1'de özetlenmiştir.

Aşağıda, deprem etkisinde zeminle dinamik olarak etkileşen sistemlerin optimal kontrolü için önerilen hesap yöntemi kullanılarak sayısal uygulama ve parametrik çalışmalar yapılmış, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.



Şekil 5.1 : Kontrollü, zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sistem için hesap yöntemi.

Sayısal örnek 5.1:

Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 4.6'da verilen El-Centro depremi kullanılmıştır. Şekil 5.2'de verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış tek serbestlik dereceli sistemde

$m = 175 \text{ kNs}^2/\text{m}$, $\zeta = 0.05$,

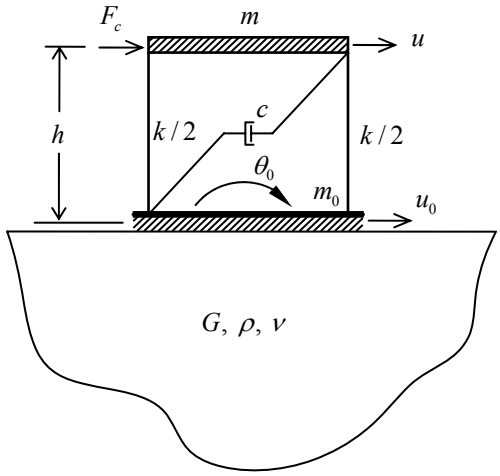
$T_n = 0.2$ s, 0.5 s, 1.0 s, 3.0 s, 5.0 s,

$\omega = 2\pi / T_n$,

$c = 2\zeta\omega_n m$,

$k = m\omega_n^2$.

Kat yüksekliği $h = 3$ m, temel kütlesi $m_0 = 0$, kabul edilen dairesel temelin yarıçapı $r = 3$ m, zeminin kayma modülü $G = 10000 \text{ kN/m}^2$ (orta sertlikte kil), Poisson oranı $\nu = 0.33$ ve kütlesel yoğunluğu $\rho = 2 \text{ kNs}^2/\text{m}^4$.



Şekil 5.2 : Tek serbestlik dereceli kontrollü zeminle etkileşen sistem.

Hesap adımları ($T_n = 0.5$ s):

1) Ankastre mesnetli sistemin optimal kontrolü:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27634.89 & 0 \\ 0 & 175 \end{bmatrix}, \quad R = 0.001, \quad D = 1,$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \dot{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

El-Centro depreminin örneklendiği $\Delta t = 0.02$ s zaman aralığı için

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -157.9137 & -1.2566 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m^{-1}D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00571428 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.968844 & 0.019543 \\ -3.086185 & 0.944285 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.00019729 \\ -0.01954349 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0.000001127399 \\ 0.000111677114 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T\mathbf{P}\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 597011.6824 & 4359.5783 \\ 4359.5783 & 3683.2580 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_f = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} 0.969017 & 0.019096 \\ -3.069043 & 0.899975 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk},$$

$$\mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{ck}(t).$$

2) 1. adımda hesaplanan optimal kontrol kuvveti kullanılarak zeminle etkileşen sistemin temel yanal yerdeğiştirme ve dönme ivmelerinin hesabı:

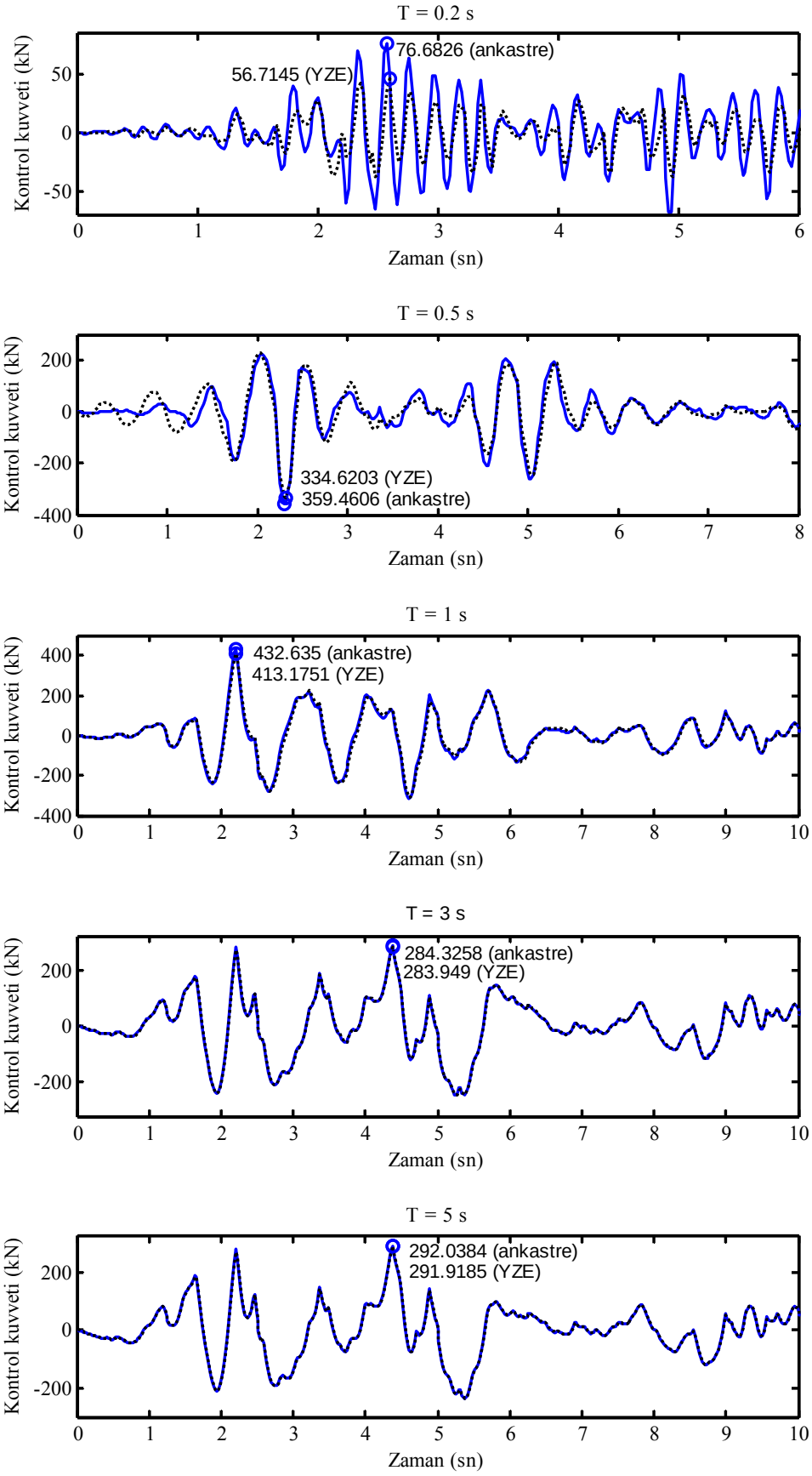
$$m\left[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_0(t) + h\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{u}(t)\right] + c\dot{u}(t) + ku(t) - F_c(t) = 0,$$

$$\left(-m\omega^2 + i\omega c + k\right)\tilde{u} - m\omega^2\tilde{u}_0 - m\omega^2 h\tilde{\theta}_0 = m\omega^2\tilde{u}_g + \tilde{F}_c \quad \Rightarrow \quad \ddot{u}_0(t),\ h\ddot{\theta}_0(t).$$

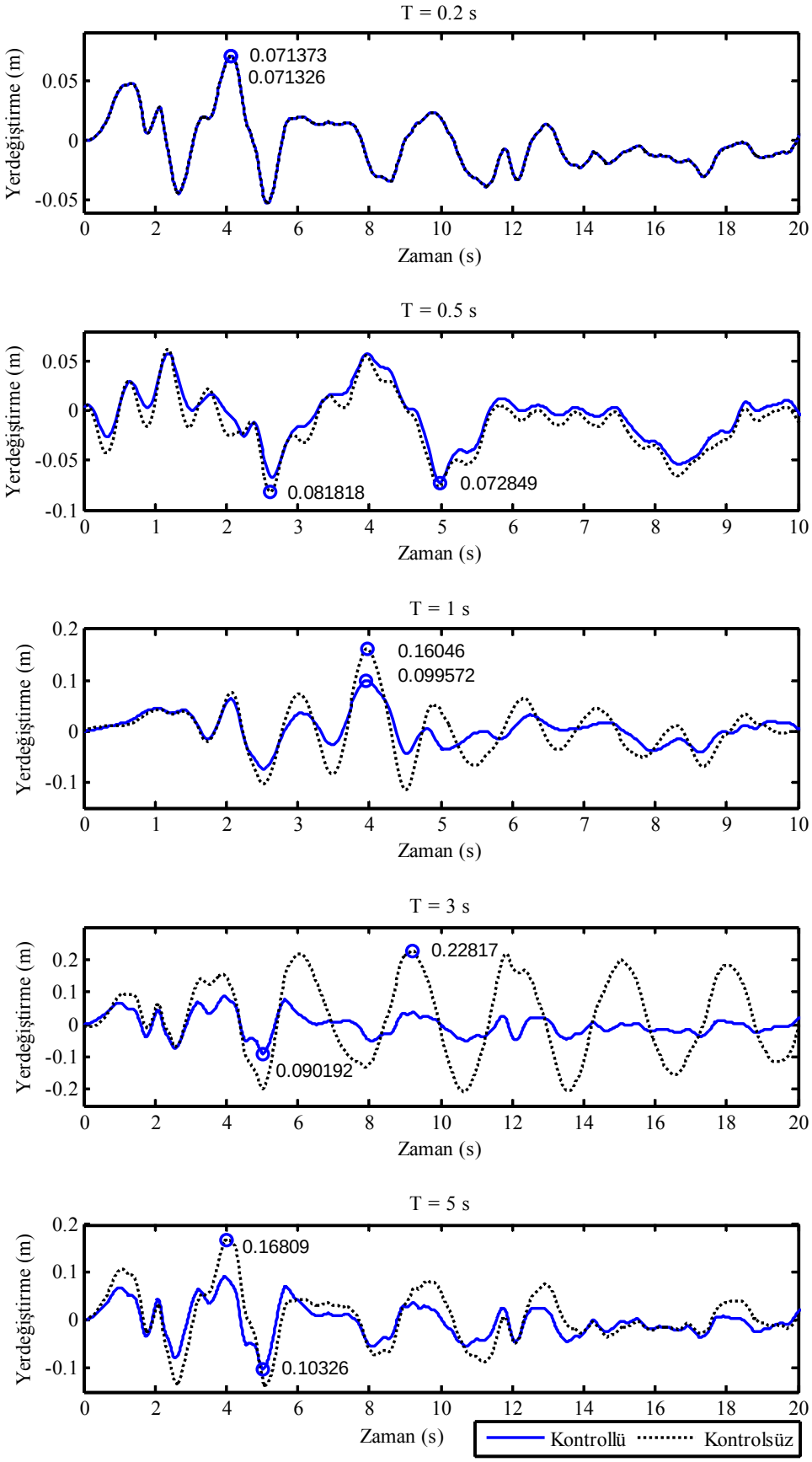
3) 2. adımda hesaplanan $\ddot{u}_0(t),\ h\ddot{\theta}_0(t)$ kullanılarak optimal kontrol kuvvetinin tekrar elde edilmesi:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_{gt}(t) + F_c(t),$$

$$\ddot{u}_{gt}(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}_0(t) + h\ddot{\theta}_0(t).$$



Şekil 5.3 : Zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan kontrol kuvveti.



Şekil 5.4 : Zeminle etkileşen kontrollü kontrolsüz sistemin üstyapı yerdeğiştirmesi.

Çizelge 5.1 : Ankastre ve zeminle etkileşen sisteme uygulanan kontrol kuvveti (kN).

	T_n = 0.2 s	T_n = 0.5 s	T_n = 1.0 s	T_n = 3.0 s	T_n = 5.0 s
Ankastre	76.683	359.461	432.635	284.326	292.038
YZE	56.714	334.714	413.175	283.949	291.918

Çizelge 5.2 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin üstyapı yerdeğiştirmeleri (m).

	T_n = 0.2 s	T_n = 0.5 s	T_n = 1.0 s	T_n = 3.0 s	T_n = 5.0 s
Kontrollü	0.0713	0.0728	0.0996	0.0902	0.1033
Kontrolsüz	0.0714	0.0818	0.1605	0.2282	0.1681

Çizelge 5.3 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin temel yanal yerdeğiştirmeleri (m).

	T_n = 0.2 s	T_n = 0.5 s	T_n = 1.0 s	T_n = 3.0 s	T_n = 5.0 s
Kontrollü	0.01185	0.00779	0.00368	0.00143	0.00117
Kontrolsüz	0.01196	0.01065	0.00785	0.00119	0.00036

Çizelge 5.4 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin temel dönmeleri (rad).

	T_n = 0.2 s	T_n = 0.5 s	T_n = 1.0 s	T_n = 3.0 s	T_n = 5.0 s
Kontrollü	0.00346	0.00294	0.00103	0.00041	0.00041
Kontrolsüz	0.00346	0.00433	0.00229	0.00051	0.00018

Ankastre mesnetli ve zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sisteme uygulanan optimal kontrol kuvveti, üstyapı yerdeğiştirmeleri, temel yanal yerdeğiştirmeleri ve temel dönmelerinin maksimum değerleri Çizelge 5.1 - 5.4'te verilmiştir.

Şekil 5.3'ten görüldüğü gibi görece rijit yapılarda zeminle etkileşen yapılara uygulanan optimal kontrol kuvveti, ankastre mesnetli sistemlere uygulanan optimal kontrol kuvvetinden belli ölçüde farklıdır. Sistemin serbest titreşim periyodu büyüdükçe ankastre mesnetli ve zeminle etkileşen sistem için uygulanan optimal kontrol kuvveti benzer şekil ve değeri almaktadır. Bu sonuç, zeminle etkileşen tek serbestlik dereceli sistem kullanılarak yapılan parametrik çalışmadan elde edilen sonuçla uyum içindedir.

Şekil 5.4'ten görüldüğü gibi zeminle etkileşen görece rijit sistemlere optimal kontrol kuvveti uygulanarak elde edilen kazanç önemli mertebede değildir; sistemin serbest titreşim periyodu büyüdükçe elde edilen kazanç daha belirgin hale gelmektedir. Bu örnekte sistemin serbest titreşim periyodu 5 s olduğunda zeminle etkileşen kontrollü sistemin davranışı ankastre mesnetli kontrollü sistemin davranışına benzemektedir.

Şekil C.1-C.5'ten görüldüğü gibi temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri üstyapı davranışıyla paralellik göstermektedir; başka bir deyişle rijit yapılarda kontrol temel hareketi açısından etkin değildir; yapının periyodu büyüdükçe kontrol kazancı artmaktadır. Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

5.4 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler

Şekil 4.6'da verilen deprem etkisindeki bir yapı için yapı-zemin etkileşimi dahil edilerek yazılan dinamik denge denklemi **(4.46),** optimal kontrol kuvveti uygulanmış bir yapı için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+\mathbf{Mh}\ddot{\theta}_0(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{Ku}(t)-\mathbf{Df}_c(t)=0\,. \qquad \textbf{(5.17)}$$

Alt sistemin dinamik dengesi için yazılan denklem **(4.47)** ve **(4.48)** tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{Mh}\ddot{\theta}_0(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]\\ +m_0\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+k_{yy}u_0(t)=0,\end{aligned} \qquad \textbf{(5.18)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\left\{h_i^2\right\}\ddot{\theta}_0(t)+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{Mh}\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}_0(t)\right]+I_0\ddot{\theta}_0(t)\\ +k_{\theta\theta}\theta_0(t)=0.\end{aligned} \qquad \textbf{(5.19)}$$

Denklem **(5.17) - (5.19)**'daki terimler *n* serbestlik dereceli bir sistem için

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}m_1&0&0&0\\0&m_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&m_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_1+c_2&-c_2&0&0\\-c_2&c_2+c_3&-c_3&0\\0&-c_3&\ddots&-c_n\\0&0&-c_n&c_n\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2&0&0\\-k_2&k_2+k_3&-k_3&0\\0&-k_3&\ddots&-k_n\\0&0&-k_n&k_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_n(t)\end{Bmatrix},\quad \{\mathbf{I}\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{Bmatrix},\quad \mathbf{h}=\begin{Bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{Bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Hareket denklemi **(5.17)**'de verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış bir sistemin yanıtı benzer şekilde Fourier dönüşüm çifti yardımıyla önce frekans tanım alanında, daha sonra zaman tanım alanında elde edilebilir. Denklem **(5.17) - (5.19)**, terimlerinin zaman tanım alanından frekans alanına dönüşümünü sağlayan denklem **(4.20) - (4.27)** ve **(5.4)** yardımıyla, $m_T=\sum_{i=1}^{n}m_i+m_0$ ve $m_0=0$ olmak üzere frekans tanım alanında yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[-\omega^2\mathbf{M}+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right]\tilde{\mathbf{u}}-\omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_0-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{\theta}_0=\omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_g+\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c\,, \tag{5.20}$$

$$-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}+\left(k_{yy}-\omega^2 m_T\right)\tilde{u}_0-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{\theta}_0=\omega^2 m_T\tilde{u}_g\,, \tag{5.21}$$

$$-\omega^2\mathbf{h}^T\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{u}_0+\left(k_{\theta\theta}-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_0=\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{u}_g\,. \tag{5.22}$$

Sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\omega)=\left(-\omega^2\mathbf{M}+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)^{-1}. \tag{5.23}$$

$$\Gamma=\mathbf{M}\{\mathbf{I}\},\quad \Upsilon=\mathbf{M}\mathbf{h} \tag{5.24}$$

tanımları ve $\tilde{\mathbf{H}}(\omega)$ transfer fonksiyonu yardımıyla denklem **(5.20)**'den $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\tilde{\mathbf{u}}=\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\left(\omega^2\Gamma\tilde{u}_g+\omega^2\Gamma\tilde{u}_0+\omega^2\Upsilon\tilde{\theta}_0+\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c\right) \tag{5.25}$$

olarak yazılabilir. Denklem **(5.25)**, **(5.21)** ve **(5.22)**'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left[\left(k_{yy}-\omega^2 m_T\right)-\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right]\tilde{u}_0+\left(-\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon\right)\tilde{\theta}_0\\ =\left(\omega^2 m_T+\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g+\omega^2\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c,\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\left(-\omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma-\omega^2\Gamma^T\mathbf{h}\right)\tilde{u}_0+\left[\left(k_{\theta\theta}-\omega^2\Gamma^T\left\{h_i^2\right\}\right)-\omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon\right]\tilde{\theta}_0\\ =\left(\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon+\omega^4\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g+\omega^2\Upsilon^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c\end{aligned} \tag{5.27}$$

denklemleri elde edilir. Denklem **(5.26)** ve **(5.27)** matris şeklinde

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{\theta}_0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}B_1\\ B_2\end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde

$$A_{11}=\left(k_{yy}-\omega^2 m_T\right)-\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\,,\quad A_{12}=-\omega^4\Gamma^T\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon\,,$$

$$A_{21} = -\omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma - \omega^2 \Gamma^T \mathbf{h}\,, \quad A_{22} = \left(k_{\theta\theta} - \omega^2 \Gamma^T \left\{h_i^2\right\}\right) - \omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Upsilon\,,$$

$$B_1 = \left(\omega^2 m_T + \omega^4 \Gamma^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g + \omega^2 \Gamma^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c\,,$$

$$B_2 = \left(\omega^2 \left\{\mathbf{I}\right\}^T \Upsilon + \omega^4 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\Gamma\right)\tilde{u}_g + \omega^2 \Upsilon^T \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c$$ 'dir.

Denklem **(5.28)**'den $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ 'nın çözümü sırasıyla

$$\tilde{u}_0 = \frac{B_1 A_{22} - A_{12} B_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}\,, \qquad \textbf{(5.29)}$$

$$\tilde{\theta}_0 = \frac{B_2 A_{11} - A_{21} B_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \qquad \textbf{(5.30)}$$

şeklinde elde edilebilir. $\tilde{u}_0$ ve $\tilde{\theta}_0$ elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü ile zaman tanım alanındaki değerleri elde edilir.

Tek serbestlik dereceli zeminle etkileşen sistemlerin optimal kontrolü için önerilen yöntem benzer şekilde çok serbestlik dereceli sistemler için de kullanılabilir. Birinci adımda kontrollü zeminle etkileşen sistemin hareket denklemi **(5.17)**'de kullanılacak kontrol kuvveti, ankastre mesnetli sistemin hareket denklemi **(3.20)**'den elde edilir. Kontrol kuvveti belli olduktan sonra birinci adıma ait zaman tanım alanındaki temel yanal yerdeğiştirme ivmesi $\ddot{u}_0(t)$ ve dönme ivmesi $\ddot{\theta}_0(t)$ Fourier dönüşümü ve denklem **(4.44)**, **(4.45)**'te verilen sayısal yöntemler yardımıyla hesaplanabilir. İkinci adımda $\ddot{u}_0(t)$ ile $\ddot{\theta}_0(t)$ ankastre mesnetli kontrollü sistemin hareket denklemi **(3.20)**'ye dahil edilerek aşağıda verilen eşdeğer sistem oluşturulabilir:

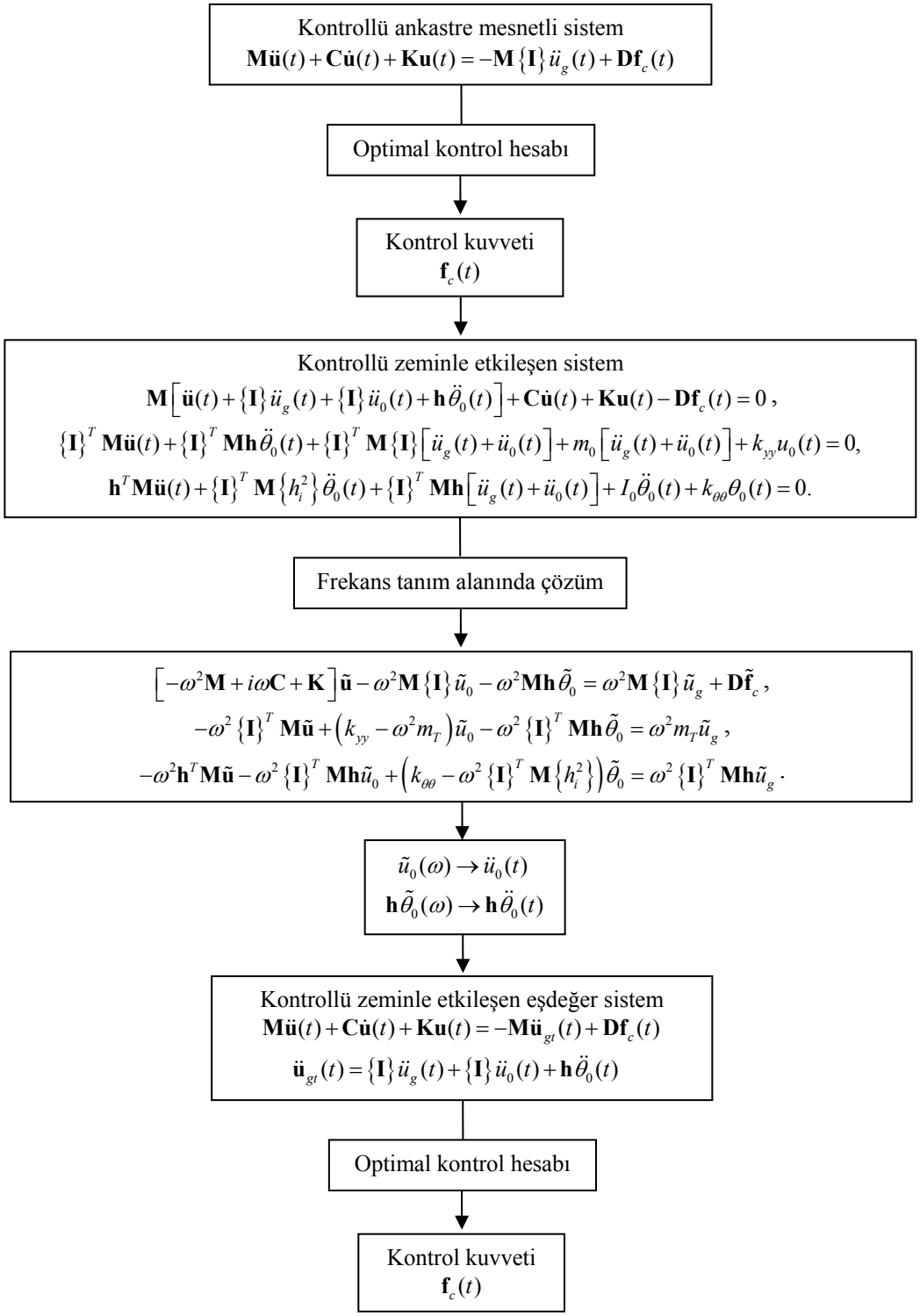
$$\mathbf{M}\left[\ddot{\mathbf{u}}(t) + \left\{\mathbf{I}\right\}\ddot{u}_g(t) + \left\{\mathbf{I}\right\}\ddot{u}_0(t) + \mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t)\right] + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) - \mathbf{D}\mathbf{f}_c(t) = 0\,. \qquad \textbf{(5.31)}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{gt}(t) = \left\{\mathbf{I}\right\}\ddot{u}_g(t) + \left\{\mathbf{I}\right\}\ddot{u}_0(t) + \mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t) \qquad \textbf{(5.32)}$$

olmak üzere denklem **(5.31)** aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{gt}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}_c(t)\,. \qquad \textbf{(5.33)}$$

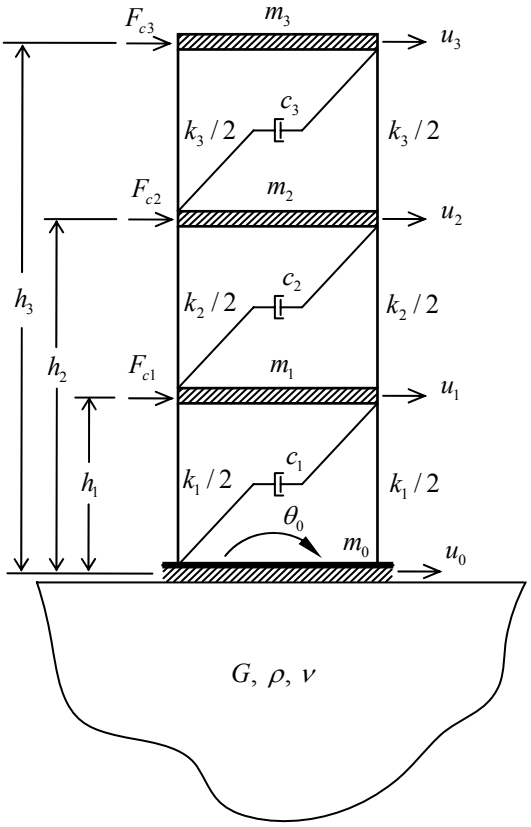
Daha önce açıklandığı gibi denklem **(5.33)**'e klasik optimal kontrol hesap aşamaları benzer şekilde uygulanabilir. Şekil 5.5'te zeminle etkileşen çok serbestlik dereceli bir sistemin optimal kontrolü için önerilen hesap yöntemi özetlenmiştir.



Şekil 5.5 : Kontrollü zeminle etkileşen çok serbestlik dereceli sistem için hesap yöntemi.

Sayısal örnek 5.2:

Deprem yer hareketi ivme kaydı olarak Şekil 4.6'da verilen El-Centro depremi kullanılmıştır. Şekil 5.6'da verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış, zeminle etkileşen üç serbestlik dereceli sistemde



Şekil 5.6 : Üç serbestlik dereceli kontrollü zeminle etkileşen sistem.

$m_1 = m_2 = 2m_3 = 175$ kNs^2/m,

$k_1 = k_2 = k_3 = 2763.489$ kN/m,

$c_1 = c_2 = c_3 = 219.912$ kNs/m .

Kat yüksekliği $h_1 = 3$ m, $h_2 = 6$ m, $h_3 = 9$ m, temel kütlesi $m_0 = 0$, kabul edilen dairesel temelin yarıçapı $r = 4$ m, zeminin kayma modülü $G = 10000$ kN/m^2 (orta sertlikte kil), Poisson oranı $\nu = 0.33$ ve kütlesel yoğunluğu $\rho = 2$ kNs^2/m^4.

Hesap adımları:

1) Ankastre mesnetli sistemin optimal kontrolü:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}175 & 0 & 0\\ 0 & 175 & 0\\ 0 & 0 & 87.5\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}439.824 & -219.912 & 0\\ -219.912 & 439.824 & -219.912\\ 0 & -219.912 & 219.912\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}55269.78 & -27634.89 & 0\\ -27634.89 & 55269.78 & -27634.89\\ 0 & -27634.89 & 27634.89\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}0.001 & 0 & 0\\ 0 & 0.001 & 0\\ 0 & 0 & 0.001\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}27634.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 175 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 175 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 175 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 175\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

El-Centro depreminin örneklendiği $\Delta t = 0.02$ s zaman aralığı için

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -315.8273 & 157.9137 & 0 & -2.5133 & 1.2566 & 0\\ 157.9137 & -315.8273 & 157.9137 & 1.2566 & -2.5133 & 1.2566\\ 0 & 315.8273 & -315.8273 & 0 & 2.5133 & -2.5133\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.00571428 & 0 & 0\\ 0 & 0.00571428 & 0\\ 0 & 0 & 0.01142857\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ -1\end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_s=\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}=\begin{bmatrix}0.938938 & 0.029913 & 0.000409 & 0.019102 & 0.000440 & 0.000005\\ 0.029913 & 0.939756 & 0.029913 & 0.000440 & 0.019113 & 0.000440\\ 0.000818 & 0.059826 & 0.939347 & 0.000010 & 0.000881 & 0.019107\\ -5.963552 & 2.878986 & 0.067982 & 0.891481 & 0.052823 & 0.000950\\ 2.878986 & -5.827587 & 2.878986 & 0.052823 & 0.893382 & 0.052823\\ 0.135964 & 5.757973 & -5.895569 & 0.001900 & 0.105647 & 0.892431\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_d^{(EQ)} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -0.0001973176 \\ -0.0001999772 \\ -0.0001999997 \\ -0.0195487440 \\ -0.0199947500 \\ -0.0199999178 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B} = 1.0\mathrm{e}-3 \begin{bmatrix} 0.00111233184 & 0.00001506922 & 0.00000025682 \\ 0.00001506922 & 0.00111258866 & 0.00003013844 \\ 0.00000025682 & 0.00003013844 & 0.00222492051 \\ 0.10915850262 & 0.00251907556 & 0.00005906085 \\ 0.00251907556 & 0.10921756348 & 0.00503815113 \\ 0.00005906085 & 0.00503815113 & 0.21837606610 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_s^T \mathbf{P}\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s\,,$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 602061.29 & -129309.42 & -82574.639 & 2279.292 & 37.866 & -1160.49 \\ -129309.42 & 427947.82 & -151928.00 & 976.409 & 2383.632 & 1681.977 \\ -82574.63 & -151928.00 & 263372.170 & 1133.583 & -158.134 & 60.315 \\ 2279.292 & 976.409 & 1133.583 & 2369.997 & 888.035 & 168.511 \\ 37.866 & 2383.632 & -158.134 & 888.035 & 2681.163 & 818.114 \\ -1160.491 & 1681.977 & 60.315 & 168.511 & 818.114 & 1333.545 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_f = \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s\,,$$

$$\mathbf{F}_f = \begin{bmatrix} 0.939380 & 0.029625 & 0.000157 & 0.018824 & 0.000323 & -0.000019 \\ 0.029749 & 0.939976 & 0.029752 & 0.000324 & 0.018789 & 0.000330 \\ 0.000986 & 0.058192 & 0.940661 & -0.000072 & 0.000457 & 0.018514 \\ -5.920325 & 2.850927 & 0.043110 & 0.864039 & 0.041040 & -0.001531 \\ 2.863503 & -5.807823 & 2.864162 & 0.041072 & 0.861138 & 0.041456 \\ 0.152107 & 5.598029 & -5.766978 & -0.006406 & 0.063380 & 0.834016 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}_f\mathbf{z}_k + \mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}, \quad \mathbf{f}_{ck} = -\left(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{ck}(t)\,.$$

2) 1. adımda hesaplanan optimal kontrol kuvveti kullanılarak zeminle etkileşen sistemin temel yanal yerdeğiştirme ve dönme ivmelerinin hesabı:

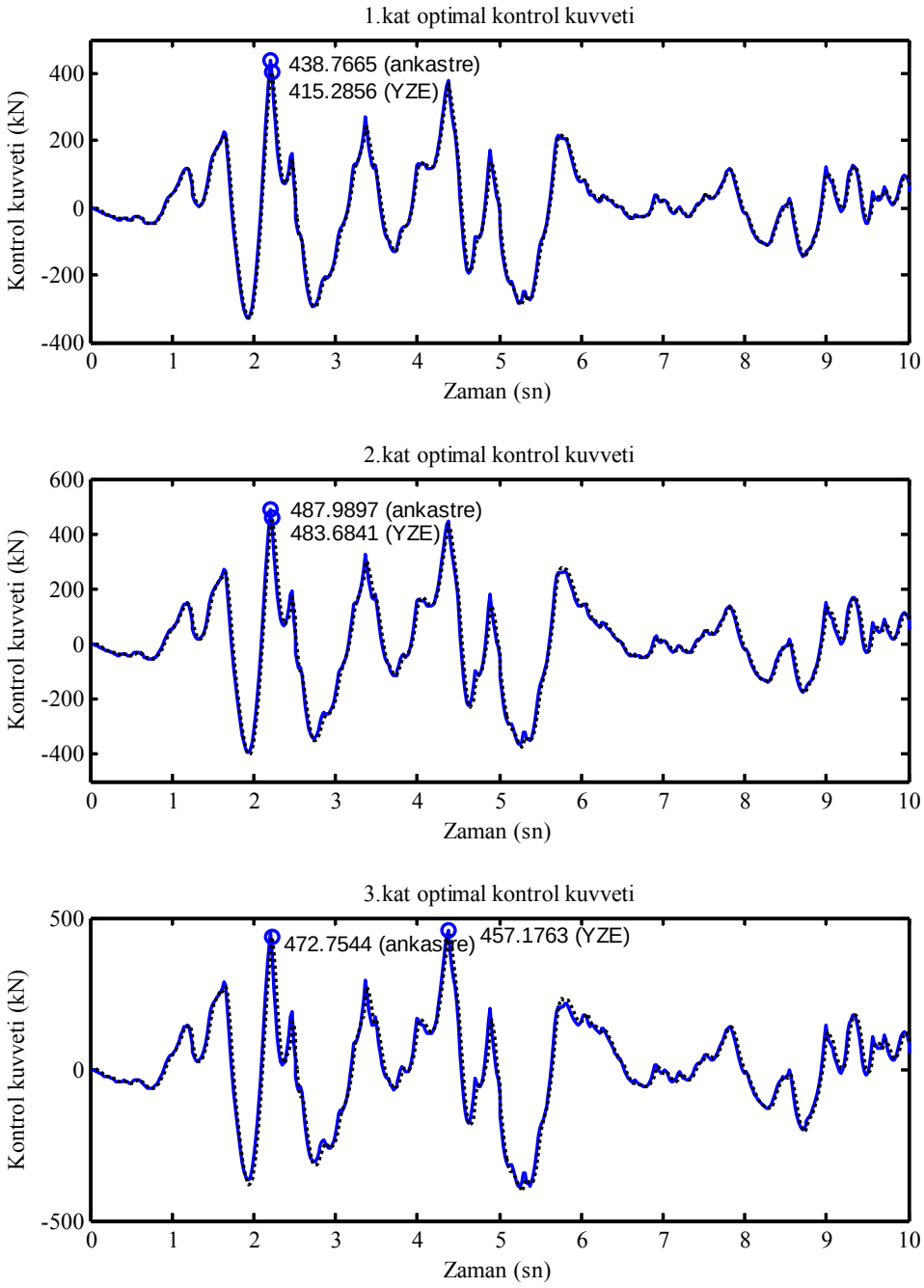
$$\mathbf{M}\left[\ddot{\mathbf{u}}(t) + \{\mathbf{I}\}\ddot{u}_g(t) + \{\mathbf{I}\}\ddot{u}_0(t) + \mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t)\right] + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) - \mathbf{D}\mathbf{f}_c(t) = 0\,,$$

$$\left[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_0 - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{h}\tilde{\theta}_0 = \omega^2\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_g + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}}_c \;\Rightarrow\; \ddot{u}_0(t),\; h\ddot{\theta}_0(t)\,.$$

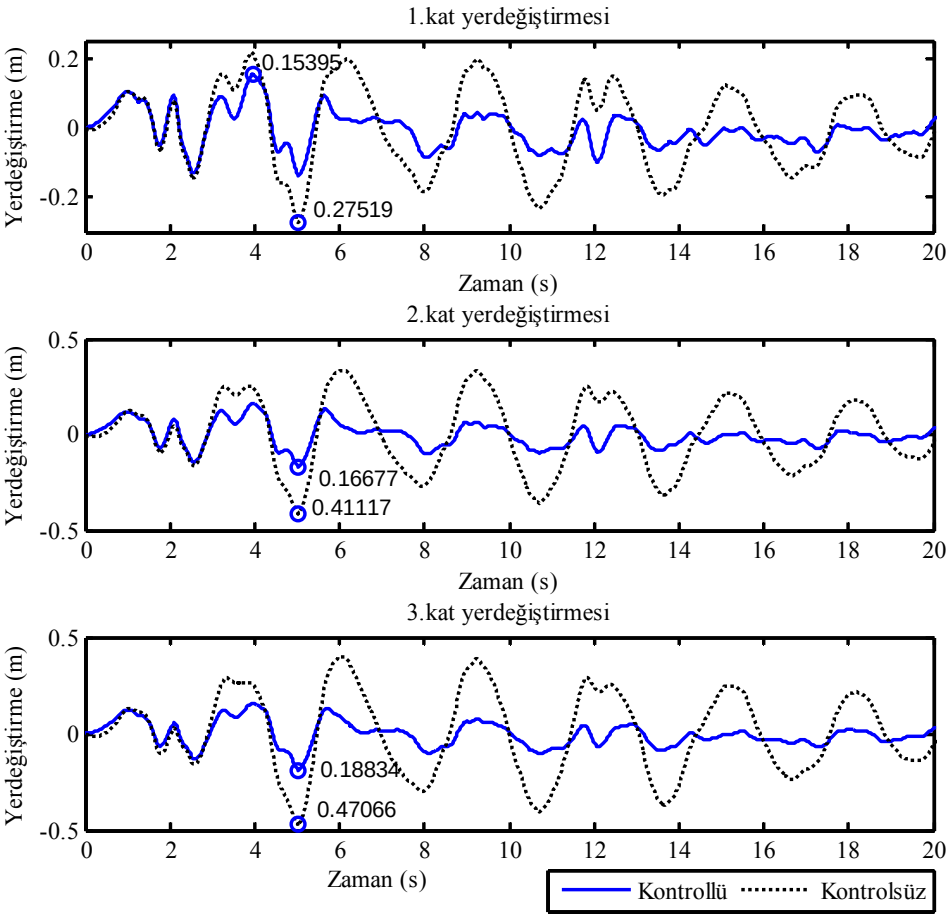
3) 2. adımda hesaplanan $\ddot{u}_0(t)$, $h\ddot{\theta}_0(t)$ kullanılarak optimal kontrol kuvvetinin tekrar elde edilmesi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{gt}(t)+\mathbf{D}\mathbf{f}_c(t)\,,$$

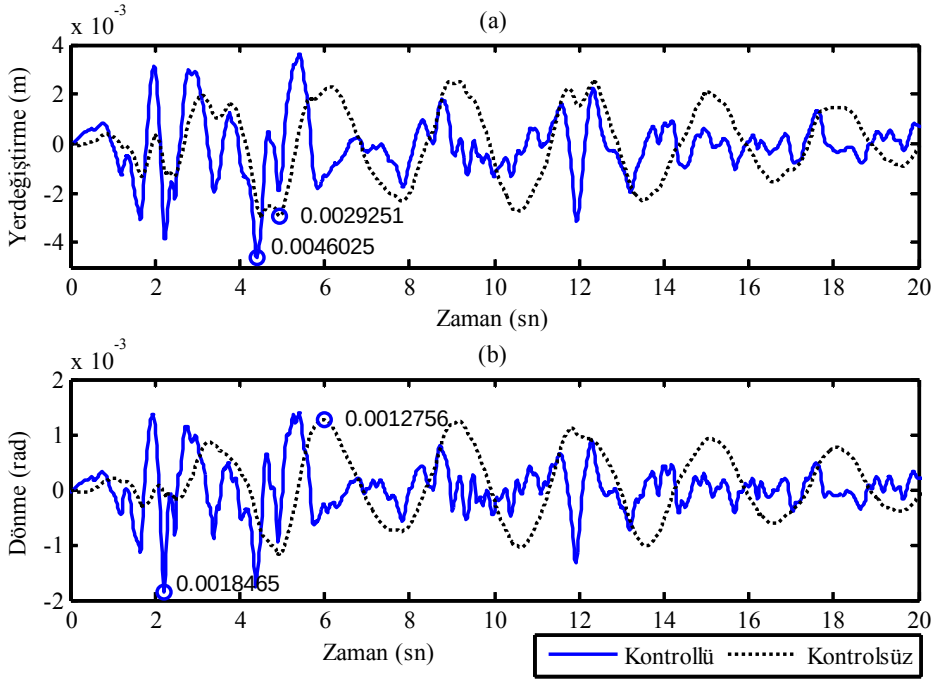
$$\ddot{\mathbf{u}}_{gt}(t)=\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_g(t)+\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_0(t)+\mathbf{h}\ddot{\theta}_0(t)\,.$$



Şekil 5.7 : Zeminle etkileşen sisteme uygulanan optimal kontrol kuvveti.



Şekil 5.8 : Kontrollü, zeminle etkileşen sistemin üstyapı yerdeğiştirmeleri.



Şekil 5.9 : Kontrollü, zeminle etkileşen sistemin temel yanal yerdeğiştirmesi ve dönmesi.

Çizelge 5.5 : Ankastre ve zeminle etkileşen sisteme uygulanan kontrol kuvveti (kN).

	1. kat	2. kat	3. kat
Ankastre	438.766	487.989	457.176
YZE	415.286	483.684	472.754

Çizelge 5.6 : Kontrollü-kontrolsüz sistemin maksimum yerdeğiştirmesi (m).

	1. kat	2. kat	3. kat
Kontrollü	0.1539	0.1668	0.1883
Kontrolsüz	0.2752	0.4112	0.4707

Ankastre mesnetli ve zeminle etkileşen çok serbestlik dereceli sisteme uygulanan optimal kontrol kuvveti, üstyapı yerdeğiştirmeleri, temel yanal yerdeğiştirmeleri ve temel dönmeleri Şekil 5.7 – 5.9'da; bu büyüklüklerin maksimum değerleri Çizelge 5.5 ve 5.6'da verilmiştir.

Tek serbestlik dereceli sistem için yapılan sayısal örnekten elde edilen sistemin rijitliğine (serbest titreşim periyoduna) bağlı olarak kontrol kuvvetinin değişimi, üstyapının davranışı ve kontrol kazanımı ilişkileri çok serbestlik dereceli sistemler için de geçerlidir.

Analiz için yazılan MATLAB programı Ek A'da verilmiştir.

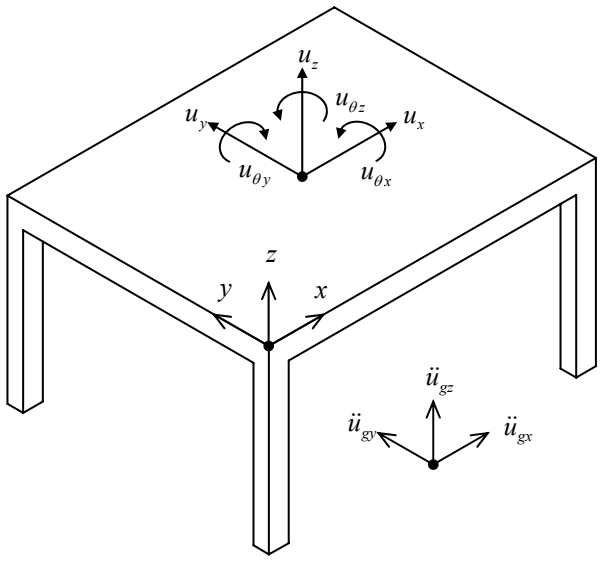
6. ÜÇ BOYUTLU YAPILARIN OPTİMAL KONTROLÜ VE YAPI-ZEMİN ETKİLEŞİMİ ANALİZİ

6.1 Giriş

Önceki bölümlerde iki boyutlu yapılar için optimal kontrol, yapı-zemin etkileşimi ve zeminle etkileşen yapıların optimal kontrolü analizleri verilmiştir. Aynı yöntemler üç boyutlu yapılar için genişletilebilir. Bu bölümde üç boyutlu yapıların optimal kontrolü ve yapı-zemin etkileşimi analizi verilmiştir.

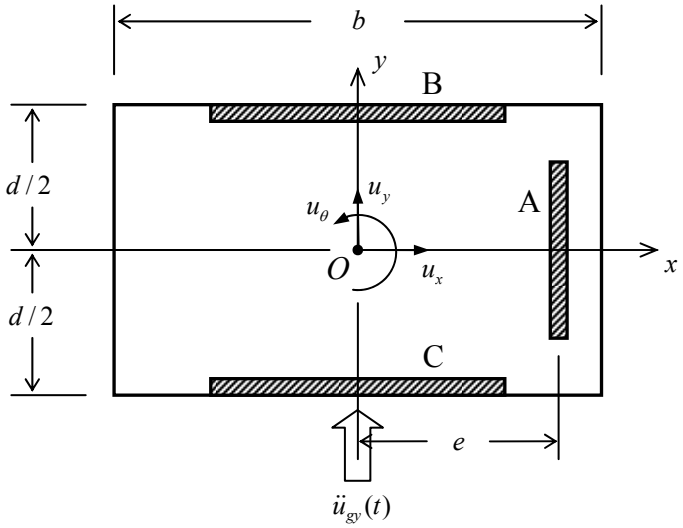
6.2 Üç Boyutlu Yapıların Durum Uzayı Yöntemiyle Çözümü

Üç boyutlu uzayda bir kütlenin hareketi genel halde Şekil 6.1'de verildiği gibi üç ötelenme u_x, u_y, u_z ve üç dönme $u_{\theta x}$, $u_{\theta y}$, $u_{\theta z}$ olmak üzere altı serbestlik derecesi ile tarif edilebilir.



Şekil 6.1 : Bir kütlenin genel halde serbestlik derecesi.

Kat kütlelerinin kat hizasında toplandığı, kat döşemelerinin kendi düzlemi içinde rijit diyafram oluşturduğu ve elemanların eksenel şekil değiştirmediği varsayımıyla n katlı bir yapının toplam serbestlik derecesi Şekil 6.2'de gösterildiği gibi her kat hizasında iki ötelenme u_x, u_y ve bir dönme u_θ olmak üzere $3n$'dir [131].



Şekil 6.2 : Rijit diyaframın serbestlik derecesi, planda simetrik olmayan yapı [131].

Deprem etkisindeki n katlı bir yapının dinamik hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{gy}(t) \qquad \textbf{(6.1)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_x & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_y & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}_\theta\end{bmatrix},\ \mathbf{M}_x=\mathbf{M}_y=\begin{bmatrix}m_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_n\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_\theta=\frac{\left(b^2+d^2\right)}{12}\begin{bmatrix}m_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_n\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} & \mathbf{C}_{x\theta}\\ \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{C}_{yy} & \mathbf{C}_{y\theta}\\ \mathbf{C}_{\theta x} & \mathbf{C}_{\theta y} & \mathbf{C}_{\theta\theta}\end{bmatrix},\ \mathbf{C}_{xx}=\begin{bmatrix}c_{x1}+c_{x2} & -c_{x2} & 0 & 0\\ -c_{x2} & c_{x2}+c_{x3} & -c_{x3} & 0\\ 0 & -c_{x3} & \ddots & -c_{xn}\\ 0 & 0 & -c_{xn} & c_{xn}\end{bmatrix},\ \cdots$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{x\theta}\\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\theta}\\ \mathbf{K}_{\theta x} & \mathbf{K}_{\theta y} & \mathbf{K}_{\theta\theta}\end{bmatrix},\ \mathbf{K}_{xx}=\begin{bmatrix}k_{x1}+k_{x2} & -k_{x2} & 0 & 0\\ -k_{x2} & k_{x2}+k_{x3} & -k_{x3} & 0\\ 0 & -k_{x3} & \ddots & -k_{xn}\\ 0 & 0 & -k_{xn} & k_{xn}\end{bmatrix},\ \cdots$$

$$\mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_x(t)\\ \mathbf{u}_y(t)\\ \mathbf{u}_\theta(t)\end{Bmatrix},\ \mathbf{u}_x(t)=\begin{Bmatrix}u_{x1}\\ u_{x2}\\ \vdots\\ u_{xn}\end{Bmatrix},\ \mathbf{u}_y(t)=\begin{Bmatrix}u_{y1}\\ u_{y2}\\ \vdots\\ u_{yn}\end{Bmatrix},\ \mathbf{u}_\theta(t)=\begin{Bmatrix}u_{\theta1}\\ u_{\theta2}\\ \vdots\\ u_{\theta n}\end{Bmatrix},\ \{\mathbf{I}\}_{3n\times1}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{Bmatrix}$$

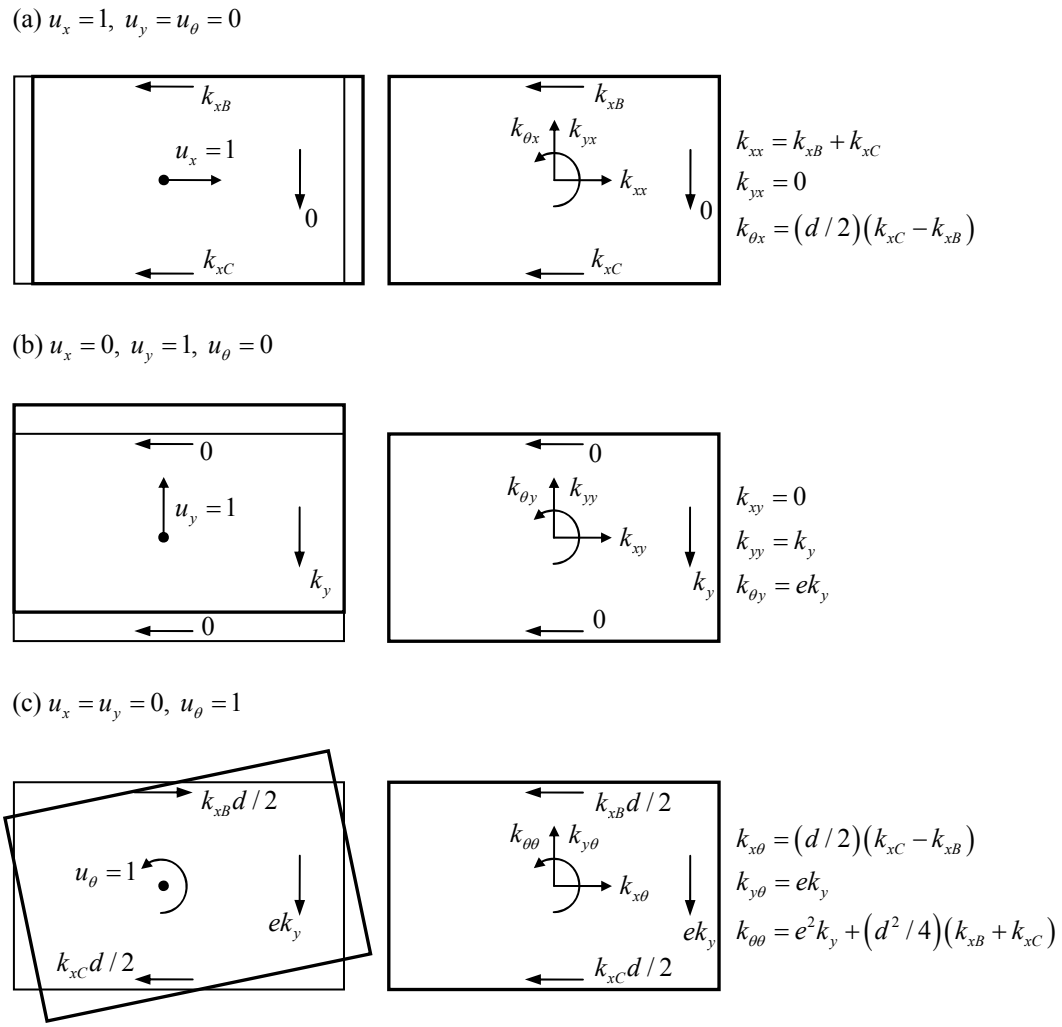
şeklindedir. Yapı simetrik plana sahipse bağlaşık etkiler oluşmaz, yapının yatay yöndeki davranışları her yönde birbirinden bağımsız olarak hesaplanabilir. Ancak yapı Şekil 6.2'de gösterildiği gibi simetrik olmayan plana sahipse rijitlik ve sönüm matrislerinin bağlaşık olmasından dolayı burulma etkileri meydana gelir. Şekil 6.2'de verilen tek katlı simetrik olmayan plana sahip bir yapının bağlaşık rijitlik matrisi Şekil 6.3'te gösterildiği gibi elde edilebilir, başka bir deyişle her bir serbestlik derecesine sırayla birim yük uygulanır ve diğer serbestlik derecelerinin tutulu olduğu durumdaki rijitlik katsayıları statik kuralları kullanılarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen rijitlik matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}k_{xB}+k_{xC} & 0 & \left(d/2\right)\left(k_{xC}-k_{xB}\right)\\ 0 & k_y & ek_y\\ \left(d/2\right)\left(k_{xC}-k_{xB}\right) & ek_y & e^2k_y+\left(d^2/4\right)\left(k_{xB}+k_{xC}\right)\end{bmatrix}. \qquad \textbf{(6.2)}$$

Bu rijitlik matrisi kullanılarak elastik yay kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix}f_{Sx}\\ f_{Sy}\\ f_{S\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta}\\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta}\\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_\theta\end{Bmatrix}. \qquad \textbf{(6.3)}$$

Denklem **(6.2)**'de verilen tek katlı bir yapının bağlaşık rijitlik matrisi **(6.1)**'in rijitlik matrisinde açıklandığı gibi n katlı bir yapı için genişletilebilir.



Şekil 6.3 : Planda simetrik olmayan tek katlı bir yapının rijitlik matrisi [131].

Çok katlı bir yapının geleneksel dinamik hareket denklemi **(6.1)**'de verildiği gibi yazıldıktan sonra yapının üç boyutlu davranışını elde etmek için Bölüm 2.4'te verilen durum uzayı yöntemi benzer şekilde kullanılabilir, başka bir deyişle **z** durum vektörü

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} \tag{6.4}$$

olarak yazılır. Denklem **(6.1)** ile yazılan durum uzayı denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t). \tag{6.5}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ -\mathbf{I}\end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) \tag{6.6}$$

tanımları ile denklem **(6.5)**

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{z}(t)+\mathbf{F}(t) \tag{6.7}$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem **(6.5)**'in çözümü

$$\mathbf{z}(t)\ =\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}(t_0)\ +\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.8}$$

şeklindedir. $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ durum dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\left(\mathbf{A}t\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}t\right)^3+\ldots. \tag{6.9}$$

Başlangıç zaman $t_0=0$ alınırsa durum vektörü **z** aşağıdaki şekli alır:

$$\mathbf{z}(t)\ =\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_0+\ \int_0^t\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{F}(\tau)\mathrm{d}\tau\,. \tag{6.10}$$

Sistemin ayrık zaman aralığındaki sayısal çözümü ise

$$\mathbf{z}_{k+1}=\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k+\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk} \tag{6.11}$$

olarak verilebilir. Burada

$$\mathbf{F}_s=\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t},\quad \mathbf{H}_d^{(EQ)}=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}-\mathbf{I}\right)\mathbf{H},\quad \mathbf{H}=\begin{Bmatrix}0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots\end{Bmatrix}^T \tag{6.12}$$

şeklinde tanımlanabilir. Durum dönüşüm matrisi

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}\Delta t+\frac{1}{2!}\left(\mathbf{A}\Delta t\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}\Delta t\right)^3+\ldots \tag{6.13}$$

şeklindedir.

6.3 Üç Boyutlu Yapıların Optimal Kontrolü

Deprem etkisine karşı kontrol kuvveti uygulanmış üç boyutlu bir yapının hareket denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{gy}(t)+\mathbf{D}\mathbf{f}_c(t). \qquad \textbf{(6.14)}$$

Bu denklemde $\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ ve $\mathbf{u}$ terimleri n katlı bir yapı için denklem **(6.1)**'de tarif edildiği gibidir. $\mathbf{D}$ ise $3n\times 3n$ boyutunda kontrol kuvveti dağılım matrisidir. $\mathbf{f}_c(t)$ $3n\times 1$ boyutunda kontrol kuvveti vektörüdür.

Sistemin ayrık zaman aralığındaki durum denklemi

$$\mathbf{z}_{k+1}=\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k+\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}+\mathbf{G}\mathbf{f}_{ck} \qquad \textbf{(6.15)}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}-\mathbf{I}\right)\mathbf{B},\qquad \mathbf{B}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(6.16)}$$

şeklindedir. Ayrık zaman aralığındaki amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left(\mathbf{z}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{z}_k+\mathbf{f}_{ck}^T\mathbf{R}\mathbf{f}_{ck}\right). \qquad \textbf{(6.17)}$$

Denklem **(6.17)**'de verilen amaç fonksiyonunu minimum yapan optimal kontrol kuvvetini ve yapının yanıtını elde etmek için Bölüm 3'te açıklanan hesap aşamaları benzer şekilde takip edilirse Riccati matrisi

$$\mathbf{P}=\mathbf{Q}+\mathbf{F}_s^T\mathbf{P}\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s \qquad \textbf{(6.18)}$$

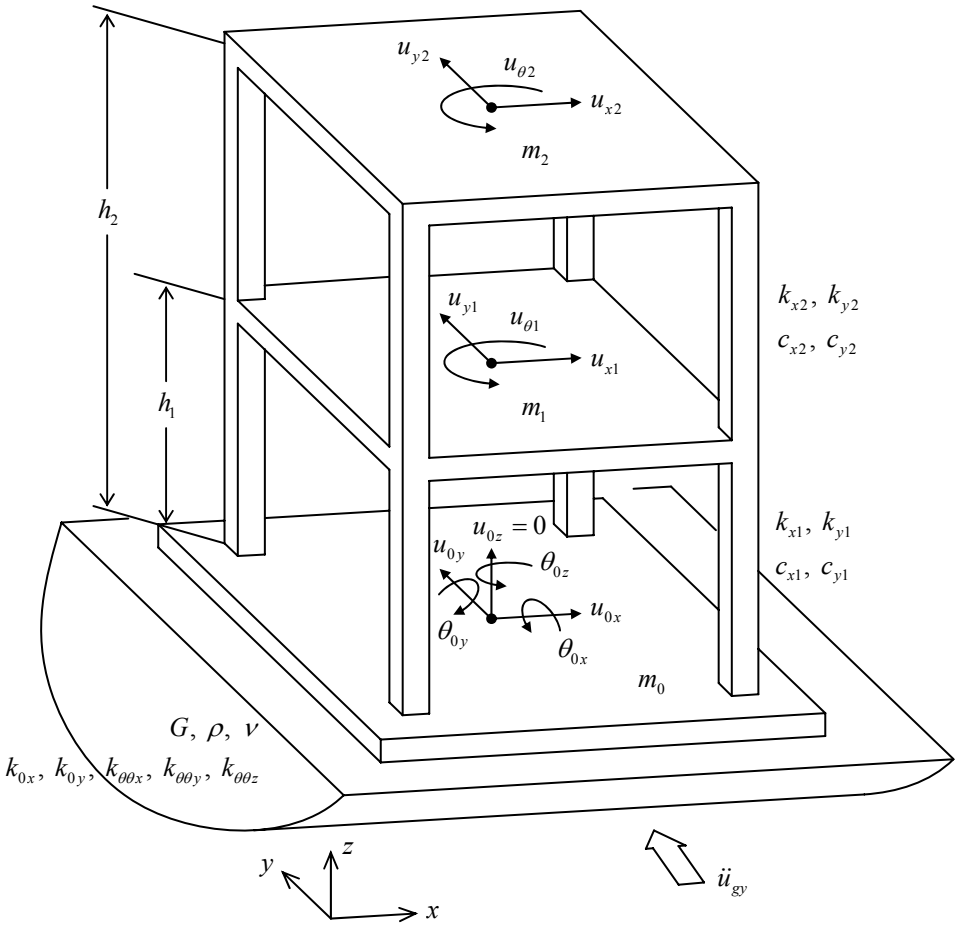
olarak yazılabilir. Her bir zaman adımına ait optimal kontrol kuvveti ve sistemin yanıtı aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{f}_{ck}=-\left(\mathbf{R}+\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k, \qquad \textbf{(6.19)}$$

$$\mathbf{z}_{k+1}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{F}_s\mathbf{z}_k+\mathbf{H}_d^{(EQ)}\ddot{u}_{gk}. \qquad \textbf{(6.20)}$$

6.4 Üç Boyutlu Yapıların Yapı-Zemin Etkileşimi Analizi

Şekil 6.4'te zeminle etkileşen üç boyutlu iki katlı bir yapı gösterilmektedir.



Şekil 6.4 : Zeminle etkileşen üç boyutlu sisem.

Üstyapının hareket denklemi daha önce verilen varsayımlarla Şekil 6.4 üzerinde gösterilen parametreler kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{g0}(t)\,. \qquad \textbf{(6.21)}$$

Bu denklemde $\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ ve $\mathbf{u}$ terimleri n katlı bir yapı için denklem **(6.1)**'de tarif edildiği gibidir. $\ddot{\mathbf{u}}_{g0}$ deprem yer hareketi ve temel yerdeğiştirmelerinin toplamıdır ve aşağıdaki gibi tarif edilebilir:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{g0}(t)=\begin{Bmatrix}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0x}(t)+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0y}(t)\\ \{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{gy}(t)+\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0y}(t)+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0x}(t)\\ \{\mathbf{I}\}\ddot{\theta}_{0z}(t)\end{Bmatrix}. \qquad \textbf{(6.22)}$$

Burada

$$\mathbf{h}=\{h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n\}^T, \quad \{\mathbf{I}\}_{n\times 1}=\{1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\}^T \tag{6.23}$$

şeklindedir. Denklem **(6.21)** $\tilde{\mathbf{u}}_x$, $\tilde{\mathbf{u}}_y$ ve $\tilde{\mathbf{u}}_\theta$ bileşenleriyle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_x & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_y & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_x\\ \ddot{\mathbf{u}}_y\\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{xx} & \mathbf{C}_{xy} & \mathbf{C}_{x\theta}\\ \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{C}_{yy} & \mathbf{C}_{y\theta}\\ \mathbf{C}_{\theta x} & \mathbf{C}_{\theta y} & \mathbf{C}_{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_x\\ \dot{\mathbf{u}}_y\\ \dot{\mathbf{u}}_\theta\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{x\theta}\\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{y\theta}\\ \mathbf{K}_{\theta x} & \mathbf{K}_{\theta y} & \mathbf{K}_{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_x\\ \mathbf{u}_y\\ \mathbf{u}_\theta\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mathbf{M}_x & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{M}_y & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0x}+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0y}\\ \{\mathbf{I}\}\left(\ddot{u}_{gy}+\ddot{u}_{0y}\right)+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0x}\\ \{\mathbf{I}\}\ddot{\theta}_{0z}\end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

$$\mathbf{M}_x\ddot{\mathbf{u}}_x+\mathbf{C}_{xx}\dot{\mathbf{u}}_x+\mathbf{C}_{xy}\dot{\mathbf{u}}_y+\mathbf{C}_{x\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta+\mathbf{K}_{xx}\mathbf{u}_x+\mathbf{K}_{xy}\mathbf{u}_y+\mathbf{K}_{x\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$=-\mathbf{M}_x\left(\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0x}+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0y}\right), \tag{6.25}$$

$$\mathbf{M}_y\ddot{\mathbf{u}}_y+\mathbf{C}_{yx}\dot{\mathbf{u}}_x+\mathbf{C}_{yy}\dot{\mathbf{u}}_y+\mathbf{C}_{y\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta+\mathbf{K}_{yx}\mathbf{u}_x+\mathbf{K}_{yy}\mathbf{u}_y+\mathbf{K}_{y\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$=-\mathbf{M}_y\left(\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{gy}+\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0y}+\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0x}\right), \tag{6.26}$$

$$\mathbf{I}_\theta\ddot{\mathbf{u}}_\theta+\mathbf{C}_{\theta x}\dot{\mathbf{u}}_x+\mathbf{C}_{\theta y}\dot{\mathbf{u}}_y+\mathbf{C}_{\theta\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta+\mathbf{K}_{\theta x}\mathbf{u}_x+\mathbf{K}_{\theta y}\mathbf{u}_y+\mathbf{K}_{\theta\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$=-\mathbf{I}_\theta\left(\{\mathbf{I}\}\ddot{\theta}_{0z}\right). \tag{6.27}$$

Yapının Şekil 6.2'de verilen simetrik olmayan plana sahip olması durumu için rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{xB}+\mathbf{K}_{xC} & \mathbf{0} & (d/2)(\mathbf{K}_{xC}-\mathbf{K}_{xB})\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_y & e\mathbf{K}_y\\ (d/2)(\mathbf{K}_{xC}-\mathbf{K}_{xB}) & e\mathbf{K}_y & e^2\mathbf{K}_y+(d^2/4)(\mathbf{K}_{xB}+\mathbf{K}_{xC})\end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

Temelin serbestlik dereceleri u_{0x}, u_{0y}, θ_{0x}, θ_{0y} ve θ_{0z} kullanılarak sistemin dinamik hareket dengeleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\ddot{\mathbf{u}}_x+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\{\mathbf{I}\}\ddot{u}_{0x}+\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\mathbf{h}\ddot{\theta}_{0y}+m_0\ddot{u}_{0x}+k_{0x}u_{0x}=0, \tag{6.29}$$

$$\{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_y \ddot{\mathbf{u}}_y + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_y \{\mathbf{I}\}\left(\ddot{u}_{0y} + \ddot{u}_{gy}\right) + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_y \mathbf{h}\ddot{\theta}_{0x} + m_0\left(\ddot{u}_{0y} + \ddot{u}_{gy}\right) + k_{0y}u_{0y} = 0, \tag{6.30}$$

$$\mathbf{h}^T \mathbf{M}_x \ddot{\mathbf{u}}_x + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_x \mathbf{h}\ddot{u}_{0x} + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_x \left\{h_i^2\right\}\ddot{\theta}_{0y} + I_{0\theta}\ddot{\theta}_{0y} + k_{\theta\theta y}\theta_{0y} = 0, \tag{6.31}$$

$$\mathbf{h}^T \mathbf{M}_y \ddot{\mathbf{u}}_y + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_y \mathbf{h}\left(\ddot{u}_{gy} + \ddot{u}_{0y}\right) + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{M}_y \left\{h_i^2\right\}\ddot{\theta}_{0x} + I_{0\theta}\ddot{\theta}_{0x} + k_{\theta\theta x}\theta_{0x} = 0, \tag{6.32}$$

$$\{\mathbf{I}\}^T \mathbf{I}_\theta \ddot{\mathbf{u}}_\theta + \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{I}_\theta \{\mathbf{I}\}\ddot{\theta}_{0z} + I_{0\theta}\ddot{\theta}_{0z} + k_{\theta\theta z}\theta_{0z} = 0\,. \tag{6.33}$$

Denklem **(6.24), (6.29) - (6.33)**, terimlerinin zaman tanım alanından frekans alanına dönüşümünü sağlayan denklem **(4.20) - (4.27)** ve **(5.4)** yardımıyla $m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i + m_0$ ve $m_0 = 0$ olmak üzere frekans tanım alanında aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(-\omega^2\mathbf{M}_x + i\omega\mathbf{C}_{xx} + \mathbf{K}_{xx}\right)\tilde{\mathbf{u}}_x + \left(i\omega\mathbf{C}_{xy} + \mathbf{K}_{xy}\right)\tilde{\mathbf{u}}_y + \left(i\omega\mathbf{C}_{x\theta} + \mathbf{K}_{x\theta}\right)\tilde{\mathbf{u}}_\theta = \omega^2\mathbf{M}_x\left(\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_{0x} + \mathbf{h}\tilde{\theta}_{0y}\right), \tag{6.34}$$

$$\left(i\omega\mathbf{C}_{yx} + \mathbf{K}_{yx}\right)\tilde{\mathbf{u}}_x + \left(-\omega^2\mathbf{M}_y + i\omega\mathbf{C}_{yy} + \mathbf{K}_{yy}\right)\tilde{\mathbf{u}}_y + \left(i\omega\mathbf{C}_{y\theta} + \mathbf{K}_{y\theta}\right)\tilde{\mathbf{u}}_\theta = \omega^2\mathbf{M}_y\left(\{\mathbf{I}\}\tilde{u}_{gy} + \{\mathbf{I}\}\tilde{u}_{0y} + \mathbf{h}\tilde{\theta}_{0x}\right), \tag{6.35}$$

$$\left(i\omega\mathbf{C}_{\theta x} + \mathbf{K}_{\theta x}\right)\tilde{\mathbf{u}}_x + \left(i\omega\mathbf{C}_{\theta y} + \mathbf{K}_{\theta y}\right)\tilde{\mathbf{u}}_y + \left(-\omega^2\mathbf{I}_\theta + i\omega\mathbf{C}_{\theta\theta} + \mathbf{K}_{\theta\theta}\right)\tilde{\mathbf{u}}_\theta = \omega^2\mathbf{I}_\theta\{\mathbf{I}\}\tilde{\theta}_{0z}, \tag{6.36}$$

$$-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\tilde{\mathbf{u}}_x + \left(k_{0x} - \omega^2 m_T\right)\tilde{u}_{0x} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\mathbf{h}\tilde{\theta}_{0y} = 0\,, \tag{6.37}$$

$$-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_y\tilde{\mathbf{u}}_y + \left(k_{0y} - \omega^2 m_T\right)\tilde{u}_{0y} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_y\mathbf{h}\tilde{\theta}_{0x} = \omega^2 m_T\tilde{u}_{gy}\,, \tag{6.38}$$

$$-\omega^2\mathbf{h}^T\mathbf{M}_x\tilde{\mathbf{u}}_x - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\mathbf{h}\tilde{u}_{0x} + \left(k_{\theta\theta y} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_x\left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_{0y} = 0\,, \tag{6.39}$$

$$-\omega^2\mathbf{h}^T\mathbf{M}_y\tilde{\mathbf{u}}_y - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_y\mathbf{h}\tilde{u}_{0y} + \left(k_{\theta\theta x} - \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_y\left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_{0x} = \omega^2\{\mathbf{I}\}^T\mathbf{M}_y\mathbf{h}\tilde{u}_{gy}, \tag{6.40}$$

$$-\omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{I}_\theta \tilde{\mathbf{u}}_\theta - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \mathbf{I}_\theta \{\mathbf{I}\} \tilde{\theta}_{0z} + k_{\theta\theta z} \tilde{\theta}_{0z} = 0 . \quad \textbf{(6.41)}$$

Bu denklem takımını daha sade ve matris şeklinde yazmak için aşağıdaki tanımlar yapılabilir:

$$\tilde{\mathbf{H}}_x(\omega) = \left(-\omega^2 \mathbf{M}_x + i\omega \mathbf{C}_{xx} + \mathbf{K}_{xx}\right), \quad \textbf{(6.42)}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_y(\omega) = \left(-\omega^2 \mathbf{M}_y + i\omega \mathbf{C}_{yy} + \mathbf{K}_{yy}\right), \quad \textbf{(6.43)}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_\theta(\omega) = \left(-\omega^2 \mathbf{I}_\theta + i\omega \mathbf{C}_{\theta\theta} + \mathbf{K}_{\theta\theta}\right), \quad \textbf{(6.44)}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{x\theta} = \left(i\omega \mathbf{C}_{x\theta} + \mathbf{K}_{x\theta}\right) = \left(i\omega \mathbf{C}_{\theta x} + \mathbf{K}_{\theta x}\right), \quad \textbf{(6.45)}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{xy} = \left(i\omega \mathbf{C}_{xy} + \mathbf{K}_{xy}\right) = \left(i\omega \mathbf{C}_{yx} + \mathbf{K}_{yx}\right), \quad \textbf{(6.46)}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{y\theta} = \left(i\omega \mathbf{C}_{y\theta} + \mathbf{K}_{y\theta}\right) = \left(i\omega \mathbf{C}_{\theta y} + \mathbf{K}_{\theta y}\right), \quad \textbf{(6.47)}$$

$$\Gamma_x = \mathbf{M}_x \{\mathbf{I}\}, \quad \Gamma_y = \mathbf{M}_y \{\mathbf{I}\}, \quad \Gamma_\theta = \mathbf{I}_\theta \{\mathbf{I}\}, \quad \textbf{(6.48)}$$

$$\Upsilon_x = \mathbf{M}_x \mathbf{h}, \quad \Upsilon_y = \mathbf{M}_y \mathbf{h}, \quad \textbf{(6.49)}$$

$$\mathbf{0}_{n\times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad \textbf{(6.50)}$$

Denklem **(6.42)** - **(6.50)** ile yapılan tanımlar kullanılarak denklem **(6.34)** - **(6.41)** aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\tilde{\mathbf{H}}_x \tilde{\mathbf{u}}_x + \bar{\mathbf{K}}_{xy} \tilde{\mathbf{u}}_y + \bar{\mathbf{K}}_{x\theta} \tilde{\mathbf{u}}_\theta - \omega^2 \Gamma_x \tilde{u}_{0x} + \mathbf{0}\tilde{u}_{0y} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0x} - \omega^2 \Upsilon_x \tilde{\theta}_{0y} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0z} = \mathbf{0}, \quad \textbf{(6.51)}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{xy} \tilde{\mathbf{u}}_x + \tilde{\mathbf{H}}_y \tilde{\mathbf{u}}_y + \bar{\mathbf{K}}_{y\theta} \tilde{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{0}\tilde{u}_{0x} - \omega^2 \Gamma_y \tilde{u}_{0y} - \omega^2 \Upsilon_y \tilde{\theta}_{0x} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0y} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0z} = \omega^2 \Gamma_y \tilde{u}_{gy}, \quad \textbf{(6.52)}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{x\theta} \tilde{\mathbf{u}}_x + \bar{\mathbf{K}}_{y\theta} \tilde{\mathbf{u}}_y + \tilde{\mathbf{H}}_\theta \tilde{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{0}\tilde{u}_{0x} + \mathbf{0}\tilde{u}_{0y} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0x} + \mathbf{0}\tilde{\theta}_{0y} - \omega^2 \Gamma_\theta \tilde{\theta}_{0z} = \mathbf{0}, \quad \textbf{(6.53)}$$

$$-\omega^2 \Gamma_x{}^T \tilde{\mathbf{u}}_x + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_y + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_\theta + \left(k_{0x} - \omega^2 m_T\right)\tilde{u}_{0x} + 0\tilde{u}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0x} - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_x \tilde{\theta}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0z} = 0, \tag{6.54}$$

$$\mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_x - \omega^2 \Gamma_y{}^T \tilde{\mathbf{u}}_y + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_\theta + 0\tilde{u}_{0x} + \left(k_{0y} - \omega^2 m_T\right)\tilde{u}_{0y} - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_y \tilde{\theta}_{0x} + 0\tilde{\theta}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0z} = \omega^2 m_T \tilde{u}_{gy}, \tag{6.55}$$

$$-\omega^2 \Upsilon_x{}^T \tilde{\mathbf{u}}_x + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_y + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_\theta - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_x \tilde{u}_{0x} + 0\tilde{u}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0x} + \left(k_{\theta\theta y} - \omega^2 \Gamma_x{}^T \left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0z} = 0, \tag{6.56}$$

$$\mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_x - \omega^2 \Upsilon_y{}^T \tilde{\mathbf{u}}_y + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_\theta + 0\tilde{u}_{0x} - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_y \tilde{u}_{0y} + \left(k_{\theta\theta x} - \omega^2 \Gamma_y{}^T \left\{h_i^2\right\}\right)\tilde{\theta}_{0x} + 0\tilde{\theta}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0z} = \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_y \tilde{u}_{gy}, \tag{6.57}$$

$$\mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_x + \mathbf{0}^T \tilde{\mathbf{u}}_y - \omega^2 \Gamma_\theta{}^T \tilde{\mathbf{u}}_\theta + 0\tilde{u}_{0x} + 0\tilde{u}_{0y} + 0\tilde{\theta}_{0x} + 0\tilde{\theta}_{0y} + \left(k_{\theta\theta z} - \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Gamma_\theta\right)\tilde{\theta}_{0z} = 0. \tag{6.58}$$

Görüldüğü gibi **(6.51) - (6.58)**

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} \tag{6.59}$$

şeklinde bir lineer denklem takımıdır ve

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\tilde{\mathbf{F}} \tag{6.60}$$

olarak çözülebilir.

Bu denklemin terimleri aşağıda vektör ve matris şeklinde verilmiştir:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_x \\ \tilde{\mathbf{u}}_y \\ \tilde{\mathbf{u}}_\theta \\ \tilde{u}_{0x} \\ \tilde{u}_{0y} \\ \tilde{\theta}_{0x} \\ \tilde{\theta}_{0y} \\ \tilde{\theta}_{0z} \end{Bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \omega^2 \Gamma_y \tilde{u}_{gy} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \omega^2 m_T \tilde{u}_{gy} \\ 0 \\ \omega^2 \{\mathbf{I}\}^T \Upsilon_y \tilde{u}_{gy} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_x & \bar{\mathbf{K}}_{xy} & \bar{\mathbf{K}}_{x\theta} & -\omega^2\Gamma_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\omega^2\Upsilon_x & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{K}}_{xy} & \tilde{\mathbf{H}}_y & \bar{\mathbf{K}}_{y\theta} & \mathbf{0} & -\omega^2\Gamma_y & -\omega^2\Upsilon_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{K}}_{x\theta} & \bar{\mathbf{K}}_{y\theta} & \tilde{\mathbf{H}}_\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\omega^2\Gamma_\theta \\ -\omega^2{\Gamma_x}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \left(k_{0x}-\omega^2 m_T\right) & 0 & 0 & -\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon_x & 0 \\ \mathbf{0}^T & -\omega^2{\Gamma_y}^T & \mathbf{0}^T & 0 & \left(k_{0y}-\omega^2 m_T\right) & -\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon_y & 0 & 0 \\ -\omega^2{\Upsilon_x}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon_x & 0 & 0 & \left(k_{\theta\theta y}-\omega^2{\Gamma_x}^T\{h_i^2\}\right) & 0 \\ \mathbf{0}^T & -\omega^2{\Upsilon_y}^T & \mathbf{0}^T & 0 & -\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Upsilon_y & \left(k_{\theta\theta x}-\omega^2{\Gamma_y}^T\{h_i^2\}\right) & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -\omega^2{\Gamma_\theta}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(k_{\theta\theta z}-\omega^2\{\mathbf{I}\}^T\Gamma_\theta\right) \end{bmatrix}$$

Her bir frekansa ait harmonik dış yük etkisindeki üç boyutlu yapının davranışı bu şekilde elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü ile zaman tanım alanındaki değerleri elde edilebilir.

Sayısal örnek 6.1:

Plan ve kesiti Şekil 6.5'te verilen optimal kontrol kuvveti uygulanmış, planda simetrik olmayan üç katlı yapıda

$m_1 = m_2 = 2m_3 = 175$ kNs^2/m,

$k_{x1B} = k_{x2B} = k_{x3B} = k_{x1C} = k_{x2C} = k_{x3C} = \left(27634.89 \times 0.5\right) = 13817.445$ kN/m,

$k_{y1A} = k_{y2A} = k_{y3A} = \left(27634.89 \times 0.75\right) = 20726.1675$ kN/m,

$c_{x1} = c_{x2} = c_{x3} = 219.912$ kNs/m,

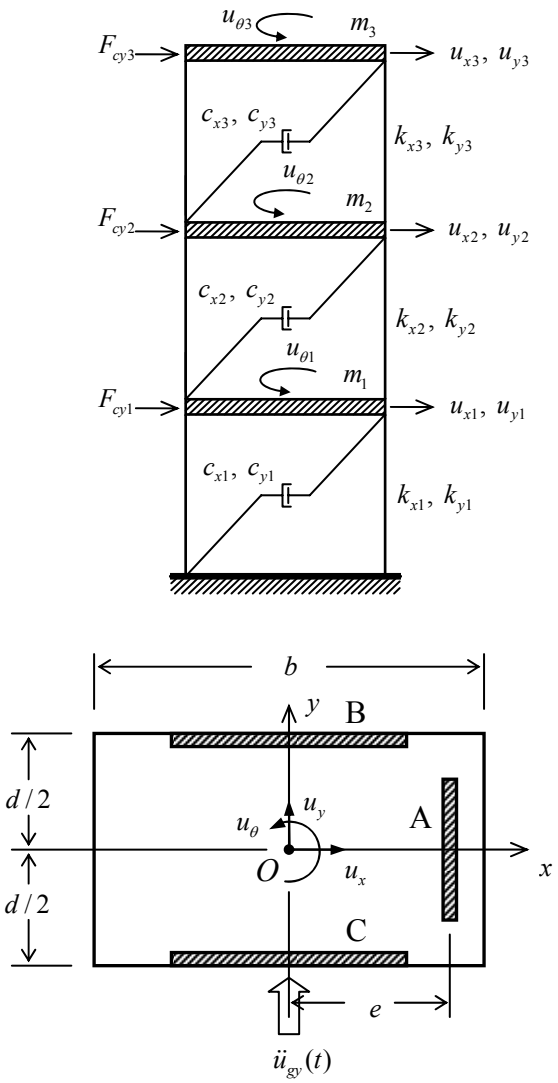
$c_{y1} = c_{y2} = c_{y3} = \left(219.912 \times 0.75\right) = 164.934$ kNs/m,

$d = 4$ m, $b = 6$ m, $e = 3$ m.

Sözkonusu ankastre mesnede sahip yapıya Şekil 4.6'da verilen El-Centro depremi etkimesi durumunda uygulanacak optimal kontrol kuvveti ve yapının davranışı hesaplanmıştır.

Yapıya sadece depremin etkidiği y ekseni yönünde kontrol kuvveti uygulanmıştır. Yapının yerdeğiştirme vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x(t) \\ \mathbf{u}_y(t) \\ \mathbf{u}_\theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & u_{\theta 1} & u_{\theta 2} & u_{\theta 3} \end{Bmatrix}^T.$$



Şekil 6.5 : Planda simetrik olmayan kontrollü üç boyutlu yapı.

Durum vektörü

$$\mathbf{z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Kontrol ağırlık matrisi $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}_{(18\times 18)} = \begin{bmatrix} 27634.89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 175 \end{bmatrix}.$$

Kontrol ağırlık matrisi $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}_{(9\times9)} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

Kontrol kuvveti dağılım matrisi $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}_{(9\times9)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 758.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 758.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 379.17 \end{bmatrix}.$$

$k_{xB} = k_{xC}$ olduğu için yapı x ekseni yönünde simetrik plana sahiptir. Dolayısıyla yapının rijitlik matrisi

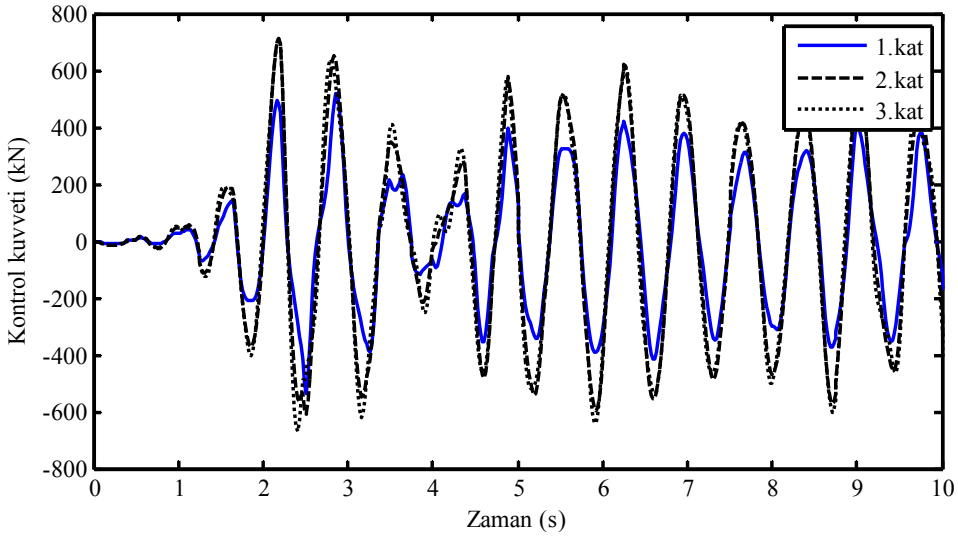
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 55269.78 & -0.27634.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.27634.89 & 55269.78 & -27634.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -27634.89 & 27634.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20726.17 & -10363.08 & 0 & 62178.50 & -31089.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10363.08 & 20726.17 & -10363.08 & -31089.25 & 62178.50 & -31089.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10363.08 & 10363.08 & 0 & -31089.25 & 31089.25 \\ 0 & 0 & 0 & 62178.50 & -31089.25 & 0 & 407614.63 & -203807.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -31089.25 & 62178.50 & -31089.25 & -203807.31 & 407614.63 & -203807.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -31089.25 & 31089.25 & 0 & -203807.31 & 203807.31 \end{bmatrix}$$

Sönüm katsayılarının x ve y ekseni yönünde simetrik olduğu kabul edilmiştir. Dolayısıyla sönüm matrisi

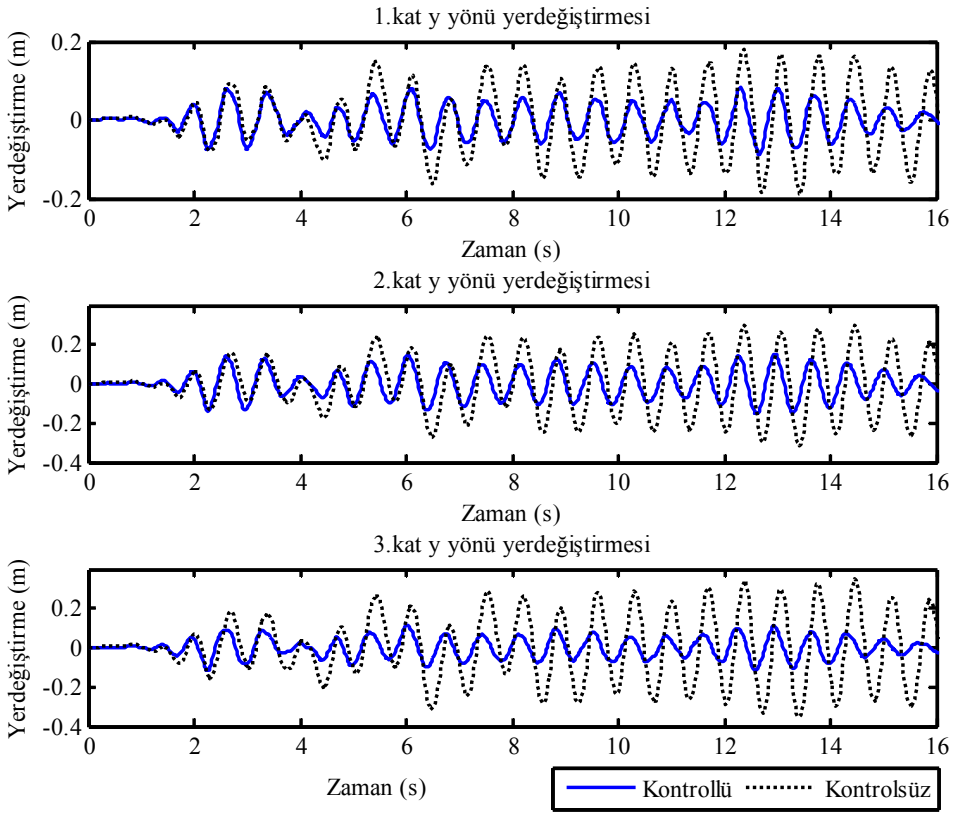
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 439.82 & -219.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -219.91 & 439.82 & -219.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -219.91 & 219.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 329.87 & -164.93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -164.93 & 329.87 & -164.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -164.93 & 164.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_{(18\times18)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

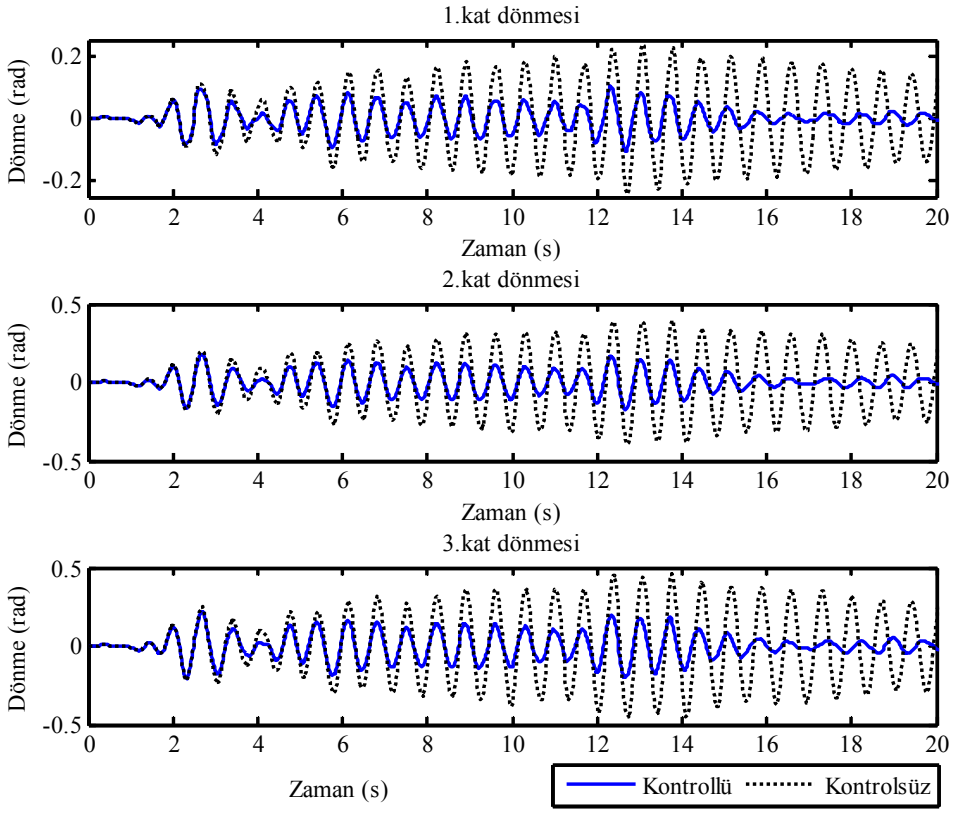
Ek A'da verilen MATLAB programı kullanılarak yapılan analiz sonuçları Şekil 6.6 – 6.8'de grafik halinde verilmiştir.



Şekil 6.6 : Katlara uygulanan optimal kontrol kuvveti.



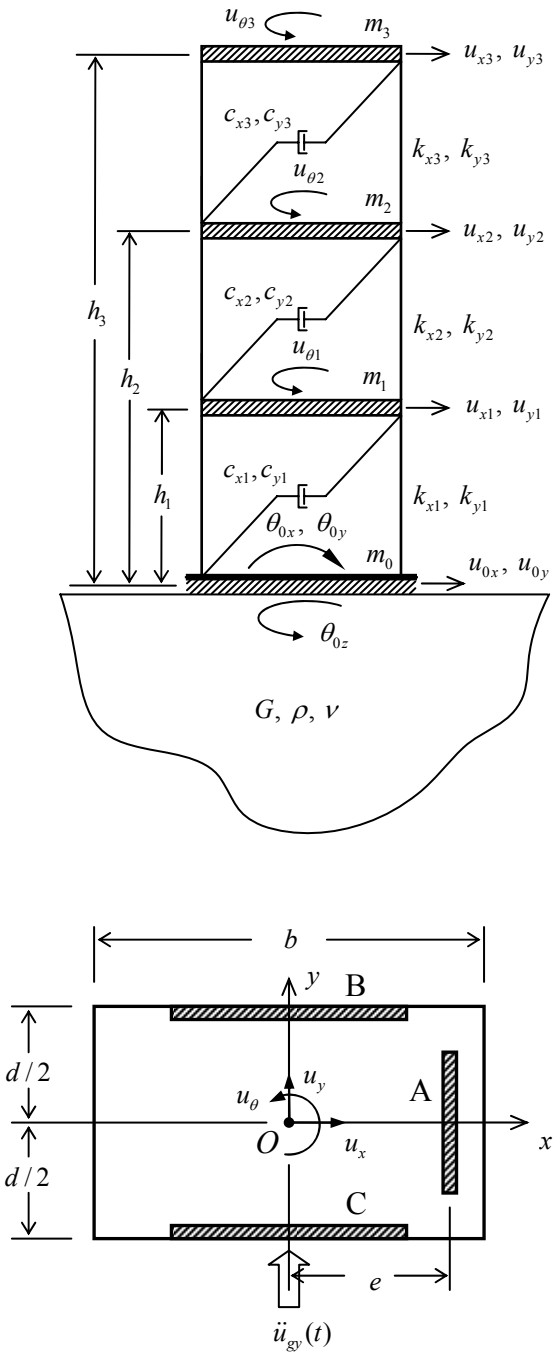
Şekil 6.7 : Üç katlı yapının *y* yönü kat yerdeğiştirmeleri.



Şekil 6.8 : Üç katlı yapının kat dönmeleri.

Sayısal örnek 6.2:

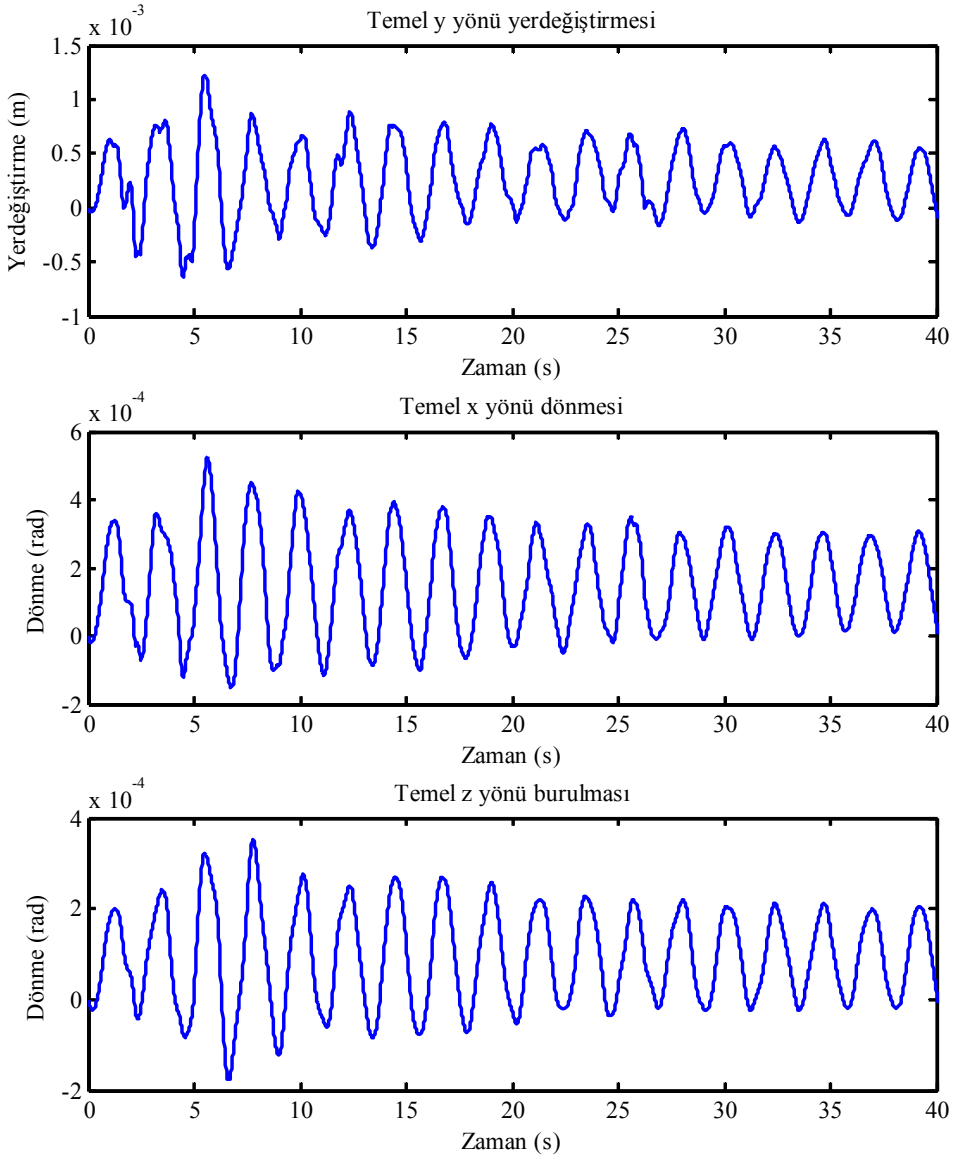
Plan ve kesiti Şekil 6.9'da gösterilen, Örnek 6.1'de verilen yapısal özelliklere sahip planda simetrik olmayan üç katlı bina kullanılarak yapı-zemin etkileşimi analizi yapılmıştır. Bina Şekil 4.6'da verilen El-Centro depremi etkisi altındadır.



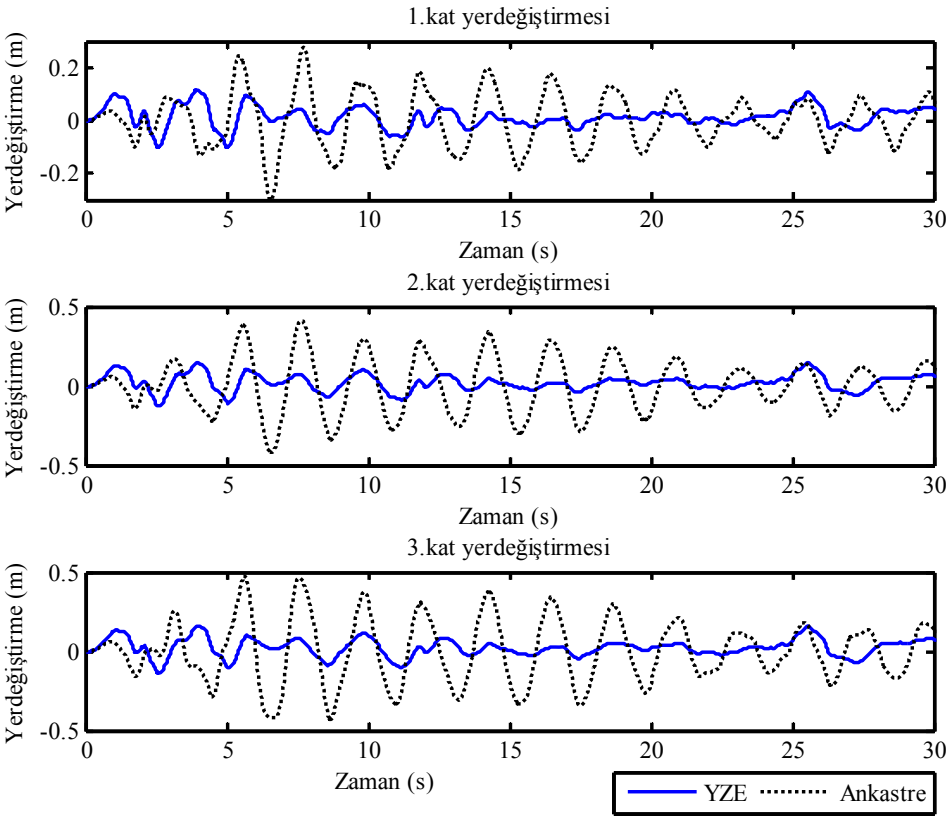
Şekil 6.9 : Zeminle etkileşen planda simetrik olmayan üç boyutlu yapı.

Binanın kat yüksekliği $h_1 = 3$ m, $h_2 = 6$ m, $h_3 = 9$ m, temel kütlesi $m_0 = 0$, kabul edilen dairesel temelin yarıçapı $r = 4$ m, zeminin kayma modülü $G = 10000$ kN/m^2 (orta sertlikte kil), Poisson oranı $\nu = 0.33$ ve kütlesel yoğunluğu $\rho = 2$ kNs^2/m^4.

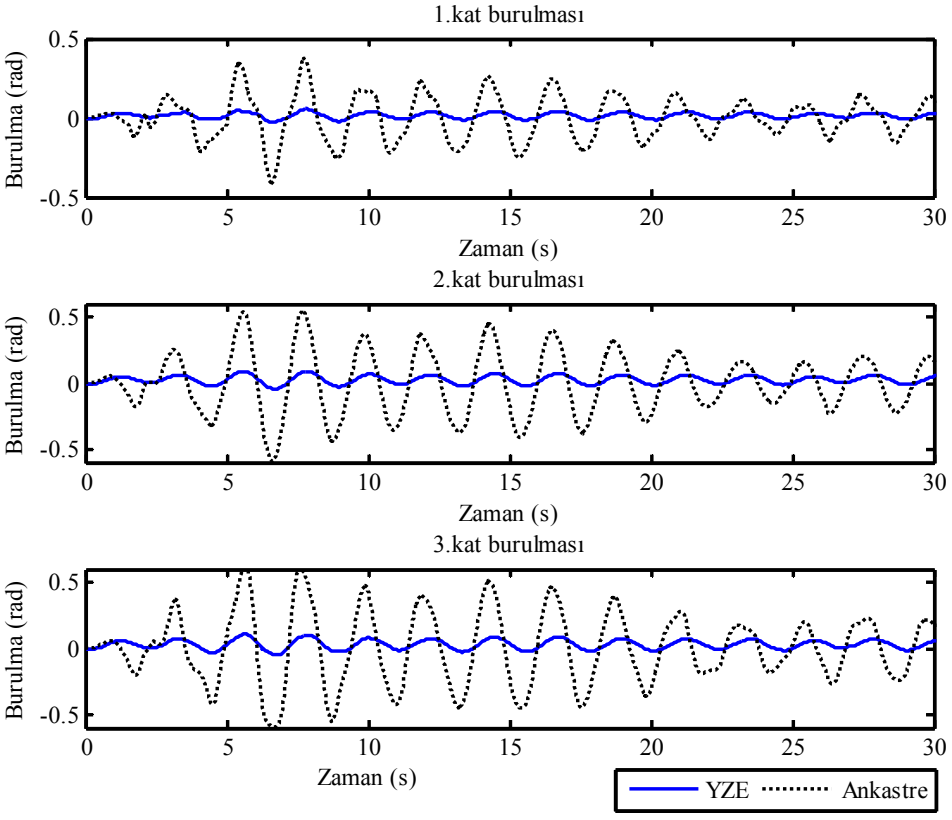
Ek A'da verilen MATLAB programı kullanılarak yapılan analiz sonuçları Şekil 6.10 – 6.12'de grafik halinde verilmiştir.



Şekil 6.10 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının temel yerdeğiştirmeleri.



Şekil 6.11 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının *y* yönü kat yerdeğiştirmeleri.



Şekil 6.12 : Zeminle etkileşen üç katlı yapının kat dönmeleri.

7. SONUÇ VE KONU ÜZERİNDE YAPILABİLECEK ÇALIŞMALAR

Bu tezde optimal kontrol ve yapı-zemin etkileşimi konuları kısaca tanıtıldıktan sonra deprem etkisinde zeminle etkileşen yapıların optimal kontrolü için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. 1940 El-Centro depremi K-G doğrultusundaki ivme kaydı kullanılarak orta sertlikte killi zemine oturan sistemler üzerinde yapılan sayısal uygulamalardan elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

1) Deprem etkisinde zeminle etkileşen yapılarda yapı rijitliği arttıkça daha büyük temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri meydana gelmektedir. Yapı yumuşadıkça, temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri daha küçük değerleri almakta ve ankastre mesnetli sisteme benzer şekilde davranış sergilemektedir.

2) Deprem etkisinde zeminle etkileşen optimal kontrollü yapılarda yapı rijitliği arttıkça uygulanan optimal kontrol kuvveti, ankastre mesnetli sistemlere uygulanan optimal kontrol kuvvetinden belli ölçüde farklılık göstermektedir. Yapı rijitliği azaldıkça veya serbest titreşim periyodu büyüdükçe ankastre mesnetli ve zeminle etkileşen sisteme uygulanan optimal kontrol kuvvetleri benzer şekli ve değeri almaktadır.

3) Deprem etkisinde zeminle etkileşen görece rijit sistemlere optimal kontrol kuvveti uygulanarak elde edilen kazanç önemli mertebede değildir; sistemin serbest titreşim periyodu büyüdükçe elde edilen kazanç daha belirgin hale gelmektedir. Yapı rijitliği azaldıkça optimal kontrol kuvveti uygulanan ve zeminle etkileşen sistemin davranışı, aynı rijitliğe sahip optimal kontrol kuvveti uygulanan ankastre mesnetli sistemin davranışına benzemektedir.

4) Deprem etkisinde zeminle etkileşen optimal kontrollü yapıların temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri üstyapı davranışıyla paralellik göstermektedir; başka bir deyişle rijit yapılarda kontrol kuvveti temel hareketi açısından etkin değildir; yapının periyodu büyüdükçe kontrol kuvveti temel hareketini sınırlamaktadır.

5) Deprem etkisinde zeminle etkileşen ve ankastre mesnetli yapılara uygulanan optimal kontrol kuvvetleri, rijitlik arttıkça farklılaşmakta; rijitlik azaldıkça birbirine benzemektedir. Buna karşılık, optimal kontrol kuvveti uygulanarak yapının davranışında elde edilen kazanç rijitlik arttıkça küçülmekte; rijitlik azaldıkça büyümektedir. Dolayısıyla deprem etkisinde zeminle etkileşen sistemin davranışı ankastre mesnetli sistemden elde edilen optimal kontrol kuvveti yardımıyla yaklaşık olarak tahmin edilebilir.

6) Optimal kontrol probleminde Riccati Matrisi hesaplanırken aynı anda yapının davranışı ve deprem ivmesinin bilinmesi gerekmektedir. Bu duruma çözüm olarak kullanılan yöntemlerden biri deprem ivmesinin sıfır alınmasıdır. Farklı bir yaklaşım olarak, bir adım öncesinde tahmin edilen deprem ivmesi yardımıyla optimal kontrol kuvveti hesaplanmıştır. Bu şekilde elde edilen optimal kontrol kuvveti, deprem ivmesi sıfır alınarak elde edilen optimal kontrol kuvvetinden daha büyüktür; ancak aradaki fark ihmal edilebilir mertebededir.

Konu üzerinde yapılabilecek çalışmalara gelince, çeşitli kaynaklarda [100] zaman tanım alanında yapı-zemin etkileşimi analizi yer almaktadır. Literatürde yapı-zemin etkileşiminin zaman tanım alanında analizi ile optimal kontrolü bir arada ele alan herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Klasik optimal kontrol analizinin zaman tanım alanında yapılması itibariyle bu tezde işlenen konu, zaman tanım alanında yapı-zemin etkileşimi analizi ile farklı açıdan ele alınabilir ve mühendislik uygulamalarına yönelik daha etkin sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Celep, Z., Kumbasar, N.,** 2004. *Deprem Mühendisliğine Giriş ve Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımı*, Beta Dağıtım, İstanbul.

[2] **Burns, R. S.,** 2001. *Advanced Control Engineering*, Butterworth-Heinemann, Oxford, London.

[3] **Housner, G., Bergman, L., Caughey, T., Chassiakos, A., Claus, R., Masri, S., Skelton, R., Soong, T., Spencer, B., Yao, J.,** 1997. Structural Control: Past, Present and Future, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **123**, 897-971.

[4] **Kobori, T., Minai, R.,** 1960. Analytical Study on Active Seismic Response Control, Transactions of Architectural Institute of Japan, No. **66**, 257-260.

[5] **Yao, J. T. P.,** 1972. Concept of Structural Control, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. **98**, No. 7, 1567-1574.

[6] **Spencer Jr., B. F., Nagarajaiah, S.,** 2003. State of the Art of Structural Control, *Journal of Structural Engineering*, July, 845-856.

[7] **Kelly, J. M., Tsai, H. C.,** 1985. Seismic Response of Light Internal Equipment in Base-Isolated Structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **13**, 711-732.

[8] **Kelly, J. M.,** 1986. Aseismic Base Isolation: Review and Bibliography, *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **5**, 202-216.

[9] **Kelly, J. M., Leitmann, G., Soldators, A. G.,** 1987. Robust Control of Base-Isolated Structures under Earthquake Excitation, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. **53**, 159-180.

[10] **Kelly, J. M., Tsai, H. C.,** 1988. Non-Classical Damping in Dynamic Analysis of Base-Isolated Structures with Internal Equipment, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **16**, 29-43.

[11] **Kelly, J. M., Tsai, H. C.,** 1989. Seismic Response of the Superstructure and Attached Equipment in a Base-Isolated Building, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **18**, 551-564.

[12] **Constantinou, M. C., Tadjbakhsh, I. G.,** 1984. The Optimum Design of a Base Isolation System with Friction Elements, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **12**, 203-214.

[13] **Constantinou, M. C., Tadjbakhsh, I. G.,** 1985. Hysteretic Dampers in Base Isolation: Random Approach, *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. **111**, 705-721.

[14] **Constantinou, M. C., Tadjbakhsh, I. G.,** 1985. Optimum Characteristics of Isolated Structures, *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. **111**, 2733-2750.

[15] **Lee, D. M., Medland, I. C.,** 1979. Base Isolation System for Earthquake Protection of Multi-Story Shear Structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **7**, 555-568.

[16] **Robinson, W. H.,** 1982. Lead-Rubber Hysteretic Bearings Suitable for Protecting Structures during Earthquakes, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **10**, 593-604.

[17] **Fujino, Y., Abe, M.,** 1993. Design Formulas for Tuned Mass Dampers Based on a Perturbation Technique, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, 833-854.

[18] **Yamaguchi, H., Hampomchai, N.,** 1993. Fundamental Characteristics of Multiple Tuned Mass Dampers for Suppressing Harmonically Forced Oscillations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, 51-62.

[19] **Igusa, T., Xu, K.,** 1994. Vibration Control Using Multiple Tuned Mass Dampers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **175**, 491-503.

[20] **Abe, M., Fujino, Y.,** 1994. Dynamic Characterization of Multiple Tuned Mass Dampers and Some Design Formulas, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **23**, 813-835.

[21] **Abe, M., Igusa, T.,** 1995. Tuned Mass Dampers for Structures with Closely Spaced Natural Frequencies, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **24**, 247-261.

[22] **Modi, V. J., Welt, F.,** 1988. Damping of Wind Induced Oscillations through Liquid Sloshing, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **30**, 85-94.

[23] **Fujino, Y., Sun, L. M., Pacheco, B. M., Chaiseri, P.,** 1992. Tuned Liquid Damper for Suppressing Horizontal Motion of Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **118**, 2017-2030.

[24] **Wirsching, P. H., Campbell, G. C.,** 1974. Minimal Structural Response under Random Excitation Using the Vibration Absorber, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **2**, 303-312.

[25] **Warburton, G. B., Ayorinde, E. O.,** 1980. Optimum Absorber Parameters for Simple Systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **8**, 197-217.

[26] **Ayorinde, E. O., Warburton, G. B.,** 1980. Minimizing Structural Vibrations with Absorbers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **8**, 219-236.

[27] **Warburton, G. B.,** 1981. Optimum Absorber Parameters for Minimizing Vibration Response, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **9**, 251-262.

[28] **Warburton, G. B.,** 1982. Optimum Absorber Parameters for Various Combination of Response and Excitation Parameters, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **10**, 381-401.

[29] **Pong, W. S., Tsai, C. S., Lee, G. C.,** 1994. Seismic Study of Building Frames with Added Energy-Absorbing Devices, Technical Report **NCEER-94-0016**, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY.

[30] **Van de Vegte, J., Hladun, A. R.,** 1973. Design of Optimal Passive Beam Vibration Controls by Optimal Control Techniques, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 427-434.

[31] **Wang, B. P., Kitis, L., Pilkey, W. D., Palazzolo, A.,** 1985. Synthesis of Dynamic Vibration Absorbers, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **107**, 161-166.

[32] **Warburton, G. B., Ayorinde, E. O.,** 1980. Optimum Absorber Parameters for Simple Systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **8**, 197-217.

[33] **Soong, T. T.,** 1990. *Active Structural Control: Theory and Practice*, Longman Scientific and Technical, New York, NY.

[34] **Villaverde, R.,** 1985. Reduction in Seismic Response with Heavily-Damped Vibration Absorbers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **13**, 33-42.

[35] **Igusa, T. and Xu, K.,** 1994. Vibration Control using Multiple Tuned Mass Dampers, *Journal of Sound and Vibration*.

[36] **Constantinou, M. C., Symans, M. D.,** 1992. Experimental and Analytical Investigation of Seismic Response of Structures with Supplemental Fluid Viscous Dampers, Technical Report **NCEER-92-0032**, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY.

[37] **Yang, J. N., Soong, T. T.,** 1989. Recent Advances in Structural Control, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. **3**, No. 4, 179-188.

[38] **Kobori, T.,** 1994. Future Directions on Research and Development of Seismic-Response-Controlled Structures, *Proceedings of the 1st World Conference on Structural Control*, August 3-5, Los Angeles, CA, Vol. **1**, Panel 19-31.

[39] **Soong, T. T.,** 1990. State-of-the-Art of Structural Control in USA, *Proceedings of the US National Workshop on Structural Control Research*, Los Angeles, October 25-26, 48-65.

[40] **Chang, J. C., Soong T. T.,** 1980. Structural Control using Active Tuned Mass Dampers, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **106**, No. 6, 1091-1098.

[41] **Martin, C. R., Soong T. T.,** 1976. Modal Control of Multistory Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **102**, No.4, 613-632.

[42] **Roorda, J.,** 1975. Tendon Control in Tall Structures, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. **101**, No. 3, 505-521.

[43] **Yang, J. N.,** 1976. Applications of Optimal Control Theory to Civil Engineering Structures, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **101**, No. 6, 818-838.

[44] **Yang, J. N., Giannopoulos, F.,** 1978. Active Tendon Control of Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **104**, No. 3, 551-568.

[45] **Yao, J. T. P., Sae-Ung, S.,** 1978. Active Control of Building Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **104**, No. 2, 335-350.

[46] **Pu, J. P., Hsu, D. S.,** 1988. Optimal Control of Tall Buildings, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **114**, 973-989.

[47] **Yang, H. T. Y., Liaw, D. G., Hsu, D. S., Fu, H. C.,** 1993. Simple Model for Optimal Control of Tall Buildings, *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. **119**, 902-919.

[48] **Balas, M.,** 1978. Active Control of Flexible Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. **25**, 415-436.

[49] **Meirovitch, L.,** 1990. *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, NY.

[50] **Yang, J. N., Akbarpour, A., Ghaemmaghami, P.,** 1987. New Optimal Algorithms for Structural Control, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **113**, No. 9, 1369-1386.

[51] **Dora, P., Abdall, C., Cero, V.,** 1995. *Linear-Quadratic Control: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ.

[52] **Jacobson, D. H.,** 1977. *Extensions of Linear Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory*, Academic Press, NY.

[53] **Roorda, J.,** 1975. Tendon Control in Tall Structures, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. **101**, 505-521.

[54] **Pu, J. P., Kelly, J. M.,** 1991. Active Control and Seismic Isolation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **117**. 2221-2236.

[55] **Yang, J. N., Akbarpour, A., Ghaemmaghami, P.,** 1987. New Optimal Control Algorithms for Structural Control, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **113**, 1369-1386.

[56] **Abdel-Rohman, M., Nayfeh, A. H.,** 1987. Active Control of Non-linear Oscillations in Bridges, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **113**, 335-348.

[57] **Brogan, W. L.,** 1991. *Modern Control Theory*, 3rd Ed., Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ.

[58] **Wu, Z., Soong, T. T.,** 1996. Modified Bang-Bang Control Law for Structural Control Implementation, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **122**, No. 8, 771-777.

[59] **Masri, S. F., Bekey, G., Caughey, T. K.,** 1981. Optimal Pulse Control of Flexible Structures, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **48**, 619-626.

[60] **Udwadia, F., Tabaie, S.,** 1981. Pulse Control of Single Degree-of-Freedom System, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **107**, No. 6, 997-1009.

[61] **Udwadia, F., Tabaie, S.,** 1981. Pulse Control of Structural and Mechanical Systems, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **107**, No. 6, 1011-1028.

[62] **Prucz, Z., Soong, T. T., Reinhora, A. M.,** 1985. An Analysis of Pulse Control for Simple Mechanical Systems, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, ASME, Vol. **107**, 123-131.

[63] **Pantelides, C. P., Tzan, S. R., Nelson, P. A.,** 1995. Continuous Pulse and Hybrid Control of Structures, *The Structural Design of Tall Buildings*, Vol. **4**, 127-136.

[64] **Joghataie, A., Ghaboussi, J.,** 1996. A Comparative Study of Learning Methods and Mathematical Algorithms in Structural Control, *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, Paper No. 1432, June 23-28, Acapulco, Mexico.

[65] **Faravelli, L., Venini, P.,** 1994. Active Structural Control by Neural Networks, *Journal of Structural Control*, Vol. **1**, 79-101.

[66] **Wen, Y. K., Ghaboussi, J., Venini, P., Nikzad, K.,** 1992. Control of Structures using Neural Networks, *Proceedings of the US-Italy-Japan Workshop/Symposium on Structural Control and Intelligent Systems*, Soorento, Italy, July 12-15, 232-251.

[67] **Spencer, B. F., Suhardjo, J., Sain, M. K.,** 1991. Frequency Domain Control Algorithms for Civil Engineering Applications, *Proceedings of the International Workshop on Technology for Hong Kong's Infrastructure Development*, December 19-20, Hong Kong, 169-178.

[68] **Yang, J. N., Li, Z., Wu, J. C., Young, K. K. D.,** 1993. A Discontinuous Control Method for Civil Engineering Structures, *Proceedings of the 9th VPI&SU Symposium on Dynamics and Control of Large Structures*, May 10-12, Blacksburg, VA, 167-180.

[69] **Yang, J. N., Li, Z., Wu, J. C.,** 1993. Discontinuous Nonlinear Control of Base-Isolated Buildings, *Proceedings of the 1st International Workshop on Structural Control*, August 5-7, Honolulu, HI, 551-553.

[70] **Yang, J. N., Wu, J. C., Agrawal, A. K., Li, Z.,** 1994. Sliding Mode Control for Seismic-Excited Linear and Nonlinear Civil Engineering Structures, Technical Report **NCEER-94-0017**, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY.

[71] **Yang, J. N., Wu, J. C., Agrawal, A. K.,** 1995. Sliding Mode Control for Seismically Excited Linear Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **121**, No. 12, 1386-1390.

[72] **Utkin, V. I., Young, K. D.,** 1978. Methods for Constructing Discontinuous Planes in Multidimensional Variable Structure Systems, *Automation and Remote Control*, No. **31**, 1466-1470.

[73] **Onodo, J., Watanabe, N.,** 1991. Vibration suppression by variable-stiffness members, *AIAA Journal*, Vol. **29**(6), 977-983.

[74] **Chu, S. Y., Soong, T. T., Reinhorn, A. M.,** 2005. *Active, Hybrid and Semi-Active Structural Control, A Design and Implementation Handbook*, John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex.

[75] **Lai, J. S., Wang, K. W.,** 1996. Parametric control of structural vibrations via adaptable stiffness dynamic absorbers, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. **118**, January, 41-47.

[76] **Aldemir, Ü., Bakioğlu, M.,** 2000. Semiactive control of earthquake-excited structures, *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, Vol. **24**, 237-246.

[77] **Hart, G. C., Wong, K.,** 2000. *Structural Dynamics for Structural Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., NY.

[78] **Paraskevopoulos, P. N.,** 2002. *Modern Control Engineering*, Marcel Dekker, Inc. New York, NY.

[79] **Url-1** <*http://quiver.eerc.berkeley.edu:8080/studies/system/motions/la10in50yr.html*>, alındığı tarih 21.03.2006.

[80] **Dreyfus, S. E.,** 1962. Variational Problems with Inequality Constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol. **4**, 297.

[81] **Pontryagin, L. S., Boltianski, P. V.,** 1962. *Mathematical Theory of Optimal Processes*, Fizmagtiz, Moscow.

[82] **Bellman, R.,** 1957. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[83] **Kirk, D. E.,** 1970. *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ.

[84] **Vaughn, D. R.,** 1970. A nonrecursive algebraic solution for the discrete Riccati equation, IEEE, *Trans. Automatic Control*, Vol. **AC-15**, 597-599.

[85] **Laub, A. J.,** 1979. A Schur Method for solving algebraic Riccati equations, IEEE, *Trans. Automatic Control*, Vol. **AC-24**, 913-921.

[86] **Aldemir, Ü.,** 1999. Yapıların optimal kontrolü, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul.

[87] **Aldemir, Ü., Bakioğlu, M., Akhiev, S. S.,** 2001. Optimal control of linear buildings under seismic excitations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **30**, 835-851.

[88] **Yamada, K.,** 1999. Real-time prediction of near-future seismic excitation adapting AR model to preceding information, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **28**, 1587-1599.

[89] **Jackson, L. B.,** 1989. *Digital Filters and Signal Processing*, Second Edition, Kluwer Academic Publishers.

[90] **Wolf, J. P.,** 1985. *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

[91] **Wu, W. H., Smith, H. A.,** 1995. Efficient modal analysis for structures with soil-structure interaction, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **24**, 283-299.

[92] **Çelebi, E., Gündüz, A. N.,** 2005. An Efficient Seismic Analysis Procedure for Torsionally Coupled Multistory Buildings Including Soil-Structure Interaction, *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, Vol. **29**, 143-157.

[93] **Çelebi, E.,** 2001. Planda simetrik olmayan çok katlı yapıların zeminle dinamik etkileşimi, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul.

[94] **Wu, W. H.,** 1997. Equivalent fixed-base models for soil-structure interaction systems, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **16**, 323-336.

[95] **Prasad, A. M.,** 1989. Studies of soil-structure and fluid-structure interaction, *Ph.D. Thesis*, Rice University, Houston, TX, Chaps. 2 and 3, 11-69.

[96] **Lysmer, J., Kuhlemeyer, R. L.,** 1969. Finite dynamic model for infinite media, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **95**, 859-877.

[97] **Smith, W. D.,** 1974. A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. **15**, 492-503.

[98] **Liao, Z. P., Wong, H. L.,** 1984. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **3**, 174-183.

[99] **Clough, R. W., Penzien, J.,** 2003. *Dynamics of Structures*, Computers & Structures, Inc., Berkeley, CA.

[100] **Wolf, J. P.,** 1988. *Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

[101] **Veletsos, A. S., Wei, Y. T.,** 1971. Lateral and rocking vibrations of footings, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, **97**(9), 1227-1248.

[102] **Luco, J. E., Westman, R. A.,** 1971. Dynamic response of circular footings, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE , **97**(EM5).

[103] **Wolf, J. P., Deeks, A. J.,** 2004. *Foundation Vibration Analysis: A Strength-of-Materials Approach*, Elsevier, Oxford.

[104] **Lysmer, J.,** 1978. Analytical procedures in soil dynamics, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, ASCE, **3**, 1267-1316.

[105] **Roesset, J. M.,** 1980. Stiffness and damping coefficients in foundations, Dynamic response of pile foundations, M. O'Neil and R. Dobry, eds., New York, N.Y., ASCE, 1-30.

[106] **Roesset, J. M.** 1980. The use of simple models in soil-structure interaction, Civil Engineering and Nuclear Power, ASCE No. 10/3, ASCE, New York, NY.,

[107] **Luco, J. E.,** 1982. Linear soil-structure interaction: A review, Earthquake ground motion and its effects on structures, ASME, New York, N.Y., 41-57.

[108] **Gazetas, G.,** 1983. Analysis of machine foundation vibrations: State-of-the-art, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **3**(1), 2-42.

[109] **Novak, M.,** 1987. *State of the art in analysis and design of machine foundations, Soil-structure interaction*, Elsevier and Computational Mechanics Ltd., New York, N.Y., 171-192.

[110] **Pais, A., Kausel, E.,** 1988. Approximate formulas for dynamic stiffness of rigid foundations, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. **7**, 213-227.

[111] **Crouse, C. B., Liang, G. C., Martin, G. R.,** 1984. Experimental Foundation Impedance Functions, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. **111**, 819-822.

[112] **Crouse, C. B., Hushmand, B., Luco, J. E., Wong, H. L.,** 1988. Foundation impedance functions: theory versus experiment, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. **116**, 432-449.

[113] **Gazetas, G.,** 1991. Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. **117**, 1363-1381.

[114] **Mita, A., Luco, J. E.,** 1989. Impedance functions and input motions for embedded square foundations, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. **115**, 491-503.

[115] **Rechard, F. E., Hall, J. R.,** 1970. *Vibrations of Soils and Foundation*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ.

[116] **Kramer, S. L.,** 1995. *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall, NJ.

[117] **Wolf, J. P.,** 1997. Spring-dashpot-mass models for foundation vibrations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **26**, 931-949.

[118] **Veletsos, A. S., Nair, V. D.,** 1974. Torsional vibration of viscoelastic foundations, *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, **100**, 225-246.

[119] **Kiusalaas, J.,** 2005. *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, Cambridge University Pres, Cambridge.

[120] **Wong, H. L., Luco, J. E.,** 1990, Active control of the seismic response of structures in the presence of soil-structure interaction effects, *Proc. U.S. National Workshop on Structural Control Research*, University of Southern California, Los Angeles, CA, 25 - 26 October, 231- 235.

[121] **Wong, H. L., Luco, J. E.,** 1991, Structural control including soil-structure interaction effects, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **1**, 2237 - 2250.

[122] **Sato, T., Toki, K., Matsushima, H.,** 1991, Optimal control of structures taking into account the dynamic soil-structure interaction, *Colloquium on Control of Structures*, Tokyo, July, 257 - 263 (in Japanese).

[123] **Wong, H. L., Luco, J. E.,** 1992, Effects of soil-structure interaction on the seismic response of structures subjected to active control, *Proc. 10th World Conf. on Earthquake Engineering*, Madrid, Spain, 2137 - 2142.

[124] **Sato, T., Toki, K.,** 1992, Predictive control of seismic response of structures taking into account the soil-structure interaction, *Proc. 1st European Conf. on Smart Structures and Materials*, Glasgow, Scotland, 245 - 250.

[125] **Alam, S. M. S., Baba, S.,** 1993, A robust active optimal control scheme including soil-structure interaction, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **119**, 2533 - 2551.

[126] **Smith, H. A., Wu, W. H., Borja, R. I.,** 1992, Active structural control with soil-structure interaction effects, *Proc. U.S. - Italy - Japan workshop/symposium on structural control and intelligent systems*, Sorrento, Italy, 204-218.

[127] **Smith, H. A., Wu, W. H., Borja, R. I.,** 1994, Structural control considering soil-structure interaction effects, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**, 609 - 626.

[128] **Wu, W. H., Smith, H. A.,** 1994, Optimal structural control considering soil-structure interaction effects, Report No. **JABEEC 112**, John A. Blume Earthquake Engineering Center, Stanford University, CA.

[129] **Wu, W. H., Smith, H. A.,** 1995, Comparison of SSI effects on externally and internally controlled systems, *Smart Materials of Structures*, **4**, A158 - A168.

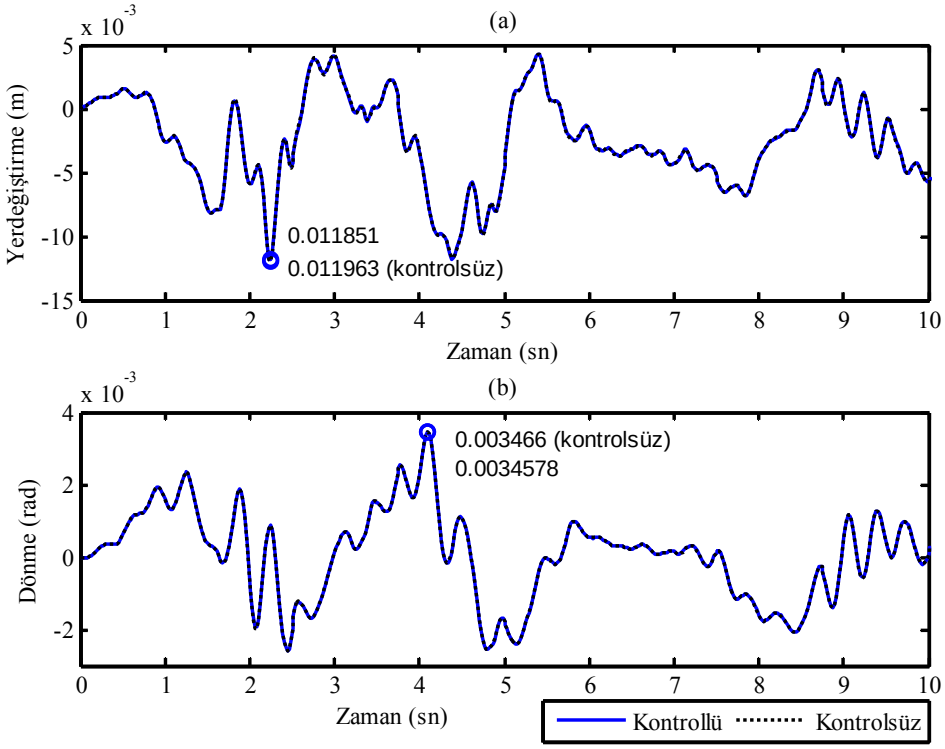
[130] **Luco, J. E.,** 1998, A simple model for structural control including soil-structure interaction effects, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 27, 225 - 242.

[131] **Chopra, A. K.,** 2006, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

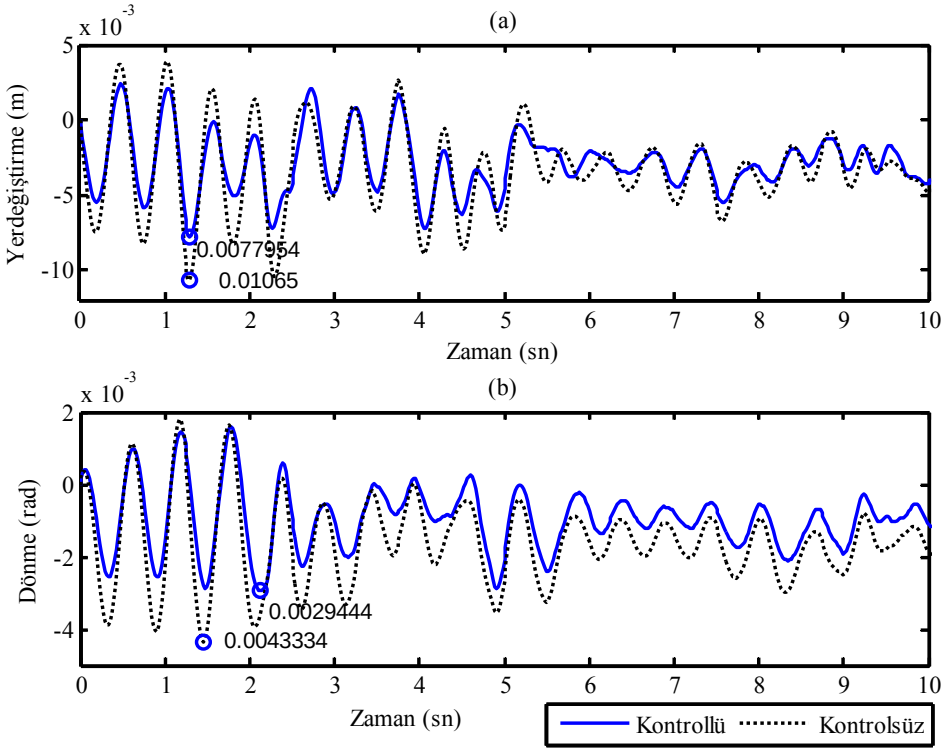
EKLER

EK A : MATLAB programları (CD ortamındadır)
EK B : Sayısal örnek 5.1'in sonuçları

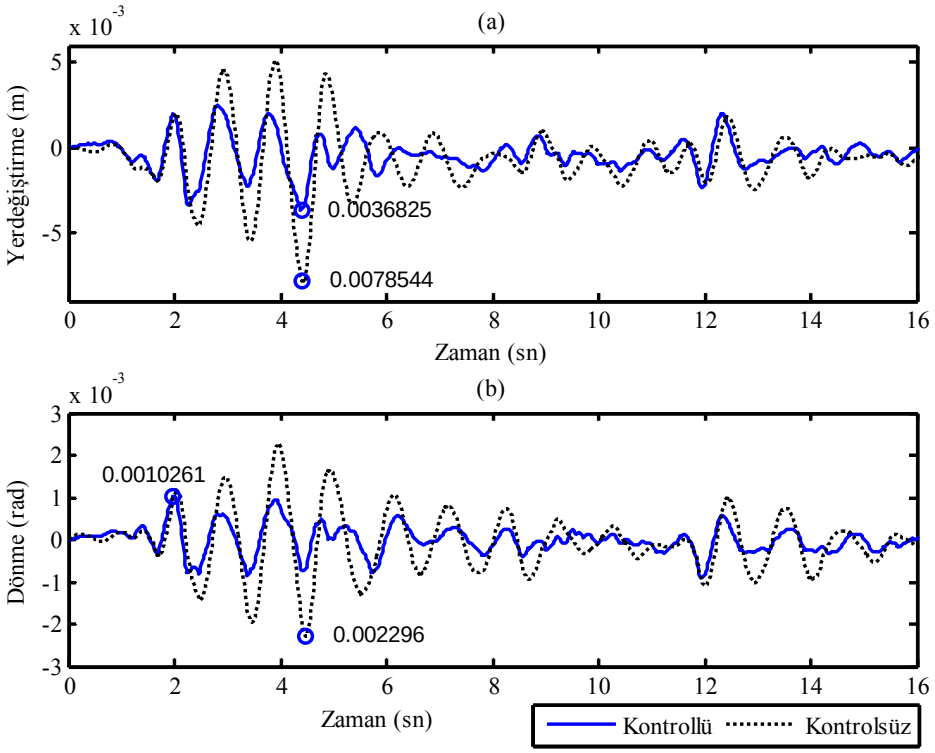
EK B : Sayısal örnek 5.1'in sonuçları



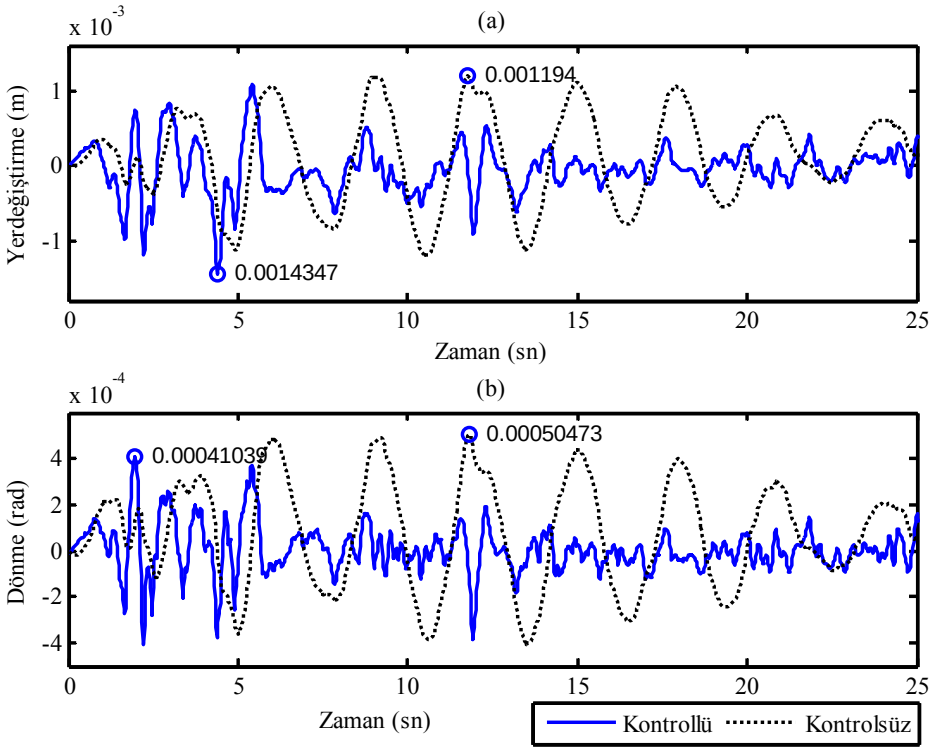
Şekil B.1 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 0.2 s.



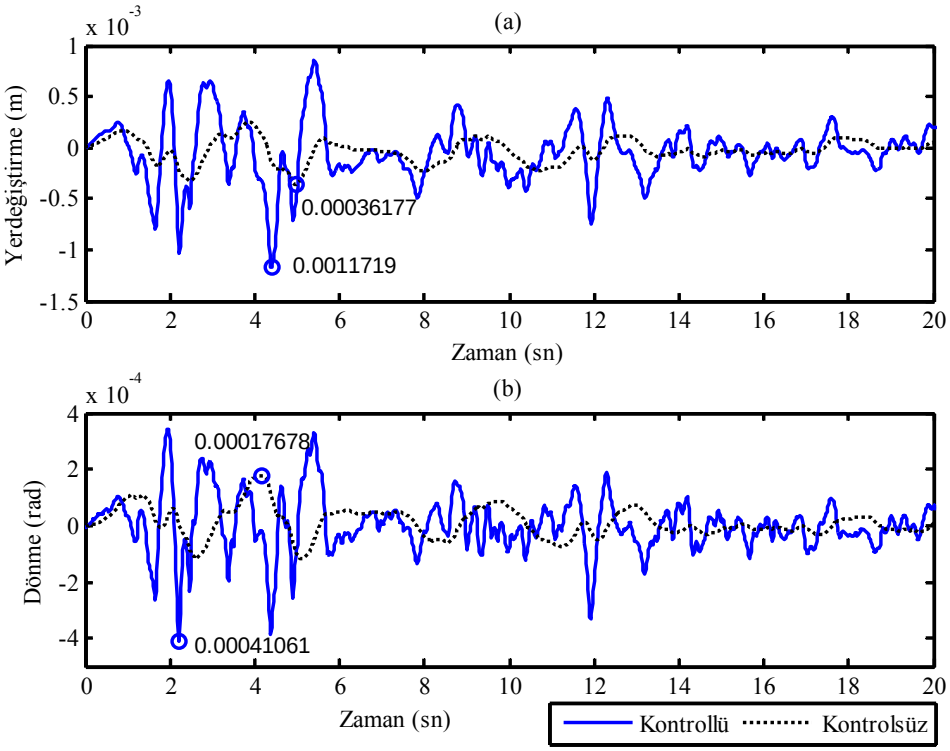
Şekil B.2 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 0.5 s.



Şekil B.3 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 1.0 s.



Şekil B.4 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 3.0 s.



Şekil B.5 : Temel yanal yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri, T_n = 5.0 s.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Ali Ruzi ÖZUYGUR
Doğum Yeri ve Tarihi:	Karakaş, Doğu Türkistan (Çin), 09.03.1972
Lisans Üniversite:	Ürümçi İnşaat Mühendisliği Mektebi (Çin), 1992
Yüksek Lisans:	İstanbul Teknik Üniversitesi, Yapı Mühendisliği, 2003