ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DAR DİK TOPLAMSAL OPERATÖRLER KÜMESİ ÜZERİNDE CEBİRSEL YAPILAR

DAVUT ÖZER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI

2020

Her hakkı saklıdır

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "DAR DİK TOPLAMSAL OPERATÖRLER KÜMESİ ÜZERİNDE CEBİRSEL YAPILAR" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Davut ÖZER

Çankırı, Temmuz 2020

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DAR DİK TOPLAMSAL OPERATÖRLER KÜMESİ ÜZERİNDE

CEBİRSEL YAPILAR

Davut ÖZER

Çankırı Karatekin Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Faruk POLAT

Bu tezde, bir vektör örgüsü ile bir normlu uzay arasında tanımlanan dar dik toplamsal operatörler kümesi üzerinde ki cebirsel yapılar ile ilgili bir araştırma verilmiştir. Bir dar operatörün bir sabit ile çarpımı yine dar olduğundan, iki dar operatörün toplamlarının darlığı incelenmiştir. Bu bağlamda, toplamları yine dar olan dar dik toplamsal operatör örnekleri araştırılmıştır. Literatürden toplamları da dar olan iki dar dik toplamsal yada iki dar operatörün değişik inşa teknikleri verilmiştir. Bu inşa tekniklerinden bazıları H.I.Humenchuk, V.V.Mykhayluk ile M.M.Popov ve M.A.Pliev, F.Polat ile M.R. Weber ' e aittir.

2020, 67 Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Vektör örgüsü, dar operatör, dik toplamsal operatör, normlu uzay, örgü normlu uzay.

ABSTRACT

Master Thesis

ALGEBRAIC STRUCTURES ON THE SET OF NARROW

ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS

Davut ÖZER

Çankırı Karatekin University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Faruk POLAT

In this thesis, a research on the algebraic structures of the set of narrow orthogonally additive operators defined between a vector lattice and a normed space is given. Since multiplication of a narrow operator by a scalar is again narrow, the narrowness of the sum of two narrow operators is investigated . In this context, the examples of narrow orthogonally additive operators in which their sums are narrow were investigated. In the literature, several constructions on the two narrow operators or two narrow orthogonally additive operators whose sums are narrow are given. Some of these construction techniques belongs to H.I.Humenchuk, V.V.Mykhayluk with M.M.Popov and M.A.Pliev, F.Polat with M. R.Weber.

2020, 67 Pages

KEYWORDS: Vector lattice, narrow operator, orthogonally additive operator, normed space, lattice normed space.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Dar dik toplamsal operatörler kümesi üzerinde cebirsel yapılar adlı bu çalışma 2018 – 2020 yılları arasında hazırlanarak Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne "Yüksek lisans tezi" olarak sunulmuştur. Bu çalışmanın amacı her zaman dar dik toplamsal iki operatörün toplamı dar dik toplamsal olmayabiliyor. O yüzden bu anlamda da dar dik toplamsal ailesi bir vektör uzayı değildir. Bu tezde de toplamları dar dik toplamsal olan operatör örneklerini araştırdık.

Çalışmanın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren, her türlü yardımını esirgemeyen, her zaman destekleyen değerli hocam Doç. Dr. Faruk Polat' a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca gerek eğitim gerekse de sosyal anlamda desteklerini esirgemeyen hocam Doç. Dr. İlyas İNCİ' ye ayrıca teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım sırasında her türlü hoşgörü ve desteği eksik etmeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Davut ÖZER

Çankırı, 03 Temmuz 2020

İÇİNDEKİLER

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR v
SİMGELER DİZİNİ vii
1. GiRİŞ VE TEORİK ÇERÇEVE 1
2. Ön Bilgiler 4
2.1. Sıralı Vektör Uzayları 4
2.2. Riesz Uzaylarındaki Operatörler 8
3. DAR VE SONLU RANKLI DİK TOPLAMSAL OPERATÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE: H. I. HUMENCHUK'IN YAKLAŞIMI 12
3.1. Giriş 12
3.2. Dar Dik Toplamsal Operatörler Ve Bazı Bilindik Sonuçlar 15
3.3. Ana Sonuç 20
4. KÖTHE FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNE TANIMLI DAR OPERATÖRLERİN TOPLAMLARI: V.V.MYKHAYLUK VE M.M. POPOV'UN YAKLAŞIMI 22
4.1. Giriş 22
4. 2. İyi bilinen bazı sonuçlar 26
4.3. Haar Tipi Sistemler 29
4.4. Banach Köthe Uzayları İçin Temel Sonuçlar 33
4.5. İki Regüler Dar Operatörün Toplamı 37
4.6. Köthe Fonksiyon Uzayları İle İlgili Bir Soru 39
5. ÖRGÜ NORMLU UZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI TOPLAMSAL OPERATÖRLER: M.A. PLIEV, F. POLAT VE M.R. WEBER'İN YAKLAŞIMI 41
5.1. Giriş. 42
5.2. Örgü Normlu Uzaylar Üzerinde Tanımlı Dar Dik Toplamsal Operatörler 43
5.3. İki Dar Operatörün Toplamı 48
KAYNAKLAR 56
ÖZGEÇMİŞ 60

SİMGELER DİZİNİ

Simge

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\hookrightarrow$	İzometrik Gömme
X^*	Dual Uzayındaki Birim Yuvar
L_b	Sıra Sınırlı Operatörlerin Alt Vektör Uzayı

1. GİRİŞ VE TEORİK ÇERÇEVE

1935 yılında J. Von Neuman [Neuman 1935] L^2 uzayı üzerinde tanımlı lineer integral operatörlerinin karakterizasyonu problemini ortaya attı. Bu problem 1974 yılında A.V. Bukhvalov [Bukhvalov 1974] tarafından lineer sıra sınırlı operatörlerin temel hesaplama aracı olarak kullanılması ile çözülmüştür. Bu hesaplama yöntemi daha önce benzer şekilde W.A.J.Luxemburg ve A.C.Zaanen [Luxemburg and Zaanen 1971] tarafından kullanılmıştı. Lineer olmayan operatörlerin integral gösterimleri için Bukhvalov tipi bir teorem elde etmek için lineer sıra sınırlı operatörlerin rolünü üstlenen lineer olmayan operatörlerin bir sınıfına ihtiyaç duyuldu. Bu ihtiyaç Mazon ve Segura de Leon [Mazo and Segura de Leon $1990a, 1990b$] tarafından vektör örgüleri üzerindeki sıra sınırlı, dik toplamsal operatörlerin tanımlanmasıyla giderilmiştir. Dolayısıyla, bu operatörler sınıfının özgün değeri lineer olmayan integral denklemleri teorisine olan uygulamalarından kaynaklanmaktadır. Ayrıca son yıllarda dik toplamsal olan bazı operatörler ailesi üzerinde yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu tezde nispeten yeni tanıtılmış olarak kabul edebileceğimiz dik toplamsal operatörler teorisinin fonksiyonel analizde ki bazı kullanımlarını göstermeyi amaçlıyoruz.

Fonksiyonel analizdeki kompak operatörlerin bir genellemesi olarak dar operatörler (tanımı farklı uzaylar için revize edilerek ileride ki ünitelerde verilecektir) Plichko ve Popov [Plichko and Popov 1990] tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır. Aslında bu operatörlerle ilgili çalışmalar daha öncesinden başlamıştır. Dar operatörler teorisi ile ilgili son gelişmeleri [Popov 2011] makalede ve [Popov and Randrianantoanina 2013] kitapta bulabiliriz. Hemen belirtelim ki skaler çarpım altında dar operatörler ailesi kapalıdır. Fakat herhangi iki dar operatörün toplamı dar olmayabilir. Bununla ilgili literatürde pek çok örnek mevcuttur. Fakat toplamları dar olan iki dar operatör örneği bulmak her zaman kolay olmayabilir. Bu tezde literatürde toplamları da dar olan ya da olmayan operatör örneklerini inceleyeceğiz. Bu örneklerde de göreceğimiz ekstra koşul, verilen dar operatörlerin aynı zamanda dik toplamsal olmasıdır. Bu da bize dik toplamsal operatörlerin başka bir kullanım alanının da dar operatörlerin toplamının da dar olmasının sağlamasında oynayacağı roldür. Bu bağlamda üç araştırma makalesini irdeleyeceğiz.

Bu tezin **ilk** ünitesi tez çalışmasının ana hatlarını bir giriş olarak vermektedir.

İkinci ünite sıralı vektör uzayları, Riesz uzayları (vektör örgüleri) ve bunlar arasındaki operatörlerle ilgili bazı temel tanımları, örnekleri ve sonuçları içermektedir. Bu ünite ve tez boyunca Riesz uzaylarıyla ilgili açıklanmayan kavramlar için [Luxemburg and Zaanen 1971] kitabına başvurulabilir.

Üçüncü ünite I.Humenchuk'ın [Humenchuk 2015] makalesine odaklanmaktadır. Bu makalede atomsuz Dedekind tam bir vektör örgüsünden bir Banach uzayına tanımlı dar dik toplamsal bir operatör ile sonlu ranklı yanal norm sürekli dik toplamsal bir operatörün toplamının da dar olduğu gösterilmektedir.

Dördüncü ünite V.V. Mykhaylyuk ve M.M. Popov 'un [Mykhaylyuk and Popov 2013] makalesine odaklanmaktadır. Bu makalede $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe Banach uzayı E ve bir Banach uzayı X üzerinde hangi yeter ve gerek koşullar altında bu iki uzay arasında tanımlanan dar operatörlerin toplamının dar olduğu araştırılmaktadır. Bu durum kullanılarak $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe Banach uzayı E verildiğinde öyle bir Banach uzayı X in varlığı gösterilmekte öyle ki dar olan iki $T_1, T_2: E \to X$ için $T_1 + T_2$ nin dar olmadığı gösterilmiştir. Dolayısıyla bu sonuçta bize V. M. Kadets tarafından ortaya atılan Her Banach uzayı X için L_1 den X e tanımlı " iki dar operatörün toplamı dar mıdır? '' sorusunun cevabının olumsuz olduğunu göstermektedir. Ayrıca her $1 < p < \infty$ için toplamları dar olmayan iki regüler dar $T_1, T_2: L_p \to L_\infty$ operatörler tanımlanmıştır. $p = \infty$ için bu sonuç O. V. Maslyuchenko'nun sorusu için bir cevaptır.

Beşinci ünite M.A. Pliev, F. Polat ve M. R. Weber 'in [Pliev et al. (2019)] makalesine odaklanmaktadır. Bu makalede örgü normlu uzaylar üzerindeki dik toplamsal operatörler ele alınmaktadır. Makalenin ilk kısmında örgü normlu bir uzay üzerinde tanımlanan ve bir Banach uzayında değerler alan dar yanal norm-sürekli ve C-kompak operatörlerle ilgili bazı örnekler verilmektedir

Ayrıca yine makalenin ilk kısmında izdüşüm özelliğine sahip bir atomik E vektör örgüsü üzerine tanımlı (V, E) ayrıştırılabilir örgü normlu uzay üzerinde tanımlı normlu bir X uzayında değerler alan yanal norm sürekli dar dik toplamsal operatörün sıfır operatörü olduğu gösterilmiştir.

Makalenin ikinci kısmında sıra tam ayrıştırılabilir örgü normlu uzayından bir Banach uzayı X içine tanımlı sırasıyla yanal norm sürekli C −kompak ve dar operatörler $S, T: V \to X$ nin toplamları olan S+T nin de dar olduğu gösterilmiştir.

2. Ön Bilgiler

2.1. Sıralı Vektör Uzayları

E bir reel vektör uzayı öyle ki üzerinde " $\leq$ " bir sıralama bağıntısı (yani yansıyan, terssimetrik ve geçişken) olsun. Aşağıda ki özellikler sağlanırsa E ye bir sıralı vektör uzayı denir.

(i) Eğer $u, v \in E$ ve $u \leq v$ ise, o zaman tüm $w \in E$ için $u + w \leq v + w$ dur.

(ii) Eğer $u, v \in E$ ve $u \leq v$ ise, o zaman her $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda u \leq \lambda v$ dir.

E de her hangi iki u, v eleman için $u \leq v$ gösterimi için başka bir gösterim $v \geq u$ dur.

E nin $u \geq 0$ şartını sağlayan bütün u elemanlarına pozitif elemanları denir ve $u > 0$ ise u ya kesinlikle pozitif eleman denir. E nin bütün pozitif elemanlarının kümesi

$E^+ = \{u \in E : u \geq 0\}$ ile gösterilir ve bu kümeye E nin pozitif konisi denir. E sıralı vektör uzayında, her $u, v \in E$ için (varsa) aşağıdakileri yazarız.

$$\sup(u, v) = u \vee v\,, \inf(u, v) = u \wedge v, \sup(u, 0) = u^+, \sup(-u, 0) = u^-,\ |u| = u\,V - u$$

Tanım 2.1.1. E bir sıralı vektör uzayı olsun. Eğer her $u, v \in E$ için $u \vee v$ E de mevcut ise E ye Riesz uzayı veya vektör örgüsü denir. Bazı sıralı vektör uzayları ve Riesz uzayları aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.2. 1. E boş olmayan bir küme, X, E üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun. X kümesi noktasal toplama ve skalerle çarpma işlemi altında bir vektör uzayıdır. Yani her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ve $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ile tanımlayalım. Ayrıca "$f \leq g$" bağıntısını her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ olarak tanımlayalım. Bu sıralamaya noktasal sıralama denir. Bu sıralama altında X bir Riesz uzayıdır.

2. X topolojik uzayı üzerinde $C(X)$, reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi, noktasal işlemler ve noktasal sıralama altında sıralı bir vektör uzayıdır. Ayrıca $C(X)$ aynı zamanda Riesz uzayıdır. $C(X)$ deki tüm sınırlı fonksiyonların $C_b(X)$ alt kümesi de bir Riesz uzayıdır. Eğer X yerel kompak ise $C(X)$ deki tüm sürekli fonksiyonların $C_c(x)$ kompak alt kümeleride bir Riesz uzayıdır.

3. $L = \prod L_\alpha$ kartezyen çarpımının $\{L_\alpha : \alpha \in I\}$ bileşenleri sıralı vektör uzayları olsun. O zaman L bir Riesz uzayıdır ve her biri $(u_\alpha), (v_\alpha) \in L$ için, $(u_\alpha) \vee (v_\alpha) = (u_\alpha \vee v_\alpha)$, $(u_\alpha) \wedge (v_\alpha) = (u_\alpha \wedge v_\alpha)$ dır.

4. $\mathbb{R}^n$ koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemi altında n boyutlu reel bir vektör uzayıdır. Eğer sıralamayı da aynı şekilde koordinatsal olarak tanımlarsak, yani,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için, $x \leq y$ olması her $k = 1,2,3, \dots, n$ için $x_k \leq y_k$ olması durumunda sağlanıyorsa $\mathbb{R}^n$ bu sıralama altında bir Riesz uzayıdır. Burada $\mathbb{R}$ nin sıralı yapısı ile vektör uzayının yapısının uygun olması kullanılır.

5. $\mathbb{R}^2$ de şu sıralamayı düşünelim: $x_1 \leq y_1$ veya $(x_1 = y_1$ ve $x_2 \leq y_2)$ olduğunda $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ olsun. Bu sıralama altında $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır. Bu sıralamaya sözlüksel (lexicographical) sıralama denir.

6. $\mu, \mathbb{R}^n$ deki Lebesgue ölçümü olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde reel μ −ölçülebilir fonksiyonların $M(\mathbb{R}^n, \mu)$ kümesi reel bir vektör uzayıdır (toplama ve skaler ile çarpma noktasaldır). Şimdi f ve g için $M(\mathbb{R}^n, \mu)$ de $f \approx g$ ancak ve ancak f ve g hemen hemen her yerde eşittir.

Açıkça $\approx$ bir denklik bağıntısıdır. $L_0 = L_0(\mathbb{R}^n, \mu)$ $\approx$ denklik bağıntısı ile belirlenen denklik sınıflarının kümesi olsun. $f, g, \dots$ denklik sınıflarını $[f], [g], \dots$ ile belirtiriz. L_0 kümesi α reel sayısı için $[f] + [g] = [f + g]$ ve $\alpha[f] = [\alpha f]$ yi tanımlanarak reel bir vektör uzayı haline getirilir. Bu tanımlar f ve g denklik sınıflarının seçimine bağlı değildir. $[f] \leq [g]$ hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \leq g(x)$ anlamına geldiğini belirtirsek, L_0 daki kısmi sıralama için geçerlidir. L_0 vektör uzayı şimdide bir Riesz uzayı olsun. Uygulamada, L_0 elemanları genellikle $f, g, \dots$ ile gösterilir ve denklik sınıfları yerine fonksiyonlarmış gibi varsayılır.

Teorem 2.1.3. Eğer E bir Riesz uzayı ve u ve v elemanları ise, o zaman,

(1) u^+ ve $u^- E^+$ ya aittir; $(-u)^+ = u^-$, ve benzer şekilde $(-u)^- = u^+$. Ayrıca $|-u| = |u|$.

(2) $u = u^+ - u^-, u^+ \wedge u^- = 0$, ve $|u| = u^+ + u^-$.

(3) $0 \leq u^+ \leq |u|$ ve $0 \leq u^- \leq |u|$. Ayrıca $u^- \leq u \leq u^+$ve $|u| = 0 \leftrightarrow u = 0$.

(4) $u \leq v \leftrightarrow u^+ \leq v^+$ ve $u^- \geq v^-$.

Şimdi bazı tanımları vereceğiz. E bir Riesz uzayı olsun. Eğer $|u| \wedge |v| = 0$ ise, E içindeki u ve v ögelerinin birbirinden ayrık olduğu söylenir. u ve v nin birbirinden ayrık olduğunu göstermek için $u \perp v$ notasyonu kullanılcaktır.

Tanım 2.1.4. Riesz uzayının boş olmayan herhangi bir D alt kümesi için

$$D^d = \{u \in E : u \perp v \; \forall \; v \in D\}$$

kümesine D nin ayrık tümleyeni denir. D^d nin ayrık tümleyeni $D^{dd} = (D^d)^d$, D nin ikinci ayrık tümleyeni olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.5. E bir Riesz uzay olsun. E nin alt kümelerinin E de ki sıralamaya sahip olduğunu varsayıyoruz.

1. E nin lineer K alt uzayına, eğer her $u, v \in K$ için $u \vee v$ ve $u \wedge v$ K ya ait ise , E nin bir Riesz alt uzay denir.

2. S, E nin bir alt kümesi olmak üzere $|v| \leq |u|$ $u \in S$ ifadesi $v \in S$ olmasını sağlıyorsa S ye solid küme denir.

3. A, E nin solid bir lineer alt uzayı ise, A ya E de ideal denir. Bazen bunu bir halkadaki cebirsel bir idealden ayırt etmek için E de sıra ideali denir.

4. $E_u = \{v \in E : \exists \lambda > 0$ ile $|v| \leq \lambda |u|\}$ kümesine u elemanı tarafında üretilen ideal denir.

5. E deki ideal B, B alt kümesinin E de bir supremuma sahip olması durumunda, bu supremum B nin de bir üyesi ise bir bant olarak adlandırılır, yani $D \subseteq B$ iken

$u = \sup D \in B$ olur.

6. E Riesz uzayının bir D bandını kapsayan en küçük bandına D tarafından üretilen band denir ve $\{D\}$ ile gösterilir. Bir u elemanı tarafından üretilen esas band B_u ile gösterilir. E Riesz uzayının bir izdüşüm B bandı, $E = B \oplus B^d$ şartını sağlayan banddır. Bir izdüşüm elemanı temel bandı oluşturan bir izdüşüm bandının herhangi bir elemanıdır. E bir Riesz uzayı olmak üzere $B_e = E$ şartını sağlayan $0 < e$ elemanı zayıf sıra birimi olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.6. 1. $E = \{f : f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\}$ kümesi $C[0,1]$ nin bir vektör alt uzayıdır, fakat bir Riesz alt uzayı değildir; ve 1 sabit 1 fonsiyonunu göstermek üzere $\{a1 : a \in \mathbb{R}\}$ kümesi $C[0,1]$ nin bir Riesz alt uzayıdır, fakat bir ideali değildir.

2. Koordinatsal sıralama altında s tüm dizilerin kümesi ve c_0 reel sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi olsun. l_1 uzayı c_0 da öz alt bir idealdir, c_0 uzayı l_∞ da öz alt idealdir ve l_∞ da s de öz alt bir idealdir. Bu ideallerin hiçbiri band değildir.

Tanım 2.1.7. Her $u \in E^+$ için $\inf\{n^{-1}u : n = 1,2,3,\dots\} = 0$ ise, E Riesz uzayının Arşimedyan olduğu söylenir.

$C(X)$ Riesz uzayı, $M(\mathbb{R}^n, \mu)$ve n boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^n$, koordinatsal sıralama altında Arşimedyandır. Arşimedyan olmayan Riesz uzayları var. Örnek olarak, $E = \mathbb{R}^2$ de sözlük sıralaması olsun. E deki $(0,1)$ elemanı, (n^{-1}, n^{-1}) dizisinin bir alt sınırıdır. Bu nedenle, $u = (1,1)$ elemanı $\inf\{n^{-1}u : n = 1,2,3,\dots\} = 0$ koşulunu sağlamaz.

Aslında bütün $(n^{-1}u)$ dizilerinin tümünün bu durumda infimumu yoktur. Aşağıdaki teorem, Arşimedyan özelliğinin basit bir karakterizasyonudur.

Teorem 2.1.8. E bir Riesz uzayı olsun.

(i) E uzayı Arşimedyandır ancak ve ancak her $u \in E^+$ için $\varepsilon_n \to 0$ sağlayan negatif olmayan reel sayıların her dizisi (ε_n) için

$$\inf\{\varepsilon_n u : n = 1,2,3, \dots\} = 0$$

şartı geçerli olmalıdır.

(ii) E uzayı Arşimedyandır ancak ve ancak E^+ içinde verilen u ve v öyleki

$n = 1,2,3, \dots$, için $0 \leq nv \leq u$ ifadesi $v = 0$ olmasını gerektirir. Yani, her

$v > 0$ $(v \geq 0, v \neq 0)$ için (nv) dizisi sınırsızdır.

(iii) Eğer E Arşimedyan ise, E nin tüm Riesz alt uzaylarıda Arşimedyandır. Özellikle, E içinde ki idealler ve bandlar Arşimedyan Riesz uzaylarıdır.

Sonraki bölümlerde tüm Riesz uzayları Arşimedyan Riesz uzayları olarak kabul edilecektir.

2.2. Riesz Uzaylarındaki Operatörler

Bu bölümde pozitif operatörlerin özel bazı sınıfları ele alınacaktır. Bunlar örgü işlemlerini koruyan ve örgü (veya Riesz) homomorfizmaları olarak bilinen operatörler, regüler operatörler ve sıra sınırlı operatörlerdir.

Tanım 2.2.1. İki sıralı vektör uzayı arasındaki bir $T: E \to F$ operatörü E deki her $x \geq 0$ elemanını F de $T(x) \geq 0$ elemanına götürüyorsa, T ye pozitif operatör denir. $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. İki Riesz uzayı arasındaki bir $T: E \to F$ operatörü her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ şartını sağlıyorsa T ye örgü veya Riesz homomorfizması denir. Her örgü homomorfizması T nin mutlaka bir pozitif operatör olduğunu gözlemleyelim. Eğer $x \in E^+$ ise $T(x) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = [T(x)]^+ \geq 0$ dır.

Ayrıca, bir örgü homomorfizmasının görüntüsü bir Riesz alt uzayıdır. Şimdi örgü homomorfizmalarının temel karekterizasyonlarını görelim.

Teorem 2.2.3. İki Riesz uzayı arasında tanımlı $T: E \to F$ operatörü için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. T bir örgü homomorfizmasıdır.

2. Her $x \in E$ için $T(x^+) = \big(T(x)\big)^+$ dır.

3. $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)\ \forall\, x, y \in E.$

4. Eğer E de $x \wedge y = 0$ ise F de $T(x) \wedge T(y) = 0$ dır.

5. $T(|x|) = |T(x)|$ için $\forall\, x \in E.$

Tanım 2.2.4. Bire-bir ve örten bir T örgü homomorfizmasına örgü izomorfizması denir.

E ve F iki Riesz uzayına eğer E den F ye bir örgü izomorfizması varsa bu durumda Riesz izomorfik uzaylar denir. Her Riesz izomorfizması $T : E \to F$ bire-bir ve pozitiftir. Tersine, birebir, örten ve pozitif olan iki Riesz uzayı arasında tanımlı herhangi bir doğrusal operatör $T : E \to F$ bir izomorfizma mıdır? Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi cevap olumsuzdur.

Örnek 2.2.5. Bilinen koordinat düzleminde $E = \mathbb{R}^2$, sözlüksel sıralaması $F = \mathbb{R}^2$ yani, $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ olduğu zaman $x_1 < y_1$ ya da $x_1 = y_1, x_2 \leq y_2$ ve $T: E \to F$ nin birim operatörleri olsun. O zaman T birebir, örten ve pozitif ancak T bir Riesz izomorfizması değildir. Çünkü T^{-1} pozitif değildir. T^{-1} pozitif ise durum düzelir.

Teorem 2.2.6. İki Riesz uzayı arasındaki bir $T : E \to F$ operatörünün birebir ve örten olduğunu varsayalım. O zaman, T bir örgü izomorfizmidir, eğer T ve T^{-1} nin her ikiside pozitif operatörlerdir.

Örnek 2.2.7. Vektör uzayları arasındaki bir doğrusal operatör $T : V \to W$ nin çekirdeği veya boş uzayı (yani, küme $k(T) = \{f: Tf = 0\}$), V nin doğrusal bir alt uzayıdır ve T (yani, küme $\{g: g = Tf$ için $f \in V\}$) aralığı, W nin doğrusal bir alt uzayıdır.

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \to F$, bir Riesz homomorfizması ise, T görüntüsü F nin bir Riesz alt uzayları olduğu açıktır ve T nin çekirdeğinin $k(T)$ nin bir E ideali olduğunu görmek zor değildir. İspat için, ilk önce $T(|f|) = |Tf|$ bu $f \in k(T) \leftrightarrow |f| \in k(T)$. Bu nedenle, eğer $f \in k(T)$ ve $|g| \leq |f|$, $0 \leq T(|g|) \leq T(|f|) = 0$, $|g| \in k(T)$, bunun anlamı $g \in k(T)$. Böylece çekirdek $k(T)$ idealdir.

Tanım 2.2.8. E, F Riesz uzayları olsun. $T: E \to F$ operatörü için $T \vee (-T)$ var ise bu supremuma T nin modülü denir ve $|T|$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.9. Bir Riesz uzayında $|x| \leq |y_1 + \cdots + y_n|$ ise, $x_1, \ldots, x_n$ elemanları vardır öyleki $x = x_1 + \cdots + x_n$ ve her i, $i = 1, \ldots, n$ için $|x_i| \leq |y_i|$ dir. Üstelik x pozitif ise, x_i ler de pozitif seçilebilir.

Teorem 2.2.10. E, F Riesz uzayları ve $T: E \to F$ operatör olsun öyleki her $x \in E^+$ için $\sup\{|Ty|: |y| \leq x\} \in F$ olsun. Bu taktirde T nin modülü vardır ve her $x \in E^+$ için

$$|T|(x) = \sup\{|T_y|: |y| \leq x\}$$

dir.

Tanım 2.2.11. A, Riesz uzayının bir alt kümesi olsun.

Her $y \in A$ için $y \leq x$ olacak şekilde x varsa, A ya " üstten sınırlı"

Her $y \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde x varsa, A ya " alttan sınırlı"

A alttan ve üsten sınırlı ise, A ya "sıra sınırlı" denir. Riesz uzayının, herhangi iki x, y elemanı için $(x \leq y)$ $[x, y] = \{z \in E: x \leq z \leq y\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesine "sıra aralığı " denir.

Tanım 2.2.12. $L(E, F) = \{T: E \to F \mid T \text{ lineer}\}$

$T: E \to F$ operatörü, E nin sıra sınırlı alt kümelerini F nin sıra sınırlı alt kümelerine dönüştürüyorsa, T ye "sıra sınırlı operatör" denir. Sıra sınırlı operatörlerin alt vektör uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

$$L_b(E, F) = \{T \in y(E, F): A \subseteq E \text{ sıra sınırlı} \Rightarrow \mathrm{T(A)} \subseteq \mathrm{F} \text{ sıra sınırlı }\}$$

$T : E \to F$ operatörü, iki pozitif operatörün farklı şeklinde yazılabiliyorsa, T ye "regüler operatör" denir. Regüler operatörlerin alt vektör uzayı $L_r(E,F)$ ile gösterilir.

$$L_r(E,F) = \{T \in y(E,F) : T = T_1 - T_2, \quad T_1, T_2 \in y(E,F), \quad T_1 \geq 0, \quad T_2 \geq 0\}$$

$L_b(E,F)$ ve $L_r(E,F), (T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$ ve $(\lambda T)x = \lambda Tx$ işlemleri ile vektör uzaylarıdır. Her pozitif operatör sıra sınırlıdır.

($A \subseteq [x,y] \Rightarrow$ her a $\in$ A için x $\leq$ a $\leq$ y $\Rightarrow$ $\mathrm{T_x} \leq T_a \leq T_y \Rightarrow \mathrm{T(A)} \subset [\mathrm{T_x}, \mathrm{T_y}]$).

Dolayısıyla her regüler operatör sıra sınırlıdır. ($L_b(E,F)$ vektör uzayı olduğundan $T = T_1 - T_2 \in L_b(E,F)$). Dolayısıyla $L_r(E,F) \subseteq L_b(E,F) \subseteq L(E,F)$ dir.

Tanım 2.2.13. Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu (veya boştan farklı sınırlı her alt kümesinin infimumu) varsa, bu uzaya Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Önerme 2.2.14. E Dedekind tamdır $\Leftrightarrow 0 \leq x_\alpha \uparrow\leq x$ olmak üzere $\sup(x_\alpha)$ vardır.

Tanım 2.2.15. Bir Riesz uzayının üstten sınırlı sayılabilir her alt kümesinin supremumu (veya alttan sınırlı sayılabilir her alt kümesinin infimumu) varsa, bu uzaya σ −Dedekind tam uzay denir.

Önerme 2.2.16. E σ −Dedekind tamdır $\Leftrightarrow 0 \leq x_n \uparrow\leq x$ olmak üzere $\sup(x_n)$ vardır.

Notasyon: $L_b(E,\mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R} \,|\text{lineer ve sıralı sınırlı}\} = E^{\sim}$

Teorem 2.2.16. E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. $L_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve her $S, T \in L_b(E,F)$ ve her $x \in E^+$ için

$S \vee T(x) = \sup\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$

$S \wedge T(x) = \inf\{S(y) + T(z) : y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$ dir.

3. DAR VE SONLU RANKLI DİK TOPLAMSAL OPERATÖRLERİN TOPLAMI ÜZERİNE: H. I. HUMENCHUK'IN YAKLAŞIMI

3.1. Giriş

3.1.1. Terminoloji ve Notasyon. Vektör örgüleri ile ilgili standart notasyonları (Aliprants and Burkinshaw 2006) referansını kullanacağız. E bir vektör örgü ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $x \perp (y - x)$ ise bir x elemanına bir y elemanın fragmanı deriz ve $x \sqsubseteq$ y şeklinde gösteririz (Başka bir terminolojide x elemanına y nin bir bileşeni de denir). Eğer E fonksiyonların bir vektör örgüsü ise o zaman $x \sqsubseteq$ y bir x fonksiyonu grafiğinin bir y fonksiyonun grafiğinden x in sıfır olduğu kısımlarını çıkarılmasıyla elde edilen grafiğin bir alt kümesi olduğu anlamına gelir. E üzerine $\sqsubseteq$ bağıntısının kısmi sıralama bağıntısının olduğunu görmek zor değildir. (Mykhaylyuk, Pliev, and Popov, 2015) referansta bu sıralama bağıntısı yanal sıralama bağıntısı olarak adlandırılmıştır. $u > 0$ bir E vektör örgüsünün bir elemanı olsun. Eğer $0 \leq x \leq u$,

$0 \leq y \leq u$ ve $x \wedge y = 0$ bize $x = 0$ veya $y = 0$ ı veriyorsa bu u elemanına E nin bir atomu denir. Eğer bir vektör örgüsü hiçbir atom içermiyorsa bu vektör örgüsüne atomsuz denir. Sıfırdan farklı bir $x \in E$ nin bir atom olması için gerek ve yeter şartının x elemanın tek fragmanlarının sıfır ve x in kendisi olduğunu göstermek hiçte zor değildir. Böylece bir vektör örgüsü E nin atomsuz olması için gerek ve yeter şart her sıfırdan farklı $x \in E$ nin bir y fragmnına sahip olmasıdır öyle ki $0 \neq y \neq x$ tir. E de $(x_\alpha)_{\alpha \in \wedge}$ neti verilsin. Eğer öyle bir $x \in E$ varsa ve öyle bir E de $(u_\alpha)_{\alpha \in \wedge}$ neti varsa (aynı indekse sahip) öyle ki $u_\alpha \downarrow 0$ ve her $\beta \in \wedge$ için $|x_\beta - x| \leq u_\beta$ oluyorsa bu durumda $(x_\alpha)_{\alpha \in \wedge}$ netine $x \in E$ ye sıra yakınsaktır (ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ *yazılır*) denir.

$$x = \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

gösterimi her $i \neq j$ için $x_i \perp x_j$ ve

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

anlamına gelir. E vektör örgüsünün bir A alt kümesi verilsin. Eğer bir $e \in E$ varsa öyle ki her $x \in A$ için $x \sqsubseteq$ e oluyorsa bu durumda A ya yanal sınırlıdır denir. (Gumenchuk 2015) referansa göre eğer bazı α_0 indeksleri için $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $(x_\alpha)_{\alpha \geq \alpha_0}$ yanal sınırlı ise E de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ neti verildiğinde bu net bir $x \in E$ ye yanal yakınsaktır deriz (ve $x_\alpha \xrightarrow{lat} x$ yazarız.). Bir E vektör örgüsünden bir X Banach uzayına tanımlı $f: E \to X$ fonksiyonu verilsin.

Eğer E de ki her (x_α) neti için $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şartı bize $||f(x_\alpha) - f(x)|| \to 0$; şartını veriyorsa bu durumda f fonksiyonuna bir $x \in E$ de sıra-norm süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu E nin her noktasında sıra-norm sürekli ise bu durumda f ye kısaca sıra-norm sürekli denir.

Eğer E deki her (x_α) neti için $x_\alpha \xrightarrow{lat} x$ şartı bize $||f(x_\alpha) - f(x)|| \to 0$ şartını verirse bu durumda f ye $x \in E$ noktasında yanal-norm süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu E nin her noktasında yanal-norm sürekli ise bu durumda f ye kısaca yanal-norm süreklidir denir. Tanımdan yanal yakınsaklığın sıra yakınsaklığını verdiğini kolayca söyleyebiliriz. Böylece her sıra-norm sürekli fonksiyon yanal-norm süreklidir.

3.1.2. Vektör Örgüleri Üzerinde Tanımlı Dik Toplamsal Operatörler.

Vektör örgüleri arasında tanımlı dik toplamsal operatörler 1990 yılında Mazon ve Segura de Leon (Mazon and Segura de Leon 1990 a, b) tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır. Daha sonraları Kusraev ve Pliev (Kusraev and Pliev, 1990,1999,2007) tarafından bu kavramlar sıra-norm sürekli uzaylara genelleştirilmiştir.

Dik toplamsal operatörlerin genişlemeleri problemi (Gumenchuk, Pliev and Popov 2014) referansı ile çalışılmıştır.(Gumenchuk 2015) referansta dik toplamsal bir operatörün yanal-norm sürekliliğinin aynı operatörünün orjinde ki yanal-norm sürekliliğine denk olduğu gösterilmiştir. E bir vektör örgüsü ve F de reel bir vektör uzayı olsun. Eğer herhangi iki ayrık $x, y \in E$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ oluyorsa bu durumda $T: E \to F$ operatörüne dik toplamsal operatör denir.

Yukarıdaki tanımdan dik toplamsal operatörler kümesinin alışılmış işlemler altında bir vektör uzayı olduğunu ve her T dik toplamsal operatörü için $T(0) = 0$ olduğunu göstermek hiçte zor değildir. Şimdi lineer olmayan dik toplamsal operatörlerin literatür de karşılaşılan bazı örneklerini görelim:

(i) $1 \leq p < \infty$ için (Ω, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun, her $x \in L_p(\mu)$ için $T(x) = ||x||^p$ ile tanımlanan $T: L_p(\mu) \to \mathbb{R}$ operatörü bir dik toplamsal operatördür.

(ii) E atomsuz bir vektör örgüsü ve $T_i: E \to E (i = 1,2,3)$ operatörleri $x \in E$ için

$T_1(x) = x^+$, $T_2(x) = x^-, T_3(x) = |x|$ ile tanımlansın. Bütün bu T_i operatörleri dik toplamsaldır.

3.1.3. Dar Operatörler. Fonksiyonel analizdeki kompak operatörlerin bir genellemesi olarak dar operatörler (Plichko and Popov 1990) referansta tanıtılmış ve çalışılmıştır. Aslında bu operatörlerle ilgili çalışmalar daha öncesinden başlamıştır. Dar operatörler teorisi ile ilgili son gelişmeleri (Popov 2011) makalede ve (Popov and Randrianantoanina, 2013) kitapta bulabiliriz.

Eğer atomsuz bir (Ω, Σ, μ) ölçü uzayında tanımlı Köthe uzayı E bir mutlak sürekli norma sahipse o zaman E den her hangi bir F −uzayı içine tanımlı her kompak operatör dardır. Yine de, normu mutlak sürekli olmayan L_∞ uzayı içinde lineer sürekli dar olmayan fonksiyoneller vardır. Öte yandan, $1 < p < \infty$ olmak üzere L_P uzayı içerisinde bile iki dar operatörün toplamının dar olması gerekli değildir.

Böylece aşağıdaki soruyu sormak oldukça doğaldır: Dar kompak bir operatör ile dar bir operatörün toplamı daima dar mıdır[Popov and Randrianantoanina 2013 , Problem 5.6]? Bu soruya pozitif bir cevap Mykhailyuk (Mykhaylyuk 2014) tarafından verilmiştir. Bu bölümde bir vektör örgüsünden bir Banach uzayı içine tanımlı dar bir operatör için (ki bu operatör (Maslyuchenko, Mykhaylyuk, and Popov 2009) referansta tanımlanmıştır) benzer bir sonucu ispatlayacağız.

3.2. Dar Dik Toplamsal Operatörler Ve Bazı Bilindik Sonuçlar

E atomsuz bir vektör örgüsü ve X te bir Banach uzayı olsun. E nin elemanları için $e = e_1 \sqcup e_2$ notasyonu bize $e = e_1 + e_2$ ve $e_1 \perp e_2$ olduğunu söyler. (Pliev and Popov 2014) referansa göre eğer rastgele bir $e \in E$ için $e = e_1 \sqcup e_2$ şartı sağlanıyor öyle ki bu e_1, e_2 ler için ve her $\varepsilon > 0$ için

$$||T(e_1) - T(e_2)|| < \varepsilon$$

oluyorsa dik toplamsal bir $T: E \to X$ operatörüne dardır denir.

E bir vektör örgüsü ve $e \in E$ olsun. $\mathcal{F}_e$ sembolü ile e elemanın bütün fragmanlarının kümesini göstereceğiz. [Aliprantis and Burkinshaw 2006] referanstaki Teorem 3.15 e göre eğer $e \geq 0$ ise o zaman $\mathcal{F}_e$ kümesi $\vee$ ve $\wedge$ latis işlemlerine göre bir Boolean cebiridir ve latis sıralaması $\leq$, $\mathcal{F}_e$ üzerinde ki yanal sıralama $\sqsubseteq$ ile çakışır. Üstelik, eğer E sıra tam vektör örgüsü ise $\mathcal{F}_e$ de sıra tam vektör örgüsüdür.

Lemma 3.2.1. E bir vektör örgüsü ve $0 < e \in E$ olsun. Her $x, y \in \mathcal{F}_e$ için aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$x = x \wedge y \sqcup (x - x \wedge y).$$

İspat. $x \wedge y \leq x$ ve $\mathcal{F}_e$ üzerindeki örgü sıralama bağıntısı yanal sıralama bağıntısı ile çakıştığından $x \wedge y \sqsubseteq$ x olur ve böylelikle $x \wedge y \perp x - x \wedge y$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer her $x \in \mathcal{F}_e$ için $(x \neq 0)$ öyle bir $d \in D$ varsa ve $0 \neq d \sqsubseteq$ x oluyorsa bu durumda $D \subseteq \mathcal{F}_e$ kümesine $\mathcal{F}_e$ içinde yanal yoğun denir. Eğer her $e \in E$ için $\mathcal{F}_e$ içerisinde yanal yoğun olan en fazla sayılabilir bir D varsa bu durumda E ye yanal ayrılabilir denir.

Eğer $e_1 = e$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n = e_{2n} \sqcup e_{2n+1}$ oluyor ise bu durumda E deki elemanların bir $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine $e \in E$ elemanı üzerinde ayrıştırıcı ağaç denir. Açıktır ki, bu durumda bütün e_n ler e nin fragmanlarıdır. Üstelik , her $k = 1,2, \ldots$ İçin

$$e = e_{2^k} \sqcup e_{2^k+1} \sqcup \ldots \sqcup e_{2^k+2^k-1}$$

ve her $n \geq 2^{k+1}$ indisleri için öyle bir tek türlü belirlenen $\ell \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ indisi vardır öyle ki $e_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ dir.

Lemma 3.2.2. E bir vektör örgüsü ve $x, y \in E$ olsun. $x \sqsubseteq$ y dir ancak ve ancak $x^+ \sqsubseteq$ y$^+$ ve $x^- \sqsubseteq$ y$^-$ dir.

İspat. $x \sqsubseteq$ y yani, $y = x \sqcup (y - x)$ olsun. O zaman $y^+ = x^+ \sqcup (y - x)^+$ dir. Bu bize $x^+ \leq y^+$ ve $(y - x)^+ = y^+ - x^+$ olduğunu verir. Böylece,

$$y^+ = x^+ \sqcup (y^+ - x^+),$$

yani, $x^+ \sqsubseteq$ y$^+$ dir. Benzer şekilde $x^- \leq y^-$ ve $x^- \sqsubseteq$ y$^-$ olduğu gösterilebilir.

$x^+ \sqsubseteq$ y$^+$ ve $x^- \sqsubseteq$ y$^-$ olsun. İlk denklemden $x^+ \leq y^+$ dır. Böylece

$$0 \leq x^+ \wedge y^- \leq y^+ \wedge y^- = 0$$

ve böylelikle $x^+ \perp y^-$ dir. Üstelik $x^+ \perp (y^+ - x^+)$ ve $x^+ \perp x^-$ dir. Böylece

$x^+ \perp (y^+ - x^+ - y^- + x^-)$, yani, $x^+ \perp (y - x)$ olduğu ve dolayısıyla $x \perp (y - x)$ olduğu gösterilebilir. Bu da ispatı tamalar.

Lemma 3.2.3. E bir atomsuz sıra tam yanal ayrılabilir bir vektör örgüsü olsun. O zaman her $e \in E$ için, e üzerinde bir ayrıştırılabilir ağaç $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ vardır. Öyle ki sayıların herhangi bir $m_1, m_2, \ldots$ dizisi için ve $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ dizisi için öyle bir $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve bu alt dizi sıfıra yanal yakınsaktır.

İspat. Lemma yı rastgele bir $e \geq 0$ için ispatlamak yeterlidir. Gerçekten genel durumdan $e = e^+ - e^-$ yazılabilir ve e^+ üzerinde ayrıştırıcı ağaç $(e'_n)_{n=1}^{\infty}$ ve e^- üzerinde ayrıştırıcı ağaç $(e''_n)_{n=1}^{\infty}$ ı inşa edilebilir ve önceki bilinen sonuçları kullanabiliriz.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $e_n = e'_n - e''_n$ yazalım. O zaman, her sayıların $m_1 < m_2, \ldots$ dizisi için ve $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ dizisi için Lemma 3.2.2. göre $f_n^+ \sqsubseteq {e'}_{m_n}$ ve $f_n^- \sqsubseteq {e''}_{m_n}$ yi elde ederiz. İlk önce sıfıra sıra yakınsak bir $(f_{n_k}^+)_{k=1}^{\infty}$ alt dizisini seçelim. O zaman sayıların bir $m_{n_1} < m_{n_2}, \ldots$ dizisi için ve $f_{n_k}^- \sqsubseteq e''_{m_{n_k}}$ dizisi için sıfıra sıra yakınsak $(f_{n_{k_j}}^-)_{j=1}^{\infty}$ alt dizisini seçeriz.

Sonuçta,

$$f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \overset{o}{\to} 0$$

elde ederiz ve böylelikle $f_{n_{k_j}} \in \mathcal{F}_e$ olduğundan Lemma 3.2.2 ye göre

$$f_{n_{k_j}} = f_{n_{k_j}}^+ - f_{n_{k_j}}^- \overset{lat}{\to} 0$$

elde ederiz. $e \in E$ ve $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi de $\mathcal{F}_e$ kümesi içinde yanal yoğun olsun. Şimdi ardışık olarak gerekli ağacı $e_1 = e$ ve $n = 1,2, \ldots .$, için

$$e_{2n} = e_n \wedge d_n, \qquad e_{2n+1} = e_n - e_n \wedge d_n$$

olarak tanımlayalım. Lemma 3.2.1 den $e_n = e_{2n} \sqcup e_{2n+1}$ ve böylelikle $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi E üzerinde ayrıştırıcı bir ağaçtır. Sayıların bir $m_1 < m_2 < \cdots$ dizisi ve bir $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ dizisi verilsin. $k = 1,2, \ldots$ için öyle bir $\ell_k \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ dizisinin olduğunu göstereceğiz öyle ki

$$e_{2^{k+1}+\ell_{k+1}} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}, \tag{1}$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{n \in \mathbb{N}: f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$ kümesi sonsuz olsun. $k = 1$ için $e = e_2 \sqcup e_3$ dür. Eğer $n \geq 2$ ise ya $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq \mathrm{e}_2$ ya da $f_n \sqsubseteq e_{m_n} \sqsubseteq \mathrm{e}_3$ tür. Böylece,$\{n \in \mathbb{N}: f_n \sqsubseteq e_{2^1+\ell}\}$, $(\ell = 0,1)$ kümelerinin en az biri sonsuzdur.

$\ell_1 \in \{0,1\}$ ile karşılık gelen indisi gösterelim. $k = 2$ için $e = e_4 \sqcup e_5 \sqcup e_6 \sqcup e_7$ dir. O zaman $n \geq 8$ olmak üzere tıpkı e_n deki gibi her bir f_n elemanı e_4, e_5, e_6 veya e_7 elemanlarının birinin fragmanıdır.

Böylece

$$\{n \in \mathbb{N}: f_n \sqsubseteq e_{2^2+\ell}\}, \qquad (\ell = 0,1,2,3)$$

kümelerinden en az birisi sonsuzdur. $\ell_2 \in \{0,1,2,3\}$ ile karşılık gelen indisi gösterelim. Böyle devam edersek sonuçta gerekli olan diziyi elde ederiz. Her $\{n \in \mathbb{N}: f_n \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}\}$ kümesinin sonsuz olduğunu göz önüne bulundurarak $f_{n_k} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ özelliğini sağlayan öyle bir $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ alt dizisini seçebiliriz ve buradan da $f_{n_k} \xrightarrow{o} 0$ olduğunu ispatlarız. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$u_k = \sup_{j \geq k} f_{n_j}$$

yazalım.

Bu supremum vardır zira E sıra tam bir vektör örgüsüdür ve küme E nin bir elemanı ile üsten sınırlıdır (latis ve yanal sıralama bağıntılarının $\mathcal{F}_e$ üzerinde çakıştığını ve böylelikle sıradan supremumla yanal supremumun u_k nın tanımı üzerinde alınabileceğini hatırlayalım). Dolayısıyla $0 \leq f_{n_k} \leq u_k \downarrow$ dır. Sadece $\inf_k u_k = 0$ olduğunu göstermek kalır. Tersine, her k için $0 \neq z \sqsubseteq \mathrm{u_k}$ şartını sağlayan öyle bir $z \in \mathcal{F}_e$ olduğunu varsayalım. $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\mathcal{F}_e$ de yanal yoğun olduğundan $d_m \sqsubseteq \mathrm{z}$ şartını sağlayan en az bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{2m} = e_m \wedge d_m \sqsubseteq \mathrm{d_m} \sqsubseteq \mathrm{z} \sqsubseteq \mathrm{u_k} \text{ dır} \qquad (2)$$

(1) den $j \geq k$ için $f_{n_j} \sqsubseteq e_{2^j+\ell_k}$ elde edilir ve böylece $u_k \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ dır. (2) den her $k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{4m} \sqcup e_{4m+1} = e_{2m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$$

elde edilir. $2^k \leq 4m \leq 2^{k+1}$ şartını sağlayan $k \in \mathbb{N}$ seçeriz ve dolayısıyla $4m = 2^k + \ell$ şartını sağlayan $\ell \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ seçeriz. Böylece $4m + 1 = 2^k + \ell + 1$ dir. Üstelik $4m$ çift olduğundan $\ell \leq 2k - 2$ şartını sağlayan ℓ buluruz ve böylelikle $\ell + 1 \leq 2^k - 1$ eşitsizliğini elde ederiz.

$e_{2^k+\ell} = e_{4m} \sqsubseteq e_{2^k+\ell_k}$ şartından $\ell = \ell_k$ elde edilir, aksine $e_{2^k+\ell+1} = e_{4m+1} \sqsubseteq e_{2^{2k}+\ell_k}$ şartından $\ell + 1 = \ell_k$ elde edilir. Böylelikle bir çelişki yakalamış oluruz ki bu çelişki bize $f_{n_k} \xrightarrow{o} 0$ yakınsaklığını verir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_{n_k} \in \mathcal{F}_e$olduğundan $f_{n_k} \xrightarrow{lat} 0$ yakınsaklığını elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.4. E atomsuz sıra tam bir vektör örgüsü, X bir normlu uzay ve $T: E \to X$ sonlu ranklı yanal norm sürekli dik toplamsal bir operatör olsun. O zaman her $e \in E$ için e üzerinde öyle bir ayrışabilir ağaç vardır öyle ki $\varepsilon > 0$ için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $\ell \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ ve $f \sqsubseteq e_{2^k+\ell}$ için $||T(f)|| < \varepsilon$ dur.

İspat. Rastgele bir $e \in E$ yi sabitleyelim ve Lemma 3.2.3 ten e üzerinde öyle bir ayrıştırıcı ağaç $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ seçelim öyle ki sayıların $m_1 < m_2 < \cdots$ her dizisi ve her $f_n \sqsubseteq e_{m_n}$ dizisi için sıfıra yanal yakınsayan bir $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi olsun. Şimdi bu $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bizim ihtiyaç duyduğumuz ağaç olduğunu ispatlayalım. Aksine verilen bir $\delta > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, öyle bir $\ell_n \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ ve bir $f_n \sqsubseteq e_{2^n+\ell_n}$ fragmanı olsun öyle ki $||T(f_n)|| \geq \delta$ sağlansın. Bu durumda sıfıra yanal yakınsayan bir $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi seçebiliriz. Bu da bize bu alt dizinin orjinde yanal norm sürekliliğinden dolayı bir çelişki verir. Böylece dik toplamsal bir operatör sıfırı sıfıra götürür. Bu da ispatı tamamlar.

Bir sonraki sonuç $\dim X = 1$ için [Kadets and Kadets 1991, $s.14$] referansındaki katsayıların yuvarlanmasıyla ilgili lemmadan sağlanır.

Lemma 3.2.5. $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, \dots, n$ için $|a_k| < \varepsilon$ olsun. O zaman öyle bir parçalanma $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ vardır öyleki

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j \right| < \varepsilon$$

dur.

3.3. Ana Sonuç

Teorem 3.3.1. E atomsuz sıra tam bir vektör örgüsü, X bir normlu uzay ve $S, T: E \to X$ dik toplamsal operatörler olsun. Eğer S dar bir operatör ve T sonlu ranka sahip yanal-norm sürekli bir operatör ise bu durumda $S + T$ toplamı dar bir operatördür.

İspat. İlk önce T nin rankı bir olan bir operatör olması durumunun ispatın tamamlanması için yeterli olacağını göstereceğiz. Bu durumda T yi rankı bir olan iki operatörün toplamı şeklinde yeniden yazacağız. Gerçekten $X_1 = T(E)$ ve $n = \dim X_1$ diyelim. Lineer bağımsız bir sistem $x_1, \dots, x_n \in X_1$ ve Hahn-Banach teoreminden her $i, j \leq n$ için $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ şartını sağlayan $f_1, \dots, f_n \in X^*$ fonksiyonellerini seçelim. Böylece $x \in X$ için

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$$

formülü X ten X_1 üzerine lineer sürekli bir izdüşüm tanımlar. Özel olarak her $e \in E$ için

$$T(e) = P\big(T(e)\big) = \sum_{i=1}^{n} f_i\big(T(e)\big) x_i$$

dir. Dik toplamsal operatör ile lineer bir operatörün bileşkesi açıkça dik toplamsal operatör olduğundan, $f_i \, o \, T$ operatörü dik toplamsal operatördür. Benzer şekilde yanal-norm sürekli bir operatördür ve böylece her $i = 1, \dots, n$ için $f_i \, o \, T$ operatörü yanal-norm sürekli bir operatördür. Böylece , T yanal- norm sürekli dik toplamsal bir rankına sahip operatörlerin sonlu bir toplamıdır. Eğer teorem T nin rank bir operatörü olması varsayımı altında doğruysa o zaman teoremin genel sonucu tümevarımla ispatlanabilir. Böylece , T rank bir operatörü, $x \in X$ her $e \in E$ için bir $\varphi: E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin öyle ki $\big||x|\big| = 1$ ve $T(e) = \varphi(e)x$ olsun. Kolay bir şekilde φ yanal-norm sürekli dik toplamsal bir operatör olduğunu gösterebiliriz.

Ayrıca, $S + T$ toplamının dar olduğunu göstereceğiz. Rastgele bir $e \in E$ sabitleyelim ve $\varepsilon > 0$ olsun. Lemma 3.2.4 ten öyle bir e üzerinde ayrıştırıcı ağaç $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ seçebiliriz ve $k \in \mathbb{N}$ için, öyle ki her $\ell \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ ve her $f \sqsubseteq e_{2^k + \ell}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır: $||T(f)|| < \varepsilon/2$, yani, $|\varphi(f)| < \varepsilon/2$.

Lemma 3.2.5 ten öyle bir $\{0, \dots, 2^k - 1\} = I \sqcup J$ bölüntüsü seçebiliriz öyle ki

$$\left| \sum_{i=I} \varphi\left(e_{2^k+i}\right) - \sum_{j=J} \varphi\left(e_{2^k+j}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\left|(S+T)(e') - (S+T)(e'')\right|\right| \leq \left|\left|S(e') - S(e'')\right|\right| + \left|\left|T(e') - T(e'')\right|\right|$$

$$= \left\| \sum_{i=I} S\left(e_{2^k+i}\right) - \sum_{j\in J} S\left(e_{2^k+j}\right) \right\|$$

$$+ \left| \sum_{i\in I} \varphi\left(e_{2^k+i}\right) - \sum_{j\in J} \varphi\left(e_{2^k+j}\right) \right|$$

$$< \sum_{i\in I} \left|\left|S\left(e_{2^k+i}\right)\right|\right| + \sum_{j\in J} \left|\left|S\left(e_{2^k+j}\right)\right|\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \left|\left|S\left(e_{2^k-\ell}\right)\right|\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sağlanır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Lemma 3.2.4 ve Teorem 3.3.1 in ispatlarında sadece T operatörünün orjindeki yanal-norm sürekliliğini kullanıldı. Oysa (Gumenchuk 2015) referansındanda görülebileceği gibi dik toplamsal bir operatör için bu özellik bütün noktalarda ki yanal-norm sürekliliğine denktir.

4. KÖTHE FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNE TANIMLI DAR OPERATÖRLERİN TOPLAMLARI: V.V.MYKHAYLUK VE M.M. POPOV'UN YAKLAŞIMI

4.1. Giriş

Dar operatörler ilk defa kompak operatörlerin bir genellemesi olarak *A*.M. Plichko ve M.M. Popov (Plichko and Popov 1990) tarafından tanıtılmıştır. Kompak operatörlerin bazı özellikleri dar operatörler tarafından sağlansa da kompak operatörlerin tüm özellikler sağlanmaz ($Bknz$ (Plichko and Popov, 1990), (Popov 2011) ve (Popov, Randrianantoanina 2013)).

Dar operatörler üzerindeki en ilginç sonuçlardan biride eğer $[0,1]$ üzerine tanımlı yeniden düzenlendiğinde değişmez bir E uzayı şartsız bir tabana sahipse E uzayı üzerinde tanımlı iki dar operatörün toplamı dar olmayabilir (Üstelik E üzerinde tanımlı her operatör iki dar operatörün toplamıdır) sonucudur(Plichko and Popov 1990). Aksine L_1 üzerinde tanımlı iki dar operatörün toplamı yine dardır. Daha az ilginç olan şudur ki son sonuç ilk sonuçtan daha karmaşıktır. İlk zamanlar bu derin sonuç (Plichko and Popov 1990) referansta yanlış bir ispat ile verilmiştir.

Daha sonraları [(Shvydkoy 2001), (Kadets and Popov 2003), Maslyuchenko, Mykhaylyuk, and Popov 2006)] referanslardaki farklı fikirlere dayanan bazı farklı yazarların makalelerinde değişik ispatlar görülmüştür. Dar operatörlerin toplamının yukarıdaki durumu vektör örgüleri üzerinde tanımlı dar operatörlerin daha genel bir durumda güzel bir tanıma sahiptir. (Maslyuchenko, Mykhaylyuk, and Popov 2009) referansta O.V. Maslyuchenko ve diğer yazarlar Köthe fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı dar operatörler kavramını vektör örgüleri üzerinde tanımlı dar operatörler kavramına genişletmişlerdir. (Maslyuchenko, Mykhaylyuk and Popov, 2009) referansta P. Enflo, N.J. Kalton, H.P. Rosenthal ve T.W. Starbird gibi yazarların fikirlerine dayanarak özel bir teknikle aşağıdaki sonuç ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.1. E, F iki sıra sürekli Banach örgüsü olsun. Öyle ki E atomsuz olsun. O zaman E den F e tanımlı bütün regüler dar operatörlerin kümesi $N_r(E,F)$ E den F e tanımlı bütün regüler operatörlerin kümesi $L_r(E,F)$ vektör örgüsü içinde bir banttır. Özel olarak E den F e tanımlı iki regüler dar operatörün toplamı yine dardır.

Hemen hatırlatalım ki eğer iki vektör örgüsü arasında tanımlanan lineer bir operatör iki pozitif lineer operatörün farkı olarak yazılabilirse bu lineer operatöre regüler denir. L_1 üzerinde tanımlı bütün sürekli operatörler regüler olduğundan [(Schaefer 1974),sayfa 232] Teorem 4.1.1. L_1 üzerinde tanımlı iki dar operatörün toplamının darlığının sonucunu kapsar. Öte yandan yeniden düzenleme altında $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı şartsız tabana sahip değişmez uzaylar üzerinde tanımlı iki dar operatörün dar olmayan toplamının her örneği regüler olmayan toplam bileşenlerini içerir.

Yine de bu araştırmanın ana sonucu olan aşağıdaki açık problem henüz çözümlenememiştir.[(Kadets and Popov 2003), (Popov 2011)]
[(Popov and Randrianantoanina 2013), Problem7.52].

Problem 4. 1. 2. X herhangi bir Banach uzayı olsun. $L(L_1, X)$ içinde iki dar operatörün toplamı dar mıdır?

Ana sonucumuzun (Teorem 4.4.2) özel bir durumu olarak $E = L_1$ alırsak bu probleme olumsuz bir cevap elde edeceğiz.

Diğer problem klasik atomsuz Banach örgüsü L_∞ ile ilgilidir. L_∞ sıra sürekli olmadığından Teorem 4.1.1 L_∞ üzerinde tanımlı operatörlere uygulanamaz.

Üstelik (Maslyuchenko, Mykhaylyuk and Popov 2009) referansta gösterildiği gibi L_∞ üzerinde tanımlı bütün dar regüler operatörlerin kümesi $L_r(L_\infty)$ içinde bir bant değildir. Yine de aşağıdaki problem hala açıktır (Maslyuchenko, Mykhaylyuk, Popov, 2009) [(Popov and Randrianantoanina 2013), Problem 11.62].

Problem 4. 1.3. L_∞ üzerinde tanımlı iki regüler dar operatörün toplamı dar mıdır?

Düzgünlük varsayımı olmaksızın benzer bir problem negatif bir cevaba sahiptir (Krasikova 2009). Bu bölümde Problem 4.1.3 e negatif bir cevap veriyoruz (Bknz. Teorem 5.1 ve Sonuç 5.2).

(Plichko and Popov 1990) referanstan bu bölüm için çok önemli olan $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı şartsız bir tabana sahip yeniden düzenleme altında değişmez bir E Banach uzayının birim operatörü Id yi $Id = S + T,\ S, T \in L(E)$ şeklinde nasıl dar bileşenlere ayırabileceğimiz fikrini açıklayalım.

[(Lindenstrauss and Tzafriri 1979) sayfa 156] dan [0,1] üzerindeki Haar sistemi E içinde şartsızdır. Uygunluk açısından Haar sistemini $I_n^k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ diyadik aralıklar olmak üzere $n = 0,1, \ldots$ ve $k = 1, \ldots, 2^n$ için $h_{o,o} = \mathbf{1}_{[0,1]}$ ve $h_{n,k} = \mathbf{1}_{I_{2n}^{2k-1}} - \mathbf{1}_{I_{2n}^{2k}}$ ile gösterelim. O zaman Haar sistemini tek ve çift kısımlardan oluşmak üzere iki kısma bölebiliriz ve bu kısımlardan $\alpha = \{(0,0), (n,k)$:n çift, $k = 1, \ldots, 2^n\}$ ve $\beta = \{(n,k)$: n tektir, $k = 1, \ldots, 2^n\}$ olmak üzere $E_1 = [h_{nk}]_{(n,k)\in\alpha}$ ve $E_2 = [h_{n,k}]_{(n,k)\in\alpha}$ nin lineer gerenlerini düşünebiliriz. Haar sisteminin şartsızlığından $E = E_1 \oplus E_2$ kapalı alt uzaylar içine bir ayrışıma sahiptir. Dolayısıyla P_1 ve P_2 karşılıklı izdüşümler olmak üzere $Id = P_1 + P_2$ dir. P_1 ve P_2 nin dar olduğunu göstermek oldukça teknik bir ispata dayanır. Bu bölümün fikri bu örneğe dayanır ve Haar tipi sisteminin tekniği kullanılır. Burada ve sonraki bölümlerde $\mathcal{L}(X,Y)$ ile X ten Y ye tanımlı bütün lineer sürekli operatörü göstereceğiz.

(Ω, Σ, μ) sonlu atomsuz bir ölçü uzayı $L_0(\mu)$ $\mathbb{K} \in [\mathbb{R}, \mathbb{C}]$ olmak üzere Σ- ölçülebilir $x: \Omega \to \mathbb{K}$ fonksiyonlarının bütün denklik sınıflarının lineer uzayı ve $\mathbf{1}_A$ da bir $A \in \Sigma$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstersin. $\Sigma(A) = \{B \in \Sigma: B \subseteq \mathrm{A}\}, \Sigma^+(A) = \{B \in \Sigma(A): \mu(\mathrm{B}) > 0\}$ ve kısmi bir durum olarak $\Sigma^+ = \Sigma^+(\Omega)$ yazalım. $A = B \sqcup C$ sembolü bize $A = B \cup C$ ve $B \cap C = 0$ versin. "$sign$" sembolü ile $\{-1,0,1\} -$ değerli $x \in L_0(\mu)$ fonksiyonunu anlayacağız. Daha açık olarak $sign\, x$ bir A kümesi üzerindeki $supp\, x = A$ şartını sağlayan bir A kümesi üzerindeki bir işaret fonksiyonu olarak adlandırılır. Bir $sign\, x \in L_0(\mu)$ fonksiyonuna eğer $\int_{\{\Omega\}} x\, d\mu = 0$ şartını sağlıyorsa ortalaması sıfırdır denir. $x \in L_0(\mu)$ $A \in \Sigma$ üzerinde bir işaret fonksiyonudur ancak ve ancak $A = B \sqcup C$ sağlayan bazı $B, C \in \Sigma$ için $x = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C$ dir, buna ilaveten $\mu(B) = \mu(C)$ $eşitliğinin\ sağlanması$ x in sıfır ortalama olması demektir.

$L_0(\mu)$ nün lineer bir alt F-uzayı (değişmez bir $P(x,y) = P(x+z,\ y+z)$ metriğine sahip tam metrik lineer uzay) E eğer $\mathbf{1}_\Omega \in E$ ve her $x \in L_0(\mu)$ ve $y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $x \in E$ ve $||x|| \leq ||y||$ şartını sağlıyorsa bu uzaya (Ω, Σ, μ) üzerinde bir Köthe $F-$uzayı denir. Eğer üstelik E bir Banach uzayı ve $E \subseteq \mathrm{L}_1(\mu)$ ise o zaman E ye (Ω, Σ, μ) üzerinde tanımlı bir Köthe Banach uzayı denir.

Lindenstrauss-Tzafriri [(Lindenstrauss and Tzafriri), sayfa 28] nin terminolojisine göre elemanlarının integrallenebilirliği varsayımı olmaksızın bizim terminolojimizde bir Köthe foksiyon uzayı aslında Köthe Banach uzayıdır. E bir Köthe Banach uzayı olsun. Kapalı Grafik Teoremini kullanarak E nin $L_1(\mu)$ içine gömme fonksiyonun sürekli olduğu gösterebilir. Aynı sebepten her $x \in E$ için $x.y \in L_1(\mu)$ olacak şekilde her $L_1(\mu)$ bir $g \in E^*$ ı

$$g(x) = \int_\Omega xy\, d\mu \tag{1.1}$$

formülü ile tanımlanır. E^* ın (1.1) formundaki bütün elemanlarının kümesi E' ile gösterilir ve E nin Köthe duali olarak adlandırılır. Bu küme $||y||_{E'} \overset{\text{def}}{=} \sup\{\int_\Omega xy\, d\mu' : x \in B_E\}$ normuna göre bir Köthe Banach uzayıdır. "$E' = E^*$ dır ancak ve ancak E σ sıra süreklidir [(Lindenstrauss and Tzafriri 1979),sayfa 29]." ifadesi bahsetmeye değerdir. Burada E nin σ sıra sürekli olması demek E deki her azalan (x_n) dizisi için $\inf_n x_n = 0$ ve $lim_{n\to\infty}\left||x_n|\right| = 0$ olması demektir.

Lebesgue Σ cebiri ve Lebesgue ölçüsü için kullandığımız Σ ve μ notasyonlarını $[0,1]$ üzerinde tanımlı Lebesgue ölçüsü içinde kullanacağız. $x, y \in L_0(\mu)$ elemanları için hemen hemen $t \in \Omega$ için $x \leq y$ sıralaması $x(t) \leq y(t)$ demektir. Eğer (x_n) bir $F-$uzayı X te bir dizi ise o zaman $[x_n]$ bize (x_n) dizisinin X teki kapalı lineer gerenini gösterecektir.

E (Ω, Σ, μ) üzerinde tanımlı bir Köthe F uzayı, ve X te bir F uzayı olsun. Bir $T \in \mathcal{L}(E, X)$ operatörüne eğer her $A \in \Sigma^+$ ve $\varepsilon > 0$ için öyle bir ortalaması sıfır A üzerinde tanımlı $||Tx|| < \varepsilon$ olan $sign\, x$ fonksiyonu varsa dar operatör denir.

Eğer E bir mutlak sürekli norma sahipse, yani her $x \in E$ ve Σ da ara kesitleri boş olan her $A_{n+1} \subseteq \mathrm{A_n}$ küme dizisi için $lim_{n\to\infty}\left||x.\mathbf{1}_{A_n}|\right| = 0$ oluyorsa bu durumda bir dar operatörünün tanımında $sign$ fonksiyonun sıfır ortalamasına sahip olması durumu (Plichko and Popov 1990) referansta olduğu gibi denk olarak kaldırılabilir.

Hemen not edelim ki bu makaledeki durum olan sonlu ölçü uzayları için bir Köthe $F-$uzayı E mutlak sürekli bir norma sahiptir ancak ve ancak her $x \in E$ için $lim_{\mu(A)\to 0}\left||x.\mathbf{1}_A|\right| = 0$ dır. [(Popov and Randrianantoanina 2013), Tanım1.1] refaransını kullanarak eğer $lim_{\mu(A)\to 0}\left||\mathbf{1}_A|\right| = 0$ ise sonlu atomsuz bir ölçü uzayı üzerinde tanımlı bir Köthe F uzayı E birim elemanı üzerinde mutlak sürekli bir norma sahiptir.

Açıktır ki eğer E mutlak sürekli bir norma sahipse E birim üzerinde mutlak sürekli bir norma sahiptir. Buna rağmen tersi doğru değildir [(Popov and Randrianantoanina 2013), Örnek 1.2].

4.2. İyi bilinen bazı sonuçlar

Bu bölümde ileride ihtiyacımız olacak bazı basit ifadeleri ispatlayacağız.

Lemma4.2.1. X [0,1] aralığı üzerinde bir Köthe F uzayı, Y bir F uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ olsun. Herhangi diyadik aralığı $I = \left[\frac{k}{2^l}, \frac{m}{2^n}\right]$ için I üzerinde öyle bir ortalaması sıfır olan $sign\, x$ fonksiyonunun olduğunu öyle ki $Tx = 0$ ve $lim_{\mu(A)\to 0}\left||T\mathbf{1}_A|\right| = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman T dardır.

İspat. $A \in \Sigma^+$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mu(B) > \delta$ sağlayan her $B \in \Sigma$ kümesinin üzerinde tanımlı her $sing\, x$ için $\left||Tx|\right| < {}^{\varepsilon}/_{4}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçelim. O zaman $B = \bigcup_{k=1}^{n} \frac{I_k}{A}$ olacak şekilde $\mu(B) < \delta$ ve $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ şartlarını sağlayan ayrık diyadik $I_1, \dots, I_n$ aralıklarını seçelim. Her $k = 1, \dots, n$ için I_k üzerinde $Tx_k = 0$ şartını sağlayan ortalaması sıfır olan $sign\, x_k$ için $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$ yazalım. Hemen gözlemleyelim ki $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ üzerinde x ortalama sıfır olan işaret fonksiyonudur ve $Tx = 0$ dır. O zaman $B^+ = \{t \in B: x(t)\} = 1, \quad B^- = \{t \in B: x(t) = -1\}, A^+ = \{t \in A: x(t) = 1\}$ ve $A^- = \{t \in A: x(t) = -1\}$ yazalım. x ortalaması sıfır olduğundan $\lambda = \mu(B^+) - \mu(B^-) = \mu(A^-) - \mu(A^+)$ dır. Genelliği kaybetmeden $\lambda \geq 0$ olduğunu varsayalım. $\mu(C) = \frac{\mu(A^-) - \mu(A^+)}{2}$ şartını sağlayan bir $C \in \Sigma(A^-)$ seçelim ki $z = x - \mathbf{1}_{B^+} + \mathbf{1}_{B^-} + 2.\mathbf{1}_C$ yazalım.

Hemen gözlemleyelim ki z A üzerinde ortalaması sıfır olan işaret fonksiyondur ve

$$\big||Tz|\big| \le \big||Tx|\big| + \big||T\mathbf{1}_{B^+}|\big| + \big||T\mathbf{1}_{B^-}|\big| + 2\big||T\mathbf{1}_C|\big| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

dur. Bu da ispatı bitirir.

Lemma 4.2.2. E $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe F uzayı, X bir F uzayı, $T, T_n \in \mathcal{L}(E,X)$ öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için T_n ler dar olsun. Eğer $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi E de sıfırın bir U komşuluğu üzerinde T ye düzgün yakınsak ise T dardır.

İspat. Herhangi bir $A \in \Sigma^+$ yı sabitleyelim ve $\varepsilon > 0$ verilsin. E $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe F uzayı olduğundan her A üzerinde tanımlı $signs\, x$ için $x \in mU$ şartını sağlayan öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman her $u \in U$ için $||Tu - T_n u|| \le \varepsilon/(2m)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. T_n dar olduğundan A üzerinde ortalaması sıfır olan ve $||T_n x|| < \varepsilon/2$ şartını sağlayan öyle bir $sign\, x$ seçebiliriz. Her $y \in X$ için üçgen eşitsizliğinden $||my|| \le m||y||$ dir. Böylece

$$\big||Tx|\big| \le \big||Tx - T_n x|\big| + \big||T_n x|\big| \le m\left|\left|(T - T_n)\frac{x}{m}\right|\right| + \frac{\varepsilon}{2} < m\frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dur.

Lemma 4.2.3. E $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe F uzayı, X bir F uzayı, $x_0 \in X$, $T \in \mathcal{L}(E,X)$ bir dar operatör, $z \in X$ bir basit fonksiyon (yani, sonlu değerli) olsun. $f \in E^*$ her $x \in L_\infty$ için $f(x) = \int_{[0,1]} zx\, d\mu$ şartını sağlasın ve $S \in \mathcal{L}(E,X)$ her $x \in E$ için $Sx = f(x)x_0$ ile tanımlı bir operatör olsun. $T + S$ dardır.

İspat. $C_k \in \mathbb{R}$ ve $[0,1] = \sqcup_{k=1}^{n} A_k$ olmak üzere $z = \sum_{k=1}^{n} C_k \mathbf{1}_{A_k}$ olsun. Her hangi bir $A \in \Sigma^+$ yı sabitleyelim ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Her k için $A_k \cap A$ üzerinde tanımlı $||Tx_k|| < \varepsilon/n$ şartını sağlayan öyle bir sıfır ortalamalı $sign\, x_k$ seçelim. $Sx = 0$ olduğundan $x = x_1 + \cdots + x_n$ A üzerinde ortalama sıfır işaret fonksiyonu olmak üzere $\big||Tx + Sx|\big| = ||Tx|| < \varepsilon$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.3 teki şartları sağlayan bir f fonksiyonelinin varlığı en az bir $K > 0$ ve her $x \in U \cap L_\infty(\mu)$ için $\left|\int_{[0,1]} x\, d\mu\right| \le K$ şartını sağlayan E de sıfırın bir konveks komşuluğu U nun varlığına denktir.

Aşağıdaki ifade bize normun mutlak sürekliliğini bir Köthe uzayının Fatou özelliğine yakın bir özelliğinin olduğunu söyler.

Lemma 4.2.4. E $[0,1]$ aralığı üzerinde birim eleman üzerinde mutlak sürekli norma sahip bir Köthe Banach uzayı olsun. O zaman hemen hemen her yerde $x_0 \in L_\infty$ elemanına yakınsayan artan her $x_n \in L_\infty$ dizisi için $lim_{n\to\infty}\big||x_n|\big| = ||x_0||$ dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. Genelliği bozmadan her $n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \leq \mathbf{1}_{[0,1]}$ için $x_n \geq 0$ olduğunu varsayalım. $\mu(B) < \delta$ şartını sağlayan $B \in \Sigma$ için $||x_0\mathbf{1}_B|| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. Şimdi $\big||\gamma\mathbf{1}_{[0,1]}|\big| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $\gamma > 0$ seçelim. O zaman her $n \in N$ için $\mu(B) < \delta$ şartını sağlayan $B = [0,1]/A$ ve $\big||(x_n - x_0)\mathbf{1}_A|\big|_\infty < \gamma$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ ve $A \in \Sigma$ vardır. Sonuç olarak her $n \geq N$ için

$$\big||x_n - x_0|\big| \leq \big||(x_n - x_0)\mathbf{1}_A|\big| + ||(x_n - x_0)\mathbf{1}_B||$$

$$\leq \Big|\big|\mu\mathbf{1}_{[0,1]}\big|\Big| + \big||x_0\mathbf{1}_B|\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dur.

Lemma 4.2.5. E $[0,1]$ aralığı üzerinde birim eleman üzerinde mutlak sürekli norma sahip bir Köthe Banach uzayı olsun. O zaman her $x \in L_\infty$ için $f(x) = \int_A x\, d\mu$ olacak şekilde $A \in \Sigma^+$ ve $f \in E^*$ vardır.

İspat. Her $x \in L_\infty$ için $g(x) = \int_A x\, d\mu$ ile tanımlı $g: L_\infty \to \mathbb{R}$ ye sınırlı fonksiyonunu veren $A \in \Sigma^+$ olduğunu göstermek yeterlidir. Aksinin doğru olduğunu varsayalım. Yani her $A \in \Sigma^+$ ve her $C > 0$ için $|\int_A x\, d\mu| > C\big||x|\big|_E$ olacak şekilde $x \in L_\infty$ olsun. Köthe uzayının tanımından $x \geq 0$ olduğunu varsayabiliriz. $C = \frac{2}{||\mathbf{1}_{[0,1]}||}$ yazalım ve Y de bütün $x \in L_\infty$ ların kümesini göstersin. Öyle ki x ler aşağıdaki iki koşulu sağlasın:

(1) $0 \leq x \leq \mathbf{1}_{[0,1]}$;

(2) $\big||x|\big|_E \leq \frac{1}{C}\int_{[0,1]} x\, d\mu$.

Y deki doğal sıralamaya göre her zincir sayılabilir cofinality ye sahiptir. Yani eğer $M \neq \emptyset$ Y nin hiçbir maksimal eleman içermeyen lineer sıralı bir alt kümesi ise M de öyle bir x_n dizisi vardır öyle ki her $x \in M$ için $x \leq x_n$ şartını sağlayan en az bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Dolayısıyla Lemma 4.2.4 ve Lebesgue yakınsaklık teoreminden Y deki her zincirin bir üst sınıra sahip olduğunu söyleyebiliriz. Zorn Lemmasından Y nin bir x_0 maksimal eleman vardır. Açıkça $x_0 \neq \mathbf{1}_{[0,1]}$ dir.

Şimdi $A = \{t \in [0,1]: x_0(t) < 1 - \gamma\}$ kümesini pozitif ölüçülü yapan bir $\gamma > 0$ seçelim. Varsayımdan $\int_A x_1 \, d\mu > C\big||x_1|\big|_E$ olacak şekilde $x_1 \in L_\infty$, $x_1 \geq 0$ vardır ve böylece

$$||x_1||_E \leq \frac{1}{C}\int_A x_1 \, d\mu \leq \frac{1}{C}\int_{[0,1]} x_1 \, d\mu$$

dir, yani $x_1 \in Y$ dir. Genelliği kaybetmeden $||x_1||_\infty = 1$ olduğunu varsayalım. Öte yandan $y_0 = x_0 + \gamma x_1 . \mathbf{1}_A \in Y$ olduğu kolayca ispatlanabilir. Ayrıca $y_0 > x_0$ bize x_0 ın maksimal eleman olmasından dolayı bir çelişki verir. Buda ispatı tamamlar. ■

4.3. Haar Tipi Sistemler

$A \subseteq [0,1]$ ölçülebilir bir küme olsun. $A_{n,k} \in \Sigma$ olmak üzere $\left(A_{n,k}\right)_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2n}$ kümelerinin bir sistemine eğer her n, k için $G_{0,1} = A$ ve $G_{n,k} = G_{n+1,2k-1} \sqcup G_{n+1,2k}, \mu\left(G_{n+1,2k}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(G_{n,k}\right)$ şartını sağlıyorsa A üzerinde kümelerin bir ağacı denir. $n = 0,1, \ldots$ ve $k = 1, \ldots, 2^n$ için $g_{n,k} = \mathbf{1}_{G_{n+1,2k-1}} - \mathbf{1}_{G_{n+1,2k}}$ formülü ile tanımlanan $\left(g_{n,k}\right)_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2n}$ fonksiyonlarının sistemine A üzerinde bir Haar tipi sistem denir. Haar tipi sistemin her elemanı ortalaması sıfır işaret fonksiyonudur ve alışılmış Haar sistemiyle karşılaştırıldığında birinci elemanı $\mathbf{1}_A$ yoktur. Bunun sebebi $E(A) = \{x \in E: supp\, x \subseteq A\}$ nın ortalamasının yalnızca ortalaması sıfır elemanlarını genişlettiğimizden dolayıdır. Öte yandan $(g_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2n}$ sisteminde $\mathbf{1}_A$ elemanı için uygun bir numaralandırma yoktur.

Aşağıdaki iki teorem bize hangi durumlar altında öyle bir $F-$uzayı X ve toplamları dar olmayan iki $T_1, T_2 \in C(E,X)$ dar operatörlerinin bulunabileceğini veren $[0,1]$ aralığı üzerinde bir Köthe $F-$uzayının hangi şartları sağlaması gerektiğini verecektir.

Teorem 4.3.1. E her $x \in L_\infty$ için $f(x) = \int_{[0,1]} x\, d\mu$ formülü ile tanımlanan bir $f \in E^*$ fonksiyonun veren bir $[0,1]$ üzerinde tanımlı Köthe F uzayı, X bir F uzayı ve $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,X)$ toplamları dar olmayan dar operatörler olsun. O zaman $\delta > 0$, $A \in \Sigma^+$ bir Haar tipi A üzerinde tanımlı $(g_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2n}$ sistemi ve $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(E,X)$ dar operatörleri vardır öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:

(1) Eğer n çift ve $k = 1, \dots, 2^n$ ise $S_1 g_{n,k} = 0$ dır;

(2) Eğer n tek ve $k = 1, \dots, 2^n$ ise $S_2 g_{n,k} = 0$ dır;

(3) Her ortalaması sıfır A üzerinde tanımlı işaret x için $||S_1 x + S_2 x|| \geq \delta$ dır.

İspat. $T = T_1 + T_2$ dar olmadığından her ortalaması sıfır A üzerinde tanımlı işaret x için $||Tx|| \geq 2\delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ ve $A \in \Sigma^+$ vardır. n üzerinde ardışık olarak T_1 ve T_2 nin darlığını kullanarak A üzerinde n tek ve $k = 1, \dots, 2^n$ ise $i = 1$ için ve n çift ve $k = 1, \dots, 2^n$ ise $i = 2$ için $||T_i(g_{n,k})|| \leq \frac{\delta}{2^{3n+1}}$ şartını sağlayan bir Haar tipi $(g_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2n}$ sistemini kolayca inşaa edebiliriz. Şimdi her $x \in E$ için

$$S_1 x = T_1 x - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{4^m} 4^m f\left(g_{2m,k}.x\right) T_1 g_{2m,k}$$

ve

$$S_2 x = T_2 x - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{2m+1}} 2^{2m+1} f\left(g_{2m+1,k} x\right) T_2 g_{2m+1,k}$$

yazalım.

S_1 ve S_2 nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için

$$u = \{x \in E: ||x|| \leq \eta\} \subseteq \{x \in E: |f(x)| \leq 1\}$$

olacak şekilde $\eta > 0$ seçelim. Her $x \in U$ ve $n = 0,1, \ldots$ için her $n = 0,1, \ldots$ ve $k = 1, \ldots, 2^n$ için $||g_{n,k}.x|| \leq ||x||$ olduğundan $g_{n,k}.x \in U$ dur ve böylece

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^n} 2^n f(g_{n,k}.x) T_1 g_{n,k} \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \left\| T_1 g_{n,k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \frac{\delta}{2^{3n+1}} = \frac{\delta}{2^{n+1}} \qquad (3.1)$$

dır. Lemma 4.2.3 ten her $l \in \mathbb{N}$ için

$$S_{1,l}x = T_1 x - \sum_{m=0}^{l} \sum_{k=1}^{4^m} 4^m f(g_{2m,k}.x) T_1 g_{2m,k}$$

ve

$$S_{2,l}x = T_2 x - \sum_{m=0}^{l} \sum_{k=1}^{2^{2m+1}} 2^{2m+1} f(g_{2m+1,k}.x) T_2 g_{2m+1,k}$$

formülleri ile tanımlanan operatörler dardır. 3.1 den S_1 ve S_2 operatörleri karşılıklı olarak $(S_{1,l})_{l=1}^{\infty}$ ve $(S_{2,l})_{l=1}^{\infty}$ dizilerinin U üzerindeki düzgün limitleridir. Lemma 4.2.2 den S_1 ve S_2 dar operatörlerdir.

S_1 ve S_2 (1) ve (2) şartlarını sağlar. x A üzerinde ortalaması sıfır işaretli olsun. Her $n = 0,1, \ldots$ ve $k = 1, \ldots, 2^n$ için $|f(h_{n,k}.x)| \leq 1$ olduğunu göz önünde bulundurursak

$$||S_1 x + S_2 x|| = \left\| Tx - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} 2^n f(g_{n,k}.x) T_1(g_{n,k}) \right\| \geq 2\delta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{n+1}} = \delta$$

dır. Yani dolayısıyla (3) sağlanır. Buda ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.2. E $[0,1]$ üzerinde bir Köthe F uzayı olsun. Öyle ki her $x \in L_\infty$ için

$f(x) = \int_{[0,1]} x\, d\mu$ sağlayan bir $f \in E^*$ olsun. O zaman

(i) Öyle bir Banach uzayı X ve dar operatörler $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ vardır. Öyle ki bunların $T = T_1 + T_2$ toplamı dar değildir. Şartı bize;

(ii) "Öyle bir $A \in \sum^+$, A üzerinde bir Haar tipi $(g_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2^n}$ ve E de sıfırın mutlak konveks komşuluğu vardır. Öyle ki $E_1 = [g_{2m,k}]_{m=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2^{2m}}$ ve $E_2 = [g_{2m+1,k}]_{m=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2^{2m}}$ olmak üzere A üzerindeki her ortalama sıfır işaret fonksiyonu için $x \notin (E_1 + U) \cap (E_2 + U)$ olacak şekilde vardır." verir.

Üstüne üstlük p E üzerinde U tarafından üretilen Minkowski fonksiyoneli olmak şartıyla U $lim_{\mu(A)\to 0} p(\mathbf{1}_A) = 0$ şartını sağlarsa (özel olarak E birim üzerinde mutlak sürekli bir norma sahipse) o zaman (ii) ifadesi (i) ifadesini gerektirir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: Teorem 4.3.1 den, öyle bir $\delta > 0, A \in \sum^+$, A üzerinde bir Haar tipi $(g_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2^n}$ sistemi ve $(1), (2)$ ve (3) özelliklerini sağlayan $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ seçelim. Hemen not edelim ki (1) ve (2) bize $E_1 \subseteq kerS_1$ ve $E_2 \subseteq kerS_2$ i verir.

$U = \{x \in E || S_1 x| \, | < \delta/2 \,\&\, ||S_2 x|| < \delta/2\}$ yazalım ve varsayalım ki $x \in (E_1 + U) \cap (E_2 + U)$ olacak şekilde A üzerinde ortalaması sıfır işaret fonksiyonu x olsun. O zaman

$$||S_1 x + S_2 x|| \leq ||S_1 x|| + ||S_2 x|| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

sağlanır. Buda (3) ile çelişir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Genelliği bozmadan $A = [0,1]$ alabiliriz. Z $[0,1]$ üzerinde ortalaması sıfır olan bütün işaret fonksiyonlarının kümesini göstersin. $z \in Z$ yi sabitleyelim ve (ii) den öyle bir $i = i_z \in \{1,2\}$ sayısı seçelim öyle ki $z \notin (E_i + U)$, yani $(z, U) \cap E_i = \emptyset$ olsun.

O zaman $E_z = span(z + E_i)$ ve $g_z: E_z \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $v \in E_i$ olmak üzere

$$g_z(\alpha z + v) = \alpha$$

ile tanımlayalım. Eğer $\alpha \neq 0, \alpha z + v \in U$ şartını sağlarsa o zaman $(z + \frac{1}{\alpha}U) \cap E_i \neq \emptyset$ ve $|\alpha| < 1$ olur. Böylece her $x \in U \cap E_z$ için $|g_z(x)| < 1$ olur. Böylelikle her $x \in E_z$ için $|g_z(x)| \leq p(x)$ sağlanır. Hahn-Banach teoreminden öyle bir lineer fonksiyonel $f_z: E \to \mathbb{R}$ vardır öyle ki her $x \in E_z$ için $f_z(x) = g_z(x)$ ve böylelikle her $x \in E$ için $|f_z(x)| \leq p(x)$ olur.

$Y = l_\infty(z)$ yazalım ve $T_1 x(z) = \begin{cases} f_z(x), & i_z = 1 \\ 0 \quad , & i_z = 2 \end{cases}$, ve

$$T_2 x(z) = \begin{cases} 0 & , i_z = 1 \\ f_z(x) & , i_z = 2 \end{cases},$$

ile tanımlanan $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ operatörlerini düşünelim.$(f_z)_{z \in Z}$ nin düzgün sınırlılığı T_1 ve T_2 nin sürekliliğini verir.

$lim_{\mu(B) \to 0} p(\mathbf{1}_B) = 0$ olduğundan

$$\lim_{\mu(B) \to 0} \left| ||T_1 \mathbf{1}_B|| \right| = \lim_{\mu(B) \to 0} \left| ||T_2 \mathbf{1}_B|| \right| = 0$$

dur.

Üstelik, $E_1 \subseteq \ker T_1$ ve $E_2 \subseteq \ker T_2$ dir. Öte yandan $f_z(z) = 1$ bize her $z \in Z$ için $||T_1 z + T_2 z|| \geq 1$ i eşitsizliğini verir ve böylece $T = T_1 + T_2$ toplamı dar değildir. Buda ispatı tamamlar. ■

4.4. Banach Köthe Uzayları İçin Temel Sonuçlar

Aşağıdaki önerme temel sonuçların elde edilmesinde yarar. Buna benzer argümanlar [(Kadets, Kalton and Werner 2005),Lemma 4.2] referansında kullanılmıştır.

Önerme 4.4.1. z [0,1] üzerinde tanımlı ortalaması sıfır işaret fonksiyonu, $\varepsilon > 0, J_n \subseteq \{1,2,\dots,2^n\}$ olmak üzere $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ bir dizi ve $x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in J_n} a_{n,k}h_{n,k} \in L_1$ öyle ki $||x-z|| < \varepsilon$ olsun. O zaman öyle bir $y = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in J_n} b_{n,k}h_{n,k} \in L_1$ vardır öyle ki $\left||y|\right|_{\infty} \leq 1$ ve $||y-z|| < \varepsilon$ dur.

İspat. $M = \{(n,k): n = 0,1,\dots, k \in J_n\}$ kümesini sonsuz almak ispatı tamamlamak için yeterlidir. $\varphi: M \to \{1,2,\dots,N\}$ herhangi bir $n > m$ için $\varphi(n,k) > \varphi(m,l)$ şartını sağlayan birebir ve örten fonksiyonu olsun. Her $j = 1,\dots,N$ için $h_j = h_{\varphi-1(j)}$, $a_j = a_{\varphi-1(j)}$ ve $x_j = \sum_{i=1}^{j} a_i h_i$ yazalım. Hemen not edelim ki $x = x_N$ dir.

Varsayalım $\left||x|\right|_{\infty} > 1$ olsun. $m \in \{1,\dots,N\}$ kümesinden en küçük sayıyı seçelim ve bu sayı için $\left||x_m|\right|_{\infty} > 1$ olsun. Şimdi göstereceğiz ki $u = \tau(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i h_i$ öyle ki her $j = 1,\dots,N$ için $u_j = \sum_{i=1}^{j} c_i h_i$ olmak üzere $||u-z|| \leq ||x-z||$ ve $\max\left\{\left||u_1|\right|_{\infty},\dots,\left||u_m|\right|_{\infty}\right\} = 1$ olsun.

Her $j = 1,\dots,N$ için $I_j = supp\ h_j, I_j^+ = \{t \in [0,1]: h_j(t) = 1\}$ ve $I_j^- = I_j \setminus I_j^+$ yazalım. O zaman $A = \{t \in [0,1]: |x_m(t)| = \left||x_m|\right|_{\infty}\}$ ve $B = [0,1] \setminus I_m$ yazalım. m nin minimalliğinden $A \in \{I_m, I_m^+, I_m^-\}$ dir. Şimdi

$$c_j = \begin{cases} 0, & j > m, I_j \subseteq A \\ a_m - sign\ a_m\left(\left||x_m|\right|_{\infty} - 1\right), & j = m \\ a_j, & I_j \nsubseteq \mathrm{A} \end{cases}$$

ile tanımlanan $(c_j)_{j=1}^{N}$ dizisini tanımlayalım. $u_1 = x_1, \dots, u_{m-1} = x_{m-1}, \left||u_m|\right| = 1$ ve $u.\mathbf{1}_B = x.\mathbf{1}_B$ olduğunu gözlemleyelim.

Şimdi $A = I_m^+$ olduğu durumu düşünelim. $v = \sum_{j>m, E_j \subseteq E_m^+} a_j h_j$ yazalım. O zaman

$$u = x - v - sign\ a_m\left(\left||x_m|\right|_{\infty} - 1\right)h_m$$

dır.

$w = x - v$ fonksiyonu I_m^+ üzerinde sabittir ve her $t \in I_m^+$ için $w(t) = x_m(t)$ dir. Her $t \in I_m^+$ için $|x_m(t)| > 1$ olduğunu göz önüne alırsak ve z nin [0,1] üzerinde işaret fonksiyonu olduğunu düşünürsek $w - z$ fonksiyonu I_m^+ üzerinde ortak bir işaret fonksiyonudur. $\int_{I_m^+} v\, d\mu$ olduğundan

$$\int_{I_m^+} |w - z| d\mu \leq \int_{I_m^+} |w - z + v| d\mu\,,$$

yani $||(w - z).\mathbf{1}_{E_m^+}|| \leq ||(x - z).\mathbf{1}_{I_m^+}||$ ve $||(w - z).\mathbf{1}_{I_m}|| \leq ||(x - z).\mathbf{1}_{I_m}||$ dır.

Her $t \in I_m^+$ için $|x_{m-1}(t)| \leq 1$ ve $|x_m(t)| > 1$ olduğundan $sign\, a = sign\, a_m$ dir. Varsayalım $a, a_m > 0$ olsun.

O zaman $u = w - (a - 1)h_m$ dir. Şimdi, her $t \in I_m^+$ için $u(t) = 1$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\int_{I_m} |u - z|\, d\mu = \int_{I_m^+} (u - z)\, d\mu + \int_{I_m^-} |u - z|\, d\mu$$

$$\leq \int_{I_m^+} (w - z)\, d\mu - (a - 1)\mu(I_m^+) + \int_{I_m^-} |w - z|\, d\mu + (a - 1)\mu(I_m^-)$$

$$= \int_{I_m} |w - z|\, d\mu$$

elde ederiz. Eğer $a, a_m < 0$ ise her $t \in I_m^+$ için $u = w - (a + 1)h_m, u(t) = -1$ dir ve

$$\int_{I_m} |u - z|\, d\mu = -\int_{I_m^+} (u - z)\, d\mu + \int_{I_m^-} |u - z|\, d\mu$$

$$\leq \int_{I_m^+} (w - z)\, d\mu + (a + 1)\mu(I_m^+) + \int_{I_m^-} |w - z|\, d\mu + |a + 1|\mu(I_m^-)$$

$$= \int_{I_m} |w - z|\, d\mu.$$

Dolayısıyla $||(u - z).\mathbf{1}_{I_m}|| \leq ||(w - z).\mathbf{1}_{I_m}||$ dır. Böylece,

$||(u - z).\mathbf{1}_{I_m}|| \leq ||(x - z).\mathbf{1}_{I_m}||$ ve $||u - z|| \leq \big||x - z|\big|$ elde edilir.

$A \in \{I_m, I_m^-\}$ durumu benzer şekilde ispatlanabilir. Böylece $\tau(x)$ in varlığı ispatlanmış olur. Şimdi τ fonksiyonunun birçok kez kullanarak arzu edilen y yi elde ederiz. ■

Teorem 4.4.2. E $[0,1]$ üzerinde birimde mutlak sürekli bir norma sahip Köthe Banach uzayı olsun. O zaman öyle bir Banach uzayı X ve dar operatörler $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,X)$ vardır öyle ki $T = T_1 + T_2$ dar değildir.

İspat. Lemma 4.2.5 ten $B \in \sum^+$ seçebiliriz. Öyle ki her $x \in L_\infty$ için $f(x) = \int_B x\, d\mu$ olacak şekilde $f \in E^*$ vardır. Genelliği kaybetmeden $B = [0,1]$ olduğunu varsayalım.

$\delta > 0$ seçelim öyle ki her $x \in U = \{u \in E: ||u|| < \delta\}$ için $|f(x)| < 1/4$ olsun. Teorem 4.3.2 den sıfırın bir U komşuluğu ile $A = [0,1]$ aralığı ve $(h_{n,k})_{n=0}^{\infty}{}_{k=1}^{2^n}$ Haar sisteminin Teorem 4.3.2 nin (ii) şartını sağladığını göstermek yeterlidir.

Aksine $[0,1]$ üzerinde öyle bir ortalaması sıfır işaret fonksiyonu z olsun öyle ki $E_1 = h_{2n,k}: n = 0,1,\dots, k = 1,\dots,2^{2n}$ ve $E_2 = [h_{2n+1,k}: n = 0,1,\dots, k = 1,\dots,2^{2n+1}]$ olmak üzere $z \in (E_1 + U) \cap (E_2 + U)$ olsun. $x_1 \in E_1$ ve $x_2 \in E_2$ seçelim öyle ki $z - x_1, z - x_2 \in U$ olsun. E Köthe uzayı olduğundan $|z - x_1|, |z - x_2| \in U$ dur. Böylece $\left||z - x_1|\right|_1 = f(|z - x_1|) < 1/4$ ve $\left||z - x_2|\right|_1 = f(|z - x_2|) < 1/4$ dür. Önerme 4.1 den, öyle $y_1 \in E_1$ ve $y_2 \in E_2$ vardır öyle ki $\left||y_1|\right|_\infty \leq 1, \left||y_2|\right|_\infty \leq 1$ ve $\left||y_2 - z|\right|_1 < 1/4$ dür. Şimdi $i \in \{1,2\}$ için

$$\int_{[0,1]} (y_i - z)^2 d\mu \leq 2 \int_{[0,1]} |y_i - z|\, d\mu < \frac{1}{2}$$

dir.

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k} h_{n,k} \qquad (4.1)$$

z nin L_2 içerisindeki bir açılımı olsun.

$$z_{ev} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{2n}} a_{2n,k}, h_{2n,k} \ ve \ z_{od} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{2n+1}} a_{2n+1,k} h_{2n+1,k} \qquad (4.2)$$

yazalım. Önceki yaklaşık değerleri göz önüne aldığımız zaman

$$1 = ||z||_2^2 = ||z_{ev}||_2^2 + ||z_{od}||_2^2 \leq \left||z - y_2|\right|_2^2 + \left||z - y_1|\right|_2^2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

elde ederiz, buda bize bir çelişki verir. ■

Her $z \in Z$ için (4.1) deki seriyi ($E = L_2$ deki aynı katsayılarla) harhangi bir [0,1] üzerinde tanımlı Haar sistemi temeli olan bir Köthe Banach uzayı E içinde yakınsaktır. Üstelik (4.2) açılımı yalnızca [0,1] üzerinde tanımlı Köthe Banach uzayı E de (öyle ki Haar sistemi durumsal olmayan) geçerli değil aynı zamanda eğer $L_2 \subseteq E$ ise, diyelim ki $E = L_1$ olsun yine geçerlidir.

Teknik sebeplerden dolayı, E nin birim üzerindeki normunun mutlak sürekliliğine Teorem 4.4.2 de varsayıyoruz. Buna rağmen basit bir argüman bize eğer bir Köthe Banach uzayı E başka bir birim üzerinde mutlak sürekli norma sahip Köthe Banach uzayı F içerisinde kalıyorsa o zaman bir Banach uzayı X in bir örneği ve toplamları dar olmayan iki dar $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F, X)$ vardır. Öyle ki $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ operatörleri için $T = T_1 + T_2$ dar değildir. Gerçekten, eğer $J \in \mathcal{L}(E, F)$ kapsama gömmesi ise, yani her $x \in E$ için $Jx = x$ oluyorsa $i = 1,2$ için $T_i = S_i o\, J$ bize istediğimizi verir. Bizim tanımımızdaki [0,1] üzerinde tanımlı her Köthe Banach uzayı E L_1 in alt kümesi olduğundan ve böylelikle L_1 içinde sürekli olarak kapsandığından Teorem 4.4.2 deki E üzerinde birimin normunun mutlak sürekliliğini göz ardı edebiliriz. Dolayısıyla aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.4.3. E [0,1] üzerinde tanımlı bir Köthe Banach uzayı olsun. O zaman Banach uzayı X ve toplamları dar olmayan iki dar $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ operatörleri vardır.

4.5. İki Regüler Dar Operatörün Toplamı

Aşağıdaki teorem bize neden Teorem 4.1.1 de F üzerindeki normun sıra sürekliliğinin gerekli olduğunu açıklar.

Teorem 4.5.1. E $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir Köthe Banach uzayı öyle ki E nin Köthe duali E' Haar sistemi şartsız tabana sahip bir Köthe Banach uzayı F yi içersin. O zaman öyle regüler dar $T_1, T_2 \in N_r(E, L_\infty)$ operatörleri vardır. Öyle ki toplamları yani $T = T_1 + T_2$ dar değildir.

İspat. Öncelikle $F \subseteq E'$ kapsamasının sürekli olduğunu gözlemleyelim. Gerçekten $[0,1]$ üzerinde verilen, herhangi bir Köthe Banach uzayı G için $G \subseteq L_1 \subseteq L_0$ kapsamalarının sürekliliğinden (L_0 daki yakınsaklık ölçüdeki yakınsaklığa denktir) G deki her yakınsak dizinin ölçüsel yakınsak olduğunu söyleyebiliriz.

Bu sonucu ve kapalı grafik teoremini kullanarak Köthe Banach uzayının herhangi bir kapsanmasının sürekli olduğunu kolayca söyleyebiliriz.

Z $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı bütün ortalaması sıfır işaret fonksiyonlarının kümesi olsun. Z de L_2 normuna göre yoğun olan herhangi bir $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçelim. Verilen herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için, $z_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(z_m) h_{n,k}$ açılım ve z_m nin F deki Haar sistemine göre Fourier serisi açılımı olsun. z nin (4.2) de z_m ile verilen çift ve tek kısımlarını $z_{m,ev}$ ve $z_{m,od}$ ile gösterelim. $[0,1] = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} A_m$ ifadesi $A_m \in \sum^+$ için yazılsın. $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, L_\infty)$ operatörlerini her $t \in A_m$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$(T_1 x)(t) = \int_{[0,1]} z_{m,ev}\, x\, d\mu \;\; ve \;\; (T_2 x)(t) = \int_{[0,1]} z_{m,od}\, x\, d\mu$$

formülleri ile tanımlayalım. Her $m \in \mathbb{N}$ için ve M $F \subseteq E'$ kapsamasının normu ve K E' içerisinde Haar sisteminin şartlı olmayan sabit olmak üzere

$$\max\left\{\left|\left|z_{m,ev}\right|\right|_{E'}, \left|\left|z_{m,od}\right|\right|_{E'}\right\} \leq M.\max\{\left|\left|z_{m,ev}\right|\right|_F, \left|\left|z_{m,od}\right|\right|_F\}$$

$$\leq MK\left|\left|z_m\right|\right|_F = MK\left|\left|\mathbf{1}_{[0,1]}\right|\right|_F$$

olduğundan T_1 ve T_2 operatörleri sınırlıdır.

Üstelik T_1 ve T_2 regülerdir, çünkü her $t \in A_m$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$(T_1 x)(t) = \int_{[0,1]} z^+_{m,ev}\, x\, d\mu - \int_{[0,1]} z^-_{m,ev}\, x\, d\mu$$

dir. (Benzer şekilde T_2 nin de regüler olduğu gösterilebilir.) Şimdi her

$n = 0,1,\dots, k = 1,\dots, 2^{2n}$ ve $l = 1,\dots, 2^{2n+1}$ için $T_1 h_{2n+1,k} = T_2 h_{2n,l} = 0$ olduğunu gözlemleyelim ve $lim_{\mu(A)\to 0}\big||T_1 \mathbf{1}_A|\big| = lim_{\mu(A)\to 0}\big||T_2 \mathbf{1}_A|\big| = 0$ olduğunu görelim. Lemma 4.2.1 den T_1 ve T_2 dar operatörlerdir.

T nin dar olmadığını göstermek için herhangi bir $z \in Z$ yi sabitleyelim ve

$\big||z - z_m|\big|_2 < 1/2$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ seçelim.

O zaman her $t \in A_m$ için;

$$\big||Tz|\big| \geq |(Tz)(t)| = \left|\int_{[0,1]} z z_m\, d\mu\right| \geq \left|\int_{[0,1]} z^2\, d\mu\right| - \left|\int_{[0,1]} z(z - z_m)\, d\mu\right|$$

$$\geq 1 - \big||z - z_m|\big|_2 > \frac{1}{2}$$

olur. Buda ispatı tamamlar. ■

Özel olarak Teorem 4.5.1 in varsayımı $1 < p < \infty$ olmak üzere $E = L_p,\ F = E'$ için sağlanır üstene üstlük $E = L_\infty$ için öyle ki $F = L_2 \subseteq L_1 = L'_\infty$ içinde sağlanır. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.5.2. $1 < p < \infty$ olsun. O zaman öyle regüler dar $T_1, T_2 \in N_r(L_p, L_\infty)$ dardır öyle ki toplamları $T = T_1 + T_2$ dar değildir.

4.6. Köthe Fonksiyon Uzayları İle İlgili Bir Soru

Sonuç 4.4.3 ten her $[0,1]$ üzerinde tanımlı Köthe Banach uzayı E için öyle bir Banach uzayı X ve toplamları dar olmayan operatörler $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, X)$ varlığını biliyoruz. Bizim tanımımızda $E \subseteq L_1$ olduğu varsayıldı. Bu varsayımı göz ardı edersek sonucun doğru olup olmadığını bilmiyoruz. Daha açık bir şekilde aşağıdaki problem açık bir problemdir.

Problem 4.6.1. [0,1] üzerinde tanımlı bir Köthe fonksiyon uzayı E varmıdır öyle ki her Banach uzayı X için E den X tanımlı herhangi iki dar operatörün toplamı dar olsun.

Hemen belirtelim ki Problem 4.6.1 in cevabı şu genel durum altında doğrudur: eğer $0 < p < 1$ ise o zaman her $F-$ uzayı X için L_p den X e tek dar operatör sıfır operatördür (Plichko and Popov 1990).

5. ÖRGÜ NORMLU UZAYLAR ÜZERİNDE TANIMLI TOPLAMSAL OPERATÖRLER: M.A. PLIEV, F. POLAT VE M.R. WEBER'İN YAKLAŞIMI

İlk olarak (Maslyuchenko, Mykhaylyuk and Popov 2009) referansta sıra sürekli atomsuz bir Banach örgüsü E üzerinde tanımlı ve sıra sürekli bir Banach vektör örgüsü F te değer alan dar regüler operatörlerin kümesinin, E den F ye tanımlı bütün regüler lineer operatörler ailesi $L_r(E,F)$ içinde bir bant olduğu gösterilmiştir. Sonuçta bu durumda iki dar regüler operatörün toplamında dar regüler operatör olduğu gösterilmiştir. İkinci olarak iki dar operatörün toplamının dar olmadığı gösterilmiştir. (Mykhaylyuk and Popov 2013) referansta herhangi bir $[0,1]$ üzerinde tanımlı Köthe-Banach uzayı E için öyle bir Banach uzayı X ve $S_1, S_2: E \to X$ iki dar operatörün varlığı gösterilmiştir. Bu $S_1 \; ve \; S_2$ operatörleri içinde $S_1 + S_2$ nin dar olmadığı gösterilmiştir. Yine de (Mykhaylyuk 2014) referansta kompak dar lineer bir operatörle dar bir operatörünün toplamının dar olduğu gösterilmiştir. Son yıllarda dar operatör kavramı (Pliev 2011, Pliev and Popov 2014) referanslarında lineer olmayan dik toplamsal operatörler uzayına genişletilmiştir. Hemen belirtelim ki bu operatörlerin teorisi matematiğin aktif bir araştırma alanıdır. Bunun için

$[(\text{Abasov and Pliev 2017}), (\text{Feldman 2013}) - (\text{Humenchuk 2016}) \; et \; al.]$

referanslarına bakılabilir. (Humenchuk 2016) referansta dar dik toplamsal bir operatörle atomsuz Dedekind tam bir vektör örgüsünden bir Banach uzayına tanımlı sonlu ranka sahip yanal norm sürekli dik toplamsal operatörün toplamının yine bir dar operatör olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde araştırmamızı bu yönde devam ettireceğiz. (Humenchuk 2016) makalenin ana sonucunu iki yönde genelleyeceğiz. İlk olarak (Humenchuk 2016) referansın sonucunu örgü normlu uzaylara genelleyeceğiz. Gözlemleyelim ki aslında örgü normlu uzaylar Banach uzayı ve vektör örgüsü kavramlarının bir genellemesidir. İkinci olarak (Humenchuk 2016) referansta çalışılan sonlu ranka sahip dik toplamsal operatörlerin yerine temelde daha geniş bir kavram olan sıra tam ayrıştırılabilir örgü normlu uzaylar üzerinde tanımlı bir Banach uzayında değer alan C-kompak dik toplamsal operatörleri ele alacağız. Bu bölümün ilk kısmında örgü normlu bir uzayda tanımlı ve bir Banach uzayı üzerinde değerler alan dar, yanal-norm sürekli ve C-kompak operatörlerle ilgili bazı örnekleri vereceğiz.

Herhangi bir ayrıştırılabilir örgü normlu (V,E) uzayından izdüşüm özelliğine sahip atomlu bir vektör örgüsü üzerine tanımlı yanal-norm sürekli, dar dik toplamsal operatörün sıfır operatörü olduğunu göstereceğiz.

Bu bölümün son kısmında herhangi bir sıra tam, ayrıştırılabilir örgü normlu V uzayı ve herhangi bir Banach uzayı X için $S:V\to X$ dar dik toplamsal operatörü ve $T:V\to X$ yanal-norm sürekli C-kompak operatörü için $S+T$ nin bir dar operatör olduğunu göstereceğiz.

Aşağıdaki bütün vektör örgülerinin Arşimedyan olduğunu varsayıyoruz. Bir vektör örgüsü E nin iki elemanı e,f ye eğer $|e|\wedge|f|=0$ ise ayrıktır denir ve $e\perp f$ ile gösterilir.

5.1. Giriş.

Tanım 5.1.1. Bir V vektör uzayını ve bir reel Arşimedyan vektör örgüsü E yi düşünelim. Bir $|.|:V\to E$ fonksiyonuna aşağıdaki aksiyomlar sağlarsa $E-$ değerli vektör normu denir:

1)$|v|\geq 0, |v|=0\Leftrightarrow v=0,\ (v\in V)$.

2)$|v_1+v_2|\leq|v_1|+|v_2|,\ (v_1,v_2\in V)$.

3)$|\lambda v|=|\lambda||v|,\ (\lambda\in\mathbb{R}, v\in V)$.

Bir vektör norumuna eğer

4)Her $e_1,e_2\in E_+$ ve $x\in V$ için $|x|=e_1+e_2$ iken öyle $x_1,x_2\in V$ varsa ve $x=x_1+x_2$ ve $|x_k|=e_k$ $(k\in\{1,2\})$ sağlanıyorsa ayrıştırılabilir denir.

$(V,|.|,E)$ üçlüsüne yada (V,E) ikilisine yada kısaca herhangi bir karışıklık yoksa V ye E değerli örgü normlu uzay denir. Eğer örgü normlu $|.|$ ayrıştırılabilir ise bu durumda V ye ayrıştırılabilir denir. Eğer E de azalan bir $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ neti varsa öyle ki $inf_{\alpha\in\Lambda}(e_\alpha)=0$ ise ve $\alpha\geq\alpha_0$ olacak şekilde en az bir α_0 için $|v-v_\alpha|\leq e_\alpha$ sağlanıyorsa bu durumda $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ netine $v\in V$ ye sıra yakınsaktır denir ve $v=bo-\lim_\alpha v_\alpha$ yazılır. Bir $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ netine eğer $(v_\alpha-v_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}$ neti 0' a sıra yakınsak ise sıra temelli denir.

Eğer bir örgü normlu uzaydaki her sıra temelli net yine bu uzay içerisinde bir elemana sıra yakınsak ise bu örgü normlu uzaya sıra tamdır denir. Bir sıra tam ayrıştırılabilir örgü normlu uzaya kısaca Banach Kantrovich uzayı denir. Bir örgü normlu V uzayının bir D alt kümesi verildiğinde eğer öyle bir $e \in E_+$ varsa ve her $v \in D$ için $|v| \leq e$ oluyorsa bu D uzayına sıra sınırlıdır denir.

Bir örgü normlu V uzayının iki elemanı x, y için $|x| \wedge |y| = 0$ sağlanıyor ise bu elemanlara ayrıktır denir. $x = \bigsqcup_{i=1}^{n} x_i$ eşitliği $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve her $i \neq j$ için $x_i \perp x_j$ anlamına gelecektir. $n = 2$ için $x = x_1 \sqcup x_2$ şartını sağlıyor ise bu bileşenlere karşılıklı olarak birbirini tümleyen denir. Bir $x \in V$ nin bütün bileşenlerinin kümesi $\mathcal{F}_x$ notasyonu ile gösterilecektir. Bir x vektör uzayının H ve K alt kümeleri için $H + K = \{v + u: v \in H; u \in K\}$ ve $nH := H + \cdots + H$ notasyonlarını kullanacağız. Bir D kümesinin karekteristik fonksiyonunu $\mathbf{1}_D$ ile gösterilecektir. Verilen $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri için $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ notasyonu $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ ve her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ demektir. Eğer $n = 2$ ise $A_1 \sqcup A_2$ yazacağız.

5.2. Örgü Normlu Uzaylar Üzerinde Tanımlı Dar Dik Toplamsal Operatörler

Bu bölümde örgü normlu uzaylar üzerinde tanımlı dik toplamsal operatörlerin bazı sınıflarını tanımlayacağız. Ayrıca ayrıştırılabilir örgü normlu (V, E) uzayından izdüşüm özelliğine sahip ve bir normlu X uzayı üzerinde değerler alan dik toplamsal $T: V \to X$ operatörünün sıfır operatörü olduğunu göstereceğiz.

Tanım 5.2.1. (V, E) örgü normlu bir uzay ve X de reel bir vektör uzayı olsun. Eğer her ayrık $u, v \in V$ için $T(u + v) = Tu + Tv$ oluyor ise $T: V \to X$ operatörüne dik toplamsal operatör denir.

Açıktır ki dik toplamsal T operatörü için $T(0) = 0$ dır. Bütün V den X e tanımlı dik toplamsal operatörlerin kümesi alışılmış lineer işlemler altında bir vektör uzayıdır.

Tanım 5.2.2. (V,E) bir ayrıştırılabilir örgü normlu uzay ve X' te bir normlu uzay olsun. Eğer her $v \in V$ ve $\varepsilon > 0$ için öyle ikişerli v nin karşılıklı birbirini tümleyen bileşenleri v_1, v_2 varsa ve $||Tv_1 - Tv_2|| < \varepsilon$ oluyor ise dik toplamsal bir $T: V \to X$ operatörüne dardır denir. $X = \mathbb{R}$ olması durumunda yukarıdaki T operatörüne dar fonksiyonel denir. Hemen belirtelim ki örgü normlu uzaylar üzerinde tanımlı dar dik toplamsal operatörler ilk defa (Pliev and Fang 2017) referansta tanıtılmıştır.

Tanım 5.2.3. (V,E) bir örgü normlu uzay olsun. Eğer $v = bo - \lim_\alpha v_\alpha (v = bo - \lim_n v_n)$ ve her $\beta, \gamma \in \wedge$ öyle ki $\beta > \gamma$ için $|v_\beta - v_\gamma| \perp |v_\gamma|$ $(Her\ n,m \in \mathbb{N}\ öyle\ ki\ n \geq m\ için\ |v_n - v_m| \perp |v_m|)$ ise $(v_\alpha)_{\alpha \in \wedge} \subset V$ netine $((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V\ dizisine)$ v ye yanal yakınsaktır denir. Açıktır ki her $\gamma \in \wedge$ için $|v - v_\gamma| \perp |v_\gamma|$ dır $(her\ m \in \mathbb{N}\ için\ |v - v_m| \perp |v_m|\ dir)$.

Tanım 5.2.4. (V,E) örgü normlu uzay ve X de bir normlu uzay olsun. Eğer bir dik toplamsal $T: V \to X$ operatörü:

1) V deki yanal yakınsak netleri X teki norm yakınsak netlere götürürse T ye yanal-norm sürekli operatör denir.

2) V deki yanal yakınsak dizileri X teki norm yakınsak dizilere götürürse h T ye $\sigma -$ yanal norm sürekli operatör denir.

Tanım 5.2.14. (V,E) bir örgü normlu uzay X de bir normal uzay olsun. Dik toplamsal $T: V \to X$ operatörüne eğer

1) T, V nin sıra sınırlı kümelerini X teki göreceli kompak kümelere götürüyorsa $AM -$ kompak denir.

2) Her $v \in V$ için $T(\mathcal{F}_v)$ kümesi X te göreceli kompak ise $C -$ kompak denir.

Örnek 5.2.15. (V,E) örgü normlu bir uzay X te bir Banach uzayı olsun. $v \in V$ alalım ve $e = ||v||$ yazalım. Her $u \in \mathcal{F}_v$ için $||u|| \leq e$ olduğundan herhangi bir $AM -$ kompak $T: V \to X$ operatörü $C -$ kompaktır.

Örnek 5.2.16. Hatırlatalım ki $\mathcal{OA}_r(\mathbb{R}) \coloneqq \mathcal{OA}_r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ uzayı bütün $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ öyleki $f(0)=0$ fonksiyonlarının kümesi ile aynıdır. Bir vektör örgüsü E örgü normlu bir V uzayının E ile çakışmasının özel bir durumdur ve vektör normu $||.||:E\to E$ ile $|.|:E\to E$ modülü çakışır, yani $|v|=v\vee(-v),\ (v\in E).\ (V,E)=E=X=\mathbb{R}$ olsun.

Dik toplamsal bir $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$S(v)=\begin{cases}\frac{1}{v^2}\ eğer\ v\neq 0\ ise\\ 0\ \ eğer\ v=0\ ise\end{cases}$$

$\mathbb{R}$ atomik bir vektör örgüsü olduğundan her $v\in\mathbb{R}$ için $\mathcal{F}_v=\{0,v\}$ dır. Böylece S bir $C-$ kompak operatördür. Öte yandan $S([0,1])$ kümesi $\mathbb{R}$ de sınırsız bir kümedir ve dolayısıyla $S\ AM-$kompakt değildir. Hemen belirtelim ki $E,F\ Banach$ vektör örgüleri arasında öyle ki $F\ \sigma-Dedekind$ tam, tanımlanan $C-$kompakt kümeler üzerinde düzgün sürekli olması durumunda $AM-$kompaktır [(Maz´on et al. 1990), $Teorem$ 3.4].

Tanım 5.2.18. Bir E vektör örgüsünün bir e elemanı verilsin. Eğer $0\le x\le|e|$, $0\le y\le|e|$ ve $x\wedge y=0$ şartını sağlayan x ve y lerden en az biri sıfır ise bu durumda e ye bir atom denir. Bir (V,E) örgü normlu uzayının bir v elemanı için $||v||$ elemanı E de atom ise v ye (V,E) de bir atom denir. Hemen belirtelim ki örgü normlu uzaylardaki atomlar vektör örgülerindeki atomların birçok iyi bilinen özelliklerini alır.

Önerme 5.2.19. (V,E) ayrıştırılabilir örgü normlu bir uzay, v,V de bir atom ve $v_1\perp v_2$ için $v=v_1+v_2$ olsun. O zaman ya $v_1=v,\ v_2=0$ ya da $v_2=v, v_1=0$ dır.

İspat. v nin bir ayrık ayrışımı $v=v_1+v_2$ olsun. O zaman

$$e=\big||v|\big|=\big||v_1+v_2|\big|=\big||v_1|\big|+\big||v_2|\big|=e_1+e_2$$

sağlanır ve e nin E de bir atom olduğunu göz önüne alırsak ya $e_1=e,\ e_2=0$ ya da $e_2=e,\ e_1=0$ ■

V ayrıştırılabilir örgü normlu bir uzay ve X bir normlu uzay olsun. Herhangi bir $T:V\to X$ dar operatörü ve her $v\in V$ atomu için $Tv=0$ dır. Gerçekten, bir v atomu önceki önermeyle uyumlu olarak yalnızca aşikar bir $v=v+0$ ayrışımına sahip olduğundan her $\varepsilon>0$ için $\big||Tv|\big|<\varepsilon$ dır ve dolayısıyla $Tv=0$ dır.

Tanım 5.2.20. Bir vektör örgüsü hiçbir atoma sahip değilse bu vektör örgüsüne atomsuz vektör örgüsü denir. E bir vektör örgüsü olsun. Eğer E^+ da atomların bir $(e_i)_{i\in I}$ koleksiyonu varsa (ki bu koleksiyona atomların yarattığı koleksiyon denir) ve öyle ki her $i \neq j$ için $e_i \perp e_j$ ve her $e \in E$ ve her $i \in I$ için $|e| \wedge e_i = 0$ iken $e = 0$ oluyor ise E ye saf atomik denir. Eğer bir E vektör örgüsündeki her bant bir izdüşüm bantı ise bu durumda E ye izdüşüm özelliğne sahip denir. Örneğin her $Dedekind$ tam vektör örgüsü izdüşüm özelliğine sahiptir.

Önerme 5.2.21. ((Luxemburg and Zaanen 1971), $Teorem$ 26,4(ii)). E vektör örgüsündeki herhangi iki $u, v \in V$ atomlar için ya $u \perp v$ ya da $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ için $v = \lambda u$ dur.

Bir vektör örgüsündeki duruma benzer olarak bir örgü normlu V uzayındaki bir $\emptyset \neq D \subset V$ için tanımlanan $D^{\perp} = \{v \in V : v \perp u,\ u \in D\}$ kümesi de bir banttır.

Önerme 5.2.22. ([(Kusraev 2000), Ö$nerme$ 2.12]). (V, E) ayrıştırılabilir örgü normlu bir uzay ve $v \in V$ olsun. O zaman her ayrık $e_1, e_2 \in E$ ikilileri için $v = v_1 + v_2$ ayrışımı için $\left||v_1|\right| = e_1$ ve $\left||v_2|\right| = e_2$ tektir.

Önerme 5.2.23. (V, E) bir izdüşüm özelliğine sahip E vektör örgüsü üzerinde tanımlı ayrıştırılabilir örgü normlu uzay olsun. O zaman E_1 atomik vektör örgüsü, E_2 atomsuz vektör örgüsü ve $E = E_1 \oplus E_2$ olmak üzere $(V, E) = (V_1, E_1) \oplus (V_2, E_2)$ dir.

İspat. Ö$nerme$ 5.2.21. den bir vektör örgüsünde permütasyon ve sıfırdan farklı çarpımlara göre atomların ürettiği bir koleksiyon tektir. E de $(e_i)_{i\in I}$ atomlarının herhangi bir maksimal koleksiyonununu düşünelim ki böyle bir koleksiyonun varlığı Ö$nerme$ 5.2.21. ve $Zorn's\ Lemma$ ile garanti edilmiştir. E_1 her $i \in I$ için e_i leri içeren minimal bir bant olsun. E_1 bir izdüşüm bantı olduğundan $E_2 = E^{\perp}$ olmak üzere $E = E_1 \oplus E_2$ dir. Burada E_2 , E nin atomsuz bir vektör alt örgüsüdür. Herhangi bir $v \in V$ yi sabitleyelim.

O zaman

$e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2$ ve $e_1 \perp e_2$ olmak üzere

$$\left||v|\right| = e = e_1 + e_2$$

dir. Vektör normunun ayrıştırılabilirliğinden ve Ö$nerme$ 5.2.22. den V nin öyle tek türlü v_1, v_2 ayrık elemanlarının ikilisini bulabiliriz öyle ki

$$v = v_1 + v_2, \left||v_i|\right| \in E_i\ , i \in \{1,2\}$$

dir. $V_i \coloneqq \{v \in V; \left||v_i|\right| \in E_i\}, i \in \{1,2\}$ olsun. Böylece v_1 ve v_2 nin sırasıyla E_1 ve E_2 üzerine tanımlı örgü normlu uzaylar olduğunu söyleyebiliriz. Üstelik $V = V_1 \oplus V_2$ ve V_1 ve V_2 V de karşılıklı ayrık bantlardır. ■

Tanım 5.2.24. E bir vektör örgüsü olsun. $\wedge = P_{fin}(I)$, I nın bütün sonlu alt kümelerinin bir kümesi ve $g_\alpha = \sum_{i\in\alpha} e_i$ olmak üzere $(e_i)_{i\in I} \subset E$ neti $(g_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ neti ile eşleştirilsin. Eğer $e \coloneqq o - \lim_\alpha g_\alpha$ varsa $(e_i)_{i\in I}$ ailesine $(o) -$ toplanabilir denir ve burada e bu ailenin toplamıdır. Bu durumda $e = o - \sum_{i\in I} e_i$ yazarız. Aşağıdaki teorem bu bölümün ilk sonucudur.

Teorem 5.2.25. (V, E) atomik bir vektör örgüsü E üzerine tanımlı ayrıştırılabilir örgü normlu bir uzay, X normlu bir uzay ve $T: V \to X$ e yanal norm sürekli dik toplamsal bir operatör olsun. Bu durumda her $v \in V$ için $Tv = 0$ dır.

İspat. E vektör örgüsünün karşılıklı ayrık $(f_i)_{i\in I}$ atomlarının ailesi tarafından üretildiğini varsayalım. $v \in E$ yi sabitleyelim. O zaman $\left||v|\right| = e \in E,\ e_i$ ler karşılıklı ayrık elemanlar ve her $i \in I$ için $e_i \in \{f_i\}^{\perp\perp}$ olmak üzere $e = o\sum_{i\in I} e_i$ gösterimine sahiptir. (e_i) ailesi için $Tanım$ 5.2.24. teki gibi $(g_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ netini düşünelim. O zaman her $\alpha \in \wedge$ için

$$e = g_\alpha \sqcup (e - g_\alpha)$$

dır ve (g_α) neti e ye yanal yakınsaktır.

V de ki vektör normunun ayrıştırabilirliğinden ve Ö$nerme$ 5.2.22 den v vektörü $(w_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ neti v ye yanal yakınsak olmak üzere tek türlü olarak

$$v = w_\alpha \sqcup u_\alpha$$

dır. Üstelik her $\alpha \in \wedge$ için $\left||w_i|\right| = e_i (i \in I)$ V deki karşılıklı ayrık atomların bir ailesi olmak üzere

$$w_\alpha = \sum_{i\in\alpha} w_i$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$Tv = Tw_\alpha + Tu_\alpha\,, \qquad (\alpha \in \wedge)$$

dır. $(w_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ nın yanal yakınsaklığından $(Tw_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ Tv ye yakınsaktır ve dolayısıyla $(Tu_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ neti sıfıra yakınsar. $Tanım$ 5.2.18. göre her bir w_i bir atomdur.

$Tw_\alpha = \sum_{i\in\alpha} Tw_i$ ve T operatörünün darlığından her $\alpha \in \wedge$ için $Tw_\alpha = 0$ dır. Sonuç olarak

$$Tv = o - lim_{\alpha\in\wedge}\, Tu_\alpha = 0$$

dır ve bu da ispatı tamamlar. ■

$Teorem$ 5.2.25 ten bir ayrıştırılabilir örgü normlu E vektör örgüsü üzerine tanımlı izdüşüm özelliğine sahip X normlu uzayına giden yanal norm sürekli dar dik toplamsal operatörlerin araştırılmasındaki genelliği bozmadan sonuçları atomsuz bir vektör örgüsü E ye kısıtlayabiliriz.

5. 3. İki Dar Operatörün Toplamı

Bu bölümde iki dik toplamsal S ve T operatörlerinin toplamı olan $S + T$ operatörünün darlığı ile ilgili bir sonucu ispatlayacağız. Yani bu bölümün ikinci ana sonucu aşağıdaki teorem olacaktır.

***Teorem* 5.3.1.** V bir $Banach\,Kantrovich$ uzayı, $(V,||.||,E)$ $Dedekınd$ tam atomsuz vektör örgüsü E üzerine bir örgü normlu uzay, X bir $Banach$ uzayı, $S:V\to X$ bir dar dik toplamsal operatör ve $T:V\to X$ yanal norm sürekli C −kompak dik toplamsal bir operatör olsun. O zaman $R=S+T$ bir dar operatördür.

Bu teoremin ispatını vermeden önce bazı sonuçlara ihtiyacımız vardır.

Önerme 5.3.2. [(Pliev and Fang 2017), $Teorem$ 1]**.** V atomsuz $Dedekınd$ tam bir E vektör örgüsü üzerine tanımlı $Banach\,Kantrovich$ uzayı ve X bir $Banach$ uzayı olsun. O zaman her yanal sürekli $C-$ kompak dik toplamsal $T:V\to X$ operatörü dardır.

Aşağıdaki bilindik önerme bu bölümün devamındaki sonuçlar için oldukça faydalıdır.

Önerme 5.3.3. V atomsuz $Dedekind$ tam bir vektör örgüsü E üzerine tanımlı $Banach-Kantrovich$ uzayı, X bir $Banach$ uzayı ve $T:V\to X$ bir yanal norm sürekli C −kompak dik toplamsal operatör olsun. Bu durumda her $v\in V$ ve $\varepsilon>0$ için öyle bir $v=\coprod_{i=1}^{n}v_i$ ayrışımı vardır. Öyle ki $1\le i\le n$ olmak üzere v_i nin karşılıklı ayrık herhangi bir v_i^1,v_i^2 ikilisi için

$$||\left|Tv_i^1-Tv_i^2\right||<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teoremi çelişki yöntemiyle ispatlayacağız. $v\in V$ yi sabitleyelim ve $\varepsilon>0$ olsun öyle ki herhangi bir $v=\coprod_{i=1}^{n}v_i\,,(n\in\mathbb{N})$ ayrışımı için $1\le i_0\le n$ olsun ve v_{i_0} ın karşılıklı ayrık bileşenlerinin bir $v_{i_0}^1,v_{i_0}^2$ ikilisi olsun öyle ki $\left|\left|T(\,v_{i0}^1-v_{i0}^2\,)\right|\right|\ge\varepsilon$ sağlansın. Her $k\in\mathbb{N}$ için v nin karşılıklı ayrık bileşenlerinin bir $v_1,\dots,v_k$ ailesinin olduğunu öyle ki her $1\le i\le k$ için v_i nin karşılıklı tümleyen bileşenlerinin v_i^1,v_i^2 ikilisi olduğunu öyle ki $\left|\left|\mathrm{T}v_i^1-Tv_i^2\right|\right|>\frac{\varepsilon}{3}$ olduğunu göstereceğiz. Bunu tüme varım ile yapacağız. $k=1$ için sonuç açıktır. Varsayalım $k>1$ için doğru olsun ve $k+1$ için doğruluğunu ispatlayalım. Tümevarım hipotezini sağlayan v nin karşılıklı ayrık bileşenlerinin bir ailesi $v_1,\dots,v_k$ ve $z=v-\coprod_{i=1}^{k}v_i$ olsun.

Eğer $\left||Tz_1 - Tz_2|\right| > \frac{\varepsilon}{3}$ şartını sağlayan z nin karşılıklı tümleyen bileşenlerinin bir z_1, z_2 ikilisi var ise $v_{k+1} = z$ olduğunu varsayıyoruz. Aksi durumda öyle bir $1 \leq i_0 \leq k$ sayısı ve v_{i0} ın ayrık tümleyen bileşenleri olan v_{i0}^1, v_{i0}^2 olmak üzere v nin bir v_{i0} bileşeni vardır ve $||Tv_{i0}^1 - Tv_{i0}^2|| \geq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Genelliği bozmadan $i_0 = k$ alabiliriz. Ö$nerme$ 5.3.2. den T bir dar operatördür. Buradan v_k ve her $\delta > 0$ için $||Tu - Tw|| < \delta$ şartını sağlayan v_k nın karşılıklı tümleyen bileşenleri u ve w vardır. O zaman

$$\left||v_k|\right| = \left||u|\right| \sqcup \left||w|\right| = \left|\left|v_k^1\right| \sqcup \left|v_k^2\right|\right|$$

yazabiliriz. Riesz ayrıştırma özelliğini (bkz [(Aliprantis et al. 2006), $Teorem$ 1.20]) uygularsak $e_1, e_2, f_1, f_2 \in E_+$ elemanlarını bulabiliriz öyle ki

$$\left||u|\right| = e_1 \sqcup e_2, \qquad \left||w|\right| = f_1 \sqcup f_2,$$

$$\left|\left|v_k^1\right|\right| = e_1 \sqcup f_1, \qquad \left|\left|v_k^2\right|\right| = e_2 \sqcup f_2$$

sağlanır. Şimdi V nin vektör normunun ayrıştırıla bilirliğinde Ö$nerme$ 5.2.22 den

$$u = u_1 \sqcup u_2, \qquad w = w_1 \sqcup w_2$$

$$\left||u_1|\right| = f_1, \qquad \left||u_2|\right| = e_2$$

$$\left||w_1|\right| = f_1, \qquad \left||w_2|\right| = f_2$$

$$v_k^1 = u_1 \sqcup w_1, \qquad v_k^2 = u_2 \sqcup w_2$$

özelliklerini sağlayan u ve w nun sırasıyla tek türlü olarak belirlenen karşılıklı ayrık bileşenleri u_1, u_2 ve w_1, w_2 vardır. Üstelik aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\left||Tu_1 + Tw_1 - Tu_2 - Tw_2|\right| = \left||T(u_1 + w_1) - T(u_2 + w_2)|\right| = \left|\left|Tv_k^1 - Tv_k^2\right|\right| \geq \varepsilon.$$

Öte yandan

$$\left||Tu_1 + Tw_1 - Tu_2 - Tw_2|\right| = \left||T(u_1 + u_2) - T(w_1 + w_2)|\right| = ||Tu - Tw|| < \delta$$

yazabiliriz. Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$\varepsilon \leq \big||Tu_1 + Tw_1 - Tu_2 - Tw_2|\big|$$

$$= \big||Tu_1 + Tu_2 - Tu_2 + Tw_1 - Tu_2 - Tw_1 + Tw_1 - Tw_2|\big|$$

$$\leq \big||Tu_1 + Tu_2 - Tw_1 - Tw_2|\big| + 2\big||Tw_1 - Tu_2|\big|$$

$$< \delta + 2\big||Tw_1 - Tu_2|\big|$$

ve

$$\varepsilon \leq \big||Tu_1 + Tw_1 - Tu_2 - Tw_2|\big|$$

$$= \big||Tu_1 + Tw_1 + Tw_2 - Tw_2 - Tu_2 - Tu_1 + Tu_1 - Tw_2|\big|$$

$$\leq \big||Tw_1 + Tu_2 - Tu_1 - Tu_2|\big| + 2\big||Tw_2 - Tu_1|\big|$$

$$< \delta + 2\big||Tw_1 - Tu_1|\big|.$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ için

$||Tw_1 - Tu_2||$ ve $||Tw_2 - Tu_1|| > \frac{\varepsilon}{3}$

tür.

$$h_k = w_2 \sqcup u_1\,, \qquad h_{k+1} = w_1 \sqcup u_2\,,$$

$$h_k^1 = w_2,\ \ h_k^2 = u_1,\ \ h_{k+1}^1 = w_1,\ \ h_{k+1}^2 = u_2$$

yazalım. O zaman $v_1, \dots, v_{k-1}, h_k, h_{k+1} elemanları\ \ v$ nin istenen karşılıklı ayrık bileşenlerinin dizisidir ve dolayısıyla tümevarım ile sonuç ispatlanmış olur.

$Z_v = \{Tu - Tw : u, w \in \mathcal{F}_v\}$ olduğunu varsayalım. T bir C −kompakt operatör olduğundan $K_v \coloneqq \overline{Z_v}$ kümesi X in kompakt bir alt kümesidir. $B = \{x \in X : ||x|| < \frac{\varepsilon}{6}\}$ yazalım. O zaman öyle bir $n \in \mathbb{N}$ ve öyle bir X in $0 - komşuluğu$ olan açık bir B_1 kümesi vardır. Öyle ki $Kv + B_1 \subset nB$ dir.

B kümesinin alt kümesi olan sıfırın bir H açık komşuluğunu ve

$$nH \subset B_1 \; ve \; K_v \subset \bigcup_{i=1}^{m}(x_i + H)$$

özelliklerini sağlayan K_v nin elemanlarının sonlu bir ailesi $x_1, \dots, x_m$ i seçelim . $l = nm$ yazalım. Yukardaki ifadeleri göz önüne aldığımızda v nin karşılıklı ayrık bileşenlerinin bir $v_1, \dots, v_l$ ailesi olduğu sonucuna ve

$$\left|\left|Tv_i^1 - Tv_i^2\right|\right| > \frac{\varepsilon}{3} \quad (1 \le i \le l)$$

şartını sağlayan karşılıklı ayrık bileşenlerin bir v_i^1, v_i^2 ikilisinin her v_i için olduğu sonucunu çıkartırız.

$$\{Tv_i^1 - Tv_i^2 : 1 \le i \le nm\} \subset \bigcup_{k=1}^{m}(x_k + H)$$

olduğundan öyle bir $k_0 \le m$ vardır öyle ki $card\{i \le l : Tv_i^1 - Tv_i^2 \in x_{k_0} + H\} \ge n$ dir. Genelliği bozmadan her $1 \le i \le n$ için $Tv_i^1 - Tv_i^2 \in x_{k_0} + H$ olduğunu varsayalım.

$\left|\left|Tv_i^1 - Tv_i^2\right|\right| > \frac{\varepsilon}{3}$, $H \subset B = \left\{x \in X: ||x|| < \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ olduğundan $\left|\left|x_{k_0}\right|\right| \ge \frac{\varepsilon}{3}$. Dolayısıyla buradan da $x_{k_0} \notin B$ dir. $q_1 = \sum_{i=1}^{n} v_i^1$ ve $q_2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ olsun. v_i bileşenlerinin karşılıklı ayrık olduğunu göz önüne alırsak

$$\sum_{i=1}^{n}(Tv_i^1 - Tv_i^2) = Tq_1 - Tq_2$$

dır ve dolayısıyla $x = Tq_1 - Tq_2 \in Z_v$ dir. O zaman $x \in nx_{k_0} + nH \subset nx_{k_0} + B_1$ yazabiliriz. Böylelikle $nx_{k_0} \in K_v + B_1 \subset nH$ tır ve buradanda $x_{k_0} \in H$ tır. Buda bize çelişki verir. ■

Aşağıdaki önerme iyi bilinen bir önermedir(bkz. [(Popov et al. 2013), Lemma 10.20]).

Önerme 5.3.4. $(x_i)_{i=1}^{n}$ ailesi sonlu boyutlu normlu bir X vektör uzayında vektörlerin sonlu bir koleksiyonu ve her i için $0 \leq \lambda_i \leq 1$ olmak üzere $(\lambda_i)_{i=1}^{n}$ reel sayıların bir koleksiyonu olsun. O zaman $\theta_i \in \{0,1\}$ olmak üzere öyle bir $(\theta_i)_{i=1}^{n}$ koleksiyonu vardır öyle ki

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \theta_i)x_i\right|\right| \leq \frac{\dim(X)}{2}\max_i ||x_i||$$

dir.

Tanım 5.3.5. (V, E) bir örgü normlu uzay ve X de bir vektör uzayı olsun. Eğer $T(V)$ kümesi X in sonlu boyutlu bir X_1 vektör alt uzayında ise bu durumda $T: V \to X$ dik toplamsal operatörüne sonlu rank a sahip operatör denir.

Önerme 5.3.6. V atomsuz Dedekınd tam bir vektör örgüsü E üzerine tanımlı Banach Kontrovich uzayı, X bir Banach uzayı, $S: V \to X$ dik toplamsal dar bir operatör ve $G: V \to X$ yanal norm sürekli $C-$ kompak sonlu rank a sahip bir operatör olsun. Bu durumda $R = S + G$ dar bir operatördür.

İspat. $v \in V$ yi sabitleyelim ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Önerme 5.3.3 ü uygularsak $v = \coprod_{i=1}^{n} v_i$ ayrışımını buluruz öyle ki v_i nin karşılıklı ayrık herhangi iki v_i^1, v_i^2 bileşenleri için aşağıdaki

$$\left|\left|Gv_i^1 - Gv_i^2\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2\dim(X_1)}$$

eşitsizliği $1 \leq i \leq n$ için sağlanır. Her v_i için S dar bir operatör olduğundan öyle bir u_i, w_i karşılıklı tümleyen bileşenleri vardır öyle ki $1 \leq i \leq n$ için

$$\left|\left|Su_i - Sw_i\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

sağlanır. $1 \leq i \leq n$ için $x_i = Gu_i - Gw_i$ ve $\lambda_i = \frac{1}{2}$ olduğunu varsayalım.

O zaman Önerme 5.3.4 ten her $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in \{-1,1\}$ olmak üzere

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \theta_i)x_i\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right| \leq \frac{\dim(X_1)}{2}\max_i ||x_i|| < \frac{\varepsilon}{4}$$

tür ve böylece $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. O zaman $a_i = 1, i \in I$ ve $a_i = -1, i \in J$ olmak üzere öyle ki ayrık I ve J kümeleri vardır öyle ki $\{1, \dots, n\}$ kümesinin I ve J kümelerinin içine bir ayrışımı elde edilir. $\coprod_{i\in I} u_i \sqcup \coprod_{i\in J} w_i$ ve $\coprod_{i\in J} u_i \sqcup \coprod_{i\in I} w_i$ yazalım.

Bu durumda

$$\big||Ru - Rw|\big| = \big||(S+G)u - (S+G)w|\big| \leq \big||Su - Sw|\big| + ||Gu - Gw||$$

$$= \left|\left|\sum_{i\in I} Su_i + \sum_{i\in J} Sw_i - \sum_{i\in J} Su_i - \sum_{i\in I} Sw_i\right|\right|$$

$$+ \left|\left|\sum_{i\in I} Gu_i + \sum_{i\in J} Gw_i - \sum_{i\in J} Gu_i - \sum_{i\in I} Gw_i\right|\right|$$

$$= \left|\left|\sum_{i\in I}(Su_i - Sw_i) + \sum_{i\in J}(Sw_i - Su_i)\right|\right|$$

$$+ \left|\left|\sum_{i\in I}(Gu_i - SG) + \sum_{i\in J}(Gw_i - Gu_i)\right|\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\big||Su_i - Sw_i|\big| + \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|\right| < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece u ve w, v nin arzu edilen karşılıklı ayrık iki bileşenidir ve bu da ispatı tamamlar. Şimdi bu bölümün ana sonucunu ispatlamaya hazırız.

Teorem 5.3.1. İspat. $X \hookrightarrow X^{**} \hookrightarrow l_\infty(B_{X^*})$ olduğundan X 'i $l_\infty(B_{X^*})$ ın kapalı bir vektör alt uzayı olarak düşünebiliriz. Burada $\hookrightarrow$ sembolü ile izometrik gömmeyi ve $l_\infty(B_{X^*})$ ile de X^* dual uzayındaki birim yuvar B_{X^*} üzerinde tanımlı bütün reel-değerli sınırlı fonksiyonların $Banach$ uzayını kast ediyoruz. Eğer H, W nun göreceli kompakt bir alt kümesi $\varepsilon > 0$ ise öyle bir lineer sonlu ranka sahip $R \in \mathcal{L}(W)$ operatörü vardır öyle ki her $x \in H$ için $||x - Rx|| \leq \varepsilon$ dur [Popov and Randrianantoanina 2013, Lemma 10.25]. $v \in V$ alalım ve $\varepsilon > 0$' ı sabitleyelim. T bir $C-$kompak operatör olduğundan $K = T(\mathcal{F}_v), X$ te dolayısıyla W da göreceli kompakt bir kümedir. Yukarıda söylenildiği gibi sonlu ranka sahip lineer bir $R \in \mathcal{L}(W)$ operatörü vardır öyle ki her $w \in K$ için $||w - Rw|| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ tür.

Açıktır ki $R \circ T$ operatörü dik toplamsal yanal norm sürekli , $C-$kompak, sonlu ranka sahip operatördür. Önerme 5.3.6. dan v nin öyle bir karşılıklı ayrık v_1, v_2 bileşenleri vardır. Öyle ki

$$||(S+G)v_1 - (S+G)v_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} \big||(S+T)v_1 - (S+T)v_2\big| &= ||Sv_1 - Sv_2 + Tv_1 - Tv_2 + Gv_1 - Gv_2 - Gv_1 + Gv_2|| \\ &\leq \big||(S+G)v_1 - (S+G)v_2\big| + ||Tv_1 - Tv_2 - Gv_1 + Gv_2|| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + ||Tv_1 - Tv_2 - R \circ Tv_1 + R \circ Tv_2|| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \big||Tv_1 - R(Tv_1)|\big| + \big||Tv_2 - R(Tv_2)|\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Böylece v_1, v_2 v nin arzu edilen bileşenlerinin ikilisidir ve bu da ispatı tamamlar.■

Özel olarak yukarıdaki ifade eğer T bir yanal norm sürekli $AM-$kompak dik toplamsal operatör iken de doğrudur.

KAYNAKLAR

Abasov, N. and Megahed, A.M., Pliev, M. 2016. Dominated operators from lattice normed spaces to sequence Banach lattices. Ann. Funct. Anal. $7(4), 646 - 655$.

Abasov, N. and Pliev, M. 2017. On extensions of some nonlinear maps in vector lat tices. J. Math. Anal. Appl. $455, 516 - 527$.

Abasov, N. and Pliev, M. 2019. Dominated orthogonally additive operators in lattice normed spaces. Adv. Oper. Theory $4(1), 251 - 264$.

Abasov, N. and Pliev, M. 2018. Two definitions of narrow operators on Köthe Bochner spaces. Arch. Math. $111(2), 167 - 176$.

Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. 2006. Positive Operators. Springer, Dordrecht.

Aydin, A., Emelyanov, E. Yu., Erkursun Ozcan, N. and Marabeh, M.A. A. 2018. Com pact like operators in lattice – normed spaces. Indag. Math. $29(2), 633 - 656$.

Bukhalov, A. V. 1974. "On integral representation of linear operators", Zap. Nauch. Sem., $47, 5 - 14$.

Buskes, G. and Dever, J. 2014. The complexification of a lattice seminormed space. Indag. Math. $25(2), 170 - 185$.

Diestel, J. and Uhl, J.J. 1977. Vector Measures. AMS, Providence.

Feldman, W.A. 2013. Lattice preserving maps on lattices of continuous functions. J. Math. Anal. Appl. $404, 310 - 316$.

Feldman, W.A. 2017. A characterization of non – linear maps satisfying orthogonality properties. Positivity $21(1), 85 - 97$.

Feldman, W.A. 2019. A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices. J. Math. Anal. Appl. $472(1), 238 - 245$.

Gumenchuk, A.I., Pliev, M.A. and Popov, M.M. 2014. "Extensions of orthogonally additive operators", Math. Stud., 41, No. $2, 214 - 219$.

Gumenchuk, A.I. 2015. Lateral continuity and orthogonally additive operators, Carpath Math. Publ.

Humenchuk, H.I. 2016. On the sum of narrow and finite-rank oerthogonally additive operator. Ukr. Math. J. $67(12), 1831 - 1837$.

Kadets, V.M. and Kadets, M.I. 1991. Rearrangements of Series in Banach Spaces, American Mathematical Society, Providence, RI.

Kadets, V.M. and Popov, M.M. 2003. "Some stability theorems about narrow operators on $L_1[0,1]$ and C(K)", Mat. Fiz. Anal. Geom. $10(1),\ 49 - 60$.

Kadets, V.M., Kalton, N. and Werner, D. 2005. "Unconditionally convergent series of operators and narrow operators on L_1 Bull". London Math. Soc. $37(2), 265 - 274$.

Kantorovich, L.V. 1936. On a class of functional equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR $4(5), 211 - 216$.

Kusraev, A.G. and Pliev, M.A. 1990. Weak integral representation of the dominated Orthogonally additive operators, Vladikavkaz Math. J., No. $4, 22 - 39$.

Kusraev, A.G. and Pliev, M.A. 1999. Orthogonally additive operators on lattice – normed, Vladikavkaz Math. J. No. $3, 33 - 43$.

Kusraev, A.G. 2000. Dominated Operators. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Krasikova, I.V. 2009. A note on narrow operators in L_∞, Mat. Stud. $31(1), 102 - 106$.

Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. 1979. "Classical Banach Spaces, Vol. 2, in: Function Spaces", Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Luxemburg, W.A.J. and Zaanen, A.C. 1971. Riesz Spaces, Vol. 1. North Holland Publ. Comp, Amsterdam.

Luxemburg, W.A.J. and Zaanen, A.C. 1971. The linear modulus of an order bounded linear transformation, Indag. Math., $33, 422 - 447$.

Maslyuchenko, O.V., Mykhaylyuk, V.V., Popov, M.M. 2006. "Theorems on decom-positions of operators on L_1 and their generalizations to vector lattices", Ukrain. Mat. Zh. $58\ (1), 26 - 35$ (in Ukrainian). English translation: Ukrainian Math. J. $58(1), (2006),\ 30 - 41$.

Maslyuchenko, O.V., Mykhaylyuk, V.V. and Popov, M.M. 2009. A lattice approach to narrow operators, Positivity $13, 459 - 495$.

Maz'on, J.M. and Segura de Le'on, S. 1990. Order bounded orthogonally additive operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 35, No. $4, 329 - 353, a$.

Maz'on, J.M. and Segura de Le'on, S. 1990. Uryson operators, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 35, No. $5, 431 - 449. b$.

Mykhaylyuk, V. and Popov, M. 2013. On sums of narrow operators on Köthe function space. J. Math. Anal. Appl. $404, 554 - 561$.

Mykhaylyuk, V. 2014. On the sum of narrow and a compact operators. J. Funct. Anal. $266, 5912 - 5920$.

Mykhaylyuk, V., Pliev, M. and Popov, M. 2015. Laterally Ordered Sets and Orthogonally Additive Operators Preprint.

Neumann, J.V. 1935. Caharakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, Actualites Sci. et. Ind. 229.

Orlov, V., Pliev, M. and Rode, D. 2016. Domination problem for AM-compact abstract Uryson operators. Arch. Math. $107(5), 543 - 552$.

Plichko, A.M. and Popov, M.M. 1990. Symmetric function spaces on atomless Probability spaces, Diss. Math., (Rozpr. Mat.) $306, 1 - 85$.

Pliev, M. 2007. Uryson operators on the spaces with mixed norm, Vladikavkaz Math. J. No. $3, 47 - 57$.

Pliev, M. 2011. Narrow operators on lattice – normed spaces. Open Math. $9(6)$, $1276 - 1287$.

Pliev, M. and Popov, M. 2014. Narrow orthogonally additive operators. Positivity $18(4), 641 - 667$.

Pliev, M. 2017. Domination problem for narrow orthogonally additive operators. Positivity $21(1), 23 - 33$.

Pliev, M. and Fang, X. 2017. Narrow orthogonally additive operators in lattice-normed spaces. Sib. Math. J. $58(1), 134 - 141$.

Popov, M.M. 2011. Narrow operators (a survey), Banach Center Publ., $92, 299 - 326$.

Popov, M.M. and Randrianantoanina, B. 2013. Narrow Operators on Function Spaces and Vector Lattices, in: De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 45, De Gruyter, Berlin, Boston.

Schaefer, H.H. 1974. Banach Lattices and Positive Operators, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Shvydkoy, R.V. 2001. Operators and integrals in Banach spaces, Dissertation, Univ. of Missouri – Columbia.

Zaanen, A.C. 1997. Introduction to operatör theory in Riesz spaces, Berlin – New York Springer.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Davut ÖZER

Doğum Yeri : Adıyaman / Kahta

Doğum Tarihi : 01.10.1993

Yabancı Dili : İngilizce

Adres : Yeni Mah. 1105 Nolu Sok. No:11 Kahta / Adıyaman

E-posta : custumuzer@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kahta Lisesi

Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik (ing)

Yüksek Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Ensitütüsü

Matematik Anabilim Dalı