



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bazı Özel Kısmı Türevli Diferansiyel Denklemlerin Gezen Dalga Çözümleri

İbrahim ÇAĞLAR

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalını

Ağustos - 2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İbrahim ÇAĞLAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BAZI ÖZEL KISMI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GEZEN DALGA ÇÖZÜMLERİ

İbrahim ÇAĞLAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

2012, 33 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN
Doç. Dr. Bekir ÇAKIR

Bilgisayarların hesaplama biliminde etkin ve etkili kullanılması ile birlikte kısmı türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için literatürde birçok yöntem tanıtılmıştır. Bu yöntemlerin bazıları analitik yöntem çözümü elde ederken bazıları algoritma tabanlı yaklaşık çözümü veren yöntemlerdir. Kısmı türevli diferansiyel denklemlerin gezen dalga çözümleri elde edilirken en çok kullanılan yöntemler hiperbolik tanjant yöntemidir. Bu çalışmada bazı özel kısmı türevli diferansiyel denklemlerin gezen dalga çözümlerin hiperbolik tanjant yöntemi, çizgiler yöntemi ve indirgenmiş dönüşüm yöntemi ile elde edilerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çizgiler Yöntemi, İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Kısmı Türevli Diferansiyel Denklem, Hiperbolik Tanjant Yöntemi

ABSTRACT

MS THESIS

SOME SPECIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS' TRAVELLING WAVE SOLUTIONS

İbrahim ÇAĞLAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN

2012, 33 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN
Assoc. Prof. Dr. Bekir ÇAKIR

Efficient and effective use of computers in computing science, along with part of the literature, many methods to obtain the solution of differential equations is presented. Some of these methods, while achieving analytical method and some of the algorithm based solution methods that approximate the solution. Traveling wave solutions of partial differential equations obtained hyperbolic tangent method most commonly used methods. In this study, we obtained some special traveling wave solutions of partial differential equations hyperbolic tangent method, method of lines and the reduced transformation method and the results were compared.

Keywords: Method of Line, Partial Differential Method, Reduced Differential Transform Method, Tanh Method

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Yıldıray KESKİN yönetiminde hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsüne sunulmuştur.

Yüksek Lisans tezi içerik olarak dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde temel tanımları verip, nümerik yöntemler hakkında literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde ise nümerik ve analitik çözümlerin ifadeleri üzerinde duruldu. Tanh yöntemin, çizgiler yöntemi ve indirgeniş diferansiyel dönüşüm yöntemine giriş yapıldı. Üçüncü bölümde bazı özel kısmı diferansiyel denklemleri indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözüp diğer yöntemler ile kıyaslamalar yapıldı. Son bölümde ise ortaya çıkan verilerden faydalanarak, yöntemler hakkında değerlendirme yapıldı.

Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarında ve yönlendirmelerinden dolayı tez yöneticisi sayın hocam Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e ve eğitim öğretim sürecinde maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İbrahim ÇAĞLAR
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET **1**

ABSTRACT **2**

ÖNSÖZ **3**

İÇİNDEKİLER **3**

1. GİRİŞ **5**

1.1. Amaç ve Kapsam 5
1.2. Kaynak Araştırması 6

2. KULLANILAN YÖNTEMLER **8**

2.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi (Tanh Yöntemi) 8
2.2. Çizgiler Yöntemi (Method of Lines) 10
2.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDTM) 11
2.3.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 12
2.3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 12
2.3.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 13

3. UYGULAMALAR **15**

3.1. Problem 1 15
3.1.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm 15
3.1.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm 15
3.1.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm 16
3.2. Problem 2 18
3.2.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm 18
3.2.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm 18
3.2.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm 20
3.3. Problem 3 21
3.3.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm 22
3.3.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm 23
3.3.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm 24

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **28**

KAYNAKLAR **29**

ÖZGEÇMİŞ **30**

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Kısmı türevli diferansiyel denklemler mühendislik bilimleri, doğa bilimleri ve ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerin çözümleri için analitik ve nümerik olarak birçok yöntem tanıtılmıştır. Genelde bu tür denklemlerin nümerik çözümlerine gereksinim duyulmaktadır, bunun nedeni nümerik çözümler bilgisayarlar ile daha uyumlu olup, farklı algoritmalarla istenilen sonuçlar daha kolay elde edilebilmesidir.

Tanh yöntemi, bir boyutlu lineer olmayan dalga denklemlerinin ve yönlendirilmiş dalga denklemlerinin analitik çözümlerinin bulunmasında kullanılan güçlü yöntemlerden biridir. Hiperbolik tanjant yöntemi 1990 yılında bir KdV denklemini çözmek için kullanılmıştır. Daha sonraki yıllarda W. Malfliet [Hereman, Malfliet, 1996], E. G. Fan [Fan, Hon, 2002], A. M. Wazwaz [Wazwaz A.M. 2009] tarafından geliştirilerek son halini almıştır. Tanh yöntemi, hiperbolik tanjant fonksiyonunun türevinin yine bir hiperbolik tanjant fonksiyonu şeklinde ifade edilebilmesi özelliğine dayanır [Topaloğlu, 2007]. Doğada daha çok karşımıza çıkan lineer olmayan kısmı türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde bu yöntem kullanılmıştır [Mızrak, 2007].

Çizgiler yöntemi (Method of Lines) ise diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerine tanımlanmış bir nümerik yöntemdir. İlk olarak parabolik denklemlere uygulanmıştır. İncelenen kısmı diferansiyel denklem bir başlangıç-değer problemi ise sonuçta oluşan adi diferansiyel denklem de bir başlangıç-değer problemidir [Schiesser, Griffithd. 2009] [Schiesser, Griffithd. 2012]. Kısmı türevli diferansiyel denklem bir sınır-değer problemi ise sonuç olarak adi diferansiyel denklem sistemi oluşur [Köroğlu,2002, Sadiko, 2000].

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminde ilk olarak 2009 yılında Y. Keskin [Keskin, Oturanç, 2011] tarafından diferansiyel dönüşüm yönteminin bir adım ilerisi olarak tanıtılmıştır. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin klasik dönüşüm yöntemlerinden farkı, kısmı diferansiyel denklemi yarı cebirsel bir denkleme dönüştürmektedir. Klasik dönüşüm yöntemlerine göre avantajı ise daha az iterasyonla daha net bir sonuca ulaşmasıdır [Keskin, Çağlar 2011][Keskin ve ark, 2011].

Bu tez çalışmasında her üç yönteme kısaca değinildi. Bazı özel denklemler kullanarak çizgiler yöntemi ve indirgenmiş diferansiyel yöntemi arasında karşılaştırmalar yapıldı. Bu karşılaştırmalar ışığında problemlerin çözümüne dair yorumlarda bulunuldu.

1.2. Kaynak Araştırması

Fan E., Hon Y. C., 2002, Generalized tanh Method Extend to Special Types of Nonlinear Equations,Z. Naturforsch, 57a, 692-700. Bu çalışmada yazarlar hiperbolik tanjant yöntemini özel tipteki lineer olmayan denklemler için genelleştirme çalışmaları yapmışlardır.

Hereman W., Malfliet W., 1996, The Tanh Method: 1. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations, Physica Scripta, Vol 54, 563-568. Bu çalışmada hiperbolik tanjant metodundan bahsedilmiştir. Ayrıca bazı özel kısmı denklemlerinde bu yöntem ile çözüm verilmiştir.

Keskin Y., Çağlar İ., Koç A. B., 2011, Numerical Solution of Sine-Gordon Equation by Reduced Differential Transform Method, *Proceedings of the World Congress on Engineering,* Vol I. Bu çalışmada kısmı diferansiyel denklem olan Sine-Gordon denklemini indirgenmiş diferansiyel döşüm yöntemi ile çözerek nümerik çözümü kesin çözüm ile analiz etmişlerdir.

Keskin Y., Çağlar İ., 2011, Genelleştirilmiş KdV Denklemleri İçin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi,3. Ulusal Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksek Okulu Tebliğ Günleri, Sayı 3, 209-216. Bu çalışma da indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi, özel bir kısmi diferansiyel denklem olan Genelleştirilmiş KdV Denklemleri için uyarlamışlardır.

Keskin Y., Oturanç G., 2011, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi, AYBİL YAYINLAR. Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemini, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini ele almışlar ve çeşitli kısmı diferansiyel denklemlere uyarlamışlardır.

Köroğlu C., 2002, Üstel Fonksiyon Yardımıyla Amerikan Opsiyon Problemlerinin Çizgiler Yöntemi ile Çözümü, Doktora Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmir. Bu çalışmada çizgiler yöntemini kısaca anlatmış ve üstel matris fonksiyonları yardımıyla incelemiştir.

Mızrak M., 2007, Hiperbolik Tanjant (Tanh Method) Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, *Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Diyarbakır. Bu çalışmada

hiperbolik tanjant metodunun genel yapısını ve diferansiyel denklemlere uygulanmasını ele almıştır.

Sadiko M. N. O., Obiozor C. N., A Simple Introduction to The Method of Lines, International Journal of Electrical Engineering Education, 37-3. Bu çalışmada çizgiler yöntemini anlatarak birkaç örnek ve Matlab koduyla bilgisayar ile de hesaplanmasını sağlamışlardır.

Schiesser W. E., Griffiths G.W., 2009, A Compendium of Partial Differential Equaiton Models Method of Lines Analysis with Matlab, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. Bu çalışmada yazarlar çeşitli kısmı diferansiyel denklemleri ele almışlar ve bunların çözümlerini Matlab paket programı kullanarak çizgiler yöntemi ile çözmüşlerdir.

Schiesser W. E., Griffiths G.W., 2012, Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations, ACADEMIC PRESS. Bu çalışmada kısmı diferansiyel denklemlerinin gezen dalga analizlerini içermektedir. Kitap önceki kitaplarına göre nümerik ve analitik yöntemleri incelemiş bunu da Matlap ve Maple paket programları ile desteklemiştir.

Topaloğlu İ. 2007, Lineer olmayan Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.* Bu çalışmada farklı türlerdeki kısmı denklemlerin hiperbolik tanjant yöntemi ile kesin çözümleri verilmiştir.

Wazwaz A.M. 2009, PartialDifferential Equations and Solitary Waves Theory, SPRINGER. Bu çalışmada yazar kısmı türevli diferansiyel denklemleri, çözüm yöntemlerini ve solitary dalga teorisi çalışmalar yapmıştır.

2. KULLANILAN YÖNTEMLER

Uygulamalı matematikte fizik, mühendislik ve uzay bilimlerinde ki birçok problem modellenerek çözümleri aranmaktadır. Bu modellemelerde çok farklı türde problemler ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çözümleri için de farklı türde analitik ve nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Bu bölümde tezde kullanılan yöntemler tanıtıldı. Bu yöntemler arasında, literatürdeki en yeni yöntemlerden biri olan indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi, lineer olmayan denklemlerde analitik çözümler bulan hiperbolik tanjant yöntemi ve kademeli olarak çeşitli bilim adamları tarafından geliştirilerek şimdiki halini almış olan çizgiler yöntemi vardır.

2.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi (Tanh Yöntemi)

Tanh yöntemi her ne kadar 1990 yılında yüksek basamaktan bir KdV denklemini çözmek için kullanılmış olsa da günümüzde kullanılan haline gelmesinde Willy Malfliet'in 1992 yılındaki çalışmaları ve arkadaşlarının [Hereman, Malfliet, 1996] 1996 yılında yapmış olduğu çalışmalar büyük önem arz eder. Daha sonraki yıllarda Engui Fan [Fan, Hon, 2002] tarafından de geliştirilen yöntem son halini A. M. Wazwaz [Wazwaz A.M. 2009] tarafından yapılan çalışmalarla almıştır.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için genel bir yöntem yoktur. Tanh yöntemi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin, tam ve yaklaşık çözümleri direkt ve sistematik bir şekilde elde edilebilir. Bu yöntemin diğer yöntemlere göre kullanışlı olmasının sebebi, çözümlerin hiperbolik tanjant fonksiyonlarının seri toplamları şeklinde yazılmasıdır. Bunun nedeni tanh fonksiyonunun türevlerinin yine tanh fonksiyonu türünden yazılabilmesinin bir sonucudur.

$$\tanh\theta\,' = 1-\tanh^2\theta$$

$$\tanh\theta\,'' = -2\tanh\theta+2\tanh^2\theta$$

şeklinde örnekler gösterilebilir.

Tanh yöntemini dalga denklemi üzerinde açıklayalım.

Bir boyutlu lineer olmayan ve dalga denklemleri genellikle

$$u_t = G(u,u_x,u_{xx},u_{xxx},...) \qquad \text{veya} \qquad u_{tt} = G(u,u_x,u_{xx},u_{xxx},...) \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterilir. Bu denklemlerin varsa çözümlerini ve bunların nasıl hesaplanacağını araştıracağız. Denklemin çözümünü $u\ x,t$ fonksiyonu olsun.

Öncelikle x ve t bağımsız değişkenlerini tek bir $\xi = k\ x - vt$ değişkeni altında tanımlayalım. $\xi = k\ x - vt$ değişken dönüşüm yapıldığında $u\ x,t$ fonksiyonu;

$$u\ x,t\ = U\ \xi \qquad\qquad \xi = k\ x - vt$$

şekline dönüşür. $U\ \xi$ denkleminde, k yönlü dalgaların sayısını $k > 0$, V yönlü dalgaların hızını belirtmektedir. Genellikle k dalga sayısı keyfi olarak belirlense de bazı durumlarda özel bir sabit değer olarak da alınabilir.

$u\ x,t$ fonksiyonu $U\ \xi$ fonksiyonuna dönüştüğünde (2.1.1) kısmi diferansiyel denklemi;

$$-kv\frac{dU}{d\xi} = G\left(U, k\frac{dU}{d\xi}, k^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, \ldots\right)$$

veya (2.1.2)

$$k^2V^2\frac{d^2U}{d\xi^2} = G\left(U, k\frac{dU}{d\xi}, k^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, \ldots\right)$$

Adi diferansiyel denklemine dönüşür. Artık yeni diferansiyel denklemimiz sadece ξ değişkenini içerir. Bizin hedefimiz diferansiyel denklemin kesin çözümlerini hiperbolik tanjant fonksiyonu şeklinde yazmak olduğundan, yeni bir

$$Y = \tanh\xi$$

bağımsız değişkeni tanımlarız. Türev dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d}{d\xi} = \ 1-Y^2\ \ \frac{d}{dY}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \ 1-Y^2\ \left[-2\frac{d}{dY} + \ 1-Y^2\ \ \frac{d^2}{dY^2}\right] \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3} = \ 1-Y^2\ \left[\ 6Y^2-2\ \frac{d}{dY} - 6Y\ \ 1-Y^2\ \ \frac{d^2}{dY^2} + \ 1-Y^2\ \ \frac{d^3}{dY^3}\right]$$

$$\vdots$$

daha sonra,

$$u\ x,t\ = U\ \ \xi\ = F(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n\ , \quad Y = \tanh\xi = \tanh\left[\ k\ \ x - vt\ \right] \qquad (2.1.4)$$

şeklinde açılım yapılır. Burada N değeri (2.1.4) denkleminin adi diferansiyel denkleme yerleştirilmesi sonucu elde edilen lineer ifadelerin en yüksek derecesi ile lineer olmayan

ifadelerin en yüksek derecelerinin eşitlenmesi sonucu elde edilir. N değeri belirlenip denklem tekrar düzenlendikten sonra Y'nin tüm kuvvetleri sıfıra eşitlenir. Bu bize sadece a_k, $k = 0,1,2,\ldots,N$ k ve v ifadelerini içeren cebirsel denklem sistemini verir. Bu sistemi çözülerek kapalı formdaki analitik çözümü elde ederiz.

2.2. Çizgiler Yöntemi (Method of Lines)

Çizgiler yöntemi, bağımsız değişken veya zamana bağlı kısmı diferansiyel denklemin yerine, uygun sonlu farkın yazılması sonucu oluşan nümerik çözüm tekniğidir. İlk olarak parabolik denklemlere uygulanmıştır. Çizgiler yöntemi, genellikle sonlu fark veya sonlu eleman teknikleri ile kısmı diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklem sistemine indirgeyen bir yöntemdir.

Kısmı diferansiyel denklem bir başlangıç-değer problemi ise sonuçta oluşan adi diferansiyel denklem de bir başlangıç-değer problemidir. Eğer denklem bir sınır-değer problemi ise sonuç olarak adi diferansiyel denklem sistemi oluşur.

Çizgiler yöntemi bir kısmı türevli diferansiyel denklem üzerinde açıklayalım.

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \tag{2.2.1}$$

çözümün bulunduğu alan x ekseni boyunca N parçaya ayrılarak başlanır. Bu ayrışma sonucunda x e göre türev yerine sonlu fark denklemi yazılır. Denklem, üç noktalı merkezcil fark denklemi olarak yazılırsa

$$V_{i\ xx} \approx \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2}, \qquad h = \Delta x = \frac{a}{N+1} \tag{2.2.2}$$

(2.2.2) denklemini (2.2.1) de yerine yazılırsa

$$V_{i\ yy} + \frac{1}{h^2}\ V_{i+1}(y) - 2V_i(y) + V_{i-1}(y)\ = 0 \tag{2.2.3}$$

denklemini elde edilir. Böylece (2.2.1) denklemini de $i = 1, 2, ..., N$ açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
i &= 1, && V_{1\ yy} + \frac{1}{h^2}\ V_2(y) - 2V_1(y) + V_0(y)\ = 0 \\
i &= 2, && V_{2\ yy} + \frac{1}{h^2}\ V_3(y) - 2V_2(y) + V_1(y)\ = 0 \\
i &= 3, && V_{3\ yy} + \frac{1}{h^2}\ V_4(y) - 2V_3(y) + V_2(y)\ = 0 \\
&\vdots && \vdots \\
i &= N, && V_{N\ yy} + \frac{1}{h^2}\ V_{N+1}(y) - 2V_N(y) + V_{N-1}(y)\ = 0
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

(2.2.4) denklemi matris formunda yazılırsa

$$\frac{d^2}{dy^2}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} - \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \text{O} & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \text{O} & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.2.5)$$

(2.2.5) denklemi daha sade şekilde ifade edilirse,

$$\frac{d^2}{dy^2} V - P\ V = 0 \qquad (2.2.6)$$

denklemi yazılabilir. Burada

$$V = V_1, V_2, ..., V_N{}^t$$

ve

$$P = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \text{O} & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \text{O} & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. Daha sonra y koordinatı boyunca analitik çözümü bulmak olacaktır. (2.2.6) denklemi ikinci dereceden adi homojen diferansiyel denkleme dönüşmüştür.

(2.2.6) denkleminin çözüm kümesi ise

$$V = Ae^{y\sqrt{P}} + Be^{-y\sqrt{P}}$$

şeklindedir.

2.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDTM)

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini (Keskin, 2010) tanımını vermeden önce bu yönteme temel teşkil eden bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini (Zhou, 1986) ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini (Chen, 1999) açıklayacağız. Daha sonra bu yöntemler ışığında indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımını vereceğiz.

2.3.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek değişkenli *w(x)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k)* olmak üzere, *w(x)*' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} \tag{2.3.1}$$

olarak tanımlanır. *W(k)* dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}W(k)x^k \tag{2.3.2}$$

biçimde tanımlanır. (2.3.1) ve (2.3.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.3.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}x^k \tag{2.3.3}$$

2.3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Benzer şekilde, İki değişkenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{2.3.4}$$

olarak tanımlanır. *W(k,h)* dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \tag{2.3.5}$$

biçimde tanımlanır. (2.3.4) ve (2.3.5) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.3.6) eşitliği elde edebiliriz.

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}x^k y^h \tag{2.3.6}$$

2.3.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Kabul edelim ki iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h \tag{2.3.7}$$

şeklinde olsun. O zaman $u(x,t)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h}u(x,t)\right]_{\substack{x=0\\t=0}} \tag{2.3.8}$$

olarak tanımlanmıştı.

$$u\ \ x,t\ =\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U_{k,h}x^k t^h \tag{2.3.9}$$

olduğundan fonksiyonu açık halde yazarsak

$$U_{0,0},U_{0,1}x,U_{0,2}x^2,...,U_{1,0}t,U_{1,1}tx,U_{1,2}tx^2,...,U_{2,0}t^2,U_{2,1}t^2x,...$$

elde edilir. Buradaki terimleri t nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani ilk grup $t^0\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,0}x^k$, ikinci grup $t^1\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,1}x^k$, üçüncü grup $t^2\sum_{k=0}^{\infty}U_{k,2}x^k$ … v.b.

Böylece

$$u\ \ x,t\ =\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h \tag{2.3.10}$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan hareketle aşağıdaki tanımları verilmiştir[Keskin, 2010].

Tanım 2.3.1

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin t boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}U_h(x)t^h \tag{2.3.11}$$

şeklindendir.

Tanım 2.3.2.

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin *t* boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{2.3.12}$$

şeklindendir.

Tanım 2.3.3

$U_h(x)$ 'nin t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x)t^h \tag{2.3.13}$$

şeklinde tanımlanır. (2.3.12) ve (2.3.13) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (2.3.14) eşitliğini elde edebiliriz.

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(x,t)\right]_{t=0} t^h \tag{2.3.14}$$

Tanım 2.3.4

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*'nin x boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)x^k \tag{2.3.15}$$

şeklindendir.

Tanım 2.3.5

İki bileşenli u*(x,t)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *U(k,h)* olmak üzere, *u(x,t)*' nin x boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$U_k(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,t)\right]_{x=0} \tag{2.3.16}$$

şeklindendir.

3. UYGULAMALAR

Bu bölümde bazı özel kısmı türevli diferansiyel denklemlerin hiperbolik tanjant yöntemi, çizgiler yöntemi ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümleri elde edip, sayısal değerleri tablo halinde verilmiştir.

3.1. Problem 1

Kimya, mühendislik ve yer bilimlerinde sıvının yatay olarak hareketinin modellemesi olan lineer advection denklemi literatürde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1}$$

ve bu denkleme ait başlangıç şartı da $u(x,0) = f(x)$ şeklinde tanıtılır ve bu denklemin analitik çözümü $u(x,0) = f(x)$ şeklindedir. (c= sabittir)

3.1.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm

Hiperbolik tanjant denkleminde üst sınır belirlemek için lineer ifade ile lineer olmayan ifadenin kuvvetleri eşitlenmelidir. Lineer denklemlerde bu yapılamayacağı için lineer advection denkleminin çözümü için hiperbolik tanjant metodunu kullanılamaz.

3.1.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Lineer advection denkleminin ((3.1) denkleminin) başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2} \qquad a \le x \le b \tag{3.1.1}$$

şeklinde ve sınır şartlarını da

$$u(a,t) = 0\,, \qquad u(b,t) = 0 \qquad t > 0$$

olarak alalım. Burada (3.1) denkleminin x değişkenini verilen aralıkta N parçaya ayıralım

$$x_i = ih \quad i = 1,2,...,N\ , \qquad a \le x_i \le b \quad \text{ve} \quad h = \frac{(b-a)}{N}$$

(3.1) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial x}$ ifadesinin yerine x_i in sonlu fark yaklaşımını yazarsak.

$$\frac{du}{dt} = f(u_i) \qquad i = 1,2,...,N-1 \tag{3.1.2}$$

şeklinde t ye bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur. $f(u_i)$ fonksiyonu için her aralıkta 5 nokta sonlu fark yaklaşımı kullanırsak (3.1.2) denklemini

$$u_t = f\ \ u_i\ \ = \frac{1}{12h}\begin{cases} -25u_1 + 48u_2 - 36u_3 + 16u_4 - 3u_5 & , \quad i = 1 \\ -3u_1 - 10u_2 + 18u_3 - 6u_4 + u_5 & , \quad i = 2 \\ u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2} & , \quad i = 3,4,...,n-2 \\ -u_{n-4} + 6u_{n-3} - 18u_{n-2} + 10u_{n-1} + 3u_n & , \quad i = n-1 \\ 3u_{n-4} - 16u_{n-3} + 36u_{n-2} - 48u_{n-1} + 25u_n & , \quad i = n \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sistemin çözüm Matlab Paket programı ile aşağıdaki şekilde elde edilir.[Schiesser, Griffiths, 2012]. (N =nokta sayısı)

Çizelge 3.1. MOL ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

t	x	c	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (MOL)	Hata
1.000	-2.000	0.100	101	0.012155	0.012159	0.000004
1.000	0.000	0.100	101	0.990050	0.990107	0.000057
1.000	2.000	0.100	101	0.027052	0.027065	0.000013
2.000	-2.000	0.100	101	0.007907	0.007923	0.000016
2.000	0.000	0.100	101	0.960789	0.961007	0.000218
2.000	2.000	0.100	101	0.039164	0.039214	0.000050
2.000	0.000	0.100	301	0.960789	0.960793	0.000004

3.1.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

Lineer advection denkleminin ((3.1) denkleminin) başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2} \qquad a \le x \le b \qquad (3.1.4)$$

şeklinde olsun. Bu denklemi indirgenmiş diferansiyel denklemi ile çözelim.

(3.1) denkleminin diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$(k+1)U_{k+1}(x) = -c\frac{\partial}{\partial x}U_k(x) \qquad (3.1.5)$$

burada $U_k(x)$, $u(x,t)$'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonudur. Başlangıç değerinin dönüşüm karşılığı ise

$$U_0(x) = e^{-x^2} \qquad (3.1.6)$$

olur. Şimdi (3.1.6) denklemini (3.1.5) de yerine yazılarak $U_k(x)$ değerlerinin hesaplayacak olursak

$$\begin{aligned} U_0(x) &= e^{-x^2} \\ U_1(x) &= 2cxe^{-x^2} \\ U_2(x) &= c^2e^{-x^2}(2x^2-1) \\ U_3(x) &= \frac{2}{3}c^3e^{-x^2}(2x^3-3x) \\ U_4(x) &= \frac{1}{6}c^4e^{-x^2}(4x^4-12x^2+3) \\ U_5(x) &= \frac{1}{15}c^5e^{-x^2}(4x^5-20x^3+15x) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Elde edilen bu değerler (2.3.13) denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k = U_0(x)+U_1(x)t+U_2(x)t^2+\cdots$$

dır. Hemen belirtelim ki terim sayısını arttırırsak daha fazla iş yükü ortaya çıkar ve bilgisayar için daha fazla bellek kullanılmasına neden olur.

6 terim kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm

$$u(x,t) \cong U_6(x,t) = \sum_{k=0}^{6} U_k(x)t^k = \frac{1}{30}e^{-x^2}\begin{pmatrix} 30+60cxt-30c^2t^2+60c^2t^2x^2 \\ -60c^3t^3x+40c^3t^3x^3-60c^4t^4x^2 \\ +20c^4t^4x^4+15c^4t^4-40c^5t^5x^3+8c^5t^5x^5+30c^5t^5x \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Bulduğumuz ifadenin ne kadar kesin çözüme yakın olduğunu ve MOL yöntemine göre avantajı incelemek aşağıdaki tablolar verilmiştir. (N =terim sayısı)

Çizelge 3.2. RDTM ile çözülen (3.1) denklemin nümerik değerleri

t	x	c	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (RDTM)	Hata
1.000	-2.000	0.100	6	0.012155	0.012155	0.000000
1.000	0.000	0.100	6	0.990050	0.990050	0.000000
1.000	2.000	0.100	6	0.027052	0.027051	0.000001
2.000	-2.000	0.100	6	0.007907	0.007908	0.000001
2.000	0.000	0.100	6	0.960789	0.960800	0.000011
2.000	2.000	0.100	6	0.039164	0.039165	0.000001
2.000	0.000	0.100	13	0.960789	0.960789	0.000000

(3.1) denkleminde aynı *x,t,c* değerlerine göre yöntemlerin karşılaştırılması yapılırsa;

Çizelge 3.3. (3.1) denklemi için MOL, RDTM ve Analitik çözümlerin karşılaştırılması

$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (RDTM)			$u(x,t)$ (MOL)		
	N	$u(x,t)$	Hata	N	$u(x,t)$	Hata
0.012155	6	0.012155	0.000000	101	0.012159	0.000004
0.990050	6	0.990050	0.000000	101	0.990107	0.000057
0.027052	6	0.027051	0.000001	101	0.027065	0.000013
0.007907	6	0.007908	0.000001	101	0.007923	0.000016
0.960789	6	0.960800	0.000011	101	0.961007	0.000218
0.039164	6	0.039165	0.000001	101	0.039214	0.000050
0.960789	13	0.960789	0.000000	301	0.960793	0.000004

değerleri elde edilir.

3.2. Problem 2

Katılarda ısı iletimi, fiziko-kimya da difüzyon olayının incelenmesi, nötronların madde içinde yavaşlatılması gibi olaylarda karşımıza çıkan model olan lineer difüzyon denklemi literatürde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

ve bu denkleme ait başlangıç şartı da $u(x,0) = f(x)$ şeklinde tanıtılır.

3.2.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm

Hiperbolik tanjant denkleminde üst sınır belirlemek için lineer ifade ile lineer olmayan ifadenin kuvvetleri eşitlenmelidir. Lineer denklemlerde bu yapılamayacağı için lineer difüzyon denkleminin çözümü için hiperbolik tanjant metodunu kullanılamaz.

3.2.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Lineer difüzyon denklemi ((3.2) denkleminin) başlangıç şartını

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x} \qquad a \le x \le b \tag{3.2.1}$$

şeklinde ve sınır şartlarını da

$$u(a,t)=0\,,\qquad u(b,t)=0\qquad t>0$$

olarak alalım. Burada (3.2) denkleminin x değişkenini verilen aralıkta N parçaya ayıralım

$$x_i=ih\;\; i=1,2,...,N\;\;,\qquad\qquad a\le x_i\le b\;\text{ ve }\;h=\frac{(b-a)}{N}$$

(3.2) denkleminde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ifadesinin yerine x_i' in sonlu fark yaklaşımını yazarsak.

$$\frac{du}{dt}=f(u_i)\qquad i=1,2,...,N-1 \tag{3.2.2}$$

şeklinde t ye bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur. $f(u_i)$ fonksiyonu için her aralıkta 5 nokta sonlu fark yaklaşımı kullanırsak (3.2.2) denklemini

$$u_t=f\;\;u_i\;\;=\frac{1}{12h^2}\begin{cases}45u_1-154u_2+214u_3-156u_4+61u_5-10u_6 & , \quad i=1\\ 10u_1-15u_2-4u_3+14u_4-6u_5+u_6 & , \quad i=2\\ -u_{i-2}+16u_{i-1}-30u_i+16u_{i+1}-u_{i+2} & , \quad i=3,4,...,n-2\\ 10u_n-15u_{n-1}-4u_{n-2}+14u_{n-3}-6u_{n-4}+u_{n-5} & , \quad i=n-1\\ 45u_n-154u_{n-1}+214u_{n-2}-156u_{n-3}+61u_{n-4}-10u_{n-5} & , \quad i=n\end{cases} \tag{3.2.3}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sistemin çözümü Matlab Paket programı ile aşağıdaki şekilde elde edilir. [Schiesser, Griffiths, 2012]. (N =nokta sayısı)

Çizelge 3.4. MOL ile çözülen (3.2) denklemin nümerik değerleri

t	x	D	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (MOL)	Hata
1.000	-2.000	1.000	51	20.085537	20.079728	0.005809
1.000	0.000	1.000	51	2.718282	2.717498	0.000784
1.000	2.000	1.000	51	0.367879	0.367773	0.000106
2.000	-2.000	1.000	51	54.598150	52.887921	1.710229
2.000	0.000	1.000	51	7.389056	7.371778	0.017278
2.000	2.000	1.000	51	1.000000	0.999392	0.000608
2.000	-2.000	1.000	201	54.598150	52.877536	1.720614

3.2.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

Lineer difüzyon denkleminin ((3.2) denkleminin) başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x} \qquad a \le x \le b \tag{3.2.4}$$

şeklinde olsun. Bu denklemi indirgenmiş diferansiyel denklemi ile çözelim.

(3.2) denkleminin diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$(k+1)U_{k+1}(x) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \tag{3.2.5}$$

burada $U_k(x)$, $u(x,t)$'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonudur. Başlangıç değerinin dönüşüm karşılığı ise

$$U_0(x) = \alpha e^{-x} \tag{3.2.6}$$

olur. Şimdi (3.2.5) ve (3.2.6) ü kullanarak $U_k(x)$ yi hesaplayalım

$$\begin{aligned}
U_1(x) &= \alpha e^{-x} \\
U_2(x) &= \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-x} \\
U_3(x) &= \frac{1}{6}\alpha^3 e^{-x} \\
U_4(x) &= \frac{1}{24}\alpha^4 e^{-x} \\
U_5(x) &= \frac{1}{120}\alpha^5 e^{-x} \\
U_6(x) &= \frac{1}{720}\alpha^6 e^{-x} \\
U_k(x) &= \frac{1}{k+1\ !}\alpha^{k+1} e^{-x} \qquad k = 6,7,\cdots
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1\ !}\alpha^{k+1} e^{-x} t^k = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{k+1\ !} t^k = e^{-x} e^{\alpha t} = e^{-x+\alpha t}$$

dır. Buradan analitik çözümü elde etmiş oluruz.

6 terim kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm ise,

$$u(x,t) \cong U_6(x,t) = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1\ !} D^{k+1} e^{-x} t^k = \frac{1}{720} e^{-x} \begin{pmatrix} 720 + 720Dt + 360D^2t^2 \\ +120D^3t^3 + 30D^4t^4 + 6D^5t^5 + D^6t^6 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Bulduğumuz ifadenin ne kadar kesin çözüme yakın olduğunu ve MOL yöntemine göre avantajını incelemek için aşağıdaki tablolar verilmiştir.

(N =terim sayısı)

Çizelge 3.5. RDTM ile çözülen (3.2) denklemin nümerik değerleri

t	x	D	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (Nümerik)	Hata
1.000	-2.000	1.000	6	20.085537	20.073602	0.011935
1.000	0.000	1.000	6	2.718282	2.716666	0.001616
1.000	2.000	1.000	6	0.367879	0.367660	0.000219
2.000	-2.000	1.000	6	54.598150	53.693807	0.904343
2.000	0.000	1.000	6	7.389056	7.266666	0.122390
2.000	2.000	1.000	6	1.000000	0.983436	0.016564
2.000	-2.000	1.000	13	54.598150	54.598148	0.000002

(3.2) denkleminde aynı x,t,α değerlerine göre yöntemlerin karşılaştırılması yapılırsa;

Çizelge 3.6. (3.2) denklemi için MOL, RDTM ve Analitik çözümlerin karşılaştırılması

$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (RDTM)			$u(x,t)$ (MOL)		
	N	$u(x,t)$	Hata	N	$u(x,t)$	Hata
20.085537	6	20.073602	0.011935	51	20.079728	0.005809
2.718282	6	2.716666	0.001616	51	2.717498	0.000784
0.367879	6	0.367660	0.000219	51	0.367773	0.000106
54.598150	6	53.693807	0.904343	51	52.887921	1.710229
7.389056	6	7.266666	0.122390	51	7.371778	0.017278
1.000000	6	0.983436	0.016564	51	0.999392	0.000608
54.598150	13	54.598148	0.000002	201	52.877536	1.720614

değerleri elde edilir

3.3. Problem 3

Kuantum mekaniği, optik plazma fiziği ve akışkanlar fiziği gibi çeşitli alanlarda modellenen KdV denklemi, literatürde

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad a \le x \le b \tag{3.3}$$

ve başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x)$$

sınır değerleri ise

$$u(a,t)=0\ ,\ u(b,t)=0\ ,\ t>0$$

şeklinde verilir.

3.3.1. Hiperbolik Tanjant Yöntemi ile Çözüm

KdV denkleminde

$$u(x,t)=u(\xi)\ ,\qquad \xi=k(x-Vt) \tag{3.3.1}$$

değişken dönüşüm yapılırsa (3.3) denklemi

$$-V\frac{d}{d\xi}u(\xi)+6u(\xi)\frac{d}{d\xi}u(\xi)+k^3\frac{d^3}{d\xi^3}u(\xi)=0 \tag{3.3.2}$$

şeklinde yazılır. (3.3.2) denkleminde $Y=\tanh(\xi)$ dönüşümü yapılırsa

$$-kV(1-Y^2)\frac{dF(Y)}{dY}+6kF(Y)(1-Y^2)\frac{dF(Y)}{dY}+k^3(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left\{(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)\frac{dF(Y)}{dY}\right]\right\}=0 \tag{3.3.3}$$

denklemine dönüşür. (3.3.3) denkleminde $u(\xi)=F(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^N$ değişken dönüşümü yapılır ve denklemde en yüksek dereceli lineer ifade ile en yüksek dereceli lineer olmayan ifadenin kuvvetleri eşitlenip $N=2$ bulunur. $N=2$ değeri $F(Y)$ ifadesinin üst sınırını belirtir. $N=2$ için (3.3.3) denklemini tekrar yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -kV(a_1+2a_2Y-a_1Y^2-2a_2Y^3) \\ +6k\begin{bmatrix}(a_0a_1)+Y(a_0 2a_2+a_1^2)+Y^2(3a_1a_2-a_0a_1)+Y^3(2a_2^2-a_0 2a_2-a_1^2)\\ +Y^4(-3a_1a_2)+Y^5(-2a_2^2)\end{bmatrix} \\ +k^3\left[(-2a_1)+Y(-16a_2)+Y^2(8a_1)+Y^3(40a_2)+Y^4(-6a_1)+Y^5(-24a_2)\right]\end{bmatrix}=0 \tag{3.3.4}$$

olur. (3.3.4) denklemi *Y* nin kuvvetlerine göre tekrar düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} -kVa_1+6ka_0a_1-2k^3a_1\ +Y\ -2kVa_2+12ka_0a_2+6ka_1^2-16a_2k^3 \\ +Y^2\ kVa_1+18ka_1a_2-6ka_0a_1+8k^3a_1 \\ Y^3\ 2kVa_2+12ka_2^2-12ka_0a_2-6ka_1^2+40k^3a_2\ +Y^4\ -18ka_1a_2-6k^3a_1 \\ +Y^5\ -12ka_2^2-24k^3a_2\end{bmatrix}=0 \tag{3.3.5}$$

elde edilir. *Y* nin katsayıları teker teker sıfıra eşitlenirse

$$a_0=\frac{V+8k^2}{6}\ \ a_1=0\ \ a_2=-2k^2$$

elde edilir.

$Y = \tanh(\xi)$ olduğundan $\xi \to \infty$ için $Y \to 1$ olur ve $F(Y) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$ dir. Buradan $0 = a_0 - 2k^2$ ve $a_0 = 2k^2$ olur ki $V = 4k^2$ dir. Bütün bu eşitlikler bir arada yazılırsa

$$F(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 = 2k^2 - 2k^2 Y^2 = 2k^2\ \ 1 - Y^2 \tag{3.3.6}$$

denklemini elde edilir.

$Y = \tanh(\xi)$ olduğundan

$$u(x,t) = 2k^2\ \ 1 - Y^2\ \ = 2k^2\ \ 1 - \tanh^2(\xi)$$

olur. $\xi = k(x - Vt)$ den dolayı

$$u(x,t) = 2k^2\ \ 1 - \tanh^2(kx - 4k^3 t)$$

$$u(x,t) = 2k^2 \sec h^2(kx - 4k^3 t)$$

şeklinde kesin çözüm bulunmuş olur.

3.3.2. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

KdV denkleminin başlangıç şartı

$$u(x,0) = -\frac{k^2}{2} sech^2\left[\frac{k}{2}x\right], \qquad a \le x \le b \tag{3.3.7}$$

olsun. Sınır değerleri ise

$$u(a,t) = 0\,, \quad u(b,t) = 0\,, \qquad t > 0$$

KdV denkleminin istenilen sonucu $a \le x \le b$ ile $0 \le t \le T$ bölgesinin içindedir. Bu bölgeyi *x* boyunca *N* parçaya ayrılırsa,

$$x_i = ih\ \ i = 1, 2, ..., N\ \ , \qquad a \le x_i \le b \ \text{ ve } \ h = \frac{(b-a)}{N}$$

(3.3) denkleminde $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ ifadelerinin sonlu fark karşılıkları yazılırsa

$$\frac{du}{dt} = f(u_i) \qquad i = 1, 2, ..., N - 1 \tag{3.3.8}$$

şeklinde t ye bağlı bir adi diferansiyel denklem sistemi oluşur. $f(u_i)$ fonksiyonu için her aralıkta sonlu fark yaklaşımı kullanırsak (3.3.8) denklemini

$$f(u_i)=\begin{cases} -\dfrac{-5u_i+18u_{i+1}-24u_{i+2}+14u_{i+3}-3u_{i+4}}{2h^3}-6u_i\dfrac{-3u_i+4u_{i+1}-u_{i+2}}{2h} & i=1,2 \\ -\dfrac{u_{i-3}-8u_{i-2}+13u_{i-1}-13u_{i+1}+8u_{i+2}-u_{i+3}}{8h^3}-6u_i\dfrac{-u_{i-1}+u_{i+1}}{2h} & i=3,4,...,N-3 \\ -\dfrac{3u_{i-4}-14u_{i-3}+24u_{i-2}-18u_{i-1}+5u_i}{2h^3}-6u_i\dfrac{u_{i-2}-4u_{i-1}+3u_i}{2h} & i=N-2,N-1 \end{cases} \tag{3.3.9}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sistemin çözümü Matlab Paket programı ile aşağıdaki şekilde elde edilir. [Schiesser, Griffiths, 2009]. (N =nokta sayısı)

Çizelge 3.7. MOL ile çözülen (3.3) denklemin nümerik değerleri

t	x	c	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (MOL)	Hata
0	-6	0.1	101	0.022680	0.022680	0.000000
0	2	0.1	101	0.045315	0.045315	0.000000
2	0	0.1	101	0.049950	0.049918	0.000032
2	10	0.1	101	0.008257	0.008286	0.000029
4	-4	0.1	101	0.031902	0.031836	0.000066
4	4	0.1	101	0.036750	0.036680	0.000070
4	4	0.1	301	0.036750	0.036680	0.000099

3.3.3. İndirgenmiş Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

KdV denkleminin başlangıç değeri

$$u(x,0)=-\frac{k^2}{2}sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.3.10}$$

şeklinde olan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü için, (3.3) denklemine indirgenmiş dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$(h+1)U_{h+1}(x)=-6\sum_{s=0}^{h}U_{h-s}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_s(x)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_h(x) \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Burada U_h x , $u(x,t)$'nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümüdür. (3.3.10) başlangıç değerinden

$$U_0(x)=-\frac{k^2}{2}sech^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.3.12}$$

(3.3.12) denklemini (3.3.11) denkleminde yerine yazılması sonucunda istenilen mertebe kadar $U_h \quad x$ değerleri ardışık olarak hesaplanabilir. İterasyon uygulanırsa

$$U_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)k^5}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3},$$

$$U_2(x) = -\frac{1}{8}\frac{k^8\left(-3+2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4}$$

$$U_3(x) = -\frac{1}{12}\frac{k^{11}\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\left(\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-3\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^5}, \qquad (3.3.13)$$

$$U_4(x) = -\frac{1}{96}\frac{k^{14}\left(2\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4+15-15\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

$$\vdots$$

Buradan $U_h(x)\ _{h=0}^{4}$ değerlerinin ters indirgenmiş diferansiyel dönüşümü alınarak verilen denklemin dördüncü mertebeden yaklaşık çözümü

$$\tilde{u}_4(x,t)=\sum_{h=0}^{4}U_h(x)t^h=-\frac{k^2\left(15k^{12}-15k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2+2k^{12}\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)t^4}{96\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(8k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3-24k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^3$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(-36k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2-24k^6\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^4\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^6}t^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k^5\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^3}t-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)^2} \qquad (3.3.14)$$

elde edilir.(N= terim sayısı)

Çizelge 3.8. RDTM ile çözülen (3.3) denklemin nümerik değerleri

t	x	c	N	$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (RDTM)	Hata
0	-6	0.1	6	0.022680	0.022680	0.000000
0	2	0.1	6	0.045315	0.045315	0.000000
2	0	0.1	6	0.049950	0.049806	0.000144
2	10	0.1	6	0.008257	0.008271	0.000013
4	-4	0.1	6	0.031902	0.032141	0.000240
4	4	0.1	6	0.036750	0.036752	0.000002
4	-4	0.1	9	0.031902	0.031952	0.000050

(3.3) denkleminde aynı *x,t,c* değerlerine göre yöntemlerin karşılaştırılmasını aşağıdaki tabloda verebiliriz

Çizelge 3.6. MOL, RDTM ve Analitik çözümlerin karşılaştırılması

$u(x,t)$ (Analitik)	$u(x,t)$ (RDTM)			$u(x,t)$ (MOL)		
	N	$u(x,t)$	Hata	N	$u(x,t)$	Hata
0.022680	6	0.022680	0.000000	101	0.022680	0.000000
0.045315	6	0.045315	0.000000	101	0.045315	0.000000
0.049950	6	0.049806	0.000144	101	0.049918	0.000032
0.008257	6	0.008271	0.000013	101	0.008286	0.000029
0.031902	6	0.032141	0.000240	101	0.031836	0.000066
0.036750	6	0.036752	0.000002	101	0.036680	0.000070
0.031902	9	0.031952	0.000050	301	0.036680	0.000099

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çizgiler yönteminde, seçilen grid noktalarının, iyi sonuç elde edilebilmesi için, yüzün üzerinde farklı nokta alınması gereklidir. Grid aralıkları ne kadar çok olursa hata payı o kadar fazla olur. Grid noktalarını arttırmak ise hem bilgisayara bağımlı kılar, hem de bilgisayarda yapılan işlemlerin uzamasına neden olur.

Tanh yöntemi, denklemlerde lineer terimlerin en yüksek derecesi ile lineer olmayan terimlerin en yüksek derecesini eşitleyerek elde ettiğimiz üst sınır eğer rasyonel bir ifade olursa tanh metodunu hesaplamak oldukça zorlaşacaktır. Bunun yanı sıra hiperbolik tanjant yönteminin bir diğer dezavantajı ise lineer denklemlerde hesaplanamıyor olmasıdır. Bundan dolayı hiperbolik tanjant metodu her ne kadar analitik sonuç veriyor olsa da birçok kısmı diferansiyel denklemin bu yöntemle hesaplanamaması demektir

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ise daha az iterasyon ile daha yaklaşık çözümler vererek iyi sonuçlar alınmıştır. Fakat lineer olmayan ifadelerin derecelerinin fazla olması durumunda bilgisayar kullanmaksızın yöntemin uygulanması karmaşık işlemler meydana getirmektedir.

KAYNAKLAR

Fan E., Hon Y. C., 2002, Generalized tanh Method Extend to Special Types of Nonlinear Equations,Z. Naturforsch, 57a, 692-700

Hereman W., Malfliet W., 1996, The Tanh Method: 1. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations, Physica Scripta, Vol 54, 563-568

Keskin Y., Çağlar İ., Koç A. B., 2011, Numerical Solution of Sine-Gordon Equation by Reduced Differential Transform Method, *Proceedings of the World Congress on Engineering,* Vol I.

Keskin Y., Çağlar İ., 2011, Genelleştirilmiş KdV Denklemleri İçin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi,3. Ulusal Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksek Okulu Tebliğ Günleri, Sayı 3, 209-216

Keskin Y., Oturanç G., 2011, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözülmesi, AYBİL YAYINLAR,

Köroğlu C., 2002, Üstel Fonksiyon Yardımıyla Amerikan Opsiyon Problemlerinin Çizgiler Yöntemi ile Çözümü, Doktora Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmir.

Mızrak M., 2007, Hiperbolik Tanjant (Tanh Method) Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, *Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Diyarbakır.

Sadiko M. N. O., Obiozor C. N., 2000, A Simple Introduction to The Method of Lines, International Journal of Electrical Engineering Education, 37-3

Schiesser W. E., Griffiths G.W., 2009, A Compendium of Partial Differential Equaiton Models Method of Lines Analysis with Matlab, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

Schiesser W. E., Griffiths G.W., 2012, Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations, ACADEMIC PRESS.

Topaloğlu İ. 2007, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Tam Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*

Wazwaz A.M. 2009, PartialDifferential Equations and Solitary Waves Theory, SPRINGER.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İbrahim ÇAĞLAR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya 1985
Telefon : 0 554 466 33 09
Faks :
e-mail : ibrahimcaglar@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Meram Anadolu Lisesi, Meram, KONYA**	**2004**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA**	**2010**
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

YABANCI DİLLER İngilizce

YAYINLAR

Keskin Y., Çağlar İ., 2011, Genelleştirilmiş KdV Denklemleri İçin İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi,3. Ulusal Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksek Okulu Tebliğ Günleri, Sayı 3, 209-216

Keskin Y., Çağlar İ., Koç A. B., 2011, Numerical Solution of Sine-Gordon Equation by Reduced Differential Transform Method, *Proceedings of the World Congress on Engineering,* Vol I.