İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KIZAKLI SARKAÇ SİSTEMİNİN H_∞ OPTİMAL KONTROL YÖNTEMLERİ İLE SALINIMSIZ KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Baran ALİKOÇ

Anabilim Dalı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

Programı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KIZAKLI SARKAÇ SİSTEMİNİN H_∞ OPTİMAL KONTROL YÖNTEMLERİ İLE SALINIMSIZ KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Baran ALİKOÇ
(504071104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Leyla GÖREN SÜMER (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)
Doç. Dr. M. Turan SÖYLEMEZ (İTÜ)

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Leyla Gören Sümer' e, katkılarından dolayı değerli hocam Dr. İlker Üstoğlu' na, İTÜ Mekatronik Eğitim ve Araştırma Merkezi' nin kurulmasına katkı sağlayan tüm kişi ve kurumlara, yüksek lisans öğrenimim boyunca burs sağlayan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na teşekkür ederim.

Mayıs 2010

Baran Alikoç

Kontrol ve Otomasyon
Mühendisliği

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **v**
KISALTMALAR ..... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xi**
ÖZET ..... **xiii**
SUMMARY ..... **xv**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
2. H_∞ OPTİMAL KONTROL **5**
2.1 Karma Duyarlılık Fonksiyonu Optimizasyonu 7
2.1.1 Duyarlılık fonksiyonu ve H_∞ normu ile ilişkisi 7
2.1.2 Dayanıklılık ve model bilinmezlikleri 9
2.1.3 Karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu 15
2.2 H_∞ Optimal Kontrolörün Hesaplanması 17
2.2.1 Frekans tanım bölgesi çözümü 18
2.2.2 Durum uzayı çözümü 20
3. KULLANILAN ARAÇ OLARAK POLYNOMIAL TOOLBOX VE ROBUST CONTROL TOOLBOX **23**
3.1 Polyx ile Karma Duyarlılık Fonksiyonu Optimizasyonu 23
3.2 Robust Control Toolbox ile H_∞ Problemin Durum Uzayı Çözümü 25
4. KIZAKLI SARKAÇ SİSTEMİNİN H_∞ OPTİMAL KONTROLÜ **27**
4.1 Sistemin Modellenmesi 27
4.2 Sistemin Karma Duyarlılık Fonksiyonunun Optimizasyonu ile Kontrolü 35
4.3 Sistemin Durum Uzayı Modeli Kullanılarak H_∞ Optimal Kontrolü 44
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **55**
KAYNAKLAR **57**
EKLER **59**

KISALTMALAR

DGKF : Doyle Glover Khargonekar Francis
KTS : Kızaklı Tek Sarkaç
LMI : Doğrusal Matris Eşitsizlikleri
LQG : Doğrusal Quadratik Gaussian
MIMO : Çok Giriş Çok Çıkışlı
Polyx : Polynomial Toolbox
SISO : Tek Giriş Tek Çıkışlı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : hinfsyn komutunda seçime bağlı giriş parametreleri 26

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Standart H_∞ problemi 6
Şekil 2.2 : $G_{22}(s)$' li çevrim 6
Şekil 2.3 : Geribeslemeli SISO sistem..... 7
Şekil 2.4 : Tipik bir duyarlılık fonksiyonunun frekans genlik yanıtı 8
Şekil 2.5 : Belirsizlikleri olan sistemin Nyquist Eğrisi 9
Şekil 2.6 : Genel bilinmezlik modeli ile problemin blok şeması..... 11
Şekil 2.7 : Pay ve payda polinomlarına indirgenmiş bilinmezlik modeli..... 12
Şekil 2.8 : Pay ve payda polinomlarına indirgenmiş genel bilinmezlik modeli 12
Şekil 2.9 : S ve T' nin tipik frekans cevabı genlikleri..... 14
Şekil 2.10 : Karma duyarlılık problemi için blok diyagram..... 15
Şekil 4.1 : KTS sisteminin şeması 28
Şekil 4.2 : α_0 = 20 için açık çevrim sistem yanıtı (uzun sarkaç) 33
Şekil 4.3 : α_0 = 70 için açık çevrim sistem yanıtı (uzun sarkaç) 33
Şekil 4.4 : α_0 = 20 için açık çevrim sistem yanıtı (kısa sarkaç)..... 34
Şekil 4.5 : α_0 = 70 için açık çevrim sistem yanıtı (kısa sarkaç)..... 35
Şekil 4.6 : Duyarlılık Fonksiyonlarına ilişkin frekans cevapları 37
Şekil 4.7 : k = 1 için S ve T frekans genlik eğrileri 38
Şekil 4.8 : c = 5 için S ve T frekans genlik eğrileri..... 38
Şekil 4.9 : S ve T' nin frekans cevap genlik eğrileri 40
Şekil 4.10 : α_0 = 10 ve α_0 = 30 için salınım açısının zamana göre değişimi 41
Şekil 4.11 : α_0 = 50 ve α_0 = 75 için salınım açısının zamana göre değişimi 41
Şekil 4.12 : M_p = 0.1 ve M_p = 0.5 için salınım açısının zaman göre değişimi..... 42
Şekil 4.13 : M_p = 1 ve M_p = 3 için salınım açısının zaman göre değişimi..... 42
Şekil 4.14 : Taşıyıcı sistemin doğrusal hareketi 43
Şekil 4.15 : Kontrol işareti ve salınım açısının zamana göre değişimi..... 43
Şekil 4.16 : Sistemin geri besleme yoluna uygulanan çıkış gürültüsü 44
Şekil 4.17 : Bozucu altında α ve V_m' nin zamana göre değişimi..... 44
Şekil 4.18 : Karma duyarlılık fonksiyonu blok diyagramı 45
Şekil 4.19 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı 45
Şekil 4.20 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı 46
Şekil 4.21 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı 46
Şekil 4.22 : α_0=30 ve α_0=75 için salınım açısının değişimi -$K_{nr}(s)$ ile kontrol- 50
Şekil 4.23 : α_0=30 ve α_0=75 için salınım açısının değişimi -$K_r(s)$ ile kontrol-..... 50
Şekil 4.24 : M_p = 0.1 ve M_p = 3 için salınım açısının değişimi -$K_{nr}(s)$ ile kontrol-... 51
Şekil 4.25 : M_p = 0.1 ve M_p = 3 için salınım açısının değişimi -$K_r(s)$ ile kontrol- 51
Şekil 4.26 : Taşıyıcı sistemin doğrusal hareketi 52
Şekil 4.27 : Kontrol işareti ve salınım açısının zamana göre değişimi..... 52
Şekil 4.28 : Bozucu altında salınım açısının zamana göre değişimi..... 53
Şekil 4.29 : Bozucu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi 53

KIZAKLI SARKAÇ SİSTEMİNİN H_∞ OPTİMAL KONTROL YÖNTEMLERİ İLE SALINIMSIZ KONTROLÜ

ÖZET

H_∞ optimal kontrol; model bilinmezlikleri, modelleme hataları, bozucu girişler ve ölçme gürültüleriyle baş edebilme yeteneğine sahip bir frekans tanım bölgesi optimizasyon ve sentez yöntemidir. Karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu, standart H_∞ probleminin özel bir durumudur. Bu yöntemdeki temel amaç, kontrol edilen sistemin duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonlarının ∞-normlarını minimum kılan kontrolörün bulunmasıdır. Ayrıca, tasarım hedeflerine yönelik olarak seçilen ağırlık ve biçimlendirme filtresi fonksiyonları yardımıyla, duyarlılık fonksiyonlarının frekans yanıtlarının şekillendirilmesi ve kapalı çevrimli sistemin baskın kutuplarının atanması amaçlanmaktadır. H_∞ optimal kontrolör, frekans tanım bölgesinde J-spektral faktorizasyona dayalı algoritmalar veya durum uzayı modeli kullanılarak elde edilen iki cebirsel Riccati denkleminin çözümüne dayalı algoritmalar yardımıyla hesaplanabilir.

Bu çalışmada, karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonunu tek giriş tek çıkışlı sistemler için incelenmiş ve bu tasarım yöntemi kızaklı sarkaç sisteminin salınımsız kontrolü problemine uygulanmıştır. Sistemin hedeflenen davranışı göstermesi için ağırlık fonksiyonları ve biçimlendirme filtresi fonksiyonu belirlenmiştir. Tasarlanan H_∞ problemin, frekans tanım bölgesi çözümü ve durum uzayı çözümü ile kontrolörler hesaplatılmıştır. İyi ayarlanmış duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonları ile hesaplanan kontrolörler aracılığıyla, sarkacın bağlı olduğu, dişli kızak üzerinde hareket eden taşıyıcı hareket ettirilerek sarkacın salınım açısı kontrol edilmiştir. Kontrolörlerin başarımı, yapısal model bilinmezlikleri, parametre değişimleri ve bozucu girişler altında sistemin doğrusal olmayan modeli kullanılarak benzetim yolu ile irdelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

CONTROL OF A SINGLE PENDULUM GANTRY SYSTEM WITH H_∞ OPTİMAL CONTROL METHODS

SUMMARY

H_∞ optimal control is a frequency domain optimization and synthesis technique which has the capability to cope with the model uncertainties, modeling errors, disturbances and measurement noises. Mixed sensitivity function optimization is a special case of standard H_∞ problem. The basic aim in this method is to achieve the controller which minimizes the ∞-norms of the sensitivity and complementary sensitivity functions of the controlled system. Besides that, shaping of the frequency responses of the sensitivity functions and assigning the dominant poles of the closed loop system is purposed with the help of the weighting functions and shaping filter defined for the design targets. H_∞ optimal controller can be calculated by the algorithms using *J*-spectral factorization in frequency domain or by the algorithms based on the solutions of two algebraic Riccati equations using state space representations.

In this study, the mixed sensitivity function optimization is analyzed for the single input single output systems and this approach is applied to control the single pendulum gantry without swing. The weighting functions and the shaping filter function is determined to achieve the desired system attitude. Controllers are calculated by the frequency domain solution and the state space solution of the designed H_∞ problem. By well tuned sensitivity and complementary sensitivity functions, the swing angle of the single pendulum rod is controlled by the position of the cart which is mounted to the pendulum. The performance of both controllers under model and parameter uncertainties, and disturbances are investigated and compared by the simulations using non-linear model of the system.

1. GİRİŞ

Dayanıklı kontrol kuramı, bir sistemin davranışını model belirsizlikleri altında bile istenen gibi yapan kontrol kuralı bulmayı hedefleyen bir kuramdır. Sistemlerde model belirsizliklerine, çevresel ve içsel etkiler sebep olur. Çevresel belirsizlikler, bozucu etkileri ve ölçme gürültüleri gibi dış girişlerden kaynaklanırken; içsel belirsizlikler, modellemeye dahil edilmemiş sistem dinamikleri, doğrusal olmamaya bağlı modelleme hataları veya parametre değişimlerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin; sabit bir yükü taşımak üzere kontrol edilen DC motor için, yükteki değişimler bozucu etkenlerdir. Hata işaretini üretmek üzere takometreden alınan hız bilgisine karşı düşen gerilim işaretine karışan işaretler ölçme gürültüleridir. Motorun endüvi direncindeki zamana ve yıpranmaya bağlı değişimler parametre belirsizliklerine örnek teşkil eder. Sistemdeki belirsizlikler, fiziksel sistemin davranışı ile matematiksel modelinin davranışlarının farklı olmasına neden olur. Örneğin; indirgenmiş mertebeden matematiksel modelde ihmal edilen sistem dinamikleri, doğrusal olmayan bir sistemin doğrusal matematiksel modeli elde edilirken yapılan yaklaşıklıklar, gerçek sistem ile model arasında modelleme hatalarının oluşmasına neden olur. Dayanıklı kontrol kuramı ve teknikleri, başta kararlılık özelliği olmak üzere, sistemin davranışının, bahsedilen bu belirsizlikler altında dahi, tasarım ölçütleri ile belirlenen sınırlar içinde kalmasını sağlayan tasarım yöntemleridir. Model belirsizlikleri hemen her kontrol probleminde kaçınılması mümkün olmayan bir olgu olduğu için, dayanıklı kontrol, kontrol mühendisliğinin en önemli çalışma alanlarından biri olagelmiştir.

1.1 Literatür Özeti

İlk olarak 1932 yılında, Nyquist [1], kontrol çevrimindeki yüksek kazançlar ile dinamik kararlılık arasındaki ilişkiyi frekans tanım bölgesinde analitik olarak ortaya koymuştur. Bode, sistemlerdeki küçük değişimler için sistemin kararlılık ölçütünü, diferansiyel duyarlılık fonksiyonlarını tanımlayarak analitik olarak ifade etmiş ve Nyquist kararlılık kriterini daha sistematik hala getirerek, kazanç ve faz payı

kavramlarını tanımlamıştır [2]. Bode tasarım teknikleri, sonrasında Horowitz tarafından genişletilmiştir [3].

Frekans tanım bölgesinde çözümler sunan bu çalışmalardan sonra, 1960' ların başlarında, Kalman tarafından, sistem modeli olarak durum uzayı modelini kullanan -optimal kontrol ve filtreleme kuramı ile birlikte- zaman tanım bölgesinde tasarım yöntemleri geliştirilmiştir [4]. Kalman, doğrusal zamanla değişen ancak değişimi bilinen sistemler için Doğrusal Quadratik Gaussian (LQG) problemini tanımlamış ve çözümünü vermiştir. Söz konusu kuram, sistem modelinin bilindiği, bozucu girişlerin Gaussian özelliğinde olduğu ve istatistiksel özelliklerinin bilindiği varsayımı üzerine oluşturulmuştur. Bazı istisnalar dışında, 1970' lerin ortalarına kadar, bu konuda yapılan çalışmaların hemen hepsinde, sistem modelinin tam olarak bilindiği varsayılmıştır. Bu istisnalardan biri de, Cruz ve Perkins' in çok giriş çok çıkışlı (MIMO) açık ve kapalı çevrimli sistemlerin model bilinmezliklerinin bir ölçüsü olarak duyarlılık karşılaştırma matrisini ortaya koymasıdır [5]. Bu çalışma, tek giriş tek çıkışlı sistemler (SISO) için tanımlanan duyarlılık kavramının MIMO sistemlere genişletilmesine sağlamıştır.

1970' lerin ikinci yarısında, sistem bilinmezlik problemlerine olan ilgi yenilenmiş artmış ve yeni tekniklerin geliştirilmesi gerektiği anlaşılmıştır [6]. Aynı tarihlerde, çok değişkenli sistemlerin frekans tanım bölgesi analizinde de önemli gelişmeler olmuş, Nyquist kararlılık kriteri çok değişkenli sistemler için genelleştirilmiştir [7-9]. Diğer taraftan, Youla [10], bir sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin parametrelerini veren bir yöntemi, sistemin transfer matrisinin asal çarpanlarını kullanarak geliştirmiştir. Bu yöntem, MIMO sistemlerin dayanıklı kararlılık kavramının gelişmesinde anahtar bir rol oynamıştır.

Kalman tarafından geliştirilen optimal kontrol kuramının, birçok sistemde model bilinmezlikleri altında başarısız olmasının görülmesi, bu başarısızlığın altında yatan nedenlerin anlaşılmasından sonra, 1979 yılında Zames, model bilinmezliklere sahip doğrusal geri-beslemeli SISO sistemlerin duyarlılık fonksiyonlarının H_∞ normunun minimize edilmesine dayanan yeni bir bakış açısı ve yöntem önermiştir [11]. Doyle' un, bir transfer matrisinin H_∞ normunun tekil değer ayrıştırılması ile saptanabileceğini göstermesi [12], H_∞ optimal kontrol çalışmalarında önemli gelişmelerin olmasını sağlamıştır. Francis, Helton ve Zames [13], 1984 yılında, MIMO sistemler için rasyonel, kararlı, nedensel fonksiyonlar halkasında

genelleştirilmiş plant üzerinden H_∞ duyarlılık probleminin çözümünü elde etmiştir. Kwakernaak [14], 1986' da, aynı problemi polinomlar halkasında tanımlanmış genelleştirilmiş plant üzerinden çözmüştür. Doyle, Glover, Khargonekar ve Francis, (DGKF) 1989' da yaptıkları çalışmada, durum uzayı modelinde tanımladıkları bu problem için Riccati temelli bir teori ve yöntem ortaya koymuşlardır [15]. 1994 yılında ise, Gahinet ve Apkarian [16], H_∞ optimal kontrol problemini doğrusal matris eşitsizliklerinin çözümüne indirgemeyi başarmışlardır.

Günümüzde, 1980 sonrası dönemde geliştirilen modern dayanıklı kontrol teknikleri, doğrusal olmayan sistemler için dayanıklı kontrol tasarımında başarıyla uygulanmaktadır. Örneğin, sistem modelinin bilinmez olduğu durumlarda yarar sağlayan H_∞ kestirim metotlarının, hata durumlarını izleme ve hata teşhisi gibi alanlarda uygulamaları görülmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, H_∞ optimal kontrolün temellerinin ve problemin çözümüne yönelik belli başlı yöntemlerin incelenip öğrenilmesi ve gerçek bir sistem üzerinde uygulanmasıdır. Bu doğrultuda, SISO sistemler için, karma duyarlılık fonksiyonunun optimizasyonu ile H_∞ kontrolör tasarımı ve durum uzayı modeli kullanılarak Riccati temelli H_∞ optimal kontrolör tasarımı irdelenmiştir. Bu iki yöntem aracılığıyla tasarlanan sistemlerin model bilinmezlikleri, modelleme hataları, bozucu girişler ve ölçme gürültüleriyle baş edebilme yeteneği yani dayanıklılık özellikleri sunulmuştur. Yöntemlerin açıklanmasından sonra, çözümü bulmaya yönelik araçlar -MATLAB Polynomial Toolbox ve Robust Control Toolbox- kısaca tanıtılmıştır. Tanıtılan paket programlar da kullanılarak her iki yöntem aracılığıyla, H_∞ optimal kontrolör tasarımı kızaklı sarkaç sistemi için gerçekleştirilmiştir. Kapalı çevrimli sistemin davranışı, hem ölçütlerin sağlanması hem de dayanıklılık açısından, MATLAB Simulink' te yapılan benzetim sonuçları ve gerçek sistem deney sonuçları üzerinden incelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

2. H_∞ OPTİMAL KONTROL

H_∞ optimal kontrol teorisinin temelleri, matematikçi Hardy' nin kompleks düzlemde tanımladığı analitik ve sağ yarı düzlemde sınırlı fonksiyon uzaylarına dayanmaktadır [17]. H_∞ uzayı, doğrusal zamanla değişmeyen nedensel ve kararlı sistemlerin transfer fonksiyonlarının yer aldığı uzaydır. SISO bir sistemin H_∞ normu, transfer fonksiyonu frekans cevabının genliğinin maksimum değerine eşittir [18]. Dolayısıyla, sistemin H_∞ normu, klasik kontrol tasarımında kullanılan kazanç payına karşı düşen bir ölçüdür. Bu özellik, var olan geri besleme teorisi ile H_∞ teorinin ilişkilendirilmesine olanak sağlamıştır. Örneğin, duyarlılık fonksiyonunun genliğiyle H_∞ normu ilişkilendirilebilir, ya da tasarımın dayanıklılık ölçütü frekans tanım bölgesinde Nyquist eğrisinin $(-1+j0)$ noktasına olan uzaklığıyla tayin edilebilir.

Bir frekans tanım bölgesi optimizasyonu ve sentez yöntemi olan H_∞ optimal kontrol, özellikle model bilinmezlikleri ile baş edebilmek için geliştirilmiştir. H_∞ tasarımın temel düşüncesi, hiç bir bilginin olmaması halinde, kontrol kuralının en kötü duruma göre belirlenmesi olarak özetlenebilir [19]. Önerilen tasarım yönteminin yararlı olması için, şu özelliklere sahip olması gerektiği söylenebilir:

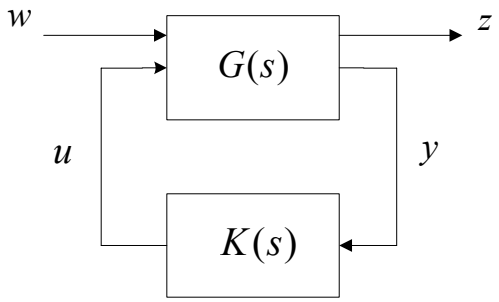
i. Model bilinmezliklerinin ve bilinmeyen bozucuların problemin formülasyonuna eklenebilmesi gerekir.

ii. Var olan geribesleme teorisi ile ilişkilendirilebilmelidir. Bu, klasik kontrol tasarımındaki sezgilerin kullanılmasını kolaylaştıracaktır.

iii. Anlamlı bir optimizasyon uygulamaya izin vermelidir.

iv. MIMO sistemlerle baş etme yeterliğinde olmalıdır.

İlk olarak Francis ve Doyle [20] tarafından tanımlanan standart H_∞ kontrol probleminin formülasyonunda Şekil 2.1' deki blok şema temel alınır. Standart problemde amaç; $G(s)$ genelleştirilmiş plant transfer fonksiyonu, u kontrol işareti, y ölçülen çıkış, z minimize edilmesi beklenen ceza işaretleri olmak üzere, w' dan z' ye olan kapalı çevrimli sistemin transfer fonksiyonunun H_∞ normunu minimize eden ve sistemi iç kararlı kılan $K(s)$ kontrolörünü bulmaktır.



Şekil 2.1 : Standart H_∞ problemi

Problem formülasyonunda $G(s)$ ve $K(s)$,

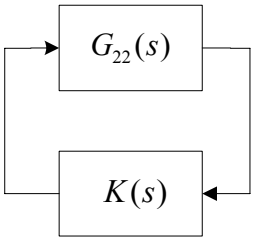
$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$u = K(s)y \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilirler. Tüm dış girişlerden, ceza işaretlerine olan transfer fonksiyonu $T_{zw}(G,K)$,

$$T_{zw}(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)\left(I - G_{22}(s)K(s)\right)^{-1} K(s)G_{21}(s) \tag{2.3}$$

olarak bulunur. Daha öncede söz edildiği gibi, amaç, $\| T_{zw}(s) \|_\infty$ ' i minimum yapan ve kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan kontrolörü bulabilmektir. Kontrolörün varlığının gerek koşullarından biri problemin iyi tanımlanmış olmasıdır. İyi tanımlanmış (well-posedness) olmanın gerek ve yeter koşulu $I - K(s)G_{22}(s)$ polinom matrisinin tersinin olmasıdır. Diğer taraftan, kapalı çevrimli sistemin kararlı olmasının gerek ve yeter koşulu ise, Şekil 2.2' de görülen kapalı çevrimli sistemin kararlı olmasıdır [21].



Şekil 2.2 : G_{22}(s)' li çevrim

Bu genel formülasyon ve bilgilerden sonra, frekans tanım bölgesindeki karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu, bu tasarımın temel kavramları, model bilinmezlikleri altında dayanıklılığı, ve kontrolör hesaplama yöntemine

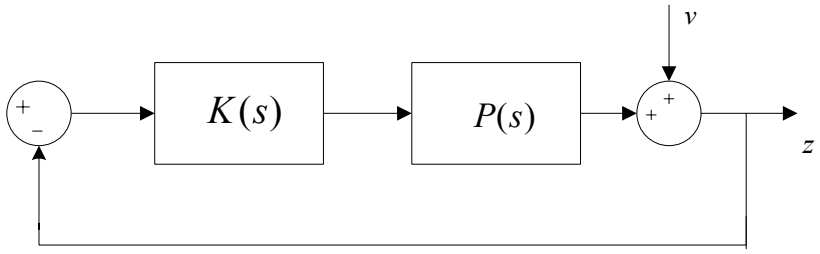
değinilenecektir. Sonra da, sistemin durum uzayı modeli kullanılarak yapılan tasarım ve kontrolörün hesaplanması anlatılacaktır.

2.1 Karma Duyarlılık Fonksiyonu Optimizasyonu

Zames SISO doğrusal geribeslemeli bir sistemin duyarlılık fonksiyonlarının H_∞ normunun minimize edilmesine dayalı bir dayanıklı kontrol bakış açısı ve tekniği geliştirmiştir [11]. Karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu, standart H_∞ probleminin özel bir durumudur. Geleneksel geribesleme ve kontrol kuramıyla sıkı ilişkiler içinde olan bu yöntem, kısa zamanda büyük ilgi görmüş ve sonrasında yapılacak çalışmalara ön ayak olmuştur. Bu bölümde, yöntemin temelleri ve tasarıma ilişkin bilgiler verilmiştir.

2.1.1 Duyarlılık fonksiyonu ve H_∞ normu ile ilişkisi

Geribesleme uygulanmış bir SISO sistemin blok diyagramı, $P(s)$ sistem transfer fonksiyonu, $K(s)$ kontrolör, v sisteme etkiyen bozucu işaret ve z kontrol edilen sistem çıkışı olmak üzere Şekil 2.3' de görülmektedir.



Şekil 2.3 : Geribeslemeli SISO sistem

Giriş ve çıkış işaretleri arasındaki ilişki $Z(s) = V(s) - P(s)K(s)V(s)$ şeklindedir ve bozucu işaret ile çıkış işareti arasındaki transfer fonksiyonu,

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \tag{2.4}$$

geribeslemeli sistemin *duyarlılık fonksiyonunu* ifade eder. Duyarlılık fonksiyonu, bozucu işaret ile bu işaretin çıkışta neden olacağı değişim arasındaki ilişkiyi veren matematiksel ifadedir. Hiç şüphesiz ki; duyarlılık fonksiyonu normunun küçük olması, bozucuların sistem çıkışına olan etkisinin küçük olmasını sağlayacaktır. Bir SISO transfer fonksiyonunun ∞-normu, Şekil 2.4' de olduğu gibi, frekans tanım bölgesindeki genliğinin tepe değerine denk düşmektedir:

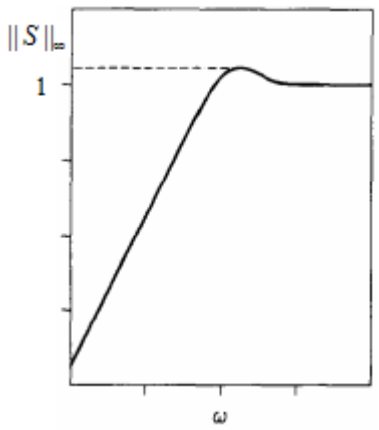
$$\| S \|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} | S(j\omega) | . \quad \textbf{(2.5)}$$

MIMO sistemler için, birden fazla fonksiyon ve tepe değeri olacağından, sistemin ∞-normu tepe değerlerin en küçüğü olarak ifade edilir:

$$\| S \|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} | S(j\omega) | . \quad \textbf{(2.6)}$$

Duyarlılık fonksiyonunun tepe değeri minimize edilirse, diğer tüm frekanslar için de genlik minimizasyonu yapılmış olur. $\|S\|_\infty$' un minimum kılınması, en kötü durum için optimizasyondur: çünkü, frekans tanım bölgesindeki en büyük genliğin minimize edilmesi, çıkışa en fazla etki eden, o genliğe karşı düşen frekanstaki bozucu girişin bastırılmasına denk düşer. Bu sebeple, Zames kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan ve duyarlılık fonksiyonu tepe değerini minimum yapan kontrolörü bulma arayışına gitmiştir [11].

Her fiziksel sistem ve kontrolör nedensel olduğu için, duyarlılık fonksiyonu frekans genlik yanıtı yüksek frekanslarda Şekil 2.4' de görüldüğü üzere asimptotik olarak bire yaklaşır.



Şekil 2.4 : Tipik bir duyarlılık fonksiyonunun frekans genlik yanıtı

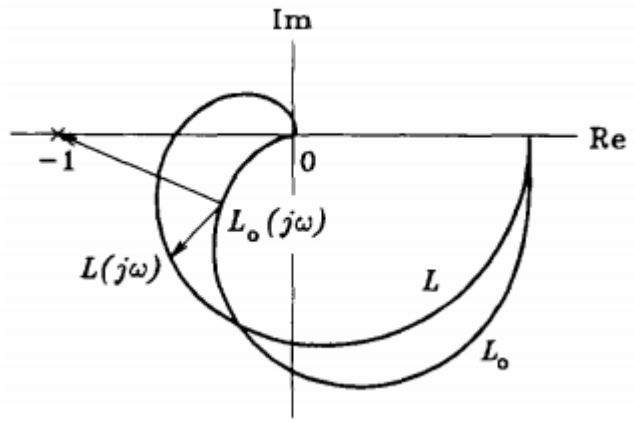
Duyarlılık fonksiyonunun, düşük frekanslarda ne kadar küçük kazançlı olduğu, tepe değere etkisinin olmamasına rağmen, kontrol başarımı açısından öneme sahiptir. Bu yüzden, doğrudan $\|S\|_\infty$' un minimize edilmesi yerine; $W(s)$, düşük frekanslarda büyük kazançlı yüksek frekanslarda küçük kazançlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere,

$$\| WS \|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} | W(j\omega) S(j\omega) | \quad \textbf{(2.7)}$$

normunun minimum yapılması düşünülür. Ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesi ileride ayrıntılı olarak anlatılacaktır.

2.1.2 Dayanıklılık ve model bilinmezlikleri

Bu bölümde, $\| S \|_\infty$' un minimizasyonu ile dayanıklı kontrol tasarımı, Şekil 2.3' deki geribeslemeli SISO sistemin, Şekil 2.5' de görülen Nyquist eğrisi üzerinden anlatılacaktır. Nominal sistem açık çevrim transfer fonksiyonu $L_0(s) = P_0(s)K(s)$ düşünülerek, model bilinmezliklerinin dahil edildiği gerçek sistem transfer fonksiyonu $L(s)$' in kararlılık koşulları tartışılacaktır.



Şekil 2.5 : Belirsizlikleri olan sistemin Nyquist Eğrisi

$L_0(j\omega)$' nın Nyquist eğrisinin -1' i çevrelemediği ve kararlı olduğu; $L(j\omega)$' nın kararlı olması için ise,

$$| L(j\omega) - L_0(j\omega) | < | L_0(j\omega) + 1 |, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

koşulunun sağlanması gerektiği görülmektedir. Eşitsizlik (2.8),

$$\frac{| L(j\omega) - L_0(j\omega) |}{| L_0(j\omega) |} \cdot \frac{| L_0(j\omega) |}{| L_0(j\omega) + 1 |} < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

ifadesine denktir. Nominal t*amamlayıcı duyarlılık fonksiyonu*,

$$T_0 = 1 - S_0 = 1 - \frac{1}{1 + L_0} = \frac{L_0}{1 + L_0} \tag{2.10}$$

olmak üzere, eşitsizlik (2.9),

$$\frac{| L(j\omega) - L_0(j\omega) |}{| L_0(j\omega) |} \cdot | T_0(j\omega) | < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

olarak ifade edilir ve bu koşul sağlandığında kapalı çevrimli sistem kararlı olur. (2.11)' deki $L_0(j\omega)$' ya göre bağıl değişim ifadesi,

$$\frac{|L(j\omega)-L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|} < |W(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

şeklinde sınırlıysa, kapalı çevrimli sistemin bu belirsizlik altında kararlı olmasının gerek ve yeter koşulu, (2.11) kullanılarak,

$$|W(j\omega)T_0(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

olarak elde edilir [21]. Bu koşul, açık çevrimli sistemin kararlı olduğu varsayımı altında elde edilmiştir, ancak nominal açık çevrimli ve belirsizliklere sahip açık çevrimli sistemin, sağ yarı s-düzleminde eşit sayıda kutbu olması -belirsizliğin kararsız bölgede yeni bir kutup getirmemesi- durumunda da geçerlidir. (2.6)' daki tanım kullanılarak, (2.13)' deki kararlılık koşulu,

$$\| W T_0 \|_\infty < 1 \tag{2.14}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylelikle, ∞-norm ile dayanıklı kararlılık arasındaki ilişki Nyquist kararlılık kriteri üzerinden kurulmuş, yani $\| W T_0 \|_\infty$' nu minimum kılan ve kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin bulunması optimum dayanıklılığı elde etmenin yolu olarak belirlenmiş olur. Ancak, ∞-norm minimum yapıldığında, bu normun değeri sıfır da olabileceğinden, $K(s)$=0 olması durumuyla da karşılaşılabilir ki; sistem duyarlılığı ve yanıtı açısından bu istenmeyen bir durumdur. Bu olumsuzlukla baş edilebilmesi için farklı bir dayanıklılık kriterine ihtiyaç vardır.

Model bilinmezlikleri,

$$|\delta_L(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

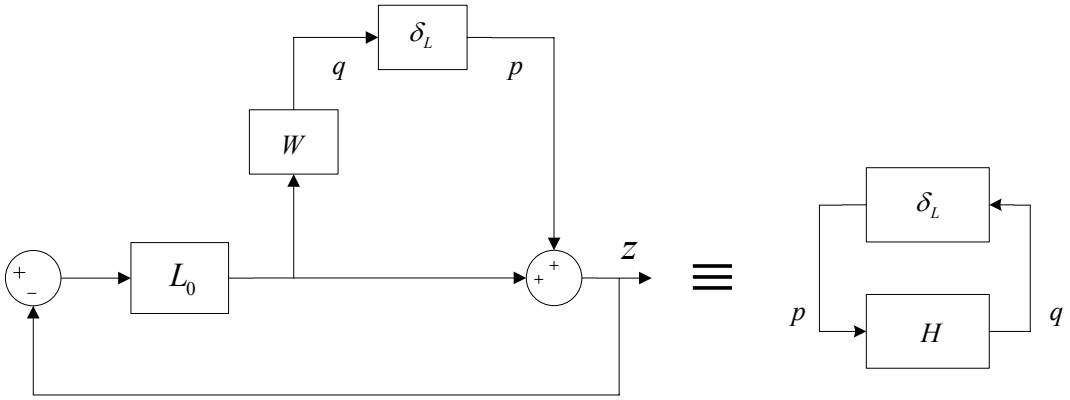
olmak üzere,

$$L_0 \rightarrow L_0(1+\delta_L W) \tag{2.16}$$

şeklinde modellenebilir. (2.15) ifadesi,

$$\| \delta_L \|_\infty \leq 1 \tag{2.17}$$

eşitsizliğine denktir. Bu genel bilinmezlik modeli kullanılırsa, geribeslemeli SISO sistem için Şekil 2.6' da görülen blok şema elde edilir.



Şekil 2.6 : Genel bilinmezlik modeli ile problemin blok şeması

Bilinmezlikler altında kapalı çevrimli sistemin kararlı olması için, küçük kazanç teoremi gereğince [22],

$$\| H\,\delta_L \| \le 1 \qquad \textbf{(2.18)}$$

sağlanmalıdır. $\| H\delta_L \| \le \| H \| \cdot \| \delta_L \|$ olduğundan, (2.18) ifadesi, $\| H \| \cdot \| \delta_L \| < 1$ olarak yazılabilir. (2.17) varsayımı altında kararlılık koşulu,

$$\| H \|_\infty \le 1 \qquad \textbf{(2.19)}$$

olarak elde edilir. δ_L =1 alındığında, p' den q' ya olan transfer fonksiyonu H ,

$$H = -W\,\frac{L_0}{1+L_0} = -WT_0 \qquad \textbf{(2.20)}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, (2.19) ile verilen kararlılık koşulu,

$$\| W\,T_0 \| < 1 \qquad \textbf{(2.21)}$$

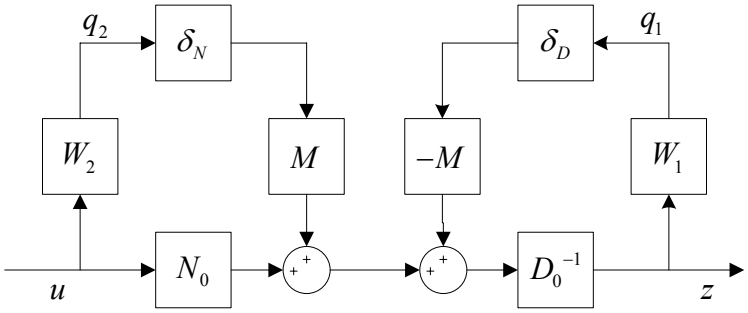
olur ki; bu da (2.14) ifadesi ile aynıdır.

Nominal sistemin transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomundaki model bilinmezlikleri altında dayanıklı kararlılık koşulunun elde edilmesi için Şekil 2.3' deki bilinmezliklere sahip sistemin transfer fonksiyonu,

$$P = \frac{N}{D} = \frac{N_0 + \delta_N M\,W_2}{D_0 + \delta_D M\,W_1} \qquad \textbf{(2.22)}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu ifadedeki δ_N ve δ_D, genlikleri birden büyük olmayan frekans tanım bölgesi fonksiyonları iken; MW_1 ve MW_2, pay ve paydadaki bilinmezliklere karşı düşen frekans tanım bölgesi fonksiyonlarıdır. M, ağırlık

fonksiyonlarının seçiminde esneklik sağlamaktadır ve tasarımda nasıl kullanılacağı Bölüm 2.1.3' de anlatılacaktır. Rasyonel matrisler aralarında asal polinomlarla ifade edildiğinde [23], (2.22) model bilinmezlik ifadesinin blok diyagramı Şekil 2.7' de verilmiştir [24].

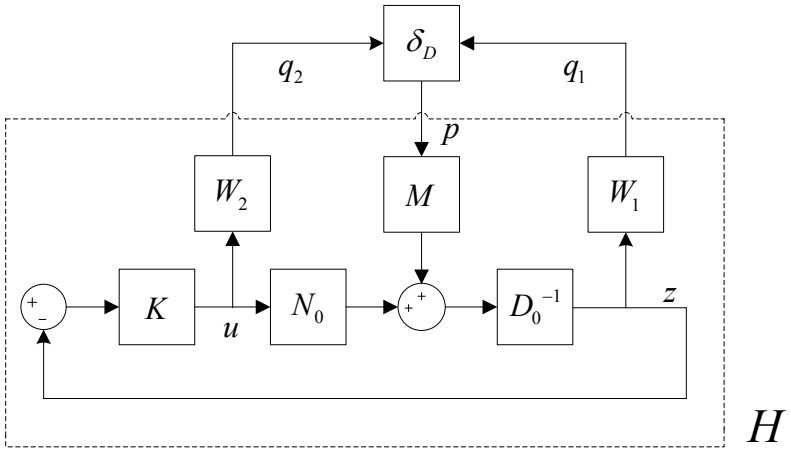


Şekil 2.7 : Pay ve payda polinomlarına indirgenmiş bilinmezlik modeli

Model bilinmezlikleri nedeniyle, sisteme etkiyen işaret p,

$$p = -\delta_D q_1 + \delta_N q_2 = \begin{bmatrix} -\delta_D & \delta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \delta_P \, q \qquad \textbf{(2.23)}$$

olmak üzere, kapalı çevrimli sistemin pay ve payda bilinmezlikleriyle beraber modeli Şekil 2.8' deki gibi olur.



Şekil 2.8 : Pay ve payda polinomlarına indirgenmiş genel bilinmezlik modeli

Blok diyagram Şekil 2.8' de kesikli çizgilerle belirtilen kısım olan H' nin, girişi p, çıkışı ise $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$' dur. $V = D_0^{-1} M$ olmak üzere, z ile p işareti arasındaki ilişki,

$$z = \frac{V}{1 + P_0 K} \, p \qquad \textbf{(2.24)}$$

şeklindedir. Bu ilişki kullanılarak, q_1 ve q_2 işaretleri,

$$q_1 = W_1 z = W_1 \frac{V}{1+P_0K} p\,, \tag{2.25}$$

$$q_2 = -W_2 K z = -W_2 \frac{KV}{1+P_0K} p \tag{2.26}$$

olarak elde edilir. Nominal duyarlılık fonksiyonu,

$$S_0 = \frac{1}{1+P_0K} \tag{2.27}$$

ve giriş duyarlılık fonksiyonu,

$$U_0 = \frac{K}{1+P_0K} \tag{2.28}$$

olmak üzere, H' nin transfer fonksiyonu matrisi;

$$H = \begin{bmatrix} W_1 S_0 V \\ -W_2 U_0 V \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

olacaktır. H_∞ normunun karesi,

$$\| H \|_\infty^{\,2} = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left(| W_1(j\omega) S_0(j\omega) V(j\omega) |^2 + | W_2(j\omega) U_0(j\omega) V(j\omega) |^2 \right) \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilirse ve model bilinmezliklerinin,

$$| \delta_D(j\omega) |^2 + | \delta_N(j\omega) |^2 \le 1\,, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.31}$$

şeklinde sınırlı olduğu varsayımı altında, (2.19) ile verilen kararlılık koşulu Şekil 2.8' de verilen model için,

$$| W_1(j\omega) S_0(j\omega) V(j\omega) |^2 + | W_2(j\omega) U_0(j\omega) V(j\omega) |^2 < 1\,, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

olarak elde edilir.

Bilinmezliklere sahip sistem transfer fonksiyonunun pay ve paydasındaki model bilinmezlikleri bağıl olarak $(N - N_0)/N_0$ ve $(D - D_0)/D_0$ ile ifade edilirse, (2.31)' de verilen, bilinmezliklerin sınırı,

$$\left|\frac{\frac{D-D_0}{D_0}}{VW_1}\right| + \left|\frac{\frac{D-D_0}{D_0}}{\frac{VW_2}{P_0}}\right| \le 1 \qquad \textbf{(2.33)}$$

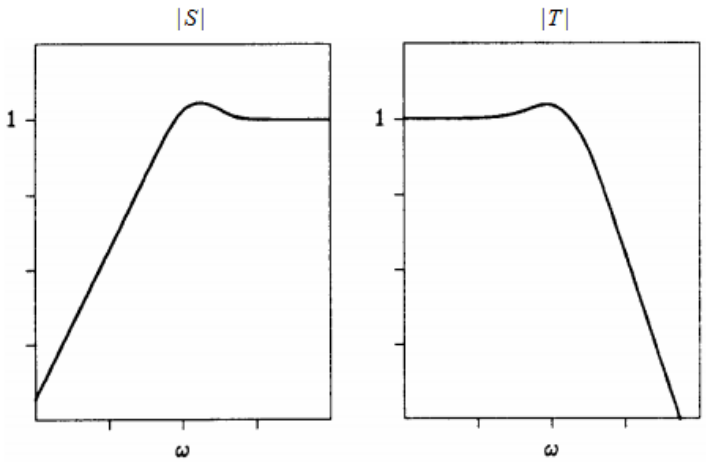
şeklinde oluşturulur. Böylece, (2.32)' de verilen pay ve payda bilinmezliklerine karşı kararlılık koşulu, $T_0 = P_0 U_0$ olduğundan,

$$|W_1(j\omega)S_0(j\omega)V(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)T_0(j\omega)V(j\omega)/P_0(j\omega)|^2 < 1\,, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.34)}$$

şeklinde de ifade edilebilir [25].

VW_1 ve VW_2 / P_0 fonksiyonlarının, sırasıyla pay ve paydadaki bağıl değişimler için bir ölçü olduğu görülmektedir. (2.34)' ün sağlanması için VW_1' in genliğinin -paydadaki bozulmanın- büyük olduğu frekanslarda S_0' ın genliğinin küçük; VW_2 / P_0' ın genliğinin -paydaki bozulmanın- büyük olduğu frekanslarda T_0' ın genliğinin küçük olması sağlanmalıdır.

Endüstriyel sistemlerde, referans girişler ve bu girişlere etki eden bozucu işaretler genellikle alçak frekanslarda; çıkış işaretinde görülen gürültüler ise yüksek frekanslardadır. Ayrıca, payda polinomundaki bilinmezlikler sistem davranışına alçak frekanslarda etki ederken; pay polinomundaki bilinmezlikler sistem davranışına yüksek frekanslarda etki etmektedir. Dolayısıyla, bozucu ve gürültü işaretleri ile pay ve payda polinomundaki bilinmezliklere bağlı etkilerin bastırılabilmesi için; sistemin duyarlılık fonksiyonu genliği alçak frekanslarda küçük, tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu genliği ise yüksek frekanslarda büyük seçilmelidir. Bu durum Şekil 2.9' da gösterilmiştir.

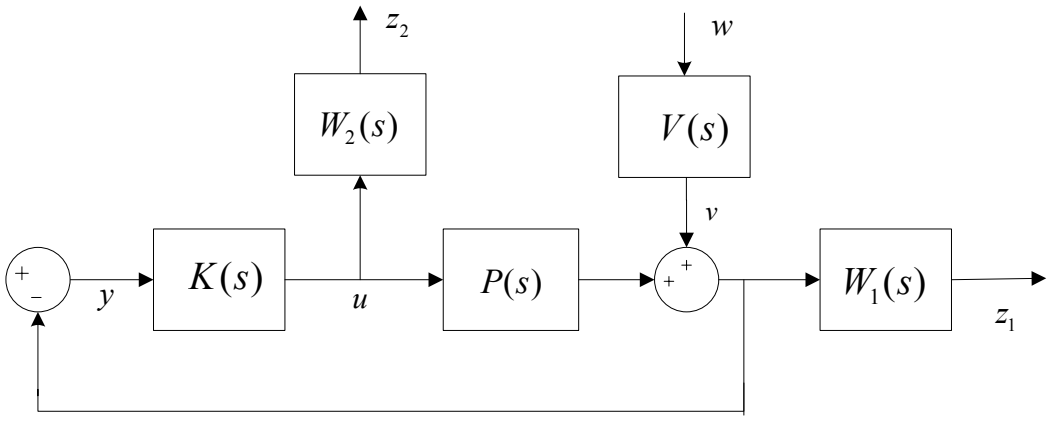


Şekil 2.9 : S ve T' nin tipik frekans cevabı genlikleri

2.1.3 Karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu

Duyarlılık ve giriş duyarlılık fonksiyonlarını içermesi nedeniyle karma duyarlılık adıyla Verma ve Jonckheere [26] tarafından tanımlanan problemi, Kwakernaak H_∞ normunun minimize edilmesiyle ilişkilendirmiştir [24]. Bu çalışmada, kararlılığın garanti edilmesinin yanı sıra, problemin çözümünde bir serbestlik dereceli kontrol yapısı ile geribeslenmiş doğrusal sistemler için frekans tanım bölgesinde tasarım hedeflerine ulaşabilmenin yöntemleri sunulmuştur.

Karma duyarlılık probleminin blok diyagramı Şekil 2.10' da verilmiştir. w biçimlendirme filtresi $V(s)$' i süren dış işarettir. z_1 işareti, kontrol sisteminin -$W_2(s)$ ile- ağırlıklı çıkışı; z_2 ise, -$W_1(s)$ ile- ağırlıklı sistem girişidir.



Şekil 2.10 : Karma duyarlılık problemi için blok diyagram

w' den $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$ ' a transfer fonksiyonu, (2.29)' a benzer şekilde,

$$H = \begin{bmatrix} W_1 SV \\ -W_2 UV \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Amaç; giriş ve çıkıştan gelen bozucuların, ayrıca sistem transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomlarında görünecek olan model bilinmezliklerinin etkisinin giderilmesi için H_∞ normunun minimize edilmesidir.

Bu norm iadesi, γ pozitif bir sabit sayı olmak üzere,

$$|W_1(j\omega)S_0(j\omega)V(j\omega)|^2 + |W_2(j\omega)U_0(j\omega)V(j\omega)|^2 = \gamma^2 \tag{2.36}$$

şeklinde yazılırsa, optimal çözüm,

$$|W_1(j\omega)S_0(j\omega)V(j\omega)|^2 \le \gamma^2 \ , \quad \omega \in \mathbb{R}$$
$$|W_2(j\omega)U_0(j\omega)V(j\omega)|^2 \le \gamma^2 \ , \quad \omega \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.37)}$$

eşitsizliklerini sağlayacaktır. Tipik model bilinmezlikleri, endüstriyel sistemlerdeki bozucu ve gürültü karakteristikleri göz önünde bulundurularak, VW_1' in genliği alçak frekanslarda büyük ve VW_2' nin genliği yüksek frekanslarda büyük seçilirse; optimizasyonda, $|W_1(j\omega)S_0(j\omega)V(j\omega)|^2$ teriminin düşük frekanslarda, $|W_2(j\omega)U_0(j\omega)V(j\omega)|^2$ teriminin yüksek frekanslarda belirleyici olması sağlanır. Sonuç olarak,

$$|S(j\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)V(j\omega)|}, \quad \textit{küçük } \omega\textit{'lar için}, \qquad \textbf{(2.38)}$$

$$|U(j\omega)| \approx \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)V(j\omega)|}, \quad \textit{büyük } \omega\textit{'lar için}, \qquad \textbf{(2.39)}$$

yaklaşık eşitlikleri elde edilir. Bu iki yaklaşık eşitlik kullanılarak, duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonlarının frekans genlik cevaplarının Şekil 2.9' daki gibi elde edilmesi için, ağırlık ve biçimlendirme filtresi fonksiyonlarının belirlenmesi gerekir. Bu tasarım yöntemi Bölüm 2.1.2' de belirtildiği gibi, minimum fazlı sistemler için kullanılabilir [27].

Karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonunda önemli bir olgu da, *kısmi kutup atama* olarak adlandırılan, *J*-spektral faktorizasyon yardımıyla kontrolör transfer fonksiyonu bulunurken, kapalı çevrimli sistem kutuplarının istenen yerlere atanabilmesidir [14, 28]. Yöntemin anlaşılabilmesi için problemdeki tüm fonksiyonlar pay ve payda polinomları ile,

$$P = \frac{N}{D}, \quad W_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad W_2 = \frac{A_2}{B_2}, \quad V = \frac{M}{E}, \quad K = \frac{Y}{X} \ . \qquad \textbf{(2.40)}$$

ifade edilsin. Bu durumda, duyarlılık ve giriş duyarlılık fonksiyonları,

$$S = \frac{DX}{DX + NY} \ , \quad U = \frac{DY}{DX + NY} \ , \qquad \textbf{(2.41)}$$

ve kapalı çevrimli sistemin karakteristik polinomu,

$$D_{cl} = DX + NY \qquad \textbf{(2.42)}$$

şeklinde elde edilir. (2.36) ile verilen H_∞ normu, karmaşık düzlemde tüm s değerleri için,

$$W_1(s)W_1(-s)S(s)S(-s)V(s)V(-s)+W_2(s)W_2(-s)U(s)U(-s)V(s)V(-s)=\gamma^2 \qquad \textbf{(2.43)}$$

eşitliğini sağlar. (2.40), (2.41), (2.42) ifadeleri, $A^{\sim}(s)=A(-s)$ olmak üzere, (2.43)' de yerine yazılırsa,

$$\frac{D^{\sim}D\cdot M^{\sim}M\cdot\left(A_1^{\sim}A_1B_2^{\sim}B_2X^{\sim}X+A_2^{\sim}A_2B_1^{\sim}B_1Y^{\sim}Y\right)}{E^{\sim}E\cdot B_1^{\sim}B_1\cdot B_2^{\sim}B_2\cdot D_{cl}^{\sim}D_{cl}}=\gamma^2 \qquad \textbf{(2.44)}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı bir sabit olduğundan, sol taraftaki fonksiyonların çarpanları birbirini götürmek durumundadır. Eğer $D^{\sim}D$ ve $E^{\sim}E\cdot B_1^{\sim}B_1\cdot B_2^{\sim}B_2$ çarpanları arasında sadeleşme olmazsa, açık çevrim kutupları kapalı çevrim karakteristik polinomu D_{cl}' nin kökleri olacaktır. Tasarımda istenmeyen bu durum, E - biçimlendirme fitresi payda polinomu- ile D' nin -açık çevrimli sistem transfer fonksiyonu payda polinomu- aynı seçilmesiyle ortadan kaldırılabilir. Dolayısıyla, biçimlendirme filtresi fonksiyonu,

$$V=\frac{M(s)}{D(s)} \qquad \textbf{(2.45)}$$

şeklinde seçilmelidir.

Genelliği bozmaksızın, $M^{\sim}M$ ile $E^{\sim}E\cdot B_1^{\sim}B_1\cdot B_2^{\sim}B_2$ çarpanları arasında sadeleşme yok ise, $M(s)$' in çarpanları ile $D_{cl}(s)$' in çarpanları arasında sadeleşme olması gerektiği (2.44)' den görülür. Eğer $V(s)$ nedensel seçilirse, bir başka deyişle, $M(s)$' in derecesi $D(s)$' in derecesine eşit seçilirse, tüm kapalı çevrim kutuplarının yerleri belirlenebilir. $W_1(s)$ ile $W_2(s)$ ağırlık fonksiyonlarının sıfır ve kutuplarının uygun seçilmesiyle $M(s)$' in sıfırları kapalı çevrimli sistemin baskın kutupları haline gelecektir.

2.2 H_∞ Optimal Kontrolörün Hesaplanması

Bu bölümde H_∞ optimal kontrolörün bulunması için frekans tanım bölgesinde ve durum uzayı modelinde geliştirilen hesaplama algoritmaları kısaca anlatılacaktır.

2.2.1 Frekans tanım bölgesi çözümü

H_∞ optimizasyonu ilk olarak frekans tanım bölgesinde yapıldığından, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan kontrolörün hesaplanmasına yönelik ilk algoritma doğal olarak frekans tanım bölgesinde geliştirilmiştir. *J*-spektral faktorizasyona dayalı bu algoritma Kwakernaak tarafından ortaya konmuştur [29].

Şekil 2.1' de görünen standart problemde H_∞ normu minimize edilecek olan transfer matrisi,

$$H = G_{11} + G_{12}\left(I - KG_{22}\right)^{-1} KG_{21} \qquad \textbf{(2.46)}$$

olarak bulunmuştu. H_∞ optimizasyonunda temel amaç, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan ve

$$\| H \|_\infty \le \gamma \qquad \textbf{(2.47)}$$

koşulunu sağlayan çözümler bulmaktır. Nedensel rasyonel fonksiyonlar halkasında tanımlı bir *H* matrisi için (2.47) koşulunun eşdeğeri olan koşul, $H^T(-j\omega) = H^{\sim}(j\omega)$ olmak üzere,

$$H^{\sim}H \le \gamma^2 I \ , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.48)}$$

şeklindedir.

P kararsız ve *K* kararlı transfer matrisleri olmak üzere, $H = P - K$ özel durumunu düşünmek, çözümü anlamayı kolaylaştıracaktır. Bu durum, standart problemde genelleştirilmiş plant transfer matrislerinin; $G_{11} = P$, $G_{12} = -I$, $G_{21} = I$, $G_{22} = 0$ olduğu Nehari problemini tanımlar [30]. $H = P - K$, (2.48)' de yerine yazıldığında,

$$\Pi_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^2 I - P^{\sim}P & P^{\sim} \\ P & -I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.49)}$$

rasyonel bir matris olmak üzere, kararlı olma koşulu,

$$\begin{bmatrix} I & K^{\sim} \end{bmatrix} \Pi_\gamma \begin{bmatrix} I & K \end{bmatrix}^T \ge 0 \qquad \textbf{(2.50)}$$

olarak elde edilir. Kontrolör transfer matrisi, *X* ve *Y* kararlı rasyonel fonksiyon matrisleri olmak üzere,

$$K = YX^{-1} \qquad \textbf{(2.51)}$$

şeklinde tanımlanırsa ve (2.50) sağdan X , soldan $X^{\sim}$ ile çarpılırsa,

eşitsizlik (2.50) ifadesi,

$$\begin{bmatrix} X^{\sim} & Y^{\sim} \end{bmatrix} \Pi_{\gamma} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \textbf{(2.52)}$$

şeklinde yazılabilir. Ele alınan problem için, Π_{γ} matrisinin,

$$\Pi_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -G_{12}^{\sim} & -G_{22}^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 I - G_{11}G_{11}^{\sim} & -G_{11}G_{21}^{\sim} \\ G_{21}G_{11}^{\sim} & -G_{21}G_{21}^{\sim} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -G_{12} \\ I & -G_{22} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.53)}$$

olduğu gösterilebilir.

Π_{γ} para-Hermityan bir matristir. Eğer, Π_{γ} matrisinin determinantının sanal eksen üzerinde kutbu ve sıfırı yoksa,

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.54)}$$

olmak üzere,

$$\Pi_{\gamma} = Z_{\gamma}^{\sim} J Z_{\gamma} \qquad \textbf{(2.55)}$$

J-spektral ayrıştırması yapılabilir. Z_{γ}, kendisinin ve tersinin tüm kutupları sol yarı s-düzleminde olan rasyonel bir kare matristir. (2.55)' deki faktorizasyon ifadesi kullanılarak, (2.52) ile verilen koşul,

$$\begin{bmatrix} X^{\sim} & Y^{\sim} \end{bmatrix} Z_{\gamma}^{\sim} J Z_{\gamma} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \textbf{(2.56)}$$

şeklinde tekrar yazılır.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Z_{\gamma} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.57)}$$

eşitliğini sağlayan, *A* ve *B* kararlı rasyonel kare matrisleri tanımlanırsa,

$$A^{\sim} A \geq B^{\sim} B \qquad \textbf{(2.58)}$$

(2.52) ile verilen koşula denk olacaktır. Z_{γ} matrisinin tersi alındığında, $\| H \|_{\infty} \leq \gamma$ koşulunu sağlayan $K = YX^{-1}$ biçiminde olan tüm kontrolörleri bulmakta kullanılan,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = Z_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.59)}$$

genel ifade bulunmuş olur. Bu kontrolörlerin kapalı çevrimli sistemi kararlı kılmasının gerek koşulu, $A(s)$ matrisinin determinantını sıfır yapan s-değerlerinin tümünün sol yarı s-düzleminde olmasıdır. (2.58)' i sağlayan birçok A ve B matrisi vardır; örneğin, $A = I$, $B = 0$ bu koşulu sağlar ve *merkezi çözüm* olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, $\| H \|_\infty \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan ve minimum γ için kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kontrolörü arama algoritması şöyledir:

i. Bir γ değeri seçilir.

ii. J-spektral çarpan Z_γ belirlenir. Bu γ değerine ve Z_γ ' ye karşı düşen kontrolör (2.58) koşulunu sağlayan, *detA*' nın tüm kökleri sol yarı s-düzleminde olmak üzere, her hangi A ve B matrisi için (2.59) formülü ile hesaplanır. En aşikar çözüm merkezi çözümdür.

iii. Hesaplanan kontrolörün kapalı çevrimli sistemi kararlı kılıp kılmadığı test edilir. Kararlı kılıyorsa γ azaltılır; kılmıyorsa γ artırılır.

iv. Optimal çözüme yeterince yakın olunursa, arama durdurulur; Değilse, ii. işleme geri dönülür.

2.2.2 Durum uzayı çözümü

Bu bölümde, Şekil 2.1' de verilen standart H_∞ problemindeki genelleştirilmiş plant G' nin durum uzayı modeli kullanılarak, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan ve tüm dış girişlerden, ceza işaretlerine olan transfer fonksiyonu $T_{zw}(G,K)$ için,

$$\| T_{zw} \|_\infty \leq \gamma_{\min} \qquad \textbf{(2.60)}$$

koşulunu sağlayan kontrolörün bulunması [15] özetlenecektir. Genelleştirilmiş plant durum uzayı modeli,

$$G = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.61)}$$

şeklinde ifade edilir. Standart problemin çözümü için şu kabuller yapılır:

(A1) (A, B_2) kararlı kılınabilir ve (C_2, A) sezilebilir olmalıdır.

(A2) D_{12} ve D_{21} tam ranklı olmalıdır.

(A3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tüm ω' lar için tam sütun ranklı olmalıdır.

(A4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tüm ω' lar için tam satır ranklı olmalıdır.

(A1) kabulü, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan kontrolörlerin var olmasının gerek ve yeter koşuludur. **(A2)** kabulü, kontrolörlerin nedensel -gerçeklenebilir- olması için yeter koşuldur. **(A3)** ve **(A4)** kabulü, optimal kontrolörlü kapalı çevrimli sistemde sanal eksen üzerinde kutup sıfır götürmelerinin olmaması için gerekli koşullardır [31].

Problemin çözümünün daha kolay anlatılması amacıyla genelleştirilmiş plant matrisleri için aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

(A6) $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix},$

(A7) $D_{12}{}^T C_1 = 0$ ve $B_1 D_{21}{}^T = 0$,

(A8) (A, B_1) kararlı kılınabilir ve (C_1, A) sezilebilirdir.

Yukarıda verilen tüm varsayımlar altında, $\| T_{zw} \|_\infty \le \gamma$ ve kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan $K(s)$' in olmasının gerek ve yeter koşulları,

i. $\mathrm{Re}\,\lambda_i \left[A + \left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X \right] < 0, \ \forall i$ olmak üzere,

$$A^T X + XA + C_1^T C_1 + X \left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X = 0 \qquad \textbf{(2.62)}$$

cebirsel Riccati denkleminin $X \ge 0$ olacak şekilde çözümü olması,

ii. $\mathrm{Re}\,\lambda_i \left[A + Y \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) \right] < 0, \ \forall i$ olmak üzere,

$$AY + YA^T + B_1 B_1^T + Y \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) Y = 0 \qquad \textbf{(2.63)}$$

cebirsel Riccati denkleminin $Y \ge 0$ olacak şekilde çözümü olması,

iii. $\rho(XY) < \gamma^2$

olmasıdır. Bu durumda, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin genel ifadesi,

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} \overline{A} & -ZL & ZB_2 \\ F & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(2.64)}$$

$$F = -B_2^T X,\ L = -Y C_2^T,\ Z = \left(I - \gamma^{-2} YX\right)^{-1}, \qquad \textbf{(2.65)}$$

$$\overline{A} = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F + Z L C_2 \qquad \textbf{(2.66)}$$

ve $Q(s)$, $\| Q \|_\infty < \gamma$ özelliğinde kararlı nedensel bir transfer fonksiyonu olmak üzere,

$$K = T_{zw}(K_c, Q) \qquad \textbf{(2.67)}$$

şeklinde elde edilir. $Q(s) = 0$ için çözüm,

$$K(s) = -Z L \left(sI + \overline{A}\right)^{-1} F \qquad \textbf{(2.68)}$$

şeklinde elde edilir. Bu çözüm, *merkezi* kontrolör olarak adlandırılır. Bu kontrolörün genelleştirilmiş plant durum değişkeni sayısı kadar durumu değişkeni vardır.

(2.68) ile ifade edilen çözüm $\gamma_{\min}$ optimal değeri için değil herhangi bir γ için olan alt çözümdür. $\gamma_{\min}$' e karşı düşen optimal kontrolörün bulunması için biseksiyon algoritması kullanılabilir.

3. KULLANILAN ARAÇ OLARAK POLYNOMIAL TOOLBOX VE ROBUST CONTROL TOOLBOX

Bu bölümde, H_∞ optimal kontrol probleminin, Bölüm 2.2' de anlatılan frekans tanım bölgesi ve durum uzayı çözümlerini bulmada kullanılabilecek MATLAB paket programlarının ilgili kısımları tanıtılmıştır. Bu programlardan biri, kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımını polinomiyal yöntemler kullanarak yapan Polynomial Toolbox (Polyx); diğeri ise dayanıklı kontrol sistemlerinin tasarımı için geliştirilen Robust Control Toolbox' dır.

3.1 Polyx ile Karma Duyarlılık Fonksiyonu Optimizasyonu

Polyx, polinomların ve polinom matrislerinin tanımlanması, değiştirilmesi ve gösterilmesinde kullanıcıya kolaylık sağlayan bir araç kutusu olarak geliştirilmiştir. Doğrusal ve quadratik yapıdaki birçok polinom matris denklemlerinin çözümünü bulma becerisine sahiptir. Kontrol açısından, doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin klasik özelliklerini ve dayanıklılığını analiz edebilme olanağı sağlamasının yanı sıra; kutup atama, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin bulunması, sonlu zaman kontrolü, LQG kontrol ve H_∞ optimal kontrol gibi tasarım problemlerinin çözümüne yönelik araçlar sunmaktadır.

Araç kutusunda çözümü sunulan H_∞ optimal kontrolörün tasarım yöntemlerinden biri SISO sistemler için karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonudur.

[y, x, gopt] = mixeds(n, m, d, a1, b1, a2, b2, gmin, gmax, accuracy, 'show') komutu; Şekil 2.10' da görülen karma duyarlılık probleminde, nominal transfer fonksiyonu,

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \tag{3.1}$$

olan bir sistem için, biçimlendirme filtresi ve ağırlık fonksiyonları sırasıyla,

$$V(s) = \frac{m(s)}{d(s)}, \quad W_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)}, \quad W_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)} \tag{3.2}$$

şeklinde seçildiğinde, H_∞ normunu minimum yapan ve kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan,

$$K(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \tag{3.3}$$

kontrolörü hesaplar. Hesaplanan kontrolör transfer fonksiyonun pay ve payda polinomları sırasıyla *y* ve *x* değişkenlerinde tutulurken, *gopt* minimum γ değerinin tutulduğu değişkendir.

Hesaplama, ikili arama algoritmasını temel alarak optimal çözüme yaklaşan *J*-spektral faktorizasyon ile yapılmaktadır [21].

n, *d*, *m*, *a1*, *b1*, *a2* ve *b2* sabit katsayılı polinomlar ve sabitlerdir. Çözümün bulunabilmesi için, *m* ve *d* polinomlarının dereceleri birbirine eşit; *m*, *b1* ve *b2* polinomlarının tüm köklerinin sol yarı *s*-düzleminde olması gerekmektedir.

gmin ve *gmax*, H_∞ normunun ikili arama algoritması için girilen başlangıç değerleridir. *accuracy* parametresi, $\gamma_{\min}$ değerinin hangi doğrulukta bulunacağını belirler. 'show' ise, ikili arama sırasında γ değerleri için, kapalı çevrimli sistemin kararlı ve çözümün var olup olmadığını göstermeye yarar. Ayrıca, kontrolör transfer fonksiyonunda belli bir duyarlılıkta yapılan kutup sıfır götürmelerini belirtmeye yarar.

Örnek:

Nominal transfer fonksiyonu,

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{1}{s^2} \tag{3.4}$$

olan bir sistem için, biçimlendirme filtresi ve ağırlık fonksiyonlarının sırasıyla,

$$V(s) = \frac{m(s)}{d(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s^2}, \quad W_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)} = 1, \qquad W_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)} = 0.1(s+10) \tag{3.5}$$

seçilmesi durumunda, H_∞ optimal kontrolörün hesaplatılması için yazılması gereken kod parçası aşağıda verilmiştir:

```
n = 1; d = s^2; m = s^2 + s*sqrt(2) + 1; a1 = 1; b1 =1; a2 = 0.1*(s+10); b2 = 1;

gmin = 1; gmax = 10; accuracy = 1e-4;

[y, x, gopt] = mixeds(n, m, d, a1, b1, a2, b2, gmin, gmax, accuracy)
```

Bu program sonucu elde edilen çözüm şu şekildedir:

y =

57 + 96s

x =

79 + 16s + s^2

gopt =

1.3834

3.2 Robust Control Toolbox ile H_∞ Problemin Durum Uzayı Çözümü

Robust Control Toolbox, model bilinmezlikleri olan MIMO kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımı için geliştirilmiş bir araç kutusudur. Bu araç kutusunda, model bilinmezlikleri olan doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin modelleri inşa edilebilir ve en kötü duruma göre sistemin kararlılık analizi yapılabilir. Doğrusal matris eşitsizlikleri problemlerinin çözümünün yanı sıra; LQG kontrol, H_∞ optimal kontrol, ve μ-sentezi gibi dayanıklı kontrol tasarım problemlerinin çözümüne yönelik araçlar sunmaktadır.

Araç kutusunda çözümü sunulan H_∞ optimal kontrol yöntemlerinden biri, MIMO sistemler için elde edilen genelleştirilmiş plantın durum uzayı modeli kullanılarak H_∞ optimal kontrolörün bulunmasıdır.

[K, CL, GAM] = hinfsyn(G, nmeas, ncon, 'a1', 'd1', 'a2', 'd2', ...) komutu;

Şekil 2.1' de görülen standart H_∞ probleminde, genelleştirilmiş plant durum uzayı modeli (2.61) olmak üzere, H_∞ normunu minimum yapan ve kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan kontrolörü hesaplar. Hesaplanan kontrolörün durum uzayı modeli, *K* değişkenine atanır. *CL* değişkenine kapalı çevrimli sistemin durum uzayı modeli atanır. *GAM*, minimum γ değerinin tutulduğu değişkendir.

Komuttaki giriş parametreleri; *G* genelleştirilmiş plant durum uzayı modeli, *nmeas* C_2 matrisinin satır boyutu ve *ncon* B_2 matrisinin sütun boyutudur. Tırnak içinde yazılan seçime bağlı *a* ve *d* giriş parametreleri, γ değerinin alt ve üst sınırlarını, optimum γ değerinin hata payını ve çözüm yöntemini belirlemeye yarar. Bu parametrelerin nasıl belirlenmesi gerektiği ve açıklamaları Çizelge 3.1' de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : *hinfsyn* komutu için seçime bağlı giriş parametreleri

Özellik	Değer	Açıklama
'GMAX'	Sabit	γ' nın başlangıç üst sınır değeri (varsayılan = ∞)
'GMIN'	Sabit	γ' nın başlangıç alt sınır değeri (varsayılan = 0)
'TOLGAM'	Sabit	γ_{min} için hata payı (varsayılan = 0.01)
'S0'	Sabit	Entropinin hesaplandığı frekans değeri ('maxe' için)
'METHOD'	'ric'	Riccati temelli çözüm (varsayılan)
	'lmi'	LMI temelli çözüm
	'maxe'	Maksimum entropi temelli çözüm

Çözüm yöntemlerinden 'ric', iki cebirsel Riccati denkleminin çözümünü [15]; 'lmi' ise, doğrusal matris eşitsizliklerinin çözümünü temel alır [16]. Ayrıca, tüm çözüm yöntemlerindeki γ iterasyonunda biseksiyon algoritması kullanılmaktadır.

4. KIZAKLI SARKAÇ SİSTEMİNİN H_∞ OPTİMAL KONTROLÜ

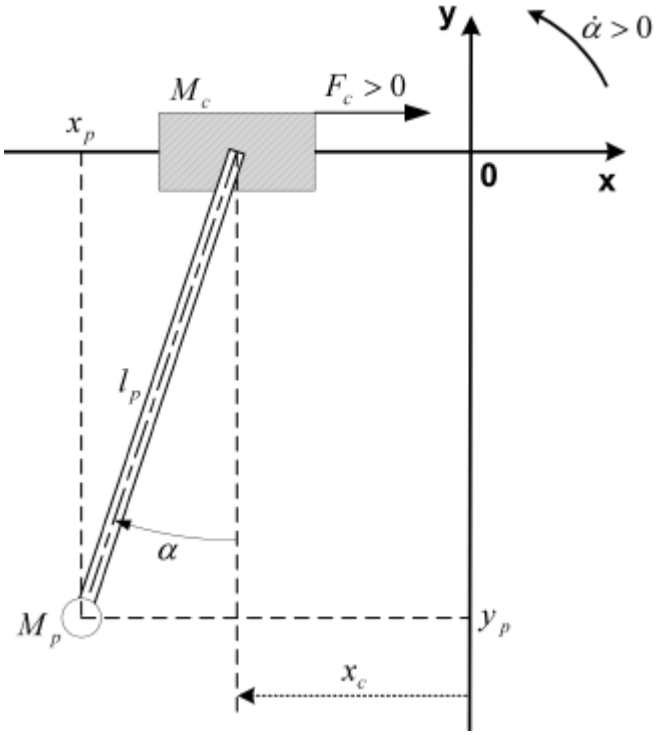
Bu bölümde önceki bölümlerde ayrıntılı olarak ele alınan H_∞ optimal kontrol yöntemleri, kızaklı tek sarkaç sistemi (KTS) için, sarkaç konumunu salınımsız biçimde istenen konuma getiren dayanıklı bir kontrolör tasarımı problemine uygulanmıştır. Bu çalışmada, İTÜ Mekatronik Eğitim ve Araştırma Merkezi' ndeki Quanser tarafından üretilen bir KTS sistemi kullanılmıştır. KTS, DC motor tarafından hareket ettirilen taşıyıcı bir sistemin önüne monte edilmiş masif çubuktan oluşan sarkaç sistemidir. Bu sistemde amaç, taşıyıcının konum kontrolü yapılarak, sarkacın salınımını en aza indirgemektir. Benzer kontrol problemi ile liman vinçleri, tutma kaldırma robotları gibi endüstriyel sistemlerde sıkça karşılaşılmaktadır. Burada yapılan çalışmanın amacı düşük ve yüksek frekanslardaki bozuculara maruz kalabilen, değişken yüklemelerde çalışan ayaklı köprü vinçleri için ön çalışma yapmaktır. Ayrıca sarkaç ya da vinçteki salınımı olabildiğince hızlı şekilde sönümlendirebilen bir kontrolör tasarlamaktır. Endüstriyel uygulamalardaki ayaklı köprü vinçlerin ağır, değişken, tehlikeli ve zarar görebilecek yüklerin mümkün en kısa sürede güvenli bir şekilde taşınması hayati önem taşımaktadır.

Bahsedilen H_∞ optimal kontrol yöntemlerinin sisteme uygulanabilmesi için öncelikle sistemin modeli elde edilecektir. Elde edilen durum uzayı modeli üzerinden LMI metodu ile; transfer fonksiyonundan ise polinomiyal J-spektral faktorizasyon ile H_∞ optimal kontrolör hesaplanacaktır. Hesaplanan kontrolörlerin performansı, dayanıklılığı ve davranış ölçütleri benzetim sonuçları ve gerçek sistem üzerinden irdelenecektir.

4.1 Sistemin Modellenmesi

KTS sisteminin ilkesel şeması Şekil 4.1’ de görülmektedir. Taşıyıcıyı karşımıza aldığımızda, sarkacın pozitif dönme yönü saat yönünün tersinedir. Sarkaç tam dik konumdayken ve uç noktası aşağıya doğru iken α ile ifade edilen sarkaç açısı sıfır derecedir. Sarkacın kızak üzerindeki doğrusal hareketi Kartezyen eksenlere göre sağa

doğru iken pozitif alınmıştır. Sistem parametrelerinin açıklamaları ve nominal değerleri Ek A1' de verilmiştir.



Şekil 4.1 : KTS sisteminin şeması

Sistemin doğrusal olmayan hareket denklemleri Euler-Lagrange yöntemiyle elde edilebilir. Bu yaklaşımda sistem girişi taşıyıcıyı süren kuvvet olan F_c alınmıştır. Sistem iki serbestlik dereceli olduğu için Lagrange genelleştirilmiş koordinatları ise x_c ve α olarak belirlenmiştir. Sarkacın kütlesinin uç noktada yoğunlaştığı düşünülerek, ağırlık merkezi bu noktada kabul edilmiştir. Bu duruma göre, sistem şeması göz önünde bulundurularak sarkacın ağırlık merkezinin koordinatları:

$$x_p(t) = x_c(t) + l_p \sin(\alpha(t)) \quad \textbf{(4.1)}$$

$$y_p(t) = -l_p \cos(\alpha(t)) \quad \textbf{(4.2)}$$

olarak ifade edilebilir. Sisteme ilişkin Lagrange fonksiyonunu elde etmek için öncelikle enerji ifadeleri elde edilmelidir. Taşıyıcının hareketi yatay eksende olduğundan sistemin toplam potansiyel enerjisi sadece sarkacın konumuna bağlıdır ve,

$$V_T = -M_p g\, l_p \cos(\alpha(t)) \quad \textbf{(4.3)}$$

şeklinde ifade edilir. Sistemin toplam kinetik enerjisi ise taşıyıcı arabanın kızak üzerindeki doğrusal hızına ve sarkacın açısal hızına bağlıdır. Taşıyıcının x_c ekseni boyunca hareketine bağlı taşıyıcı kinetik enerji:

$$T_{ct} = \frac{1}{2} M \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right)^2 \tag{4.4}$$

ve DC motorun dönel hareketine bağlı kinetik enerji:

$$T_{cr} = \frac{J_m K_g{}^2 \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right)^2}{2 r_{mp}{}^2} \tag{4.5}$$

olmak üzere, taşıyıcı arabanın toplam kinetik enerjisi,

$$T_c = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J_m K_g{}^2}{r_{mp}{}^2} \right) \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} M_c \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right)^2 \tag{4.6}$$

olarak elde edilir. Sarkaç ağırlık merkezinin yer değiştirmesine bağlı kinetik enerji:

$$T_{pt} = \frac{1}{2} M_p \sqrt{\left(\frac{dx_p(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_p(t)}{dt} \right)^2} \tag{4.7}$$

ve sarkacın kinetik enerjisi:

$$T_{pr} = \frac{1}{2} I_p \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 \tag{4.8}$$

olmak üzere, sarkacın toplam kinetik enerjisi

$$T_p = \frac{1}{2} \left(M_p \sqrt{\left(\frac{dx_p(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_p(t)}{dt} \right)^2} + I_p \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 \right) \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Bu durumda, denklem (4.1), (4.2), (4.6) ve (4.9) kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında sistemin toplam kinetik enerjisi,

$$\begin{aligned} T_t = {} & \frac{1}{2} (M_c + M_p) \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right)^2 + M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right) \left(\frac{dx_c(t)}{dt} \right) \\ & + \frac{1}{2} (I_p + M_p l_p{}^2) \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

biçiminde elde edilir. Sisteme ilişkin Lagrange fonksiyonu,

$$L = T_T - V_T \tag{4.11}$$

olmak üzere Lagrange denklemleri:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = Q_{x_c} \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} \tag{4.13}$$

şeklindedir. Denklem (4.12)' teki Q_{x_c}, genelleştirilmiş koordinat x_c üzerindeki dış kuvvettir. Denklem (4.13)' teki Q_{α} ise, genelleştirilmiş koordinat α üzerindeki dış kuvvettir. Taşıyıcı üzerindeki Coulomb sürtünmesini ve sarkaç hareketinden kaynaklı taşıyıcıya etkiyen kuvveti ihmal edersek, dış kuvvetler aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Q_{x_c}(t) = F_c(t) - B_{eq}\dot{x}_c(t) \tag{4.14}$$

$$Q_{\alpha}(t) = -B_p\dot{\alpha}(t) \tag{4.15}$$

Denklem (4.14) ve (4.15)' te bulunan ifadeler, denklem (4.12) ve (4.13)' te yerine yazılırsa, aşağıdaki doğrusal olmayan hareket denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c(t) = &\frac{-\left(I_p + M_p l_p{}^2\right)B_{eq}\dot{x}_c(t) + \left(M_p{}^2 l_p{}^3 + I_p + M_p l_p\right)\sin\left(\alpha(t)\right)\dot{\alpha}(t)}{\left(M_c + M_p\right)I_p + M_c M_p l_p{}^2 + M_p{}^2 l_p{}^2 \sin^2\left(\alpha(t)\right)} \\ &+ \frac{M_p l_p B_p \cos\left(\alpha(t)\right)\dot{\alpha}(t) + \left(I_p + M_p l_p{}^2\right)F_c + M_p{}^2 l_p{}^2 g \cos\left(\alpha(t)\right)\sin\left(\alpha(t)\right)}{\left(M_c + M_p\right)I_p + M_c M_p l_p{}^2 + M_p{}^2 l_p{}^2 \sin^2\left(\alpha(t)\right)}\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) = &\frac{-\left(M_c + M_p\right)M_p l_p\, g \sin\left(\alpha(t)\right) - M_p l_p{}^2 \sin\left(\alpha(t)\right)\cos\left(\alpha(t)\right)\dot{\alpha}^2(t)}{\left(M_c + M_p\right)I_p + M_c M_p l_p{}^2 + M_p{}^2 l_p{}^2 \sin^2\left(\alpha(t)\right)} \\ &+ \frac{M_p l_p \cos\left(\alpha(t)\right)B_{eq}\dot{x}_c(t) - \left(M_c + M_p\right)B_p\dot{\alpha}(t) - F_c M_p l_p \cos\left(\alpha(t)\right)}{\left(M_c + M_p\right)I_p + M_c M_p l_p{}^2 + M_p{}^2 l_p{}^2 \sin^2\left(\alpha(t)\right)}\end{aligned} \tag{4.17}$$

Bu denklemlerin, ikinci mertebeden Taylor seri açılımı kullanılır ve küçük α açıları için yaklaşık olarak $\cos(\alpha) \approx 1$ ve $\sin(\alpha) \approx \alpha$ yazılırsa, doğrusal olmayan (4.16) ve (4.17) denklemleri,

$$\ddot{x}_c(t) = \frac{-\left(I_p + M_p l_p{}^2\right)B_{eq}\,\dot{x}_c(t) + M_p l_p B_p\,\dot{\alpha}(t) + M_p{}^2 l_p{}^2 g\,\alpha(t) + \left(I_p + M_p l_p{}^2\right)F_c}{\left(M_c + M_p\right)I_p + M_c M_p l_p{}^2} \tag{4.18}$$

$$\ddot{\alpha}(t)=\frac{-\left(M_c+M_p\right)M_p l_p\, g\,\alpha(t)-\left(M_c+M_p\right)B_p\,\dot{\alpha}(t)+M_p l_p B_{eq}\dot{x}_c(t)-M_p l_p\,F_c}{\left(M_c+M_p\right)I_p+M_c M_p {l_p}^2} \quad \textbf{(4.19)}$$

biçiminde doğrusallaştırılmış olur. Sistemin durum uzayı modeli; $x(t)=\left[x_c(t) \quad \alpha(t) \quad \dot{x}_c(t) \quad \dot{\alpha}(t)\right]^T$ durum vektörü, F_c giriş ve $\alpha(t)$ çıkış olmak üzere,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A\,x(t)+B\,F_c\\ \alpha(t)&=C\,x(t)+D\,F_c\end{aligned} \quad \textbf{(4.20)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda denklem (4.18) ve (4.19) kullanılarak sistem durum uzayı modeli,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{g{M_p}^2{l_p}^2}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2} & -\dfrac{B_{eq}(I_p+M_p{l_p}^2)}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2} & \dfrac{M_p l_p B_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2}\\ 0 & -\dfrac{M_p g l_p(M_c+M_p)}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2} & \dfrac{M_p l_p B_{eq}}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2} & -\dfrac{(M_c+M_p)B_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2}\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.21)}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{I_p+M_p{l_p}^2}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2}\\ -\dfrac{M_p l_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_p{l_p}^2}\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.22)}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.23)}$$

$$D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.24)}$$

şeklinde elde edilir. Taşıyıcıyı hareket ettiren DC motorun sisteme uyguladığı kuvvetin dinamik denklemleri,

$\xi=\dfrac{\eta_g {K_g}^2 \eta_m K_t K_m}{R_m {r_{mp}}^2}$ ve $\varsigma=\dfrac{\eta_g K_g \eta_m K_t}{R_m r_{mp}}$ olmak üzere,

$$F_c=-\xi\,\dot{x}_c(t)+\varsigma\,V_m \quad \textbf{(4.25)}$$

şeklindedir. Sarkaç açısı, taşıyıcının doğrusal hareketiyle kontrol edileceğinden, kontrol işareti, bir başka deyişle sistem girişi, taşıyıcıyı hareket ettiren DC motorun armatür gerilimi olarak alınabilir. Bu durumda giriş V_m olarak alındığında, C ve D

matrisleri değişmezken sistem matrisi ve giriş matrisi ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{gM_p{}^2 l_p{}^2}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} & -\dfrac{(B_{eq}-\xi)(I_p+M_pl_p{}^2)}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} & \dfrac{M_pl_pB_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} \\ 0 & -\dfrac{M_pgl_p(M_c+M_p)}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} & \dfrac{M_pl_p(B_{eq}-\xi)}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} & -\dfrac{(M_c+M_p)B_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.26)}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{I_p+M_pl_p{}^2}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2}\cdot\varsigma \\ -\dfrac{M_pl_p}{(M_c+M_p)I_p+M_cM_pl_p{}^2}\cdot\varsigma \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.27)}$$

KTS deney sisteminde iki farklı boyda sarkaç seçeneği bulunmaktadır. Uzun boylu sarkaç için sistem parametrelerinin nominal değerleri yerine yazıldığında, sistemin durum uzayı modeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.2647 & -15.8603 & 0.0073 \\ 0 & -27.8245 & 36.5480 & -0.0896 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.2735 \\ -5.2390 \end{bmatrix}V_m \quad \textbf{(4.28)}$$

$$\alpha(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c(t) & \alpha(t) & \dot{x}_c(t) & \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}V_m$$

$$P(s)=C\left(sI-A\right)^{-1}B+D \quad \textbf{(4.29)}$$

Bu modelden sistemin transfer fonksiyonuna geçilirse, motor armatür geriliminden sarkaç salınım açısına olan açık çevrimli sistemin transfer fonksiyonu,

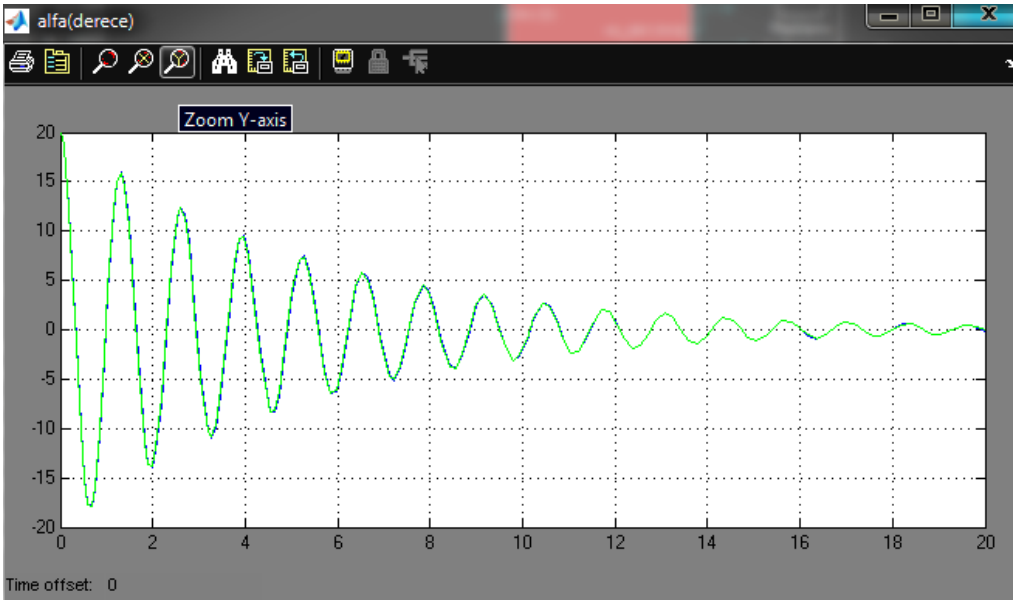
$$P(s)=\frac{-5.239\,s\,(s+0.00019)}{s^4+15.9499s^3+28.9795s^2+358.536s} \quad \textbf{(4.30)}$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon sadeleştirilirse, sistemin transfer fonksiyonunun indirgenmiş hali,

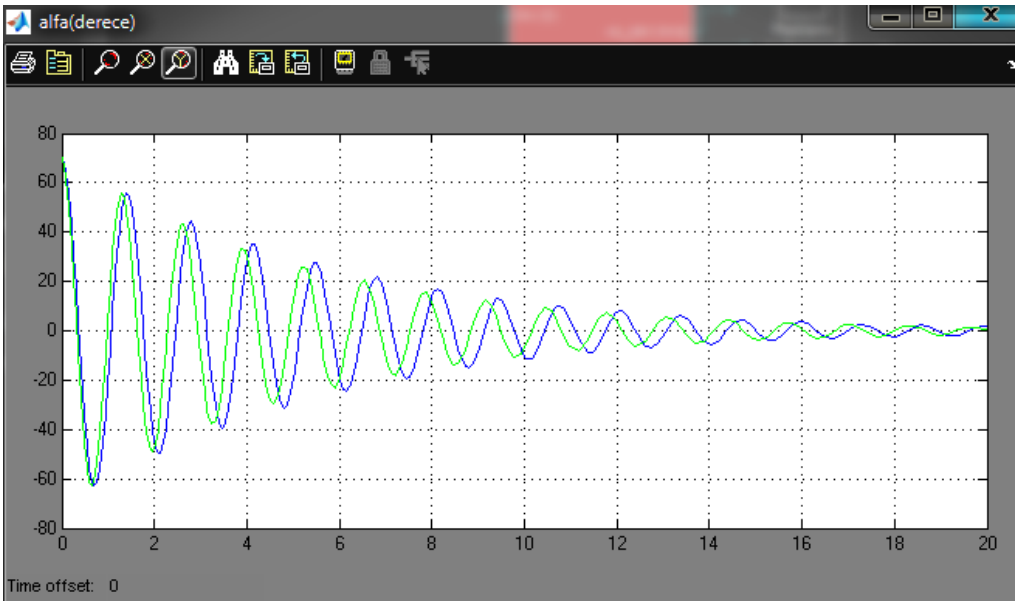
$$P(s)=\frac{-5.239(s+0.00019)}{s^3+15.9499s^2+28.9795s+358.536} \quad \textbf{(4.31)}$$

şeklinde elde edilir. Sistemin nominal transfer fonksiyonunun -0.191±*j*4.795' de baskın karmaşık kutupları vardır. Baskın olmayan üçüncü kutbu ise -15.568' tedir.

Ayrıca -0.00019' da bir adet sıfırı vardır. Sıfıra yakın olan ve sanal kısmı büyük olan baskın kutuplardan dolayı sistemin impuls yanıtı oldukça salınımlıdır. Simulink ile yapılan doğrusal ve doğrusal olmayan sistem benzetimlerinde, ilk koşul 20 derece ve 70 derece alınmış ve sistem cevabının -sarkaç açısının- zamana göre değişimi Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' de verilmiştir.



Şekil 4.2 : α_0 = 20 için açık çevrim sistem yanıtı (uzun sarkaç)



Şekil 4.3 : α_0 = 70 için açık çevrim sistem yanıtı (uzun sarkaç)

Küçük başlangıç açı değerleri için, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemin yanıtları beklendiği gibi hemen hemen aynı olurken, açı değerleri büyüdükçe cevaplar

arasında faz kayması oluştuğu gözlenmektedir. Doğrusal ve doğrusal olmayan model farklılık göstermektedir. Ancak, iki modelin sistem yanıtı bu farklılık göz ardı edildiğinde tutarlı olduğu söylenebilir.

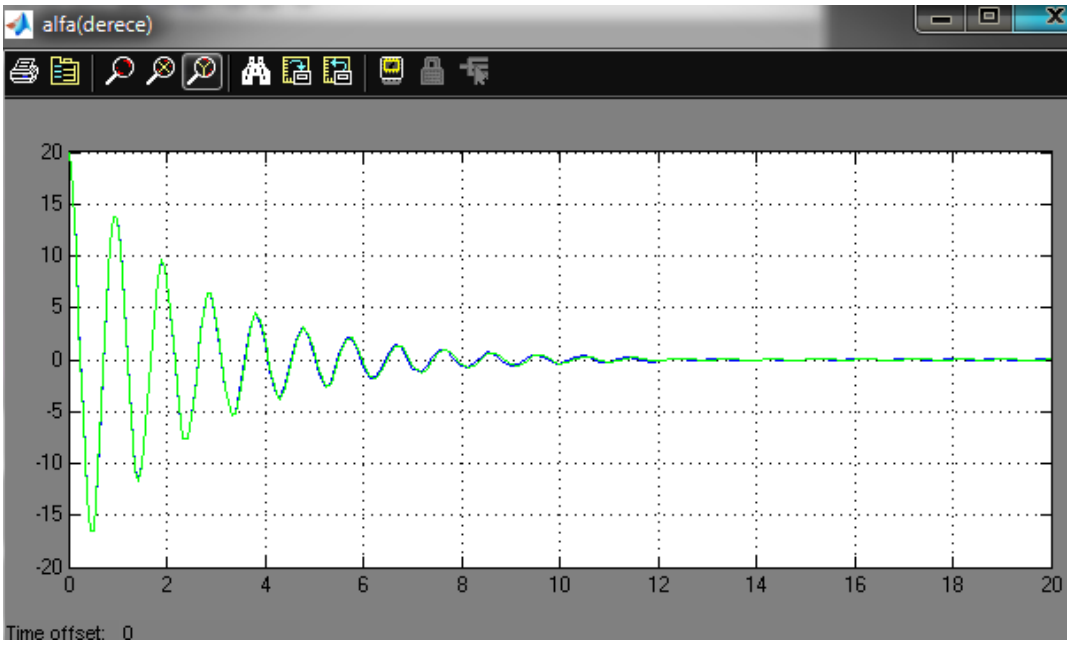
Kısa boylu sarkaç için sistem parametrelerinin nominal değerleri kullanılarak elde edilen durum uzayı modeli ve açık çevrim transfer fonksiyonu ise şöyledir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.3101 & -16.4466 & 0.0142 \\ 0 & -48.1625 & 71.2322 & -0.5218 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.3575 \\ -10.2106 \end{bmatrix} V_m \tag{4.32}$$

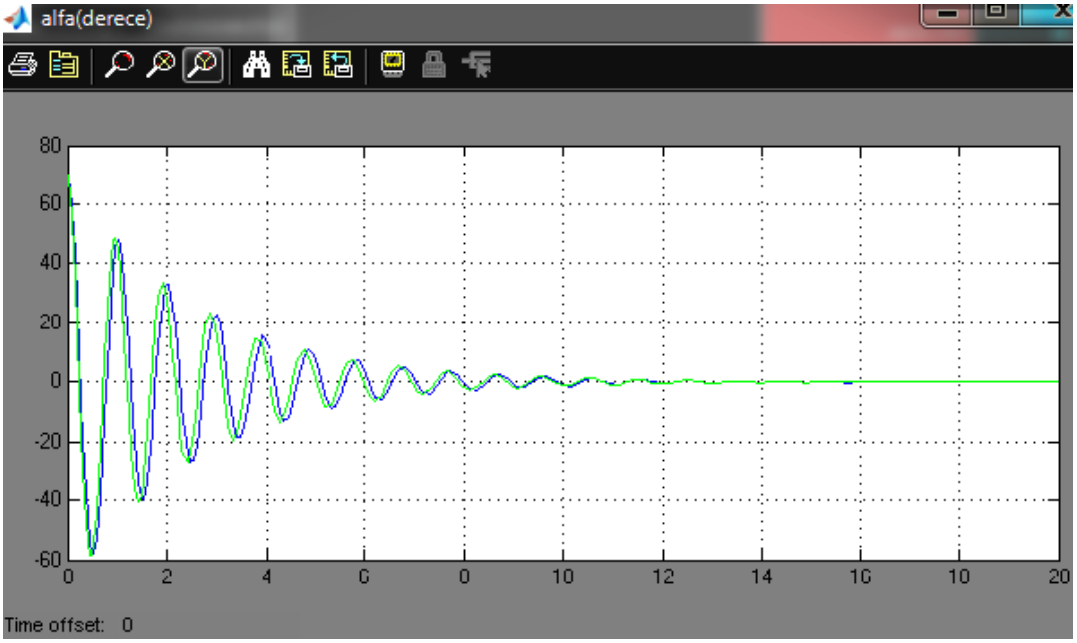
$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) & \alpha(t) & \dot{x}_c(t) & \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_m$$

$$P(s) = \frac{-10.2106\,(s + 0.000026)}{s^3 + 16.9684 s^2 + 55.7328 s + 698.788} \tag{4.33}$$

Simulink ile yapılan doğrusal ve doğrusal olmayan sistem benzetimlerinde, ilk koşul 20 derece ve 70 derece alınmış ve sistem cevabının -sarkaç açısının- zamana göre değişimi Şekil 4.4 ve Şekil 4.5' de verilmiştir.



Şekil 4.4 : α_0 = 20 için açık çevrim sistem yanıtı (kısa sarkaç)



Şekil 4.5 : α_0 = 70 için açık çevrim sistem yanıtı (kısa sarkaç)

Kısa boylu sarkaç için doğrusal ve doğrusal olmayan sistem modeli ile elde edilen yanıtlar, uzun boylu sarkacınkilerden daha yakındır. Bu yakınlık, sarkaç boyunun azalmasıyla doğrusal modeldeki hataların da azalmasına bağlıdır. Ayrıca uzun sarkaca göre doğal olarak salınım daha az, yerleşme zamanı daha kısadır.

4.2 Sistemin Karma Duyarlılık Fonksiyonunun Optimizasyonu ile Kontrolü

Bu bölümde, Bölüm 2.1' de ayrıntılı olarak açıklanan, sistemin karma duyarlılık fonksiyonunu optimal yapan kontrolörün tasarımına yer verilmiştir. Sistemin nominal transfer fonksiyonu denklem (4.30)' daki gibi alınmış, biçimlendirme filtresinin transfer fonksiyonu $V(s)$ denklem (4.34)' de verildiği gibi, payda polinomu, nominal transfer fonksiyonunun payda polinomu ile aynı olacak şekilde; pay polinomu $M(s)$ ise iki sıfırı $1.62 \pm j1.65$' te, ayrıca mertebesi $D(s)$' inkine eşit olması gerektiğinden, diğer sıfırı ise belirlenen ilk iki sıfırı baskın olacak şekilde -10' da seçilmiştir. Böylelikle, biçimlendirme filtresi

$$V(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{\left(s^2+3.24\,s+5.3469\right)\left(s+10\right)}{s^3+15.9499\,s^2+28.9795\,s+358.5360} \qquad \textbf{(4.34)}$$

olarak elde edilmiştir. Kapalı çevrim sistemin baskın kutuplarına ilişkin sönüm oranı 0.7 ve doğal frekansı 2.31 rad/s' dir. Bu değerler sistemin zaman tanım bölgesi yanıtında 4.5% aşıma ve 2.47 saniyelik bir yerleşme zamanına karşı düşmektedir.

Duyarlılık ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonlarının frekans cevap eğrilerinin Şekil 2.9' daki gibi olması için, çıkış ve giriş işaretine ilişkin ağırlık fonksiyonunun yapısı, düşük frekanslarda,

$$|S(j\omega)| \approx \frac{|\lambda|}{|V(j\omega)W_1(j\omega)|} \approx \frac{|\lambda| \cdot |D(j\omega)|}{|M(j\omega)W_1(j\omega)|} \quad \textbf{(4.35)}$$

olacak şekilde ve yüksek frekanslarda ise,

$$|T(j\omega)| = |P(j\omega)| \cdot |U(j\omega)| \approx \frac{|\lambda| \cdot |P(j\omega)|}{|V(j\omega)W_2(j\omega)|} \approx \frac{|\lambda| \cdot |N(j\omega)|}{|M(j\omega)W_2(j\omega)|} \quad \textbf{(4.36)}$$

olacak şekilde,

$$W_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)} = \frac{c(s^2 + 10s + 21)}{s^2 + 0.2s + 0.001} \quad \textbf{(4.37)}$$

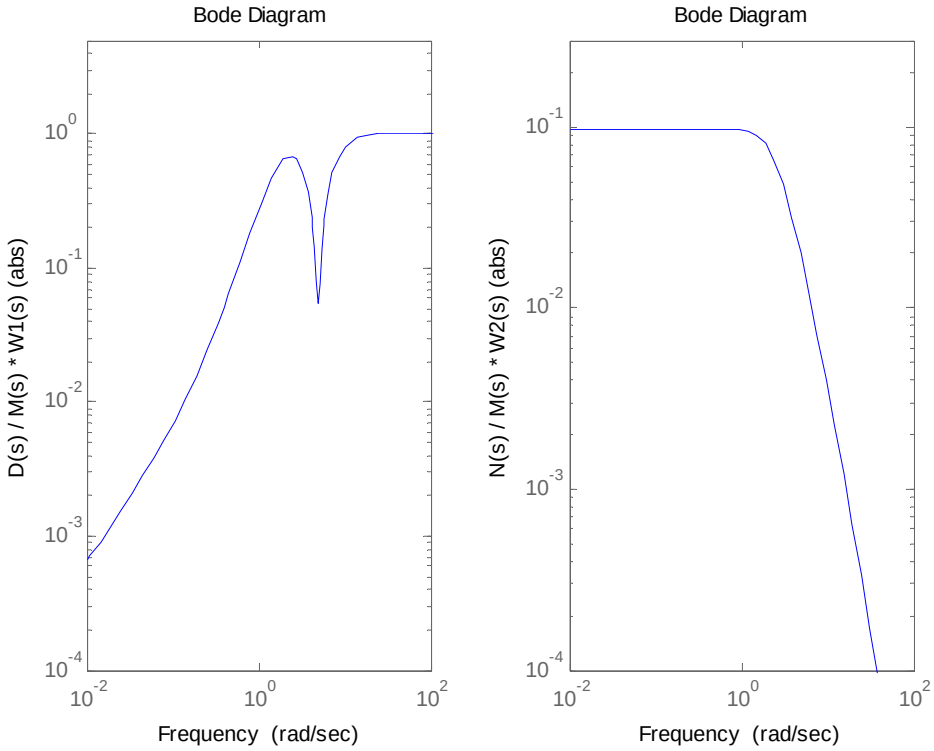
$$W_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)} = k \quad \textbf{(4.38)}$$

gibi seçilmiştir.

Giriş ve çıkış işaretlerine ilişkin ağırlık fonksiyonları, belirlenen biçimlendirme filtresi ve nominal sistem transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomlarının denklem (4.35) ve (4.36)' da yerine konulup, duyarlılık fonksiyonu düşük frekanslarda küçük kazançlı ve yüksek frekanslarda kazancı 1 olacak şekilde; tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu yüksek frekanslarda küçük kazançlı ve düşük frekanslarda kazancı 0.1 olacak şekilde inşa edilmiştir. Bu nedenle, (4.37)' deki $a_1(s)$ polinomu, sıfırları -3 ve -7' de olacak şekilde ikinci dereceden; $b_1(s)$ polinomu ise düşük frekanslardaki küçük kazancı sağlamak için sıfırları -0.195 ve -0.005 gibi sıfıra yakın değerlerde olacak şekilde seçilmiştir. Tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonunun frekans genlik eğrisi istenen yapıda olduğu için $W_2(s)$' in dinamik olmasına ihtiyaç duyulmamış ve sabit bir kazanç olarak alınmıştır.

Ayrıca ağırlık fonksiyonlarının polinom sıfırlarının seçimi, $M(s)$' in payda polinomunun sıfırlarının, kapalı çevrimli sistemin baskın kutupları olacak şekilde yapılmıştır.

Ağırlık fonksiyonları (4.37) ve (4.38)' de $c = k = 1$ olarak alındığında, duyarlılık -$S(j\omega)$- ve tamamlayıcı duyarlılık -$T(j\omega)$- frekans cevapları -genlik- Şekil 4.6' da verilmiştir.



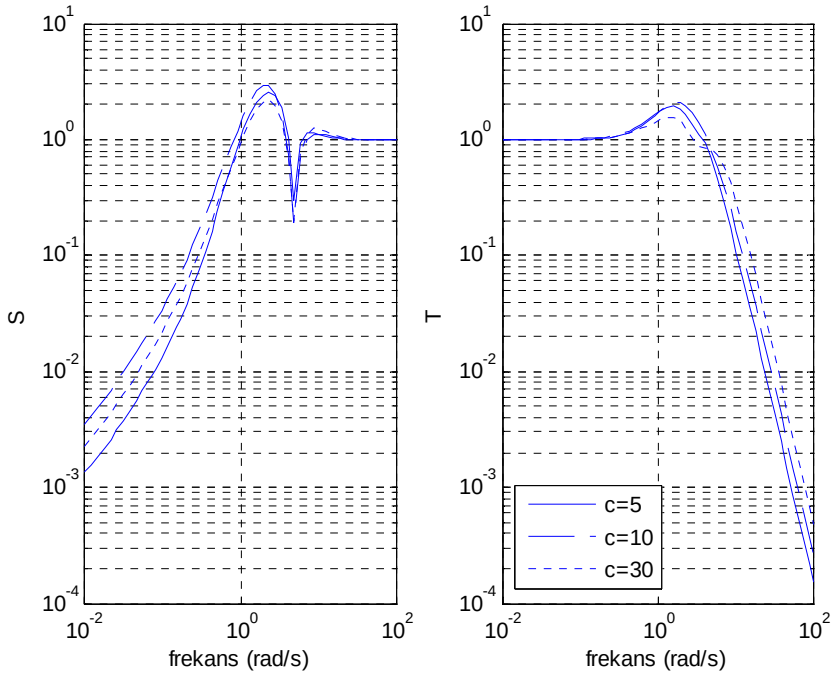
Şekil 4.6 : Duyarlılık Fonksiyonlarına ilişkin frekans cevapları

Belirlenen bu ağırlık fonksiyonları ve biçimlendirme filtresine göre, *J*-spektral faktorizasyon algoritmasını koşturan MATLAB Polyx' in karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonu komutu ile kontrolör hesaplatılmıştır. Dayanıklılığı en iyi olan kontrolörün bulunması için ağırlık fonksiyonlarının c ve k parametrelerinin farklı değerleri için kontrolörler tasarlanmış ve bunlarla kontrol edilen sistemlere ilişkin duyarlılık fonksiyonlarının frekans genlik eğrileri irdelenmiştir.

Polyx ile H_∞ kontrolörün hesaplatılmasında, (2.55)' te ifade edilen Π_γ matrisi tekil olduğundan kontrolör bulunamamıştır. Bu durum, nominal sistemin sıfıra çok yakın olan sıfırından kaynaklanmaktadır. Tekillik probleminin aşılması amacıyla, nominal sistemin s=0' da kutbu var gibi düşünülüp, s = -0.00019' daki sıfır ile kutup sıfır götürmesi yapılmıştır. Hesaplanan optimal kontrolöre, s=0' da bir kutup eklenmiştir.

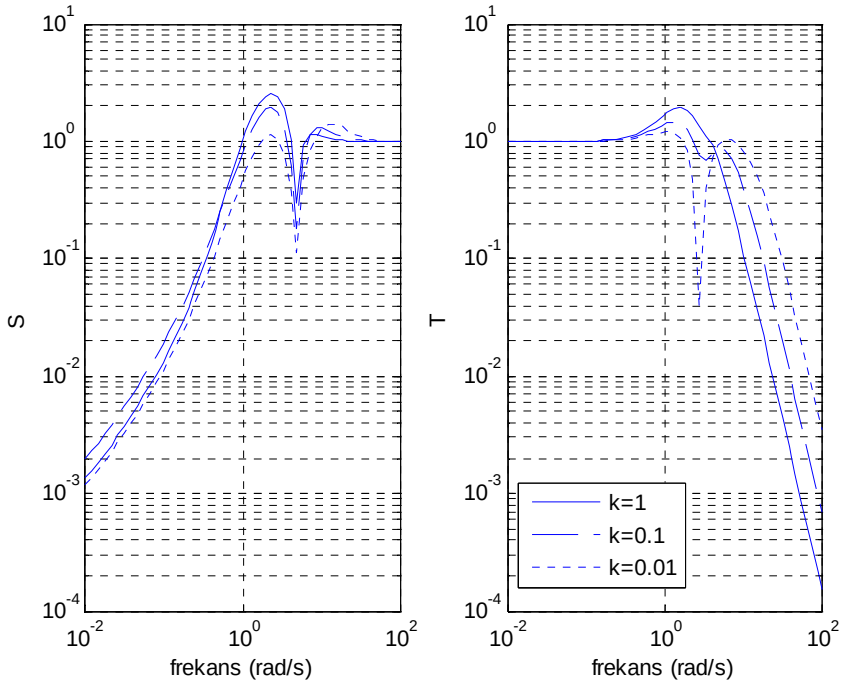
Öncelikle, $k = 1$ olmak üzere c' nin farklı değerleri için bu işlem gerçekleştirilmiş ve Şekil 4.7' deki sonuçlar elde edilmiştir. Şekilden de görüleceği üzere, düşük frekanslar için duyarlılık fonksiyonunda; yüksek frekanslar için tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonundaki en hızlı genlik düşüşü $c = 5$ için elde edilmektedir. Ayrıca bu değer için kapalı çevrimli sistemin H_∞ normu γ' nın en küçük değeri elde edilmiştir. c kazancının 5' den daha küçük değerleri ve 30' dan büyük değerleri için

çözüm bulunamamıştır. Bu durum, Π_γ matrisinin determinantının sanal eksen üzerinde kutup ya da sıfırı olmasından - Z_γ ' nın tekil olması- kaynaklanmaktadır.



Şekil 4.7 : $k = 1$ için S ve T frekans genlik eğrileri

Sonra da, $c = 5$ sabit olmak üzere, farklı k değerleri için kontrol edilen sistemin duyarlılık fonksiyonlarının frekans genlik eğrileri Şekil 4.8' deki gibi elde edilmiştir.



Şekil 4.8 : $c = 5$ için S ve T frekans genlik eğrileri

Frekans genlik eğrilerinden görüldüğü üzere, $k = 1$ için tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonun genliğinin yüksek frekanslardaki eğimi daha fazladır; ancak duyarlılık fonksiyonu tepe değeri daha yüksektir. Dolayısıyla çıkış ağırlık fonksiyonunun kazancının yani k değerinin 0.1 olarak seçilmesi uygun görülmüştür. Sonuç olarak, giriş ve çıkış işareti ağırlık fonksiyonları sırasıyla,

$$W_1(s) = \frac{5(s^2 + 10s + 21)}{s^2 + 0.2s + 0.001} \tag{4.39}$$

$$W_2(s) = 0.1 \tag{4.40}$$

şeklinde inşa edilmiş olur. Belirlenen bu ağırlık fonksiyonları ve biçimlendirme filtresi için kontrolör transfer fonksiyonu

$$C(s) = \frac{-(0.0031s^4 + 0.046s^3 - 0.025s^2 + 0.45s + 0.38)}{0.000023s^4 + 0.00056s^3 - 0.005s^2 + 0.00099s + 0.0000048} \tag{4.41}$$

olarak hesaplanmıştır. Elde edilen kontrolörle birlikte kapalı çevrim sistemin kutupları aşağıdaki gibidir:

p_1 = -15.0214

p_2 = -10.0000

$p_{3,4}$ = -4.4109 ± 4.4148i

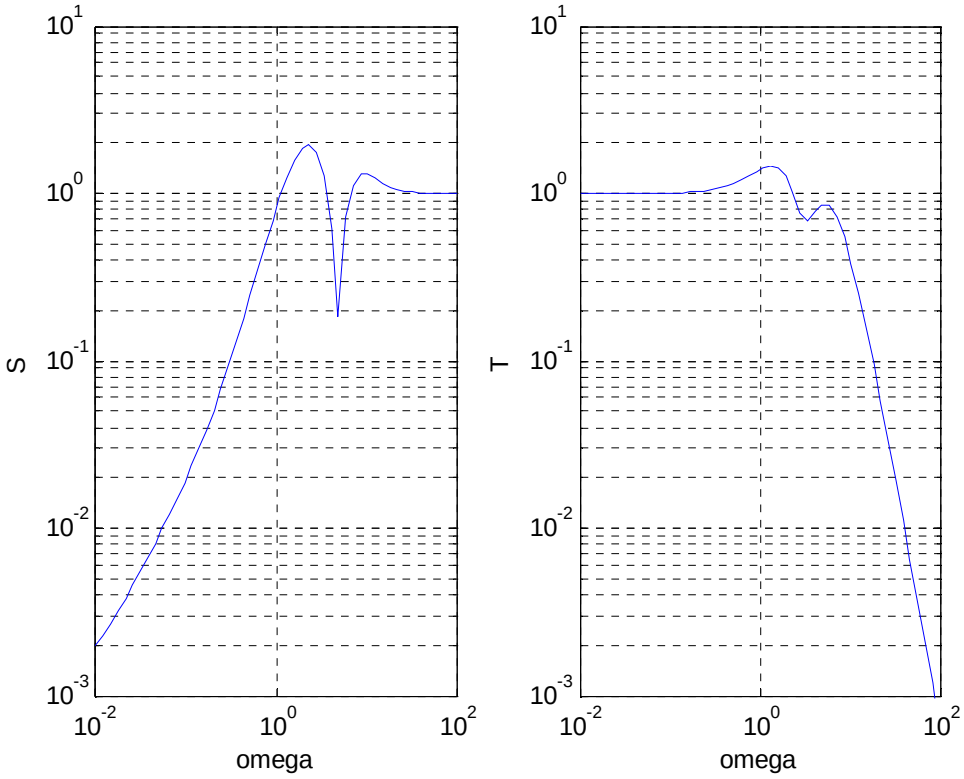
p_5 = -2.6958

$p_{6,7}$ = -1.6200 ± 1.6500i

Sistemin baskın kutuplarının, seçilen biçimlendirme filtresi fonksiyonuna göre, p_6 ve p_7 olması beklenirken, bu tam olarak gerçekleşmemiştir. Çünkü p_3 ve p_4 kutupları baskın olması beklenen kutuplardan yeterince uzak değildir. Giriş işaretine uygulanan ağırlık fonksiyonu $W_1(s)$ kazancı artırılarak ya da bu fonksiyonun -3 ve -7' deki pay polinomu köklerinin reel kısımları daha büyük seçilerek bu köklerin baskınlığı artırılabilirdi. Ancak, bu durumda, duyarlılık fonksiyonlarının frekans cevabı istenilen gibi olamayacaktı, yani bozucu bastırma probleminden ödün verilecektir. İleride verilecek olan benzetim sonuçlarında, kutupların bu konumunun hedeflenen kontrol performansını çok etkilemediği görülecektir.

Öte yandan, duyarlılık fonksiyonlarının frekans cevaplarının çok daha iyi olması için, $W_1(s)$' in pay polinomunun sıfırları -0.2 ± j4.8' de seçilebilirdi. Fakat bu seçim

açık çevrim kutuplarının kapalı çevrim kutupları olarak karşımıza çıkmasına neden olacaktır ki; bu da istenmeyen bir durumdur. Dolayısıyla, ağırlık fonksiyonlarının seçilmesinde, bozucu bastırma miktarı ile baskın kutupların belirlenmesi arasında ödün verme durumunda kalınmaktadır. Hesaplanan kontrolör için, duyarlılık fonksiyonu *S*' nin ve tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu *T*' nin frekans cevabının genlik eğrileri Şekil 4.9' de görülmektedir.



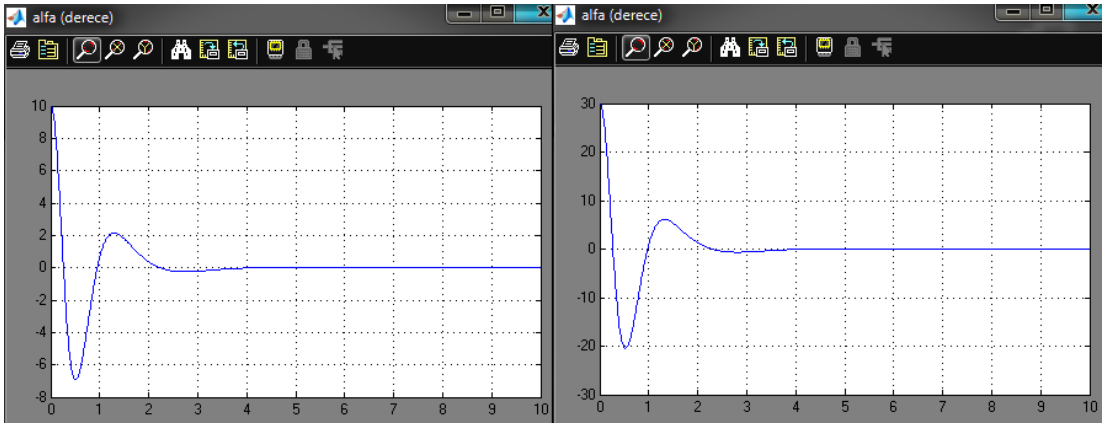
Şekil 4.9 : *S* ve *T*' nin frekans cevap genlik eğrileri

Farklı ağırlık fonksiyonları için kontrolörün hesaplanmasına ve duyarlılık fonksiyonlarının frekans yanıtı genlik eğrilerinin elde edilmesine yönelik Polyx kod parçaları Ek B.1' de verilmiştir.

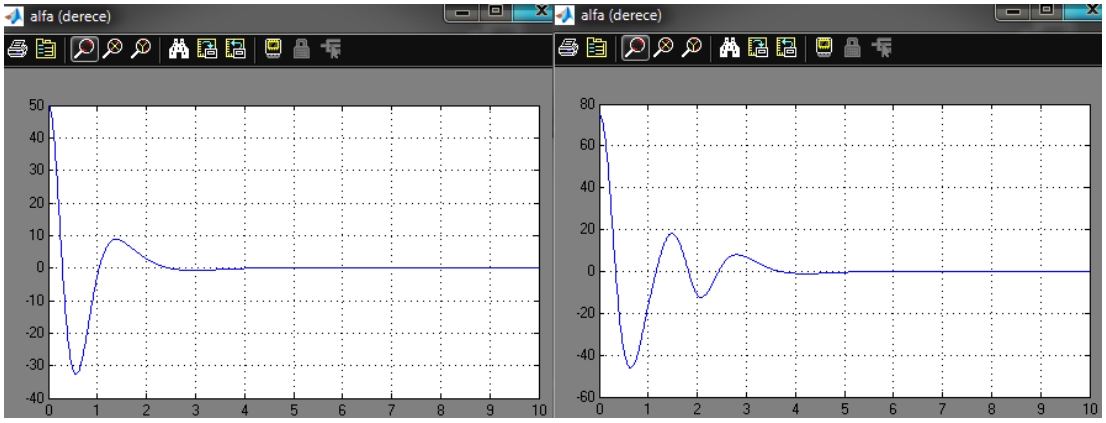
Elde edilen kontrolörün başarımının ve dayanıklılığının sınanması için, sarkaç ve taşıyıcı sistemin Simulink' te doğrusal ve doğrusal olmayan modelleri oluşturuldu. Kontrolörün doğrusal model üzerinde sorunsuz çalıştığı gözlemlendikten sonra, doğrusal olmayan modelde farklı şartlar altında benzetimler yapıldı ve sonuçlar irdelendi. Modelde, taşıyıcı sistemin DC motora uygulanabilecek armatür geriliminin alt ve üst sınırları düşünülerek kontrol işaretine, sınırları ±13 V olan bir doyma işlemi uygulandı.

İlk olarak, sarkaca bir başlangıç açısı verilerek, kontrolörün taşıyıcı sistemi kızak üzerinde hareket ettirmesiyle bu salınımı sönümlendirmesi gözlenmiştir.

Kontrol edilen sistemin, farklı başlangıç salınım açıları (α_0) için yanıtları Şekil 4.10 ve Şekil 4.11' de görülmektedir.



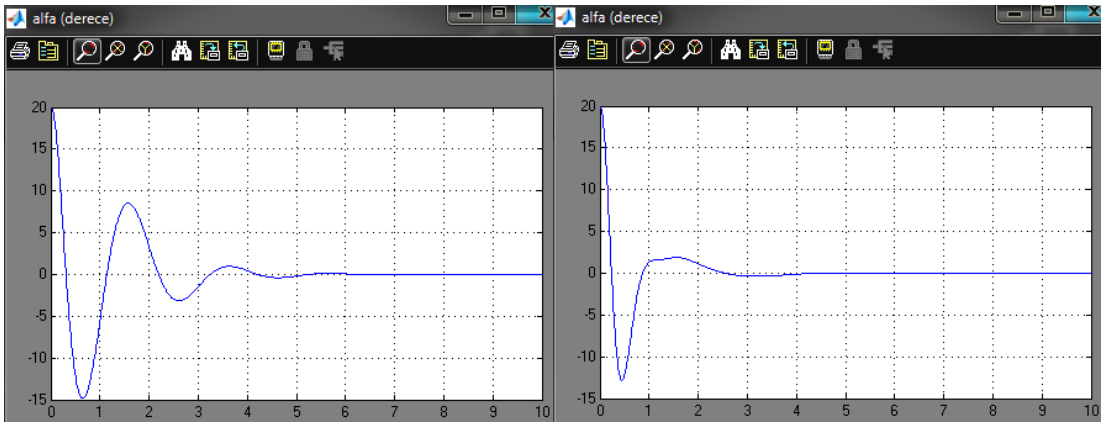
Şekil 4.10 : α_0 = 10 ve α_0 = 30 için salınım açısının zamana göre değişimi



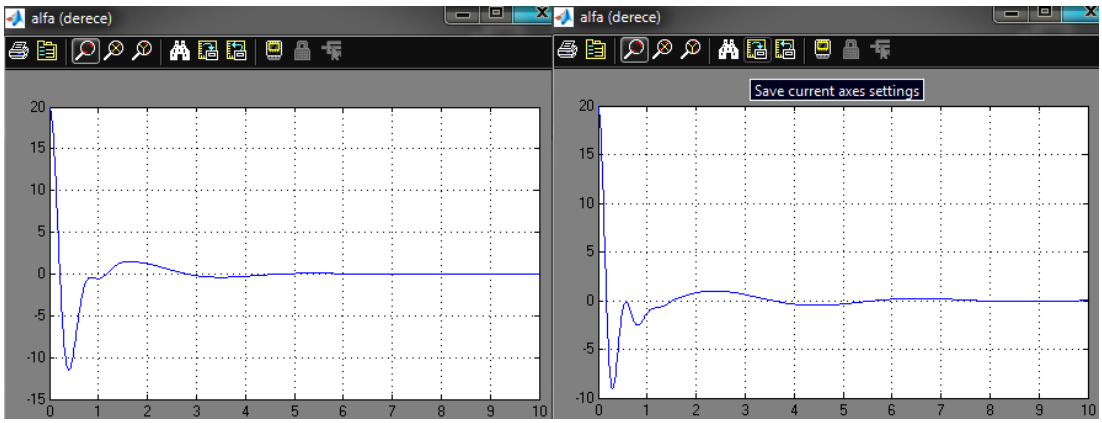
Şekil 4.11 : α_0 = 50 ve α_0 = 75 için salınım açısının zamana göre değişimi

Sistem yanıtlarından görüldüğü üzere, tasarlanan kontrolör α_0 = 75 dereceye kadar iyi bir başarım sergilemektedir. Daha büyük başlangıç koşulları için ise, gerekli kontrol işaretinin büyük olması ve doyma işlemi nedeniyle, bu işaret sisteme uygulanamamakta, sonuç olarak sistem cevabı çok salınımlı olmaktadır. Bununla beraber, sistemin doğrusal modeli yalnızca küçük α açıları için geçerli olmasına ve doğrusal modelden hareketle tasarlanan bir kontrolör kullanılmasına rağmen, tasarlanan sistemin başarımının, doğrusal olmayan sistem özelliklerinin daha belirgin olduğu büyük başlangıç koşulları için de oldukça iyi olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle, H_∞ optimal kontrolör yapısal model bilinmezlikleri ile baş edebilmektedir.

H_∞ kontrolörün parametrik bilinmezliklere karşı dayanıklılığını incelemek için sarkaç ağırlığı (M_p) 0.1 kg ile 3 kg arasında değiştirilerek, 20 derecelik başlangıç açısı için sistem davranışı gözlenmiştir. Benzetim sonuçları Şekil 4.12 ve Şekil 4.13' de görülmektedir.



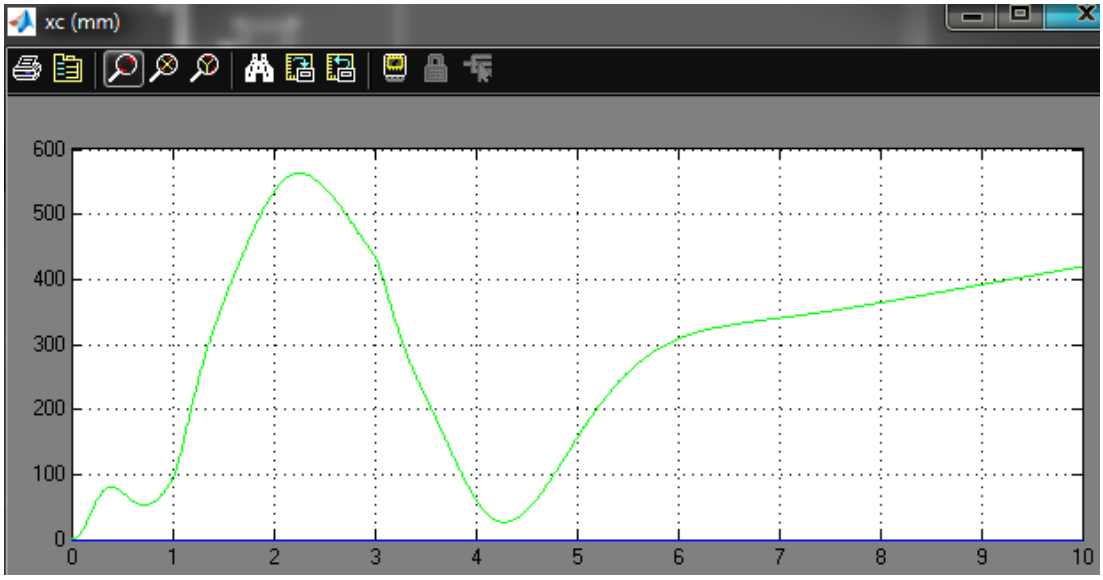
Şekil 4.12 : $M_p = 0.1$ ve $M_p = 0.5$ için salınım açısının zaman göre değişimi



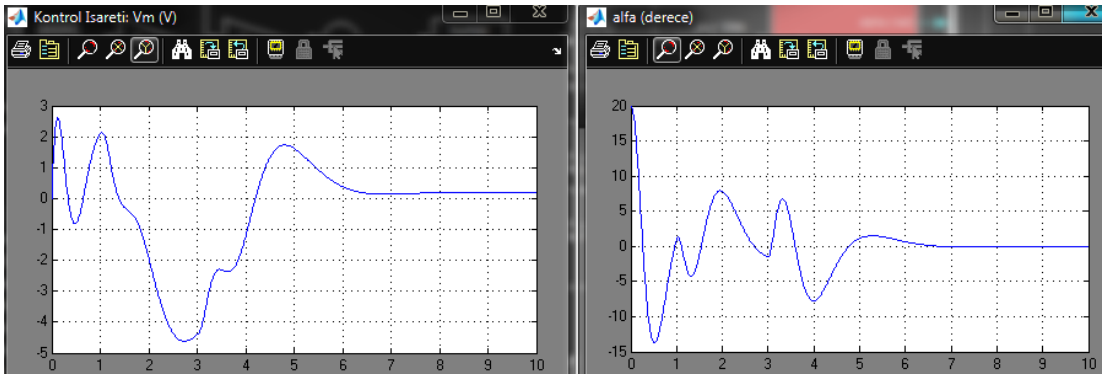
Şekil 4.13 : $M_p = 1$ ve $M_p = 3$ için salınım açısının zaman göre değişimi

Nominal parametre (M_p = 0.23 kg) değerlerine göre tasarlanan kontrolör, değişik yükler altında da iyi bir davranış sergilemektedir. Sistem transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomunda M_p parametresine bağlı terimler bulunmaktadır. Elde edilen sonuçlar, tasarlanan kontrolörün pay ve paydadaki model bilinmezliklerine karşın, hedeflenen davranıştan çok uzaklaşmayan dayanıklı bir kontrol sağladığını göstermektedir. Özellikle sarkaç kütlesi düşük olduğunda, sistem kutuplarının sanal kısımları büyüdüğü için sistem yanıtı daha salınımlı olacaktır. Buna rağmen, $M_p = 0.1$ kg için kontrolörün başarımının oldukça iyi olduğu söylenebilir. Kontrol edilen sistemin $M_p = 0.035$ kg ve daha küçük değerler için kararsız olduğu gözlenmiştir.

Sistem girişine gelen düşük frekanslardaki bozucuların etkisini ve bu etkinin bastırılma başarısını gözleyebilmek için, DC motor giriş gerilimine 1. saniyeden 3. saniyeye kadar 3 V genliğinde bir bozucu işaret uygulanmıştır. Taşıyıcının kızak üzerindeki yer değiştirmesi (mm), kontrol işareti (V_m) ve salınım açısının (α) zamana göre değişimi sırasıyla Şekil 4.14 ve Şekil 4.15' de verilmiştir.



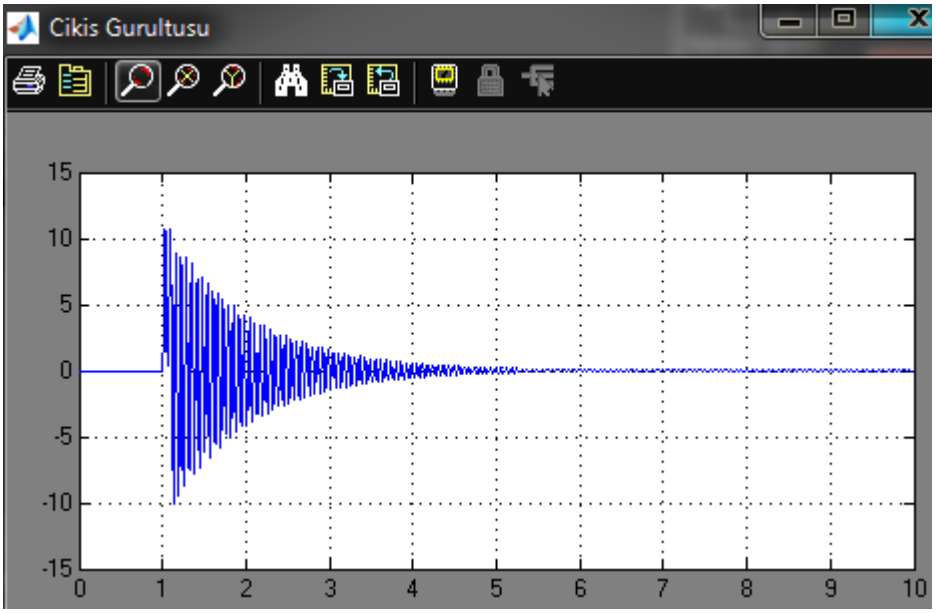
Şekil 4.14 : Taşıyıcı sistemin doğrusal hareketi



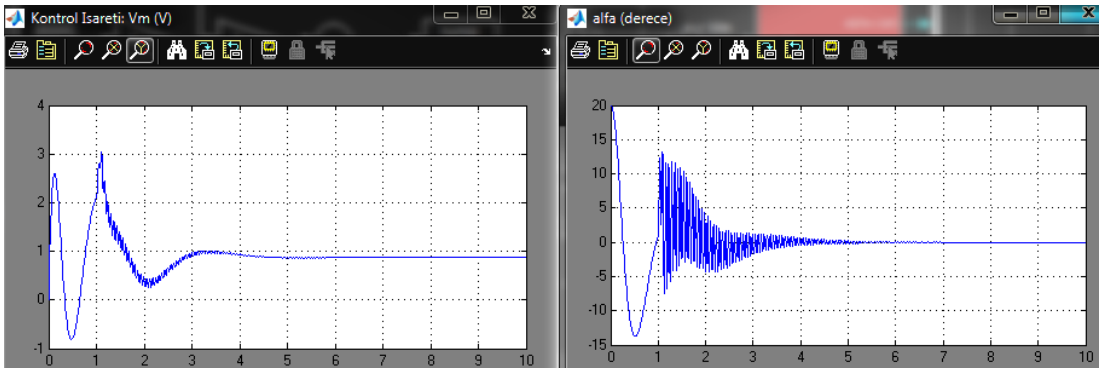
Şekil 4.15 : Kontrol işareti ve salınım açısının zamana göre değişimi

Kontrol işaretinin genliğinin normal sınırlar içinde ve kontrol başarımının beklendiği gibi olduğu görülmektedir.

Çıkış tarafından gelen yüksek frekanslı bozucuların kontrol performansına etkisini gözlemlemek için, salınım açısından alınan geribeslemeye karakteristiği Şekil 4.16' da görülen gürültü işareti eklenmiştir. α_0 = 20 için bozucu altındaki sistemin cevabı ve kontrol işaretindeki değişim Şekil 4.17' de verilmiştir.



Şekil 4.16 : Sistemin geri besleme yoluna uygulanan çıkış gürültüsü



Şekil 4.17 : Bozucu altında α ve V_m' nin zamana göre değişimi

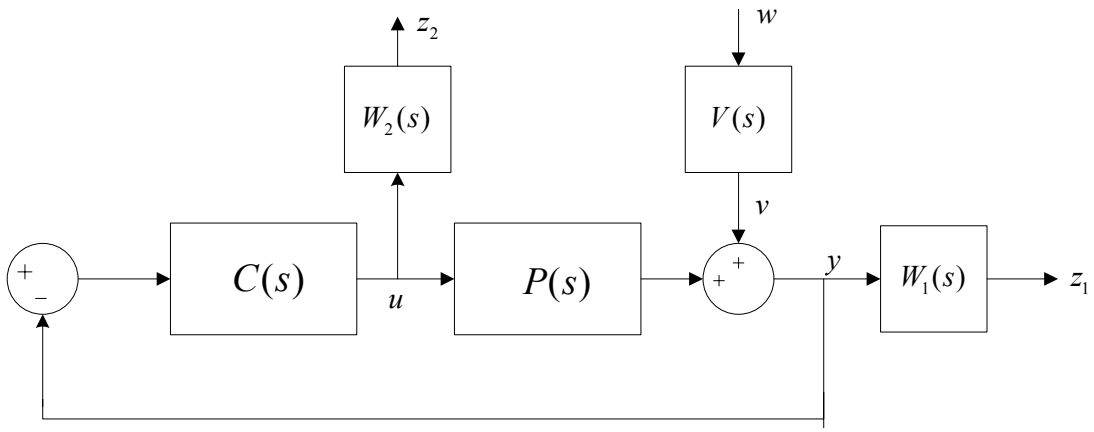
H_∞ optimal kuramın varsayımına göre sisteme, sonlu enerji taşıyan bir bozucu işareti verilmesi uygun görülmüştür. Bozucu işaretin genliği azımsanamayacak kadar büyük olmasına rağmen, belirlenen sınırlar içinde uygulanan kontrol işareti ile salınımların sönümlendirilmesi başarılıdır.

4.3 Sistemin Durum Uzayı Modeli Kullanılarak H_∞ Optimal Kontrolü

Bu bölümde, sistemin, Bölüm 2.2.2' de ayrıntılı olarak ele alınan durum uzayı modeli kullanılarak H_∞ optimal kontrolör tasarımına yer verilmiştir. Bu amaçla sisteme etki eden giriş işaretleri -kontrol işareti u ve bozucu girişi w- ile çıkış işaretleri -ölçülebilir çıkış işareti α ve ceza işareti z- arasındaki ilişkiyi veren genelleştirilmiş sürecin durum uzayı modeli, sistemin ve Bölüm 4.2' de elde edilen ağırlık ve

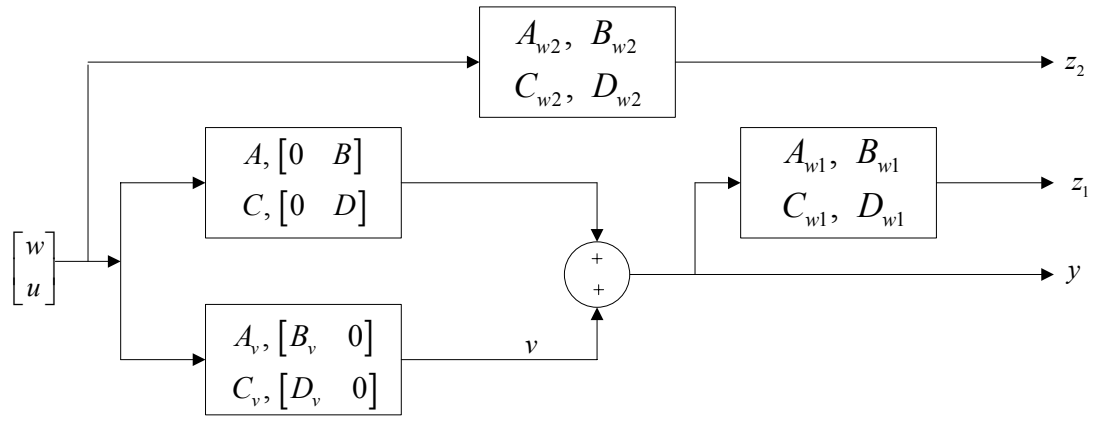
biçimlendirme filtrelerinin durum uzayı modellerinden yararlanılarak elde edilecektir. Bu model kullanılarak Cebirsel Riccati Denklemleri yaklaşımı (DGKF [15]) ile H_∞ kontrolör hesaplatılacaktır.

Genelleştirilmiş sürecin durum uzayı modeli elde edilirken Şekil 4.18' de görülen karma duyarlılık fonksiyonu blok diyagramından yararlanılmıştır.



Şekil 4.18 : Karma duyarlılık fonksiyonu blok diyagramı

Sistem girişi $\begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T$ olmak üzere; nominal sistem, biçimlendirme filtresi ve ağırlık fonksiyonlarının durum uzayı modellerinde gerekli değişikliler yapılarak genelleştirilmiş süreç blok diyagramı Şekil 4.19' daki gibi oluşturulmuştur.



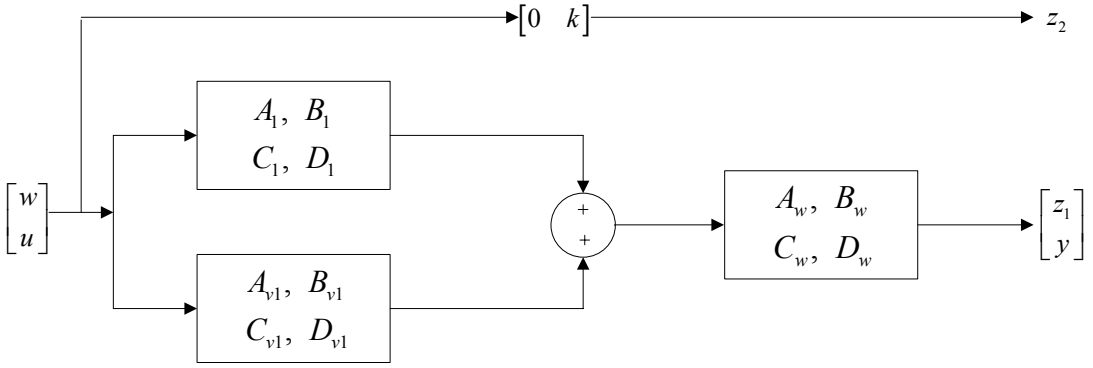
Şekil 4.19 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı

Nominal sistemin girişi sadece u ve biçimlendirme filtresinin girişi ise sadece w olduğundan, nominal sistem modelindeki B ve D matrislerinin ilk sütunu ile biçimlendirme filtresi modelindeki B_v ve D_v matrislerinin ikinci sütunları sıfırlardan oluşmaktadır. Genelleştirilmiş sistemin çıkış vektörü, ceza işaretleri z_1, z_2 ve kontrol

edilen sistemin çıkış işareti *y*' den oluşmaktadır. Çıkış işareti y ve bu işarete $W_2(s)$ ağırlık fonksiyonunun uygulanmasıyla elde edilen z_1 işaretine ilişkin alt sistemin durum uzayı modeli, giriş *y* ve çıkış $\begin{bmatrix} z_1 & y \end{bmatrix}^T$ olmak üzere,

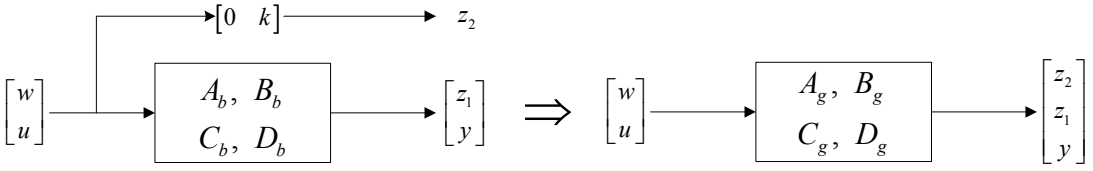
$$\begin{aligned} &\dot{x}_w = A_w x_w + B_w y = \\ &\begin{bmatrix} z_1 \\ y \end{bmatrix} = C_w x_w + D_w y = \begin{bmatrix} C_{w1} \\ 0 \end{bmatrix} x_w + \begin{bmatrix} D_{w1} \\ 1 \end{bmatrix} y \end{aligned} \qquad \textbf{(4.42)}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, kontrol işaretine ilişkin ağırlık fonksiyonu $W_1(s)$ Bölüm 4.2' de statik bir yapıda seçildiği için dinamik bir durum uzayı modeli belirlemeye ihtiyaç yoktur. Bu durumda, blok diyagram Şekil 4.20' de görüldüğü gibi olur.



Şekil 4.20 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı

Şekil 4.20' de görülen paralel bağlı iki alt sistem ve bu sistemlere seri bağlı diğer alt sistem bileşik bir sistem olarak düşünülür ve z_2 ceza işareti de çıkış vektörüne dahil edilirse, blok diyagram Şekil 4.21' deki gibi olur.



Şekil 4.21 : Genelleştirilmiş plant blok diyagramı

Sistem girişi $\begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T$ ve sistem çıkışı $\begin{bmatrix} z_2 & z_1 & y \end{bmatrix}^T$ olmak üzere genelleştirilmiş sürecin durum uzayı modeli,

$$\begin{aligned}\dot{x}_g &= A_g x_g + B_g \begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} z_2 & z_1 & y \end{bmatrix}^T &= C_g x_g + D_g \begin{bmatrix} w & u \end{bmatrix}^T\end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde elde edilir. Genelleştirilmiş sürecin sistem matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} A_g & B_{g1} & B_{g2} \\ C_{g1} & D_{11} & D_{12} \\ C_{g2} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

şeklinde ifade edilir. P matrisinde bulunan B_{g1} ve B_{g2}, genelleştirilmiş giriş matrisinin sırasıyla bozucu girişi w' ye ve kontrol işareti u' ya ilişkin alt matrisleri iken; C_{g1} ve C_{g2}, genelleştirilmiş çıkış matrisinin sırasıyla ceza işaretleri z_1, z_2 ve kontrol edilen sistemin ölçülebilen çıkış işareti α' ya ilişkin alt matrisleridir.

KTS deney sistemi için elde edilen genelleştirilmiş sürecin durum uzayı model matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A_{g(9\times9)} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.001 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2.7099 & 8.7674 & -305.0670 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2647 & -15.8603 & 0.0073 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27.8245 & 36.5480 & -0.0896 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15.9499 & -28.9795 & -358.536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$$B_g = \begin{bmatrix} B_{g1(9\times1)} & B_{g2(9\times1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2735 & -5.2390 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.46}$$

$$C_g = \begin{bmatrix} C_{g1(2\times9)} \\ C_{g2(1\times9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 105 & 0 & 5 & 0 & 0 & -13.5 & 43.8 & -1525.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2.7 & 8.8 & -305.1 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

$$D_g = \begin{bmatrix} D_{11(2\times1)} & D_{12(2\times1)} \\ D_{21(1\times1)} & D_{22(1\times1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

Sistemi kararlı kılan bir H_∞ kontrolörün bulunabilmesi için, sistemin kararlı kılınabilir ve sezilebilir olması gerekmektedir. Bir başka deyişle, (A_g, B_{g2}) çifti kararlı kılınabilir ve (A_g, C_{g2}) çifti sezilebilir olmalıdır. Kararlı kılınabilirlik sistemin

kararsız modlarının erişilebilirliği; sezilebilirlik ise kararsız modlarının gözlenebilirliğidir. Sistemin modeli incelenirse, A_g matrisinin sıfır olan özdeğerine karşı düşen sistemin kararsız modunun erişilemez ve gözlenemez olduğu görülür. Yani, (A_g, B_{g2}) kararlı kılınabilir ve (A_g, C_{g2}) sezilebilir değildir. Kararlı kılınamayan ve sezilemeyen kararsız bu mod, yani A_g matrisinin sıfırdaki özdeğeri, kontrol edilen sistemin sıfırdaki kutbundan gelmektedir. Tasarıma engel olan bu kararlı kılınabilirlik ve sezilebilirlik problemini aşmak için sistemin bu kutbu, $K = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ durum geribeslemesi uygulanarak sıfıra çok yakın bir değer olan -0.0014' e kaydırılmıştır ve bu sistem için H_∞ optimal kontrolör tasarlanmıştır. Bu model kullanılarak hesaplatılan kontrolör $K_{nr}(s)$ olarak adlandırılmıştır. Kontrolör durum uzayı modeli matrisleri, Ek B.2' de verilen MATLAB kod parçası ile aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.001 & 0 & 10^{-16} & 0 & 0 & -4\cdot10^{-16} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10079 & 118.27 & -0.32 & 174.8 & -1161.7 & -489.1 & 9425.6 & 122055 & 320021 \\ 23225 & -272.52 & 7.43 & -425.3 & 2676.5 & 1126.8 & -21717 & -281233 & -737374 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -13.24 & -37.75 & -53.47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.49)}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 5.7615 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.7615 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \textbf{(4.50)}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -768.2 & 9.014 & -0.023 & 13.14 & -87.33 & -37.28 & 718.4 & 9302 & 24391 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.51)}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.52)}$$

Ayrıca, H_∞ kontrolörün hesaplatılması için, (4.31)' de verilen indirgenmiş sistem transfer fonksiyonunun durum uzayı modeli elde edilmiştir. Bu model üzerinden genelleştirilmiş plant modeli tekrar oluşturulmuştur. İndirgenmiş transfer fonksiyonundaki sıfıra çok yakın olan sistem sıfırı, sıfırdaki kutup ile sadeleştirildiğinden, sıfırdaki modun genelleştirilmiş plantta ortaya çıkan erişilebilirlik ve gözlenebilirlik problemi ortadan kalkmıştır. Oluşturulan bu yeni durum uzayı modelinin matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A_g = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.001 & 0 & -5.239 & -0.0002 & -2.709 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.95 & -28.979 & -358.536 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15.95 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.53)}$$

$$B_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \textbf{(4.54)}$$

$$C_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 104.9 & 0 & -26.19 & -2.6\times10^{-14} & -13.549 & 43.837 & -1525.3 \\ 0 & 0 & 0 & -5.239 & -5.2\times10^{-15} & -2.709 & 8.767 & -305.06 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.55)}$$

$$D_g = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.56)}$$

Bu model üzerinden hesaplatılan kontrolör $K_r(s)$' in durum uzayı matrisleri, Ek B.3' de verilen MATLAB kod parçası ile şu şekilde bulunmuştur:

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.001 & 0 & -4\cdot10^{-15} & -3\cdot10^{-30} & -2\cdot10^{-15} & 7\cdot10^{-15} & -2\cdot10^{-13} \\ 1 & 10^{-17} & 0 & -2\cdot10^{-15} & -2\cdot10^{-30} & 10^{-15} & 4\cdot10^{-15} & -10^{-13} \\ -4559.1 & 25.44 & -0.35 & -0.051 & -2\cdot10^{4} & 4252 & 5.5\cdot10^{4} & 1.45\cdot10^{5} \\ -6\cdot10^{-34} & -10^{-33} & 1 & 4\cdot10^{-19} & 4\cdot10^{-34} & 2\cdot10^{-19} & -7\cdot10^{-19} & 2\cdot10^{-17} \\ -3\cdot10^{-34} & -6\cdot10^{-34} & 0 & 1 & 9\cdot10^{-34} & 5\cdot10^{-19} & -10^{-18} & 5\cdot10^{-17} \\ 2\cdot10^{-22} & 4\cdot10^{-22} & 0 & 5 & 5\cdot10^{-15} & -13.24 & -37.75 & -5.34 \\ -4\cdot10^{-23} & -9\cdot10^{-23} & 0 & -4\cdot10^{-17} & -4\cdot10^{-32} & 1 & 8\cdot10^{-17} & -2\cdot10^{-15} \\ 7\cdot10^{-23} & -10^{-22} & 0 & -3\cdot10^{-17} & -3\cdot10^{-32} & -1\cdot10^{-17} & 1 & -10^{-15} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.57)}$$

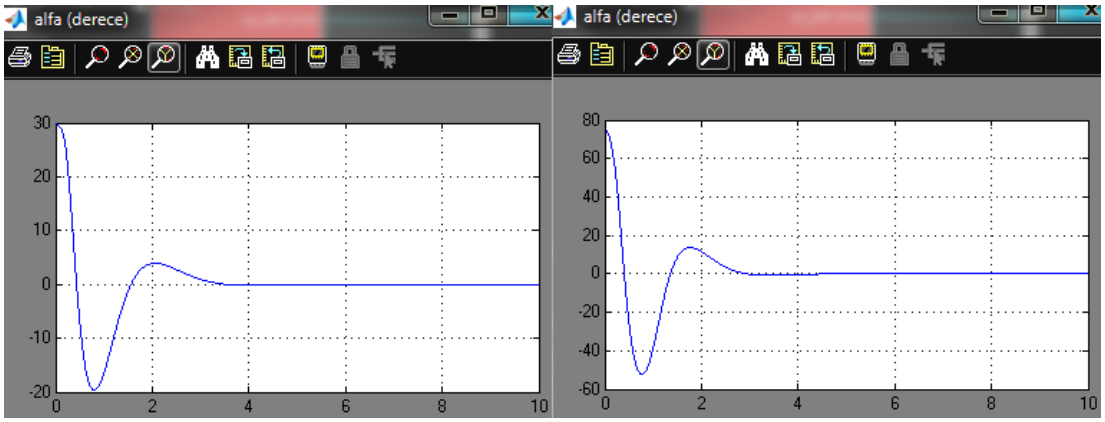
$$B_k = \begin{bmatrix} 1.3277 & -7\cdot10^{-15} & 5\cdot10^{-18} & 10^{-18} & 2\cdot10^{-18} & 1.3277 & -10^{-16} & -8\cdot10^{-17} \end{bmatrix}^T \quad \textbf{(4.58)}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -3.4337 & 1.9164 & -1.4239 & -3.6173 & -2000.1 & 320.25 & 4145.5 & 10918 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.59)}$$

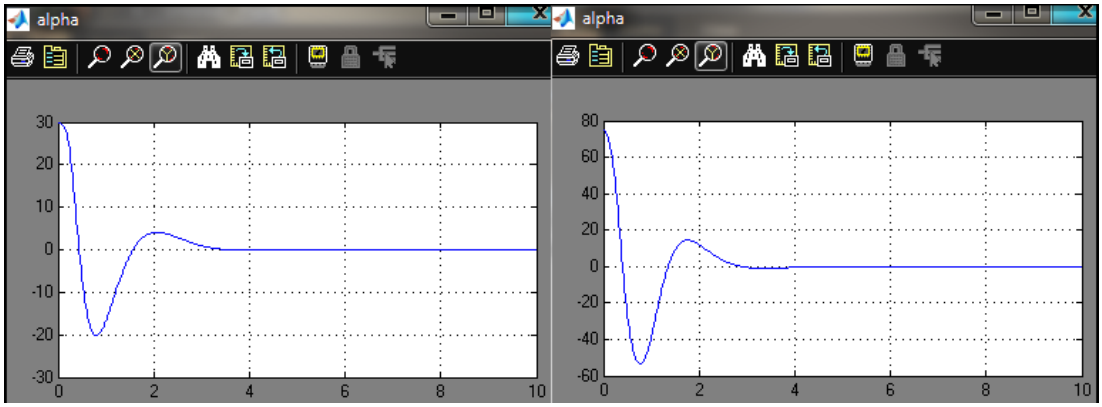
$$D_k = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.60)}$$

Elde edilen her iki kontrolörün başarımını ve dayanıklılığını sınamak için, KTS sisteminin doğrusal Simulink modelinde sorunsuz çalıştığı görüldükten sonra, Bölüm 4.2' de uygulanan koşullar altında doğrusal olmayan modelde benzetimler

yapılmıştır. İki kontrolörle de kontrol edilen sistemin, farklı başlangıç açıları (α_0) için yanıtları aşağıda görülmektedir.



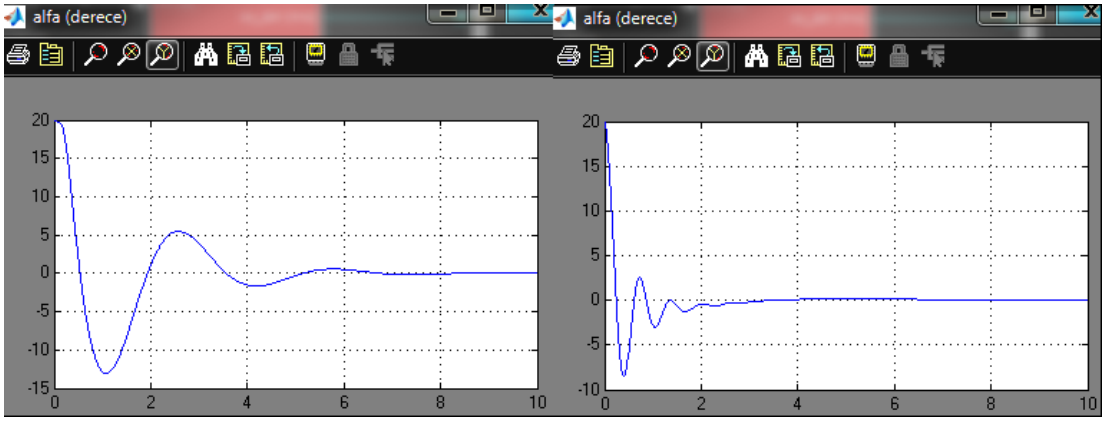
Şekil 4.22 : α_0=30 ve α_0=75 için salınım açısının değişimi -$K_{nr}(s)$ ile kontrol-



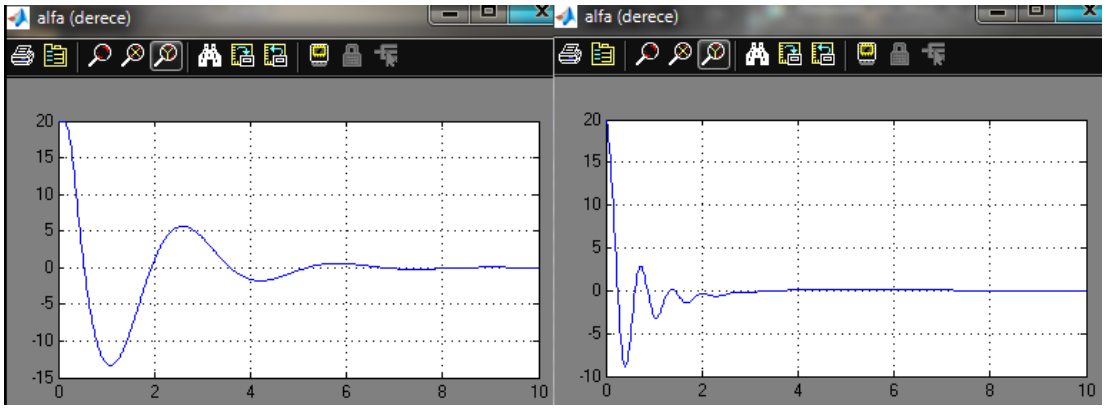
Şekil 4.23 : α_0=30 ve α_0=75 için salınım açısının değişimi -$K_r(s)$ ile kontrol-

Tasarlanan H_∞ kontrolörler, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23' den görüldüğü üzere, büyük başlangıç açılarında dahi iyi bir başarım göstermekte ve doğrusal modelden hareketle tasarlanmış olmalarına rağmen, doğrusal olmamaya bağlı model bilinmezlikleri ile baş edebilmektedir.

H_∞ kontrolörlerin parametrik bilinmezliklere karşı dayanıklılığını incelemek için sarkaç ağırlığı (M_p) 0.1 kg ile 3 kg arasında değiştirilerek, 20 derecelik başlangıç açısı için sistem davranışı gözlenmiştir. Benzetim sonuçları Şekil 4.24 ve Şekil 4.24' de görülmektedir.



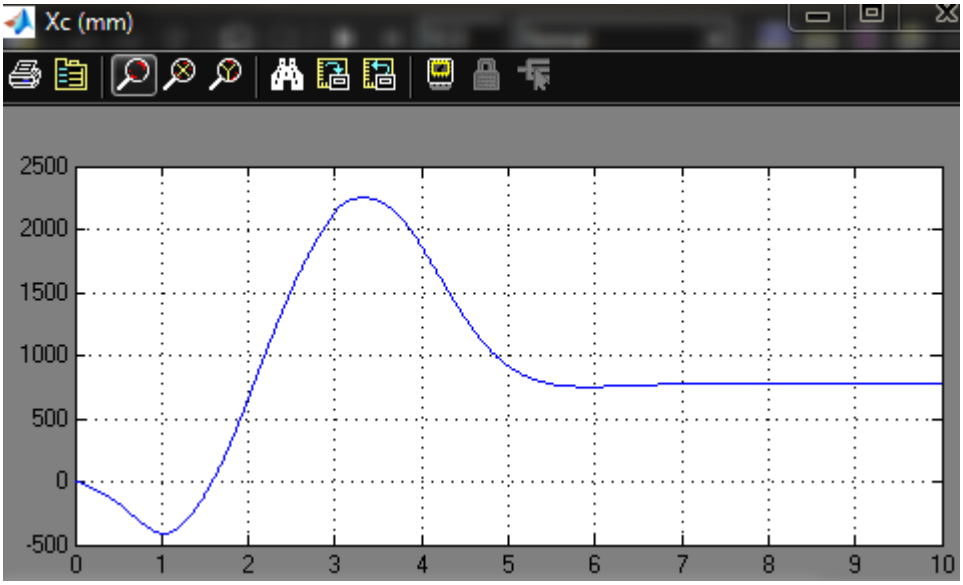
Şekil 4.24 : M_p = 0.1 ve M_p = 3 için salınım açısının değişimi -$K_{nr}(s)$ ile kontrol-



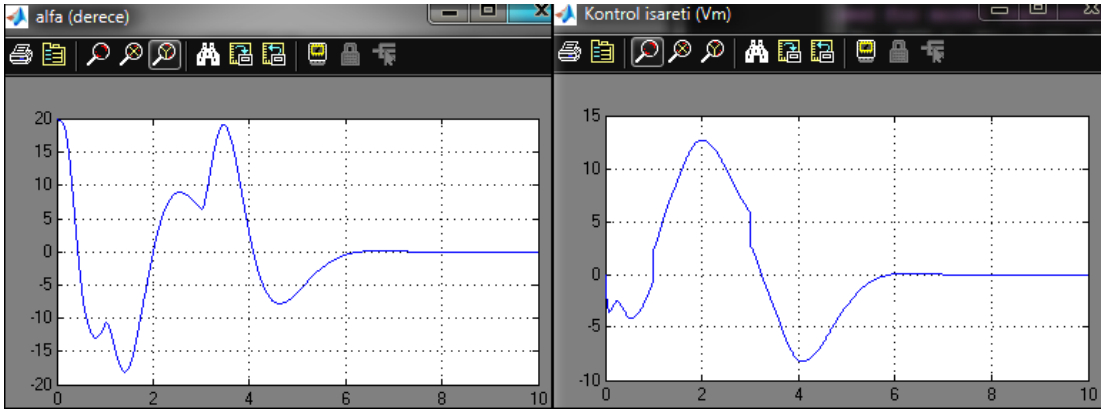
Şekil 4.25 : M_p = 0.1 ve M_p = 3 için salınım açısının değişimi -$K_r(s)$ ile kontrol-

Tasarlanan kontrolörler değişik yükler altında yine iyi bir davranış sergilemektedir. Elde edilen sonuçlar, her iki kontrolörün de, nominal sistem transfer fonksiyonundaki pay ve payda polinomundaki parametre bilinmezliklerine karşı başarılı olduğunu göstermektedir. Ayrıca, kontrol edilen sistemin M_p = 0.01 kg ve daha küçük değerler için kararsız olduğu gözlenmiştir.

Sistem girişine gelen düşük frekanslardaki bozucuların etkisini ve bu etkinin bastırılma başarısını gözleyebilmek için, DC motor giriş gerilimine 1. saniyeden 3. saniyeye kadar 3 V genliğinde bir bozucu işaret uygulanmıştır. $K_{nr}(s)$ ve $K_r(s)$ ile kontrol edilen sistemlerde taşıyıcının kızak üzerindeki yer değiştirmesi (mm), salınım açısı (α) ve kontrol işaretinin (V_m) zamana göre değişimi aynıdır ve sırasıyla Şekil 4.26 ve Şekil 4.27' de verilmiştir.



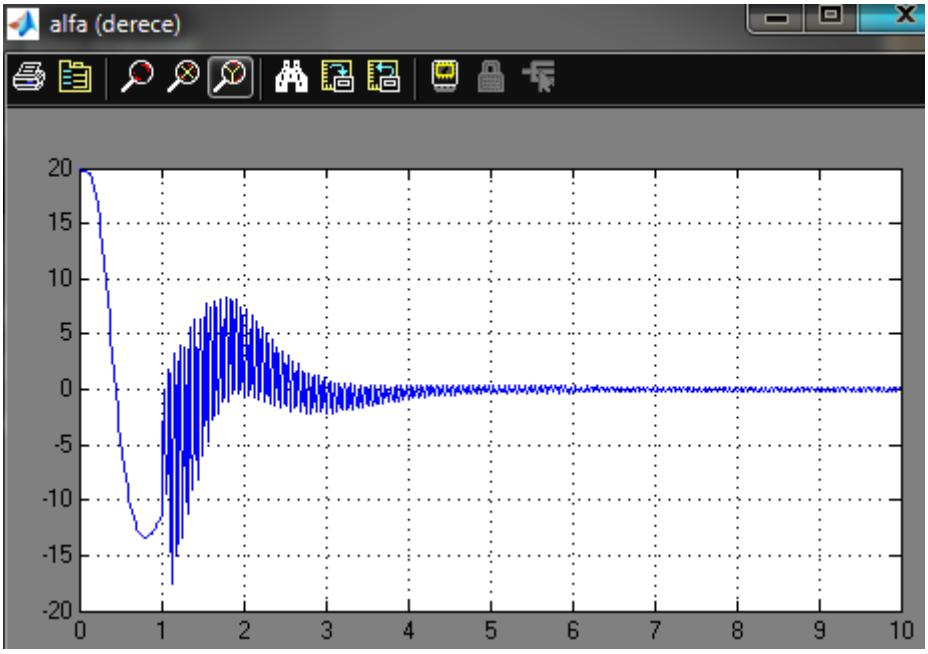
Şekil 4.26 : Taşıyıcı sistemin doğrusal hareketi



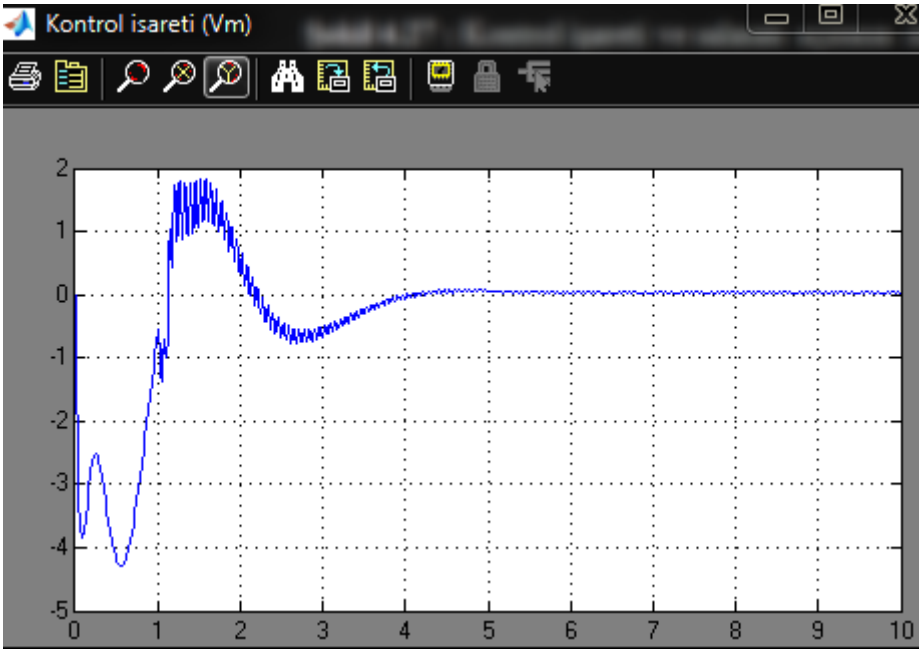
Şekil 4.27 : Kontrol işareti ve salınım açısının zamana göre değişimi

Kontrol işaretlerinin genliğinin normal sınırlar içinde ve kontrol başarımının beklendiği gibi olduğu görülmektedir.

Çıkış tarafından gelen yüksek frekanslı bozucuların kontrol performansına etkisini gözlemlemek için, salınım açısından alınan geribeslemeye karakteristiği Bölüm 4.2' deki Şekil 4.16' da görülen gürültü işareti eklenmiştir. α_0 = 20 için bozucu altındaki sistemin cevabı ve kontrol işaretindeki değişim sırasıyla Şekil 4.28 ve Şekil 4.29' da verilmiştir.



Şekil 4.28 : Bozucu altında salınım açısının zamana göre değişimi



Şekil 4.29 : Bozucu altında kontrol işaretinin zamana göre değişimi

Bozucu işaretin genliği azımsanamayacak kadar büyük olmasına rağmen, belirlenen sınırlar içinde uygulanan kontrol işareti ile salınımların sönümlendirilmesi başarılıdır.

Tüm benzetim sonuçlarının her iki kontrolör için de hemen hemen aynı olması, model indirgemeye ve durum geribeslemesi uygulanmış sistem modeli üzerinden

tasarım yapmaya bağlı modelleme hatalarına karşı, tasarımın dayanıklılık açısından başarısını ortaya koymaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, H_∞ optimal kontrol yöntemlerinin çıkış noktası olan karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonun dayanıklı kontrolör tasarımında güçlü bir yöntem olduğu görülmektedir. Model bilinmezlikleri, bozucu girişler ve gürültüler altında sistemin kararlılığını garanti eden, hedeflenen sistem davranış ölçütlerinden uzaklaşmayan nitelikte bir kontrol sağlamaktadır. Tasarımda, duyarlılık fonksiyonları frekans genlik cevaplarının kontrol başarımına katkı sağlayacak şekilde belirlenmesi, uygun giriş ve çıkış işareti ağırlık fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. Ayrıca, ağırlık fonksiyonlarının uygun seçimiyle, biçimlendirme filtresinin sıfırlarının, kapalı çevrim sistemin baskın kutupları olarak atanabilmesi, sistem yanıtının istenen şekilde olmasını sağlamaktadır. Ancak, ağırlık fonksiyonlarının seçilmesinde, bozucu bastırma miktarı ile baskın kutupların belirlenmesi arasında ödün verme durumunda kalınmaktadır.

Frekans tanım bölgesi optimizasyonu ve sentez yöntemi olarak, klasik kontrol kuramıyla ilişkilendirilmiş olması, tasarımı kolaylaştırmakta ve anlaşılır kılmaktadır. Durum uzayı modeli kullanılarak yapılan tasarımın, frekans tanım bölgesindeki polinomiyal tasarıma göre klasik kontrol kuramı ile ilişkilendirilmesi ve amaca yönelik algılanabilmesi daha zordur. Öte yandan, problemin çözümünde durum uzayı modelini kullanan iki Riccati denkleminin çözümüne dayalı nümerik algoritmalar, karmaşık s düzlemindeki J-spektral faktorizasyon algoritmasına göre daha üstündür. Buna bağlı olarak, durum uzayı çözümünü bulan bilgisayar programları daha iyi sonuçlar vermektedir. *J*-spektral faktorizasyondaki en temel problem, Z_γ matrisinin tekil olması durumunda çözümün bulunamamasıdır. Bu olumsuzlukla KTS sistemi için H_∞ kontrolörün Polyx aracılığıyla hesaplatılmasında karşılaşılmıştır ve sorunu aşmak için nominal sistemin transfer fonksiyonunda indirgeme yapılmıştır. Durum uzayı modeli kullanılarak tasarlanan kontrolörün hesaplatılmasında ise böyle bir sorun yaşanmamıştır. Polinomiyal yöntemde nümerik hataların da daha fazla olduğu görülmektedir. Her iki yöntemde aynı ağırlık fonksiyonları ve biçimlendirme filtresi kullanılmasına rağmen, benzetim sonuçlarında durum uzayı tasarımında kontrol

işaretinin sıfıra daha yakın bir değere oturduğu gözlenmiştir. Ayrıca, kontrol edilen sisteme dayanıklı kararlılık açısından bakıldığında, parametre değişimlerine göre durum uzayı modeli kullanılarak hesaplanan kontrolörün,sistemi daha geniş bir değişim aralığında kararlı kıldığı görülmüştür. Frekans tanım bölgesi çözümü için sarkaç kütlesi 0.035 kg olduğunda sistem kararsız olurken; durum uzayı çözümünde 0.01 kg olduğunda sistem kararsız olmaktadır. Diğer taraftan, J-spektral faktorizasyon ile hesaplanan kontrolör dördüncü mertebeden iken, durum uzayında hesaplanan kontrolör sekizinci mertebedendir. Yüksek mertebeli kontrolörler gerçek sistemlerde tercih edilmediği için, bu durum bir dezavantaj olarak öne çıkmaktadır.

İleriki çalışmalarda, H_∞ optimal kontrol probleminin lineer matris eşitsizlikleri çözümüne indirgenmesi incelenecektir. KTS sistemi için yapılan tasarımda H_∞ optimal kontrolörün lineer matris eşitsizliklerinin çözümü ile hesaplatılması ve elde edilen kontrolörün, diğer yöntemlerle hesaplatılan kontrolörlerle karşılaştırılması düşünülmektedir. Ayrıca, bu kontrolörlerin indirgenmiş modelleri bulunmaya çalışılacaktır.

Bir diğer çalışmada, sistem çıkışları taşıyıcı konumu -x_c- ve sarkaç açısı -α- olmak üzere, tek giriş iki çıkışlı KTS sistemi için karma duyarlılık fonksiyonu optimizasyonunun yapılması düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Nyquist, H.,** 1932. Regenaration Theory. *Bell System Technical Tour.*, **2,** 126-147.

[2] **Bode, H. W.,** 1945. Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Princeton, New Jersey.

[3] **Horowitz, I.,** 1963. Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, New York.

[4] **Kalman, R. E.,** 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, **82,** 35-45.

[5] **Cruz, J. B., and Perkins, W. R.,** 1964. A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback Systems. *Ieee T Automat Contr*, **AC-9,** 216-223.

[6] **Dorato, P.,** 1987. A Historical Review of Robust Control. *Ieee Contr Syst Mag*, **87,** 44-47.

[7] **MacFarlane, A. G. J., and Postletwaite, I.,** 1977. The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci. *Int J Control*, **25,** 81-127.

[8] **Rosenbrock, H. H.,** 1972. The Stability of Multivariable Systems. *Ieee T Automat Contr*, **AC-17,** 105-107.

[9] **Rosenbrock, H. H.,** 1974. Computer Aided Control System Design, Academic Press, New York.

[10] **Youla, D. C., Jabr, H. A., and Bongiorno, J. J.,** 1976. Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part II: The Multivariable Case. *Ieee T Automat Contr*, **AC-21,** 75-93.

[11] **Zames, G.,** 1981. Feedback and Optimal Sensitivity - Model-Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *Ieee T Automat Contr*, **26,** 2, 301-320.

[12] **Doyle, J.,** 1982. Analysis of Feedback-Systems with Structured Uncertainties. *Iee Proc-D*, **129,** 6, 242-250.

[13] **Francis, B. A., Helton, J. W., and Zames, G.,** 1984. H-Infinity-Optimal Feedback Controllers for Linear-Multivariable Systems. *Ieee T Automat Contr*, **29,** 10, 888-900.

[14] **Kwakernaak, H.,** 1986. A Polynomial Approach to Minimax Frequency-Domain Optimization of Multivariable Feedback-Systems. *Int J Control*, **44,** 1, 117-156.

[15] **Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., and Francis, B. A.,** 1989. State-Space Solutions to Standard H-2 and H-Infinity Control-Problems. *Ieee T Automat Contr*, **34,** 8, 831-847.

[16] **Gahinet, P., and Apkarian, P.,** 1994. A Linear Matrix Inequality Approach to H-Infinity Control. *Int J Robust Nonlin*, **4,** 4, 421-448.

[17] **Hardy, G. H.,** 1915. The Mean Value of the Modulus of An Analytic Function. *Proceedings of the London Math. Society*, **14,** 269-277.

[18] **Morari, M., and Zafiriov, E.,** 1989. Robust Process Control, Prentice Hall, Hemel Hemstead.

[19] **Green, M., and Limebeer, D. J. N.,** 1995. Linear Robust Control, Pearson Education, Englewood Cliffs, London.

[20] **Francis, B. A., and Doyle, J. C.,** 1987. Linear-Control Theory with an H-Infinity Optimality Criterion. *Siam J Control Optim*, **25,** 4, 815-844.

[21] **Kwakernaak, H.,** 1996. "Frequency Domain of the Standard H-Infinity Problem." *Polynomial Methods for Control Systems Design*, M. J. Grimble, and V. Kucera, eds., Springer, London, 57-107.

[22] **Desoer, C. A., and Vidyasagar, M.,** 1975. Feedback Systems Input-Output Properties, Academic Press, New York.

[23] **Vidyasagar, M.,** 1985. Control Systems Synthesis - A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge, MA.

[24] **Kwakernaak, H.,** 1985. Minimax Frequency-Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Feedback-Systems. *Ieee T Automat Contr*, **30,** 10, 994-1004.

[25] **Kwakernaak, H.,** 1993. Robust-Control and H-Infinity-Optimization - Tutorial Paper. *Automatica*, **29,** 2, 255-273.

[26] **Verma, M., and Jonckheere, E.,** 1984. L-Infinity-Compensation with Mixed Sensitivity as a Broad-Band Matching Problem. *Syst Control Lett*, **4,** 3, 125-129.

[27] **Freudenberg, J. S., and Looze, D. P.,** 1988. Frequency-Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback-Systems. *Lect Notes Contr Inf*, **104,** 1-281.

[28] **Postlethwaite, I., Tsai, M. C., and W., G. D.,** 1990. Weighting Function Selection in H-infinity Design, *Proceedings of the 11th IFAC World Congress*, **5**, 104-109.

[29] **Kwakernaak, H.,** 1991. The Polynomial Approach to H-Infinity-Optimal Regulation. *Lecture Notes in Mathematics*, **1496,** 141-221.

[30] **Francis, B. A.,** 1987. A Course in H-Infinity Control-Theory. *Lect Notes Contr Inf*, **88,** R5-&.

[31] **Skogestad, S., and Postlethwaite, I.,** 2005. Multivariable Feedback Control Analysis and Design, John Wiley & Sons, New York.

EKLER

EK A.1 : KTS Nominal Sistem Parametreleri

EK B.1 : Farklı Duyarlılık Fonksiyonları için Kontrolörlerin Hesaplatılması ve Duyarlılık Fonksiyonları Frekans-Genlik Eğrilerinin Elde Edilmesi

EK B.2 : Durum Uzayı Modeli Kullanılarak Genelleştirilmiş Plant ve H-sonsuz Kontrolörün Bulunması

EK B.3 : İndirgenmiş Durum Uzayı Modeli Kullanılarak Genelleştirilmiş Plant ve H-sonsuz Kontrolörün Bulunması

EK A.1 : KTS Nominal Sistem Parametreleri

Çizelge A. 1 : Uzun Sarkaçlı Sistem için Nominal Parametreler

Sembol	Açıklama	Değer
M_p	Sarkaç kütlesi	0.23 kg
L_p	Sarkaç uzunluğu	0.6413 m
l_p	Sarkaç ağırlık merkezinden asılma noktasına olan uzunluk	0.3302 m
I_p	Sarkaç eylemsizlik momenti	0.0078 kgm^2
B_p	Viskoz sönümleme sabiti	0.0024Nms/rad
V_m	Motor endüvi gerilimi	V
R_m	Motor endüvi direnci	2.6 Ω
K_t	Motor tork sabiti	0.00767 Nm/rad
η_m	Motor verimi	1
K_m	EMK sabiti	0.00767 Nm/rad
K_g	Dişli oranı	3.71
η_g	Dişli kutusu verimi	1
M_c	Taşıyıcının toplam kütlesi	0.7031 kg
r_{mp}	Motor dişli yarıçapı	0.00635 m
B_{eq}	Motor dişlisindeki eşdeğer viskoz sönümlenme sabiti	4.3 Nms/rad

EK B.1 : Farklı Duyarlılık Fonksiyonları için Kontrolörlerin Hesaplatılması ve Duyarlılık Fonksiyonları Frekans-Genlik Eğrilerinin Elde Edilmesi

```
pinit;      % POLYX in baslatilmasi
% Sistem, agirlik ve bic. filtresi TF polinomlarinin atanmasi

n = -5.239;
d = s^3 + 15.9499*s^2 + 28.9795*s + 358.536;
m = s^3 + 13.24*s^2 + 37.7469*s + 53.469;
a1 = 5*(s^2 + 10*s + 21);
b1 = (s^2 + 0.2*s + 0.001);
a2 = 1;
b2 = 1;

% k=1 ve c=5 icin yazilan kontrolorun hesaplanmasi
% ve Duy. fonk. frekans-genlik egrilerinin cizdirilmesi

gmin=1; gmax=100; accuracy=1e-4;
[y,x,gopt] = mixeds(n,m,d,a1,b1,a2,b2,gmin,gmax,accuracy);
clpoles=roots(d*x+n*y);
omega=logspace(-2,2);
S=bode(pol2mat(d*x),pol2mat(d*x+n*y),omega);
T=bode(pol2mat(n*y),pol2mat(d*x+n*y),omega);

subplot(1,2,1),loglog(omega,S),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('S'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on
subplot(1,2,2),loglog(omega,T),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('T'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on

% k=1 ve c=10 icin yazilan bolum
a3 = 10*(s^2 + 10*s + 21);
[y1,x1,gopt] = mixeds(n,m,d,a3,b1,a2,b2,gmin,gmax,accuracy);
S1=bode(pol2mat(d*x1),pol2mat(d*x1+n*y1),omega);
T1=bode(pol2mat(n*y1),pol2mat(d*x1+n*y1),omega);

subplot(1,2,1),loglog(omega,S1,'--'),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('S'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on
subplot(1,2,2),loglog(omega,T1,'--'),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('T'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on

% k=1 ve c=30 icin yazilan bolum

a4 = 30*(s^2 + 10*s + 21);
[y2,x2,gopt] = mixeds(n,m,d,a4,b1,a2,b2,gmin,gmax,accuracy)
S2=bode(pol2mat(d*x2),pol2mat(d*x2+n*y2),omega);
T2=bode(pol2mat(n*y2),pol2mat(d*x2+n*y2),omega);

subplot(1,2,1),loglog(omega,S2,':'),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('S'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on
subplot(1,2,2),loglog(omega,T2,':'),axis([1e-2 1e2 1e-4 10])
ylabel('T'),xlabel('frekans (rad/s)'),grid
hold on

legend('c=5','c=10','c=30')
```

EK B.2 : Durum Uzayı Modeli Kullanılarak Genelleştirilmiş Plant ve H-sonsuz Kontrolörün Bulunması

```
% SISTEM durum uzayi matrisleri
Aa = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 2.2643 -15.8866 0.0073; 0 -27.8203 36.6044
-0.0896];
Bb = [0; 0; 2.2772; -5.2470];
Cc = [0 1 0 0];
Dd = 0;

% Durum Geribeslemeli sistem durum uzayi modeli
Ka=[0.01 0 0 0];
Adurum=Aa-Bb*Ka;
sys=ss(Adurum,Bb,Cc,Dd);

% [w u]' girisi için SISTEMin yeni durum uzayi modeli
A1 = Adurum;
B1 = [[0; 0; 0; 0] Bb];
C1 = Cc;
D1 = [0 Dd];
sys1 = ss(A1, B1, C1, D1);

% Belirlenen BICIMLENDIRME FILTRESI durum uzayi modeli
[Av,Bv,Cv,Dv]=tf2ss([1 13.24 37.7469 53.469],[1 15.9499 28.9795
358.536]);

% [w u]' girisi için BICIMLENDIRME FILTRESININ yeni durum uzayi
modeli
Av1 = Av;
Bv1 = [Bv(1) 0; Bv(2) 0; Bv(3) 0];
Cv1 = Cv;
Dv1= [Dv(1) 0];
sysv1 = ss (Av1,Bv1,Cv1,Dv1);

% SISTEM ve BIC. FILTRESININ olusturdugu PARALEL sistem durum uzayi
modeli
sysparalel = sys1 + sysv1;
[Apar,Bpar,Cpar,Dpar]=ssdata(sysparalel);

% Belirlenen 1. AGIRLIK FONKSIYONU için durum uzayi modeli
[Aw,Bw,Cw,Dw]=tf2ss([5*1 5*10 5*21],[1 0.2 0.001]);

% Cikis [z1 y]' olarak düsünürsek olusan yeni durum uzayi modeli
Aw1 = Aw;
Bw1 = Bw;
Cw1 = [Cw ; 0 0];
Dw1 = [Dw ; 1];
sysw1 = ss(Aw1,Bw1,Cw1,Dw1);

% [w u]' giris [z1 y]' cikis olmak üzere BILESIK SISTEM durum uzayi
modeli
sysbilesik = sysw1 * sysparalel;
[Abil,Bbil,Cbil,Dbil] = ssdata(sysbilesik);

% GENELLESTIRILMIS PLANT durum uzayi modeli
Ag = Abil;
Bg = Bbil;
Cg = [0 0 0 0 0 0 0 0 ; Cbil(1,:) ; Cbil(2,:)];
```

```
Dg = [0 0.1; Dbil(1,:) ; Dbil(2,:)];

% P matrisini olusturma
P = ss(Ag, Bg, Cg, Dg);

% H-SONSUZ kontrolörün hesaplatilmasi
[Kon,CL,GAM]=hinfsyn(P,1,1);
[Ak1,Bk1,Ck1,Dk1]=ssdata(Kon);
pole(CL);   % kapali cevrim kutuplarin hesaplanmasi
```

EK B.3 : İndirgenmiş Durum Uzayı Modeli Kullanılarak Genelleştirilmiş Plant ve H-sonsuz Kontrolörün Bulunması

```
% SISTEM durum uzayi matrisleri
[Aa,Bb,Cc,Dd] = tf2ss([-5.23905 -0.001],[1 15.9499 28.9795
358.536]);
sys=ss(Aa,Bb,Cc,Dd);

% [w u]' girisi icin SISTEMin yeni durum uzayi modeli
A1 = Aa;
B1 = [[0; 0; 0] Bb];
C1 = Cc;
D1 = [0 Dd];
C = [0 1 0 0];
D = 0;
sys1 = ss(A1, B1, C1, D1);

% Belirlenen BICIMLENDIRME FILTRESI durum uzayi modeli
[Av,Bv,Cv,Dv]=tf2ss([1 13.24 37.7469 53.469],[1 15.9499 28.9795
358.536]);

% [w u]' girisi icin BICIMLENDIRME FILTRESININ yeni durum uzayi
modeli
Av1 = Av;
Bv1 = [Bv(1) 0; Bv(2) 0; Bv(3) 0];
Cv1 = Cv;
Dv1= [Dv(1) 0];
sysv1 = ss (Av1,Bv1,Cv1,Dv1);

% SISTEM ve BIC. FILTRESININ olusturdugu PARALEL sistem durum uzayi
modeli
sysparalel = sys1 + sysv1;
[Apar,Bpar,Cpar,Dpar]=ssdata(sysparalel);

% Belirlenen 1. AGIRLIK FONKSIYONU için durum uzayi modeli
[Aw,Bw,Cw,Dw]=tf2ss([5*1 5*10 5*21],[1 0.2 0.001]);

% Cikis [z1 y]' olarak düsünürsek olusan yeni durum uzayi modeli
Aw1 = Aw;
Bw1 = Bw;
Cw1 = [Cw ; 0 0];
Dw1 = [Dw ; 1];
sysw1 = ss(Aw1,Bw1,Cw1,Dw1);

% [w u]' giris [z1 y]' cikis olmak üzere BILESIK SISTEM durum uzayi
modeli
sysbilesik = sysw1 * sysparalel;
```

```
[Abil,Bbil,Cbil,Dbil] = ssdata(sysbilesik);

% GENELLESTIRILMIS PLANT durum uzayi modeli
Ag = Abil;
Bg = Bbil;
Cg = [0 0 0 0 0 0 0 0; Cbil(1,:) ; Cbil(2,:)];
Dg = [0 0.1; Dbil(1,:) ; Dbil(2,:)];

% P matrisini olusturma
P = ss(Ag, Bg, Cg, Dg);

% H-SONSUZ kontrolörün hesaplatilmasi
[Kon,CL,GAM]=hinfsyn(P,1,1,'DISPLAY','on');
[Ak,Bk,Ck,Dk]=ssdata(Kon);
pole(CL);   % kapali cevrim kutuplarin hesaplanmasi
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Baran ALİKOÇ

Doğum Yeri ve Tarihi: Aydın, 25.05.1984

Adres: Doğuş Üniversitesi, G Blok, Kontrol Müh. Bölümü
Acıbadem, Kadıköy, 34722 İSTANBUL

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

Alikoc B., Sumer G. L., 2009. H-infinity Control of Single Pendulum Gantry. *The 6th IFAC Workshop on Technology Transfer in Developing Countries: Automation and Infrastructure DECOM-TT 2009*, September 26-29, 85-90, Ohrid, Macedonia.