ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B-METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARI

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED tarafından hazırlanan **"B-Metrik Uzaylarda En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları"** adlı tez çalışması 21/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ

Eş Danışman : Arş. Gör. Dr. Hakan SAHİN

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Anabilim Dalı
Kırıkkale Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**B-Metrik Uzaylarda En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (21/02/2022).

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

B-METRİK UZAYLARDA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARI

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Eş Danışman: Araş. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diğer ana bölümlerde gerekli olan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde literatür taraması yapılmış ve bazı sonuçlar detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölüm tezimizin orjinal bölümünü içermektedir. Bu bölümde biz öncelikle Karapınar tip büzülme dönüşümü kavramı tanıtılmış ve bu dönüşümler için b-metrik uzaylarda bazı en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiştir. Böylece literatürde bazı sabit nokta ve en iyi yakınlık noktası sonuçlarının bir genellemesi elde edilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2022, 46 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, En iyi yakınlık noktası, B-metrik uzaylar

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SOME BEST PROXIMITY POINT RESULT ON B-METRIC

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa ASLANTAŞ
Co-Advisor: Res. Asst. Dr. Hakan ŞAHİN

This thesis consists of four parts. In the first chapter, some definitions and theorems required in other main chapters are given. In the second part, a literature study was made and some results were examined in detail. The third chapter contains the original part of our thesis. In this section, we first introduce the concept of Karapınar type non-unique contraction transform and obtain some best proximity point results for these transforms in b-metric spaces. Thus, a generalization of some fixed point and best proximity point results has been obtained in the literature. In the last section, conclusion and recommendation is given

2022, 46 pages

Keywords: Fixed point, Best proximity point, B-metric spaces

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Her şeyden önce, rahman ve rahim olan Allah'a çok teşekkür ederim. Bu tez sürecimin tamamlanmasinda emeği geçen bir çok kişiye teşekkür etmekten mutluluk duyarım. Bu çalışmanın hazırlanması ve yürütülmesi sırasında ilgi ve alakasını hiç eksik etmediği, ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde bilgi ve deneyimleri ile yardım ettiği tüm bu süreçte manevi desteğini daima hissettirdiği için çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca gösterdiği akıl hocalığı ve sabrı için kendisine sossuz teşekkürler etmek istiyorum ve eş danışmanım Arş. Gör. Dr. Hakan ŞAHİN'e rehberlikleri ve anlayışları için teşekkür ederim. Eğitim deneyimi benzersiz olmuştur. Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm öğretim üyelerine çok teşekkür ederim. Zor zamanlarımda beni her zaman yüreklendiren ve manevi desteğini esirgemeyen anneme babama teşekkür ederim. Destek olan kardeşlerime ve arkadaşlarıma en içtenten teşekkürlerimi sunarım.

Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

Çankırı, Şubat 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. ÖN BİLGİLER **4**
2.1 Metrik Uzaylar ve Özellikleri **4**
2.2 Sabit Nokta ve En İyi Yakınlık Noktası Teorisi **11**
2.3 B-Metrik Uzaylar **18**
3. BAZI EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARI **22**
3.1 Ćirić Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **22**
3.2 Pachpatte Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **28**
3.2 Ćirić-Jotić Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları **31**
4. KARAPINAR TİPİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜM SONUÇLARI **37**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **42**
KAYNAKLAR **43**
ÖZGEÇMİŞ **46**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\forall$	Her-Herhangi
$\exists$	En azından bir

KISALTMALAR DİZİNİ

sup	En küçük üst sınır
inf	En büyük üst sınır
$limsup$	Üst limit
$liminf$	Alt limit

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, metrik uzaylarda yirminci yüzyılın başında başlayan heyecan verici bir araştırma alanıdır. Sabit nokta teoremleri temel olarak diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, dinamik programlama, fraktal modelleme, kaos teorisi ve bunların dışında matematik, istatistik, mühendislik, ekonomi yaklaşım teorisi ve diğer disiplinlerin varlığı teorisinde ortaya çıkan problemlerle uğraşırken faydalıdır. Tarihsel olarak, sabit nokta teorisi çalışmaları iki noktada yoğunlaşmıştır. Birincisi, lineer normlu uzayların kompakt ve konveks alt kümelerinde tanımlanan sürekli fonksiyonların sabit noktaları üzerinde, diğeri ise tam metrik uzaylarda büzülme dönüşümünün sabit noktaları üzerindedir. Brouwer'in (1910) çalışması, normlu lineer uzayda sabit nokta teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. Birim yuvar üzerinde herhangi bir sürekli kendinden kendine dönüşümünün sabit bir noktası olduğunu kanıtladı. Metrik uzaylarda sabit nokta teorisinin başlangıcı, Banach büzülme ilkesi olarak bilinen Polonyalı matematikçi Banach'ın (1922) çalışması kabul edilir. Banach, T (X, ρ) metrik uzağında kendinden kendine bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y)$$

koşulunu sağlayacak biçiminde $k \in [0,1)$ bir varsa T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahip olduğunu kanıtladı.

Bu ilke, yalnızca kendinden kendine dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ve tekliğini garanti etmekle kalmaz, aynı zamanda bu dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için bir yöntem de verir. Bu teknik, integral denklemler, adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, dinamik programlama ve oyun teorisi gibi matematiğin farklı dallarındaki çeşitli problemleri çözmek için güçlü bir araç olarak kullanılır. Uygulanabilirliği nedeniyle, birçok yazar Banach büzülme ilkesini farklı şekillerde genelleştirmiş ve genişletmiştir. (Agarwal v.d. 2010, Banach 1922, Berinde 1993, Berinde 1997, Hussain v.d.2019, Jleli ve Samet 2014, Proinov 2020, Reich ve Zaslavski 2020, Rus 2001, Shatanawi v.d. 2020, Abbas v.d. 2019, Abbas ve Nazir 2012,

Agarawal v.d. 2004, Aydi 2016, Cosentino ve Vetro 2014, Durmaz ve Altun 2016, Dag v.d. 2017, Haghi v.d. 2013, Hussain v.d. 2016, Kadelburg ve Radenovic 2014, Mizoguchi ve Takahashi 1989, Piri ve Kumam 2014, Reich 1972, Reich 1983, Romaguera 2012). Ancak, gerçek hayat problemlerini çözmek için sıklıkla kullanılan lineer olmayan sistemlerde çözüm tek olmayabilir. Bu nedenle, sabit noktanın tekliğini garanti etmeyen teoremleri de dikkate almak pratikte etkilidir. Bu düşünce ile Ćirić, T (X, ρ) metrik uzağında kendinden kendine bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\min\{\rho(Tx, Ty), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty)\} - \min\{\rho(x, Ty), \rho(y, Tx)\} \leq k\rho(x, y)$$

koşulunu sağlayacak biçiminde $k \in [0,1)$ bir varsa T dönüşümünün sabit noktaya sahip olduğunu elde etti. Daha sonra pek çok yazar tarafından bu konu çalışılmıştır.(Achari 1976, Alsulami v.d. 2017, Ćirić 1974, Karapınar 2019, Pachpatte 1979, Karapınar 2012).

Basha ve Veeramani (1977) ise en iyi yakınlık noktası kavramını ortaya atmışlardır. En iyi yakınlık noktası teorisi, bir optimizasyon problemi olan $inf_{x\in A}\rho(a, Ta)$ ifadesinin bir çözüme sahip olduğu koşulu inceler. (X, ρ) bir metrik uzay, A ve B X'in boştan farklı alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olmak üzere $\rho(a, Ta) = \rho(A, B)$ koşulunu sağlayan $a \in A$ varsa a noktasına T dönüşümünün en iyi yakın noktası adı verilir. $A = B$ olması durumunda her en iyi yakın nokta sonuçları bir sabit nokta sonucuna dönüştüğü için bu konu pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Altun v.d. 2020, Basha 2010, Basha ve Veeramani 1997, Sahin v.d. 2020, Sankar Raj 2011,Sankar Raj 2013, Aslantas 2021, Sahin 2021, Reich 1978).

Diğer taraftan Czerwik (Czerwik 1993) metrik uzayların bir genellemesi olan b-metrik kavramını tanıttı. Böylece standard metrik uzay kavramını genişleterek sabit nokta çalışmalarının farklı bir yönde gelişmesini sağladı.

Bu tezde biz b-metrik uzaylarda bazı en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiştir. Birinci bölümde diğer ana bölümlerde gerekli olan bazı tanım ve teoremlere yer

verilmiştir. İkinci bölümde literatür taraması yapılmış ve bazı sonuçlar detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölüm tezimizin orjinal bölümünü içermektedir. Bu bölümde biz öncelikle Karapınar tip benzersiz olmayan büzülme dönüşümü kavramı tanıtılmış ve bu dönüşümler için b-metrik uzaylarda bazı en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiştir. Böylece literatürde bazı sabit nokta ve en iyi yakınlık noktası sonuçlarının bir genellemesi elde edilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızın diğer bölümlerinde faydalandığımız bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

2.1 Metrik Uzaylar ve Özellikleri

Tanım2.1. X boştan farklı bir küme ve $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer ρ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ρ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir, her $x, y, z \in X$ için,

m1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

m2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

m3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Ayrıca (X, ρ) ikilisine bir metrik uzay denir.

Örnek 2.2. $X = \mathbb{R}$ ve $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlansın. Böylece, (X, ρ) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}$'de alışılmış metrik olarak bilinir.

Örnek 2.3. $X = \mathbb{R}^2$ ve $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \text{maks}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlansın. Budurumda (X, ρ) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}^2$ 'de maksimum metrik olarak bilinir.

Örnek 2.4. $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, ρ) bir metrik uzaydır. Bu metrik, $\mathbb{R}^2$'de Öklid metriği olarak bilinir.

Örnek 2.5. X boş olmayan bir küme ve $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda, (X, ρ) bir metrik uzaydır. Bu metrik, ayrık metrik olarak bilinir.

Örnek 2.6. Bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar ailesi olsun ve $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $f, g \in X$ için,

$$\rho(f,g) = \max_{t \in [x,y]} |f(t) - g(t)|$$

eklinde tanımlansın. Bu durumda (X, ρ) bir metrik uzaydır. Bu metrik, düzgün metrik olarak bilinir.

Tanım 2.7. (X, ρ) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x_0, r) = \{y \in X: \rho(x,y) \leq r\}$$

kümesine kapalı yuvar denir.

Örnek 2.8. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$$

şeklindedir.

Tanım 2.9. (X, ρ) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x_0, r) = \{y \in X: \rho(x_0, y) < r\}$$

kümesine açık yuvar denir.

Örnek 2.10. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

şeklindedir.

Tanım 2.11. $S, (X, \rho)$ metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi noktalarının her biri için bir açık yuvar içeriyorsa, yani

$$\forall x \in S: \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subseteq S$$

sağlanıyorsa S kümesine açık küme denir.

Teorem 2.12. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Her açık yuvar bir açık kümedir.

Tanım 2.13. $S, (X, \rho)$ metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesinin tümleyeni açık ise S'ye kapalıdır denir.

Örnek 2.14. (X, ρ) ayrık metrik uzay olmak üzere her $x_0 \in X$ için

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$$

olduğu için her tek nokta {x} kümesi bir açık kümedir. Dolayısıyla her S alt kümesi açıktır. Ayrıca her alt kümede kapalıdır.

Tanım 2.15. S, (X, ρ) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her x ∈ S için S ⊆ B (x, r) olacak biçiminde r > 0 varsa S'ye sınırlıdır denir. Eğer S kümesi sınırlı değilise sınırsızdır denir.

Tanım 2.16. X ≠ ∅ olsun. Doğal sayılardan X'e tanımlanan her fonksiyona bir dizi denir. Bir diziyi temsil etmek için genellikle $\{x_n\}$ sembolünü kullanırız.

Tanım 2.17. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ X'de bir dizi olsun. Eğer her ε > 0 için $n \geq n_0$ koşuluna sahip her n ∈ ℕ için $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şeklinde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$dizisi x noktasına yakınsar denir ve $n \to \infty$ için $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.18. $\{x_n\}$ (X, ρ) metrik uzağında bir dizi olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ koşuluna sahip her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçiminde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Örnek 2.19. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay olsun. $\{x_n\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$ dizisi ℝ üzerinde bir Cauchy dizisidir.

Örnek 2.20. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $\{x_n\}$ dizisi her n ∈ ℕ için

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon = \frac{1}{3}$ seçelim. O halde

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} > \varepsilon$$

olduğu için $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.21. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X'de bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.22. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt diziside aynı noktaya yakınsar.

Örnek 2.23. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{n}$ şekilde tanımlı olsun. $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$ seçelim. Böylece, her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &= d(\tfrac{1}{n}, 0) \\ &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{n_0} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\{x_n\}$ dizisi 0 noktasına yakınsaktır.

Teorem 2.24.. $\{x_n\}$ (X, ρ) metrik uzağında bir dizi olmak üzere eğer $\{x_n\}$ dizisi bir noktaya yakınsak ise o nokta tektir.

Önerme 2.25. $\{x_n\}$ (X, ρ) metrik uzağında bir dizi ve $x \in X$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

Önerme 2.26. (X, ρ) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A'nin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\} \subseteq A$ olacak biçimdeki her $\{x_n\}$ dizisi için $n \to \infty$ ve $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.27.(X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer X'deki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa(X, d) tam metrik uzayı denir.

Örnek 2.28. (X, ρ) ayrık metrik uzayı tam metrik uzaydır.

Önerme 2.29. Metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Önerme 2.29 tersi her zaman doğru olmayabilir. $(\mathbb{Q}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $\{x_n\}$ dizisi $x_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ için $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ şeklinde tanımlansın. $\{x_n\}$ $\mathbb{Q}$'da bir Cauchy dizisidir, fakat $\mathbb{Q}$ içinde herhangi bir noktaya yakınsak değildir.

Tanım 2.31. (X, ρ_1), (Y, ρ_2) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\rho_1(x, x_0) < \delta$ koşuluna sahip her x için $\rho_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak biçiminde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna x_0'da süreklidir denir. Eğer her $x_0 \in X$ için f fonksiyonu sürekli ise f 'ye X üzerinde süreklidir denir.

Örnek 2.32. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay ve $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in (0,1)$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ biçiminde tanımlansın. f fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 2.33. (X, ρ_1), (Y, ρ_2) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon. Eğer her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna dizisel süreklidir denir.

Önerme 2.34. (X, ρ_1), (Y, ρ_2) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu X üzerinde süreklidir ancak ve ancak f fonksiyonu dizisel süreklidir.

Tanım 2.35. (X, ρ) bir metrik uzay, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x_0, \delta) \cap X$ koşuluna sahip her x için

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x)$$

sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna alt yarı-sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde her $\varepsilon > 0$ için $x \in B(x_0, \delta) \cap X$ koşuuluna sahip her x için

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna üst yarı-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.36. (X, ρ) bir metrik uzay, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x \in X$ bir limit noktası olsun. f x_0 noktasında alt yarı-sürekli fonksiyondur ancak ve ancak

$$\lim_{x\to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0).$$

Benzer şekilde f üst yarı sürekli fonksiyondur ancak ve ancak

$$\lim_{x\to x_0} \sup f(x) \leq f(x_0).$$

2.2 Sabit Nokta ve En İyi Yakınlık Noktası Teorisi

Tanım 2.38. X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa x noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir.

Örnek 2.39. $X = [1, \infty)$ ve $T: X \to X, F: X \to X$ dönüşümleri sırasıyla her $x \in X$ için

$$Tx = \frac{x + 2}{3}$$

ve

$$Fx = 3 + x$$

Bu durumda $x = 1$ T'nin sabit noktasıdır, ancak F'nin X'de sabit bir noktası yoktur. Ayrıca, $X = (1, \infty)$ alırsak, T ve F dönüşümlerinin sabit bir noktası yoktur. Bu nedenle, sabit noktanın varlığı hem dönüşüme hem de dönüşümün tanımlandığı kümeye bağlıdır.

Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir çözümüdür. Gerçektende,

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad (2.1)$$

denklemini ele alalım. Buna göre $x = \frac{x^2+5}{6}$ yazabiliriz. Eğer $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü her $x \in \mathbb{R}$ için

$$Tx = \frac{x^2 + 5}{6}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda T dönüşümünün sabit noktası Eşitsizlik (2.1)'in bir çözümüdür.

Tanım 2.40. (X, ρ) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

• Eğer her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq r\rho(x, y) \tag{2.2}$$

sağlanacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T'ye büzülme dönüşümü denir.

• Eğer her $x, y \in X$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq \rho(x, y)$$

sağlanıyorsa T'ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Her büzülme dönüşümünün büzen bir dönüşüm olduğu ve ayrıca her büzen dönüşümün genişlemeyen bir dönüşüm olduğu açıktır. Ancak, tersleri doğru olmayabilir.

Örnek 2.41. $(\mathbb{R}, \rho)$ alışılmış metrik uzay olsun.

• $T: [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü $Tx = x^2$ biçiminde tanımlanırsa, T büzülme dönüşümüdür.

• $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü$Tx = x$ biçiminde tanımlanırsa, T genişlemeyen bir dönüşümdür. Ayrıca, T büzen dönüşüm değildir.

• $T: [1, \infty) \to [1, \infty)$ dönüşümü $Tx = \frac{x^2+1}{x}$ olarak tanımlarsak, o zaman T büzen bir dönüşümdür. Ayrıca, T bir büzülme dönüşümü değildir.

Banach Sabit Nokta Teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremidir. İspatından görülebileceği gibi, aynı zaman da bize sabit noktanın bulunmasına dair bir yöntemde sunmaktadır. Bu yöntem tekrarlama olarak adlandırılır, yani, belirli bir kümede rastgele bir x_0 seçerek başlıyoruz ve tekrarlı olarak aynı işlemi uygulayarak

$$x_{n+1} = Tx_n \quad \text{n} = 0,1,2,\cdots$$

biçiminde tanımlı bir dizi oluştururuz. Bu yöntem, uygulamalı matematiğin hemen hemen her dalında bulunabilir. Bu nedenle Banach sabit nokta teoremi, metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin başlangıcı olması yanında matematik bilimlerinin çeşitli bölümlerinde geniş uygulanabilirliğe sahiptir.

Teorem 2.42. (X, ρ) tam bir metrik uzay ve $T: X \to X$ büzülme dönüşümü olsun. O halde T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bu ilkenin genelleştirilmesi yoğun bir şekilde çalışılan bir araştırma dalı olmuştur. Ancak, gerçek hayat problemlerini çözmek için sıklıkla kullanılan lineer olmayan sistemlerde çözüm tek olmayabilir. Bu nedenle sabit noktanın tekliğini garanti etmeyen teoremleri de dikkate almak pratikte etkilidir. Bu anlamda ilk çalışma Ćirić (1974) tarafından elde edilmiştir. Sonuçtan önce bazı tanımları verelim.

Tanım 2.43. T (X, ρ) metrik uzağında kendinden kendine bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\lim_{i\to\infty} T^{n_i}x = u$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$\lim_{i\to\infty} TT^{n_i}x = Tu$$

oluyorsa T ye yörüngesel süreklidir denir.

Tanım 2.44. T (X, ρ) metrik uzağında kendinden kendine bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{T^{n_i}x\}$ formundaki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise (X, ρ) metrik uzayına T-yörüngesel tamdır denir.

Şimdi, Ćirić (1974) tarafından elde edilen sonucu verelim.

Teorem 2.45. $T: X \to X$ yörüngesel sürekli bir dönüşüm ve (X, ρ) T-yörüngesel tam metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\min\{\rho(Tx, Ty), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty)\} - \min\{\rho(x, Ty), \rho(y, Tx)\} \leq k\rho(x, y)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $k \in [0,1)$ reel sayısı varsa T sabit noktaya sahiptir.

Ardından bu konu üzerine çoğu yazar tarafından çalışmalar yapılmıştır. Şimdi bu çalışmalardan bazılarını verelim.

Teorem 2.46. (Pachpatte 1979) $T: X \to X$ yörüngesel sürekli bir dönüşüm ve (X, ρ) T-yörüngesel tam metrik uzay olmak üzere eğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$M_p(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) - N_p(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) \leq k\rho(x_1, Tx_1)\rho(x_2, Tx_2)$$

koşulunua sahip bir $k \in [0,1)$ varsa T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Burada

$$M_p(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) = \min\left\{\left(\rho(Tx_1, Tx_2)\right)^2, \rho(x_1, x_2), \rho(Tx_1, Tx_2), \left(\rho(x_2, Tx_2)\right)^2\right\}$$

ve

$$N_p(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) = \min\{\rho(x_1, Tx_1)\rho(x_2, Tx_2), \rho(x_1, Tx_2)\rho(x_2, Tx_1)\}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 2.47. (Ćirić ve Jotić 1998) $T: X \to X$ yörüngesel sürekli bir dönüşüm ve (X, d) T-yörüngesel tam metrik uzay olmak üzere eğer her $x_1, x_2 \in$ X için

$$M_{ĆJ}(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) - aN_{ĆJ}(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) \leq kmax\{\rho(x_1, Tx_1)\rho(x_1, x_2)\}$$

koşulunua sahip bir $k \in [0,1)$ varsa T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir. Burada

$$M_{ĆJ}(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) = \min\left\{\begin{matrix}\rho(Tx_1, Tx_2), \rho(x_1, x_2), \rho(x_1, Tx_1), \rho(x_2, Tx_2), \\ \frac{\rho(x_1, Tx_1)[1 + \rho(x_2, Tx_2)]}{1 + d(x_1, x_2)} \\ \frac{\rho(x_2, Tx_2)[1 + \rho(x_1, Tx_1)]}{1 + \rho(x_1, x_2)}, \\ \frac{\min\{\rho^2(Tx_1, Tx_2), \rho^2(x_1, Tx_1), \rho^2(x_2, Tx_2)\}}{\rho(x_1, x_2)}\end{matrix}\right\}$$

ve

$$N_{ĆJ}(x_1, x_2, Tx_1, Tx_2) = \min\{\rho(x_1, Tx_2), \rho(x_2, Tx_1)\}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 2.48. (Karapınar 2012) $T: X \to X$ yörüngesel sürekli bir dönüşüm ve (X, ρ) T-yörüngesel tam metrik uzay olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in$ X için

$$0 \leq \frac{a_4 - a_3}{a_1 + a_2} < 1, a_1 + a_2 \neq 0, \qquad a_1 + a_2 + a_3 > 0 \; ve \; a_3 - a_5 \geq 0$$

koşullarına sahip $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ için

$$M_T(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2) \leq N_T(a_4, a_5, x_1, x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T sabit noktaya sahiptir. Burada

$$M_T(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2) = a_1\rho(Tx_1, Tx_2) + a_2\{\rho(x_1, Tx_1) + \rho(x_2, Tx_2)\} + a_3\{\rho(x_2, Tx_1) + \rho(x_1, Tx_2)\}$$

ve

$$N_T(a_4, a_5, x_1, x_2) = a_4\rho(x_1, x_2) + a_5\rho(x_1, T^2x_1)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Diğer taraftan Basha ve Veeramani (1977) kendinden kendine olmayan dönüşümleri düşünerek en iyi yakınlık noktası tanımını ortaya attı. (X, ρ) metrik uzay, A, B X in boştan farklı alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $A \cap B$ boş küme ise T dönüşümü sabit noktaya sahip olamaz. Bu durumda

$$\inf\{\rho(x, Tx): x \in A\}$$

probleminin çözümünün varlığını araştırmak mantıklıdır. Her $x \in A$ için $\rho(x, Tx) \geq \rho(A, B)$ olduğundan, $\rho(x, Tx) = \rho(A, B)$ bahsedilen problemin optimal bir çözümüdür.

Tanım 2.49. A ve B (X, ρ) metrik uzayının boştan farklı alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\rho(x, Tx) = \rho(A, B)$ olacak şekilde bir $x \in A$ varsa x noktasına T'nin en iyi yakınlık noktası denir.

Eğer Tanım 2.46 da $A = B = X$ alırsak bu durumda bir T dönüşümünün en iyi yakınlık noktası o dönüşümün sabit noktasıdır. En iyi yakınlık noktası sonuçları sabit nokta sonuclarının bir genellemesi olduğundan pek çok yazar bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır. Şimdi en iyi yakınlık noktası teorisi ile ilgili bazı kavramları verelim. (X, ρ) bir metrik uzay A, B X'in boştan farklı alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun.

$$A_0 = \{x \in A: \exists y \in B, \rho(x,y) = \rho(A,B)\}$$

ve

$$B_0 = \{y \in B: \exists x \in A, \rho(x,y) = \rho(A,B)\}$$

kümelerini tanımlayalım.

Basha (2010) proksimal büzülme dönüşüm kavramını tanıtarak, kendinden kendine olmayan dönüşümler için Banach büzülme ilkesinin bir versiyonunu kanıtladı.

Tanım 2.50. A ve B (X,ρ) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x_1, x_2, u_1, u_2 \in A$ için

$$\left.\begin{matrix}\rho(u_1, Tx_1) = \rho(A,B) \\ \rho(u_2, Tx_2) = \rho(A,B)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho(u_1,u_2) \leq k\rho(x_1,x_2)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ varsa T dönüşümüne proksimal büzülme dönüşümü denir.

Tanım 2.51. (X,ρ) bir metrik uzay, A ve B X' in boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $x \in A$ için $\rho(x,y_n) \to \rho(x,B)$ koşulunu sağlayan her $\{y_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise B A'ya göre yaklaşık kompakttır denir.

Teorem 2.52. (X,ρ) bir tam metrik uzay, A ve B X' in boş olmayan alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. A kapalı, B, A 'ya göre yaklaşık olarak kompakt ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. Eğer T, $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan bir proksimal büzülme dönüşümü ise T, A da bir tek en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

Ardından Raj (2013) P-özelliği kavramını tanıttı ve bu özellik yardımıyla kendinden kendine olmayan dönüşümler için Banach büzülme ilkesinin bir başka versiyonunu elde etti.

Tanım 2.53. A ve B (X, ρ) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in A$ için

$$\left.\begin{matrix}\rho(u_1, v_1) = \rho(A, B) \\ \rho(u_2, v_2) = \rho(A, B)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \rho(u_1, u_2) = \rho(v_1, v_2)$$

koşulu sağlanıyorsa (A, B) çiftine P-özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.54. A ve B (X, ρ) metrik uzayınınboş olmayan kapalı alt kümeleri ve $A_0 \neq \emptyset$ olsun. (A, B) çifti P-özelliğine sahip olduğunu ve $T: A \to B$ dönüşümünün $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağladığını varsayalım. Eğer her $x, y \in A$ için

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ varsa T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

2.3 B-Metrik Uzaylar

Tanım 2.55. X boştan farklı bir küme ve $\rho_b: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer ρ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ρ_b fonksiyonuna X üzerinde bir b-metrik denir; her $x, y, z \in X$ için,

b1) $\rho_b(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

b2) $\rho_b(x, y) = \rho_b(y, x)$,

b3) $\rho_b(x, y) \leq s[\rho_b(x, z) + \rho_b(z, y)]$, burada $s \geq 1$.

(X, ρ_b) çiftine b-metrik uzay denir.

Dikkat edilirse Tanım 2.53 te $s = 1$ alınırsa b-metrik uzay sıradan metrik uzaya dönüşür. Böylece her metrik uzay bir b-metrik uzaydır. Fakat aşağıdaki örnek tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.56. $\rho_b: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\rho_b(x, y) = |x - y|^2$$

şekilde tanımlansın. ρ_b fonksiyonu $s = 2$ sabitiyle $\mathbb{R}$ üzerinde bir b-metriktir, fakat sıradan metrik değildir. b1) ve b2) koşullarını sağlandığı kolayca görülebilir. b3) koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\rho_b(x, y) &= |x - y|^2 \\
&= |x - z + z - y|^2 \\
&= |x - z|^2 + 2|x - z||z - y| + |z - y|^2 \\
&\leq 2[|x - z|^2 + |z - y|^2], \\
&= s\big(\rho_b(x, z) + \rho_b(z, y)\big).
\end{aligned}$$

Örnek 2.57. $p \in (0,1)$ olsun ve

$$X = l_p(\mathbb{R}) = \left\{ x = \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

olsun. $\rho_b: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$\rho_b(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (X, ρ_b), $s = 2^{1/p}$ sabitiyle bir b-metrik uzaydır .

Tanım 2.58. $(\mathrm{X}, \rho_\mathrm{b})$ bir b-metrik uzay ve $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$ olmak üzere her $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mathrm{B}(\mathrm{x}_0, \mathrm{r}) = \{\mathrm{y} \in \mathrm{X} : \rho_\mathrm{b}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}) < r\}$$

kümesine (X, ρ_b) b-metrik uzayında açık yuvar denir.

Tanım 2.59. (X, ρ_b) bir b-metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x_0, r) = \{y \in X : \rho_b(x, y) \leq r\}$$

kümesine (X, ρ_b) b-metrik uzayında kapalı yuvar denir.

Tanım 2.60. $\{x_n\}$ b-metrik uzayda (X, ρ_b) bir dizi ve $x \in X$ olsun.

(1) Eğer $\lim_{n\to\infty} \rho_b(x_n, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir.

(2) Eğer $\lim_{n,m\to\infty} \rho_b(x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir denir.

(3) (X, ρ_b) içindeki her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise (X, ρ_b) uzayına tam b-metrik uzay denir.

Lemma 2.61. (X, ρ_b) bir b-metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(1) Yakınsak bir dizinin limiti tektir.

(2) Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

(3) Genel olarak, bir b-metrik sürekli değildir.

Tanım 2.62. (X, ρ_b) ve $(X', \acute{\rho}_b)$ iki b-metrik uzaylar ve $f: (X, \rho_b) \to (X', \acute{\rho}_b)$ fonksiyonu olsun. Eğer X içinde $\{x_n\}$ dizisi x'e yakınsadığında, X' içinde $\{fx_n\}$ dizisi fx e yakınsıyorsa bu durumunda f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir denir.

3. BAZI EN İYİ YAKINLIK NOKTASI SONUÇLARI

Sonuçları vermeden önce karşılaştırma fonksiyonlarını ve özelliklerini verelim.

Tanım 3.1. (Berinde 1993) Φ:[0,∞) → $[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer Φ fonksiyonu

i) Φ artan fonksiyon,
ii) Her $t \in [0,\infty)$ için $\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t) = 0$,

koşullarını sağlıyorsa Φ fonksiyonuna karşılaştırma fonksiyonu denir.

Lemma 3.2. (Berinde 1993) Eğer Φ:[0,∞) → $[0,\infty)$ bir karşılaştırma fonksiyonu ise aşağıdakiler doğrudur.

i) Her $k \geq 1$ için Φ^k fonksiyonu bir karşılaştırma fonksiyonudur.
ii) Φ fonksiyonu 0 noktasında süreklidir.
iii) Her $t > 0$ için $\Phi(t) < t$ dir.

Ayrıca Berinde (1993) c-karşılaştırma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanıttı.

Tanım 3.3. (Berinde 1993) Φ:[0,∞) → $[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer Φ fonksiyonu

i) Φ artan fonksiyon,
ii) Her $t \in [0,\infty)$ ve $k > k_0$ için $\Phi^{k+1}(t) \leq as^k\Phi^k(t) + \varepsilon_k$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ negatif olmayan yakınsak bir dizi vardır.

koşullarını sağlıyorsa Φ fonksiyonuna c-karşılaştırma fonksiyonu denir.

Daha sonra Berinde (1997) b-metrik uzaylarda karşılaştırma fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanıttı.

Tanım 3.4. Φ:$[0,\infty) \to [0,\infty)$ bir fonksiyon ve $s \geq 1$ bir reel sayı olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın.

i) Φ artan fonksiyondur.
ii) Her $t \in [0,\infty)$ ve $k > k_0$ için $s^{k+1}\Phi^{k+1}(t) \leq as^k\Phi^k(t) + \varepsilon_k$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ negatif olmayan yakınsak bir dizi vardır.

Bu durumda Φ fonksiyonuna b-karşılaştırılabilir fonksiyon denir.

Tüm b-karşılaştırılabilir fonksiyonlar sınıfını Φ_b ile göstereceğiz. Şimdi s-yaklaşık kompaktlık ve (M_C) özelliğine sahip tanımlarını verelim.

Tanım 3.5. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay olsun. Eğer bazı $x \in A$ için $\rho(x, B) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x, y_n) \leq s\rho(x, B)$ denklemini sağlayan B içindeki her $\{y_n\}$ dizisi B'de yakınsak bir alt dizisiye sahip ise, o zaman B, A'ya göre s-yaklaşık kompakttır denir.

Tanım 3.6. (X, ρ) $s \geq 1$sabitiyle bir b-metrik uzay, A, B boştan farklı X in alt kümeleri olsun. Eğer A daki $x \in A$ noktasına yakınsak her $\{x_n\}$ dizisi ve, B deki $y \in B$ noktasına yakınsak her $\{y_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa(A, B) çiftine (M_C) özelliğine sahiptir denir.

Bu bölümde b-metrik uzaylarda literatürde var olan aşağıdaki sonuçları detaylı bir şekilde inceliyoruz.

3.1 Ćirić Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Tanım 3.6. (X,ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay, A, B boştan farklı X in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(u_1, Tx_1) = \rho(A,B)$$
$$\rho(u_2, Tx_2) = \rho(A,B)$$

iken

$$P_{\acute{C}}(x_1, x_2, u_1, u_2) - R_{\acute{C}}(x_1, x_2, u_1, u_2) \leq \phi\big(\rho(x_1, x_2)\big) \qquad (3.1)$$

koşulunu sağlayan $\phi \in \Phi_b$ varsa T dönüşümüne proksimal Φ_b -Ćirić tipi büzülme dönüşümü denir. Burada

$$P_{\acute{C}}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \min\{\rho(u_1, u_2), \rho(x_1, u_1), \rho(x_2, u_2)\}$$

ve

$$R_{\acute{C}}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \min\{\rho(x_2, u_1), \rho(x_1, u_2)\}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 3.7. (X,ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir tam b-metrik uzay, A, B boştan farklı X in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A,B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı, $A_0 \neq \emptyset$ ve B A ya göre s-yaklaşık kompakt olduğunu varsayalım. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan proksimal Φ_b-Ćirić tipi büzülme dönüşümü ve $f(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonu A üzerinde alt yarı sürekli ise, o zaman T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

İspat. $x_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun.$Tx_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan,

$$\rho(x_1, Tx_0) = \rho(A, B)$$

olacak şekilde $x_1 \in A_0$ noktası vardır. Benzer şekilde

$$\rho(x_2, Tx_1) = \rho(A, B)$$

olacak şekilde $x_2 \in A_0$ noktası vardır. Bu işlemi tekrarlayarak her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_{n+1}, Tx_n) = \rho(A, B) \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\rho(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olacak şekilde $n_0 \in N$ varsa, o zaman x_{n_0}, T dönüşümünün en iyi yakınlık noktasıdır. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. Eşitsizlik (3.1) den,

$$\begin{aligned} P_{\acute{C}}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) &= \min \{\rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1})\} \\ &= \min \{\rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n-1}, x_n)\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned} R_{\acute{C}}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) &= \min \{\rho(x_n, x_n), \rho(x_{n-1}, x_{n+1})\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Ayrıca, T bir proksimal ϕ_b-Ćirić tipi büzülme dönüşümü olduğundan, her $n \geq 1$ için

$$P_{\acute{C}}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) - R_{\acute{C}}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

tüm $n \geq 1$ için. Sonuç olarak, Eşitsizlik (3.3) ve Eşitsizlik (3.4) ten, her $n \geq 1$ için

$$\min\{\rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n-1}, x_n)\} \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

elde ederiz. O halde $\rho(x_{n-1},x_n) \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big) < \rho(x_{n-1},x_n)$ durumu mümkün olmadığından, her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

bulunur. Bu durumda, her $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+1}) &\leq \Phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)\\ &\leq \Phi^2\big(\rho(x_{n-2},x_{n-1})\big)\\ &\vdots\\ &\leq \Phi^n\big(\rho(x_0,x_1)\big)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\rho\big(x_n,x_{n+p}\big) \leq\ & s\rho(x_n,x_{n+1}) + s^2\rho(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + s^p\rho\big(x_{n+p-1},x_{n+p}\big) \qquad (3.5)\\ &\leq \frac{1}{s^{n-1}}\left\{\begin{matrix} s^n\Phi^n\big(\rho(x_0,x_1)\big) + s^{n+1}\Phi^{n+1}\big(\rho(x_0,x_1)\big)\\ \quad + \cdots + s^{n+p-1}\Phi^{n+p-1}\rho_b(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\\ &\leq \frac{1}{s^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty} s^k\Phi^k\big(\rho(x_0,x_1)\big) < \infty.\end{aligned}$$

Karşılaştırma fonksiyonunun özelliğinden $\sum_{k=0}^{\infty} s^k\Phi^k\big(\rho(x_0,x_1)\big)$ serisi yakınsak olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k\Phi^k\big(\rho(x_0,x_1)\big) < \infty$$

bulunur. Eşitsizlik (3.5) te $n \to \infty$ limit alırsak, $\{x_n\}$ A'da bir Cauchy dizisi olduğunu buluruz. (X,ρ) tam bir b-metrik uzay ve A, X'in kapalı bir alt kümesi olduğundan, $x_n \to x^*$ olcak şekilde $x^* \in A$ vardır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\rho(x^*, B) &\leq \rho(x^*, Tx_n) \\ &\leq s\rho(x^*, x_{n+1}) + s\rho(x_{n+1}, Tx_n) \\ &= s\rho(x^*, x_{n+1}) + s\rho(A, B) \\ &\leq s\rho(x^*, x_{n+1}) + s\rho(x^*, B)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\rho(x^*, B) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x^*, Tx_n) \leq s\rho(x^*, B)$ elde edilir. B A ya göre s-yaklaşık kompakt olduğundan, Tx_n'nin yakınsak bir Tx_{n_k} alt dizisi vardır, O halde $Tx_{n_k} \to y^*$ olacak şekilde $y^* \in B$ vardır. Ayrıca, (A, B) çifti (MC) özelliğini sağladığından

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(A, B)$$

Diğer taraftan $f(x) = \rho(x, Tx)$ fonksiyonu alt yarı sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &\leq \rho(x^*, Tx^*) \\ &= f(x^*) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \inf f\left(x_{n_k}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \inf \rho\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right) \\ &= \rho(x^*, y^*) \\ &= \rho(A, B).\end{aligned}$$

O halde $\rho(x^*, Tx^*) = \rho(A, B)$ elde ederiz. Yani x^*, T'nin en iyi yakınlık noktasıdır.

Eğer T, Teorem 3.7'de A üzerinde sürekli bir dönüşüm ise, B nin A ya göre s-yaklaşık kompakt olmasını ve f'nin alt yarı sürekliliği koşulunu ihmal edebiliriz: Böylece, aşağıdaki en iyi yakınlık noktası sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.8. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle tam bir b-metrik uzay ve A, B boştan farklı X'in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A, B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı

ve $A_0 \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan sürekli proksimal ϕ_b-Ćirić tipi büzülme dönüşümü ise T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

İspat. $x_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun. Teorem 3.3 ün ispatında olduğu gibi, A'da bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz ve $\{x_n\}$'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz. A kapalı olduğundan $x^* \in A$ mevcuttur öyle ki $x_n \to x^*$ olur. Aynı zamanda T'nin sürekli bir dönüşüm olmasından dolayı $Tx_n \to Tx^*$ olur. (A, B) çiftinin (MC) özelliğini sağlaması için

$$\rho(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, Tx_n) = \rho(A, B)$$

elde ederiz.

Eğer, Teorem 3.4 te $A = B = X$ alırsak bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.9. T (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir tam b-metrik uzayda kendinden kendine sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\min\{\rho(Tx, Ty), \rho(x, Tx), \rho(y, Ty)\} - \min\{\rho(x, Ty), \rho(y, Tx)\} \leq \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $\phi \in \Phi_b$ varsa, bu durumda T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.9'da her $t \in [0, \infty)$ için $\phi(t) = kt$ $(k \in [0,1))$ alırsak, (Ćirić 1974) 'un genellemesi olarak aşağıdaki sabit nokta sonucunu sunarız.

Sonuç 3.10. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir tam b-metrik uzay ve $T: X \to X$, sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$

$$\min\{\rho(Tx,Ty),\rho(x,Tx),\rho(y,Ty)\}-\min\{\rho(x,Ty),\rho(y,Tx)\}\leq k\rho(x,y)$$

olacak şekilde bir $k\in[0,1)$ varsa T dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

3.2 Pachpatte Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Tanım 3.11. (X,ρ) $s\geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay, A,B boştan farklı X'in alt kümeleri ve $T:A\to B$ dönüşümü olsun. Eğer her $a,b>0$ için

$$\phi(ab)\leq a\phi(b) \tag{3.6}$$

ve her $u_1,u_2,x_1,x_2\in A$ için

$$\rho(u_1,Tx_1)=\rho(A,B)$$
$$\rho(u_2,Tx_2)=\rho(A,B)$$

iken

$$P_p(x_1,x_2,u_1,u_2)-Q_p(x_1,x_2,u_1,u_2)\leq\phi\big(\rho(x_1,u_1)\rho(x_2,u_2)\big) \tag{3.7}$$

koşulunu sağlayan $\phi\in\Phi_b$ varsa T dönüşümüne proksimal ϕ_b- Pachpatte tipi büzülme dönüşümü denir. Burada

$$P_p(x_1,x_2,u_1,u_2)=\min\Big\{\big(\rho(u_1,u_2)\big)^2,\rho(x_1,x_2),\rho(u_1,u_2),\big(\rho(x_2,u_2)\big)^2\Big\}.$$

ve

$$Q_p(x_1,x_2,u_1,u_2)=\min\{\rho(x_1,u_1)\rho(x_2,u_2),\rho(x_1,u_2)\rho(x_2,u_1)\}.$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 3.12. (X,ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay, A, B boştan farklı X'in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A,B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı, $A_0 \neq \emptyset$ ve B A ya göre s-yaklaşık kompakt olduğunu varsayalım. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan proksimal ϕ_b -Pachpatte tipi büzülme dönüşümü ve $f(x) = \rho(x, Tx)$ fonksiyonu A üzerinde alt yarı sürekli ise, o zaman T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

İspat. $x_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun. $Tx_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan,

$$\rho(x_1, Tx_0) = \rho(A,B)$$

olacak şekilde $x_1 \in A_0$ noktası vardır. Benzer şekilde

$$\rho(x_2, Tx_1) = \rho(A,B)$$

olacak şekilde $x_2 \in A_0$ noktası vardır. Bu işlemi tekrarlayarak her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_{n+1}, Tx_n) = \rho(A,B) \tag{3.9}$$

koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\rho(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olacak şekilde $n_0 \in N$ varsa, o zaman x_{n_0}, T dönüşümünün en iyi yakınlık noktasıdır. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. Eşitsizlik (3.9) dan,

$$P_P(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \min \begin{Bmatrix} \left(\rho(x_n, x_{n+1})\right)^2, \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1}), \\ \left(\rho(x_n, x_{n+1})\right)^2 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

$$= \min \left\{ \left(\rho(x_n, x_{n+1})\right)^2, \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1}) \right\}$$

ve

$$Q_P(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \min \begin{Bmatrix} \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1}), \\ \rho(x_{n-1}, x_{n+1})\rho(x_n, x_n) \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$
$$= 0.$$

Ayrıca, T bir proksimal ϕ_b-Pachpatte tipi büzülme dönüşümüi olduğundan, her $n \geq 1$ için

$$P_P(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) - Q_P(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})\big)$$

elde ederiz. O halde Eşitlik (3.10) ve Eşitlik (3.11)'den, her $n \geq 1$ için

$$\min\left\{\big(\rho(x_n, x_{n+1})\big)^2, \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})\right\} \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})\big)$$

bulunur. Bu durumda $P_P(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})$ durumu mümkün olmadığından, her $n \geq 1$ için

$$\big(\rho(x_n, x_{n+1})\big)^2 \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})\big) \quad (3.12)$$

elde ederiz. O halde her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \big(\rho(x_n, x_{n+1})\big)^2 &\leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1})\big) \\ &\leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)\rho(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \Phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

elde ederiz.

Böylece Teorem 3.7 e benzer şekilde T'nin A'da en iyi yakınlık noktasına sahip

olduğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.8 e benzer şekilde, aşağıdaki en iyi yakınlık noktası sonucunu sunuyoruz.

Teorem 3.13. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle tam bir b-metrik uzay ve A, B boştan farklı X'in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A, B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı ve $A_0 \neq \emptyset$. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan sürekli proksimal ϕ_b-Pachpatte tipi büzülme dönüşümü ise T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

3.3 Ćirić-Jotić Tipi Dönüşümler İçin En İyi Yakınlık Noktası Sonuçları

Tanım 3.14. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay, A, B boştan farklı X'in alt kümeleri, $a \geq 0$ ve $T: A \to B$ dönüşümü olsun. Eğer her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(u_1, Tx_1) = \rho(A, B)$$
$$\rho(u_2, Tx_2) = \rho(A, B)$$

iken

$$P_{\acute{C}J}(x_1, x_2, u_1, u_2) - aQ_{\acute{C}J}(x_1, x_2, u_1, u_2) \leq \phi\left(Rr_{\acute{C}J}(x_1, x_2, u_1, u_2)d(x_1, x_2)\right) \quad (3.13)$$

koşulunu sağlayan $\phi \in \Phi_b$ varsa T dönüşümüne proksimal ϕ_b- Ćirić-Jotić tipi teklik koşulu olmayan büzülme dönüşümü denir. Burada

$$P_{\acute{C}}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \min\left\{\begin{matrix}\rho(u_1,u_2), \rho(x_1,x_2), \rho(x_1,u_1), \rho(x_2,u_2), \\ \dfrac{\rho(x_1,u_1)[1+\rho(x_2,u_2)]}{1+\rho(x_1,x_2)} \\ \dfrac{\rho(x_2,u_2)[1+\rho(x_1,u_1)]}{1+\rho(x_1,x_2)}, \\ \dfrac{\min\{\rho^2(u_1,u_2), \rho^2(x_1,u_1), \rho^2(x_2,u_2)\}}{\phi\big(\rho(x_1,x_2)\big)}\end{matrix}\right\},$$

$$Q_{\acute{C}J}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \min\{\rho(x_1,u_2), \rho(x_2,u_1)\}$$

ve

$$R_{\acute{C}J}(x_1, x_2, u_1, u_2) = \min\{\rho(x_1,x_2), \rho(x_1,u_1), \}.$$

Teorem 3.15. (X,ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay, A, B boştan farklı X'in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A,B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı, $A_0 \neq \emptyset$ ve B A ya göre s-yaklaşık kompakt olduğunu varsayalım. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan proksimal ϕ_b - Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü ve $f(x) = \rho(x, Tx)$ fonksiyonu A üzerinde alt yarı sürekli ise, o zaman T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

İspat. $x_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun. $Tx_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan,

$$\rho(x_1, Tx_0) = \rho(A,B)$$

olacak şekilde $x_1 \in A_0$ noktası vardır. Benzer şekilde

$$\rho(x_2, Tx_1) = \rho(A,B)$$

olacak şekilde $x_2 \in A_0$ noktası vardır. Bu işlemi tekrarlayarak her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_{n+1}, Tx_n) = \rho(A,B) \tag{3.14}$$

koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\rho(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olacak şekilde $n_0 \in N$ varsa, o zaman x_{n_0} T dönüşümünün en iyi yakınlık noktasıdır. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. O halde

$$P_{\acute{C}}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \min \left\{ \begin{array}{c} \rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n-1}, x_n), \\ \rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{\rho(x_{n-1}, x_n)[1+\rho(x_n, x_{n+1})]}{1+\rho(x_{n-1}, x_n)}, \\ \frac{\min \left\{ \begin{array}{c} \rho^2(x_n, x_{n+1}), \rho^2(x_{n-1}, x_n) \\ , \rho^2(x_n, x_{n+1}) \end{array} \right\}}{\phi(\rho(x_{n-1}, x_n))} \end{array} \right\} \tag{3.15}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{c} \rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n-1}, x_n), \\ \frac{\rho(x_{n-1}, x_n)[1+\rho(x_n, x_{n+1})]}{1+\rho(x_{n-1}, x_n)}, \\ \frac{\min \{\rho^2(x_n, x_{n+1}), \rho^2(x_{n-1}, x_n)\}}{\phi(\rho(x_{n-1}, x_n))} \end{array} \right\},$$

$$Q_{\acute{C}J}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \min \{\rho(x_{n-1}, x_{n+1}), \rho(x_n, x_n)\} \tag{3.16}$$
$$= 0.$$

ve

$$R_{\acute{C}J}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \min \{\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_{n-1}, x_n)\} \tag{3.17}$$
$$= \rho(x_{n-1}, x_n)$$

Durum 1: Kabul edelim ki $P_{\acute{C}J}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \rho(x_{n-1}, x_n)$ olsun. T bir ϕ_b - Ćirić-Jotić tipi benzersiz olmayan büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\rho(x_{n-1}, x_n) \leq \phi(\rho(x_{n-1}, x_n))$$
$$< \rho(x_{n-1}, x_n)$$

bu da bir çelişkidir.

Durum 2: Kabul edelim ki

$$P_{\acute{C}J}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \frac{\rho(x_{n-1}, x_n)[1 + \rho(x_n, x_{n+1})]}{1 + \rho(x_{n-1}, x_n)}$$

olsun. T,bir ϕ_b-Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü olduğundan, her $n \geq 1$ için,

$$\frac{\rho(x_{n-1}, x_n)[1 + \rho(x_n, x_{n+1})]}{1 + \rho(x_{n-1}, x_n)} \leq \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

elde ederiz ki buradan da

$$\begin{aligned}\rho(x_{n-1}, x_n) + \rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_n, x_{n+1}) &\leq \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big) + \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_{n-1}, x_n)\big) \\ &< \rho(x_{n-1}, x_n) + \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\rho(x_{n-1}, x_n)\big)\end{aligned}$$

buluruz. Böylece, her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

elde ederiz.

Durum 3: Kabul edelim ki

$$P_{\acute{C}J}(x_{n-1}, x_n, x_n, x_{n+1}) = \frac{\min\{\rho^2(x_n, x_{n+1}), \rho^2(x_{n-1}, x_n)\}}{\phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)}$$

olsun. Eğer $\min\ \{\rho^2(x_n, x_{n+1}), \rho^2(x_{n-1}, x_n)\} = \rho^2(x_{n-1}, x_n)$ ise bu durumda T, bir ϕ_b- Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü olduğundan her $n \geq 1$ için

$$\frac{\rho^2(x_{n-1},x_n)}{\phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)} \leq \phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

elde ederiz ki buradan da

$$\rho(x_{n-1},x_n) \leq \phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

bulunur. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $\min\{\rho^2(x_n,x_{n+1}),\rho^2(x_{n-1},x_n)\} = \rho^2(x_{n-1},x_n)$ olduğunu kabul edelim. T bir ϕ_b -Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü olduğundan, her $n \geq 1$için,

$$\frac{\rho^2(x_n,x_{n+1})}{\phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)} \leq \phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

elde ederiz ki buradan da

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \leq \phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

bulunur.

Durum 4: Kabul edelim ki $P_{ĆJ}(x_{n-1},x_n,x_n,x_{n+1}) = \rho(x_n,x_{n+1})$ olsun.T, ϕ_b- Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü olduğundan, her $n \geq 1$ için,

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \leq \phi\big(\rho(x_{n-1},x_n)\big)$$

elde ederiz.

Böylece Teorem 3.7 ye benzer şekilde T'nin A'da en iyi yakınlık noktasına sahip olduğunu elde edebiliriz.

Teorem 3.8 e benzer şekilde, aşağıdaki en iyi yakınlık noktası sonucunu sunuyoruz.

Teorem 3.16. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle tam bir b-metrik uzay ve A, B boştan farklı X in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A, B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı ve $A_0 \neq \emptyset$. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan sürekli proksimal ϕ_b-Ćirić-Jotić tipi büzülme dönüşümü ise T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

4 KARAPINAR TİPİ BÜZÜLME DÜNÜŞÜMÜ SONUÇLARI

Bu bölüm tezimizin orjinal bölümünü oluşturmaktadır. İlk olarak, proksimal Karapınar tipi büzülme dönüşümünün tanımını sunuyoruz.

Tanım 4.1. (X,ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir b-metrik uzay ve A, B boştan farklı X in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in$ X için

$$0 \leq \frac{a_4 - a_3}{a_1 + a_2} < \frac{1}{s},\ a_1 + a_2 \neq 0,\ a_1 + a_2 + a_3 > 0\ ve\ a_3 - a_5 \geq 0 \qquad (4.1)$$

koşullarına sahip $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ için

$$\rho(u_1, Tx_1) = \rho(A, B)$$
$$\rho(u_2, Tx_2) = \rho(A, B)$$

iken

$$M_T(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, u_1, u_2) \leq N_T(a_4, a_5, x_1, x_2, u_1) \qquad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne proksimal Karapınar tipi büzülme dönüşümü denir. Burada

$$M_T(a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, u_1, u_2) = a_1 d(u_1, u_2) + a_2 \begin{Bmatrix} \rho(x_1, u_1) \\ +\rho(x_2, u_2) \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} \rho(x_2, u_1) \\ +\rho(x_1, u_2) \end{Bmatrix} \qquad (4.3)$$

ve

$$N_T(a_4, a_5, x_1, x_2, u_1) = a_4 \rho(x_1, x_2) + \frac{a_5}{s}\big(\rho(x_1, Tu_1) - s\rho(A, B)\big) \qquad (4.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 4.2. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir tam b-metrik uzay, A, B boştan farklı X in alt kümeleri ve $T: A \to B$ bir dönüşüm olsun. (A, B) çiftinin (M_C) özelliğine sahip, A kapalı, $A_0 \neq \emptyset$ ve B A ya göre s-yaklaşık kompakt olduğunu varsayalım. Eğer, T dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ koşulunu sağlayan proksimal Karapınar tipi büzülme dönüşümü ve $f(x) = \rho(x, Tx)$ fonksiyonu A üzerinde alt yarı sürekli ise, o zaman T, A'da en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

İspat. $x_0 \in A_0$ keyfi bir nokta olsun.$Tx_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan,

$$\rho(x_1, Tx_0) = \rho(A, B)$$

olacak şekilde $x_1 \in A_0$ noktası vardır. Benzer şekilde

$$\rho(x_2, Tx_1) = \rho(A, B)$$

olacak şekilde $x_2 \in A_0$ noktası vardır. Bu işlemi tekrarlayarak her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_{n+1}, Tx_n) = \rho(A, B) \qquad (4.5)$$

koşulunu sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Eğer $\rho(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olacak şekilde $n_0 \in N$ varsa, o zaman x_{n_0} T dönüşümünün en iyi yakınlık noktasıdır. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) > 0$ olduğunu varsayalım. O halde, T proksimal Karapınar tipi bir büzülme dönüşümü olduğundan, Eşitsizlikler (4.1) i sağlayan destekleyen, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5'leri bulabiliriz. Eşitlik (4.3) ve Eşitlik (4.4) ten, her $n \geq 1$ için,

$$M(u_1, u_2, u_3) = u_1\rho(x_n, x_{n+1}) + u_2\begin{pmatrix}\rho(x_{n-1}, x_n)\\ +\rho(x_n, x_{n+1})\end{pmatrix} + u_3\begin{pmatrix}\rho(x_n, x_n)\\ +\rho(x_{n-1}, x_{n+1})\end{pmatrix} \qquad (4.9)$$

ve

$$N(u_4, u_5) = u_4\rho(x_{n-1}, x_n) + \frac{u_5}{s}\big(\rho(x_{n-1}, Tx_n) - s\rho(U, V)\big) \qquad (4.10)$$

buluruz. O halde, Eşitsizlik (4.4), Eşitlik (4.9) ve Eşitlik (4.10) ten, her $n \geq 1$ için,

$$(u_1 + u_2)\rho(x_n, x_{n+1}) + (u_3 - u_5)\rho(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq (u_4 - u_2)\rho(x_{n-1}, x_n)$$

elde ederiz ki buradan da $k = \frac{(u_4 - u_2)}{(u_1 + u_2)} \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ için

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq k\rho(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Böylece, her $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &\leq k\rho(x_{n-1}, x_n)\\ &\leq k^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1})\\ &\vdots\\ &\leq k^n\rho_b(x_0, x_1)\end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\rho\big(x_n, x_{n+p}\big) \leq\ & s\rho(x_n, x_{n+1}) + s^2\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^p\rho\big(x_{n+p-1}, x_{n+p}\big)\\ \leq\ & s^n k^n\rho(x_0, x_1) + s^{n+1}k^{n+1}\rho(x_0, x_1)\\ & + \cdots + s^{n+p-1}k^{n+p-1}\rho(x_0, x_1)\\ =\ & (sk)^n\rho(x_0, x_1)(1 + (sk) + \cdots + (sk)^{p-1})\\ =\ & \frac{1-(sk)^p}{1-sk}(sk)^n\rho(x_0, x_1)\\ \leq\ & \frac{(sk)^n}{1-sk}\rho(x_0, x_1)\end{aligned}$$

elde ederiz. $sk < 1$ olduğundan son eşitsizlikteki $n \to \infty$ limit alırsak

$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$ bulunur. Böylecek, $\{x_n\}$ A içinde bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam bir b-metrik uzay ve A, X'in kapalı bir alt kümesi olduğundan, $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in A$ vardır. Diğer bir taraftan,

$$\begin{aligned}\rho_b(x^*, B) &\leq \rho_b(x^*, Tx_n) \\ &\leq s\rho_b(x^*, x_{n+1}) + s\rho_b(x_{n+1}, Tx_n) \\ &= s\rho_b(x^*, x_{n+1}) + s\rho_b(A, B) \\ &\leq s\rho_b(x^*, x_{n+1}) + s\rho_b(x^*, B)\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde, $\rho(x^*, B) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x^*, Tx_n) \leq s\rho(x^*, B)$ eşitsizliğini buluruz. B Aya göre s-yaklaşık kompakt olduğundan, $\{Tx_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizi vardır. Böylece $Tx_{n_k} \to y^*$ olacak şekilde $y^* \in B$ vardır. Aynı zamanda, (A, B) ikilisi (M_C) özelliğine sahip olduğundan

$$\rho_b(x^*, y^*) = \rho_b(A, B)$$

elde ederiz. Ayrıca $f(x) = \rho(x, Tx)$ A üzerinde bir alt yarı-sürekli fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &\leq \rho(x^*, Tx^*) \\ &= g(x^*) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \inf g(x_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \inf \rho(x_{n_k}, Tx_{n_k}) \\ &= \rho(x^*, y^*) \\ &= \rho(A, B)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $\rho(x^*, Tx^*) = \rho(A, B)$ dir, yani, x^*, T'nin en iyi yakınlık noktasıdır.

Örnek 4.3. $X = [0, \infty)$ ve $\rho: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\rho(x, y) = (x - y)^2$ biçiminde tanımlansın. O halde, (X, ρ) $s = 2$ ile tam bir b-metrik uzaydır. $A = \{2\}$ ve $B = \{1\}$. O halde $d(A, B) = 1$, $A_0 = A$ ve $B_0 = B$ olur. Aynı zamanda (A, B) ikilisi (M_C) özelliğini sağlar, A kapalıdır ve B A ya göre s-yaklaşık olarak kompakttır. $T: A \to B$ dönüşümünü $T(x) = x - 2$ biçiminde tanımlayalım. Eşitsizlikler (4.1) i sağlayacak şekilde $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ ve $a_5 = 0$ seçelim. T 'nin $T(A_0) \subseteq (B_0)$ 'ı koşulunu sağlayan bir proksimal Karapınar tipi büzülme dönüşümüdür. T dönüşümü A içinde en iyi yakınlık noktasına sahiptir.

Teorem 4.2 de $A = B = X$ alırsak, aşağıdaki sabit nokta sonucunu sunarız.

Sonuç 4.4. (X, ρ) $s \geq 1$ sabitiyle bir tam b-metrik uzay ve $T: X \to X$ bir sürekli dönüşüm olsun. EğerEğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$0 \leq \frac{a_4 - a_3}{a_1 + a_2} < \frac{1}{s},\ a_1 + a_2 \neq 0,\ a_1 + a_2 + a_3 > 0\ ve\ a_3 - a_5 \geq 0 \qquad (4.1)$$

koşullarına sahip $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ için

$$a_1 \rho(Tx_1, Tx_2) + b_2 \begin{pmatrix} \rho(x_1, Tx_1) \\ +\rho(x_2, Tx_2) \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} \rho(x_2, Tx_1) \\ +\rho(x_1, Tx_2) \end{pmatrix}$$
$$\leq a_4 \rho(x_1, x_2) + \frac{a_5}{s} \rho(x_1, T^2 x_1),$$

sağlanıyorsa T dönüşümü sabit bir noktaya sahiptir.

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde b-metrik uzaylarda en iyi yakınlık noktası sonuçları üzerine çalışma yapılmıştır. Bir bölümde literatürde bulunan Ćirić tip daralma, Pachpatte tip daralma ve Ćirić-Jotic tip daralma dönüşümleri için en iyi yakınlık noktası çalışmaları detaylı bir şekilde incelendi. Dördüncü bölüm tezimizin orjinal bölümünü içermektedir. Bu bölümde biz öncelikle Karapınar tip daralma dönüşümü kavramı tanıtılmış ve bu dönüşümler için b-metrik uzaylarda bazı en iyi yakınlık noktası sonuçları elde edilmiştir. Böylece literatürde bazı sabit nokta ve en iyi yakınlık noktası sonuçlarının bir genellemesi elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Iqbal, H. and Petrusel, A. 2019. Fixed points for multivalued Suzuki type $(\Theta - R)$ contraction mapping with application. Journal of Function Spaces, 2019: 1-13.

Abbas, M. and Nazir, T. 2012. Fixed point of generalized weakly contractive mappings in ordered partial metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 2012(1): 1-19.

Achari, J. 1976. On Ćirićs non-unique fxed points. Mat. Vesnik., 13: 255-257.

Agarawal, R., P., O'Regan, D. and Shahzad, N. 2004. Fixed point theorem for generalized contractive maps of Meir-Keeler type. Math. Nachr., 276(1): 3-22.

Agarwal, R. P. Benchohra, M. and Hamani, S. 2010. A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions. Acta Applicandae Mathematicae. 109: 973-1033.

Altun, I. Aslantas, M. and Sahin, H. 2020. Best proximity point results for p-proximal contractions. Acta Math. Hungar., 162(2): 393-402.

Alsulami, H. H. Karapınar, E. and Rakočević, V. 2017. Ćirić type nonunique fxed point theorems on b-metric spaces. Filomat, 31(11): 3147-3156.

Aslantas, M. 2021. Best proximity point theorems for proximal b-cyclic contractions on b-metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70(1): 483-496.

Aydi, H. 2016. An-implicit contractive pair of mappings on quasi b-metric spaces and an application to integral aligns. J. Nonlinear Convex Anal., 17(12): 2417-2433.

Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. Fund. Math, 3: 133-181.

Basha, S. S. 2010. Extensions of Banachís contraction principle. Numer. Funct. Anal. Op-tim., 31: 569-576.

Basha, S. S. and Veeramani, P. 1997. Best approximations and best proximity pairs. Acta Sci. Math., 63: 289-300.

Berinde, V. 1993. Generalized contractions in quasi-metric spaces. Seminaron Fixed Point Theory. Babeş-Bolyai University, Research Sem., 3: 3-9.

Berinde, V. 1996. Sequences of operators and fixed points in quasimetric spaces. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math, 16(4): 23-27.

Berinde, V. 1997. Contracţii generalizate şi aplicaţii. Editura Club Press 22, Baia Mare.

Ćirić, L. B. 1974. On some maps with a nonunique fxed point. Institut Math Èmatique, 17: 52-58.

Cosentino, M. and Vetro, P. 2014. Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy Rogers-type. Filomat, 28 (4): 715-722.

Czerwik, S. 1993. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Math.et Inf. Uni. Ostraviensis, 1, 5–11.

Dag, H., Mınak, G. and Altun, I. 2017. Some fixed point results for multivalued F-contractions on quasi metric spaces. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 111(1): 177-187.

Durmaz, G. and Altun, I. 2016. Fixed point results for α-admissible multivalued Fcontractions. Miskole Mathematical Notes, 17(1): 187-199.

Haghi, R.H., Rezapour, S. and Shahzad, N. 2013. Be careful on partial metric fixed point results. Topol. Appl. 160: 450-454

Hussain, N., Vetro, C. and Vetro, F. 2016. Fixed point results for a-implicit contractions with application to integral aligns. Nonlinear Anal. Model. Control, 21(3): 362-378.

Hussain, N. Mitrović, Z. D. and Radenović, S. 2019. A common fxed point theorem of isher in b-metric spaces. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, FÌsicasy Naturales. Serie A. Matem·ticas, 113: 949-956.

Jleli, M. and Samet, B. 2014 . A new generalization of the Banach contraction principle. Journal of Inequalities and Applications, 2014: 1-8.

Kadelburg, Z. and Radenovic, S. 2014. Fixed point and tripled fixed point theorems under Pata-Type conditions in ordered metric spaces. International Journal of Analysis and Applications, 6: 113-122.

Karapinar, E. 2012. A new nonunique fixed point theorem. J. Appl. Funct. Anal. , 7: 92-97.

Karapinar, E. 2018. A short survey on the recent fixed point results on b-metric spaces. Constructive Mathematical Analysis, 1(1): 15-44.

Karapınar, E. 2019. Recent advances on the results for nonunique fixed in various spaces. Axioms, 8: 1-36.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. 1989. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 141(1): 177-188.

Pachpatte, B.G. 1979. On Ćirić type maps with a non-unique fixed point. Indian J. Pure Appl. Math., 10: 1039-1043.

Piri, H. and Kumam, P. 2014. Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. Fixed Point Theory Appl., 210: 1-11.

Proinov, P. D. 2020. Fixed point theorems for generalized contractive mappings in metric spaces. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22: 1-27.

Reich, S. and Zaslavski, A. J. 2020. Existence of a unique fixed point for nonlinear contractive mappings. Mathematics, 8: 1-7.

Reich, S. 1972. Fixed points of contractive functions. Boll. Unione Mat. Ital. 5: 26-42.

Reich, S. 1978. Approximate selections, best approximations, fixed points, and invariant sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 62(1): 104-113.

Reich, S. 1983. Some problems and results in fixed point theory. Contemp. Math., 21: 179-187.

Romaguera, S. 2012. Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces. Topology and its Applications, 159(1): 194-199.

Rus, I.A. 2001. Generalized contractions and applications, Cluj University Press. Cluj Napoca.

Sahin, H. Aslantas, M. and Altun, I. 2020. Feng-Liu type approach to best proximity point results for multivalued mappings. J. Fixed Point Theory Appl, 22: 1-20.

Sahin, H. 2021. Best proximity point theory on vector metric spaces. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70(1): 130-142.

Sankar Raj, V. 2011. A best proximity point theorem for weakly contractive non-self-mappings. Nonlinear Anal. TMA, 74: 4804-4808.

Sankar Raj, V. 2013. Best proximity point theorems for non-self mappings. Fixed Point Theory, 14: 447-454. 12

Shatanawi, W., Karapinar, E., Aydi, H. and Fulga, A. 2020. Wardowski type contractions with applications on Caputo type nonlinear fractional di§erential equations. University Politechnica of Bucharest ScientÖc Bulletin. Series A, 82(2): 157- 170.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Mohammed Jasim Mohammed MOHAMMED

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2019-Halen
Lisans	Telafer Üniversitesi Temel Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü	2017-2018

Akademik Aktiviteler

1. Aslantas, M., Sahin, H., and Mohammed M. J. M. (2021). On some best proximity point results on b-metric spaces. Fifth International Conference Of Mathematical Sciences, (Tam Metin).