İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL BİR KABUĞUN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ufuk KOL

Anabilim Dalı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL BİR KABUĞUN DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ufuk KOL
(511031027)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08 Mayıs 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Vedat Ziya DOĞAN (İTÜ)
Eş Danışman :
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU (İTÜ)
Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Küresel kabuklar bir çok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadırlar fakat özellikle uçak yapılarında kullanımı söz konusu olduğunda küresel kabukların titreşim karakterlerinin bilinmesi büyük önem kazanmaktadır. Bu çalışmada bahsedilen bu titreşim karakteristiklerinin, hem izotropik malzeme hemde gün geçtikçe kullanım alanı artan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme kullanılarak imal edilmiş küresel kabuklar için incelenmesi, sistemin doğal frekanslarının ve mod şekillerinin elde edilmesi amaçlamaktadır. Sistemin hareket denklemlerinin elde edilmesine kadar Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD) teorisi kullanılarak analitik çalışılmış elde edilen hareket denklemlerinin çözümü için numerik bir metod olan Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM) kullanılmıştır.

Hocam Doç. Dr. Vedat Ziya DOĞAN'a yardımları ve desteği için teşekkür ederim.

Eşim Yasemin KOL'a anlayışından, desteğinden ve yanımda oluşundan dolayı teşekkür ederim.

Arkadaşım Aytaç ARIKOĞLU' na yardımları için teşekkür ederim.

Haziran 2010

Ufuk KOL
(Uçak Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....iiiii
İÇİNDEKİLER v
KISALTMALAR viiii
ÇİZELGE LİSTESİ..... ix
ŞEKİL LİSTESİ..... xi
ÖZET.....xiiii
SUMMARY xv
1. GİRİŞ 1
1.1 Tezin Amacı 3
1.2 Literatür Özeti 3
2. MATEMATİK MODEL VE DENKLEMLERİN ÇIKARTILMASI 5
2.1 Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD) Teorisi ve Yapılan Kabuller…….....5
2.2 Koordinat Sistemi ve Yüzey Özellikleri. 6
2.3 Kabuk Koordinatları ve Temel Kabuk Elemanı 9
2.4 Gerinme-Deplasman Bağıntıları…….....10
2.5 Kuvvet-MomentBileşenleri, Hareket Denklemleri ve Sınır Şartları..…...…..12
2.5.1 İzotropik malzeme için kuvvet-moment bileşenleri…….....12
2.5.2 İzotropik malzeme için hareket denklemleri ve sınır şartları..….....14
2.5.3 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için kuvvet-moment bileşenleri, hareket denklemleri ve sınır şartları…….....19
3. NUMERİK ÇÖZÜM..... 25
3.1 Diferansiyel Kuadratür Metodunun Tanıtılması 25
3.2 Diferansiyel Kuadratür Metodunun Uygulanması 27
3.2.1 Grid dağılımı……..27
3.2.2 DK metodunun bir boyutlu kiriş eğilme problemine uygulanması..... 28
3.2.3 DK metodunun iki boyutlu plak titreşim problemine uygulanması..... 31
3.2.4 DK metodunun küresel kabuk titreşim problemine uygulanması..... 34
3.2.4.1 İzotropik küresel kabuk..... 36
3.2.4.2 FDM küresel kabuk 45
4. SONUÇ……...……..……59
5. KAYNAKLAR 61
6. EKLER..... 63

KISALTMALAR

BMKGD : Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon Teorisi
YMKGD : Yüksek Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon Teorisi
KPT : Klasik Plaka Teorisi
DKM : Diferansiyel Kuadratür Metodu
GDK : Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratür
FDM : Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
A : Ankastre Mesnet
B : Basit Mesnet
S : Serbest kenar-uç

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Kiriş eğilme titreşimleri doğal frekans çizelgesi 29
Çizelge 3.2 : Plak titreşimleri doğal frekans çizelgesi 34
Çizelge 3.3 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi 41
Çizelge 3.4 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi 41
Çizelge 3.5 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi 42
Çizelge 3.6 : Malzeme özellikleri çizelgesi 51
Çizelge 3.7 : Alüminyum-Zirkonia FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları 52
Çizelge 3.8 : Alüminyum-Zirkonia doğal frekansları-n çizelgesi 54
Çizelge 3.9 : Alüminyum-Zirkonia FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları 55
Çizelge 3.10: Alüminyum-Alümina FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları 56
Çizelge 3.11 : Alüminyum-Alümina doğal frekansları-n çizelgesi 57
Çizelge 3.12 : Alüminyum doğal frekans çizelgesi 58
Çizelge 3.13 : Zirkonia doğal frekans çizelgesi 58
Çizelge 3.14 : Alümina doğal frekans çizelgesi 58

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Kabuk üzerinde herhangi bir nokta 6
Şekil 2.2 : α ve β eğrileri 6
Şekil 2.3 : Küre koordinatları 8
Şekil 2.4 : Temel kabuk elemanı 9
Şekil 2.5 : FDM Malzeme özelliklerinin "n" ile kalınlık boyunca değişimi 20
Şekil 3.1 : Kiriş mod şekilleri 30
Şekil 3.2: Plak mod şekilleri 34
Şekil 3.3 : ANSYS modeli 41
Şekil 3.4 : Çelik doğal frekans grafiği 42
Şekil 3.5 : Çelik doğal frekans grafiği 43
Şekil 3.6 : Çelik doğal frekans grafiği 43
Şekil 3.7 : Çelik mod şekilleri 44
Şekil 3.8 : Çelik mod şekilleri 44
Şekil 3.9 : Çelik mod şekilleri 45
Şekil 3.10 : Alüminyum-Zirkonia FDM mod şekilleri 52
Şekil 3.11 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans grafiği 53
Şekil 3.12 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans-n grafiği(Birinci mod) 53
Şekil 3.13 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans-n grafiği(tüm modlar) 53
Şekil 3.14 : Alüminyum-Alümina FDM mod şekilleri 55
Şekil 3.15 : Alüminyum-Alümina FDM doğal frekans-n grafiği(tüm modlar) 56
Şekil 3.16 : Alüminyum-Alümina FDM doğal frekans-n grafiği(Birinci mod) 56

KÜRESEL BİR KABUĞUN DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışmasında hem izotropik malzemeden hem de Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) den yapılmış küresel bir kabuğun dinamik analizi ayrı ayrı yapılmış, doğal frekansları ve karşılık gelen mod şekilleri gibi önemli titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Söz konusu incelemelerin yapılabilmesi için koordinat sistemi tanımlanmasından başlanarak hareket denklemlerinin çıkartılmasına kadar analitik çalışılmış ve hareket denklemleri deplasmanlar cinsinden ifade edilmiştir. Yine farklı sınır koşulları deplasmanlar cinsinden ifade edilmiştir. Çalışmanın bu aşamsına kadar enine kayma gerilmeleri ve dönel ataletleri de hesaba katmak için "Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD)" teorisi kullanılmıştır. Elde edilen denklemler "Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM)" ile numerik olarak çözülmeye çalışılmıştır. DK metodunun uygulanmasının daha iyi anlaşılabilmesi ve bir boyutlu yaklaşımdan iki boyutlu uygulamaya geçişin daha iyi kavranabilmesi açısından ilk olarak değişik sınır şartları için bir kirişin serbest titreşimleri incelenmiştir. Elde edilen bulgular literatürdeki bazı değerlerle karşılaştırılmış DK metodunun yakınsaması incelenmiştir. Yine DK metodunun iki boyutlu uygulamasını pekiştirmesi ve konuya örnek olması açısından, plak titreşim problemine uygulaması yapılmış ve yine elde edilen sonuçlar literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonraki aşamada metod küresel kabuk titreşimine uygulanacak şekilde uyarlanmıştır. Denklemler ve numerik çözüm, çelikten yapılmış izotropik bir kabuğa ve çelik ile seramik malzemelerinin mikroskopik boyutta karıştırılmasıyla elde edilmiş, E, ν ve ρ gibi bazı malzeme özelliklerinin kabuk kalınlığı boyunca değişebildiği, bir yüzeyde çelik özelliklerinin diğer yüzeyde ise seramik özelliklerinin ağırlık gösterdiği FDM' den imal edilmiş küresel bir kabuğa uygulanmıştır.

Küresel kabuk ve bu iki farklı malzeme içinde yine doğal frekanslar ve karşılık gelen mod şekilleri tespit edilmiştir. Elde edilen bu sonuçların birbiriyle karşılaştırması yapılmıştır. Bulunan sonuçlar yine literatürdeki çalışmalardan elde edilen sonuçlarla ve ANSYS paket programı kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

DYNAMIC ANALYSIS OF A SPHERICAL SHELL

SUMMARY

At this master degree thesis work, dynamical analysis of a moderately thick spherical shell has been done for both isotropic material and "Fuctionally Graded Material (FGM)" and important characteristics such as mode frequencies and corresponding mode shapes are examined. For the sake of being able to make these examination, analytically studied from defining the coordinate system to handling the governing equations and these governing equations expressed in terms of displacements. Different boundary conditions are also expressed in terms of displacements. Up to this stage, First-Order Shear Deformation Theory (FSDT) is used to include the transverse shear stresses and rotary inertias. The governing equations are tried to be solved numerically by using Differential Quadrature Method (DQM). At first, free vibrations of a beam is analysed with different boundary conditions to have a better understanding of the application of DQM and leading from one dimensional application of DQM to two dimensional. The data obtained are compared with some finding in the literature and the convergence of DQM is analysed.

Secondly, for consolidating the two dimensional application of method and as a good example of the subject, plate vibrations are studied and again the results obtained are compared with the results in the literature.

The method is modified to apply it to spherical shell vibrations as the next step. Equations and numerical solutions are applied to an isotropic steel shell and the shell manufactured by FGM which is made by mixing steel and ceramic in microscopic level and in which the material properties like E, ν or ρ changes by the transverse coordinate and on one surface the steel properties are important and on the other surface ceramic properties are important.

For the spherical shell and these two different types of materials, mode frequencies and corresponding mode shapes of the spherical shell are obtained. The results are compared with each other and with the results found in the literature and the results of the analysis with ANSYS package program.

1. GİRİŞ

Küresel kabuklar havacılık dışında birçok mühendislik alanında kubbeler, su tankları, barajlar, denizaltı görüntüleme sistemleri, deniz altı yapıları gibi değişik uygulamalarda kullanılmasının yanı sıra havacılık sektöründede radome, uçak ve motor kaportalarının çeşitli kısımları, kanopi, basınçlı tüpler, çeşitli motor parçaları gibi birçok hassas uygulamada kullanılan yapılardır.

Birçok uygulamada ise silindirik veya konik kabuklara kapak olarak kullanılmaktadır. Bazı vakum tüpleri veya su tankları buna örnek teşkil edebilir.

Fakat özellikle uçak yapılarında kullanımı söz konusu olduğunda küresel kabukların titreşim karakterlerinin bilinmesi büyük önem kazanmaktadır.

Bu çalışmada bahsedilen bu titreşim karakteristiklerinin incelenmesini amaçlamaktadır. Hareket denklemleri zorlanmış titreşimler için çıkartıldıktan sonra, dış kuvvetler ihmal edilerek yapının serbest titreşimleri incelenecektir. Doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilecek.

Gerekli teorik altyapının ve matematik modelin oluşturulabilmesi adına öncelikle küresel bir yüzeyin özelliklerinden bahsedilmiş, bu yüzey üzerinde bir noktanın nasıl tanımlanacağı anlatılmıştır. Sonraki aşamalarda bu yüzey üzerindeki temel bir kabuk elemanı incelenmiş bu elemana ait bazı özellikler hakkında bilgi verilmiş, herhangi bir noktadaki gerinme-deplasman bağıntıları elde edilmiştir. Sonrasında bu bağıntılar kullanılarak izotropik malzeme ve kalınlık boyunca malzeme özelliklerinin birinden diğerine doğru değiştiği iki farklı malzemenin karışımından elde edilen Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) için ayrı ayrı kuvvet ve moment bileşenleri hesaplanmış ve bu bileşenlerin dengesi göz önünde bulundurularak yine iki durum içinde hareket denklemleri elde edilmiştir. Sistemin üç adet deplasman ve iki adet rotasyon olmak üzere beş adet bağımlı değişkeni olduğundan bunların tespiti için beş farklı hareket denklemi vardır.

Hareket denklemlerinden üç tanesi kuvvet dengesinden diğer iki tanesi moment dengesinden elde edilmektedir. Hareket denklemlerinin elde edilmesinden sonra sistem için değişik sınır koşulları belirtilmiş ve bu sınır koşullarının herbiri daha sonra probleme uygulanmıştır.

Bu çalışma yapılırken kısmen kalın kabuk yaklaşımı ve bu yaklaşıma uygun olarak "Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD)" teorisi kabulü yapılmıştır. Reissner-Mindlin theory olarakta bilinen BMKGD, klasik kabuk teorisinden farklı olarak enine kayma gerilmelerinide hesaba katmaktadır bu gerilmelerin kalınlık boyunca sabit olduğunu kabul etmektedir. Diğer bir ifadeyle bu yaklaşımda deformasyondan önce ortayüzeye dik olan düzlem kesitler deformasyondan sonra düzlemselliğini karumakta fakat dik olarak kalmamaktadır. Klasik teoride ihmal edilen, enine kayma gerilmesi etkileri kabuk kalınlığı arttıkça hesaba katılması gerekli boyutlara ulaşmakta ve kabuğun dinamik davranışının incelenmesinde önemli olmaktadır.

Çalışmanın daha sonraki kısmında elde edilen hareket denklemleri numerik bir metod olan, elde edilmek istene fonksiyonun kendisine yüksek mertebeden polinomlar kullanarak çeşitli yaklaşımların yapıldığı, "Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM)" ile çözülecek ve yapının titreşim modlarının frekansları ve mod şekilleri elde edilecektir. DK metodunu küresel kabuğa uygulamadan önce bir boyutlu kiriş eğilme titreşimi problemine uygulanarak nasıl çalıştığını ve yakınsadığını görülmüş ve sonra küresel kabuğa göre daha az karmaşık iki boyutlu plak eğilme titreşimine uygulanarak iki boyutlu durum için uygulama pekiştirilmiştir. DK metodu daha sonrada görüleceği gibi az sayıda nokta kullanılarak tatminkar bir yakınsama sağlaması ve programlama kolaylığı gibi sebeplerle tercih edilmiştir. Numerik çözümler yapılırken ticari bir paket program olan "Mathematica 7.1" kullanılmış ve kullanılan programlar "Ekler" kısmında verilmiştir.

Son olarak, enine kayma gerilmeleri ve dönel atalet etkilerinin de hesaplamalara katıldığı bu çalışmada elde edilen veriler daha önce yapılmış çalışmalar ve yine ticari bir paket program olan "ANSYS 11.0" kullanılarak bulunan sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı izotropik ve FDM kullanılarak imal edilmiş küresel bir kabuğun titreşim analizlerini yapmak için gerekli olan formülasyonu elde edip, daha sonra bu formülasyonu kullanarak numerik bir çözüm metodu kullanarak yapının serbest titreşimleriyle ilgili doğal frekansları, mod şekillerini tespit etmektir.

1.2 Literatür Özeti

Kirchhoff-Love kabullerine dayalı klasik kabuki teorisinin kullanılması elli yıldan daha öncesine dayanmaktadır. Bu konuda Timoshenko, Reissner, Byrne, Sanders, Lur'ye, Novozhilov gibi isimler çalışmışlardır [3] fakat daha sonraları Reissner-Mindlin in plaka teorisi üzerindeki çalışmalarını takiben yine kendi adlarıyla anılan "Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD)" ve daha sonrada "Yüksek Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (YMKGD)" teorisi geliştirilmiştir.

Reddy (2008), Tornabene (2006) ve Shu (2000) son yıllarda BMKGD nin kabuk problemlerine uygulanmasının değişik örneklerini vermektedirler. YMKGD ise BMKGD ye göre hassasiyet bakımından çok önemsiz bir iyileştirme sunarken, beraberinde çok daha fazla hesaplama yükü getirdiğinden [4] daha az kullanılmaktadır. BMKGD kullanılırken hesaplamalara ilave edilmesi gereken parametrelerden biri olan "Kayma Gerilmesi Düzeltme Faktörü (χ)"ile ilgilide Sailendra ve Satish (1978) in çalışması sıklıkla refere edilen bir çalışmadır. Yine son yıllarda bu konuda yapılmış çalışmalara örnek olması açısından Grigolyuk ve Kulikov (2001) bu parametreyi nonlineer Timoshenko kabukları için uygulamışlardır.

1990 larda üzerinde çalışılmaya başlanan FDM konusunda ise yine literatürde bir çok çalışma mevcuttur, örneğin Nguyen, Sab ve Bonnet (2007) te FDM için bir BMKGD kullanarak plakların modellenmesi konusunda bir çalışma yapmışlardır. Pradyumna (2009) nın fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların ve kabukların analizi konusunda YMKGD kullanarak yaptığı çalışmalarda konunun kabuklara uygulanmasına örnek

çalışmalardandır. Wu ve Tsai (2003) ise FDM küresel kabukların statik analizinde DK metodunu kullanmışlardır.

Numerik çözüm için kullanılan "Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM)" ise ilk olarak 1972 yılında Richard Bellman tarafından geliştirilmiş ve uygulanmıştır daha sonra Shu tarafından bir çok farklı uygulaması geliştirilmiş ve bir kitap yazılmış [1] ve sıklıkla kullanılmasından dolayı hakkında literatürde birkaç kitap daha bulunmaktadır [13] bunlardan biridir. Yücel ve Sarı (2009), Chen (1996), Malekzadeh ve Setoodeh (2006) ve Wu ve Ren (2006) in yaptığı çalışmalar son yıllarda DKM kullanılarak yapılmış çalışmalar örnek olarak gösterilebilir. Bununla birlikte dönel kabukların titreşim analizi sırasında çözüm yöntemi olarak sonlu elemanlar yöntemide sıklıkla kullanılmaktadır.

2. MATEMATİK MODEL VE DENKLEMLERİN ÇIKARTILMASI

2.1 Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD) Teorisi ve Yapılan Kabuller

Bu çalışma yapılırken kısmen kalın kabuk yaklaşımı ve bu yaklaşıma uygun olarak Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi-Deformasyon (BMKGD) teorisi kabulü yapılmıştır. Reissner-Mindlin theory olarakta bilinen BMKGD, klasik kabuk teorisinden farklı olarak enine kayma gerilmelerinide hesaba katmaktadır bu gerilmelerin kalınlık boyunca sabit olduğunu kabul etmektedir. Diğer bir ifadeyle bu yaklaşımda deformasyondan önce ortayüzeye dik olan düzlem kesitler deformasyondan sonra düzlemselliğini korumakta fakat dik olarak kalması gerekmemektedir. Klasik teoride ihmal edilen, enine kayma gerilmesi etkileri kabuk kalınlığı arttıkça hesaba katılması gerekli boyutlara ulaşmakta ve kabuğun dinamik davranışının incelenmesinde önemli olmaktadır. Kalın kabuk yaklaşımı yapılsada BMKGD'de de klasik teorideki gibi kabuk kalınlığının kürenin yarıçapı yanında ihmal edilebilir mertebelerde olduğu kabul edilir. Kabuk yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeleri diğer normal gerilmelere kıyasla ihmal edilebilecek mertebededir diğer bir ifadeyle sırasında $\sigma_z = 0$ kabul edilir. Bunlarla beraber klasik teoriyle diğer bir benzerliği gerinme-deplasman bağıntılarında ikinci ve daha yüksek mertebeden terimlerin birinci derece terimlere kıyasla ihmal edilebilir mertebede olduğu kabulüdür. Klasik teoriden farkı ise daha öncede bahsettiğimiz gibi "deformasyondan önce orta yüzeye dik ve doğrusal olan yüzeyler deformasyondan sonra yine doğrusal kalır fakat dik olması gerekli değildir" kabulüdür. Klasik teoride bu düzlemler hem dik kalıyor hemde doğrusal kalıyordu bu kabul ise $\sigma_{\alpha z} = \sigma_{\beta z} = 0$ sonucunu doğuruyordu, fakat BMKGD de bu gerilme bileşenleri sıfırdan farklıdır dolayısıyla bunlara karşılık gelen gerinmelerde sıfırdan farklıdır. Yapılan diğer kabuller;

-Lineer İzotropik Malzeme

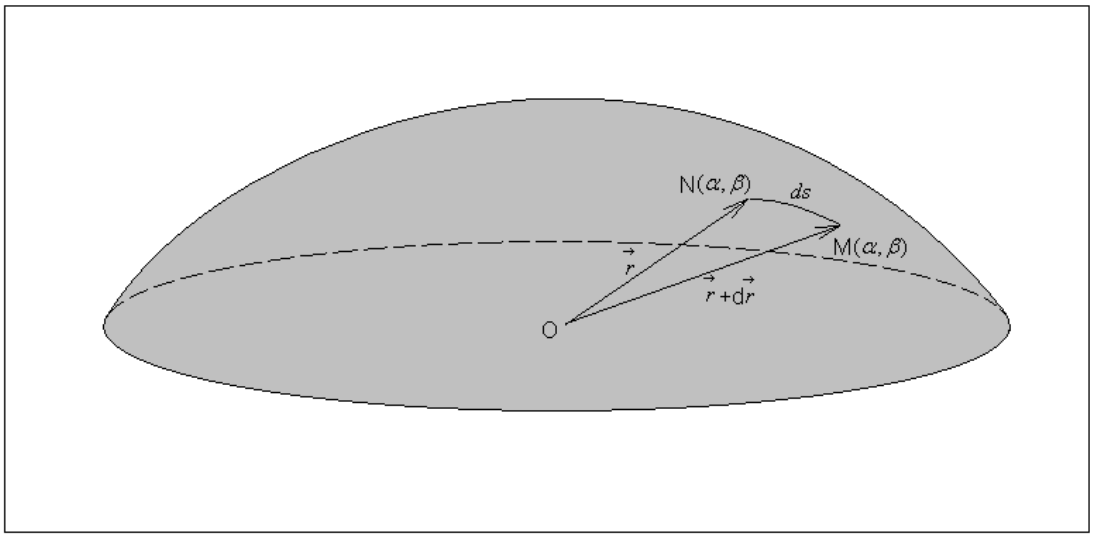
- $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ gerilme tensörü simetrik

-Gerinmeler sıcaklıktan bağımsız

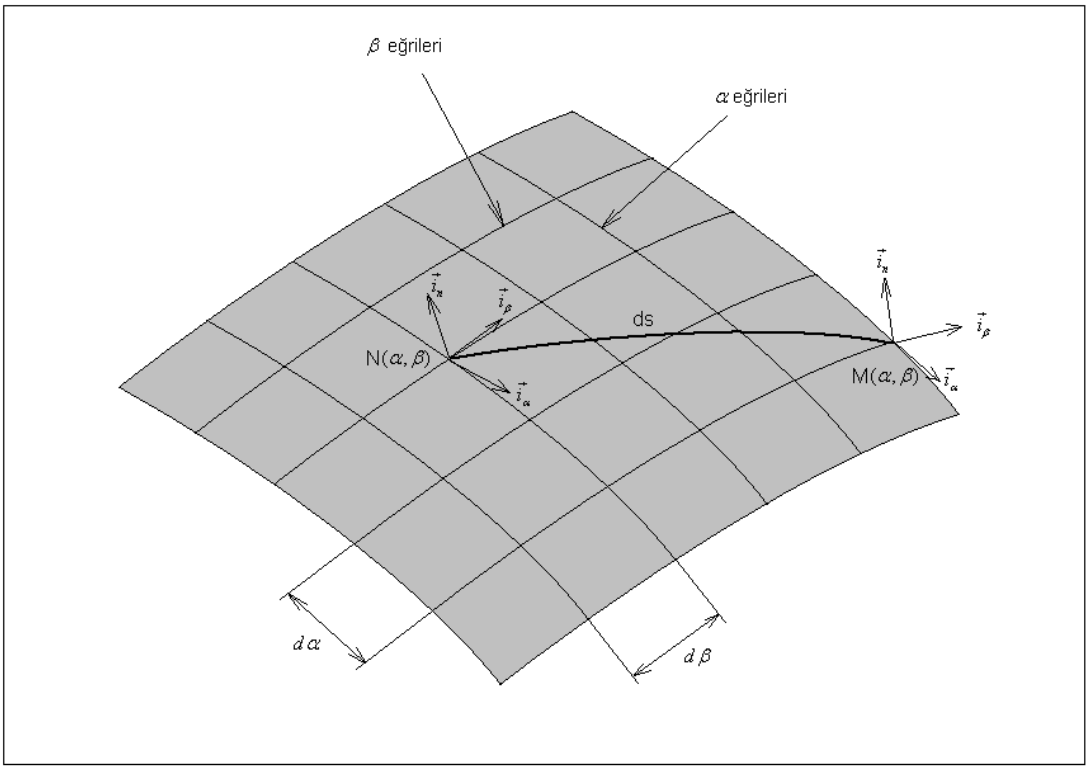
-Malzeme özellikleri E, ν ve ρ, "z" den bağımsız şeklindedir.

2.2 Koordinat Sistemi ve Yüzey Özellikleri

Deformasyona uğramamış bir kabuğun orta yüzeyi üzerindeki bir noktayı iki bağımsız değişken cinsinden bir vektör yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade etmek mümkündür.



Şekil 2.1 : Kabuk üzerinde herhangi bir nokta.



Şekil 2.2 : α ve β eğrileri.

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) \tag{2.1}$$

$$|\vec{r}_{,\alpha}| = A, |\vec{r}_{,\beta}| = B \text{ ve } \frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A}.\frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} = cos\eta \tag{2.2}$$

Olmak üzere, birim vektörler ve türevleri aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A} = \vec{i}_{\alpha}, \quad \frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} = \vec{i}_{\beta}, \quad \vec{i}_n = \frac{\vec{i}_{\alpha} \times \vec{i}_{\beta}}{sin\eta}$$

$$\frac{\partial(\vec{i}_{\alpha})}{\partial\alpha} = (\frac{-1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\vec{i}_{\beta} - \frac{A}{R_{\alpha}}\vec{i}_n), \quad \frac{\partial(\vec{i}_{\beta})}{\partial\alpha} = (\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\vec{i}_{\alpha}), \quad \frac{\partial(\vec{i}_n)}{\partial\alpha} = (\frac{A}{R_{\alpha}}\vec{i}_{\alpha}) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial(\vec{i}_{\alpha})}{\partial\beta} = (\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\vec{i}_{\beta}), \quad \frac{\partial(\vec{i}_{\beta})}{\partial\beta} = (\frac{-1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\vec{i}_{\alpha} - \frac{B}{R_{\beta}}\vec{i}_n), \quad \frac{\partial(\vec{i}_n)}{\partial\beta} = (\frac{B}{R_{\beta}}\vec{i}_{\beta})$$

Olmak üzere bir yüzey için yüzey üzerinde bulunan bir eğriyi tanımlayan "Birinci Kuadratik Form" aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2ABcos\eta d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2 \tag{2.4}$$

Yüzeyin Birinci Kuadratik Formu infinitesimal uzunluklar, yüzeyi tarifleyen eğriler arasında kalan açı ve yüzey alanı hakkında bilgi içermektedir fakat yüzeyin kendisi hakkında belirleyici değildir.

Denklem (2.4) de geçen A^2, $ABcos\eta$ ve B^2 ifadelerine "Birinci Temel Büyüklükler" olarak bilinmektedirler.

Ve yine aynı yüzey için, $\vec{N}$ eğrinin normali ve $\frac{1}{\rho}$ eğrinin eğriliği ile birlikte

$$\begin{aligned} \vec{r}_{,\alpha\alpha}.i_n &= L \\ \vec{r}_{,\alpha\beta}.i_n &= M \\ \vec{r}_{,\beta\beta}.i_n &= N \end{aligned} \tag{2.5}$$

Olmak üzere yüzeyin "İkinci Kuadratik Formu" ise aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{\vec{N}.i_n}{\rho} = \frac{(Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2)}{ds^2} \tag{2.6}$$

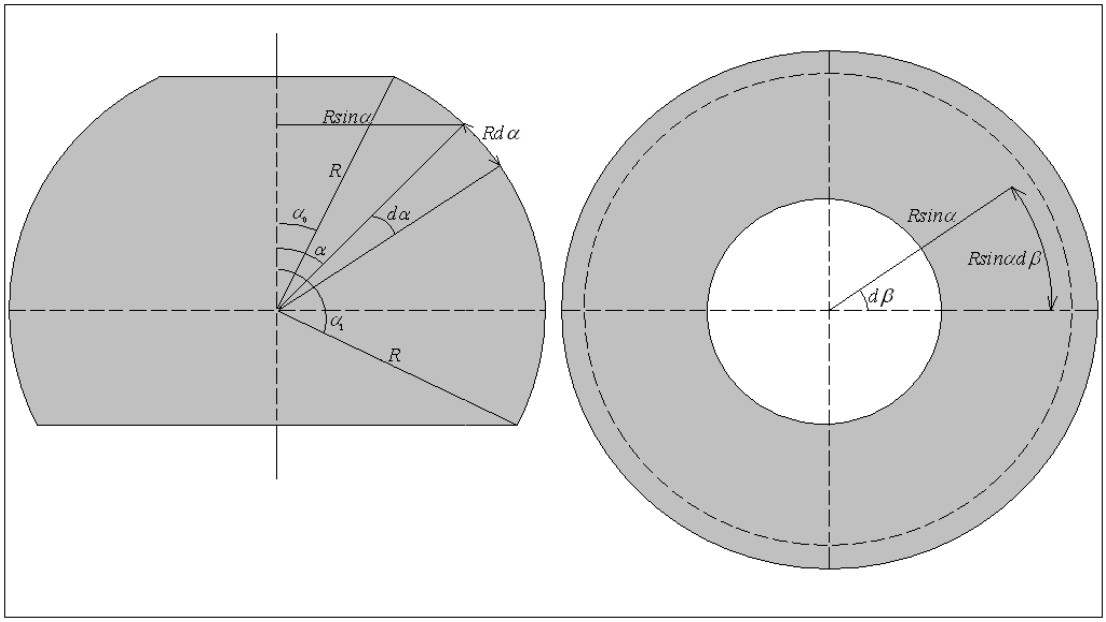
Daha once bulunan ds^2 ifadeside yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{cos\phi}{\rho} = \frac{Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2}{A^2 d\alpha^2 + 2ABcos\eta d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Yüzeyi tanımlayan eğrilerin "düzlem eğri" olması durumunda $\vec{N}$ ve i_n çakışır, $\phi = 0$ veya $\phi = \pi$ olur.

Denklem (2.7) den α ve β eğrilerinin eğriliği sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{-N}{B^2}, \quad \frac{1}{R_\beta} = \frac{-L}{A^2} \qquad \textbf{(2.8)}$$



Şekil 2.3 : Küre koordinatları.

Küresel bir kabuk için bu ifadeleri yeniden gözden geçirecek olursak,

$$R_\alpha = R_\beta = R \qquad \textbf{(2.9)}$$

Şekil 2.3 den;

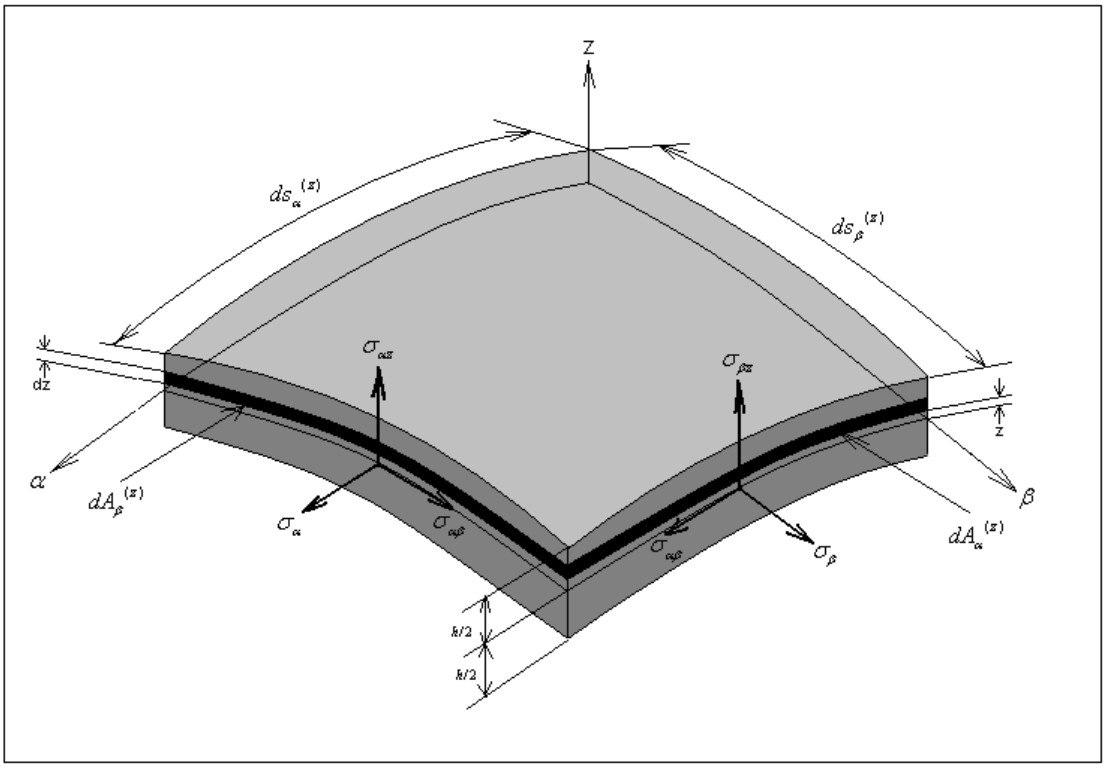
$$(ds)^2 = (Rd\alpha)^2 + (Rsin\alpha d\beta)^2 = R^2(d\alpha)^2 + R^2 sin^2\alpha (d\beta)^2 \qquad \textbf{(2.10)}$$

olduğu görülebilir ve daha önce $(ds)^2$ için bulunan ifade ile karşılaştırıldığında, α ve β eğrilerininde ortagonal olduğuda göz önüne alınırsa;

$$A = R, \quad B = Rsin\alpha \qquad \textbf{(2.11)}$$

olur.

2.3 Kabuk Koordinatları ve Temel Kabuk Elemanı



Şekil 2.4 : Temel kabuk elemanı.

Şimdiye kadar bütün ifadeler kabuğun orta düzlemi için verildi. Kalınlık boyunca herhangi bir nokta ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\vec{R}(\alpha,\beta,z) = \vec{r}(\alpha,\beta) + z i_n \qquad (-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}) \tag{2.12}$$

Olmak üzere ds^2 ifadesi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir;

$$ds^2 = \left(R(1+\frac{z}{R}) \right)^2 d\alpha^2 + \left(Rsin\alpha(1+\frac{z}{R}) \right)^2 d\beta^2 + dz^2 \tag{2.13}$$

Burada $d\alpha^2$, $d\beta^2$ ve dz^2 ifadelerinin katsayıları g_1, g_2 ve g_3 metrik tensor sabitleridir.

$$\begin{aligned} g_1 &= \left(R(1+\frac{z}{R}) \right)^2 \\ g_2 &= \left(Rsin\alpha(1+\frac{z}{R}) \right)^2 \\ g_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Denklem (2.13) e göre temel kabuk elemanının kenar uzunlukları sırasıyla $d\beta = 0$, $dz = 0$ ve $d\alpha = 0$, $dz = 0$ alınarak;

$$ds_\alpha^{(z)} = R(1+\frac{z}{R})d\alpha \ , \ ds_\beta^{(z)} = Rsin\alpha(1+\frac{z}{R})d\beta \qquad \textbf{(2.15)}$$

Şeklinde yazılabilir. "dz" ile çarpılmak suretiyle alanlar da aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$dA_\alpha^{(z)} = R(1+\frac{z}{R})d\alpha dz \ , \ dA_\beta^{(z)} = Rsin\alpha(1+\frac{z}{R})d\beta dz \qquad \textbf{(2.16)}$$

Temel kabuk elemanının hacmi ise aşağıdaki şekilde bulunur.

$$dV^{(z)} = \left(R(1+\frac{z}{R}) \right)\left(RSin\alpha(1+\frac{z}{R}) \right)d\alpha d\beta dz \qquad \textbf{(2.17)}$$

2.4 Gerinme-Deplasman Bağıntıları

Üç boyutlu elastisite teorisinde, gerinme-deplasman ilişkileri genel halde, "e" herhangi bir noktadaki normal gerinme, "γ" herhangi bir noktadaki kayma gerinmesi ve "U" herhangi bir noktadaki deplasman bileşeni olmak üzere, aşağıdaki şekilde verilmektedir;

$$e_i = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}}\right) + \frac{1}{2g_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial g_i}{\partial\alpha_k}\frac{U_k}{\sqrt{g_k}}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}}\left[g_i \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}}\right) + g_j \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{U_j}{\sqrt{g_j}}\right)\right] \qquad \textbf{(2.18)}$$

$i, j = 1,2,3$ ve $i \neq j$

Denklem (2.14) de verilen metrik tensör sabitleri yukarıdaki denklemlerde yazılıp 1, 2, 3 yerine de problemimizin tanımında kullanıldığı gibi α,β,z kullanılıp düzenlenirse z/R'nin ihmal edilebileceği kabulüyle normal gerinmeler aşağıdaki şekilde bulunabilir;

$$e_\alpha = \frac{1}{R}(\frac{\partial U}{\partial\alpha} + W) \ , \ e_\beta = \frac{1}{Rsin\alpha}(Ucos\alpha + \frac{\partial V}{\partial\beta} + Wsin\alpha) \ , \ e_z = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Benzer şekilde kayma gerinmeleri içinde aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial U}{\partial \beta} - Vcos\alpha)$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{R}(\frac{\partial W}{\partial \alpha} - U) + \theta_\alpha \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial W}{\partial \beta} - V) + \theta_\beta$$

Kabuk elemanının herhangi bir noktasındaki deplasman ifadeleri orta düzlemdeki deplasmanlar, rotasyonlar ve "z" konumu ile aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\begin{aligned} U(\alpha,\beta,z) &= u(\alpha,\beta) + z\theta_\alpha(\alpha,\beta) \\ V(\alpha,\beta,z) &= v(\alpha,\beta) + z\theta_\beta(\alpha,\beta) \\ W(\alpha,\beta,z) &= w(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

$$\theta_\alpha = \frac{\partial U(\alpha,\beta,z)}{\partial z} \qquad \textbf{(2.21)}$$

$$\theta_\beta = \frac{\partial V(\alpha,\beta,z)}{\partial z}$$

Bu ifadelerle yukarıda verilen gerinme ifadeleri yeniden yazılarak gerinmler orta düzlemdeki deplasmanlar cinsinden yeniden yazılabilir. Orta düzlemdeki gerinmeler ve herhangi bir noktadaki gerinme ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{R}(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w) \qquad \kappa_\alpha = \frac{1}{R}\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}$$

$$\epsilon_\beta = \frac{1}{Rsin\alpha}(ucos\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} + wsin\alpha) \qquad \kappa_\beta = \frac{1}{Rsin\alpha}(\theta_\alpha cos\alpha + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}) \qquad \textbf{(2.22)}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial u}{\partial \beta} - vcos\alpha) \qquad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{R}\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} - \theta_\beta cos\alpha)$$

$$e_\alpha = (\epsilon_\alpha + z\kappa_\alpha)\,, e_\beta = (\epsilon_\beta + z\kappa_\beta)\,,$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta} + z\tau_{\alpha\beta})\,,\ \gamma_{\alpha z} = \frac{1}{R}(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - u) + \theta_\alpha\,,\ \gamma_{\beta z} = \frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial w}{\partial \beta} - vsin\alpha) + \theta_\beta \qquad \textbf{(2.23)}$$

Klasik teoride $\gamma_{\alpha z}$ ve $\gamma_{\beta z}$ ifadeleri sıfıra eşitelenerek θ_α ve θ_β için u, v ve w cinsinden ifadeler bulunabiliyorken BMKGD de bunlar problemin serbestlik derecesi olarak hareket denklemlerindeki yerlerini alacaklar ve sözkonusu denklemler çözülerek değerleri elde edilebilecektir.

2.5 Kuvvet-Moment Bileşenleri, Hareket Denklemleri ve Sınır Şartları

2.5.1 İzotropik malzeme için kuvvet-moment bileşenleri

Kuvvet ve moment bileşenlerinin gerilmeler cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} Rsin\alpha d\beta\left[R\right]_\alpha &= \int\left[\sigma\right]_\alpha dS_\beta^{(z)}dz = \int\left[\sigma\right]_\alpha Rsin\alpha d\beta(1+\frac{z}{R_\beta})dz \\ Rd\alpha\left[R\right]_\beta &= \int\left[\sigma\right]_\beta dS_\alpha^{(z)}dz = \int\left[\sigma\right]_\beta Rd\alpha(1+\frac{z}{R_\alpha})dz \end{aligned} \tag{2.24}$$

sonraki adımda;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_\alpha \\ N_\beta \\ N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha} \\ Q_\alpha \\ Q_\beta \end{pmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha z} \\ \sigma_{\beta z} \end{pmatrix}(1+\frac{z}{R})dz \\ \begin{pmatrix} M_\alpha \\ M_\beta \\ M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha} \end{pmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}(1+\frac{z}{R})zdz \end{aligned} \tag{2.25}$$

yazılır,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Olmak üzere

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha z} \\ \sigma_{\beta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \\ e_z \\ e_{\alpha\beta} \\ e_{\alpha z} \\ e_{\beta z} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(2.27)}$$

Ifadeleri kullanılır ve "z/*R*" ihmal edilir ve integraller alınırsa, ortayüzey gerinmeleri cinsinden aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\begin{aligned}
N_\alpha &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_\alpha + \nu\epsilon_\beta) \\
N_\beta &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_\beta + \nu\epsilon_\alpha) \\
N_{\alpha\beta} &= N_{\beta\alpha} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\epsilon_{\alpha\beta} \\
M_\alpha &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta) \\
M_\beta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\beta + \nu\kappa_\alpha) \\
M_{\alpha\beta} &= M_{\beta\alpha} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}\tau_{\alpha\beta} \\
\bar{Q_\alpha} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{\alpha z} \\
\bar{Q_\beta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{\beta z}
\end{aligned} \quad \textbf{(2.28)}$$

Yukarıdaki denklemlerde $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ ve $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ olmasının nedeni $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ olması ve bunun yanında $R_\alpha = R_\beta = R$ olmasıdır.

$\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}, \kappa_\alpha, \kappa_\beta$ ve τ , "z" den bağımsız olduklarından integrallerden dışarı çıkar fakat $\sigma_{\alpha z}$ ve $\sigma_{\beta z}$ "z" ile değiştiklerinden ,diğer bir ifadeyle enine kayma gerilmesi dağılımı kabuk kalınlığı boyunca uniform olmadığından, bununla beraber

$\bar{Q_\alpha}$ ve $\bar{Q_\beta}$ yazılırken sabit kabul edileceklerinden hatalı bulunacaklardır, Gerçek Q_α ve Q_β yi bulabilmek için bir "Kayma Gerilmesi Düzeltme Faktörü (χ)" ile çarpılmaları gerekecektir.

$$Q_\alpha = \frac{Eh}{2(1+\nu)\chi}\gamma_{\alpha z}$$
$$Q_\beta = \frac{Eh}{2(1+\nu)\chi}\gamma_{\beta z} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Denklem (2.28) deki $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}$ Denklem (2.22) ile u,v ve w cinsinden verilir ve teoreme göre değişmez . $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$ ve τ için ise değişik teoremlerde değişik ifadeler yazılır. Böylece kuvvet ve moment bileşenleri deplasmanlar cinsinden yazılmış olur.

2.5.2 İzotropik malzeme için hareket denklemleri ve sınır şartları

$\vec{q}$ birim hacim başına toplam dışkuvvet yoğunluk vektörü dür

$$\vec{q} = q_\alpha \vec{i}_\alpha + q_\beta \vec{i}_\beta + q_n \vec{i}_n \qquad \textbf{(2.30)}$$

Gerçek dış kuvvet

$$\vec{q} R^2 \sin\alpha d\alpha d\beta \qquad \textbf{(2.31)}$$

$\vec{m}$ birim hacim başına toplam dış moment yoğunluk vektörü

$$\vec{m} = m_\alpha \vec{i}_\alpha + m_\beta \vec{i}_\beta + m_n \vec{i}_n \qquad \textbf{(2.32)}$$

Kabuk elemanının bir yüzüne

$$\vec{F}_\alpha = (N_\alpha \vec{i}_\alpha + N_{\alpha\beta} \vec{i}_\beta + Q_\alpha \vec{i}_n) R \sin\alpha d\beta$$
$$\vec{F}_\beta = (N_{\beta\alpha} \vec{i}_\alpha + N_\beta \vec{i}_\beta + Q_\beta \vec{i}_n) R d\alpha \qquad \textbf{(2.33)}$$

Etki etmektedir, diğer yüzüne ise,

$$\vec{F}_\alpha + \frac{\partial \vec{F}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha$$
$$\vec{F}_\beta + \frac{\partial \vec{F}_\beta}{\partial \beta} d\beta \qquad \textbf{(2.34)}$$

kuvvetleri etki etmektedir. Kuvvet dengesinden;

$$\frac{\partial \vec{F}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{F}_\beta}{\partial \beta} d\beta + \vec{q} R^2 sin\alpha d\alpha d\beta = 0 \qquad \textbf{(2.35)}$$

Yazılabilir, $\vec{F}_\alpha$, $\vec{F}_\beta$, $\vec{q}$ ve Denklem (2.3) deki birim vektör türevlerini içeren ifadeler denkleme eklenir ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(N_\alpha Rsin\alpha)}{\partial \alpha}\vec{i}_\alpha - (N_\alpha Rsin\alpha)\vec{i}_n + \frac{\partial(N_{\alpha\beta} Rsin\alpha)}{\partial \alpha}\vec{i}_\beta + \frac{\partial(Q_\alpha Rsin\alpha)}{\partial \alpha}\vec{i}_n + \\
&(Q_\alpha Rsin\alpha)\vec{i}_\alpha + R\frac{\partial(N_{\beta\alpha})}{\partial \beta}\vec{i}_\alpha + (\frac{\partial(Rsin\alpha)}{\partial \alpha}\vec{i}_\beta)N_{\beta\alpha} + R\frac{\partial(N_\beta)}{\partial \beta}\vec{i}_\beta + \\
&(-\frac{\partial(Rsin\alpha)}{\partial \alpha}\vec{i}_\alpha - (Rsin\alpha)\vec{i}_n)N_\beta + R\frac{\partial(Q_\beta)}{\partial \beta}\vec{i}_n + (Rsin\alpha)Q_\beta\vec{i}_\beta \\
&+(q_\alpha\vec{i}_\alpha + q_\beta\vec{i}_\beta + q_n\vec{i}_n)R^2 sin\alpha = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.36)}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemin sağlanması için static durumda üç doğrultudada sıfıra eşit olması gerekmektedir. Titreşim hareketi için yapılacak incelemeler için burada inertia terimleride eklenerek üç adet hareket denklemi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R}\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{cos\alpha}{Rsin\alpha}(N_\alpha - N_\beta) + \frac{Q_\alpha}{R} + q_\alpha = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\theta}_\alpha \\
&\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + 2\frac{cos\alpha}{Rsin\alpha}N_{\alpha\beta} + \frac{Q_\beta}{R} + q_\beta = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\theta}_\beta \\
&\frac{1}{R}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} - \frac{N_\alpha}{R} - \frac{N_\beta}{R} + q_n = I_0\ddot{w}
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.37)}$$

moment dengesi de yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial m_\beta}{\partial \beta} d\beta - (\vec{F}_\alpha \times \vec{i}_\beta)\frac{ds_\beta}{2} - (\vec{F}_\beta \times \vec{i}_\alpha)\frac{ds_\alpha}{2} + \\
&(\vec{F}_\alpha + \frac{\partial \vec{F}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha) \times (ds_\alpha \vec{i}_\alpha + \frac{ds_\beta}{2}\vec{i}_\beta) + (\vec{F}_\beta + \frac{\partial \vec{F}_\beta}{\partial \beta} d\beta) \times (ds_\beta \vec{i}_\beta + \frac{ds_\alpha}{2}\vec{i}_\alpha) \\
&+ \vec{m} R^2 d\alpha d\beta = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.38)}$$

Ve yine benzer şekilde iki adet daha denge denklemi elde edilir.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}+\frac{cos\alpha}{Rsin\alpha}(M_\alpha-M_\beta)-Q_\alpha+m_\beta=I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\theta}_\alpha$$
$$\frac{1}{Rsin\alpha}\frac{\partial M_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}+2\frac{cos\alpha}{Rsin\alpha}M_{\alpha\beta}-Q_\beta+m_\alpha=I_1\ddot{v}+I_2\ddot{\theta}_\beta \quad \textbf{(2.39)}$$

Denklem (2.37) ve Denklem (2.39) de verilen I_0, I_1 ve I_2 ifadeleri, $\mu_{(z)}$ malzeme yoğunluğu olmak üzere aşağıdaki formülle bulunabilir.

$$I_m=\int_{-h/2}^{h/2}\mu_{(z)}z^m(1+\frac{z}{R})^2dz \quad \textbf{(2.40)}$$

Denklem (2.28) da, $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \epsilon_{\alpha\beta}, \kappa_\alpha, \kappa_\beta, \tau_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha z}$ ve $\gamma_{\beta z}$ ifadeleri u,v ve w cinsinden yeniden yazılırsa;

$$K=\frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$
$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \textbf{(2.41)}$$

Olmak üzere

$$N_\alpha=\frac{K}{R}(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+w+\frac{\nu}{sin\alpha}(ucos\alpha+\frac{\partial v}{\partial \beta}+wsin\alpha))$$
$$N_\beta=\frac{K}{R}(u\frac{cos\alpha}{sin\alpha}+\frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{1}{sin\alpha}+\nu\frac{\partial u}{\partial \alpha}+(1+\nu)w)$$
$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha}=\frac{K(1-\nu)}{2R}(\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\nu\frac{cos\alpha}{sin\alpha})$$
$$M_\alpha=\frac{D}{R}(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\nu}{sin\alpha}\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}+\nu\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\theta_\alpha)$$
$$M_\beta=\frac{D}{R}(\frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}+\frac{cos\alpha}{sin\alpha}\theta_\alpha+\nu\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}) \quad \textbf{(2.42)}$$
$$M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}=\frac{D(1-\nu)}{2R}(\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha}+\frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta}-\theta_\beta\frac{cos\alpha}{sin\alpha})$$
$$Q_\alpha=\frac{K(1-\nu)}{2\chi}(\frac{1}{R}(\frac{\partial w}{\partial \alpha}-u)+\theta_\alpha)$$
$$Q_\beta=\frac{K(1-\nu)}{2\chi}(\frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial w}{\partial \beta}-vsin\alpha)+\theta_\beta)$$

şeklini alır. Bu ifadeleri hareket denklemlerinde yazdıktan sonra,

$$u(\alpha,\beta,t) = u(\alpha,\beta)e^{i\omega t}$$
$$v(\alpha,\beta,t) = v(\alpha,\beta)e^{i\omega t}$$
$$w(\alpha,\beta,t) = w(\alpha,\beta)e^{i\omega t} \quad \textbf{(2.43)}$$
$$\theta_\alpha(\alpha,\beta,t) = \theta_\alpha(\alpha,\beta)e^{i\omega t}$$
$$\theta_\beta(\alpha,\beta,t) = \theta_\beta(\alpha,\beta)e^{i\omega t}$$

u,v,w, $\theta_\alpha, \theta_\beta$ yerine denklemlerde yukarıdaki ifadelerini kullanıp daha sonra $e^{i\omega t}$ leri sadeleştirmek suretiyle değişkenlerin ayrılması metoduyla zamandan bağımsız olarak hareket denklemlerini u,v,w, $\theta_\alpha, \theta_\beta$ serbestlik dereceleri ve φ cinsinden aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{12R^2\chi})(2R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)\theta_\alpha+(-6K(1-\nu+2\nu\chi)\\&+h(h^2+12R^2)\mu\chi\omega^2-12K\chi\cot^2\alpha)u+6K((-3+\nu)\chi\cot\alpha\csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}\\&-(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-(-1+\nu)\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\chi(2\cot\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\\&+(1+\nu)(2\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\csc\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta})+2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2})))=0\end{aligned} \quad \textbf{(2.44a)}$$

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{12R^2\chi})(2R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)\theta_\beta+(-6K(-1+\nu)(-1+\chi)\\&+h(h^2+12R^2)\mu\chi\omega^2+6K(-1+\nu)\chi\cot^2\alpha)v+6K(-(-3+\nu)\chi\cot\alpha\csc\alpha\frac{\partial u}{\partial\beta}\\&+(1-\nu+2(1+\nu)\chi)\csc\alpha\frac{\partial w}{\partial\beta}+\chi(2\csc^2\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-(-1+\nu)\cot x\frac{\partial v}{\partial\alpha}\\&+(1+\nu)\csc\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-(-1+\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2})))=0\end{aligned} \quad \textbf{(2.44b)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2R^2}\csc\alpha(\frac{1}{6h(h^2+12R^2)}\mu\omega^2 w\sin\alpha-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)(R\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta}-\frac{\partial v}{\partial\beta}\\&+\csc\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}))-2K\sin\alpha(\nu u\cot\alpha+(1+\nu)w+\nu\csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial u}{\partial\alpha})\\&-2K\sin\alpha(u\cot\alpha+(1+\nu)w+\csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha})-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)\cos\alpha(R\theta_\alpha\\&-u+\frac{\partial w}{\partial\alpha}))-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)\sin\alpha(R\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2})))=0\end{aligned} \quad \textbf{(2.44c)}$$

$$\frac{1}{240R^2\chi}((120KR^2(-1+\nu)-240D\nu\chi+h^3(3h^2+20R^2)\mu\chi\omega^2$$
$$-240D\chi\cot^2\alpha)\theta_\alpha-40(R(3K(-1+\nu)-h^3\mu\chi\omega^2)u$$
$$-3(D(-3+\nu)\chi\cot\alpha\csc\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta}-D(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\beta^2}+KR(-1+\nu)\frac{\partial w}{\partial\alpha} \qquad \textbf{(2.44d)}$$
$$+D\chi\csc\alpha(2\cos\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+(1+\nu)\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha\partial\beta}+2\sin\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha^2}))))=0$$

$$\frac{1}{240R^2\chi}((120(-1+\nu)(KR^2-2D\chi)+h^3(3h^2+20R^2)\mu\chi\omega^2$$
$$+120D(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha)\theta_\beta+40(R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)v$$
$$+3(-D(-3+\nu)\chi\cot\alpha\csc\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta}+KR(-1+\nu)\csc\alpha\frac{\partial w}{\partial\beta}+D\chi(2\csc^2\alpha\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\beta^2} \qquad \textbf{(2.44e)}$$
$$-(-1+\nu)\cot\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha}+(1+\nu)\csc\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta}-(-1+\nu)\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha^2}))))=0$$

Bu noktada sınır şartlarının da belirlenmesi yerinde olacaktır. Küresel bir kabuktan alınmış herhangi bir parça için kenarlarında aşağıdaki üç farklı sınır şartı mevcut olabilir;

Ankastre bir kenar için:

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1 \ de \quad u=0,v=0,w=0,\theta_\alpha=0,\theta_\beta=0$$
$$\beta=0,\beta_0 \quad de \quad u=0,v=0,w=0,\theta_\alpha=0,\theta_\beta=0 \qquad \textbf{(2.45a)}$$

Basit mesnetli bir kenar için:

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1 \, de \; u=0,v=0,w=0,\theta_\beta=0 \; ve \; M_\alpha=0$$
$$\beta=0,\beta_0 \; de \; u=0,v=0,w=0,\theta_\alpha=0 \; ve \; M_\beta=0 \qquad \textbf{(2.45b)}$$

Serbest bir kenar için:

$$\alpha=\alpha_0,\alpha_1 \; de \; N_\alpha=0,\; N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha}=0,\; Q_\alpha=0,\; M_\alpha=0 \; M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}=0$$
$$\beta=0,\beta_0 \; da \; N_\beta=0,N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha}=0,Q_\beta=0,M_\beta=0,\; M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}=0 \qquad \textbf{(2.45c)}$$

Aynı zamanda yapının sürekli olduğu durumlarda yani $\beta = 2\pi$ olması durumunda aşağıdaki kinematik ve fiziksel uygunluk şartları da sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} &u(\alpha,0) = u(\alpha,2\pi), v(\alpha,0) = v(\alpha,2\pi), w(\alpha,0) = w(\alpha,2\pi) \\ &\theta_\alpha(\alpha,0) = \theta_\alpha(\alpha,2\pi), \theta_\beta(\alpha,0) = \theta_\beta(\alpha,2\pi) \\ &N_\beta(\alpha,0) = N_\beta(\alpha,2\pi), N_{\alpha\beta}(\alpha,0) = N_{\alpha\beta}(\alpha,2\pi), Q_\beta(\alpha,0) = Q_\beta(\alpha,2\pi) \\ &M_\beta(\alpha,0) = M_\beta(\alpha,2\pi), M_{\alpha\beta}(\alpha,0) = M_{\alpha\beta}(\alpha,2\pi) \end{aligned} \quad \textbf{(2.46)}$$

Bu sınır şartları ve uygunluk şartları Denklem (2.42) kullanılarak deplasmanlar cinsinden yazılabilir.

2.5.3 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için kuvvet-moment bileşenleri, hareket denklemleri ve sınır şartları

FDM ler mikroskopit boyutta heterojen kompozit malzemeler olarak tanımlanabilir. Genellikle iki farklı malzemenin karışımlarından elde edilir ve yine genellikle bu iki malzeme metal ve seramik olarak seçilir ve yüksek sıcaklıkların sözkonusu olduğu ortamlarda kullanılır. Bu şekilde FDM kullanımı yapıya, seramiğin düşük ısıl iletkenliğinden dolayı, yüksek sıcaklık direnci, metal içermesinden dolayı ise yapısal dayanıklılık sağlamaktadır. Malzemenin mekanik özellikleri farklı doğrultularda sürekli bir şekilde farklılık gösterir. Bu özelliği ısıl gerilmelerin, artık gerilmelerin ve gerilme konsantrasyonlarının klasik kompozit malzemelere göre daha az olmasını sağlamaktadır. Bu çalışmada kullanılan kabuğun FDM den imal edildiği ve malzeme özelliklerinin sadece kesit boyunca değiştiği kabul edilecektir.

P, Young modülü, Poisson oranı veya yoğunluk gibi herhangi bir malzeme özelliği, "1" ve "2" indisleri kullanılan malzemeleri göstermek üzere V hacim oranı olsun, herhangi bir noktada,

$$P = P^{(1)}V^{(1)} + P^{(2)}V^{(2)} \quad \textbf{(2.47)}$$

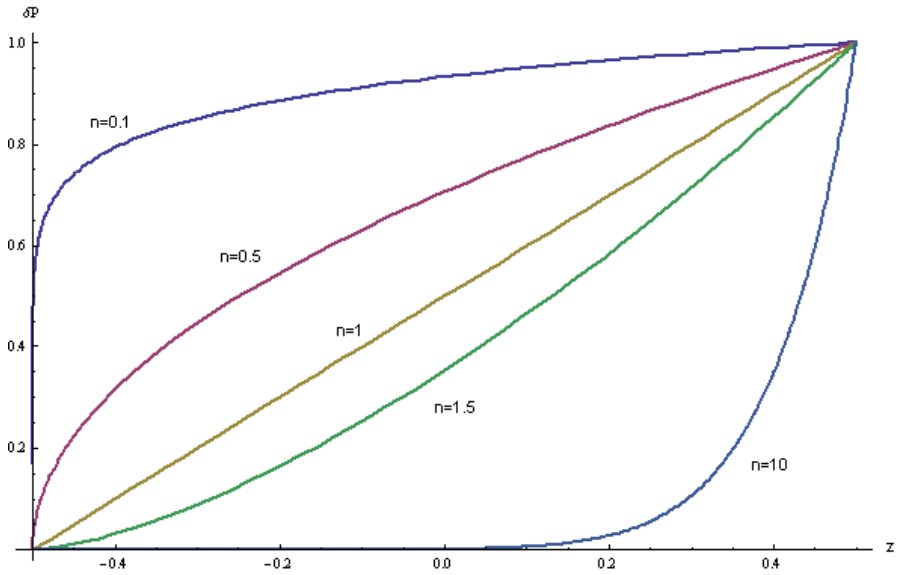
Ifadesini yazabiliriz,

$$V^{(1)} + V^{(2)} = 1 \text{ ve } V^{(1)} = \left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n \quad \textbf{(2.48)}$$

ile

$$P = (P^{(1)} - P^{(2)})\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + P^{(2)} \tag{2.49}$$

yazılabilir. P_1, P_2, n ve h sabit olmak üzere, P sadece "z" nin fonksiyonudur. Farklı "n" değerleri için malzeme özelliklerinin "z" ile değişimi Şekil 2.5 deki gibidir.



Şekil 2.5 : FDM Malzeme özelliklerinin "n" ile kalınlık boyunca değişimi.

Denklem (2.26) da verilen malzeme özellikleri ve yoğunluk, Denklem (2.49) kullanılarak "z" nin fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
Q_{11}(z) &= Q_{22}(z) = (Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + Q_{11}^{(2)} \\
Q_{12}(z) &= Q_{21}(z) = (Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + Q_{12}^{(2)} \\
Q_{44}(z) &= Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = (Q_{44}^{(1)} - Q_{44}^{(2)})\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + Q_{44}^{(2)} \\
\mu(z) &= (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^n + \mu^{(2)}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Denklem (2.50) da $Q^{(1)}$ ve $Q^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci malzeme özelliklerini göstermektedir ve bu yeni ifadelerle Denklem (2.25) ile verilen integraller yeniden yazılabilir. Örneğin N_α için,

$$N_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{Q}_{11} e_\alpha + \bar{Q}_{12} e_\beta) dz$$

$$N_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} ((Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)}) \left(\frac{h+2z}{2h} \right)^n + Q_{11}^{(2)})(\epsilon_\beta + z\kappa_\beta) dz \qquad \textbf{(2.51)}$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} ((Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)}) \left(\frac{h+2z}{2h} \right)^n + Q_{12}^{(2)})(\epsilon_\alpha + z\kappa_\alpha) dz$$

olur ve bu intergral alınırsa

$$N_\alpha = \frac{h(2(2+n)(Q_{11}^{(1)} + nQ_{11}^{(2)})\epsilon_\alpha + hn(Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})\kappa_\alpha)}{2(2+3n+n^2)} \qquad \textbf{(2.52)}$$

$$+ \frac{h(2(2+n)(Q_{12}^{(1)} + nQ_{12}^{(2)})\epsilon_\beta + hn(Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})\kappa_\beta)}{2(2+3n+n^2)}$$

Diğer kuvvet ve moment bileşenleri içinde aynı integraller alınırsa kayma düzeltme faktörüyle birlikte aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$N_\beta = \frac{h(2(2+n)(Q_{12}^{(1)} + nQ_{12}^{(2)})\epsilon_\alpha + hn(Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})\kappa_\alpha)}{2(2+3n+n^2)}$$

$$+ \frac{h(2(2+n)(Q_{11}^{(1)} + nQ_{11}^{(2)})\epsilon_\beta + hn(Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})\kappa_\beta)}{2(2+3n+n^2)}$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{h(2(2+n)(Q_{33}^{(1)} + nQ_{33}^{(2)})\epsilon_{\alpha\beta} + hn(Q_{33}^{(1)} - Q_{33}^{(2)})\tau_{\alpha\beta})}{2(2+3n+n^2)}$$

$$M_\alpha = \frac{h^2(6n(3+n)(Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})\epsilon_\alpha + h(3(2+n+n^2)Q_{11}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{11}^{(2)})\kappa_\alpha)}{12(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$+ \frac{h^2(6n(3+n)(Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})\epsilon_\beta + h(3(2+n+n^2)Q_{12}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{12}^{(2)})\kappa_\beta)}{12(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$M_\beta = \frac{h^2(6n(3+n)(Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})\epsilon_\alpha + h(3(2+n+n^2)Q_{12}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{12}^{(2)})\kappa_\alpha)}{12(1+n)(2+n)(3+n)} \qquad \textbf{(2.53)}$$

$$+ \frac{h^2(6n(3+n)(Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})\epsilon_\beta + h(3(2+n+n^2)Q_{11}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{11}^{(2)})\kappa_\beta)}{12(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{h^2(6n(3+n)(Q_{33}^{(1)} - Q_{33}^{(2)})\epsilon_{\alpha\beta} + h(3(2+n+n^2)Q_{33}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{33}^{(2)})\tau_{\alpha\beta}}{12(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$Q_\alpha = \frac{h(Q_{33}^{(1)} + nQ_{33}^{(2)})\gamma_{\alpha z}}{(1+n)\chi}$$

$$Q_\beta = \frac{h(Q_{33}^{(1)} + nQ_{33}^{(2)})\gamma_{\beta z}}{(1+n)\chi}$$

Elde edilen bu kuvvet ve moment bileşenleri düzenlenmek suretiyle,

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{h(Q_{11}^{(1)} + nQ_{11}^{(2)})}{1+n} \\
K_2 &= \frac{h^2 n(Q_{11}^{(1)} - Q_{11}^{(2)})}{2(2+3n+n^2)} \\
K_3 &= \frac{h(Q_{12}^{(1)} + nQ_{12}^{(2)})}{1+n} \\
K_4 &= \frac{h^2 n(Q_{12}^{(1)} - Q_{12}^{(2)})}{2(2+3n+n^2)} \\
K_5 &= \frac{h^3(3(2+n+n^2)Q_{11}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{11}^{(2)})}{12(1+n)(2+n)(3+n)} \\
K_6 &= \frac{h^3(3(2+n+n^2)Q_{12}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{12}^{(2)})}{12(1+n)(2+n)(3+n)} \\
K_7 &= \frac{h(Q_{33}^{(1)} + nQ_{33}^{(2)})}{1+n} \\
K_8 &= \frac{h^2 n(Q_{33}^{(1)} - Q_{33}^{(2)})}{2(2+3n+n^2)} \\
K_9 &= \frac{h^3(3(2+n+n^2)Q_{33}^{(1)} + n(8+n(3+n))Q_{33}^{(2)})}{12(1+n)(2+n)(3+n)} \\
K_{10} &= \frac{hQ_{33}^{(1)} + hnQ_{33}^{(2)}}{\chi + n\chi}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.54)}
$$

olmak üzere kuvvet ve moment bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= K_1\epsilon_\alpha + K_2\kappa_\alpha + K_3\epsilon_\beta + K_4\kappa_\beta \\
N_\beta &= K_3\epsilon_\alpha + K_4\kappa_\alpha + K_1\epsilon_\beta + K_2\kappa_\beta \\
M_\alpha &= K_2\epsilon_\alpha + K_5\kappa_\alpha + K_4\epsilon_\beta + K_6\kappa_\beta \\
M_\beta &= K_4\epsilon_\alpha + K_6\kappa_\alpha + K_2\epsilon_\beta + K_5\kappa_\beta \\
N_{\alpha\beta} &= K_7\epsilon_{\alpha\beta} + K_8\tau_{\alpha\beta} \\
M_{\alpha\beta} &= K_8\epsilon_{\alpha\beta} + K_9\tau_{\alpha\beta} \\
Q_\alpha &= K_{10}\gamma_{\alpha z} \\
Q_\beta &= K_{10}\gamma_{\beta z}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.55)}
$$

Yukarıdaki denklemlere $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \epsilon_{\alpha\beta}, \kappa_\alpha, \kappa_\beta, \tau_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha z}$ ve $\gamma_{\beta z}$ ifadeleri u,v ve w cinsinden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= \frac{1}{R}(K_4\frac{1}{sin\alpha}(\theta_\alpha cos\alpha+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta})+K_3\frac{1}{sin\alpha}(ucos\alpha+wsin\alpha+\frac{\partial v}{\partial\beta})+K_2\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+K_1(w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}))\\
N_\beta &= \frac{1}{R}((K_2\frac{1}{sin\alpha}(\theta_\alpha cos\alpha+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta})+K_1\frac{1}{sin\alpha}(ucos\alpha+wsin\alpha+\frac{\partial v}{\partial\beta})+K_4\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+K_3(w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}))\\
M_\alpha &= \frac{1}{R}(K_6\frac{1}{sin\alpha}(\theta_\alpha cos\alpha+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta})+K_4\frac{1}{sin\alpha}(ucos\alpha+wsin\alpha+\frac{\partial v}{\partial\beta})+K_5\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+K_2(w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}))\\
M_\beta &= \frac{1}{R}(K_5\frac{1}{sin\alpha}(\theta_\alpha cos\alpha+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta})+K_2\frac{1}{sin\alpha}(ucos\alpha+wsin\alpha+\frac{\partial v}{\partial\beta})+K_6\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+K_4(w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}))\\
N_{\alpha\beta} &= \frac{1}{R}(K_8(\frac{1}{sin\alpha}(-\theta_\beta cos\alpha+\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta})+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha})+K_7(\frac{1}{sin\alpha}(-vcos\alpha+\frac{\partial u}{\partial\beta})+\frac{\partial v}{\partial\alpha}))\\
M_{\alpha\beta} &= \frac{1}{R}(K_9(\frac{1}{sin\alpha}(-\theta_\beta cos\alpha+\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta})+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha})+K_8(\frac{1}{sin\alpha}(-vcos\alpha+\frac{\partial u}{\partial\beta})+\frac{\partial v}{\partial\alpha}))\\
Q_\alpha &= K_{10}(\frac{1}{R}(\frac{\partial w}{\partial\alpha}-u)+\theta_\alpha)\\
Q_\beta &= K_{10}(\frac{1}{Rsin\alpha}(\frac{\partial w}{\partial\beta}-vsin\alpha)+\theta_\beta)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.56)}
$$

Elde edilmiş olur. Bu ifadeler Denklem (2.37) ve Denklem (2.39) de yazıldıktan sonra,

$$
\begin{aligned}
u(\alpha,\beta,t) &= u(\alpha,\beta)e^{i\omega t}\\
v(\alpha,\beta,t) &= v(\alpha,\beta)e^{i\omega t}\\
w(\alpha,\beta,t) &= w(\alpha,\beta)e^{i\omega t}\\
\theta_\alpha(\alpha,\beta,t) &= \theta_\alpha(\alpha,\beta)e^{i\omega t}\\
\theta_\beta(\alpha,\beta,t) &= \theta_\beta(\alpha,\beta)e^{i\omega t}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.57)}
$$

u,v,w, θ_α , θ_β yerine denklemlerde yukarıdaki ifadelerini kullanıp daha sonra $e^{i\omega t}$ leri sadeleştirmek suretiyle değişkenlerin ayrılması metoduyla zamandan bağımsız olarak hareket denklemlerini u,v,w, θ_α , θ_β serbestlik dereceleri ve φ cinsinden aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$
\begin{aligned}
&(-K_2csc\alpha+(K_2-K_4+R(K_{10}+R\omega^2I_1))sin\alpha)\theta_\alpha-uK_1cos\alpha cot\alpha\\
&-(K_2+K_8)cot\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta}-K_1cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}-K_7cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}+K_8csc\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\beta^2}+K_7csc\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\beta^2}\\
&+K_2cos\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha}+K_1cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}+(K_4+K_8)\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha\partial\beta}+(K_3+K_7)\frac{\partial^2v}{\partial\alpha\partial\beta}\\
&+sin\alpha(-(K_{10}+K_3-uR^2\omega^2I_0)+(K_1+K_{10}+K_3)\frac{\partial w}{\partial\alpha}+K_2\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha^2}+K_1\frac{\partial^2u}{\partial\alpha^2})
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.58a)}
$$

$$(-K_8 csc\alpha + (2K_8 + R(K_{10} + RI_1))sin\alpha)\theta_\beta + (-K_7 csc\alpha + (-K_{10} + 2K_7$$
$$+R^2\omega^2 I_0)sin\alpha)v + (K_2 + K_8)cot\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta} + K_1 cot\alpha\frac{\partial u}{\partial\beta} + K_1\frac{\partial w}{\partial\beta} + (K_{10} + K_3)\frac{\partial w}{\partial\beta}$$
$$+K_2 csc\alpha\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\beta^2} + K_1 csc\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + K_8 cos\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha} + (K_4 + K_8)\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} + K_3\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} \quad \textbf{(2.58b)}$$
$$+K_8 sin\alpha\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha^2} + K_7(cot\alpha\frac{\partial u}{\partial\beta} + cos\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + sin\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}) = 0$$

$$\frac{1}{2}(-2(K_2 + K_4 - K_{10}R)\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta} - 2(K_1 + K_{10} + K_3)\frac{\partial v}{\partial\beta} + K_{10}cot(\frac{\alpha}{2})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}$$
$$+K_{10}tan(\frac{\alpha}{2})\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - 2cos\alpha((K_2 + K_4 - K_{10}R)\theta_\alpha + u(K_1 + K_{10} + K_3) - K_{10}\frac{\partial w}{\partial\alpha}) \quad \textbf{(2.58c)}$$
$$-2sin\alpha((2(K_1 + K_3) - R^2\omega^2 I_0)w + (K_2 + K_4 - K_{10}R)\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha} + (K_1 + K_{10} + K_3)\frac{\partial u}{\partial\alpha}$$
$$-K_{10}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2})) = 0$$

$$-(Kcos\alpha cot\alpha + (K_6 + R^2(K_{10} - \omega^2 I_2))sin\alpha)\theta_\alpha - uK_2 csc\alpha$$
$$+(K_2 - K_4 + R(K_{10} + R\omega^2 I_1))usin\alpha - (K_5 + K_9)cot\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta} - K_2 cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta}$$
$$-K_8 cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\beta} + K_9 csc\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\beta^2} + K_8 csc\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + K_5 cos\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha} + K_2 cos\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha} \quad \textbf{(2.58d)}$$
$$+K_2 sin\alpha\frac{\partial w}{\partial\alpha} + K_4 sin\alpha\frac{\partial w}{\partial\alpha} - K_{10}Rsin\alpha\frac{\partial w}{\partial\alpha} + (K_6 + K_9)\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha\partial\beta} + K_4\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}$$
$$+K_8\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + K_5 sin\alpha\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha^2} + K_2 sin\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 0$$

$$(-K_9 csc\alpha + (2K_9 + R^2(-K_{10} + \omega^2 I_2))sin\alpha)\theta_\beta + (-K_8 csc\alpha$$
$$+(2K_8 + R(K_{10} + R\omega^2 I_1))sin\alpha)v + (K_5 + K_9)cot\alpha\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta} + K_2 cot\alpha\frac{\partial u}{\partial\beta}$$
$$+K_2\frac{\partial w}{\partial\beta} + K_4\frac{\partial w}{\partial\beta} - K_{10}R\frac{\partial w}{\partial\beta} + K_5 csc\alpha\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\beta^2} + K_2 csc\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + K_9 cos\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha} \quad \textbf{(2.58e)}$$
$$+(K_6 + K_9)\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} + K_4\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + K_9 sin\alpha\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial\alpha^2} + K_8(cot\alpha\frac{\partial u}{\partial\beta} + cos\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}$$
$$+sin\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}) = 0$$

Hareket denklemlerinde geçen I_0, I_1 ve I_2 ifadeleri, yine Denklem (2.40) ile bulunabilir.

Sınır şartları ve uygunluk şartları yine denklem (2.45) ve Denklem (2.46) deki gibi verilmektedir.

3. NUMERİK ÇÖZÜM

3.1 Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM)' nun Tanıtılması

Diferansiyel Kuadratür Metodu (DKM) difreansiyel denklemleri çözmek için kullanılan numerik bir tekniktir. 1972 yılında Richard Bellman tarafından "İntegral Kuadratur" metodundan hareketle bulunmuş ve daha sonra bir çok mühendislik problemine uygulanmıştır.

DKM, bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevinin, meshlenmiş bir doğrultudaki, bütün noktalarda fonksiyonun aldığı değerlerin bir ağırlık katsayısıyla çarpılarak elde edilen ifadelerin toplamı olarak ifade edilmesi prensibine dayanmaktadır. Metodu uygularken önemli ve kritik olan nokta ise ağırlık katsayılarının uygun şekilde belirlenmesidir [1].

Ağırlık katsayılarının belirlenmesinde ise iki temel yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar yüksek dereceden polinom yaklaşımı ve Fourier seri açılımı yaklaşımıdır. Bu çalışmada Yüksek dereceden polinom yaklaşımı kullanılacaktır. Yüksek dereceden polinom yaklaşımı Weierstrass birinci teoremi olarak bilinir ve " $f(x)$ *(a,b)* aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ise, n sonsuza gittikçe $f(x)$ e yakınsayan bir $P_N(x)$ vardır" şeklindedir. Bu yaklaşımla bir fonksiyonun,

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k x^k \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde ifade edilebileceği belirtilmektedir. Fakat bu şekilde bir yaklaşım yapılması d_k ların N in büyük değerleri için hasaplanmasını zorlaştırmaktadır. Bunun yerine çeşitli interpolasyon fonksiyonlarının kullanılmasıyla DK hesabı daha uygulanabilir bir hale getirilebilmektedir.

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x) f(x_i) \qquad \textbf{(3.2)}$$

Şeklinde Lagrange interpole edilmiş polinomların kullanılmasında ise bu tarz bir zorluğu ortadan kaldırmaktadır. Denklem (3.2) da geçen $d_i(x)$ ifadesi için bir çok yaklaşım mevcuttur fakat [2] de aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$d_i(x) = \frac{M(x)}{M^{(1)}(x_i)(x - x_i)} \tag{3.3}$$

Burada geçen $M(x)$

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_N) \tag{3.4}$$

Şeklindedir, $M^{(1)}(x_i)$ ise $M(x)$ nin $x = x_i$ noktasındaki türevidir.

$$M^{(1)}(x_i) = (x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_N) = \prod_{k=1k\neq i}^{N} (x_i - x_k) \tag{3.5}$$

Şeklindedir. Burada $d_i(x)$ nin önemli bir özelliği,

$$d_k(x_i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \tag{3.6}$$

olmasıdır. Fonksiyonun birinci ve yüksek mertebeden türevleri aşağıdaki şekildedir.

$$f^n(x_i) \approx \sum_{i=1}^{N} d_i^{(n)}(x_i) f(x_j) \tag{3.7}$$

Örneğin $d_j^{(1)}(x_i)$ ifadesi Denklem (3.3) nin türevinin alınmasıyla aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$d_j^{(1)}(x_i) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{M^{(1)}(x_j)(x_i - x_j)} \tag{3.8}$$

Ağırlık katsayılarının yüksek dereceden $d_j^{(n)}(x_i)$ türevleri Denk(3.3) nin gerektiği kadar türetilmesiyle elde edilebilir. Daha sonra türetilen bu ağırlık katsayılarının toplam sembolleri içindeki yerlerini almasıyla ifade edilen fonksiyon türevleri, hareket denklemlerinde ve ilgili sınır şartlarında yazılır. Bu şekilde, N adet noktadaki hesaplamak istediğimiz fonksiyon değerleri ve sadece bir bağımsız değişkene bağlı

ağırlık katsayılarından oluşan bir denklem elde etmiş oluruz ki bu denklem N adet nokta için sağlanmalıdır. N adet noktanın koordinatlarınıda denkleme uyguladığımızda elimizde N bilinmeyenli N adet denklem kalır ve bu denklemlerin çözülmesiyle elde etmek istediğimiz fonksiyon değerleri bulunmuş olur.

Literatürde DK metoduyla ilgili kaynaklarda çoğunlukla formülasyon bir boyutlu verilmektedir. İki boyutlu yaklaşımda ise iki boyut için her biri bir bağımsız değişkenin fonksiyonu olan ayrı ayrı ağırlık katsayıları hesaplanmakta ve herhangi bir doğrultudaki türev o doğrultudaki ağırlık katsayılarıyla ifade edilmektedir.

3.2 DK Metodunun Uygulanması

3.2.1 Grid dağılımı

DK metodunun probleme uygulanabilmesi için öncelikle bir grid dağılımı seçilmesi gerekmektedir. N toplam grid sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi lineer bir grid dağılımı kullanılabileceği gibi,

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{3.9}$$

aşağıdaki Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımı gibi sınır noktalarına doğru sıklaşan bir grid dağılımıda kullanılabilir

$$x_i = \frac{1-\cos(\frac{i-1}{N-1})\pi}{2} \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{3.10}$$

Seçilen grid dağılımının çözüme etkisi, sınır şartlarının uygulanacağı noktalara doğru grid sayısının artmasının çözüme daha çabuk yakınsamayı sağlaması şeklinde olmaktadır. Bu sebeple lineer grid dağılımı daha az tercih edilir. Bunun yanında lineer grid dağılımı kullanmak büyük bir hesaplama kolaylığı sağlamaktadır. Bu çalışmada bahsedilen bu hesaplama kolaylığından dolayı lineer grid dağılımı kullanılacaktır.

DK metodu önce bir boyutlu bir kiriş problemine uygulanarak nasıl çalıştığını ve yakınsadığı görülebilir ve daha sonra üç boyutlu problemimize uygulamasıyla arasındaki farklar tespit edilebilir.

3.2.2 DK metodunun bir boyutlu kiriş eğilme problemine uygulanması

Eğilme titreşimleri yapan bir kiriş için hareket denklemi aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \delta^2 w = 0 \tag{3.11}$$

Bu denklemde w düşey deplasmanı göstermektedir ve $\delta^2 = \rho A L^4 \omega^2 / EI$ şeklindedir. Burada ρA birim uzunluk başına kütle, L kiriş uzunluğu, EI eğilme rijitliği ve ω titreşim frekansı ve x boyutsuzlaştırılmış koordinattır.

Sınır şartları ise aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned}
&\textit{Serbest uç: } \frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0, \frac{d^3w}{dx^3}\Big|_{x=0} = 0 \ \textit{ve} \ \frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=1} = 0, \frac{d^3w}{dx^3}\Big|_{x=1} = 0 \\
&\textit{Basit mesnet: } w(0) = 0, \frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0 \ \textit{ve} \ w(1) = 0, \frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=1} = 0 \\
&\textit{Ankastre mesnet: } w(0) = 0, \frac{dw}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \ \textit{ve} \ w(1) = 0, \frac{dw}{dx}\Big|_{x=1} = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Düşey deplasmanın aşağıdaki şekilde olduğu kabul edilirse

$$w(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x) w(x_i) \tag{3.13}$$

Türevler alınıp denkleme ve sınır şartlarına uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^{(4)}(x) w(x_i) - \delta^2 \sum_{i=1}^{N} d_i(x) w(x_i) = 0$$

Serbest uç için:

$$\sum_{i=1}^{N} d_1^{(2)}(x) w(x_1) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_1^{(3)}(x) w(x_1) = 0 \ \textit{ve} \ \sum_{i=1}^{N} d_N^{(2)}(x) w(x_N) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_N^{(3)}(x) w(x_N) = 0 \tag{3.14}$$

Basit mesnetli uç için:

$$\sum_{i=1}^{N} d_1(x) w(x_1) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_1^{(2)}(x) w(x_1) = 0 \ \textit{ve} \ \sum_{i=1}^{N} d_N(x) w(x_N) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_N^{(2)}(x) w(x_N) = 0$$

Ankastre mesnetli uç için:

$$\sum_{i=1}^{N} d_1(x)w(x_1) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_1^{(1)}(x)w(x_1) = 0 \;\; ve \;\; \sum_{i=1}^{N} d_N(x)w(x_N) = 0, \sum_{i=1}^{N} d_N^{(1)}(x)w(x_N) = 0$$

Elde edilen denklemler,

$$[K]\{w\} = \delta^2 \{w\} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Formunda yazılıp, NxN boyutudaki $\left[K - \delta^2\right]$ matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmek suretiyle serbest titreşimlerin doğal frekansları elde edilmiş olur.

$$Det\left[K - \delta^2\right] = 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

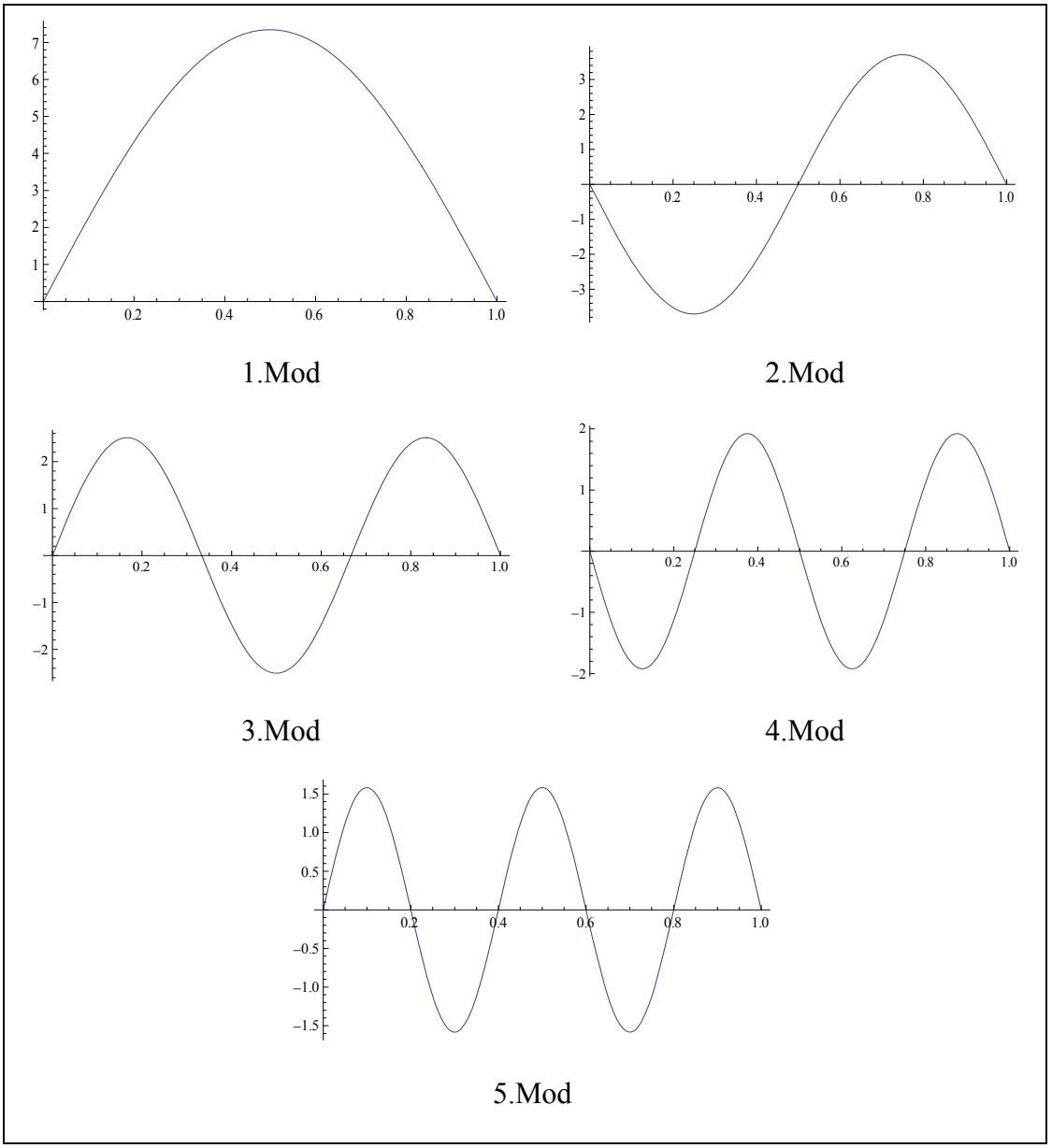
Bu ifadeler ve Ek1 de verilen Mathematica programı kullanılarak (nn düğüm sayısını göstermek üzere, "nn" yi değiştirerek ve ilgili satırlarda farklı sınır değeleri için farklı ifadeler yazılarak) N=5 ve N=40 arasında nokta alınarak problemin çözümü yapıldığında ilk beş doğal frekansla ilgili elde edilen sonuçlarla [1] de verilen sonuçların karşılaştırılması Çizelge 3.1 de gösterilmiştir. Çizelgelerde basit mesnet için "B", ankastre mesnet için "A" ve serbest uç için "S" kullanılmıştır.

Çizelge 3.1 : Kiriş eğilme titreşimleri doğal frekans çizelgesi.

		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
BB	**Kaynak[1]**	**9,8696**	**39,4784**	**88,8264**	**157,9137**	**246,7401**
	5 Nokta ile çözüm	8,7636				
	10 Nokta ile çözüm	9,8676	39,158			
	15 Nokta ile çözüm	9,8696	39,4778	88,7725	166,876	222,293
	20 Nokta ile çözüm	9,8696	39,4784	88,8263	157,906	247,94
	40 Nokta ile çözüm	9,8696	39,4784	88,8266	157,914	246,74
	referansa göre hata	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**
AA	**Kaynak[1]**	**22,3733**	**61,6728**	**120,9034**	**199,8594**	**298,5555**
	5 Nokta ile çözüm	19,5959				
	10 Nokta ile çözüm	22,3594	60,8338			
	15 Nokta ile çözüm	22,3733	61,6702	120,764	218,582	253,59
	20 Nokta ile çözüm	22,3733	61,6728	120,903	199,841	300,615
	40 Nokta ile çözüm	22,3733	61,6728	120,903	199,859	298,556
	referansa göre hata	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,00000**
AB	**Kaynak[1]**	**15,4182**	**49,9648**	**104,2477**	**178,2697**	**272,0310**
	5 Nokta ile çözüm	13,8564				
	10 Nokta ile çözüm	15,4104	49,6357			
	15 Nokta ile çözüm	15,4182	49,9631	104,205	196,461	223,893
	20 Nokta ile çözüm	15,4182	49,9649	104,247	178,265	273,973
	40 Nokta ile çözüm	15,4182	49,9649	104,248	178,27	272,031
	referansa göre hata	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**
AS	40 Nokta ile çözüm	3,616	22,0345	61,6972	120,902	199,86

Doğal frekanslar NxN boyutundaki $\left[K-\delta^2\right]$ matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmek suretiyle bulunduğundan ve bulunan doğal frekanslardan bazılarının kompleks çıkmasından dolayı N'in küçük değerleri için ilk beş doğal frekansın tamamı bulunamamaktadır. Referansa göre hatalar sıfır bulunmuştur ve elde edilen sonuçlar oldukça tatminkardır.

Örnek olarak iki ucu ankastre mesnetli kirişin serbest titreşimleri için mod şekilleri Şekil 3.1 de verilmektedir.



Şekil 3.1 : Kiriş mod şekilleri.

3.2.3 DK metodunun iki boyutlu plak titreşim problemine uygulanması

Titreşim hareketi yapan kare bir plak için de hareket denklemi aşağıdaki gibidir ve

$$\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}-\delta^2 w=0 \qquad \textbf{(3.17)}$$

bu denklemde w düşey deplasmanı göstermektedir ve $\delta^2=12\rho a^4\omega^2(1-\nu^2)/Eh^3$ şeklindedir. Burada yine a plağın kenar uzunluğu, E elastisite modülü, ν Poisson oranı, ρ yoğunluk, h plağın kalınlığı, ω doğal frekansı göstermektedir. "*x*" ve "*y*" boyutsuz koordinatlardır.

Sınır şartları ise aşağıdaki şekildedir;

Serbest uç:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{x=0}=0,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=0}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x=0}=0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=1}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{x=1}=0,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=1}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x=1}=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{y=0}=0,\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big|_{y=0}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\Big|_{y=0}=0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=1}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{y=1}=0,\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big|_{y=1}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\Big|_{y=1}=0$$

Basit mesnet: **(3.18)**

$$w(0,y)=0,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0 \text{ ve } w(1,y)=0,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=1}=0$$

$$w(x,0)=0,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0}=0 \text{ ve } w(x,1)=0,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=1}=0$$

Ankastre mesnet:

$$w(0,y)=0,\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \text{ ve } w(1,y)=0,\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=1}=0$$

$$w(x,0)=0,\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0}=0 \text{ ve } w(x,1)=0,\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=1}=0$$

Plak problemini incelerken elimizde "*x*" ve "*y*" olmak üzere iki adet değişken bulunmaktadır. Deplasmanlar bu iki adet bağımsız değişkenin fonksiyonudurlar.

Dolayısıyla DK metodunu plak problemine uygularken kiriş probleminde kullanılan formülasyon plak için yeterli olmamaktadır bu yüzden her iki değişkene göre türevleri yazabilmek için iki farklı ağırlık katsayısı tanımlamak gerekmektedir.

Problemin çözüleceği bölge *x* doğrultusunda N ve *y* doğrultusunda M grid noktası ile ifade edilirse ağırlık katsayıları aşağıda verilen ifade ile hesaplanabilir;

$$d_i(x) = \frac{K(x)}{K^{(1)}(x_i)(x - x_i)}$$
$$e_j(y) = \frac{L(y)}{L^{(1)}(y_i)(y - y_i)} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Burada geçen $K(x)$, $K^{(1)}(x_i), L(y)$ ve $L^{(1)}(y_i)$ ifadeleri Denlem (3.4) ve Denklem (3.5) e benzer şekilde yazılabilir.

$$K(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_N)$$

$$L(y) = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3).....(y - y_M)$$

$$K^{(1)}(x_i) = (x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_N) = \prod_{k=1k\neq i}^{N}(x_i - x_k) \qquad \textbf{(3.20)}$$

$$L^{(1)}(y_j) = (y_j - y_1)...(y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j-1})...(y_j - y_M) = \prod_{k=1k\neq j}^{M}(y_j - y_k)$$

düşey deplasmanın türevlerinin aşağıdaki şekilde olduğu kabul edilebilir.

$$\frac{d^n w}{dx^n} \approx \sum_{i=1}^{N} d_i^{(n)}(x) w(x_i, y)$$
$$\frac{d^m w}{dy^m} \approx \sum_{j=1}^{M} e_j^{(m)}(y) w(x, y_j) \qquad \textbf{(3.21)}$$
$$\frac{d^{n+m} w}{dx^n dy^m} \approx \sum_{i=1}^{N} d_i^{(n)}(x) \left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(m)}(y) w(x_i, y_j) \right)$$

$d_i^{(n)}(x)$ ve $e_j^{(m)}(y)$ ifadeleri yine Denklem (3.19) dan türev almak suretiyle elde edilebilir, bu türevler denkleme ve sınır şartlarına uygulanırsa,

Hareket denklemi:

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^{(4)}(x)w(x_i,y)+2\sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(x)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(y)w(x_i,y_j)\right)+\sum_{j=1}^{M} e_j^{(4)}(y)w(x,y_j)-\delta^2 w(x,y_j)=0$$

Serbest uç:

x=0 ve x=1 de $\sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(x)w(x_i,y)+\nu\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(y)w(x,y_j)=0$ *ve*

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^{(3)}(x)w(x_i,y)+(2-\nu)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(x)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(y)w(x_i,y_j)\right)=0$$

y=0 ve y=1 de $\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(y)w(x,y_j)+\nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(x)w(x_i,y)=0$ *ve*

$$\sum_{j=1}^{M} e_j^{(3)}(y)w(x,y_j)+(2-\nu)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(x)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(y)w(x_i,y_j)\right)=0 \qquad \textbf{(3.22)}$$

Basit mesnet:

x=0 ve x=1 de $w(x,y)=0,\ \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(x)w(x_i,y)=0$

y=0 ve y=1 de $w(x,y)=0,\ \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(y)w(x,y_j)=0$

Ankastre mesnet:

x=0 ve x=1 de $w(x,y)=0,\ \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(x)w(x_i,y)=0$

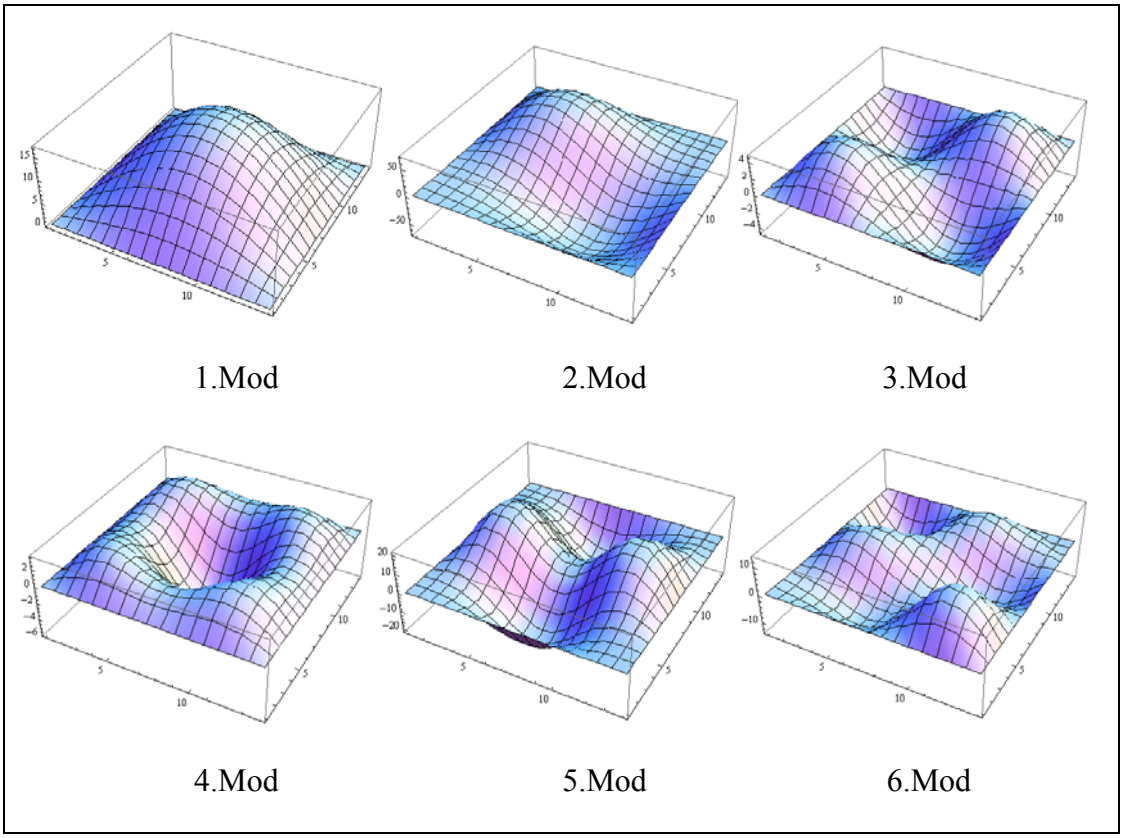
y=0 ve y=1 de $w(x,y)=0,\ \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(y)w(x,y_j)=0$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler ve Ek2 de verilen Mathematica programı kullanılarak (nn ve mm düğüm sayısını göstermek üzere, farklı grid sayıları girilerek ve ilgili satırlarda farklı sınır değeleri için farklı ifadeler yazılarak) problemin çözümü yapıldığında ilk beş doğal frekansla ilgili elde edilen sonuçlarla [1] de verilen sonuçların karşılaştırılması Çizelge 3.2 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2 : Plak titreşimleri doğal frekans çizelgesi.

		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
BBBB	**Kaynak[1]**	**19,7392**	**49,348**	**49,348**	**78,9568**	**98,696**
	8x8 Nokta ile çözüm	19,80405	53,17791	53,17791	71,06698	71,06981
	10x10 Nokta ile çözüm	19,73728	49,09605	49,09605	78,65416	209,23906
	14x14 Nokta ile çözüm	19,73920	49,34738	49,34738	78,95606	99,14795
	referansa göre hata	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0000**	**0,0046**
AAAA	**Kaynak[1]**	**35,9920**	**73,4130**	**73,4130**	**108,2700**	**131,6400**
	8x8 Nokta ile çözüm	36,59168	87,77218	87,77218	97,81437	98,18357
	10x10 Nokta ile çözüm	36,02065	72,99646	72,99646	108,34781	258,25996
	13x13 Nokta ile çözüm	35,98574	73,43916	73,43916	108,3393	132,964
	referansa göre hata	**0,0002**	**0,0004**	**0,0004**	**0,0006**	**0,0100**

Örnek olarak 4 tarafıda basit mesnetle mesnetlenmiş bir kare plak için bulunan doğal frekanslara karşılık gelen mod şekilleri Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2 : Plak mod şekilleri.

3.2.4 DK metodunun küresel kabuk titreşim problemine uygulanması

Küresel kabuğun serbest titreşimlerini incelerkende plak problemine benzer şekilde elimizde α ve β olmak üzere iki adet değişken bulunmaktadır. Dolayısıyla

deplasmanlar yine bu iki adet bağımsız değişkenin fonksiyonudurlar. Bu yüzden DK metodunu küresel kabuk problemine uygularken yine plak problemine benzer bir formülasyon kullanılabilir. Yalnız bu durumda elimizde plak probleminde olduğu gibi bir değil, beş adet bağımlı değişken bulunmaktadır.

Problemin çözüleceği bölge α doğrultusunda N ve β doğrultusunda M grid noktası ile ifade edilsin. x yerine α ve y yerine β alınmak suretiyle plak probleminde kullanılan ağırlık katsayıları küresel kabuk problemi içinde kullanılabilir,

$$d_i(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{K^{(1)}(\alpha_i)(\alpha - \alpha_i)}$$
$$e_j(\beta) = \frac{L(\beta)}{L^{(1)}(\beta_i)(\beta - \beta_i)} \qquad \textbf{(3.23)}$$

Burada geçen $K(\alpha)$, $K^{(1)}(\alpha_i)$, $L(\beta)$ ve $L^{(1)}(\beta_i)$ ifadeleri de yine plak problemine benzer şekilde yazılabilir.

$$K(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3).....(\alpha - \alpha_N)$$
$$L(\beta) = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)(\beta - \beta_3).....(\beta - \beta_M)$$
$$K^{(1)}(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)...(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})...(\alpha_i - \alpha_N) = \prod_{k=1 k\neq i}^{N} (\alpha_i - \alpha_k) \qquad \textbf{(3.24)}$$
$$L^{(1)}(\beta_j) = (\beta_j - \beta_1)...(\beta_j - \beta_{j-1})(\beta_j - \beta_{j-1})...(\beta_j - \beta_M) = \prod_{k=1 k\neq j}^{M} (\beta_j - \beta_k)$$

Yukarıda verilen ifadeler kullanılarak, deplasman ve rotasyon ifadeleri

$$\left[D\right] = \left[u \quad v \quad w \quad \theta_\alpha \quad \theta_\beta\right] \qquad \textbf{(3.25)}$$

olmak üzere deplasman ve rotasyonların türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\frac{d^n D}{d\alpha^n} \approx \sum_{i=1}^{N} d_i^{(n)}(\alpha) D(\alpha_i, \beta)$$
$$\frac{d^m D}{d\beta^m} \approx \sum_{j=1}^{M} e_j^{(m)}(\beta) D(\alpha, \beta_j) \qquad \textbf{(3.26)}$$
$$\frac{d^{n+m} D}{d\alpha^n d\beta^m} \approx \sum_{i=1}^{N} d_i^{(n)}(\alpha) \left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(m)}(\beta) D(\alpha_i, \beta_j) \right)$$

Deplasmanlar ve rotasyonlarla ilgili ifadeler izotropik ve FDM için sırasıyla Denklem (2.44) ve Denklem (2.58) de verilen hareket denklemleri ve Denklem (2.45) ve Denklem (2.46) de verilen sınır şartları ile uygunluk şartlarında yerine yazılırsa hareket denklemleri toplam sembolleri ile ifade edilmiş ve ayrıklaştırılmış olur.

3.2.4.1 İzotropik küresel kabuk

İzotropik küresel kabuk için ayrıklaştırılmış hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&(\frac{1}{12R^2\chi})(2R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)\theta_\alpha(i,j)+(-6K(1-\nu+2\nu\chi)\\
&+h(h^2+12R^2)\mu\chi\omega^2-12K\chi\cot^2\alpha_i)u(i,j)+6K((-3+\nu)\chi\cot\alpha_i\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)\\
&-(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(2)}(\beta)u(\alpha,\beta_j)-(-1+\nu)\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta)\\
&+\chi(2\cot\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)+(1+\nu)(2\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta)\\
&+\csc\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha_i,\beta_j)\right)+2\sum_{i=1}^{N}d_i^{(2)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))))=0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.27a)}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\frac{1}{12R^2\chi})(2R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)\theta_\beta(i,j)+(-6K(-1+\nu)(-1+\chi)\\
&+h(h^2+12R^2)\mu\chi\omega^2+6K(-1+\nu)\chi\cot^2\alpha_i)v(i,j)+6K(-(-3+\nu)\chi\cot\alpha_i\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j)\\
&+(1-\nu+2(1+\nu)\chi)\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j)+\chi(2\csc^2\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(2)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)\\
&-(-1+\nu)\cot\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)+(1+\nu)\csc\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha_i,\beta_j)\right)\\
&-(-1+\nu)\sum_{i=1}^{N}d_i^{(2)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta))))=0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.27b)}
$$

$$\frac{1}{2R^2}\csc\alpha_i\left(\frac{1}{6h(h^2+12R^2)}\mu\omega^2 w(i,j)\sin\alpha_i-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)(R\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j)\right.$$
$$-\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)+\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(2)}(\beta)w(\alpha,\beta_j)))-2K\sin\alpha_i(\nu u(i,j)\cot\alpha_i$$
$$+(1+\nu)w(i,j)+\nu\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))$$
$$-2K\sin\alpha_i(u(i,j)\cot\alpha_i+(1+\nu)w(i,j)+\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)+\nu\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)) \quad \textbf{(3.27c)}$$
$$-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)\cos\alpha_i(R\theta_\alpha(i,j)-u(i,j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta)))$$
$$-\frac{1}{\chi}(K(-1+\nu)\sin\alpha_i(R\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)-\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(2)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta))))=0$$

$$\frac{1}{240R^2\chi}((120KR^2(-1+\nu)-240D\nu\chi+h^3(3h^2+20R^2)\mu\chi\omega^2$$
$$-240D\chi\cot^2\alpha_i)\theta_\alpha(i,j)-40(R(3K(-1+\nu)-h^3\mu\chi\omega^2)u(i,j)$$
$$-3(D(-3+\nu)\chi\cot\alpha_i\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)-D(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(2)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) \quad \textbf{(3.27d)}$$
$$+KR(-1+\nu)\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta)+D\chi\csc\alpha_i(2\cos\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)$$
$$+(1+\nu)\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha_i,\beta_j)\right)+2\sin\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(2)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)))))=0$$

$$\frac{1}{240R^2\chi}((120(-1+\nu)(KR^2-2D\chi)+h^3(3h^2+20R^2)\mu\chi\omega^2$$
$$+120D(-1+\nu)\chi\csc^2\alpha_i)\theta_\beta(i,j)+40(R(-3K(-1+\nu)+h^3\mu\chi\omega^2)v(i,j)$$
$$+3(-D(-3+\nu)\chi\cot\alpha_i\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j)+KR(-1+\nu)\csc\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) \quad \textbf{(3.27e)}$$
$$+D\chi(2\csc^2\alpha_i\sum_{j=1}^{M}e_j^{(2)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)-(-1+\nu)\cot\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta)$$
$$+(1+\nu)\csc\alpha_i\sum_{i=1}^{N}d_i^{(n)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(m)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta_j)\right)-(-1+\nu)\sum_{i=1}^{N}d_i^{(2)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta)))))=0$$

Benzer şekilde sınır şartları da ayrıklaştırılabilir.

Ankastre bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de* *ve* $\beta = 0, \beta_0$ *da*

$$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\alpha(i,j) = 0, \theta_\beta(i,j) = 0 \quad \textbf{(3.28a)}$$

Basit mesnetli bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de*

$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\beta(i,j) = 0$ *ve*

$$M_\alpha = \frac{D}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + \frac{\nu}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \nu\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j)\right) = 0$$

$\beta = 0, \beta_0$ *de* **(3.28b)**

$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\alpha(i,j) = 0$ *ve*

$$M_\beta = \frac{D}{R}\left(\frac{1}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j) + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)\right) = 0$$

Serbest bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de*

$$N_\alpha = \frac{K}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + w(i,j) + \frac{\nu}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + w(i,j)\sin\alpha_i\right) = 0$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{K}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + w(i,j) + \frac{\nu}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + w(i,j)\sin\alpha_i\right) = 0 \quad \textbf{(3.28c)}$$

$$Q_\alpha = \frac{K(1-\nu)}{2\chi}\left(\frac{1}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta) - u\right) + \theta_\alpha(i,j)\right) = 0$$

$$M_\alpha = \frac{D}{R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + \frac{\nu}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \nu\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j)\right) = 0$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{D(1-\nu)}{2R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) - \theta_\beta(i,j)\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\right) = 0$$

$\beta = 0, \beta_0$ *da*

$$N_\beta = \frac{K}{R}(u(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i} + \frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + (1+\nu)w(i,j)) = 0$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{K(1-\nu)}{2R}(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i}) = 0$$

$$Q_\beta = \frac{K(1-\nu)}{2\chi}(\frac{1}{Rsin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) - v(i,j)sin\alpha_i) + \theta_\beta(i,j)) = 0$$

$$M_\beta = \frac{D}{R}(\frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j) + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)) = 0$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{D(1-\nu)}{2R}(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) - \theta_\beta(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i}) = 0$$

Aynı zamanda yapının sürekli olduğu durumlarda yani $\beta = 2\pi$ olması durumunda aşağıdaki ayrıklaştırılmış kinematik ve fiziksel uygunluk şartlarıda sağlanmalıdır.

$$u(\alpha_i,0) = u(\alpha_i,2\pi), v(\alpha_i,0) = v(\alpha_i,2\pi), w(\alpha_i,0) = w(\alpha_i,2\pi)$$
$$\theta_\alpha(\alpha_i,0) = \theta_\alpha(\alpha_i,2\pi), \theta_\beta(\alpha_i,0) = \theta_\beta(\alpha_i,2\pi)$$

$$\frac{K}{R}(u(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i} + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)\frac{1}{sin\alpha_i} + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + (1+\nu)w(i,j))(\alpha,0)$$
$$= \frac{K}{R}(u(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i} + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)\frac{1}{sin\alpha_i} + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + (1+\nu)w(i,j))(\alpha,2\pi)$$

$$\frac{K(1-\nu)}{2R}(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i})(\varphi,0)$$
$$= \frac{K(1-\nu)}{2R}(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i})(\alpha,2\pi) \qquad \textbf{(3.29)}$$
$$\frac{K(1-\nu)}{2\chi}(\frac{1}{Rsin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) - v(i,j)sin\alpha_i) + \theta_\beta(i,j))(\alpha,0)$$
$$= \frac{K(1-\nu)}{2\chi}(\frac{1}{Rsin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) - v(i,j)sin\alpha_i) + \theta_\beta(i,j))(\alpha,2\pi)$$

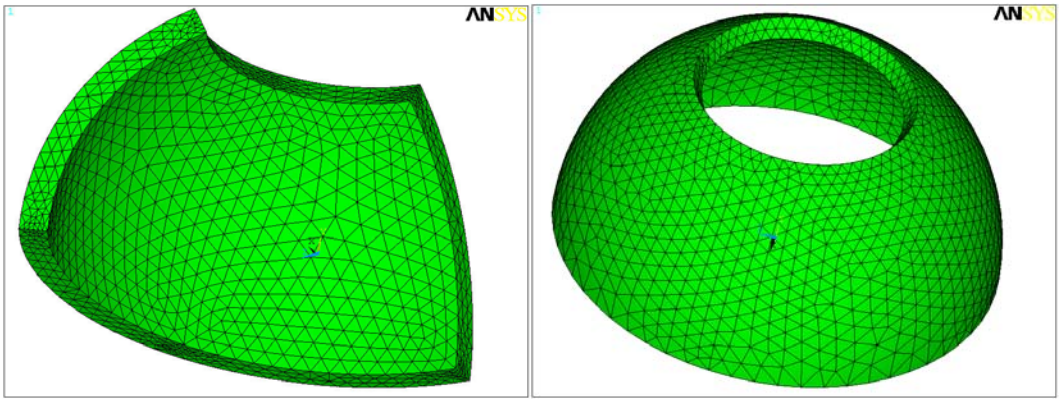
$$\frac{D}{R}(\frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j) + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta))(\alpha,0)$$
$$= \frac{D}{R}(\frac{1}{sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j) + \frac{cos\alpha_i}{sin\alpha_i}\theta_\alpha(i,j) + \nu\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta))(\alpha,2\pi)$$

$$\frac{D(1-\nu)}{2R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta)+\frac{1}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j)-\theta_\beta(i,j)\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\right)(\alpha,0)$$

$$=\frac{D(1-\nu)}{2R}\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta)+\frac{1}{\sin\alpha_i}\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j)-\theta_\beta(i,j)\frac{\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}\right)(\alpha,2\pi)$$

İzotropik malzeme için denklemler verildikten sonra şimdi örnek problemler çözülebilir. Örnek problem olarak orta yüzeyinin çapı 1m olan, 0.1m kalınlığında çelik bir küresel kabuk parçası iki farklı model ve değişik sınır şartları için incelenecektir. 1.Model olarak $\beta = 2\pi/3, \varphi_0 = \pi/6, \varphi_1 = \pi/2$ açılarıyla sınırlanmış bir küresel kabuk, 2. Model olarak ise $\beta = 2\pi, \varphi_0 = \pi/6, \varphi_1 = \pi/2$ açılarıyla sınırlandırılmış bir küresel kabuk kullanılacaktır. 1.Model $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \beta = 0, \beta = 2\pi/3$ de ankastre sınır şartları için ve $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$ da serbest $\beta = 0, \beta = 2\pi/3$ de ankastre sınır şartları için çözülecek. 2.Model ise $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$ da ankastre sınır şartları için çözülecektir. Tüm bu durumlar için serbest titreşimlerinin doğal frekansları elde edilecektir.
Çelik için Elastisite modülü 210Gpa, yoğunluk 7800 kg/m³ ve poisson oranı 0.3 olarak alınmıştır.

İzotropik malzeme için yukarıda elde edilen formülasyon ve denklemler bir Mathematica koduna aktarılmıştır. Programda öncelikle problemi oluşturan parametreler yazılmıştır. Sonraki aşamada bu parametreler ile yüzeyi temsil edecek grid noktaları tanımlanmıştır. Tanımlanan bu noktalar için ağırlık katsayıları ifade edilmiştir. Ağırlık katsayılarının elde edilmesinden sonra hareket denklemlerinde geçen türevler bu katsayılar kullanarak yazılmış ve daha sonrada hareket denklemleri ve sınır şartları bu türevler kullanılarak yazılmıştır. Denklemlerin ve bilinmeyenlerin tamamı birer diziye aktarılmış ve "Coefficient" komutu ile bu değişkenlere göre bir doğal frekanslarında içinde bulunduğu bir katsayılar matrisi elde edilmiş ve "Eigenvalues" komutu doğal frekanslar tespit edilmiştir. Problemin çözümünde kullanılan ve yukarıda özetlenen program Ek 3 te verilmektedir. Bu program vasıtasıyla ilk 10 doğal frekans hesaplanmıştır. Elde edilen doğal frekansların değerlendirilebilmesi için problem ANSYS kullanılarakta çözülmüştür. ANSYS çözümü için üç boyutlu, 20 nodlu, katı bir yapısal eleman olan SOLID95 elemanı kullanılmıştır. Oluşturulan modeller Şekil 3.3 te gösterilmiştir.



1. Model 2.Model

Şekil 3.3 : ANSYS modeli.

Her iki yolla elde edilen sonuçlar Çizelge 3.3, Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5 te verilmektedir.

Çizelge 3.3 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi.

ÇELİK (1.Model, AAAA)								
		DKM						
MOD	ANSYS	4x4 Nokta	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	% HATA
1	1127.1848	1915.68	1181.14	1127.69	1126.72	1126.71	1126.71	0.04
2	1183.684	2014.35	1253.80	1185.97	1182.26	1182.26	1182.26	0.12
3	1405.3659	2460.4	1455.08	1407.15	1399.63	1399.17	1399.15	0.44
4	1435.4443	2506.93	1670.05	1478.20	1432.05	1430.91	1430.88	0.32
5	1646.2138	2850.97	2129.81	1639.91	1638.30	1638.07	1638.07	0.49
6	1691.1966	3035.83	2494.35	1803.82	1688.47	1682.83	1682.54	0.51
7	1970.463	3099.79	2733.42	1993.34	1958.41	1957.88	1957.87	0.64
8	2153.5163	3099.79	2815.91	2200.46	2153.73	2147.90	2147.31	0.29
9	2183.1483	3635.22	3139.32	2444.82	2364.90	2184.21	2166.34	0.77
10	2398.0158	4178.9	3336.60	2489.70	2377.41	2378.11	2377.92	0.84

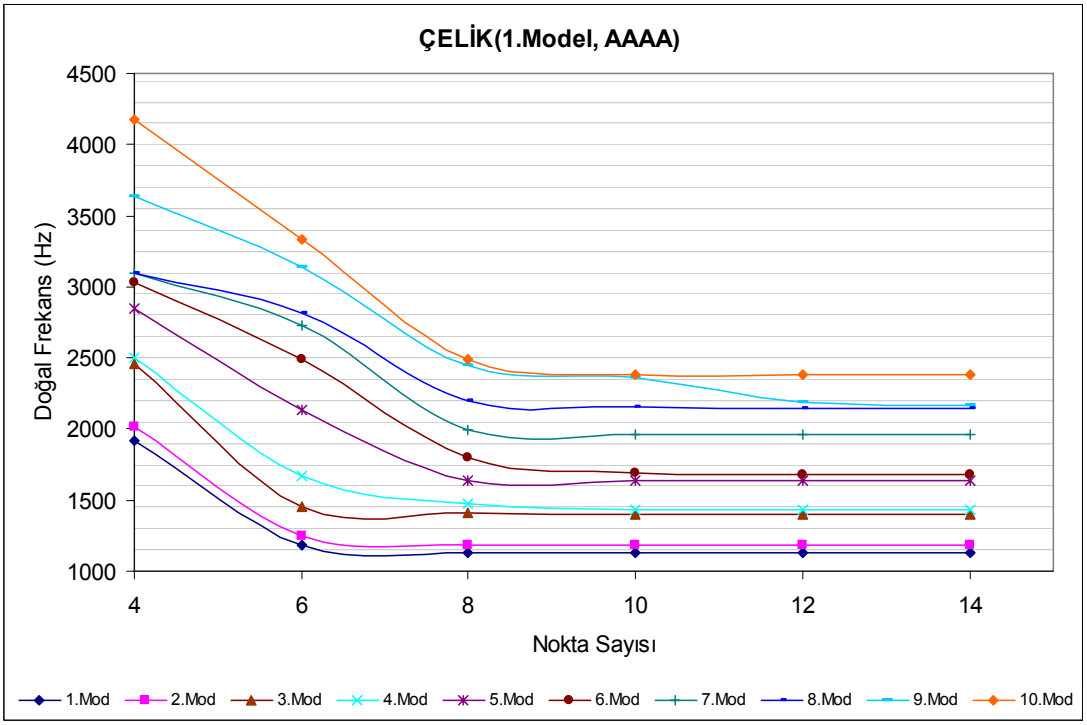
Çizelge 3.4 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi.

ÇELİK (1.Model-AASS)								
		DKM						
MOD	ANSYS	4x4 Nokta	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	% HATA
1	402.2506	720.876	480.96	408.36	403.36	402.74	402.69	0.11
2	466.1595	1030.61	575.27	478.39	471.88	470.81	470.68	0.96
3	761.4832	1209.91	815.69	786.49	763.59	761.97	761.77	0.04
4	852.495	1329.57	936.91	880.73	869.72	867.46	867.21	1.70
5	885.4623	1392.25	1010.68	929.48	877.72	877.42	877.41	0.92
6	1019.766	1684.77	1093.87	1020.24	1021.22	1021.31	1021.30	0.15
7	1052.879	1880.45	1218.22	1059.63	1057.85	1057.89	1057.81	0.47
8	1098.989	2429.2	1400.97	1260.66	1114.14	1105.57	1104.68	0.52
9	1317.138	2696.2	1590.89	1288.59	1290.91	1291.12	1291.02	2.02
10	1415.68	3084.19	1595.17	1403.79	1388.63	1387.12	1386.82	2.08

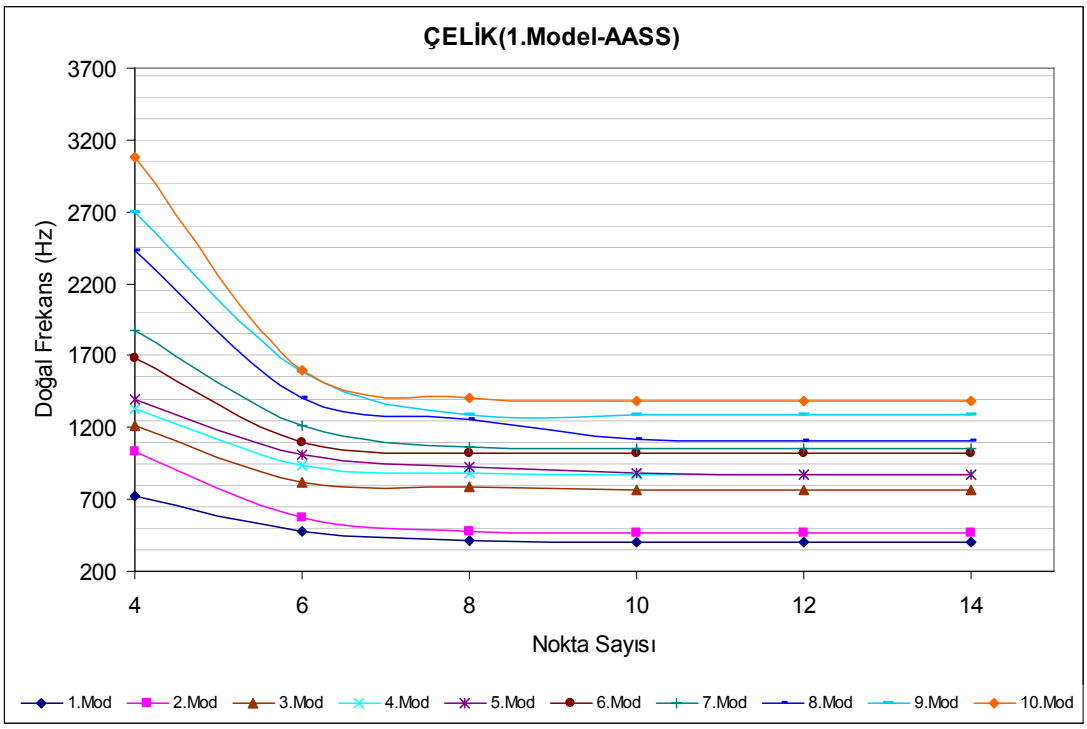
Çizelge 3.5 : Çelik küresel kabuk titreşimleri doğal frekans çizelgesi.

ÇELİK (2.Model-AA)								
		DKM						
MOD	ANSYS	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	16x16 Nokta	% HATA
1	1021.536	1120.14	1025.90	1018.84	1018.19	1018.31	1018.30	0.32
2	1021.735	1120.14	1041.87	1019.40	1018.26	1018.32	1018.30	0.34
3	1040.058	1303.5	1105.79	1094.73	1047.68	1035.64	1036.24	0.37
4	1040.105	1388.74	1106.17	1105.72	1050.87	1035.68	1036.28	0.37
5	1108.57	1388.74	1273.16	1105.84	1105.74	1105.74	1105.74	0.26
6	1108.601	1394.48	1345.43	1114.67	1105.74	1105.74	1105.74	0.26
7	1141.701	1431.06	1345.57	1272.76	1272.76	1186.51	1137.37	0.38
8	1141.98	1729.32	1346.31	1345.14	1296.66	1195.83	1137.87	0.36
9	1283.923	1808.06	1431.26	1345.15	1345.15	1272.76	1272.76	0.87
10	1318.324	1864.17	1440.60	1345.98	1345.15	1345.15	1345.15	2.03

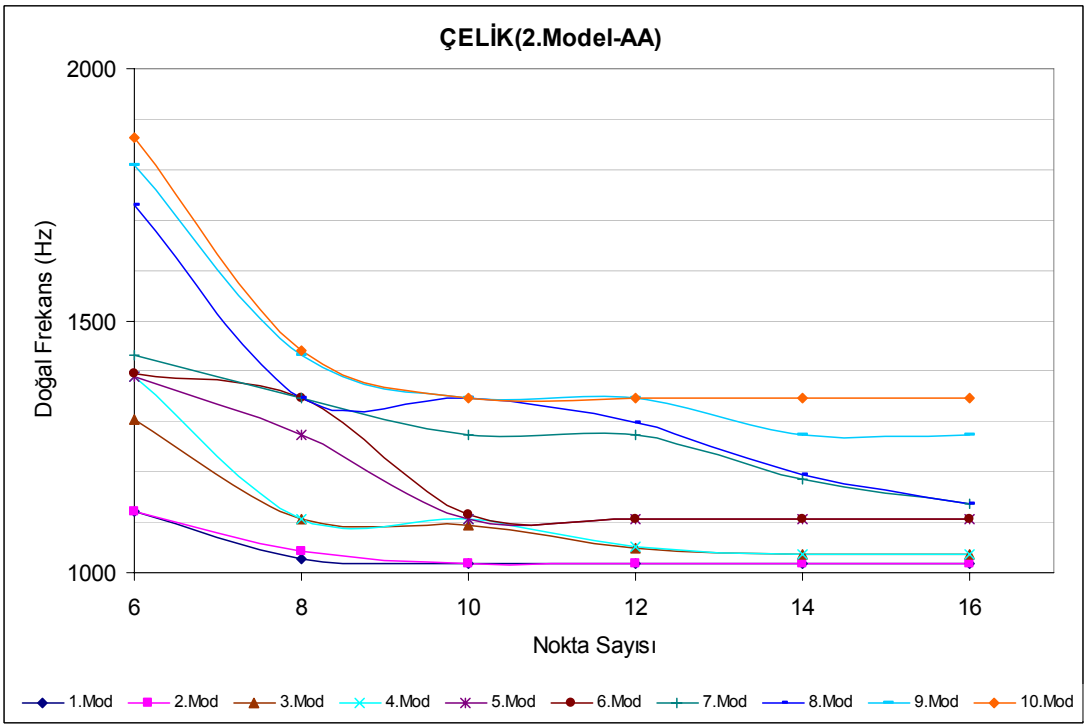
Doğal frekansların alınan nokta sayısı ile değişim grafiği Şekil 3.4-6 da gösterilmektedir. Çizelge 3.3-5 ten ve grafiklerden görüleceği gibi modlarda 8 nokta dan sonra ciddi bir yakınsama sağlanmaktadır ve 12 noktadan sonra hata 1/100 lerin altına düşmektedir. Örneğin birinci mod için hata 4/10000 mertebesindedir. Elde edilen sonuçlar oldukça tatminkar görünmektedir.



Şekil 3.4 : Çelik doğal frekans grafiği.

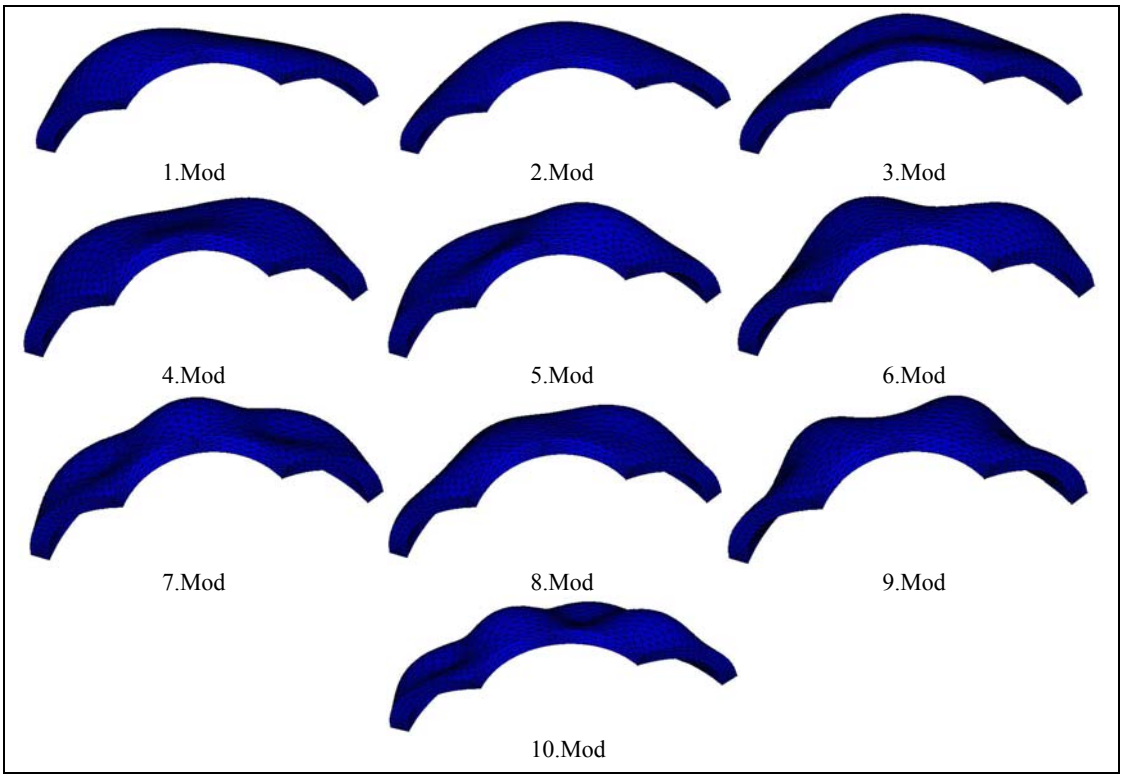


Şekil 3.5 : Çelik doğal frekans grafiği.



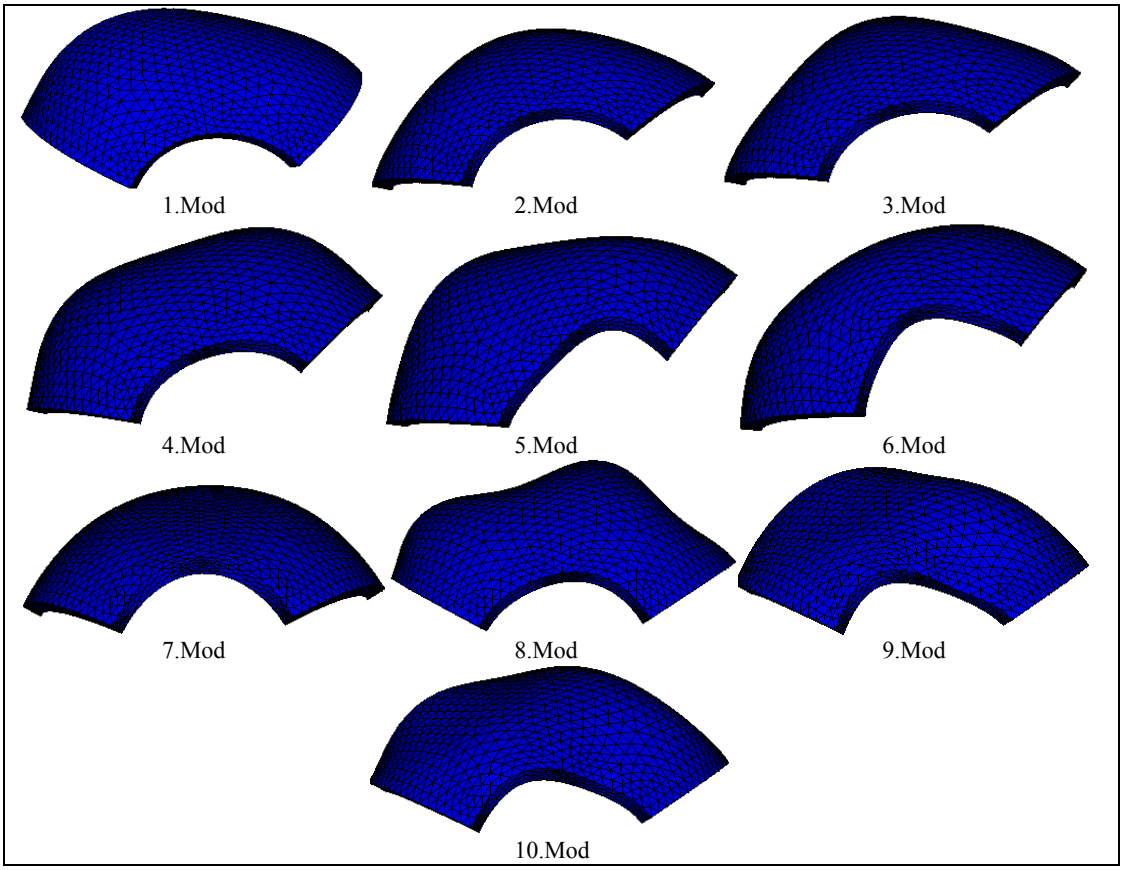
Şekil 3.6 : Çelik doğal frekans grafiği.

Model-1 ve AAAA sınır şartları için ilk 10 mod şekli Şekil 3.7 te verilmiştir.



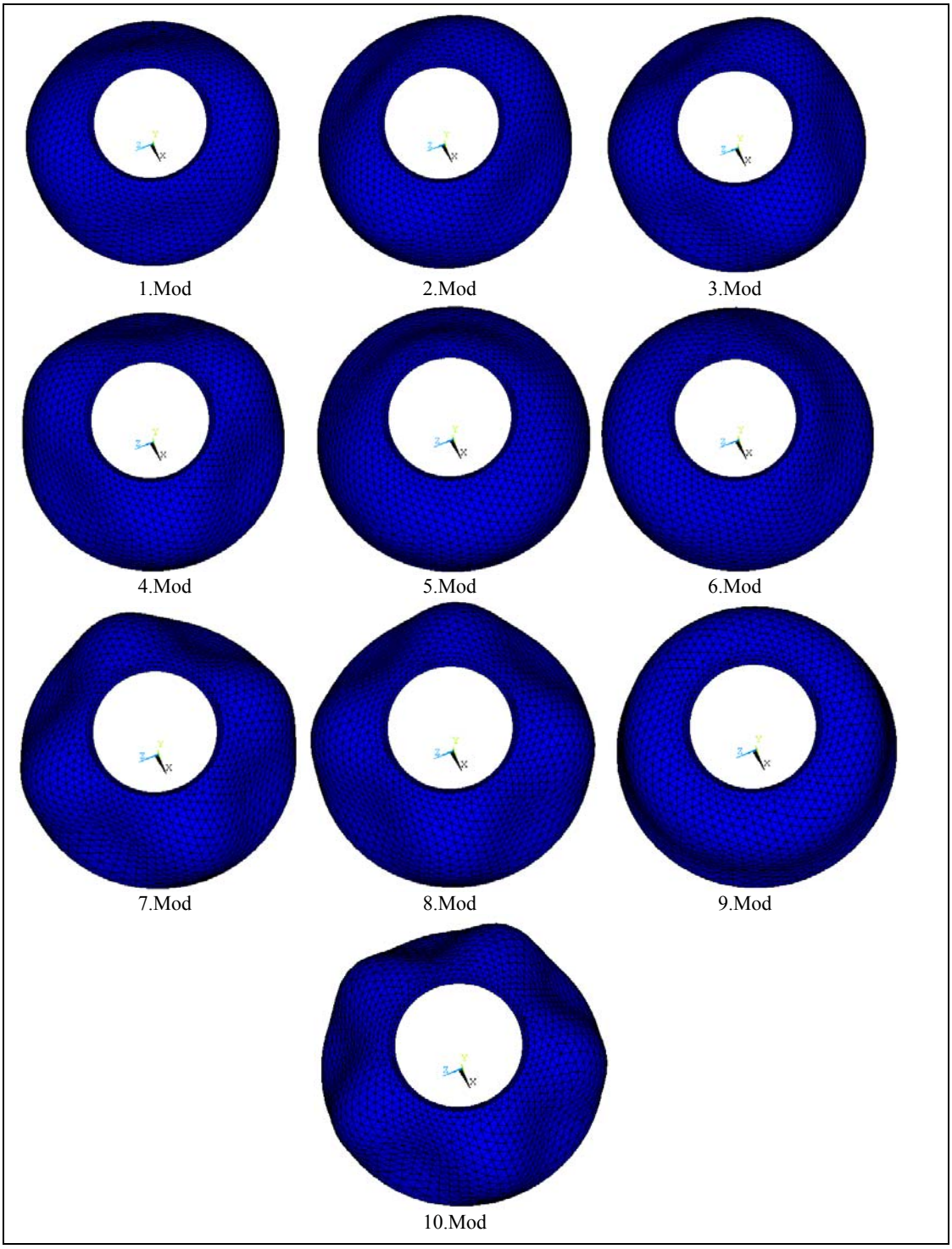
Şekil 3.7 : Çelik mod şekilleri.

Model-1 ve AASS sınır şartları için ilk 10 mod şekli Şekil 3.8 de verilmiştir.



Şekil 3.8 : Çelik mod şekilleri.

Model-2 ve AA sınır şartları için ilk 10 mod şekli Şekil 3.9 da verilmiştir.



Şekil 3.9 : Çelik mod şekilleri.

3.2.4.2 FDM küresel kabuk

FDM küresel kabuk için ayrıklaştırılmış hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&(-K_2 csc\alpha_i + (K_2 - K_4 + R(K_{10} + R\omega^2 I_1))sin\alpha_i)\theta_\alpha(i,j) - u(i,j)K_1 cos\alpha_i cot\alpha_i \\
&-(K_2 + K_8)cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j) - K_1 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) \\
&-K_7 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + K_8 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) \\
&+K_7 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) + K_2 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) \\
&+K_1 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) + (K_4 + K_8)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha_i,\beta_j)\right) \\
&+(K_3 + K_7)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha_i,\beta_j)\right) + sin\alpha_i(-(K_{10} + K_3 - u(i,j)R^2\omega^2 I_0) \\
&+(K_1 + K_{10} + K_3)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta) + K_2 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + K_1 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))
\end{aligned}
\tag{3.30a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-K_8 csc\alpha_i + (2K_8 + R(K_{10} + RI_1))sin\alpha_i)\theta_\beta(i,j) + (-K_7 csc\alpha_i + (-K_{10} + 2K_7 \\
&+R^2\omega^2 I_0)sin\alpha_i)v(i,j) + (K_2 + K_8)cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) + K_1 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) \\
&+K_1 \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) + (K_{10} + K_3)\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) + K_2 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j) \\
&+K_1 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + K_8 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta) \\
&+(K_4 + K_8)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta_j)\right) + K_3 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha_i,\beta_j)\right) \\
&+K_8 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + K_7(cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) + cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta) \\
&+\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha_i,\beta_j)\right) + sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)) = 0
\end{aligned}
\tag{3.30b}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(-2(K_2 + K_4 - K_{10}R)\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j) - 2(K_1 + K_{10} + K_3)\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) \\
&+K_{10} cot(\frac{\alpha_i}{2})\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) + K_{10} tan(\frac{\alpha_i}{2})\sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) \\
&-2cos\alpha_i((K_2 + K_4 - K_{10}R)\theta_\alpha(i,j) + u(i,j)(K_1 + K_{10} + K_3) - K_{10}\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta)) \\
&-2sin\alpha_i((2(K_1 + K_3) - R^2\omega^2 I_0)w(i,j) + (K_2 + K_4 - K_{10}R)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) \\
&+(K_1 + K_{10} + K_3)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) - K_{10}\sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta))) = 0
\end{aligned}
\tag{3.30c}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(K_5 cos\alpha_i cot\alpha_i + (K_6 + R^2(K_{10} - \omega^2 I_2))sin\alpha_i)\theta_\alpha(i,j) - u(i,j)K_2 csc\alpha_i \\
&+(K_2 - K_4 + R(K_{10} + R\omega^2 I_1))u(i,j)sin\alpha_i - (K_5 + K_9)cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j) \\
&-K_2 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) - K_8 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) + K_9 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) \\
&+K_8 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) + K_5 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\alpha(\alpha_i,\beta) + K_2 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) \\
&+K_2 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta) + K_4 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta) - K_{10} R sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)w(\alpha_i,\beta) \qquad \textbf{(3.30d)} \\
&+(K_6 + K_9)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha_i,\beta_j)\right) + K_4 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha_i,\beta_j)\right) \\
&+K_8 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha_i,\beta_j)\right) + K_5 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)\theta\alpha(\alpha_i,\beta) \\
&+K_2 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-K_9 csc\alpha_i + (2K_9 + R^2(-K_{10} + \omega^2 I_2))sin\alpha_i)\theta_\beta(i,j) + (-K_8 csc\alpha_i \\
&+(2K_8 + R(K_{10} + R\omega^2 I_1))sin\alpha_i)v(i,j) + (K_5 + K_9)cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j) \\
&+K_2 cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) + K_2 \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) + K_4 \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) \\
&-K_{10} R \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j) + K_5 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j) + K_2 csc\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(2)}(\beta)v(\alpha,\beta_j) \\
&+K_9 cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + (K_6 + K_9)\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta_j)\right) \qquad \textbf{(3.30e)} \\
&+K_4 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha_i,\beta_j)\right) + K_9 sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) \\
&+K_8 (cot\alpha_i \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j) + cos\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha_i,\beta_j)\right) \\
&+sin\alpha_i \sum_{i=1}^{N} d_i^{(2)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)) = 0
\end{aligned}
$$

FDM için ayrıklaştırılmış sınır şartları;

Ankastre bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de* *ve* $\beta = 0, \beta_0$ *da*

$$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\alpha(i,j) = 0, \theta_\beta(i,j) = 0 \quad \textbf{(3.31a)}$$

Basit mesnetli bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de*

$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\beta(i,j) = 0$ *ve*

$$M_\alpha = \frac{1}{R}(K_6 \frac{1}{sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)) + K_4 \frac{1}{sin\alpha_i}(u(i,j)cos\alpha_i + w(i,j)sin\alpha_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)) + K_5 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + K_2(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))) = 0 \quad \textbf{(3.31b)}$$

$\beta = 0, \beta_0$ *de*

$u(i,j) = 0, v(i,j) = 0, w(i,j) = 0, \theta_\alpha(i,j) = 0$ *ve*

$$M_\beta = \frac{1}{R}(K_5 \frac{1}{sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j)) + K_2 \frac{1}{sin\alpha_i}(u(i,j)cos\alpha_i + w(i,j)sin\alpha_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)) + K_6 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + K_4(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))) = 0$$

Serbest bir kenar için:

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ *de*

$$N_\alpha = \frac{1}{R}(K_4 \frac{1}{sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)) + K_3 \frac{1}{sin\alpha_i}(u(i,j)cos\alpha_i + w(i,j)sin\alpha_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j)) + K_2 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta) + K_1(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta))) = 0 \quad \textbf{(3.31c)}$$
$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{1}{R}(K_8(\frac{1}{sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j)) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta))$$
$$+ K_7(\frac{1}{sin\alpha_i}(-v(i,j)cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j)) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta))) = 0$$

$$Q_\alpha = K_{10}(\frac{1}{R}(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) w(\alpha_i,\beta) - u(i,j)) + \theta_\alpha(i,j)) = 0$$

$$M_\alpha = \frac{1}{R}(K_6 \frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)) + K_4 \frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i + w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) v(\alpha,\beta_j)) + K_5 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\alpha(\alpha_i,\beta) + K_2(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) u(\alpha_i,\beta))) = 0$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{1}{R}(K_8(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) v(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) u(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\cos\alpha_i))$$

$$+K_9(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\alpha(\alpha,\beta_j) - \theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i))) = 0$$

$\beta = 0, \beta_0$ *da*

$$N_\beta = \frac{1}{R}((K_2 \frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)) + K_1 \frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i + w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) v(\alpha,\beta_j)) + K_4 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\alpha(\alpha_i,\beta) + K_3(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) u(\alpha_i,\beta))) = 0$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{1}{R}(K_8(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\alpha(\alpha,\beta_j)) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta))$$

$$+K_7(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-v(i,j)\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) u(\alpha,\beta_j)) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) v(\alpha_i,\beta))) = 0$$

$$Q_\beta = K_{10}(\frac{1}{R\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) w(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\sin\alpha_i) + \theta_\beta(i,j)) = 0$$

$$M_\beta = \frac{1}{R}(K_5 \frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j)) + K_2 \frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i + w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) v(\alpha,\beta_j)) + K_6 \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\alpha(\alpha_i,\beta) + K_4(w(i,j) + \sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) u(\alpha_i,\beta))) = 0$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{1}{R}(K_8(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha) v(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta) u(\alpha,\beta_j) - v(i,j)\cos\alpha_i))$$

$$+K_9(\sum_{i=1}^{N} d_i^{(1)}(\alpha)\theta\beta(\alpha_i,\beta) + \frac{1}{\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M} e_j^{(1)}(\beta)\theta\alpha(\alpha,\beta_j) - \theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i))) = 0$$

kinematik ve fiziksel uygunluk şartları;

$$u(\alpha_i,0) = u(\alpha_i,2\pi), v(\alpha_i,0) = v(\alpha_i,2\pi), w(\alpha_i,0) = w(\alpha_i,2\pi)$$
$$\theta_\alpha(\alpha_i,0) = \theta_\alpha(\alpha_i,2\pi), \theta_\beta(\alpha_i,0) = \theta_\beta(\alpha_i,2\pi) \qquad \textbf{(3.32)}$$

$$\frac{1}{R}((K_2\frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j))+K_1\frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i+w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j))+K_4\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)+K_3(w(i,j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)))(\alpha,0)$$

$$=\frac{1}{R}((K_2\frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta\beta(\alpha,\beta_j))+K_1\frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i+w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j))+K_4\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)+K_3(w(i,j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)))$$

$$\frac{1}{R}(K_8(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta))$$

$$+K_7(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-v(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)))(\varphi,0)$$

$$=\frac{1}{R}(K_8(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta))$$

$$+K_7(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-v(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)))(\alpha,2\pi)$$

$$K_{10}(\frac{1}{R\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j)-v(i,j)\sin\alpha_i)+\theta_\beta(i,j))(\alpha,0)$$

$$=K_{10}(\frac{1}{R\sin\alpha_i}(\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)w(\alpha,\beta_j)-v(i,j)\sin\alpha_i)+\theta_\beta(i,j))(\alpha,2\pi)$$

$$\frac{1}{R}(K_5\frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j))+K_2\frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i+w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j))+K_6\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)+K_4(w(i,j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)))(\alpha,0)$$

$$=\frac{1}{R}(K_5\frac{1}{\sin\alpha_i}(\theta_\alpha(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\beta(\alpha,\beta_j))+K_2\frac{1}{\sin\alpha_i}(u(i,j)\cos\alpha_i+w(i,j)\sin\alpha_i$$

$$+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)v(\alpha,\beta_j))+K_6\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\alpha(\alpha_i,\beta)+K_4(w(i,j)+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)u(\alpha_i,\beta)))(\alpha,2\pi)$$

$$\frac{1}{R}(K_9(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta))$$

$$+K_8(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-v(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)))(\alpha,0)$$

$$=\frac{1}{R}(K_9(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-\theta_\beta(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)\theta_\alpha(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)\theta_\beta(\alpha_i,\beta))$$

$$+K_8(\frac{1}{\sin\alpha_i}(-v(i,j)\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{M}e_j^{(1)}(\beta)u(\alpha,\beta_j))+\sum_{i=1}^{N}d_i^{(1)}(\alpha)v(\alpha_i,\beta)))(\alpha,2\pi)$$

FDM için de denklemler verildikten sonra şimdi örnek bir problemler çözülebilir. Örnek problem olarak yine izotropik malzeme için ullanılan 1. ve 2. Modeller kullanılacak ve farklı sınır şartları için çözümler elde edilcektir fakat bu sefer iki farklı FDM model kullanılacaktır. Bunlardan birincisi Alüminyum (metal) – Alümina (seramik) malzemedir diğeri ise Alüminyum (metal) – Zirconia (seramik) malzemedir. Ayrıca FDM ile ilgili numerik çalışmalar yapılırken alüminyum, alümina ve zirkonia içinde izotropik malzeme çözümleri çizelgelerde karşımıza çıkacaktır. Küresel kabuk parçası yine $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \beta = 0, \beta = 2\pi / 3$ de ankastre ve $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$ de ankastre sınır şartları için incelenecek ve serbest titreşimlerinin doğal frekansları elde edilecektir. Malzeme özellikleri Çizelge 3.6 da verilmektedir.

Çizelge 3.6 : Malzeme özellikleri çizelgesi.

Malzeme	E (Gpa)	ν	ρ (kg/m³)
Alüminyum (metal)	70	0.3	2707
Alümina (seramik)	380	0.3	3000
Zirconia (seramik)	168	0.3	5700

FDM malzeme için kullanılan Mathematica kodu Ek4 te verilmektedir. FDM içinde izotropik malzemede olduğu gibi ilk 10 doğal frekans incelenecektir ve sonuçlar yine ANSYS ile karşılaştırılacaktır. Malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca sürekli bir fonksiyona göre değiştiği FDM küresel kabuk incelenirken, ANSYS çözümü için, üç boyutlu, 20 nodlu, katmanlı, her bir katmanı kendi içinde izotropik, katı bir yapısal eleman olan SOLID191 elemanı kullanılacaktır. SOLID191 elemanı SOLID95 elemanının katmanlı versiyonu olup katman sayısını arttırdıkça FDM özelliklerine yakınsanabilmesi mümkündür.

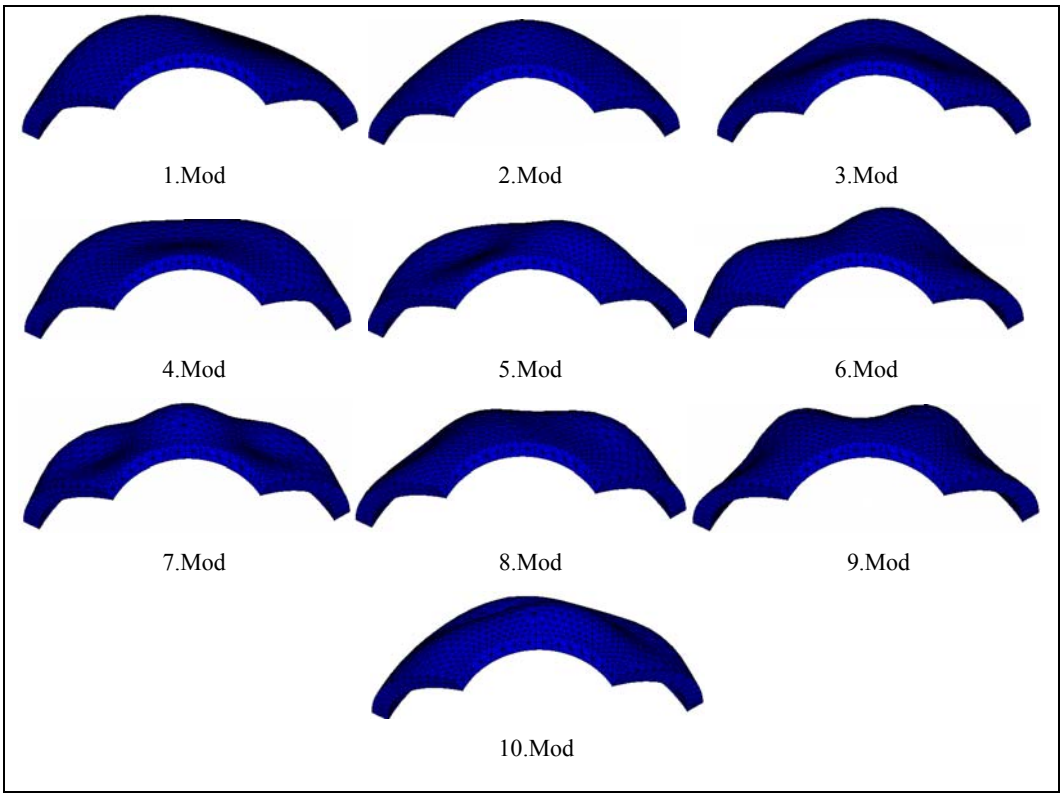
Elde edilen formülasyon ve Mathematica kodu ile n=1 değeri için (bu durumda malzeme özellikleri lineer değişir) 6x6 noktadan dan 16x16 noktaya kadar sonuçlar bulunmuş ve bulunan sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir.

Aüminyum-Zirkonia için elde edilen sonuçlar aşağıdaki figür ve çizelgelerde verilmektedir.

Çizelge 3.7 : Alüminyum-Zirkonia FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları.

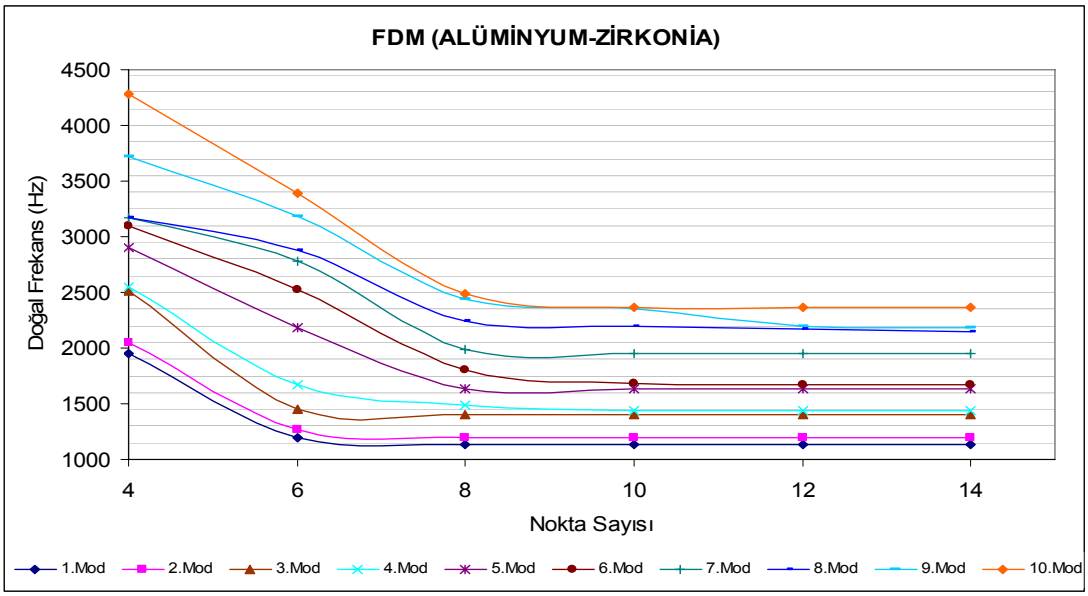
ALÜMİNYUM-ZİRKONİA (n=1, 1.Model, AAAA)								
		DKM						
MOD	ANSYS	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	16x16 Nokta	% HATA
1	1130.65	1950.78	1189.55	1133.57	1132.46	1132.45	1132.45	0.16
2	1185.965	2054.57	1269.68	1194.79	1190.31	1190.29	1190.29	0.36
3	1410.314	2517.66	1457.28	1407.10	1400.33	1399.90	1399.89	0.74
4	1440.889	2554.71	1669.52	1482.87	1435.41	1434.09	1434.05	0.47
5	1653.958	2908.34	2181.10	1636.99	1635.41	1635.16	1635.15	1.14
6	1698.817	3097.43	2527.99	1805.39	1681.59	1675.31	1675.01	1.40
7	1980.295	3169.72	2781.85	1985.33	1949.52	1948.98	1948.96	1.58
8	2156.713	3169.72	2875.34	2243.03	2196.74	2169.37	2151.00	0.26
9	2193.738	3722.55	3183.52	2436.90	2358.83	2189.56	2188.78	0.23
10	2409.974	4284.16	3394.21	2489.99	2364.01	2364.27	2364.06	1.91

ALÜMİNYUM-ZİRKONİA 1. Model ve AAAA sınır şartları için ilk 10 mod şekli;

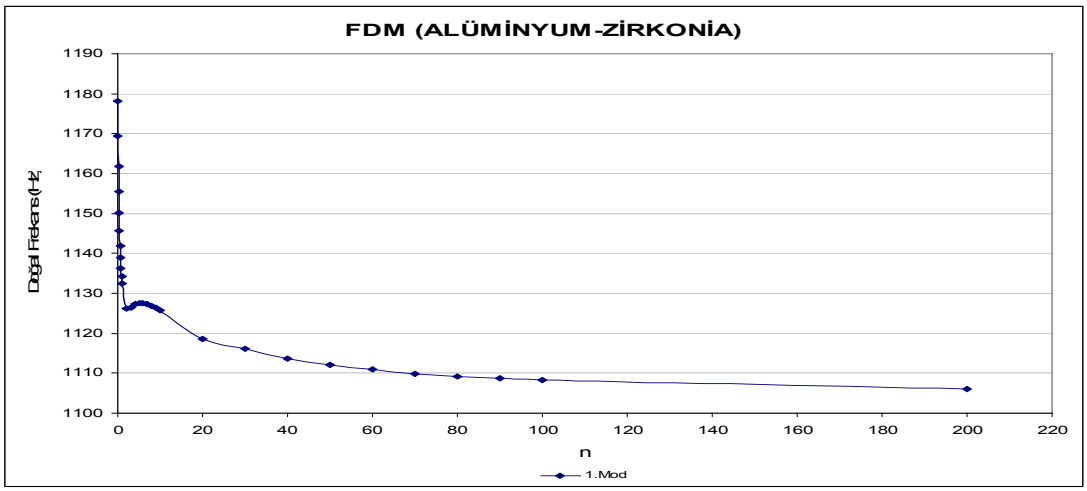


Şekil 3.10 : Alüminyum-Zirkonia FDM mod şekilleri.

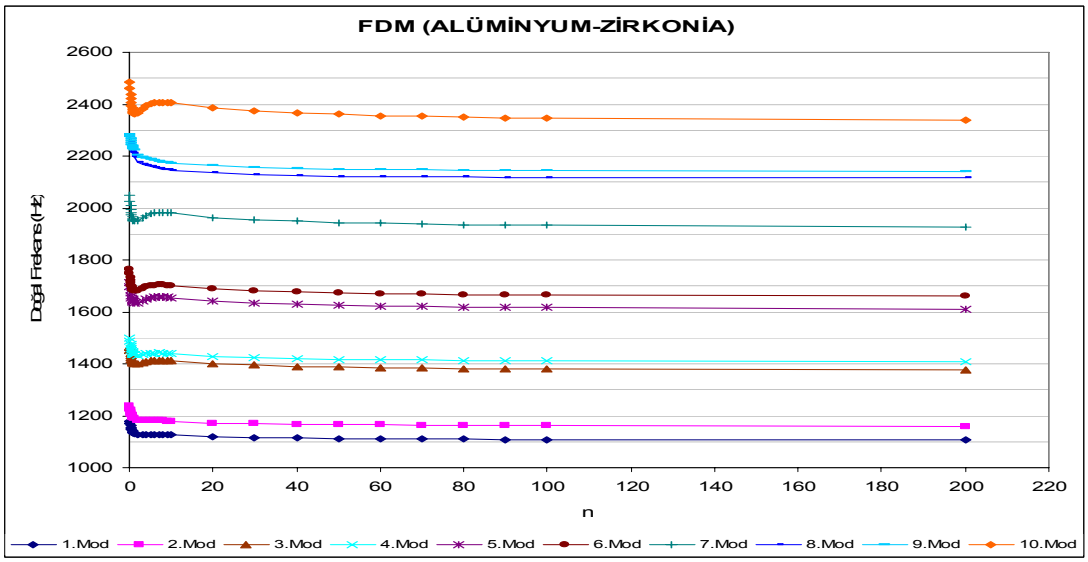
Modların alınan nokta sayısı ile değişimi Şekil 3.11 de, 1. modun "n" ile değişimi Şekil 3.12 de ve tüm modların "n" ile değişimleride Şekil 3.13 te verilmiştir.



Şekil 3.11 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans grafiği.



Şekil 3.12 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans-n grafiği(Birinci mod).



Şekil 3.13 : Alüminyum-Zirkonia FDM doğal frekans-n grafiği (tüm modlar).

Çizelge 3.8 : Alüminyum-Zirkonia doğal frekansları-n çizelgesi.

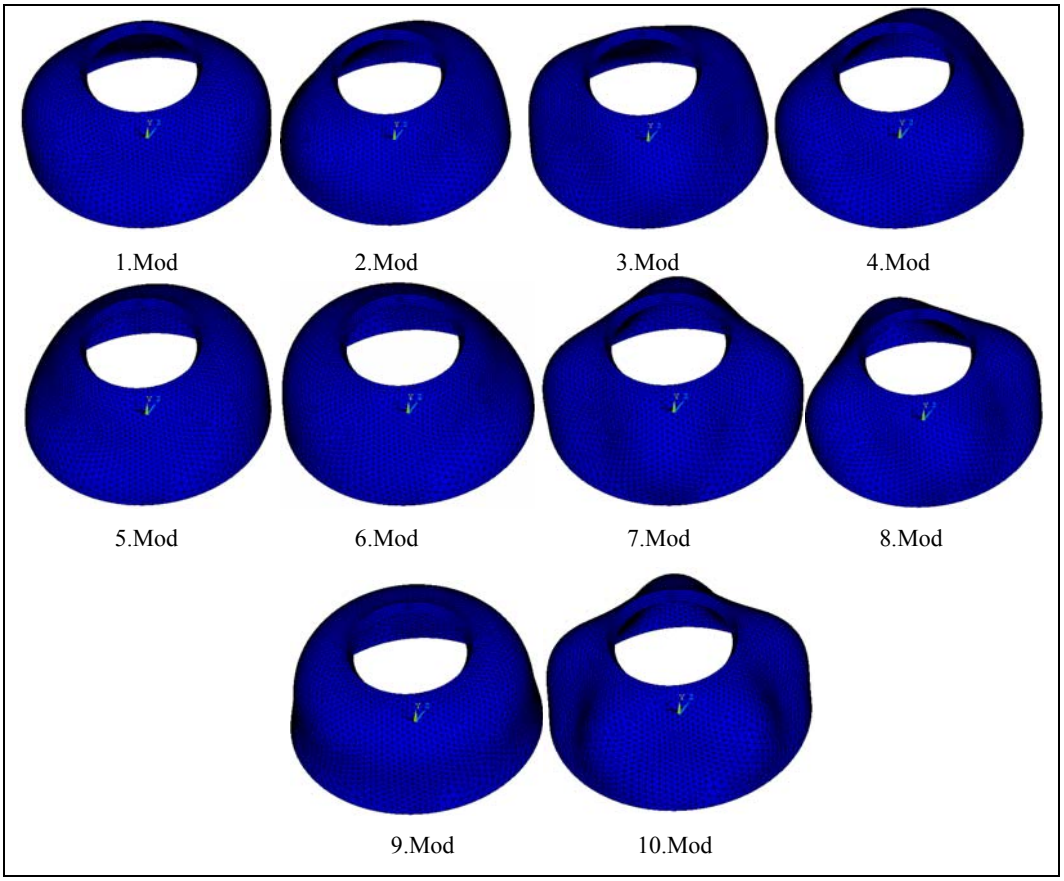
ALÜMİNYUM-ZİRKONİA (1.Model, AAAA)										
n	**1.Mod**	**2.Mod**	**3.Mod**	**4.Mod**	**5.Mod**	**6.Mod**	**7.Mod**	**8.Mod**	**9.Mod**	**10.Mod**
İzotropik Zirkonia	**1178.23**	**1236.41**	**1464.17**	**1497.93**	**1713.87**	**1765.45**	**2048.30**	**2255.38**	**2283.64**	**2486.28**
0	1178.23	1236.41	1464.17	1497.93	1713.87	1765.45	2048.30	2255.38	2283.64	2486.28
0.1	1169.37	1227.71	1451.00	1485.24	1697.41	1748.01	2027.40	2245.64	2274.24	2460.43
0.2	1161.84	1220.25	1439.88	1474.54	1683.56	1733.30	2009.82	2237.05	2265.54	2438.66
0.3	1155.48	1213.91	1430.62	1465.62	1672.05	1721.05	1995.24	2229.49	2257.89	2420.60
0.4	1150.14	1208.54	1422.98	1458.23	1662.62	1710.98	1983.32	2222.84	2251.15	2405.82
0.5	1145.67	1204.01	1416.76	1452.16	1654.98	1702.80	1973.70	2217.00	2245.24	2393.89
0.6	1141.95	1200.21	1411.74	1447.21	1648.86	1696.23	1966.04	2211.87	2240.04	2384.41
0.7	1138.86	1197.03	1407.74	1443.19	1644.05	1691.03	1960.05	2207.36	2235.47	2376.98
0.8	1136.30	1194.37	1404.60	1439.97	1640.31	1686.98	1955.44	2203.38	2231.44	2371.30
0.9	1134.19	1192.15	1402.17	1437.41	1637.49	1683.88	1952.00	2199.86	2227.88	2367.05
1	1132.46	1190.31	1400.33	1435.41	1635.41	1681.59	1949.52	2196.74	2224.72	2364.01
2	1126.19	1182.86	1398.14	1431.07	1635.00	1680.40	1950.67	2178.20	2205.94	2365.84
3	1126.41	1182.04	1403.40	1434.95	1643.47	1688.98	1962.75	2169.33	2196.96	2381.16
4	1127.21	1182.04	1407.58	1438.45	1650.00	1695.77	1972.01	2163.55	2191.11	2392.87
5	1127.62	1181.88	1410.03	1440.56	1653.93	1699.96	1977.70	2159.17	2186.67	2400.11
6	1127.64	1181.51	1411.20	1441.54	1655.95	1702.20	1980.76	2155.61	2183.07	2404.06
7	1127.36	1180.97	1411.51	1441.73	1656.69	1703.14	1982.09	2152.61	2180.03	2405.85
8	1126.90	1180.34	1411.27	1441.42	1656.63	1703.24	1982.31	2150.01	2177.39	2406.23
9	1126.33	1179.65	1410.70	1440.80	1656.05	1702.81	1981.81	2147.74	2175.10	2405.71
10	1125.70	1178.95	1409.92	1439.98	1655.16	1702.05	1980.86	2145.73	2173.06	2404.64
20	1118.67	1171.94	1399.00	1429.21	1641.37	1689.06	1964.15	2135.60	2162.80	2384.57
30	1116.07	1169.60	1394.18	1424.45	1635.04	1682.89	1956.25	2128.02	2155.12	2374.97
40	1113.67	1167.38	1389.94	1420.37	1629.50	1677.47	1949.27	2124.76	2151.82	2366.46
50	1112.04	1165.87	1386.99	1417.57	1625.65	1673.71	1944.41	2122.63	2149.67	2360.52
60	1110.86	1164.78	1384.85	1415.54	1622.85	1670.95	1940.86	2121.14	2148.16	2356.18
70	1109.96	1163.96	1383.22	1414.00	1620.71	1668.85	1938.16	2120.03	2147.03	2352.87
80	1109.26	1163.31	1381.94	1412.80	1619.04	1667.20	1936.03	2119.17	2146.16	2350.26
90	1108.70	1162.80	1380.91	1411.84	1617.69	1665.88	1934.33	2118.49	2145.47	2348.17
100	1108.24	1162.37	1380.06	1411.04	1616.59	1664.79	1932.92	2117.94	2144.92	2346.44
200	1106.04	1160.35	1375.99	1407.26	1611.26	1659.53	1926.15	2115.34	2142.28	2338.13
500	1104.62	1159.03	1373.32	1404.80	1607.78	1656.08	1921.71	2113.69	2140.61	2332.67
1000	1104.12	1158.58	1372.40	1403.94	1606.57	1654.88	1920.17	2113.13	2140.04	2330.77
5000	1103.72	1158.20	1371.64	1403.25	1605.58	1653.90	1918.91	2112.67	2139.58	2329.22
İzotropik Alüminyum	**1103.61**	**1158.10**	**1370.98**	**1401.97**	**1605.10**	**1648.10**	**1918.07**	**2106.74**	**2139.03**	**2329.48**

2. Model içinde benzer veriler aşağıda verilmektedir.

Çizelge 3.9 : Alüminyum-Zirkonia FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları.

ALÜMİNYUM-ZİRKONİA (n=1, 2.Model, AA)								
		DKM						
MOD	ANSYS	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	16x16 Nokta	% HATA
1	1026.322	1136.19	1035.85	1028.67	1028.17	1028.27	1028.26	0.19
2	1027.285	1136.19	1052.37	1029.14	1028.22	1028.28	1028.26	0.09
3	1047.332	1317.25	1120.92	1099.00	1053.02	1041.46	1042.03	0.51
4	1047.438	1391.87	1121.29	1120.85	1056.46	1041.50	1042.08	0.51
5	1112.02	1391.87	1282.89	1121.62	1120.86	1120.86	1120.86	0.79
6	1112.451	1404.14	1346.26	1121.62	1120.86	1120.86	1120.86	0.76
7	1151.742	1464.56	1346.40	1282.48	1282.48	1187.73	1138.57	1.14
8	1152.722	1755.95	1355.68	1345.95	1300.05	1195.35	1138.96	1.19
9	1286.863	1826.56	1440.30	1345.95	1345.95	1282.48	1282.48	0.34
10	1331.92	1907.09	1456.02	1355.24	1345.95	1345.95	1345.95	1.05

ALÜMİNYUM-ZİRKONİA Model-2 ve AA sınır şartları için ilk 10 mod şekli Şekil 3.14 de verilmiştir.

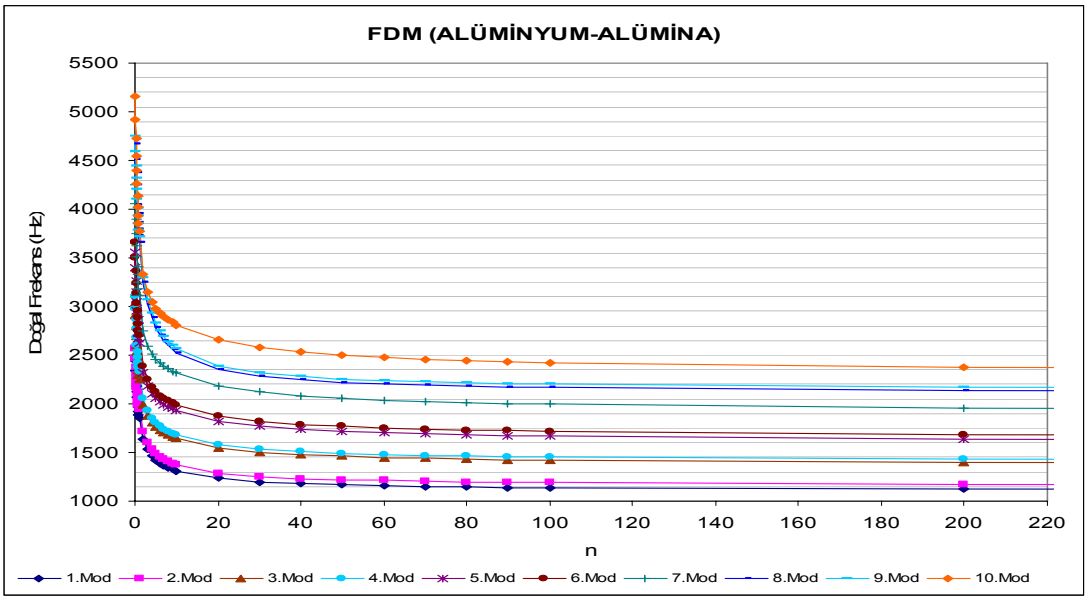


Şekil 3.14 : Alüminyum-Alümina FDM mod şekilleri.

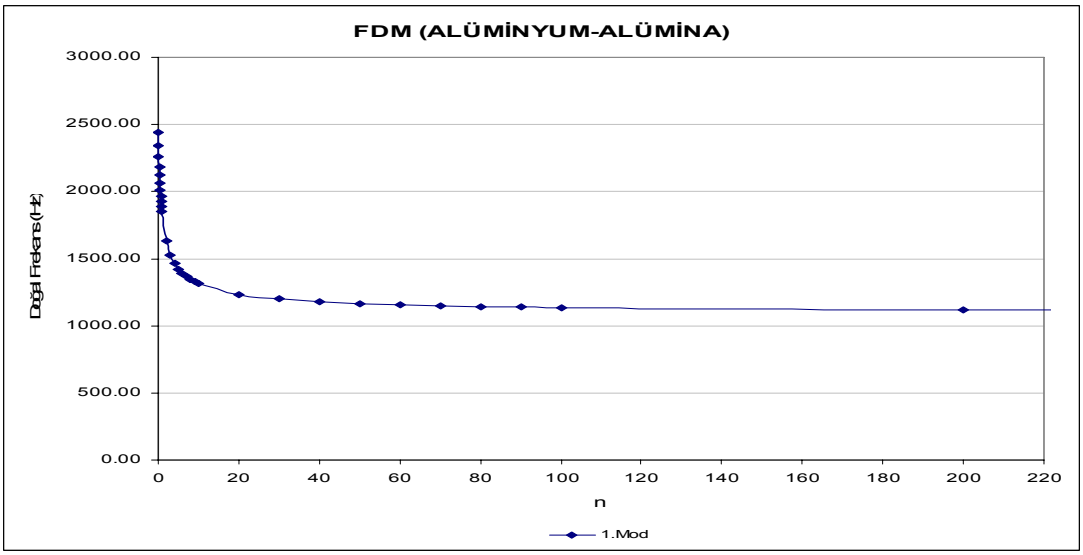
Alüminyum-Alümina için elde edilen sonuçlar aşağıdaki figür ve çizelgelerde verilmektedir.

Çizelge 3.10: Alüminyum-Alümina FDM küresel kabuk titreşim doğal frekansları.

ALÜMİNYUM-ALÜMİNA (n=1, 1.Model, AAAA)								
		DKM						
MOD	ANSYS	6x6 Nokta	8x8 Nokta	10x10 Nokta	12x12 Nokta	14x14 Nokta	16x16 Nokta	% HATA
1	1841.8	3263.25	1952.25	1853.97	1851.74	1851.71	1851.72	0.54
2	1939.4	3445.27	2100.50	1957.74	1948.09	1948.05	1948.05	0.45
3	2303.7	4241.73	2350.20	2260.92	2254.20	2253.84	2253.83	2.16
4	2364.6	4264.04	2685.97	2414.02	2331.82	2328.95	2328.86	1.51
5	2687.7	4854.75	3676.50	2624.12	2621.90	2621.58	2621.57	2.46
6	2724.8	5218.22	4191.69	2924.09	2702.49	2690.49	2689.91	1.28
7	3197.3	5360.67	4689.25	3174.81	3115.00	3114.08	3114.04	2.60
8	3434.4	5360.67	4859.82	3739.62	3662.68	3467.13	3436.27	0.05
9	3494.3	6324.69	5267.45	3902.13	3771.18	3647.29	3645.26	4.32
10	3864.2	7222.68	5648.32	3995.38	3772.02	3771.24	3770.83	2.42



Şekil 3.15 : Alüminyum-Alümina FDM doğal frekans-n grafiği(tüm modlar).



Şekil 3.16 : Alüminyum-Alümina FDM doğal frekans-n grafiği(Birinci mod).

Çizelge 3.11 : Alüminyum-Alümina doğal frekansları-n çizelgesi.

ALÜMİNYUM-ALÜMİNA (1.Model, AAAA)										
n	**1.Mod**	**2.Mod**	**3.Mod**	**4.Mod**	**5.Mod**	**6.Mod**	**7.Mod**	**8.Mod**	**9.Mod**	**10.Mod**
İzotropik Alümina	**2442.55**	**2563.16**	**3035.33**	**3105.32**	**3552.96**	**3659.90**	**4246.28**	**4675.56**	**4747.21**	**5154.23**
0	2442.55	2563.16	3035.33	3105.32	3552.96	3659.90	4246.28	4675.56	4747.21	5154.23
0.1	2345.68	2463.11	2906.51	2977.02	3398.71	3501.63	4058.60	4516.81	4586.02	4925.24
0.2	2261.14	2375.60	2793.81	2865.28	3263.81	3363.08	3894.36	4376.94	4444.01	4724.62
0.3	2186.91	2298.57	2694.79	2767.45	3145.41	3241.40	3750.21	4252.64	4317.81	4548.38
0.4	2121.38	2230.40	2607.49	2681.39	3041.18	3134.20	3623.34	4141.43	4204.89	4393.20
0.5	2063.24	2169.76	2530.27	2605.33	2949.14	3039.49	3511.40	4041.34	4103.27	4256.25
0.6	2011.42	2115.60	2461.77	2537.81	2867.64	2955.59	3412.38	3950.82	4011.36	4135.15
0.7	1965.04	2067.04	2400.83	2477.64	2795.27	2881.08	3324.58	3868.63	3927.91	4027.82
0.8	1923.36	2023.33	2346.46	2423.79	2730.85	2814.73	3246.56	3793.76	3851.89	3932.51
0.9	1885.77	1983.86	2297.82	2375.42	2673.36	2755.50	3177.06	3725.35	3782.44	3847.68
1	1851.74	1948.09	2254.20	2331.82	2621.90	2702.49	3115.00	3662.68	3718.81	3772.02
2	1635.20	1720.01	1990.20	2059.77	2314.44	2385.79	2749.01	3246.36	3296.11	3328.14
3	1528.51	1606.99	1872.48	1930.86	2181.28	2248.68	2595.35	3025.39	3071.75	3144.08
4	1464.64	1538.60	1805.86	1856.07	2107.75	2172.85	2512.40	2884.02	2928.21	3045.82
5	1421.23	1491.63	1761.24	1806.18	2059.14	2122.59	2458.10	2783.71	2826.37	2981.72
6	1389.16	1456.72	1727.99	1769.57	2023.06	2085.17	2417.77	2708.11	2749.61	2934.05
7	1364.13	1429.41	1701.55	1740.93	1994.27	2055.26	2385.42	2648.78	2689.37	2895.69
8	1343.82	1407.27	1679.64	1717.52	1970.26	2030.28	2358.25	2600.81	2640.66	2863.35
9	1326.89	1388.86	1660.99	1697.80	1949.66	2008.84	2334.76	2561.14	2600.39	2835.30
10	1312.47	1373.23	1644.81	1680.81	1931.63	1990.08	2314.06	2527.71	2566.44	2810.51
20	1233.04	1288.78	1549.82	1582.69	1822.69	1877.08	2185.96	2353.42	2389.48	2655.93
30	1198.44	1253.09	1505.19	1537.09	1769.70	1822.40	2122.02	2283.08	2318.07	2578.24
40	1178.57	1232.89	1478.59	1510.04	1737.60	1789.37	2082.82	2244.82	2279.22	2530.45
50	1165.64	1219.85	1460.89	1492.12	1716.05	1767.24	2056.35	2220.66	2254.69	2498.11
60	1156.53	1210.71	1448.24	1479.35	1700.57	1751.34	2037.26	2204.00	2237.77	2474.75
70	1149.77	1203.95	1438.74	1469.79	1688.90	1739.37	2022.82	2191.80	2225.39	2457.06
80	1144.54	1198.73	1431.34	1462.37	1679.78	1730.01	2011.53	2182.48	2215.92	2443.21
90	1140.38	1194.58	1425.41	1456.43	1672.46	1722.50	2002.44	2175.13	2208.46	2432.07
100	1136.99	1191.21	1420.55	1451.57	1666.46	1716.34	1994.98	2169.18	2202.42	2422.90
200	1120.98	1175.32	1397.31	1428.46	1637.60	1686.75	1959.02	2141.59	2174.41	2378.69
500	1110.74	1165.17	1382.14	1413.52	1618.69	1667.36	1935.35	2124.36	2156.91	2349.52
1000	1107.21	1161.67	1376.85	1408.35	1612.09	1660.59	1927.08	2118.49	2150.95	2339.31
5000	1104.34	1158.83	1372.54	1404.14	1606.70	1655.05	1920.30	2113.75	2146.14	2330.95
İzotropik Alüminyum	**1103.61**	**1158.10**	**1370.98**	**1401.97**	**1605.10**	**1648.10**	**1918.07**	**2106.74**	**2139.03**	**2329.48**

Çizelge 3.7, 3.9 ve 3.10 de gösterilen hata değerleri yine kabul edilebilir mertelerdedir. Örneğin birinci mod için sırasıyla 1/1000 ve hata 5/1000 olarak bulunmuştur.

Doğal frekansların ve ayrıca 1. doğal frekansın "n" ile değişimi Şekil 3.12, 3.13, 3.15 ve 3.16 da ve ayrıca Çizelge 3.8 ve Çizelge 3.11 de gösterilmektedir.

Ayrıca FDM için yapılan çalışmalarda alüminyum, alümina ve zirkonia için elde edilen sonuçlarda aşağıdaki çizelgelerde verilmektedir.

Çizelge 3.12 : Alüminyum doğal frekans çizelgesi.

İZOTROPİK ALÜMİNYUM (1.Model, AAAA)			
MOD	**ANSYS**	**12x12 Nokta**	**% HATA**
1	1104.63515	1103.61	0.09
2	1159.84807	1158.10	0.15
3	1376.79494	1370.98	0.42
4	1406.86654	1401.97	0.35
5	1613.33334	1605.10	0.51
6	1656.25885	1648.10	0.49
7	1930.68339	1918.07	0.65
8	2110.25965	2106.74	0.17
9	2137.13757	2139.03	0.09
10	2349.13701	2329.48	0.84

Çizelge 3.13 : Zirkonia doğal frekans çizelgesi.

İZOTROPİK ZİRKONİA (1.Model, AAAA)			
MOD	**ANSYS**	**12x12 Nokta**	**% HATA**
1	1179.75982	1178.22	0.13
2	1238.65993	1236.40	0.18
3	1470.92113	1463.67	0.49
4	1502.92009	1496.76	0.41
5	1723.95896	1713.62	0.60
6	1770.17706	1759.52	0.60
7	2063.37989	2047.75	0.76
8	2253.65619	2249.18	0.20
9	2285.02877	2283.64	0.06
10	2511.35019	2486.97	0.97

Çizelge 3.14 : Alümina doğal frekans çizelgesi.

İZOTROPİK ALÜMİNA (1.Model, AAAA)			
MOD	**ANSYS**	**12x12 Nokta**	**% HATA**
1	2445.725	2442.55	0.13
2	2567.829	2563.16	0.18
3	3049.322	3035.33	0.46
4	3115.658	3105.32	0.33
5	3573.888	3552.96	0.59
6	3669.701	3659.90	0.27
7	4277.531	4246.28	0.73
8	4671.987	4675.56	0.08
9	4737.025	4747.21	0.22
10	5206.205	5154.23	1.00

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında izotropik ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) den yapılmış küresel kabukların dinamik analizi gerçekleştirilmiştir. İlk olarak hareket denklemleri kuvvet ve moment dengesinden elde edilmiştir. Elde edilen denklemler diferansiyel kuadratür yöntemi uygulanarak ayrıklaştırılmış ve MATHEMATICA'da yazılan bir kod vasıtasıyla çözülmüştür. Sonuçlar ticari bir mühendislik yazılımı olan ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların oldukça hassas olduğu görülmüştür ve çözümdeki nokta sayısı arttırıldıkça ANSYS sonuçlarına yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca okuyucunun çözüm yöntemi ile ilgili fikir sahibi olabilmesi için DKM, kabuğa göre daha basit olan, kiriş ve plak problemlerine uygulanmıştır. Doğal frekanslar ve karşılık gelen mod şekilleri gibi önemli titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Ayrıca FDM özelliklerinin doğal frekanslara etkisi de incelenmiştir.

5. KAYNAKLAR

[1] Shu, C., 2000: Differential Quadrature and Its Application in Engineering. Springer-Verlag, London

[2] Tornabene, F. and Viola, E., 2006: Vibration Analysis of Spherical Structural Elements Using the GDQ method. An International Journal Computers & Mathematics with Applications. Vol.53 pp.1538-1560

[3] Leissa, A. 1993: Vibration of Shells.

[4] Urthaler, Y. and Reddy, J.N., 2008: A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT. Mechanics of Advanced Materials and Structures. Vol.15, pp. 335-354

[6] Hsu, M.H.,2003: Vibration Analysis of Isotropic and Orthotropic Plates with Mixed Boundary Conditions. Tamkang Journal of Science and Engineering. Vol. 6, No. 4, pp. 217-226

[7] Yücel, U. and Sarı, M. 2009: Differential quadrature method (DQM) for a class of singular two-point boundary value problems. International Journal of Computer Mathematics. Vol. 86, No. 3, pp. 465–475

[8] Chen, W. 1996: Differential Quadrature Method and its Applications in Engineering. Doc

[9] P. Malekzadeh, P. and Setoodeh, A.R., 2006: Large deformation analysis of moderately thick laminated plates on nonlinear elastic foundations by DQM. Composite Structures Vol. 80, pp. 569–579

[10] Wu, X. And Ren, Y., 2006: Differential quadrature method based on the highest derivative and its applications. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 205, pp. 239 – 250

[11] Sailendra N. C. and Satish V. K., 1978: Shear Correction Factors for Laminated Plates. AIAA JOURNAL. Vol. 17, No.5

[12] Grigolyuk and Kulikov G. M., 2001: The Shear Correction Factor in the Geometrically Nonlinear Theory of Timoshenko Shells. Doklady Physic., Vol. 47, No.2 , pp. 145–147.

[13] Zong, Z. and Zhang, Y., 2009: Advanced Differential Quadrature Methods. CRC Press, London

[14] Nguyen, T., Sab, K. And Bonnet, G., 2007: First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. Composite Structures Vol. 83, pp. 25–36

[15] Wu, C. And Tsai, Y., 2003: Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells. European Journal of Mechanics A/Solids Vol. 23, pp. 283–299

[16] Pradyumna, S., 2009: Analysis of Functionally Graded Plates and Shells. ICCMS09-IIT Bombay

6. EKLER

Ek1

$$nn = 10;$$

$$X = Function[i, \frac{1}{2}(1 - Cos[\frac{N[\pi, 50](i-1)}{nn-1}])];$$

$$M = Function[n, \prod_{j=1}^{n}(x - X[j])];$$

$$M1 = Function[\{k, n\}, (\prod_{j=1}^{k-1}(X[k] - X[j])) \prod_{j=k+1}^{n}(X[k] - X[j])];$$

$$f = Expand[\sum_{i=1}^{nn} \frac{d[i]M[nn]}{(x - X[i])M1[i, nn]}];$$

$$f1 = Expand[\partial_x f];$$

$$f2 = Expand[\partial_{x,x} f];$$

$$f3 = Expand[\partial_{x,x,x} f];$$

$$f4 = Expand[\partial_{x,x,x,x} f];$$

$$Eq[1] = f /.\{x \to X[1]\};$$

$$Eq[2] = f2 /.\{x \to X[1]\};$$

$$For[i = 3, i \le nn - 2, ++i,$$

$$Eq[i] = f4 + 2f3 + f2 - w^2 f /.\{x \to X[i]\};$$

]

$$Eq[nn-1] = f2 /.\{x \to X[nn]\};$$

$$Eq[nn] = f /.\{x \to X[nn]\};$$

$$For[i = 1, i \le nn, ++i,$$

$$For[j = 1, j \le nn, ++j,$$

$$MM[i, j] = Coefficient[Eq[i], d[j]];$$

]

]

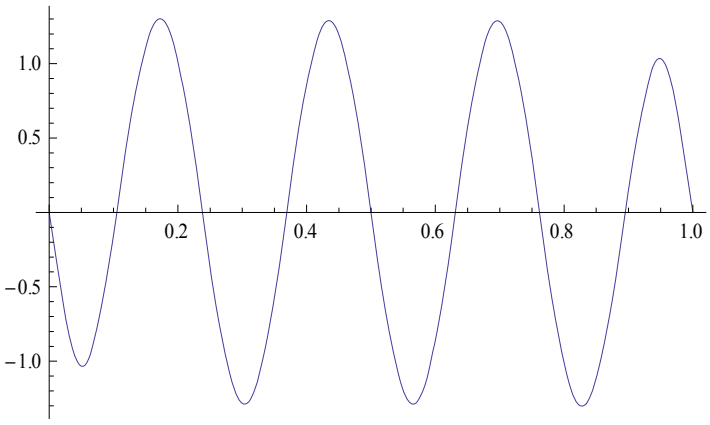
```
sol = NSolve[Det[Table[MM[i, j], {i,1,nn}, {j,1,nn}]],100];
ii = 1;
For[i = 1, i ≤ Dimensions[sol][[1]], ++i,
If[Re[sol[[i,1,2]]] > 0 && Im[sol[[i,1,2]]] = 0, coz2[ii] = sol[[i,1,2]]; ++ii;]
]
MatrixForm[Table[{i, N[coz2[i]]}, {i,1,ii-1}]]
```

$$\begin{pmatrix} 9.8696 \\ 39.4784 \\ 88.8264 \\ 157.914 \\ 246.75 \\ 355.547 \\ 472.464 \\ 575.443 \end{pmatrix}$$

```
Clear[d];
w = coz2[8];
s = Solve[Table[MM[i, j], {i,2,nn-1}, {j,2,nn-1}].Table[d[i], {i,2,nn-1}]
= 0, Table[d[i], {i,2,nn-2}]];

For[i = 1, i ≤ Dimensions[s][[2]], ++i,
d[s[[1,i,1,1]]] = s[[1,i,2]];
]

ListPlot[Table[{(i-1)/(nn-1), Coefficient[d[i], d[nn-1]]}, {i,1,nn}],
Joined → True, PlotRange → All, InterpolationOrder → 2]
```



Ek2

$$Clear[i, j, d];$$

$$mm = 14;$$

$$nn = 14;$$

$$X = Function[i, \frac{i-1}{nn-1}];$$

$$Y = Function[j, \frac{j-1}{mm-1}];$$

$$Table[X[i], \{i, 1, nn\}];$$

$$Table[Y[i], \{i, 1, mm\}];$$

$$M = Function[n, (\prod_{i=1}^{n}(x - X[i]))];$$

$$K = Function[m, (\prod_{j=1}^{m}(y - Y[j]))];$$

$$M1 = Function[\{k, n\}, (\prod_{i=1}^{k-1}(X[k] - X[i]))(\prod_{i=k+1}^{n}(X[k] - X[i]))];$$

$$K1 = Function[\{l, m\}, (\prod_{j=1}^{l-1}(Y[l] - Y[j]))(\prod_{j=l+1}^{m}(Y[l] - Y[j]))];$$

$$fX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(d[i, j]\partial_{x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$fX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(d[i, j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$fX3 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(d[i, j]\partial_{x,x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$fX4 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(d[i, j]\partial_{x,x,x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$fY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(d[i, j]\partial_{y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$fY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(d[i, j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$fY3 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(d[i, j]\partial_{y,y,y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$fY4 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(d[i, j]\partial_{y,y,y,y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$fX2Y2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_{x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(d[i, j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]})))];$$

$$
\begin{aligned}
&For[\,j = 1,\, j \le mm, ++\, j,\\
&Eq[1,\, j] = d[1,\, j];\\
&];\\
&For[\,j = 1,\, j \le mm, ++\, j,\\
&Eq[nn,\, j] = d[nn,\, j];\\
&];\\
&For[i = 2, i \le nn - 1, ++ i,\\
&Eq[i, 1] = d[i, 1];\\
&];\\
&For[i = 2, i \le nn - 1, ++ i,\\
&Eq[i, mm] = d[i, mm];\\
&];\\
&For[\,j = 2,\, j \le mm - 1, ++\, j,\\
&Eq[2,\, j] = (\, fX\, 2 /. \{x \to X[1], y \to Y[\,j]\});\\
&];\\
&For[\,j = 2,\, j \le mm - 1, ++\, j,\\
&Eq[nn - 1,\, j] = (\, fX\, 2 /. \{x \to X[nn], y \to Y[\,j]\});\\
&];\\
&For[i = 3, i \le nn - 2, ++ i,\\
&Eq[i, 2] = (\, fY\, 2 /. \{x \to X[i], y \to Y[1]\});\\
&];\\
&For[i = 3, i \le nn - 2, ++ i,\\
&Eq[i, mm - 1] = (\, fY\, 2 /. \{x \to X[i], y \to Y[mm]\});\\
&];\\
&For[\,j = 3,\, j \le mm - 2, ++\, j,\\
&For[i = 3, i \le nn - 2, ++ i,\\
&Eq[i,\, j] = ((\, fX\, 4 + 2 * \, fX\, 2Y\, 2 + \, fY\, 4 - \omega^2 d[i,\, j]) /. \{x \to X[i], y \to Y[\,j]\});\\
&]\\
&]\\
&s = 1;\\
&For[i = 1, i \le nn, ++ i,\\
&For[\,j = 1,\, j \le mm, ++\, j,\\
&EQ[s] = Eq[i,\, j];\\
&d[i,\, j] = dd[s];\\
&++ s;\\
&]\\
&]
\end{aligned}
$$

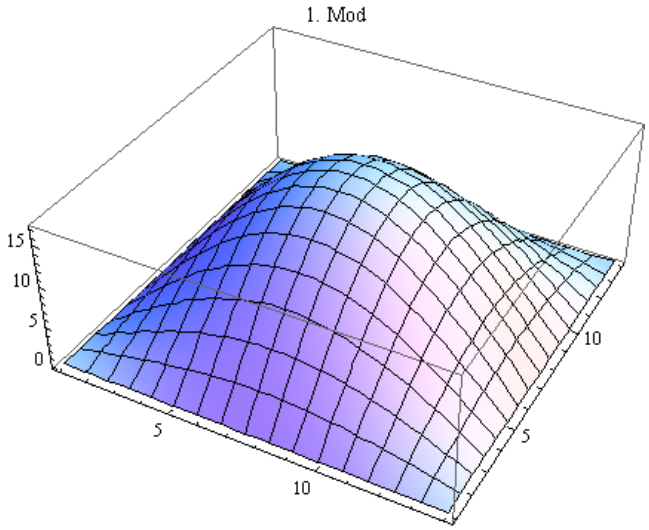
```
For[i = 1, i ≤ s - 1, ++i,
For[ j = 1, j ≤ s - 1, ++ j,
MM[i, j] = Coefficient[EQ[i], dd[ j]];
]
]
Sol = NSolve[Det[Table[MM[i, j], {i, 1, s - 1}, { j, 1, s - 1}]], WorkingPrecision → 100];
ii = 1;
For[i = 1, i ≤ Dimensions[Sol][[1]], ++i,
If [Re[Sol[[i, 1, 2]]] > 0 && Im[Sol[[i, 1, 2]]] = 0, coz[ii] = Sol[[i, 1, 2]]; ++ii;]
]
MatrixForm[Table[{i, N[coz[i]]}, {i, 1, ii - 1}]]
```

$$\begin{pmatrix} 19.7392 \\ 49.3474 \\ 49.3474 \\ 78.9561 \\ 99.148 \\ 99.148 \\ 128.637 \\ 128.637 \\ 178.106 \\ 182.149 \end{pmatrix}$$

```
Clear[dd, ddd];
ss = 1;
ω = coz[ss];
SolMS = Solve[Table[MM[i, j], {i, 1, s - 1}, { j, 1, s - 1}].Table[dd[i], {i, 1, s - 1}] = 0];

For[i = 1, i ≤ Dimensions[SolMS][[2]], ++i,
dD[SolMS[[1, i, 1, 1]]] = SolMS[[1, i, 2]];
]
For[i = 1, i ≤ s - 1, ++i,
dd[i] = 1;
]
```

```
s = 1;
For[i = 1, i ≤ nn, ++i,
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j,
ddd[s] = {i, j, dD[s]};
++s;
]
]
ListPlot3D[Table[ddd[i], {i, 1, s − 1}], PlotLabel → ToString[ss] <> ". Mod"]
```



Ek3

$$For[NM = 10, NM \le 10, NM = NM + 4,$$

$$PR = 100;$$

$$Clear[i, j, X, Y, Denk];$$

$$mm = NM;$$

$$nn = NM;$$

$$EE = N[2110^{10}, PR];$$

$$\mu = N[7800, PR];$$

$$\nu = N[3/10, PR];$$

$$\chi = N[6/5, PR];$$

$$R = N[1, PR];$$

$$h = N[1/10, PR];$$

$$\varnothing 0 = N[\pi/6, PR];$$

$$\varnothing 1 = N[\pi/2, PR];$$

$$Teta = N[(2*\pi)/3, PR];$$

$$KK = N[(EE*h)/(1-\nu^2), PR];$$

$$DD = N[(EE*h^3)/(12*(1-\nu^2)), PR];$$

$$\beta = N[12/10, PR];$$

$$X = Function[i, ((1-\beta)(3*(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{i-1}{nn-1})\pi]+1))^2 - 2*(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{i-1}{nn-1})\pi]+1))^2)$$

$$+\beta(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{i-1}{nn-1})\pi]+1)))*(\varnothing 1-\varnothing 0)+\varnothing 0];$$

$$Y = Function[j, ((1-\beta)(3*(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{j-1}{mm-1})\pi]+1))^2 - 2*(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{j-1}{mm-1})\pi]+1))^2)$$

$$+\beta(\frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{j-1}{mm-1})\pi]+1)))*Teta];$$

$$M = Function[n, (\prod_{i=1}^{n}(x - X[i]))];$$

$$K = Function[m, (\prod_{j=1}^{m}(y - Y[j]))];$$

$$M1 = Function[\{k, n\}, (\prod_{i=1}^{k-1}(X[k] - X[i]))(\prod_{i=k+1}^{n}(X[k] - X[i]))];$$

$$K1 = Function[\{l, m\}, (\prod_{j=1}^{l-1}(Y[l] - Y[j]))(\prod_{j=l+1}^{m}(Y[l] - Y[j]))];$$

$$UX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(u[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$UY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(u[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$UX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(u[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$UY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(u[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$UX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(u[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$VX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(v[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$VY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(v[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$VX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(v[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$VY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(v[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$VX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(v[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$WX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(w[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$WY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$WX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(w[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$WY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$WX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$TXX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(tx[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TXY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TXX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(tx[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TXY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TXX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$TYX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(ty[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TYY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TYX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(ty[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TYY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TYX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$IFD = Join[Flatten[Table[w[i,j],\{i,1,NM\},\{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[tx[i,j],\{i,1,NM\},\{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[ty[i,j],\{i,1,NM\},\{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[u[i,j],\{i,1,NM\},\{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[v[i,j],\{i,1,NM\},\{j,1,NM\}]]];$$

$$Denk[1] = Collect[\frac{1}{R^2}Csc[x]R^2Sin[x](\frac{1}{6}h^3R\mu\omega^2Sin[x]tx[i,j]$$
$$+h(1+\frac{h^2}{12R^2})R^2\mu\omega^2Sin[x]u[i,j]+KKRCos[x](\frac{1}{R}\nu Csc[x](Cos[x]u[i,j]$$
$$+Sin[x]w[i,j]+VY1)+\frac{w[i,j]+UX1}{R})$$
$$KKRCos[x](\frac{1}{R}Csc[x](Cos[x]u[i,j]+Sin[x]w[i,j]+VY1)+\frac{\nu(w[i,j]+UX1)}{R})$$
$$+\frac{1}{2\chi}KKR(1-\nu)Sin[x](tx[i,j]+\frac{-u[i,j]+WX1}{R})$$
$$+\frac{1}{2}KKR(1-\nu)(\frac{Csc[x](-Cos[x]VY1+UY2)}{R}+\frac{VX1Y1}{R})$$

$$+KKRSin[x](-\frac{1}{R}\nu Cot[x]Csc[x](Cos[x]u[i,j]+Sin[x]w[i,j]+VY1)$$
$$+\frac{1}{R}\nu Csc[x](-Sin[x]u[i,j]+Cos[x]w[i,j]+Cos[x]UX1+Sin[x]WX1+VX1Y1)$$
$$+\frac{WX1+UX2}{R})),IFD];$$
$$Denk[2]=Collect[\frac{1}{R^2}Csc[x]R^2Sin[x](\frac{1}{6}h^3R\mu\omega^2Sin[x]ty[i,j]$$
$$+h(1+\frac{h^2}{12R^2})R^2\mu\omega^2Sin[x]v[i,j]+\frac{1}{2\chi}KKR(1-\nu)Sin[x](ty[i,j]$$
$$+\frac{Csc[x](-Sin[x]v[i,j]+WY1)}{R})+KKR(1-\nu)Cos[x](\frac{Csc[x](-Cos[x]v[i,j]+UY1)}{R}+\frac{VX1}{R})$$
$$+KKR(\frac{1}{R}Csc[x](Cos[x]UY1+Sin[x]WY1+VY2)+\frac{\nu(WY1+UX1Y1)}{R})+$$

$$\frac{1}{2}KKR(1-\nu)Sin[x](-\frac{1}{R}Cot[x]Csc[x](-Cos[x]v[i,j]+UY1)$$
$$+\frac{1}{R}Csc[x](Sin[x]v[i,j]-Cos[x]VX1+UX1Y1)+\frac{VX2}{R})),IFD];$$
$$Denk[3]=Collect[\frac{1}{R^2}Csc[x]R^2Sin[x](h(1+\frac{h^2}{12R^2})R^2\mu\omega^2Sin[x]w[i,j]$$
$$+\frac{1}{2\chi}KKR(1-\nu)(TYY1+\frac{Csc[x](-Sin[x]VY1+WY2)}{R})$$
$$-KKRSin[x](\frac{1}{R}\nu Csc[x](Cos[x]u[i,j]+Sin[x]w[i,j]+VY1)+\frac{w[i,j]+UX1}{R})-$$
$$KKRSin[x](\frac{1}{R}Csc[x](Cos[x]u[i,j]+Sin[x]w[i,j]+VY1)+\frac{\nu(w[i,j]+UX1)}{R})$$
$$+\frac{1}{2\chi}KKR(1-\nu)Cos[x](tx[i,j]+\frac{-u[i,j]+WX1}{R})+\frac{1}{2\chi}KKR(1-\nu)Sin[x](TXX1$$
$$+\frac{-UX1+WX2}{R})),IFD];$$
$$Denk[4]=Collect[\frac{1}{R^2}Csc[x]R^2Sin[x](h^3(\frac{1}{12}+\frac{h^2}{80R^2})R^2\mu\omega^2Sin[x]tx[i,j]$$
$$+\frac{1}{6}h^3R\mu\omega^2Sin[x]u[i,j]+DDRCos[x](\frac{1}{R}\nu Csc[x](Cos[x]tx[i,j]+TYY1)+\frac{TXX1}{R})$$
$$-DDRCos[x](\frac{Csc[x](Cos[x]tx[i,j]+TYY1)}{R}+\frac{\nu TXX1}{R})$$
$$-\frac{1}{2\chi}KKR^2(1-\nu)Sin[x](tx[i,j]+\frac{-u[i,j]+WX1}{R})+$$

$$\frac{1}{2}DDR(1-\nu)(\frac{Csc[x](-Cos[x]TYY1+TXY2)}{R}+\frac{TYX1Y1}{R})$$

$$+DDRSin[x](-\frac{1}{R}\nu Cot[x]Csc[x](Cos[x]tx[i,j]+TYY1)$$

$$+\frac{1}{R}\nu Csc[x](-Sin[x]tx[i,j]+Cos[x]TXX1+TYX1Y1)+\frac{TXX2}{R})),IFD];$$

$$Denk[5]=Collect[\frac{1}{R^2}Csc[x]R^2Sin[x](h^3(\frac{1}{12}+\frac{h^2}{80R^2})R^2\mu\omega^2Sin[x]ty[i,j]$$

$$+\frac{1}{6}h^3R\mu\omega^2Sin[x]v[i,j]-\frac{1}{2\chi}KKR^2(1-\nu)Sin[x](ty[i,j]$$

$$+\frac{Csc[x](-Sin[x]v[i,j]+WY1)}{R})+DDR(1-\nu)Cos[x](\frac{1}{R}Csc[x](-Cos[x]ty[i,j]$$

$$+TXY1)+\frac{TYX1}{R})+DDR(\frac{Csc[x](Cos[x]TXY1+TYY2)}{R}+\frac{\nu TXX1Y1}{R})+$$

$$\frac{1}{2}DDR(1-\nu)Sin[x](-\frac{1}{R}Cot[x]Csc[x](-Cos[x]ty[i,j]+TXY1)$$

$$+\frac{1}{R}Csc[x](Sin[x]ty[i,j]-Cos[x]TYX1+TXX1Y1)+\frac{TYX2}{R})),IFD];$$

```
Clear[i];
Clear[j];
TextCell["Clamped edge Boundary Condition at Fi = Fi1"];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[1, nn, j] = u[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[2, nn, j] = v[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[3, nn, j] = w[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[4, nn, j] = tx[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[5, nn, j] = ty[nn, j]];
Clear[i];
Clear[j];
TextCell["Clamped edge Boundary Condition at Teta = Teta0"];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[1, i, mm] = u[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[2, i, mm] = v[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[3, i, mm] = w[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[4, i, mm] = tx[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[5, i, mm] = ty[i, mm]];
```

```
Clear[i];
Clear[ j];
TextCell["Clamped edge Boundary Condition at Fi = Fi0"];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1,++ j, Eq[1,1, j] = u[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1,++ j, Eq[2,1, j] = v[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1,++ j, Eq[3,1, j] = w[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1,++ j, Eq[4,1, j] = tx[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1,++ j, Eq[5,1, j] = ty[1, j]];

Clear[i];
Clear[ j];
TextCell["Clamped edge Boundary Condition at Teta = 0"];
For[i = 1,i ≤ nn − 1,++ i, Eq[1,i,1] = u[i,1]];
For[i = 1,i ≤ nn − 1,++ i, Eq[2,i,1] = v[i,1]];
For[i = 1,i ≤ nn − 1,++ i, Eq[3,i,1] = w[i,1]];
For[i = 1,i ≤ nn − 1,++ i, Eq[4,i,1] = tx[i,1]];
For[i = 1,i ≤ nn − 1,++ i, Eq[5,i,1] = ty[i,1]];

Clear[i];
Clear[ j];
For[i = 2,i ≤ nn − 1,++ i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1,++ j,
Eq[1,i, j] = (Denk[1] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2,i ≤ nn − 1,++ i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1,++ j,
Eq[2,i, j] = (Denk[2] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2,i ≤ nn − 1,++ i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1,++ j,
Eq[3,i, j] = (Denk[3] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2,i ≤ nn − 1,++ i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1,++ j,
Eq[4,i, j] = (Denk[4] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2,i ≤ nn − 1,++ i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1,++ j,
Eq[5,i, j] = (Denk[5] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
h = 1;
For[t = 1,t ≤ 5,++ t, For[s = 1,s ≤ nn,++ s, For[k = 1,k ≤ mm,++ k,
Q[h] = Eq[t,s,k];
h = h + 1
]]];
```

```
j = 1;
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[j] = u[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[j] = v[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[j] = w[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[j] = tx[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[j] = ty[l, m]; j = j + 1]];

For[i = 1, i ≤ 5 * nn * mm, ++i,
For[j = 1, j ≤ 5 * nn * mm, ++j,
MM[i, j] = Coefficient[Q[i], RR[j]];
]
];
DT = Table[Expand[MM[i, j]], {i, 1, 5 * nn * mm}, {j, 1, 5 * nn * mm}];
For[i = 1, i ≤ 5 * nn * mm, ++i,
For[j = 1, j ≤ 5 * nn * mm, ++j,
DTD[i, j] = Coefficient[DT[[i, j]], ω^2];
DTS[i, j] = DT[[i, j]] /. {ω → 0};
]
];
DTST = Table[N[DTS[i, j], PR], {i, 1, 5 * nn * mm}, {j, 1, 5 * nn * mm}];
DTDT = Table[N[DTD[i, j], PR], {i, 1, 5 * nn * mm}, {j, 1, 5 * nn * mm}];
BMat = −N[Inverse[DTST].DTDT];
sol = Eigenvalues[{IdentityMatrix[5nnmm], BMat}, 5 * nn * mm];
j = 1;
For[i = 1, i ≤ 5nnmm, ++i,
If[NumberQ[sol[[i]]] && Re[sol[[i]]] > 0, coz[j] = √sol[[i]]; ++j];
];
Print["N = ", mm];
Print[MatrixForm[Table[{i, Re[coz[Ordering[Table[Re[coz[i] / (2π)], {i, 1, j − 1}]][[i]]]
/(2π)]}, {i, 1, 10}]]];
]
```

$$\begin{pmatrix} 1126.68 \\ 1182.09 \\ 1398.43 \\ 1429.75 \\ 1638.45 \\ 1696.17 \\ 1956.6 \\ 2165.33 \\ 2308.62 \\ 2388.8 \end{pmatrix}$$

Ek4

$$For[NM = 10, NM < 17, NM = NM + 2,$$
$$PR = 100;$$
$$Clear[i, j, X, Y, Denk];$$
$$mm = NM;$$
$$nn = NM;$$
$$EE1 = N[16810^{9}, PR];$$
$$EE2 = N[7010^{9}, PR];$$
$$\mu 1 = N[5700, PR];$$
$$\mu 2 = N[2707, PR];$$
$$\nu 1 = N[3/10, PR];$$
$$\nu 2 = N[3/10, PR];$$
$$\chi = N[6/5, PR];$$
$$R = N[1, PR];$$
$$h = N[1/10, PR];$$
$$\varnothing 0 = N[\pi/6, PR];$$
$$\varnothing 1 = N[\pi/2, PR];$$
$$Teta = N[(2\pi), PR];$$
$$SINIR\varnothing 0 = "c";$$
$$SINIR\varnothing 1 = "c";$$
$$SINIRTETA0 = "";$$
$$SINIRTETA1 = "";$$
$$p = N[1, PR];$$
$$X = Function[i, \frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{i-1}{nn-1})\pi]+1)*(\varnothing 1-\varnothing 0)+\varnothing 0];$$
$$Y = Function[j, \frac{1}{2}(Cos[(1-\frac{j-1}{mm-1})\pi]+1)*Teta];$$
$$\mu[z] = ((\mu 1-\mu 2)(\frac{h+2z}{2h})^{p}+\mu 2);$$
$$INERTIA = Function[m, Assuming[\{h>0\}, \int_{-h/2}^{h/2} \mu[z] z^{m}(1+(z/R))(1+(z/R))dz]];$$

$$Q11 = \frac{EE1}{1-(\nu 1)^2};$$

$$Q21 = \frac{\nu 1 * EE1}{1-(\nu 1)^2};$$

$$Q31 = \frac{EE1}{2(1+\nu 1)};$$

$$Q12 = \frac{EE2}{1-(\nu 2)^2};$$

$$Q22 = \frac{\nu 2 * EE2}{1-(\nu 2)^2};$$

$$Q32 = \frac{EE2}{2(1+\nu 2)};$$

$$M = Function[n, (\prod_{i=1}^{n}(x - X[i]))];$$

$$K = Function[m, (\prod_{j=1}^{m}(y - Y[j]))];$$

$$M1 = Function[\{k, n\}, (\prod_{i=1}^{k-1}(X[k] - X[i]))(\prod_{i=k+1}^{n}(X[k] - X[i]))];$$

$$K1 = Function[\{l, m\}, (\prod_{j=1}^{l-1}(Y[l] - Y[j]))(\prod_{j=l+1}^{m}(Y[l] - Y[j]))];$$

$$UX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(u[i, j]\partial_x(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$UY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(u[i, j]\partial_y(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$UX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(u[i, j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$UY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(u[i, j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$UX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(u[i, j]\partial_y(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]})))];$$

$$VX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(v[i, j]\partial_x(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$VY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(v[i, j]\partial_y(\frac{1}{y - Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j, mm]}))];$$

$$VX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(v[i, j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x - X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i, nn]}))];$$

$$VY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(v[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$VX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(v[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$WX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(w[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$WY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$WX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(w[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$WY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$WX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(w[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$TXX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(tx[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TXY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TXX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(tx[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TXY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TXX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(tx[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$TYX1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(ty[i,j]\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TYY1 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TYX2 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}(ty[i,j]\partial_{x,x}(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]}))];$$

$$TYY2 = Expand[\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_{y,y}(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]}))];$$

$$TYX1Y1 = Expand[\sum_{i=1}^{nn}\partial_x(\frac{1}{x-X[i]}\frac{M[nn]}{M1[i,nn]})(\sum_{j=1}^{mm}(ty[i,j]\partial_y(\frac{1}{y-Y[j]}\frac{K[mm]}{K1[j,mm]})))];$$

$$IFD = Join[Flatten[Table[w[i, j], \{i,1,NM\}, \{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[tx[i, j], \{i,1,NM\}, \{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[ty[i, j], \{i,1,NM\}, \{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[u[i, j], \{i,1,NM\}, \{j,1,NM\}]],$$
$$Flatten[Table[v[i, j], \{i,1,NM\}, \{j,1,NM\}]]];$$

$$KA1 = \frac{h(Q11 + pQ12)}{1+p};$$

$$KA2 = \frac{h^2 p(Q11 - Q12)}{2(2+3p+p^2)};$$

$$KA3 = \frac{h(Q21 + pQ22)}{1+p};$$

$$KA4 = \frac{h^2 p(Q21 - Q22)}{2(2+3p+p^2)};$$

$$KA5 = \frac{h^3(3(2+p+p^2)Q11 + p(8+p(3+p))Q12)}{12(1+p)(2+p)(3+p)};$$

$$KA6 = \frac{h^3(3(2+p+p^2)Q21 + p(8+p(3+p))Q22)}{12(1+p)(2+p)(3+p)}$$

$$KA7 = \frac{h(Q31 + pQ32)}{1+p};$$

$$KA8 = \frac{h^2 p(Q31 - Q32)}{2(2+3p+p^2)};$$

$$KA9 = \frac{h^3(3(2+p+p^2)Q31 + p(8+p(3+p))Q32)}{12(1+p)(2+p)(3+p)};$$

$$KA10 = \frac{hQ31 + hpQ32}{\chi + p\chi};$$

$$Denk[1] = Collect[(-KA2Csc[x] + (KA2 - KA4 + R(KA10 + R\omega\,\hat{}\,2INERTIA[1]))$$
$$Sin[x])tx[i, j] - KA1Cos[x]Cot[x]u[i, j] - (KA2 + KA8)Cot[x]TYY1$$
$$-KA1Cot[x]VY1 - KA7Cot[x]VY1 + KA8Csc[x]TXY2 + KA7Csc[x]UY2$$
$$+KA2Cos[x]TXX1 + KA1Cos[x]UX1 + (KA4 + KA8)TYX1Y1 + (KA3 + KA7)VX1Y1$$
$$+Sin[x](-(KA10 + KA3 - R\,\hat{}\,2\omega\,\hat{}\,2INERTIA[0])u[i, j] + (KA1 + KA10 + KA3)WX1$$
$$+KA2TXX2 + KA1UX2), IFD];$$

$$Denk[2] = Collect[(-KA8Csc[x] + (2KA8 + R(KA10 + RINERTIA[1]))Sin[x])ty[i, j]$$
$$+(-KA7Csc[x] + (-KA10 + 2KA7 + R\,\hat{}\,2\omega\,\hat{}\,2INERTIA[0])Sin[x])v[i, j]$$
$$+(KA2 + KA8)Cot[x]TXY1 + KA1Cot[x]UY1 + KA1WY1 + (KA10 + KA3)WY1$$
$$+KA2Csc[x]TYY2 + KA1Csc[x]VY2 + KA8Cos[x]TYX1 + (KA4 + KA8)TXX1Y1$$
$$+KA3UX1Y1 + KA8Sin[x]TYX2 + KA7(Cot[x]UY1 + Cos[x]VX1 + UX1Y1$$
$$+Sin[x]VX2), IFD];$$

```
Denk[3] = Collect[1 / 2(–2(KA2 + KA4 – KA10R)TYY1 – 2(KA1 + KA10 + KA3)VY1
+KA10Cot[x / 2]WY2 + KA10Tan[x / 2]WY2 – 2Cos[x]((KA2 + KA4 – KA10R)tx[i, j]
+(KA1 + KA10 + KA3)u[i, j] – KA10WX1) – 2Sin[x]((2(KA1 + KA3)
–R^2ω^2INERTIA[0])w[i, j] + (KA2 + KA4 – KA10R)TXX1
+(KA1 + KA10 + KA3)UX1 – KA10WX2)), IFD];

Denk[4] = Collect[–(KA5Cos[x]Cot[x]
+(KA6 + R^2(KA10 – ω^2INERTIA[2]))Sin[x])tx[i, j]
–KA2Csc[x]u[i, j] + (KA2 – KA4 + R(KA10 + Rω^2INERTIA[1]))Sin[x]u[i, j]
–(KA5 + KA9)Cot[x]TYY1 – KA2Cot[x]VY1 – KA8Cot[x]VY1 + KA9Csc[x]TXY2
+KA8Csc[x]UY2 + KA5Cos[x]TXX1 + KA2Cos[x]UX1 + KA2Sin[x]WX1
+KA4Sin[x]WX1 – KA10RSin[x]WX1 + (KA6 + KA9)TYX1Y1 + KA4VX1Y1
+KA8VX1Y1 + KA5Sin[x]TXX2 + KA2Sin[x]UX2, IFD];

Denk[5] = Collect[(–KA9Csc[x]
+(2KA9 + R^2(–KA10 + ω^2INERTIA[2]))Sin[x])ty[i, j]
+(–KA8Csc[x] + (2KA8 + R(KA10 + Rω^2INERTIA[1]))Sin[x])v[i, j]
+(KA5 + KA9)Cot[x]TXY1 + KA2Cot[x]UY1 + KA2WY1 + KA4WY1
–KA10RWY1 + KA5Csc[x]TYY2 + KA2Csc[x]VY2 + KA9Cos[x]TYX1
+(KA6 + KA9)TXX1Y1 + KA4UX1Y1 + KA9Sin[x]TYX2 + KA8(Cot[x]UY1
+Cos[x]VX1 + UX1Y1 + Sin[x]VX2), IFD];

Clear[i];
Clear[j];
TextCell["Boundary Condition at Fi = Fi1"];
If[SINIR∅1 = "c",

For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[1, nn, j] = u[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[2, nn, j] = v[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[3, nn, j] = w[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[4, nn, j] = tx[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[5, nn, j] = ty[nn, j]];
```

```
,
If[SINIR∅1 == "s",

For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[1, nn, j] = u[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[2, nn, j] = v[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[3, nn, j] = w[nn, j]];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[4, nn, j] = ((KA6Cot[x]tx[nn, j] + KA6Csc[x]TYY1
+KA4(Cot[x]u[nn, j] + w[nn, j] + Csc[x]VY1) + KA5TXX1 + KA2(w[nn, j] + UX1)) / R)
/.{x → X[nn], y → Y[j]}];
For[j = 1, j ≤ mm - 1, ++j, Eq[5, nn, j] = ty[nn, j]];
,

For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[1, nn, j] = ((KA4Cot[x]tx[nn, j] + KA4Csc[x]TYY1
+KA3(Cot[x]u[nn, j] + w[nn, j] + Csc[x]VY1) + KA2TXX1 + KA1(w[nn, j] + UX1)) / R)
/.{x → X[nn], y → Y[j]}];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[2, nn, j] = ((-KA8Cot[x]ty[nn, j] + KA8(Csc[x]TXY1
+TYX1) + KA7(-Cot[x]v[nn, j] + Csc[x]UY1 + VX1)) / R) /.{x → X[nn], y → Y[j]}];

For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[3, nn, j] = ((KA10(Rtx[nn, j] - u[nn, j] + WX1)) / R)
/.{x → X[nn], y → Y[j]}];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[4, nn, j] = ((KA6Cot[x]tx[nn, j] + KA6Csc[x]TYY1
+KA4(Cot[x]u[nn, j] + w[nn, j] + Csc[x]VY1) + KA5TXX1 + KA2(w[nn, j]
+UX1)) / R) /.{x → X[nn], y → Y[j]}];
For[j = 1, j ≤ mm, ++j, Eq[5, nn, j] = ((-KA9Cot[x]ty[nn, j]
+KA9(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA8(-Cot[x]v[nn, j]
+Csc[x]UY1 + VX1)) / R) /.{x → X[nn], y → Y[j]}];
];
];
Clear[i];
Clear[j];
TextCell["Boundary Condition at Teta = Teta1"];

If[Teta = N[(2π), PR],

TextCell["Kinematic Compatibility Conditions"];

For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[1, i, mm] = (u[i, 1] - u[i, mm])];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[2, i, mm] = (v[i, 1] - v[i, mm])];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[3, i, mm] = (w[i, 1] - w[i, mm])];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[4, i, mm] = (tx[i, 1] - tx[i, mm])];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[5, i, mm] = (ty[i, 1] - ty[i, mm])];
```

```
,
If[SINIRTETA1 = "c",
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[1, i, mm] = u[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[2, i, mm] = v[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[3, i, mm] = w[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[4, i, mm] = tx[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[5, i, mm] = ty[i, mm]];
,
If[SINIRTETA1 = "s",
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[1, i, mm] = u[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[2, i, mm] = v[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[3, i, mm] = w[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[4, i, mm] = tx[i, mm]];
For[i = 1, i ≤ nn, ++i, Eq[5, i, mm] = ((KA5Cot[x]tx[i, mm] + KA2Cot[x]u[i, mm]
+KA2w[i, mm] + KA4w[i, mm] + KA5Csc[x]TYY1 + KA2Csc[x]VY1 + KA6TXX1
+KA4UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[mm]}];
,
If[SINIRTETA1 = "f",
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[1, i, mm] = ((KA2Cot[x]tx[i, mm]
+KA1Cot[x]u[i, mm] + KA1w[i, mm] + KA3w[i, mm] + KA2Csc[x]TYY1
+KA1Csc[x]VY1 + KA4TXX1 + KA3UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[mm]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[2, i, mm] = ((−KA8Cot[x]ty[i, mm] +
KA8(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA7(−Cot[x]v[i, mm] + Csc[x]UY1 + VX1)) / R)
/. {x → X[i], y → Y[mm]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[3, i, mm] = ((KA10(Rty[i, mm] − v[i, mm]
+Csc[x]WY1)) / R) /. {x → X[i], y → Y[mm]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i,

Eq[4, i, mm] = ((KA5Cot[x]tx[i, mm] + KA2Cot[x]u[i, mm]
+KA2w[i, mm] + KA4w[i, mm] + KA5Csc[x]TYY1 + KA2Csc[x]VY1
+KA6TXX1 + KA4UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[mm]}];

For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[5, i, mm] = ((−KA9Cot[x]ty[i, mm]
+KA9(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA8(−Cot[x]v[i, mm] + Csc[x]UY1 + VX1)) / R)
/. {x → X[i], y → Y[mm]}];
];
];
];
];
```

```
Clear[i];
Clear[ j];
TextCell["Boundary Condition at Fi = Fi0"];
If [SINIR∅0 = "c",
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j, Eq[1,1, j] = u[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j, Eq[2,1, j] = v[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j, Eq[3,1, j] = w[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j, Eq[4,1, j] = tx[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm, ++ j, Eq[5,1, j] = ty[1, j]];
,
If [SINIR∅0 = "s",
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[1,1, j] = u[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[2,1, j] = v[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[3,1, j] = w[1, j]];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[4,1, j] = ((KA6Cot[x]tx[1, j]
+KA6Csc[x]TYY1 + KA4(Cot[x]u[1, j] + w[1, j] + Csc[x]VY1)
+KA5TXX1 + KA2(w[1, j] + UX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[5,1, j] = ty[1, j]];
,
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[1,1, j] = ((KA4Cot[x]tx[1, j]
+KA4Csc[x]TYY1 + KA3(Cot[x]u[1, j] + w[1, j] + Csc[x]VY1)
+KA2TXX1 + KA1(w[1, j] + UX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[2,1, j] = ((−KA8Cot[x]ty[1, j]
+KA8(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA7(−Cot[x]v[1, j] + Csc[x]UY1
+VX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[3,1, j] = ((KA10(Rtx[1, j] − u[1, j]
+WX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[4,1, j] = ((KA6Cot[x]tx[1, j]
+KA6Csc[x]TYY1 + KA4(Cot[x]u[1, j] + w[1, j] + Csc[x]VY1)
+KA5TXX1 + KA2(w[1, j] + UX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
For[ j = 1, j ≤ mm − 1, ++ j, Eq[5,1, j] = ((−KA9Cot[x]ty[1, j]
+KA9(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA8(−Cot[x]v[1, j] + Csc[x]UY1
+VX1)) / R) /. {x → X[1], y → Y[ j]}];
];
];
Clear[i];
Clear[ j];
TextCell["Boundary Condition at Teta = 0"];

If [Teta = N[(2π), PR],
```

$$For[i=1,i\le nn,++i,Eq[1,i,1]=(((KA2Cot[x]tx[i,j]$$
$$+KA1Cot[x]u[i,j]+KA1w[i,j]+KA3w[i,j]+KA2Csc[x]TYY1$$
$$+KA1Csc[x]VY1+KA4TXX1+KA3UX1)/R)$$
$$/.\{x\to X[i],y\to Y[1]\})-(((KA2Cot[x]tx[i,j]+KA1Cot[x]u[i,j]$$
$$+KA1w[i,j]+KA3w[i,j]+KA2Csc[x]TYY1+KA1Csc[x]VY1$$
$$+KA4TXX1+KA3UX1)/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[mm]\})];$$

$$For[i=1,i\le nn,++i,Eq[2,i,1]=(((-KA8Cot[x]ty[i,j]$$
$$+KA8(Csc[x]TXY1+TYX1)+KA7(-Cot[x]v[i,j]+Csc[x]UY1+VX1))/R)$$
$$/.\{x\to X[i],y\to Y[1]\})-(((-KA8Cot[x]ty[i,j]+KA8(Csc[x]TXY1+TYX1)$$
$$+KA7(-Cot[x]v[i,j]+Csc[x]UY1+VX1))/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[mm]\})];$$

$$For[i=1,i\le nn,++i,Eq[3,i,1]=(((KA10(Rty[i,j]-v[i,j]$$
$$+Csc[x]WY1))/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[1]\})-(((KA10(Rty[i,j]$$
$$-v[i,j]+Csc[x]WY1))/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[mm]\})];$$

$$For[i=1,i\le nn,++i,Eq[4,i,1]=(((KA5Cot[x]tx[i,j]+KA2Cot[x]u[i,j]$$
$$+KA2w[i,j]+KA4w[i,j]+KA5Csc[x]TYY1+KA2Csc[x]VY1+KA6TXX1$$
$$+KA4UX1)/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[1]\})-(((KA5Cot[x]tx[i,j]$$
$$+KA2Cot[x]u[i,j]+KA2w[i,j]+KA4w[i,j]+KA5Csc[x]TYY1$$
$$+KA2Csc[x]VY1+KA6TXX1+KA4UX1)/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[mm]\})];$$

$$For[i=1,i\le nn,++i,Eq[5,i,1]=(((-KA9Cot[x]ty[i,j]$$
$$+KA9(Csc[x]TXY1+TYX1)+KA8(-Cot[x]v[i,j]+Csc[x]UY1$$
$$+VX1))/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[1]\})-(((-KA9Cot[x]ty[i,j]$$
$$+KA9(Csc[x]TXY1+TYX1)+KA8(-Cot[x]v[i,j]+Csc[x]UY1+VX1))$$
$$/R)/.\{x\to X[i],y\to Y[mm]\})];$$

,

$$If[SINIRTETA0="c",$$

$$For[i=1,i\le nn-1,++i,Eq[1,i,1]=u[i,1]];$$
$$For[i=1,i\le nn-1,++i,Eq[2,i,1]=v[i,1]];$$
$$For[i=1,i\le nn-1,++i,Eq[3,i,1]=w[i,1]];$$
$$For[i=1,i\le nn-1,++i,Eq[4,i,1]=tx[i,1]];$$
$$For[i=1,i\le nn-1,++i,Eq[5,i,1]=ty[i,1]];$$

,

```
If[SINIRTETA0 = "s",
For[i = 1, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[1, i, 1] = u[i, 1]];
For[i = 1, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[2, i, 1] = v[i, 1]];
For[i = 1, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[3, i, 1] = w[i, 1]];
For[i = 1, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[4, i, 1] = tx[i, 1]];
For[i = 1, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[5, i, 1] = ((KA5Cot[x]tx[i, 1] + KA2Cot[x]u[i, 1]
+KA2w[i, 1] + KA4w[i, 1] + KA5Csc[x]TYY1 + KA2Csc[x]VY1 + KA6TXX1
+KA4UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[1]}];
,

If[SINIRTETA0 = "f",
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[1, i, 1] = ((KA2Cot[x]tx[i, 1] + KA1Cot[x]u[i, 1]
+KA1w[i, 1] + KA3w[i, 1] + KA2Csc[x]TYY1 + KA1Csc[x]VY1 + KA4TXX1
+KA3UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[1]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[2, i, 1] = ((−KA8Cot[x]ty[i, 1]
+KA8(Csc[x]TXY1 + TYX1) + KA7(−Cot[x]v[i, 1] + Csc[x]UY1 + VX1)) / R)
/. {x → X[i], y → Y[1]}];

For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[3, i, 1] = ((KA10(Rty[i, 1] − v[i, 1]
+Csc[x]WY1)) / R) /. {x → X[i], y → Y[1]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[4, i, 1] = ((KA5Cot[x]tx[i, 1]
+KA2Cot[x]u[i, 1] + KA2w[i, 1] + KA4w[i, 1] + KA5Csc[x]TYY1
+KA2Csc[x]VY1 + KA6TXX1 + KA4UX1) / R) /. {x → X[i], y → Y[1]}];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, Eq[5, i, 1] = ((−KA9Cot[x]ty[i, 1] + KA9(Csc[x]TXY1
+TYX1) + KA8(−Cot[x]v[i, 1] + Csc[x]UY1 + VX1)) / R)
/. {x → X[i], y → Y[1]}];

];
];
];
];
Clear[i];
Clear[j];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, For[j = 2, j ≤ mm − 1, ++j,
Eq[1, i, j] = (Denk[1] /. {x → X[i], y → Y[j]});]];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, For[j = 2, j ≤ mm − 1, ++j,
Eq[2, i, j] = (Denk[2] /. {x → X[i], y → Y[j]});]];
```

```
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1, ++ j,
Eq[3, i, j] = (Denk[3] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1, ++ j,
Eq[4, i, j] = (Denk[4] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];
For[i = 2, i ≤ nn − 1, ++i, For[ j = 2, j ≤ mm − 1, ++ j,
Eq[5, i, j] = (Denk[5] /. {x → X[i], y → Y[ j]}); ]];


h = 1;
For[t = 1, t ≤ 5, ++t, For[s = 1, s ≤ nn, ++s,
For[k = 1, k ≤ mm, ++k,
Q[h] = Eq[t, s, k];
h = h + 1
]]];

j = 1;
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[ j] = u[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l, For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[ j] = v[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l,
For[m = 1, m ≤ mm, ++m,
RR[ j] = w[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l,
For[m = 1, m ≤ mm, ++m,
RR[ j] = tx[l, m]; j = j + 1]];
For[l = 1, l ≤ nn, ++l,
For[m = 1, m ≤ mm, ++m, RR[ j] = ty[l, m]; j = j + 1]];

For[i = 1, i ≤ 5 * nn * mm, ++i,
For[ j = 1, j ≤ 5 * nn * mm, ++ j,
MM[i, j] = Coefficient[Q[i], RR[ j]];
]
];
DT = Table[Expand[MM[i, j]], {i, 1, 5 * nn * mm}, { j, 1, 5 * nn * mm}];
For[i = 1, i ≤ 5 * nn * mm, ++i,
For[ j = 1, j ≤ 5 * nn * mm, ++ j,
DTD[i, j] = Coefficient[DT[[i, j]], ω^2];
DTS[i, j] = DT[[i, j]] /. {ω → 0};
]
];
```

$$DTST = Table[N[DTS[i, j], PR], \{i,1,5*nn*mm\}, \{j,1,5*nn*mm\}];$$
$$DTDT = Table[N[DTD[i, j], PR], \{i,1,5*nn*mm\}, \{j,1,5*nn*mm\}];$$
$$BMat = -N[Inverse[DTST].DTDT];$$
$$sol = Eigenvalues[\{IdentityMatrix[5nnmm], BMat\}, 5*nn*mm];$$
$$j = 1;$$
$$For[i = 1, i \le 5nnmm, ++i,$$
$$If[NumberQ[sol[[i]]] \&\& \mathrm{Re}[sol[[i]]] > 0, coz[j] = \sqrt{sol[[i]]}; ++j];$$
$$];$$
$$Print["N = ", mm];$$
$$MMOD = Table[\mathrm{Re}[coz[j - i]/(2\pi)], \{i,1,10\}];$$
$$Print[MatrixForm[Table[\{i, MMOD[[i]]\}, \{i,1,10\}]]];$$
$$];$$

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad:	**Ufuk KOL**
Doğum Yeri ve Tarihi:	**İstanbul 21/08/1979**
Adres:	**Atakent Mah.1.etap Kutlutaş A8 Blok D: 9 Küçükçekmece/İstanbul/Türkiye**
Lisans Üniversite:	**İstanbul Teknik Üniversitesi / Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi / Uçak Mühendisliği**