T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Nazlı IRKIL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz-2021

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Nazlı IRKIL tarafından yapılan "Logaritmik Kaynak Terimli Dalga Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr. Varga KALANTAROV

Üye : Prof. Dr. Şevket GÜR

Üye : Doç. Dr. Erhan PİŞKİN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi M. Ali ARSERİM

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 12/07/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2021

Prof.Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimine başlama kararı sürecinde ve doktora eğitimim boyunca başta deneyimi ve sorularıma ışık tutan akademik tecrübesiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan ve yol gösteren kıymetli hocam Doç. Dr. Erhan PİŞKİN e, bu süreçte her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aile bireylerimin her bir ferdine, lisans yıllarında kurduğum bu hayalin gerçekleşmesi için destek olan tüm dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR…….….....		I
İÇİNDEKİLER……...…….....		II
ÖZET……..…….....		IV
ABSTRACT……...…….....		V
KISALTMA VE SİMGELER……		VI
1.	**GİRİŞ**……..	1
2.	**ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**…….	5
2.1.	Boussinesq Denklemi……...……	8
2.2.	p-Laplasyan Denklemi…….....	10
2.3.	Kirchhoff Denklemi……...	12
3.	**MATERYAL VE METOT**……	17
3.1.	Yakınsamalar……...……	17
3.2.	Lebesgue Uzayı…….……...……	19
3.3.	Sobolev Uzayı…….....	21
3.4.	Eşitlikler ve Eşitsizlikler……..	23
3.5.	Daralma Dönüşüm Prensibi…….....	26
3.6.	Logaritmik Sobolev Eşitsizliği…….	27
3.7.	Logaritmik Gronwall Eşitsizliği…….....	31
3.8.	Aubin-Lions Lemması…….....	33
3.9.	Potansiyel Kuyu Metodu……	33
3.10.	Galerkin Yaklaşık Çözümler Metodu…….....	36
3.11.	Çözümlerin Üstel Azalması…….	37
3.12.	Çözümlerin Üstel Büyümesi……..……...	39
3.13.	Logaritmik Kaynak Terime Sahip Denklem Modellemesi..…….….....	40
3.14.	Kirchhoff Denklem Modellemesi…….……..……	43
4.	**BULGULAR VE TARTIŞMA**……..	47
4.1.	Altıncı Mertebeden Logaritmik Boussinesq Denklem Çözümlerinin Varlığı Ve Asimptotik Davranışı……..	47
4.1.1.	Çözümlerin Global Varlığı……..	57
4.1.2.	Sonsuz Zamanda Çözümlerin Patlaması……..……	62
4.1.3.	Doğrusal Sönüm Terimli (4.1.1) Problemin Çözümlerinin Enerji Azalması.....	66

4.2. Logaritmik Kaynak Terimli Hiperbolik Tipten p-Laplasyan Denklemin Çözümlerinin Davranışı……..……...…….... 72
4.2.1. Çözümlerin Global Varlığı……...…… 75
4.2.2. Çözümlerin Üstel Büyümesi……..... 88
4.2.3. Çözümlerin Azalması……..…… 92
4.3. Logaritmik Kaynak Terime Sahip Yüksek Mertebeden Kirchhoff Denklem Sisteminin Çözümlerinin Varlığı Ve Asimptotik Davranışı……... 95
4.3.1. Çözümlerin Global Varlığı……...…… 107
4.3.2. Çözümlerin Azalması……..…… 115
5. SONUÇ VE ÖNERİLER …….. 123
6. KAYNAKLAR…….……..... 125
ÖZGEÇMİŞ……..... 137

ÖZET

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ DALGA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Nazlı IRKIL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tezin ilk bölümünde hiperbolik tipten evolüsyon denklemlerin tarihsel gelişimi ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin günlük hayatta ve fizikte kullanım alanları ele alınmıştır.

İkinci bölümde, logaritmik kaynak terime sahip problemlerle ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olan temel tanım, teorem, eşitsizlikler, yöntemler ve denklem modellemeleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise üç kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda doğrusal olmayan logaritmik kaynak terim içeren Boussinesq denklem çözümlerinin global varlığı, sonsuz zamanda patlaması ve azalması elde edilmiştir. İkinci kısımda ise logaritmik kaynak terime sahip hiperbolik tipten p-Laplasyan denklem çözümlerinin global varlığı, üstel büyümesi ve azalması elde edilmiştir. Üçüncü kısımda ise logaritmik kaynak terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff denklem sistemi ele alınarak sistemin çözümlerinin global varlığı ve azalması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Logaritmik kaynak terim, Boussinesq denklemi, p-Laplasyan denklemi, Yüksek mertebe Kirchhoff sistemi, Global varlık, Patlama, Enerji Azalması, Üstel büyüme.

ABSTRACT

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF WAVE EQUATIONS WITH LOGARITHMIC SOURCE TERM

PHD THESİS

Nazlı IRKIL

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2021

In the first chapter of this dissertation, according to available literature, the information about the history of hyperbolic type evolution equations were given. Also, the applications of this type problem in daily life and physics were discussed.

In the second chapter, the results of several studies related to hyperbolic type equations with logarithmic source term were analyzed.

In the third chapter, the basic definition, theorem, inequalities, methods and equation modeling which will be used in this dissertation were given.

The fourth chapter consists of three subsections. In the first subsection of the fourth chapter, the global existence, blow up at infinity and decay results of the solutions for the Boussinesq equation with the nonlinear logarithmic source term were obtained. In the second subsection, global existence, exponential growth and decay of solutions for the p-Laplacian equation with logarithmic source term were obtained. In the third subsection, the decay and global existence of the solutions for higher order Kirchhoff system with logarithmic source term were studied.

Keywords: Logarithmic source term, Boussinesq equation, p-Laplacian equation, Higher- order Kirchoff system, Global existence, Blow up, Decay, Exponential growth.

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n boyutlu Öklit uzayıdır
$x = (x_1, x_2, \dots x_n)$	: R^n de tanımlı bir noktadır
Ω	: R^n de sınırlı bir bölgedir
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırıdır
$L^p(\Omega)$	: p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
$D(\Omega)$	: Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı
$D'(\Omega)$	: Dağılım uzayı
$L^p(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$	: $\left\{f: (0,T) \to X \text{ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere } \int_0^T \|f(t)\|_X^p < \infty\right\}$
$C^m(\Omega)$	: Ω bölgesinde m. kez sürekli türevli fonksiyonlar uzayı
$D(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$	: $[0,T]$ bölgesinde kompakt desteğe sahip sürekli türevli fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Bilimin amaçlarından biri de gerçek dünyayı anlamaktır. Bu durumda problemi matematiğe uyarlamak gerekir. Matematiğin kendine has kuralları mevcuttur ve çoğunlukla eldeki probleme tam olarak uymaz. Bu amaçla bir sistem matematiksel kavram ve dil kullanılarak tanımlanır ve bu işleme modelleme denir. Matematik bu denklemlerin çözülmesine de hizmet eder. Uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan problemlerin tek bir denklem üzerinden modellemesi çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Bu nedenle bu tarz problemler birden çok fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların birleşiminden oluşan integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ele alınmaktadır. Bu modeller çoğunlukla bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlarla bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların türevini içeren bir denklem olarak modellenir ve bu tür denklemlere diferansiyel denklem denir (Köklü 2018). Diferansiyel denklemler ilk olarak 17. yüzyılda Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Bernoulli kardeşler Jakob ve Johann tarafından yapılan çalışmalarda ele alınmıştır. Bu denklemler bahsettiğimiz bilim adamlarının analizin yeni fikirlerini, gök cisimlerinin hareket yollarını ve sürtünmesiz bir nesnenin P noktasından Q noktasına hangi yol boyunca en kısa sürede alçalacağını ele alan brakistokron eğrisi gibi mekaniğin bazı problemlerine uygulamalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmışlardır. Doğal yaşamdaki temel süreçlerin çoğunluğu büyük ölçüde diferansiyel denklemler üzerinden temellendirilebilir (Kelley ve Peterson 2010). Diferansiyel denklem sistemleri; Elastikiyet teorisi (Ezechias 1988), Dinamik (Kant ve ark. 1990), Akışkanlar mekaniği (Agarwal ve ark. 1990), Salınım problemleri (Pesterev ve Bergman 1997) gibi konularda modelleme yapılması için kullanılırken, İntegro-Diferansiyel denklemler ise; Elektromanyetik Teori (Bloom 1981), Biyoloji (Holmaker 1993), Termoelastikiyet (Kopeikin ve Shiskin 1984) gibi alanlarda kullanılmışlardır.

Yaklaşık 300 yıldır diferansiyel denklemler birçok bilimsel disiplindeki sorunları tanımlamak ve analiz etmek için kullanılmışlardır. Bu denklemlerin çözümlerinin varlığını bulmak amacıyla analitiğin modern tekniklerinin kullanımından nümerik çözümlerinin kullanımına kadar birçok tekniğin geliştirilmesi için matematikçiler yoğun çalışmalar gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca, diferansiyel denklemlerle ilgili sorular matematikte yeni alanların ortaya çıkmasını sağlayıp analiz, topoloji, cebir ve geometri gibi alanlardaki ilerlemeler ise genellikle diferansiyel denklemler için yeni bakış açıları sunduğundan matematiğin gelişiminde merkezi rol almışlardır (Kelley ve Peterson 2010).

Dalga denklemleri ise hiperbolik tipten evolüsyon denklemlerin en tipik örneği olarak karşımıza çıkmaktadır. Dalga bir boşlukta yayılan veya bir ortamda bir kaynak tarafından oluşturulan, enerjinin taşınmasını sağlayan titreşimin bir noktadan diğer noktalara iletilmesine verilen isimdir. Şimdi dalga denkleminin matematiksel modelini ele alalım. $\Omega \subset R^n$ açık bir küme olsun. $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to R$ fonksiyonu $\Omega \times (0,\infty)$ da

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ ve } u_t(x,0) = v_0(x)$$

problemini sağlasın. Burada x uzay değişkenlerinde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ Laplace olarak gösterilir, t zaman değişkenini ifade eder. (1.1) denklemi dalga denklemi olarak adlandırılır. $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$ operatörü sıklıkla "$\Box$" ile gösterilip d'Alembert operatörü olarak ifade edilir. $n = 1$ alındığında (1.1) denklemi dış kuvvetin yokluğunda bir telin titreşiminin modellemesini ifade eder. $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ grafiği zamana bağlı olarak telin zamana bağlı konfigürasyonunu ifade etmektedir. $n = 2$ olduğunda (1.1) denklemi elastik bir zarın titreşiminin modellemesidir. Daha genel olarak (1.1) modellemesi bazı $\Omega \subset R^n$ homojen elastik ortamda dalganın yayılımını modellemektedir. (1.2) eşitliği Dirichlet sınır şartıdır ve bu sınır şartları Neumann veya farklı sınır şartları ile değiştirilebilir. (1.2) şartı telin $\partial\Omega$ üzerinde sabit olduğu anlamına gelirken Neumann koşulu ile değiştirildiğinde ise telin uç noktalarında serbest olduğunu ifade eder (Brezis 2010).

Yukarıdaki şekliyle bir diferansiyel denklem olarak modellenen dalgaların çözümü teknolojik ve bilimsel çalışmaların gelişmesinde ve insan yaşamının kolaylaştırılmasında büyük bir öneme sahiptir. Ancak dalga kavramı oldukça soyut bir kavramdır. Her dalga hareketinin kendine özgü bir enerjisi vardır. Örneğin, elastik bir cisim üzerine bırakılan enerji elastik cisimde bir hareketlenme meydana getirir. Bu hareketlilik elastik cismin hareketiymiş gibi görünür ama bu olay elastik cismin üzerine bırakılan enerjinin taşınmasıdır. Bu da bize ortamın hareket etmediğini, en önemlisi dalgaların enerjiyi taşıdığını gösterir. Bu durum gün geçtikçe matematik ve fizikçilerin bu alana olan ilgisini daha da artırmıştır. Bunun sonucunda dalga denklemlerin çözümlerini elde etmede kullanılan birçok teknik ve metot geliştirilmiştir (Yokuş 2011, Liu 2003).

Diferansiyel denklemlerin klasik anlamda çözümünü bulmak her zaman için müm-

kün olmasa da denklemin önemine bağlı olarak matematikçiler denklem çözümünün niteliksel özellikleri ile ilgilenmişlerdir. Örneğin; "Sistem bir çözüme sahip midir?", "Sistemin belirli davranışları kontrol edilebilir mi yoksa sistem stabil mi?" gibi sorular cevaplanabilirse denklemin çözümü bulunamazsa bile denklem hakkında bilgi sahibi olmaya olanak sağlayacaktır. Bu nedenle denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği, kararlılığı, patlaması, sınırlılığı gibi özelliklerinin analizi nümerik çözümlerin bilinmesi kadar önemli ve faydalıdır. Ayrıca nümerik çözümler için sayısal bir yaklaşım oluşturulurken çözümün varlığının ve tekliğinin kontrol edilmesi de gerekmektedir. Bunun sonucunda hiperbolik tipten doğrusal olmayan denklemlerin çözümlerinin global varlığı, azalması ve patlaması ile ilgili son dönemlerde birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin, lokal varlık teoreminin açıklanmasında temel yöntem L^2 normları için tahminler yapılmasını sağlayan enerji denklemleridir. Bu yöntemler çözümlerin azalmasının gösterildiği durumlar hariç, çözümlerin uzun zaman davranışlarını göstermekte yetersiz kalmışlardır. Bu analizin yapılması için de farklı metotlar geliştirilmiştir (Liu 2003).

Geliştirilen metotlarda enerjinin korunumu dalga denklemi ile ilgili temel kurallardan biri olduğundan kullanılan metotlarda enerji denklemine ihtiyaç duyulmaktadır. Dalga denklemlerinde enerji denklemini bulmak için genellikle kullanılan bir yöntemi ele alalım. ρ ve T sabit olmak üzere sonsuz uzunlukta bir teli ele alalım. Böylece $-\infty < x < \infty$ olmak üzere $\rho u_{tt} = T u_{xx}$ olarak dalga denklemini yazabiliriz. Fizikten kinetik enejinin $\frac{1}{2}mv^2$ olarak ifade edildiğini biliyoruz. Bizim denklemimizde kinetik enerji

$$KE = \frac{1}{2}\rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx \tag{1.3}$$

olarak alınmıştır. $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç koşulları olmak üzere integralin yakınsak olduğunu garanti etmek için $|x| \leq R$ aralığı dışında var olmadığını kabul edelim. Bu kabulden $u(x,t)$ çözümü $|x| < R + ct$ için yok olur. Kinetik enerji diferansiyellenirse, integral altında türeve geçiş sağlanabilir böylece

$$\frac{dKE}{dt} = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx \tag{1.4}$$

olarak elde edilir. Dalga denkleminden $u_{tt} = \frac{T u_{xx}}{\rho}$ yerine yazılır ve kısmi integrasyon

alınırsa

$$\frac{dKE}{dt} = T \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} dx = T u_t u_x - T \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx} u_x dx \tag{1.5}$$

eşitliği elde edilir. $Tu_t u_x$ terimi $x = +\infty$ ve $x = -\infty$ de değerlendirilirse terim yok olur. Ancak ikinci terim $u_{tx} u_x = \left(\frac{1}{2} u_x^2\right)_t$ olarak ifade edilebilir. Bu ifade (1.5) te yerine yazılırsa

$$\frac{dKE}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T u_x^2 dx$$

olarak elde edilir. Potansiyel enerji

$$PE = \frac{1}{2} T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

ve toplam enerji

$$E = KE + PE$$

olsun. Böylece

$$\frac{dKE}{dt} = -\frac{dPE}{dt}$$

veya

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

olduğu açıktır. Böylece t den bağımsız

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\rho u_t^2 + T u_x^2\right) dx$$

toplam enerjisi elde edilir (Strauss 2008).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Mühendislik ve fizikte bazı olayların modellemesinin sonucunda logaritmik kaynak terime sahip denklemler elde edilmiştir (Bialynicki-Birula ve Mycielski 1975, 1976). Son dönemlerde bu alanda çalışmalar yapılmış olmasına rağmen literatürde hala çok sayıda açık problem bulunmaktadır. Bu nedenle tezimizde logaritmik kaynak terime sahip denklem ve denklem sistemlerini ele aldık. Tezimizin dördüncü bölümü daha önce çalışılmamış özgün problemlerden oluşmaktadır. Dördüncü bölümün ilk kısmında

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxxx} + \left(u_x \log |u_x|^k\right)_x = 0$$

logaritmik kaynak terime sahip altıncı mertebeden Boussinesq denklemini ele aldık.

İkinci kısımda ise

$$u_{tt} - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + |u|^{p-2}u + u_t = |u|^{p-2}u\ln|u|$$

logartimik kaynak terimli p-Laplasyan denkleminin çözümlerinin davranışını çalıştık.

En son kısımda ise

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{r_1}u - \Delta u_t + |u_t|^{q-2}u_t = |u|^{p-2}u\ln|u| \\ v_{tt} + M\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{r_2}v - \Delta v_t + |v_t|^{q-2}v_t = |v|^{p-2}v\ln|v| \end{cases}$$

logaritmik kaynak terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff denklem sisteminin çözümlerinin davranışını inceledik.

Literatür taramasına logaritmik kaynak terime sahip denklemlerle ilgili yapılan çalışmalarla başladık. 1975 yılında Bialynicki-Birula ve Mycielski tarafından kuantum teorisi ile mikro dünyadan makro dünyaya geçişte tutarlı şartlar ortaya koymak amaçlanmıştır. Buna bağlı olarak logaritmik terime sahip doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin atom fiziğine uygulanabileceği önerilmiştir. Logaritmik kaynak terime sahip doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin Gauss formunun soliton benzeri kararlı çözümlere sahip olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda logaritmik kaynak terime sahip denklemler kuantum mekaniği, nükleer fizik, enflasyon kozmolojisi, optik ve süpersimetrik alan teorileri gibi fiziğin birçok farklı alanında ortaya çıkmıştır (Bialynicki-Birula ve Mycielski 1975, 1976, Barrow ve Parsons 1995, Enqvist 1998, Zloshchastiev 2010, Yan ve Yang

2018). Bu tür doğrusal olmayan kaynak terimler, rölativistik olmayan dalga denklemlerinde harici bir elektromanyetik alanda dönerek hareket eden parçacıkları ifade ederken rölativistik dalga denklemlerinde dönmeyen parçacıkları tanımlamak için kullanılmıştır (Hu ve Yin 1995). Fizikte temelde yatan tüm bu özgül anlamla birlikte, logaritmik kaynak terime sahip evolüsyon denklem probleminin global çözümlerinin iyi konumluluğu matematikçilerinde dikkatini çekmiştir.

Bialynicki-Birula ve Mycielski (1975, 1976), $[a,b]\times(0,T)$ aralığında, ε doğrusal olmayan kaynak terimin ölçümünün parametresi olmak üzere

$$u_{tt}-u_{xx}+u-\varepsilon u\ln|u|^2=0 \tag{2.1}$$

denklemini elde ettiler. Ayrıca, Vladimirov ve Volovich (2004), Gorka ve ark. (2010, 2011) çalışmlarında p-adic string denkleminde p nin limiti 1 e giderken (2.1) denkleminin elde edilebileceğini ortaya koydular. Gorka (2009) bazı kompaktlık özelliklerini kullanarak

$$(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2([a,b])$$

başlangıç-sınır koşulları altında (2.1) problemi için zayıf çözümlerin global varlığını elde etti. Bartkowski ve Gorka (2008), $[a,b]$ kapalı aralığını R kümesine genişleterek sınır şartları olmadan (2.1) denkleminin zayıf çözümlerinin global varlığını ve klasik çözümlerini çalıştılar.

Cazenave ve Haraux (1980), R^3 te

$$u_{tt}-\Delta u=u\ln|u|^k \tag{2.2}$$

denklemini ele aldılar ve Cauchy probleminin çözümlerinin varlık ve tekliğini elde ettiler. Ma ve Fang (2018), (2.2) denklemini güçlü sönüm (damping) terimle ele aldı. Güçlü sönüm terimle logaritmik kaynak terim arasındaki etkileşimi inceleyerek çözümlerin varlığını ve azalmasını çalıştılar. Lian ve Xu (2019), güçlü ve zayıf sönüm terimle (2.2) denkleminin çözümlerinin lokal varlığını, $E(0)<d$ ve $E(0)=d$ şartları altında global varlığını, asimptotik davranışını ve patlamasını gösterdiler. Güçlü sönüm terim yokluğunda denklemin pozitif başlangıç enerjisi şartı altında çözümlerinin patlamasını elde ettiler.

Hiramatsu ve ark. (2010) Q-ball dinamiğini teorik fizikte ele almak ve numerik çalışmalar yapmak için

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t + |u|^2 u = u \ln |u| \tag{2.3}$$

modelini elde ettiler. Bu tip denklemler fiziğin optik, jeofizik ve nükleer fizik gibi birçok alanında kullanılmaktadır (Buljan 2003, Martino 2003, Vladimirov ve Volovich 2004). Ancak, problem için teorik bir analiz bulunmuyordu. Han (2013), R^3 te (2.3) denkleminin tek boyutlu formunun

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

başlangıç-sınır koşulları için zayıf çözümlerinin global varlığını Galerkin metodunu kullanarak çalıştı. Zhang ve ark. (2015), (2.3) denkleminin çözümlerinin azalmasını elde ettiler. Al-Gharabli ve Messaoudi (2017), (2.3) denkleminde $-\Delta u$ terimi yerine $\Delta^2 u$ terimi ile denklemin çözümlerinin varlığını ve azalmasını çalıştılar. Hu ve ark. (2019), (2.3) denklemini $|u|^2 u$ terimi olmadan ele alarak çözümlerinin büyümesini ve azalmasını incelediler.

Pişkin ve Irkıl (2019c),

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + u_t = ku \ln |u| \tag{2.4}$$

denkleminin çözümlerinin lokal varlığını, global varlığını ve azalmasını incelediler.

Pişkin ve Çalışır (2020),

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = 2u \ln |u| \tag{2.5}$$

denkleminin çözümlerinin azalmasını ve patlamasını çalıştılar.

Di ve ark. (2020),

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = |u|^{p-2} u \ln |u| \tag{2.5}$$

denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini, azalmasını çalıştılar. Ayrıca çözümlerin sonlu patlaması için üst ve alt sınırı belirlediler.

2.1. Boussinesq Denklemi

1830 larda sığ sularda küçük ve sonlu genliğe sahip su dalgaları ele alınan önemli bir konuydu. Mühendis John Scott Russell kanal boyunca atlarla çekilen bir botu izlerken sürekli bir formda ve kanal boyunca uzun mesafeler kat eden dalgaların bozulma ve türbülansa karşı dağılmadan durabilmesini sağlayan en iyi ortamın nasıl olması gerektigini anlamaya çalışıyordu. Bot durmaya çalıştığında suyun çalkantısı ile şeklini kaybetmeyen sabit bir hızda olduğu fark edilen bir dalga botun ön taraflarında ortaya çıktı. Bu dalgaları at sırtında kanalda gözden kaybolana kadar en fazla iki mil kadar takip etti ve dalga hızının saatte en fazla sekiz mil olduğunu hesapladı. Russell kendi laboratuarında deneysel olarak bu tip dalgaları üretmeye çalıştı. c solitonların hızı, h_0 suyun derinliği ve H dalganın su seviyesinin üzerindeki maksimum yüksekliği ifade etmek üzere

$$c = \sqrt{gh_0}\left(1 + \frac{H}{2h_0}\right)$$

deneysel formülünü buldu (Russell 1844). Bu çalışma sonraki dönemlerde doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin gelişmesini hızlandırdı.

Boussinesq (1872) tarafından sığ su yüzeyinde küçük genlikli uzun dalgaların yayılmasını tanımlamak için

$$u_{tt} - u_{xx} + \mu u_{xxxx} = s\left(u^2\right)_{xx} \tag{2.1.1}$$

klasik Boussinesq denklemini matematiksel olarak modellemiştir. Burada μ ve s su dalgasının derinliğine ve özgül hızına bağlı sabitlerdir. Bu denklemler, soliton adı verilen özel hareketli dalga çözümlerine sahiptir. Boussinesq teorisi, Scott-Russell tarafından keşfedilen ve 1830 larda bildirilen solitonlar hakkında tatmin edici bir bilimsel açıklama sunan ilk teoriydi. (2.1.1) denklemi doğrusal olmayan kirişler, doğrusal olmayan teldeki küçük salınımlar ve düzgün bir dikdörtgen kanalda viskozitesi yüksek bir sıvıdaki girdapsız akışlar gibi birçok matematiksel ve fiziksel olayı tanımlamak içinde kullanılabilmiştir (Linares 1993). Ayrıca, Boussinesq (1872) yayınlanan makalesinde Lyapunov fonksiyoneli kullanılması fikrini savundu ve bunun tekil dalgaların kararlılığıyla bağlantılı olduğunu iddia etti. Klasik Boussinesq denkleminin global varlığının yokluğu Levine ve Sleeman (1985) tarafından ele alındı.Boussinesq orijinal denklemi su yüzeyindeki küçük genlikli düzlemsel uzun dalgalar için tek matematiksel model değildir. Bağımlı değişkenlerin sayısının

farklı seçimleri ve alt indislerin sırasının değiştirilmesiyle tümü aynı biçimsel geçerliliğe sahip olan denklemler elde edilebilir. Bu modellerin tümü, lineersizlik ve dağılmanın küçük etkilerini hesaba katan doğrusal dalga denkleminin pertürbasyonlarıdır (Bona ve Sachs 1988). Bu denklemlerden bir tanesi

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \left(u^2\right)_{xx} \tag{2.1.2}$$

Genelleştirilmiş Boussinesq denklemdir. Kalantarov ve Ladyzhenskaya (1978), Liu (1996), Dé Godefroy (1998), Yang ve Wang (2003) çalışmalarında Genelleştirilmiş Boussinesq denklemlerin çözümlerinin patlamasını elde ettiler.

Daripa (2006)

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha(u^2)_{xx} \mp \alpha u_{xxxx} - \varepsilon^2 \alpha u_{xxxxxx} = 0 \tag{2.1.3}$$

sığ su dalgalarının iki yönlü yayılmasını modelleyen yüksek merteden Boussinesq denklemini elde etti.

Esfahani ve ark. (2012)

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxxx} - u_{xxxxxx} = \left(|u|^{\alpha} u\right)_{xx} \tag{2.1.4}$$

altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin çözümlerinin global varlığı ve patlamasını çalıştılar. Sonra Wang ve Esfahani (2014), aynı denklemin lokal varlığını elde ettiler.

Wang (2016)

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} + \beta u_{xxxx} - u_{xxxxxx} - r u_{xxt} = \left(f\left(u\right)\right)_{xx} \tag{2.1.5}$$

denkleminin global çözümlerinin varlığını ve asimptotik davranışını çalıştılar. Polat ve Pişkin (2012), βu_{xxxx} terimi olmadan (2.1.5) denkleminin global varlığını ve çözümlerinin azalmasını çalıştılar. Pişkin (2013b) denklemin çözümlerinin patlamasını genelleştirilmiş konkavlık metodunu kullanarak inceledi.

Logaritmik KdV denklemi

$$u_t + u_{xxx} + \left(u \ln |u|\right)_{xx} = 0 \tag{2.1.6}$$

olarak elde edilmiştir. Logaritmik KdV denklemi, Hertz etkileşim kuvvetleri ile harmonik olmayan atom zincirlerdeki solitonları modellemek için kullanılmaktadır (Chatterjee 1999, James ve Pelinovsky 2014).

Wazwaz (2015) Genelleştirilmiş Boussinesq denklemi ile logaritmik KdV denkleminin birleşimi olan logaritmik Boussinesq denklemini (log-BE)

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + \left(u \log |u|^k\right)_{xx} = 0 \tag{2.1.7}$$

şeklinde ele aldı. Daha sonra Hu ve ark. (2017), (2.1.7) denkleminin çözümlerinin global varlığını ve çözümlerin üstel büyümesini çalıştılar.

Hu ve Zhang (2016) ise

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + \left(u \log |u|^k\right)_{xx} = 0 \tag{2.1.8}$$

başlangıç sınır problemini ele aldılar. (2.1.8) denkleminin çözümlerinin lokal varlığını Logaritmik Sobolev eşitsizliğini ve potansiyel kuyu metodunu kullanarak çalıştılar. Ayrıca denklemin çözümlerinin azalmasını ve üstel büyümesini gösterdiler.

Bu çalışmalardan esinlenerek tezin dördüncü bölümünün ilk kısmında altıncı mertebeden logaritmik kaynak terime sahip başlangıç-sınır probleminin çözümlerinin global varlığını, çözümlerin sonsuz zaman patlamasını ve çözümlerin azalmasını çalıştık (Pişkin ve Irkıl 2019a).

2.2 p-Laplasyan Denklemi

İlk olarak doğrusal olmayan operatör içeren

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i \left(u_{x_i}\right) - \Delta u_t + f\left(u_t\right) = 0 \tag{2.2.1}$$

denkleminin global varlığı ve asimptotik davranışını tek boyutlu uzayda ve düzgün sınırlı Ω bölgede Greenberg ve ark. (1968) tarafından ele alınmıştır. Ang ve Dinh (1988), (2.2.1) denkleminin doğrusal olmayan Voight modeline uyan bir viskoelastik çubuğun uzunlamasına hareketini yöneten alan denklemi olarak ele alınabileceğini ortaya koydular. Tsutsumi (1971), Yamada (1980), Biazutti (1995), Nakao (1995) bu denklemle ilgili çalışmalar ortaya koydular.

Psedo p-Laplasyan

$$-\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \tag{2.2.2}$$

eşitliği çeşitli monoton yarı sürekli operatörler için bir model olarak kullanılmıştır (Lions 1969, Višik 1963). Matematiksel açıdan ilgi çekici olmasının yanı sıra, p-Laplasyan operatörünün çalışması, hem $p \geq 2$ durumu (dilatant sıvılar) hem de durum $1 < p < 2$ (Psedoplastik sıvılar) için Newtonian olmayan akışkanlar teorisinde de önemlidir (Astarita ve Marrucci 1974).

Zhijian (2002) tarafından

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i \left(u_{x_i} \right) - \Delta u_t + f \left(u_t \right) = g \left(u \right)$$

denkleminin çözümlerinin varlığı ve asimptotik davranışı çalışıldı. Daha sonra Messaoudi (2005) tarafından bu sonuçlar genişletildi. Messaoudi (2005)

$$u_{tt} - div \left(\left| \nabla u \right|^m \nabla u \right) - \Delta u_t + a \left| u_t \right|^\alpha u_t = b \left| u \right|^p u \tag{2.2.3}$$

denklemini ele aldı. m, a, b, α sabitleri için uygun şartlar belirleyerek çözümlerin azalmasını çalıştı. Sonra, Wu ve Xue (2013), (2.2.3) probleminin çözümlerinin azalmasını çalıştılar. Ayrıca, Pişkin (2015) aynı problem için Nakao eşitsizliğini kullanarak çözümlerin üstel ve polinomal azalmasını elde etti.

Bilgin ve Kalantarov (2013)

$$u_{tt} - \nabla \left[\left(\alpha_{0+} \alpha \left| \nabla u \right|^{m-2} \right) \nabla u \right] - b \Delta u_t = g \left(x, t, u, \nabla u \right) + \left| u \right|^{p-2} u \tag{2.2.4}$$

denklemini ele almıştır. Bu denklemin $p > m \geq 2$, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha, b > 0$ ve $\forall \left(x, t \right) \in \Omega \times R^+$, $u \in R$, $p \in R^n$ olmak üzere

$$\left| g \left(x, t, u, \nabla u \right) \right| \leq M_1 \left(\left| p \right|^{m/2} + \left| u \right|^{m/2} \right)$$

şartları altında sonlu zamanda patlamasını çalıştılar.

Logaritmik kaynak terime sahip parabolik denklemler ise son dönemlerde mate-

matikçiler tarafından çalışılmıştır. Chen ve Tian (2015)

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t = u \ln u \tag{2.2.5}$$

denkleminin çözümlerinin büyümesini ispatladılar.

Ayrıca, Le ve Le (2017) $p > 2$ için çözümlerin global varlığını, patlamasını ve azalmasını gösterdiler. Cao ve Liu (2018), $1 < p < 2$ için

$$u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \Delta u_t = |u|^{p-2} u \ln |u| \tag{2.2.6}$$

denkleminin global sınırlılığını ve patlamasını kanıtladılar.

Xu ve ark. (2019)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i}\right) = u \ln u$$

denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve patlamasını çalıştılar.

Pişkin ve Irkıl (2019b)

$$u_{tt} - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \Delta u + u_t = u \ln |u|$$

denkleminin lokal varlığını gösterdiler.

Literatür incelendiğinde daha önce hiperbolik tipten logaritmik kaynak terime sahip p-Laplasyan denklemlerle ilgili çalışmaların yeterli olmadığını tespit ettik. Bu durumun verdiği motivasyonla dördüncü bölümün ikinci kısmında logaritmik kaynak terime sahip hiperbolik tipten p-Laplasyan başlangıç-sınır probleminin çözümlerinin global varlığı, büyümesi ve azalmasını ele aldık (Pişkin ve ark. 2021).

2.3 Kirchhoff Denklemi

Lokal veya lokal olmayan bükülme sertliği ile gerilmiş ipin enine salınımlarını tanımlamak için Kirchhoff modeli üzerinde araştırma yapan çok sayıda çalışma bulunmaktadır (Woinowsky- Krieger 1950). Kirchhoff modeli mekanik, elastik teorisi ve matematiksel fiziğin diğer alanlarındaki birçok uygulama için önem arz eden bir modeldir (Ames 1965). Özellikle

$$u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + g\left(u_t\right) = f\left(u\right) \tag{2.3.1}$$

formundaki Kirchhoff tipi denklemler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. $g(u_t)$ fonksiyonunun zayıf sönümlü, güçlü sönümlü ve doğrusal olmayan sönümlü durumları için (2.3.1) denkleminin çözümlerinin global varlığı ve bazı davranışları matematikçiler tarafından ele alınmıştır. Dickey (1970), De Brito ve Hale (1982), Ikehata (1995), Matsuyama ve Ikehata (1996), Ono (1997), Cavalcanti ve ark. (1999), Santos ve ark. (2003), Yang (2011), Li ve ark. (2012), Pişkin ve Polat (2013) bu denklemin farklı özelliklerini çalışmışlardır.

Günümüzde çalışmalar, logaritmik kaynak terimli Kirchhoff denklem sınıfının çözümlerinin analizi konusunda yoğunlaşmıştır. Literatürü incelediğimizde logaritmik kaynak terime sahip Kirchhoff denklem ailesinin farklı özelliklerinin çalışıldığını gördük. Bu denklem tipi ile ilgili çalışma yapan yazarlardan bazıları Boulaaras ve ark. (2019a, 2019b), Yang (2019), Zeng ve ark. (2020), Cordeiro (2021) dır.

Boulaaras ve ark. (2019b) $\Omega \subset R^n$, $\gamma \geq 2$, k, ξ_0, ξ_1 ve σ pozitif sabitler, $\rho \geq 0$ ve h viskoelastik terim olmak üzere

$$\begin{aligned} & |u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u_{tt} + \int h(t-s)\,\Delta(s)\,ds \\ & - \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma (\nabla u, \nabla u_t)_{L^2(\Omega)}\right) \Delta u_t \\ = \;& u\,|u|^{\gamma-2} \ln |u|^k \end{aligned}$$

denkleminin çözümlerinin azalmasını çalıştılar.

Yang ve ark. (2019) $M(s) = \alpha + \beta s^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ şartları altında

$$u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t - \Delta u_t = u^{k-1} \ln |u| \tag{2.3.2}$$

denklemini ortaya koydular. Denklemin çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını çalıştılar.

Yüksek mertebeden Kirchhoff denklemi, Kirchhoff denkleminin genelleştirilmiş formu olarak ele alınmaktadır. Gao ve ark. (2011),

$$u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla^m u|^2 \, dx\right) (-\Delta)^m u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{r-1} u \tag{2.3.3}$$

yüksek mertebeden Kirchhoff denklemini ele aldılar. Denklemin çözümlerinin lokal varlığını ve $r > p$ şartı altında çözümlerinin patlamasını çalıştılar. $M(s) = s^{\gamma}$ ve $m \geq 1$

şartları altında (2.3.3) denkleminin global varlığı, çözümlerinin patlaması, çözümlerinin azalması gibi farklı özellikleri Li (2004), Messaoudi ve Houari (2007), Ye (2013), Pişkin ve Polat (2013), Sun ve ark. (2016), Lin ve Yang (2020) tarafından ele alınmıştır.

Park ve Bae (1998)

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\|D^{m_1}u\|^2 + \|D^{m_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{m_1}u + \alpha_1 |u_t|^{q-2} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} + M\left(\|D^{m_1}u\|^2 + \|D^{m_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{m_2}v + \alpha_2 |v_t|^{q-2} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.3.4}$$

denklem sistemini ele alarak sistemin çözümlerinin varlığını ve çözümlerin asimptotik davranışını çalıştılar.

Sonra, Pişkin (2014), $m \geq 1$ doğal sayı, $p; q \geq 1$ reel sayılar ve $M(s) = \beta_1 + \beta_2 s^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\int\limits_{\Omega} \left|(-\triangle)^{\frac{m}{2}} u\right| dx\right)(-\triangle)^{m} u + |u_t|^{p-2} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} + M\left(\int\limits_{\Omega} \left|(-\triangle)^{\frac{m}{2}} v\right| dx\right)(-\triangle)^{m} v + |v_t|^{q-2} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.3.5}$$

denklem sisteminin çözümlerinin patlamasını çalıştı.

Ye (2015)

$$\begin{cases} u_{tt} + \left(\|D^{m_1}u\|^2 + \|D^{m_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{m_1}u - \Delta u_t + a |u_t|^{q-2} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} + \left(\|D^{m_1}u\|^2 + \|D^{m_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{m_2}v - \Delta v_t + a |v_t|^{q-2} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.3.6}$$

sistemini ele aldı ve çözümlerin global varlığını ve azalmasını $H_0^{m_1}(\Omega) \times H_0^{m_2}(\Omega)$ uzayında $M(s) = \alpha + \beta s^{\gamma}$, $\gamma > 0, \alpha \geq 1, \beta > 0$ ve $q \geq 2, a > 0$ şartları ile ispatladı. Peyravi (2017) çalışmasında aynı sistemin pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin sonlu bir zamanda sonsuza gittiğini ispatladı. Ye (2017) çalışmasında (2.3.6) denklem sistemini güçlü sönüm terim olmadan ele alarak çözümlerinin global yokluğunu pozitif başlangıç enerjisi için çalıştı.

Wang ve ark. (2019) $M(s) = \alpha + \beta s^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ ve $k \geq 2\gamma + 2$ iken

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)\Delta u + u_t = |u|^{k-2} u \ln|u| \\ v_{tt} + M\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right)\Delta v + v_t = |v|^{k-2} v \ln|v| \end{cases} \tag{2.3.7}$$

zayıf sönüm terime ve logaritmik kaynak terime sahip hiperbolik tipten denklem sistemini

ele aldılar. Denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını ve sonlu zaman patlamasını farklı şartlar altında konkavlık metodunu ve potansiyel kuyu metodunu kullanarak gösterdiler.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünün son kısmında logaritmik kaynak terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff tipli denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı ve çözümlerinin azalması için gerekli şartları belirleyerek ispatladık (Irkıl ve Pişkin baskıda).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler, çözümlerin varlığı, azalması, büyümesi ile ilgili bazı lemmalara, Logaritmik denklemin ve Kirchhoff denkleminin matematiksel modellemisine yer verilecektir [Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Jain 1986, Kesavan 1989, Pişkin 2013a, Pişkin 2017, Polat 2005].

3.1. Yakınsamalar

Tanım 3.1.1. (x_n) , $(X, \|.\|)$ normlu uzayına ait bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.2. (x_n) , $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. Bir X normlu uzayında her Cauchy dizisi X uzayının bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.4. X vektör uzayı üzerinde $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ şeklinde tanımlanmış iki norm alınsın. $M > 0$, $N > 0$ sabitleri için

$$M \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq N \|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için sağlanıyorsa, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu normlu (veya vektör) uzaylarda tanımlanan tüm normlar denktir. Dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylarda tanımlanan tüm normlar o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlarlar; örneğin X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi $\|.\|_1(\|.\|_2)$ normuna

göre yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisi ise, $\|.\|_2(\|.\|_1)$ normuna göre de yakınsak, sınırlı veya Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.5. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.6. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı doğrusal fonksiyonellerin kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.7.(x_n) , X normlu uzayına ait bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n \to x$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.8. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı doğrusal fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\|f_n - f\| \to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır.

(b) her $x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

3.2. Lebesgue Uzayı

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.2.2 (Monoton Yakınsaklık Teoremi). $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların artan bir dizisi ve $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n$$

olur.

Sonuç 3.2.3. $\{u_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların artan bir dizisi ve $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ olsun. Böylece

$$\int_{\Omega} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} u_n$$

dır.

Teorem 3.2.4 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi). g, Ω üzerinde integrallenebilir fonksiyon ve $\{f_n\}$, Ω kümesi üzerinde $|f_n| \leq g$ koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer hemen hemen her yerde $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ise

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n$$

dir.

Tanım 3.2.5. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L^{\infty}(\Omega)$ *uzayı* denir. $L^{\infty}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.6. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü doğrusal olduğundan (ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 3.2.7. $vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.8. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u(.)\|_X \in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) aralığından X uzayına tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonları uzayına $L^p(a,b;X)$

uzayı denir. $L^p(a,b;X)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c,d;X)$ ise, o zaman $u \in L^p(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.2.9. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X uzayına tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ *uzayı* denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.3. Sobolev Uzayı

Tanım 3.3.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 3.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|^{p}_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|^{2}_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Şimdi Sobolev Gömülme Teoremini ifade edelim.

Tanım 3.3.4. Sobolev gömülme teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^{j}(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi elde edilir.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

3.4. Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1 (**Cauchy Eşitsizliği).** Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.2 (**Young Eşitsizliği**). Eğer $\varepsilon > 0, a, b \in R, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Eğer

$$a = \delta X$$

ve

$$b = \frac{Y}{\delta}$$

olarak alınır ve

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\delta X \ \frac{Y}{\delta}\right| \leq \frac{|\delta X|^p}{p} + \frac{\left|\frac{Y}{\delta}\right|^q}{q},$$

$$|XY| \leq \frac{\delta^p |X|^p}{p} + \frac{\delta^{-q} |Y|^q}{q}$$

formatında da ifade edilir.

Lemma 3.4.3 (Hölder Eşitsizliği). $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L^q(\Omega)} = ess \sup |v|$ alınır. $p = q = 2$ durumunda bu eşitsizliği Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.4 (İnterpolasyon Eşitsizliği). $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.5 (Minkowski Eşitsizliği). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.6 (Kısmi İntegral Alma Formülleri). $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $v(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega}$ dır.

Lemma 3.4.7 Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel form).

$\eta(t)$ fonksiyonu negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitizliği sağlanıyorsa bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right)$$

olur.

Lemma 3.4.8 Gronwall Eşitsizliği (İntegral form).

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun.

O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

3.5. Daralma Dönüşüm Prensibi

Tanım 3.5.1. X banach uzayından D kümesinde tanımlanan bir dönüşüm

$$A : D \to X$$

olsun. $\forall x, y \in D$ olmak üzere

$$\|Ax - Ay\| \leq k \|x - y\|$$

$0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan k sayısı varsa A dönüşümüne daralma (büzülme) dönüşümü denir. k sayısına da daralma katsayısı denir. Aynı zamanda bu ifade "Lipschitz koşulu" olarakta adlandırılır.

Teorem 3.5.2. D kapalı bir küme olmak üzere

$$A : D \to D$$

daralma operatörü D yi D ye çevirir. Bu durumda A operatörünün D de sabit bir tek noktası x^* olsun. Yani;

$$x^* = Ax^*$$

denkleminin tek bir $x^* \in D$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_n = Ax_{n-1}, n = 1, 2, ...$$

formülü ile tanımlanmış (x_n) dizisinin limiti gibi bulunabilir. x_0, D kümesinin herhangi bir vektörü olmak üzere (x_n) dizisinin x^* yaklaşma hızına

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$

eşitsizliğiyle ulaşılabilir.

3.6. Logaritmik Sobolev Eşitsizliği

Bu tip eşitsizlikler matematiksel fizikte, özellikle kuantum alan teorisinde operatörlerin incelenmesinde önemli rol oynar. Bu alanda yapılan çalışmaların çoğu böyle eşitsizliklere denk olan operatör eşitsizlikler ile gelişmiştir. Gross (1975) tarafından ele alınan Logaritmik Sobolev eşitsizliğinin en belirgin özelliği R^n Öklid uzayında, standart Sobolev eşitsizliğinin aksine, n boyutunun sonsuza gitme durumunun eşitsizlikte aşikar olmamasıdır. Halbuki Sobolev eşitsizliğinde $q = \frac{np}{n-p}$ denklemi $n \to \infty$ için $q \to p$ olmasını gerektirir. Bu nedenle aşikardır. Yani Logaritmik Sobolev eşitsizliğindeki katsayılar boyuta bağlı olmadığından bu eşitsizlik sonsuz boyutta bile aşikar değildir. Bu bölümde amaç Klasik Sobolev eşitsizliği ile Logaritmik Sobolev eşitsziliği arasındaki bağıntıyı vermektedir. Şimdi bu teoremi ifade ve ispat edelim (Gross 1975, Güngör 1990).

Teorem 3.6.1 (Logaritmik Sobolev Eşitsizliği). v fonksiyonun R^n de bir Gauss ölçümü olsun. dx ise R^n de bir L^p ölçüm ve

$$dv(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\left|x^2\right|\right) dx$$

olsun. Böylece

$$\int_{R^n} |f(x)|^2 \ln |f(x)| \, dv(x) < \|f(x)\|^2 \ln \|f(x)\| + \frac{1}{2} \|\nabla f(x)\|^2 \tag{3.6.1.1}$$

dır (Gross 1975).

Tanım 3.6.2. Eğer N operatörü $L^2(v)$ de negatif olmayan kendine eş bir operatör ise Gauss Dirichlet formu

$$(Nf, f) = \int_{R^n} |\nabla f(x)|^2 \, dv(x) \tag{3.6.1.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dv(x)$ dir.

Sonuç 3.6.3. (3.6.1.2) ifadesinde $1 < p < \infty$ için $f = |g|^{\frac{p}{2}}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int\limits_{R^n} |g|^p \ln |g| \, dv < \|g\|_p^p \ln \|g\|_p + \frac{p}{2\,(p-1)} Re\left(Ng, sgn\left(g\,|g|^{p-1}\right)\right)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik kullanılırsa Logaritmik Sobolev eşitsizliğinin Nelson eşitsizliğine denk olduğu gösterilir. Nelson eşitsizliği $1 < q \leq p < \infty$ için e^{-tN} operatörünün ancak ve ancak $t \geq \ln\left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ olduğundan L^q dan L^p ye bir büzülme olduğunu gösterir.

Teorem 3.6.4 (Nelson Eşitsizliği). Eğer $1 < q \leq p < \infty$ ve $e^{-t} \geq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ise

$$\left\|e^{-tN}\right\| q, p \leq 1$$

dır. Burada $\|A\|\, q, p$ normu $L^q\,(u)$ dan $L^p\,(u)$ ya tanımlanmış bir operator normunu ifade etmektedir (Nelson 1966).

Teorem 3.6.5. $b_n = \alpha_n + \frac{n}{4}\,(1 + \ln \pi)$ ve $n \to \infty$ için $\alpha_n \to \frac{1}{2}$ olsun. Böylece

$$\int\limits_{R^n} |u|^2 \ln |u| \, dv\,(x) < \|u\|^2 \ln \|u\| + \|\nabla u\|^2 + b_n \|u\|^2$$

eşitsizliği sağlanır (Gross 1975).

İspat. İspatımız Sobolev eşitsizliğinin Nirenberg formu ve Hölder eşitsizliğinden faydalanılarak yapılacaktır. Sobolev eşitsizliğinin Nirenberg formu

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq \frac{n-1}{n-2} \prod_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^{\frac{1}{n}} \tag{3.6.1.3}$$

olmak üzere $2 \leq s \leq r$ için

$$\|v\|_s \leq \|v\|^{\frac{r^{-1}-s^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}}} \|v\|_r^{\frac{s^{-1}-2^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}}} \tag{3.6.1.4}$$

interpolasyon formülü olarak verilsin. $s = 2$ için (3.6.1.4) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. $\left(\int |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = a$ ve $\left(\int |v|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} = b$ olmak üzere (3.6.1.4) eşitsizliğinin $s.$ kuvveti alınır

$$\int |v|^s \, dx \leq a^{\frac{sr^{-1}-1}{r^{-1}-2^{-1}}} b^{\frac{1-s2^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}}}$$

ve s ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}\int |v|^s \ln|v|\,dx &\leq \frac{r^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}} a^{\frac{sr^{-1}-1}{r^{-1}-2^{-1}}} b^{\frac{1-s2^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}}} \ln a \\ &\quad -\frac{2^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}} b^{\frac{1-s2^{-1}}{r^{-1}-2^{-1}}} a^{\frac{sr^{-1}-1}{r^{-1}-2^{-1}}} \ln b \end{aligned} \tag{3.6.1.5}$$

olarak elde edilir. (3.6.1.5) eşitsziliğinde $s=2$ yazılırsa $r>2$ için

$$\int |v|^2 \ln|v|\,dx \leq \frac{2^{-1}}{2^{-1}-r^{-1}} \|v\|^2 \ln \|v\|_r - \frac{r^{-1}}{2^{-1}-r^{-1}} \|v\|^2 \ln\|v\|$$

olur.

$\alpha_n = \frac{n}{2} + \ln\frac{n-1}{n-2}$ olmak üzere $r=\frac{2n}{n-2}$ alınır ve (3.6.1.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int |v|^2 \ln|v|\,dx &\leq \frac{n}{2}\|v\|^2 \ln\frac{n-1}{n-2}\left(\frac{n-1}{n-2}\prod_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^{\frac{1}{n}}\right) \\ &\quad -\left(\frac{n}{2}-1\right)\|v\|^2\ln\|v\| \\ &= \alpha_n\|v\|^2 + \|v\|^2\ln\|v\| \\ &\quad +\frac{1}{4}\|v\|^2\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^2}{\|v\|^2}\right)\end{aligned} \tag{3.6.1.6}$$

eşitsizliğine dönüşür. Eşitsizliği $v(x)$ Gauss ölçümüne göre ifade etmek için $w_n = (2\pi)^{-\frac{n}{4}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right.$ $dv(x) = w_n^2 dx$ iken

$$v = Uu = uw_n$$

birimsel dönüşümünü uygulayalım. Bunun sonucunda

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^2 = \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\left(x_j^2 u, u\right)$$

olduğunu görebiliriz. Sağ taraftaki ifadeler $x>0$ için $\ln x \leq x-1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|v\|^2\ln\left(\frac{\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^2}{\|v\|^2}\right) &\leq \|v\|^2\ln\frac{1}{2} + \left(2\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|^2 - \|v\|^2\right) \\ &= \|u\|^2\ln\frac{1}{2} + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 - \frac{1}{2}\left(x_j^2 u, u\right)\end{aligned}$$

olarak yazılır. Ayrıca diğer yandan

$$\begin{aligned}\int |v|^2 \ln |v| \, dx &= \int |u|^2 \ln |uw_n| \, dv(x) \\ &= \int |u|^2 \ln |u| \, dv(x) - \frac{n}{4} \ln(2\pi) \|u\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{4} \int |u|^2 |x|^2 \, dv(x) \end{aligned} \tag{3.6.1.7}$$

eşitliği kullanılırsa (3.6.1.6) ifadesi

$$\begin{aligned}\int |u|^2 \ln |u| \, dv(x) &\leq \frac{n}{4} \ln(2\pi) \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int |u|^2 |x|^2 \, dv(x) \\ &\quad +\alpha_n \|u\|^2 + \frac{n}{4} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \|u\|^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(Nu, u) - \frac{1}{8} \int |u|^2 |x|^2 \, dv(x) \\ &\quad + \|u\|^2 \ln \|u\| \\ &= \left(\alpha_n + \frac{n}{4} \ln(\pi)\right) \|u\|^2 + \frac{1}{2}(Nu, u) \\ &\quad +\frac{1}{8} \int |u|^2 |x|^2 \, dv(x) + \|u\|^2 \ln \|u\| \end{aligned} \tag{3.6.1.8}$$

elde edilir. Bunun yanında $K_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $K_j^* = -\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j$ operatörleri $x_j u = \left(K_j + K_j^*\right) u$ bağıntısı $K_j K_j^* = K_j^* K_j + I$ eşitsizliği kullanıldığında sağlanır öyle ki

$$\begin{aligned}\|x_j u\|^2 &\leq \left(\|K_j u\| + \left\|K_j^* u\right\|\right)^2 \\ &\leq 2\|K_j u\|^2 + 2\left\|K_j^* u\right\|^2 \\ &= 4\|K_j u\|^2 + 2\|u\|^2 \end{aligned}$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} \int |u|^2 |x|^2 \, dv(x) &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \|K_j u\|^2 + \frac{n}{4} \|u\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(Nu, u) + \frac{n}{4} \|u\|^2 \end{aligned} \tag{3.6.1.9}$$

olarak elde edilir. (3.6.1.9) ifadesi (3.6.1.8) da yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

3.7. Logaritmik Gronwall Eşitsizliği

Logaritmik Gronwall eşitsizliği, R^2 de Euler denklemi üzerinde matematiksel analizle ilgili çalışmaların temelini atan Wolibner (1933) in çalışmasında ele alınmıştır. Ayrıca Cazaneva ve Haraux (1980), Brezis ve Gallouet in (1980) çalışmalarında da ele alınmıştır. Tezimizde eşitsizliğin ispatı yapılırken Giga ve ark. (2001) tarafından yayınlanan çalışmadan faydalanılmıştır.

Lemma 3.7.1. Negatif olmayan $a(t,s)$ fonksiyonu $\{(t,s) : 0 \leq s < t \leq T\}$ de sürekli olsun ve bazı $T > 0$ ile tüm $(0,T]$ için $a(t,.) \in L^1(0,t)$ sağlansın. Kabul edelim ki ε_0 pozitif sabiti ve $A \in (0,1)$ vardır öyle ki

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{t-\varepsilon_0}^{t} a(t,s)\, ds \leq 1 - A \tag{3.7.1.1}$$

dır. Eğer tüm $t \in [0,T]$ için pozitif sabitler α, β ve negatif olmayan bir fonksiyon $f \in C([0,T])$ olmak üzere tüm $t \in [0,T]$ için

$$f(t) \leq \alpha + \int_0^t a(t,s)\, f(s)\, ds + \beta \int_0^t [1 + \log(1 + f(s))]\, f(s)\, ds \tag{3.7.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece tüm $t \in [0,T]$ için

$$\gamma = \sup_{0\leq t\leq T} \left[\sup_{0\leq s\leq t-\varepsilon_0} a(t,s) \right]$$

olarak tanımlanmış pozitif sabit olmak üzere

$$f(t) \leq \begin{cases} \frac{\alpha}{A} e^{\frac{\gamma t}{A}}, & \beta = 0, a(t,s) \neq 0 \\ -1 + \frac{[(1+\alpha)e]^{\exp(\beta t)}}{e}, & \beta \geq 0, a(t,s) = 0 \\ -1 + \frac{\left[\left(1+\frac{\alpha}{A}\right)e\right]^{\exp\left(\frac{(\beta+\gamma)t}{A}\right)}}{e}, & \beta > 0, a(t,s) \neq 0 \end{cases}$$

sağlanır (Cazaneva ve Haraux 1980).

İspat.

(i) $a(t,s) = 0$ durumu için

(3.7.1.2) ifadesinin sağ tarafındaki kısımda $a(t,s) = 0$ alınsın ve bu kısım $F(t)$ fonk-

siyonu ile tanımlansın. $F'(t)$ nin hesaplanması ve (3.7.1.2) nin kullanılmasıyla

$$\int_0^t \frac{F'(s)}{[1+\log(1+F(s))](1+F(s))} ds < \beta t$$

elde edilir. İntegral değişkenini $y = 1+\log(1+F(s))$ olarak değiştirip integral alırsak tüm $t \in [0,T]$ için

$$f(t) \leq F(t) \leq -1 + \frac{[(1+\alpha)e]^{\exp(\beta t)}}{e} \tag{3.7.1.3}$$

olarak elde edilir.

(ii) $a(t,s) \neq 0$ durumu için

(3.7.1.2) eşitsizliği $g(t) = \sup_{0\leq\theta\leq t} f(\theta)$ alınıp (3.7.1.1) eşitsizliği kullanıldığında fonksiyonun

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \alpha + \int_{t-\varepsilon_0}^{t} a(t,s)\,ds g(t) + \int_0^{t-\varepsilon_0} a(t,s)\,g(s)\,ds \\ &\quad + \beta \int_0^t [1+\log(1+g(s))]\,g(s)\,ds \\ &\leq \alpha + (1-A)\,g(t) + \int_0^{t-\varepsilon_0} \gamma g(s)\,ds \\ &\quad + \beta \int_0^t [1+\log(1+g(s))]\,g(s)\,ds \\ &\leq \alpha + (1-A)\,g(t) + \int_0^t [(\beta+\gamma) + \beta\log(1+g(s))]\,g(s)\,ds \end{aligned}$$

sağladığını gösterir. Yani,

$$g(t) \leq \frac{\alpha}{A} + \frac{1}{A}\int_0^t [(\beta+\gamma) + \beta\log(1+g(s))]\,g(s)\,ds \tag{3.7.1.4}$$

dır. $\beta \neq 0$ şartı ile (3.7.1.3) ifadesi (3.7.1.4) eşitsizliğine uygulanırsa $f(t) \leq g(t)$ olduğundan önermenin doğruluğu anlaşılır. $\beta = 0$ şartı altından önermenin doğruluğu açık bir şekilde elde edilir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

3.8. Aubin-Lions Lemması

Aubin-Lions lemması $L^p(0,T;V)$ uzayında bir fonksiyon dizisinin kompakt olduğu durumların belirlenmesini sağlar. Genel olarak sonlu boyutlu uzayda evolüsyon denklemleri çalışırken, adi diferansiyel denklem sistemleri için Cauchy-Lipschitz veya Carathéodory gibi varlık teoremleri ile çözümleri elde edilen sonlu boyutlu alt uzaylarla ile ilgili yaklaşık çözüm dizisi oluşturulur. Daha sonra $L^p(0,T;X)$ uzayında sınırlı olması ile önsel tahminler ve yaklaşık problemin kullanılmasıyla zamana göre türevlerinin de $L^q(0,T;Y)$ de sınırlı olduğu fonksiyon dizisi elde edilir. Kompaktlık yaklaşık çözümler kümesinin $L^p(0,T;V)$ kümesinde güçlü yakınsak dizilerinin belirlenmesi için gereklidir. Böylece evolüsyon denklemlerin orijinal çözümlerinin varlığı bulunabilir. Aubin-Lions Lemması X, Y, V ve p, q üzerinde yaklaşık problemin çözüm dizisinin $L^p(0,T;V)$ cinsinden nispeten kompakt olduğu koşulları oluşturur (Dubinskiĭ 1965).

Teorem 3.8.1. X, V ve Y uzayları Banach uzayı olsun. $X \hookrightarrow V$ kompakt ve $V \hookrightarrow Y$ sürekli gömülmeleri ve $1 \leq p < \infty$ ve $q = 1$ veya $p = \infty$ ve $q > 1$ şartları sağlansın. U kümesi $L^p(0,T;X)$ de sınırlı ve $\frac{\partial U}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} : u \in U \right\}$, $L^q(0,T,Y)$ de sınırlı ise U kümesi $L^p(0,T;V)$ de kompaktır (Aubin 1963, Lions 1969).

Teorem 3.8.2 (Aubin-Lions-Dubinskiĭ). V ve Y uzayları Banach uzayı olsun. M, V Banach uzayında $M \cap Y \neq \varnothing$ olmak üzere negatif yarınormlu bir koni olsun. $1 \leq p \leq \infty$ olarak alınırsa, kabul edelim ki;

(i) $M \hookrightarrow V$ kompakt,

(ii) Tüm $(w_n) \subset V \cap Y$ için V de $w_n \to w$, $n \to \infty$ iken $w = 0$ sağlanırsa Y de $w_n \to 0$,

(iii) $L^p(0,T;M)$ de $U \subset L^p(0,T;M \cap Y)$ sınırlıdır,

(iv) $u \in U$ da $h \to 0$ iken $\|\sigma_h u - u\|_{L^p(0,T-h;Y)} \to 0$ düzgündür.

Böylece $L^p(0,T;V)$ de U kompaktır (Chen ve ark. 2014).

3.9. Potansiyel Kuyu Metodu

Sattinger (1968) yayınladığı çalışmasında

$$u_{tt} - \Delta u + f(x,u) = 0 \tag{3.9.1}$$

denkleminin global zayıf çözümünü $f(x,u)$ fonksiyonuna bazı koşullar ekleyerek ifade etti. Payne ve Sattinger (1975) tarafından geliştirilen potansiyel kuyu metodu ile kısmi

diferansiyel denklemin global varlığı çalışıldı. Bu yöntem denklemlerin varlığının ispatında kullanılan önemli bir metottur. Bir diferansiyel denklemin toplam enerjisi daha öncede belirttiğimiz gibi kinetik ve potansiyel enerjilerden oluşmaktadır. Potansiyel enerjinin skaler fonksiyonları bulunduğu küme boyunca incelenirse, potansiyel enerjide çukur veya kuyu olarak adlandırabileceğimiz bir d yüksekliği olduğunu keşfedebiliriz. d yüksekliği kesinlikle pozitif olduğundan, kuyuda yer alan başlangıç verilerine bağlı çözümler için, çözümün potansiyel enerjisinin kuyuyu asla aşamayacağını görebiliriz. Genel olarak, kaynak terimden gelen enerjinin toplam enerjinin büyüklüğünün sonlu zamanda sonsuza gitmesine (blow up) neden olabilir. Ancak kuyunun büyük bir bölümü zamanla sınırlı olan potansiyel enerji ile sınırlı kalır. Sonuç olarak, çözümün toplam enerjisi herhangi bir zaman aralığında sınırlı kalır ve bu da çözümün global varlığını gösterir.

Potansiyel kuyu metodunun dalga denklemlerinde elde edilişini açıklamak için, öncelikle (3.9.1) denkleminin tek boyutlu modelini $x \in R$ olmak üzere

$$x'' = -x + f(x) \tag{3.9.2}$$

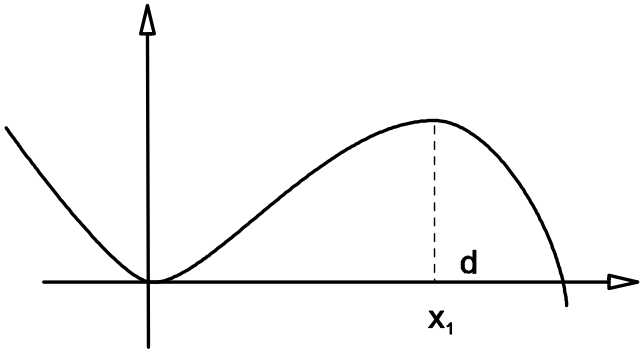
olarak ele alalım. Burada boyut mekanizmada bulunan tüm bileşenlerin konumunu belirlemek için gerekli olan parametre sayısı olmak üzere (3.9.2) denklemi bir boyutlu mekanik bir sistemi tanımlarken, (3.9.1) sonsuz boyutlu bir sistem olarak düşünülebilir. Kabul edelim ki

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = F(x)$$

olsun. (3.9.2) denkleminin potansiyel enerjisi

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - F(x)$$

dir. V aşağıdaki şekildeki görüldüğü gibi



$x = 0$ noktasında lokal minimum ve $x = x_1$ noktasında lokal maksimuma sahiptir. Ayrıca

$$W = \{x : V(x) < d, x < x_1\}$$

kümesi orijinide içine alan bir aralık olan potansiyel derinliği tanımlar. Toplam enerji

$$E = \frac{(x')^2}{2} + V(x)$$

olsun. $E(0) < d$ ve $x(0) \in W$ olduğu açıktır. Böylece enerjinin korunumu yasasından her $t > 0$ için $x(0) \in W$ dir. Diğer taraftan $E(0) < d$ ve $x > x_1$ ise böylece her $t > 0$ için $x(t) > x_1$. Çözüm W (potansiyel kuyu) yu asla aşamaz bunun gerçekleşmesi için toplam enerjinin d den büyük olması gerekir. Bazı $c > 0$ ve $p > 1$ değerleri için, herhangi bir zamanda $x > x_1$ iken

$$xf(x) > c|x|^{p+1}$$

varsayımının altında kolayca görülür ki, $x > x_1$ için (3.9.2) denklemi kesinlikle doğrusal değildir. Sonra, bu varsayımlar altında, sonlu bir zaman için, $x(t) \to +\infty$ olduğu kolayca ispatlanır. Bu sonuç, global sınırlı çözümlere sahip (3.9.2) denklemi için başlangıç verilerinin zamana bağlı değişimi ile ilgililidir. Bu sonuç, sonlu bir zamanda çözümün sonsuza gitmesi eğilimi açısından etkilidir.

Bu sonuçları sonsuz boyutlu (3.9.1) durumuna genişleteceğiz. (3.9.1) e bağlı potansiyel enerji

$$J(u) = \int_D \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} - F(u) \right) dx$$

fonksiyonelidir, burada

$$F(u) = \int_0^u f(s)\, ds$$

ve $D,\ R^n$ de düzgün sınırlandırılmış bir bölgedir. Şimdi J fonksiyonelinin orijinde minimum değeri ile ilişkili bir "potansiyel kuyu" oluşturacağız. Kabul edelim ki J fonksiyoneli tüm $u \in H_0^1$ için tanımlı olsun. J başlangıç noktasında minimuma sahip olduğundan, $J(\lambda u)$ fonksiyonu λ nın orijin komşuluğunda $\lambda > 0$ için fonksiyon artandır. $J(\lambda u)$ fonksiyonun azalmaya başladığı ilk λ değeri $\lambda_1 > 0$ olsun. Potansiyel kuyunun derinliği

$$d = \inf_{u \in H_0^1} J(\lambda_1 u)$$

olarak tanımlansın. d değeri $u_0 = 0$ durumunun bulunduğu bölgenin dışında yer alan en düşük geçiş değeri olarak tanımlanabilir. d nin $0 \leq d \leq \infty$ olduğu açıktır. Eğer $d > 0$ ise potansiyel kuyu W

$$W = \left\{u : u \in H_0^1, 0 \leq J(\lambda u) < d, 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

olarak tanımlanır. Böylece $u \in W$ için $J(u) < d$, dahası $0 \leq \lambda \leq 1$ için λu formundaki tüm noktalar potansiyel kuyu derinlik seviyesi d nin altında kalır.

3.10. Galerkin Yaklaşık Çözümler Metodu

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri incelemek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin, Lions (1969) tarafından yayınlanan çalışma farklı yöntemlerin ele alındığı önemli bir çalışmadır. Bu kısımda Galerkin metodununun nasıl uygulanacağını basit bir örnekle açıklamaya çalışacağız.

$H \subset V$, V kümesi H ta yoğun ve sürekli gömülme özelliğine sahip olmak üzere H ve V iki Hilbert uzayı olsun.

İkinci mertebeden evolüsyon denkleminin Cauchy problemini

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - A(t)u(t) = f(t), \ t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.10.1}$$

u ve f olarak verilmiş bilinmeyen fonksiyonları, sırasıyla, $[0,T] \subset R$ kapalı aralığından reel değerli H uzayına bir dönüşüm olarak ele alalım. H enerji uzayı $H \subset V$ şartına uygun olmak üzere $A(t)$ sınırlı doğrusal operatördür.

V de $a(t;.,.)$ bilineer sürekli olmak üzere her $u, v \in V$ için $(A(t)u(t), v(t))$ iç çarpımı için

$$a(t; u(t), v(t)) = (A(t)u(t), v(t))$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.10.1) problemi $u(t)$ problemin çözümü olmak üzere

$$\begin{cases} u \in C([0,T]; V), u_t \in C([0,T]; H) \\ (u_{tt}(t), v) + a(t; u(t), v) = (f, v), \ D'(0,T) \end{cases}$$

olarak ifade edilsin. Bu problem Faedo-Galerkin metodu ile çözülebilir.

V_m, d_m boyutuna sahip V nin bir alt uzayı olsun. $\{w_{jm}\}$, V_m nin bir bazı olarak alınsın öyle ki;

(i) $\forall m \in N$ için $V_m \subset V$ $(boy V_m < \infty)$,

(ii) $V_m \to V$ öyle ki V de yoğun alt uzay olan ϑ uzayı vardır ve tüm $v \in \vartheta$ için V de $\{u_m\}_{m\in N} \in V_m$ dizisi ve $u_m \to u$ elde edilebilir.

(iii) $V_m \subset V_{m+1}$ ve $\overline{\bigcup_{m\in N} V_m} = V$.

Yaklaşık problemin çözümünü u_m olarak tanımlanırsa V de $m \to \infty$ için

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^{d_m} a_j(t)\, w_{jm} \to u_0$$

ve

$$u_{mt}(0) = \sum_{j=1}^{d_m} b_j(t)\, w_{jm} \to u_1$$

iken

$$\begin{cases} u_m(t) = \sum_{j=1}^{dm} g_j(t) w_{jm}(x) \\ u_m \in C([0,T]; V_m),\ u_{mt} C([0,T]; V_m),\ u_m \in L^2([0,T]; V_m) \\ (u_{mtt}, w_{jm}) + a(t; u_m(t), w_{jm}) = (f, w_{jm}),\ 1 \le j \le d_m \\ u_m(0) = \sum_{j=1}^{d_m} a_j(t)\, w_{jm},\ \ u_{mt}(0) = \sum_{j=1}^{d_m} b_j(t)\, w_{jm} \end{cases} \tag{3.10.2}$$

dır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, (3.10.2) sistemi doğrusal olmayan terimler düzgün olduğundan Zorn lemması kullanılarak maksimal bir $[0, t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Bir sonraki adımda, çözüm için bazı kestirimler elde etmeye çalışacağız. Böylece tüm $t > 0$ için tanımlı bir çözüm elde etmek için aralık $[0, t_m)$ dışına genişletilebilir. $0 \le t \le T$ için

$$\|u_m\|^2 + \|u_{mt}\|^2 \le C\left(\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds\right)$$

kestirimi ve Gronwall eşitsizliği kullanılırsa (3.10.2) probleminin çözümü u_m in (3.10.1) probleminin çözümü u ya yakınsadığı görülür. Bu şekilde u çözümünün tekliği kanıtlanmış olur (Benyoub 2018, Remil 2018).

3.11. Çözümlerin Üstel Azalması

Enerjinin azalmasını tahmin etmek için Komornik ve Zuazua (1990), Nicaise ve Pignotti (2008) tarafından tanıtılan bazı temel integral eşitsizlikleri ele alacağız.

Lemma 3.11.1. $E : R^+ \to R^+$ artmayan bir fonksiyon olsun ve $A > 0$ pozitif bir sabit vardır öyle ki $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{A} E(t) \tag{3.11.1}$$

olduğunu varsayalım. Böylece $\forall t \geq 0$ için

$$E(t) \leq E(0)\, e^{1-At} \tag{3.11.2}$$

olur (Komornik ve Zuazua 1990, Komornik 1994).

İspat. $t \leq \frac{1}{A}$ için (3.11.2) sağlandığı açıktır. Bu $E(t)$ fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olmasından kaynaklanmaktır. $t > \frac{1}{A}$ için (3.11.2) ifadesinin ispatını göstereceğiz. $h : R^+ \to R^+$olacak şekilde

$$h(t) = \int_t^\infty E(\tau)\, d\tau$$

olarak tanımlansın. Fonksiyon artmayan ve lokal süreklidir. $h(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli alınır ve (3.11.1) eşitsiziliği kullanılırsa $\forall t \geq 0$ için

$$h'(t) + Ah(t) \leq 0$$

olarak bulunur. Şimdi

$$T_0 = \sup(t, h(t) > 0)$$

olarak alınsın. Tüm $t < T_0$ için

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq -A$$

olur. Böylece $0 \leq t \leq T_0$ için

$$h(0) \leq e^{-At} \leq \frac{1}{A} E(0)\, e^{-At}$$

dır.

$h(t) = 0$ olduğundan $t > T_0$ ise, tüm $t \in R^+$ için aslında bu eşitsizlik sağlanır.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $E(t)$ fonksiyonu pozitif ve azalan iken $\forall t \geq \varepsilon$ için

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t-\varepsilon} E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} h(t-\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{A\varepsilon} E(0)\, e^{\varepsilon t} e^{-At} \end{aligned}$$

olduğu sonucuna varılır. $\varepsilon = \frac{1}{A}$ olarak seçilirse $\forall t \geq 0$ için

$$E(t) \leq E(0)\, e^{1-At}$$

olur.

3.12. Çözümlerin Üstel Büyümesi

Bu model ilk olarak kötü konulmuş bir probleme Pucci (1955), John (1955), Payne (1960) tarafında uygulanmıştır (Ames ve Starughan, 1997). Çözümlerin patlama olayı genel olarak sonlu zamanda çözümlerin sonsuza ıraksaması ($t \to T^-$ iken $u \to \infty$) olarak düşünülmesine karşın bazı olaylarda çözümler sonsuz zamanda sonsuza ıraksayabilir ($t \to \infty$ iken $u \to \infty$). Bu olaya sonsuzdaki blow up veya çözümlerin üstel büyümesi denir. Çözümlerin üstel büyümesi ile ilgili önemli bir metot logaritmik konvekslik metodudur. Bu metot konkavlık metodundaki

$$F''(t)\, F(t) - (1+\alpha)\left(F'(t)\right)^2 \geq 0 \tag{3.12.1}$$

koşulununun $\alpha \to 0$ için limiti olarak düşünülebilir. Bu durumda (3.12.1) eşitsizliği

$$F''(t)\, F(t) - \left(F'(t)\right)^2 \geq 0 \tag{3.12.2}$$

eşitsizliğine dönüşür. $F(t) > 0$ için (3.12.2) ifadesi $F^2(t)$ ile bölünürse

$$\frac{F''(t)\, F(t) - \left(F'(t)\right)^2}{F^2(t)} \geq 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\ln F(t)\right] \geq 0$$

elde edilir. Buradan $F(t)$ nin t değişkenine bağlı logaritmik konveks bir fonksiyon olduğu

görülür. Bu ifadenin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$F(t) \geq F(0)\, e^{\frac{F'(0)t}{F(0)}}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $t \to \infty$ için limit alınırsa $F(t) \to \infty$ olur.

Çözümlerin patlaması ile ilgili daha detaylı bilgiler için Pişkin (2021) e bakılabilir.

3.13. Logaritmik Kaynak Terime Sahip Denklem Modellemesi

Logaritmik terimle ilgili ilk çalışmanın Bialynicki-Birula ve Mycielski (1975) tarafından ortaya konulduğu görülmektedir. Bu çalışmadan faydalanarak logaritmik kaynak terime sahip denklemlerin modellemesi ele alınacaktır.

Öncelikle doğrusal olmayan Schrödinger denklemini (NLS) ele alalım. NLS, özellikle Zakharov ve Shabat (1972) çalışmasında integrallenebilir olduğu gösterildiğinden beri popülaritesi artan klasik bir alan denklemi olmuştur. Fizikte birçok uygulaması olmasına rağmen, doğrusal Schrödinger denkleminin aksine bir kuantum durumunun evolüsyonunu modellemez (Kalantarov ve Özsarı 2016). NLS denklemi fizikte optik fiberlerde ışığın iletimi, kuantum mekaniğinde serbest enerji seviyeleri ve parçacıkların konumlarını, sıcak plazmalardaki Langmuir dalgalarını, atom kuramlarında ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve moment hesaplamalarının modellemesinde kullanılmıştır (Sulem ve Sulem 2007). NLS ile ilgili çalışmalar R^n deki Cauchy problemi ve genel bir bölge $\Omega \subset R^n$ üzerinde tanımlanan başlangıç-sınır değer problemleri olmak üzere iki kategoriye ayrılır. Bu ayrım, sınırlı alan yerine R^n üzerinde tanımlanan Schrödinger operatörünün niteliksel özelliklerindeki büyük farklılıklar nedeniyle oldukça doğaldır. Gerçekten de, R^n deki Schrödinger denkleminin çözümlerinin düzgün özellikleri iyi bilinirken, aynı etki sınırlı alanlar göz önüne alındığında bilinmemektedir (Özsarı ve ark. 2011).

NLS denklemi

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \left[-\frac{h^2}{2m}\Delta + U(r) + F\left(|\Psi|^2\right)\right]\Psi(r,t) \tag{3.13.1}$$

formunda ele alınmaktadır. Burada r tek bir parçacığın veya birkaç vektörün konfigürasyon uzayında konum vektörünü ifade etmektedir. Bu parçacıklar farklı kütlelere sahipse kinetik enerjide aynı katsayıyı elde etmek için konum vektörlerini yeniden ölçeklendirmek gerekir. F fonksiyonu $|\Psi(r,t)|^2$ değişkenine bağlı reel değerli fonksiyondur.

Ayrıca, stres tensörü (gerilimi)

$$T_{ij} = -\left|\Psi\right|^2 \left[\left(\frac{h^2}{4m}\right)\nabla_i\nabla_j \ln\left|\Psi\right|^2 + \delta_{ij}\left(G-F\right)\right] + m\rho^{-1}j_i j_j \tag{3.13.2}$$

olmak üzere yoğunluk, akım ve bu ifadelerin zamana bağlı değişimi

$$\rho\left(r,t\right) = \left|\Psi\left(r,t\right)\right|^2, \tag{3.13.3}$$

$$j\left(r,t\right) = \frac{h}{2mi}\left[\Psi^*\left(r,t\right)\nabla\Psi\left(r,t\right) - \nabla\Psi^*\left(r,t\right)\Psi\left(r,t\right)\right], \tag{3.13.4}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla j, \tag{3.13.5}$$

$$m\frac{\partial j_k}{\partial t} = \nabla_i T_{ik} - \rho\nabla_k U \tag{3.13.6}$$

olarak tanımlanmıştır.

ℓ (Lagrange yoğunluk) ifadesi

$$\begin{aligned}\ell\left(r,t\right) \;=\; & \frac{ih}{2}\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \partial_t\Psi^*\Psi\right) - \frac{h^2}{2m}\left(\nabla\Psi\right)^*\left(\nabla\Psi\right) \\ & U\Psi^*\Psi - G\left(\left|\Psi\right|^2\right)\Psi^*\Psi\end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Denklemin toplam enerjisi

$$E = \frac{h^2}{2m}\left(\nabla\Psi,\nabla\Psi\right) + \left(\Psi,\left(U + G\left(\left|\Psi\right|^2\right) + const\right),\Psi\right) \tag{3.13.7}$$

olsun.

(3.13.1) denkleminin çözümleri üç temel fizik kuralından etkilenmektedir. Bu kurallar; birbirinden bağımsız alt sistemlerin ayrılabilirliği, sabit durumlar için Planck ilişkisi ve Poincare anlamında kararlı çözümlerin varlığıdır.

Birbirinden bağımsız alt sistemlerin ayrılabilirliği, alt sistemlerin zamana bağlı değişiminin bağımsız olduğu anlamına gelir. Yani

$$U\left(x_1, x_2 ... x_n\right) = U\left(x_1, ... x_k\right) + U\left(x_{k+1}, ... x_n\right)$$

olmak üzere tüm sistem için doğrusal olmayan denklemin çözümü, alt sistemler için doğ-

rusal olmayan denklemlerin rastgele iki çözümünün çarpımı alınarak oluşturulabilir.

(3.13.1) denklemi dalga denklemi olmak üzere harmonik fonksiyon

$$\Psi(r,t) = e^{i\omega t}\Psi(r)$$

ile zamana bağlıysa bu duruma durağanlık denir. Tüm durağan durumların Planck ilişkisine uygun olarak sağlandığını göstermek zorundayız.

Bir çözümün Poincare anlamında kararlılığı ile bu çözümün (3.13.2) te verilen formüle uygun hesaplanan gerilim stresinin yok olduğunu ifade ediyoruz. Bu anlamda $U = 0$ kararlı denklem çözümünün varlığına ihtiyaç duyacağız.

Üst tarafta ifade ettiğimiz üç gerekliliğin (3.13.1) denklem tiplerinde sağlandığı gibi, a uzunluk boyutlu b enerji boyutlu keyfi reel bir sabitler olmak üzere logaritmik kaynak terime sahip

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\phi(r,t) = \left[-\frac{h^2}{2m}\Delta + U(r) - b\ln\left(|\phi|^2 a^n\right)\right]\phi(r,t) \tag{3.13.8}$$

doğrusal olmayan denklemde de sağlanmıştır. a sabitinin gerçek değerinin herhangi bir anlık fiziksel önemi yoktur. a sabitindeki değişimler U potansiyel enerjisine sabitler eklenerek telafi edilebilir. Logaritmik terime sahip denklemin enerjisi (3.13.7) dekine benzer şekilde

$$E = \frac{h^2}{2m}(\nabla\phi, \nabla\phi) + (\phi, U, \phi) - b\left(\phi, \ln\left(|\phi|^2 a^n\right), \phi\right) \tag{3.13.9}$$

olarak hesaplanır. (3.13.7) ifadesinde yer alan keyfi sabit $E = h\omega$ ilişkisini sağlayacak şekilde b sabiti olarak seçilebilir. b sabitinin fizksel anlamını bulmak için,

$$\phi(r,t) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(r - r_1, t) + \phi(r - r_2, t)\right)$$

normu korunurken, serbest bir sistem için rastgele bir dalga fonksiyonunun, ilk dalga fonksiyonu ile aynı formun üst üste binmeyen iki parçaya bölündüğünü düşünelim. (3.13.9) ifadesinden toplam enerji

$$\Delta E = b\ln 2$$

olarak elde edilir. Böylece b yarılma enerjisi olur. Bu nedenle b negatifse, enerji alttan sınırlı olmayacaktır. Bu nedenle sadece $b > 0$ durumu ele alınır. Bu durumda (3.13.9) te-

riminin son terimi olasılık dağılımı $|\phi(r,t)|^2$ nin entropisi olarak yorumlanır. Logarithmik Sobolev eşitsizliğinin kullanılmasıyla pozitif b için enerjinin $E \geq E_0(p)$ olacak şekilde alt sınırı vardır öyle ki p ortalama momentum ve $l^2 = \frac{h^2}{2m}$ olmak üzere

$$E_0(p) = \frac{p^2}{2m} + nb\left(1 - \ln\left(\frac{a}{l\sqrt{\pi}}\right)\right)$$

dir. ϕ_i doğrusal olmayan bir terimle birbirine bağlanmış dalga alanları olmak üzere $n = 3$ için (3.13.9) denkleminin en basit genellemesi

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\phi(r,t) = \left[-\frac{h^2}{2m}\Delta + U(r) - b\ln\left(\sum_i |\phi_i|^2 a^3\right)\right]\phi_i(r,t)$$

dır. ϕ_i nin k boyutlarında dönüşümleri mevcutsa bu denklemler üniter grup altında değişmezdir. $k = 2$ durumunda ϕ_1 ve ϕ_2 iki dalga alanını, $\frac{1}{2}$ devri için dalga fonksiyonunun iki devir bileşeni olarak yorumlayabiliriz. Vektör potansiyeli A yı (3.13.9) denklemine

$$\frac{h}{i}\nabla \to \frac{h}{i}\nabla - \frac{e}{c}A$$

olarak yerleştirir ve manyetik moment etkileşim terimi ($\mu\sigma B$) eklenirse logaritmik terimli Pauli denklemi elde edilir.

3.14. Kirchhoff Denklem Modellemesi

Kirchhoff modeli 1883 yılında Gustav Kirchhoff tarafından ortaya konmuştur. Şimdi bu denklemin modellemesini ifade edelim (Yusuf 2018). $[\alpha_0, \beta_0]$ durağan anda telin gerilimi τ_0 olarak alınsın. $[\alpha(t), \beta(t)]$, başlangıç pozisyonunun deformasyonunu ifade eder. $[\alpha(t), \beta(t)]$ nin gerilim eğrisine bağlı olarak $u(x,t)$ gerilimi ise $\tau(t)$ ile gösterilmiştir. Buna bağlı oarak $[\alpha(t), \beta(t)]$ durumunda telin gerilimi $\tau^*(t)$ alınsın. $u(x,t)$ eğrisinin her noktasındaki gerilimi o noktada bu eğrinin teğet vektörünün yönü ve $\tau(t)$ modülünü barındıran bir vektöre sahiptir. θ, 0x koordinatının teğet vektörü ile açısı olmak üzere, vektörün dikey bileşeni

$$\tau(t)\sin\theta$$

dır. Elastisite teorisinin küçük deformasyonlar ilkesinden gerilimin yatay bileşenini dikkate almıyoruz. Bu nedenle $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ olarak yazılabilir. Böylece dikey bileşen

$\overrightarrow{\tau}(t)$

$$\tau(t)\sin\theta = \tau(t)\tan\theta = \tau(t)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.14.1}$$

dır. Gerilimin değişimi bir kuvvet oluşturur ve Newton'un ikinci Yasası'ndan $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u(x,t)$ nin deformasyon ivmesi ve m telin kütlesi olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\tau(t)\sin\theta) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.14.2}$$

olur. Böylece (3.14.1) ve (3.14.2) ifadelerinden

$$\tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.14.3}$$

elde edilir.

Şimdi $\tau(t)$ gerilimini hesaplamaya çalışacağız. Aslında, Hooke Yasasına göre $[\alpha(t),\beta(t)]$ nin uzunluğu $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ ve $[\alpha_0,\beta_0]$ nin uzunluğu $\gamma_0 = \gamma(0) = \beta_0 - \alpha_0$ olmak üzere

$$\tau^*(t) - \tau_0 = k\frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \tag{3.14.4}$$

olarak elde edilir. $u(x,t)$ eğri yayının uzunluğu $S(t)$ olarak alınırsa $[\alpha(t),\beta(t)]$ deformasyonunda

$$S(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx$$

dır. Küçük Deformasyon hipotezinden $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$ olarak alınabilir. Böylece

$$S(t) - \gamma(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx$$

dır. Hooke Yasasına göre

$$\tau(t) - \tau^*(t) = k\frac{S(t) - \gamma(t)}{\gamma(t)}$$

$$\tau(t) - \tau^*(t) = \frac{k}{2\gamma(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.14.5}$$

olarak elde edilir.

(3.1.4) ve (3.14.5) ifadelerinden $\tau\left(t\right)$ gerilimi

$$\tau\left(t\right)=\tau_0+k\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma_0}{\gamma_0}+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx \tag{3.14.6}$$

olarak bulunur. Elde edilen (3.14.6) ifadesi (3.14.3) de yerine yazılır ve m ile bölünürse

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\left(\frac{\tau_0}{m}+\frac{k}{m}\frac{\gamma\left(t\right)-\gamma_0}{\gamma_0}+\frac{1}{2m}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\right)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0 \tag{3.14.7}$$

elde edilir. Bu modelleme telin uçları sabit olmadığında yani $\alpha\left(t\right)<\alpha_0$ ve $\beta\left(t\right)>\beta_0$ küçük yer değişimleri mevcutken $u\left(x,t\right)$ nin dikey deformasyonunu ifade eder. Eğer telin uçlarının sabit olduğunu varsayarsak yani $\alpha\left(t\right)=\alpha_0$ ve $\beta\left(t\right)=\beta_0$ olarak alınırsa (3.14.7) ifadesi

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\left(\frac{\tau_0}{m}+\frac{k}{m\gamma_0}+\frac{1}{2m}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\right)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

şeklinde elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmuştur. Ele alınan problemlerin farklı özellikleri çalışılmıştır. İlk kısımda altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin çözümlerinin global varlığı, sonsuz zamanda patlaması ve azalması çalışılmıştır. İkinci kısımda hiperbolik tipten p-Laplasyan denkleminin çözümlerinin global varlığı, üstel büyümesi ve azalması ele alınmıştır. Son kısımda ise logaritmik kaynak terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff denklem sistemi ele alınarak sistemin çözümlerinin global varlığı ve azalması çalışılmıştır.

4.1. Altıncı Mertebeden Logaritmik Boussinesq Denklem Çözümlerinin Varlığı ve Asimptotik Davranışı

Bu çalışmamızda altıncı mertebeden logaritmik Boussinesq denklemini $x \in \Omega,\ t > 0$ için

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxxx} + \left(u_x \log |u_x|^k\right)_x = 0 \qquad (4.1.1)$$

başlangıç

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

ve sınır koşulları ile

$$u(x,t) = u(l,t) = 0, u_{xx}(x,t) = u_{xx}(l,t) = 0, u_{xxx}(x,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$$

ve $\Omega = (0,l),\ k \geq 1$ şartları altında ele aldık (Pişkin ve Irkıl 2019a). $u(x,t)$ fonksiyonunun (4.1.1) probleminin çözümü olmak üzere x ve t alt simgeleri sırasıyla x ve t'ye göre kısmi türevlerini ifade etmektedir. Şimdi (4.1.1) probleminin enerji fonksiyonelini elde edeceğiz. Bu nedenle denklemi u_t ile çarpılıp Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega u_{xx}u_t dx + \int_\Omega u_{xxxx}u_t dx - \int_\Omega u_{xxtt}u_t dx \\ &+ \int_\Omega u_{xxxxtt}u_t dx + \int_\Omega u_{xxxxxx}u_t dx + \int_\Omega \left(\log |u_x|^k u_x\right)_x u_t dx \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

yazılır. İlk terim basit matematiksel işlemlerin kullanılmasıyla

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(u_t^2 \right) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_t \right\|^2$$

olarak elde edilir. Green özdeşliklerinin ve sınır değerlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u_t u_{xx} dx &= -\int_{\Omega} \left(u_x u_t \right)_x dx + \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(u_x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_x \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u_{xxxx} dx &= \int_{\Omega} \left(u_{xxx} u_t \right)_x dx - \int_{\Omega} u_{xxx} u_{xt} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(u_{xxx} u_t \right)_x dx - \int_{\Omega} \left(u_{xx} u_{tx} \right)_x dx + \int_{\Omega} u_{xx} u_{xxt} dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(u_{xx}^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_{xx} \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u_{xxxxxx} dx &= \int_{\Omega} \left(u_{xxxxx} u_t \right)_x dx - \int_{\Omega} u_{xxxxx} u_{xt} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(u_{xxxxx} u_t \right)_x dx - \int_{\Omega} \left(u_{xxxx} u_{xt} \right)_x dx + \int_{\Omega} u_{xxxx} u_{xxt} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(u_{xxxxx} u_t \right)_x dx - \int_{\Omega} \left(u_{xxxx} u_{xt} \right)_x dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(u_{xxx} u_{xxt} \right)_x dx - \int_{\Omega} u_{xxx} u_{xxxt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_{xxx} \right\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} u_{xxtt}u_t dx &= -\int_{\Omega} (u_{xtt}u_t)_x \, dx + \int_{\Omega} u_{xtt}u_{xt} dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xt}\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{xxxxtt}u_t dx &= \int_{\Omega} (u_{xxxtt}u_t)_x \, dx - \int_{\Omega} u_{xxxtt}u_{xt} dx \\ &= \int_{\Omega} (u_{xxxtt}u_t)_x \, dx - \int_{\Omega} (u_{xxtt}u_{xt})_x \, dx + \int_{\Omega} u_{xxtt}u_{xxt} dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xxt}\|^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Logaritmik terim ise

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\log|u_x|^k u_x\right)_x u_t dx &= \int_{\Omega} \left(\log|u_x|^k u_x u_t\right)_x - \int_{\Omega} \log|u_x|^k u_x u_{xt} dx \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u_x^2\right)\log|u_x|^k dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(|u_x|^2 \log|u_x|^k\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |u_x|^2 \frac{d}{dt}\left(\log|u_x|^k\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(|u_x|^2 \log|u_x|^k\right) dx + \frac{k}{2}\int_0^1 |u_x| u_t dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(|u_x|^2 \log|u_x|^k\right) dx + \frac{k}{4}\int_0^1 \frac{d}{dt}|u_x|^2 dx \\ &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 |u_x|^2 \log|u_x|^k + \frac{k}{4}\|u_x\|^2\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak tüm terimler yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} \|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \\ + \|u_{xxx}\|^2 - \int_{\Omega} u_x^2 \log|u_x|^k dx + \frac{k}{2}\|u_x\|^2 \end{array}\right) = 0$$

olur. Böylece, (4.1.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \\ + \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 \end{array} \right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k \, dx + \frac{k}{4}\|u_x\|^2 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

olarak elde edilmiş olur. (4.1.2) diferansiyellenirse $\forall t \in [0,T)$ için

$$E(t) = E(0) \tag{4.1.3}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.1. (Logaritmik Sobolev Eşitsizliği). $u \in H_0^1(\Omega)$ olacak şekilde bir fonksiyon ve $a > 0$ şeklinde bir sabit olsun. Böylece,

$$2\int_\Omega |u|^2 \log \frac{|u|}{\|u\|} dx < \frac{a^2}{\pi}\int_\Omega |u_x|^2 \, dx - (1 + \log a)\|u\|^2 \tag{4.1.4}$$

dır (Gross 1975) .

Lemma 4.1.2. (Logaritmik Gronwall Eşitsizliği). Kabul edelim ki $\phi(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\phi(t) \in L^\infty(0,T),\ \phi(0) \geq 0$ dır. Ayrıca $\beta > 1$ pozitif bir sabit ve $t \in [0,T]$ olmak üzere

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \beta \int_0^t \phi(s) \log[\beta + \phi(s)] \, ds$$

sağlansın . Böylece $t \in [0,T]$ için

$$\phi(t) \leq (\beta + \phi(0)) e^{\beta t}$$

elde edilir (Cazenave ve Haraux 1980).

Şimdi, $J(u)$ ve $I(u)$ farklı iki fonksiyonel olmak üzere

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k \, dx + \frac{k}{4}\|u_x\|^2, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$$I(u) = \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 - \int_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k \, dx \tag{4.1.6}$$

olarak tanımlansın.

Yukarıdaki tanımlardan açıkça görülür ki

$$J(u) = \frac{1}{2} I(u) + \frac{k}{4} \|u_x\|^2, \tag{4.1.7}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \right) + J(u) \tag{4.1.8}$$

dır. Logaritmik Sobolev eşitsizliğine göre, $I(u)$ ve $J(u)$ fonksiyonları $H_0^3(\Omega)$ uzayında iyi tanımlıdır.

Lemma 4.1.3. Her $u \in H_0^3(\Omega) \setminus \{0\}$ için,

(i) $I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)$ ve $\lim_{\lambda \to 0^+} J(\lambda u) = 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} J(\lambda u) = -\infty$;

(ii) $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \mid_{\lambda = \lambda^*} = 0$ olacak şekilde tek bir $\lambda^* = \lambda^*(u)$ vardır öyle ki, $0 < \lambda \leq \lambda^*$ aralığında $J(\lambda u)$ artan, $\lambda^* \leq \lambda < \infty$ aralığında azalan ve $\lambda^* = \lambda$ noktasında maksimum değere sahiptir.

Başka bir ifadeyle, $\lambda^* \in (0, \infty)$ aralığında tek bir kök vardır öyle ki

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 - \int_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k \, dx}{k \|u_x\|^2} \right) \tag{4.1.9}$$

iken

$$I(\lambda u) = \begin{cases} > 0, & 0 < \lambda \leq \lambda^*, \\ = 0, & \lambda^* = \lambda, \\ < 0, & \lambda > \lambda^* \end{cases} \tag{4.1.10}$$

dır.

İspat. $J(u)$ fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} J(\lambda u) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \|\lambda u_x\|^2 + \|\lambda u_{xx}\|^2 + \|\lambda u_{xxx}\|^2 \\ -\int_\Omega (\lambda u_x)^2 \log|\lambda u_x|^k \, dx + \frac{k}{2}\|\lambda u_x\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) + \frac{k\lambda^2}{4}\|u_x\|^2 \\ &\quad -\frac{k\lambda^2}{2}\left(\int_\Omega u_x^2 \log|u_x| \, dx + \int_\Omega \log \lambda u_x^2 dx\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) + \frac{k\lambda^2}{4}\|u_x\|^2 \\ &\quad -\frac{k\lambda^2}{2}\int_\Omega u_x^2 \log|u_x| \, dx - \frac{k\lambda^2}{2}\log\lambda \|u_x\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\|u_x\| \neq 0$, $\lim_{\lambda\to 0^+} J(\lambda u) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda u) = -\infty$ olduğu görülmektedir. $J(\lambda u)$ fonksiyonunun λ göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\lambda u)}{d\lambda} &= \lambda\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) + \frac{k\lambda}{2}\|u_x\|^2 \\ &\quad -\frac{k\lambda}{2}\int_\Omega u_x^2 \log|u_x| \, dx - k\lambda\log\lambda\|u_x\|^2 - \frac{k\lambda}{2}\|u_x\|^2 \\ &= \lambda\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) \\ &\quad -\lambda\int_\Omega u_x^2 \log|u_x|^k \, dx - k\lambda\log\lambda\|u_x\|^2 \end{aligned}$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \lambda^2\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) \\ &\quad -\lambda^2\int_\Omega u_x^2 \log|u_x|^k \, dx - k\lambda^2\log\lambda\|u_x\|^2 \end{aligned}$$

dır

Açıkça görürüz ki

$$\lambda\frac{dJ(\lambda u)}{d\lambda} = I(\lambda u)$$

olur.

Sonuç olarak

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\|u_{xxx}\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_x\|^2 - \int\limits_{\Omega} u_x^2 \log|u_x|^k \, dx}{k\|u_x\|^2}\right)$$

iken, $I(\lambda u) = 0$ olduğu sonucuna ulaştık. Böylece,

$$I(\lambda u) = \begin{cases} > 0, & 0 \leq \lambda < \lambda^* \\ = 0, & \lambda = \lambda^* \\ < 0, & \lambda < \lambda^* < \infty \end{cases}$$

elde ederiz.

Potansiyel kuyu ve Nehari Manifoldu sırasıyla

$$0 < d = \inf\left\{\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in H_0^3(\Omega) \setminus \{0\}\right\} \tag{4.1.11}$$

ve

$$N = \left\{u : u \in H_0^3(\Omega) \setminus \{0\}, I(u) = 0\right\}$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca Lemma 4.1.3 ten

$$0 < d = \inf_{u \in N} J(u) \tag{4.1.12}$$

dır.

Sonra, (4.1.1) problemine uygun olarak $H_0^3(\Omega)$ te

$$W = \left\{u \in H_0^3 : J(u) < d, I(u) > 0\right\} \cup \{0\}, \tag{4.1.13}$$

$$V = \left\{u \in H_0^3 : J(u) < d, I(u) < 0\right\} \tag{4.1.14}$$

iki ayrı alt küme olsun.

Lemma 4.1.4. Kabul edelim ki $u \in H_0^3(\Omega)$ olsun. $r = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlansın.

(i) Eğer $0 < \|u_x\| < r$ ise $I(u) > 0$;

(ii) Eğer $I(u) < 0$ ise $\|u_x\| > r$;

(iii) Eğer $I(u) = 0$, ve $\|u_x\| \neq r$, ise $u \in N$ için $\|u_x\| \geq r$

dır.

İspat. Her $a > 0$ için (4.1.6) ifadesinin son terimine Logaritmik Sobolev eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} I(u) &= \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 \\ &\quad -k \int_\Omega u_x^2 \left(\log \frac{|u_x|}{\|u_x\|} + \log \|u_x\| \right) dx \\ &\geq \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 - \frac{ka^2}{2\pi} \|u_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{k(1+\log a)}{2} \|u_x\|^2 - k \|u_x\|^2 \log \|u_x\| \\ &\geq \left(1 - \frac{ka^2}{2\pi}\right) \left(\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 \right) \\ &\quad + k \left(\frac{(1+\log a)}{2} - \log \|u_x\| \right) \|u_x\|^2 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

elde ederiz.

Eğer (4.1.15) ifadesinde $a = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$ olarak alınırsa

$$I(u) \geq k \left(\frac{2 + \log \frac{2\pi}{k}}{4} - \log \|u_x\| \right) \|u_x\|^2 \tag{4.1.16}$$

olur.

(i) Eğer $0 < \|u_x\| < r$ alınırsa

$$1 < \log \|u_x\| < \frac{2 + \log \frac{2\pi}{k}}{4}$$

dır. Böylece (4.1.16) ifadesinden $I(u) > 0$ elde edilir.

(ii) Eğer $I(u) < 0$ olarak alınırsa (4.1.15) ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} \left(\frac{2 + \log \frac{2\pi}{k}}{4} - \log \|u_x\| \right) &< 0, \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{1}{4}} &< \log \|u_x\|, \\ \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}} &< \|u_x\|, \\ r &< \|u_x\| \end{aligned}$$

yazılabilir.

(iii) Eğer $I(u)=0$ ve $\|u_x\| \neq r$ ise her $u \in N$, için böylece$\|u_x\| \geq r$ dır.

Lemma 4.1.5.

(i) $d \geq \frac{k}{4}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} e = \frac{k}{4}r^2$ ve $2\pi e^2 \geq k$;

(ii) $u \in H_0^3(\Omega)$ ve $I(u) < 0$ olmak üzere

$$I(u) < 2\left(J(u) - d\right) \tag{4.1.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat.

(i) Eğer $I(u)=0$ ve $\|u_x\| \neq 0$ olarak alınırsa Lemma 4.1.4 ten dolayı, $\|u_x\| \geq r = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}}$ olarak elde ederiz. $J(u)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}I(u) + \frac{k}{4}\|u_x\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}I(u) + \frac{k}{4}r^2 \\ &= \frac{1}{2}I(u) + \frac{k}{4}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.11) ifadesinden dolayı

$$d \geq \frac{k}{4}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}} e = \frac{k}{4}r^2$$

ve

$$\begin{aligned} r &\geq 1, \\ \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}} &\geq 1, \\ \frac{2\pi}{k}e^2 &\geq 1, \\ 2\pi e^2 &\geq k \end{aligned}$$

dır.

(ii) $u \in H_0^3(\Omega)$ ve $I(u) < 0$ olmak üzere Lemma 4.1.2 den dolayı $0 < \lambda^* < 1$ ve

$I(\lambda^* u) = 0$ olacak şekilde λ^* olduğu sonucuna varabiliriz. (4.1.11) ifadesinden dolayı,

$$\begin{aligned} d &\leq J(\lambda^* u) = \frac{1}{2} I(\lambda^* u) + \frac{k}{4} \|\lambda^* u_x\|^2 \\ &= \frac{k}{4} (\lambda^*)^2 \|u_x\|^2 \\ &< \frac{k}{4} \|u_x\|^2 \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

olur. Bundan dolayı, (4.1.5) ve (4.1.6) dan

$$d < \frac{k}{4} \|u_x\|^2 = J(u) - \frac{1}{2} I(u)$$

yazılır. Böylece

$$I(u) < 2(J(u) - d)$$

olarak elde edilmiş olur.

Lemma 4.1.6. $u_0 \in H_0^3(\Omega), u_1 \in H^1(\Omega)$ ve $0 < E(0) < d$ olsun. $u(x,t)$, (4.1.1) probleminin zayıf bir çözümü olmak üzere,

(i) Eğer $I(u_0) > 0$ ise $u \in W$;

(ii) Eğer $I(u_0) < 0$ ise $u \in V$;

dır.

İspat. Zayıf çözüm tanımı ve $E(t) = E(0)$ olduğundan, ayrıca teoremdeki $0 < E(0) < d$ şartından $\forall t \in [0,T)$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \right) + J(u) \\ = &\frac{1}{2} \left(\|u_1\|^2 + \|u_{1x}\|^2 + \|u_{1xx}\|^2 \right) + J(u_0) \\ < &\ d \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

elde edilir.

(i) Her $t \in [0,T)$ için $u(t) \in W$ olsun. Eğer bu önermemiz doğru değilse bir $t_0 \in [0,T)$ vardır öyle ki $u(t_0) \in \partial W$ dır. Böylece

(a) $I(u(t_0)) = 0$ ve $\|u_x(t_0)\| \neq 0$, veya (b) $J(u(t_0)) = d$ olmalıdır. (4.1.19) ifadesinden dolayı (b) ifadesinin mümkün olmadığını görüyoruz. Böylece $I(u(t_0)) > 0$ ve $\|u_x(t_0)\| \neq 0$ olmalıdır. Eğer $0 < d = \inf_{u \in N} J(u)$ ise en az bir $J(u(t_0)) \geq d$ olmalıdır.

Bu ifade 4.1.19 ile çeliştiğinden dolayı $\forall t \in [0,T)$ için $u(t) \in W$ olduğu bulunur.

(ii) $0 \leq t < t_0$ için $u(x,t) \in V$ ve $u(x,t_0) \in \partial V$ olacak şekilde bir $t_0 \in [0,T)$ olsun. Böylece

(a) $I(u(t_0)) = 0$, veya (b) $J(u(t_0)) = d$ olmalıdır. (4.1.19) ifadesinden dolayı (b) doğru değildir. $0 < t < t_0$ için $I(u(t_0)) = 0$ ve $I(u(t)) < 0$ ise, Lemma 4.1.4 (ii) den dolayı $0 < t \leq t_0$ için $\|u_x\| > r$ dır. $0 < d = \inf_{u \in N} J(u)$ ise $J(u(t_0)) \geq d$ olmalıdır. Bu ifade 4.1.19 ile çeliştiğinden dolayı $\forall t \in [0,T)$ için $u(t) \in V$ olduğu bulunur.

4.1.1. Çözümlerin Global Varlığı

Bu kısımda (4.1.1) probleminin çözümlerinin global varlığını ele aldık. İspatımızı Faedo-Galerkin metodunu temele alarak çalıştık. Ve ispatta Logaritmik Sobolev eşitsizliği ve Logaritmik Gronwall eşitsizliğini kullandık.

Teorem 4.1.1.1. $u_0 \in H_0^3(\Omega)$, $u_1 \in H^1(\Omega)$ olsun. Böylece (4.1.1) problemimiz $u \in L^\infty(0,\infty, H_0^3(\Omega))$ ve $u_t \in L^\infty(0,\infty, H^1(\Omega))$ global çözümüne sahiptir.

İspat. Yaklaşık çözümü bulmak için Faedo-Galerkin metodunu kullanacağız. $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $L^2(\Omega)$ uzayının ortonormali olan $H_0^3(\Omega)$ ayrık uzayının ortogonal bir bazı olsun.

$$V_m = \text{span}\{w_1, w_2, ..., w_m\}$$

olarak alınsın ve $j = 1,2,...,m$ için sonlu boyutlu V_m alt uzayının başlangıç değerleri $(u_0, u_1) \in (H_0^3(\Omega), H^1(\Omega))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_m(0) &= u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0, \\ u_{mt}(0) &= u_{m1}(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm} w_j(x) \to u_1 \end{aligned}$$

olarak verilsin.

V_m alt uzayında tanımlı $w \in V_m$, $s = 1,2,...m$, için $(u_0, u_1) \in (H_0^3(\Omega), H^1(\Omega))$

olmak üzere

$$\begin{cases} (u_{mtt}, w_s) + (u_{mx}, w_{sx}) + (u_{mxtt} w_{sx}) \\ + (u_{mxx}, w_{sxx}) + (u_{mxxtt}, w_{sxx}) \\ + (u_{mxxx}, w_{sxxx}) - \left(u_{mx} \log |u_{mx}|^k, w_{sx} \right) = 0 \\ u_0^m (x) = \sum_{j=1}^m a_j w_j (x) \to u_0 \\ u_1^m (x) = \sum_{j=1}^m b_j w_j (x) \to u_1 \end{cases} \tag{4.1.1.1}$$

yaklaşık problemi için

$$u_m (x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm} (t) w_j (x)$$

şeklinde bir yaklaşık çözüm bulmaya çalışacağız.

Bu şekilde $h_j^m (t)$ fonksiyonlarında oluşan bir adi differansiyel denklem sistemine dönüşür. Adi differansiyel denklemlerdeki klasik varlık teoremine dayanarak, $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$ maksimum aralığında (4.1.1.1) probleminin çözümü olan

$$h_j : [0, t_m) \to R, \;\; j = 1, 2, ..., m$$

fonksiyonlarını elde edebiliriz. Sonrasında $t_m = T$ ve lokal varlığının m ve t den bağımsız olarak düzgün sınırlı olduğunu göstermeye çalışacağız. Bu amaçla, (4.1.1.1) probleminde w yerine u_{mt} alınır ve integrallenirse

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = 0 \tag{4.1.1.2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mxt}\|^2 + \|u_{mxxt}\|^2 \\ \\ + \|u_{mx}\|^2 + \|u_{mxx}\|^2 + \|u_{mxxx}\|^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^l u_{mx}^2 \log |u_{mx}|^k \, dx + \frac{k}{4} \|u_{mx}\|^2 \end{aligned} \tag{4.1.1.3}$$

dır.

(4.1.1.2) ifadesi t ye göre $(0, t)$ aralığında integrallenirse

$$E_m(t) = E_m(0) \tag{4.1.1.4}$$

elde edilir.

H_0^3 uzayında $u_m(0) \to u_0$ olduğundan, $u_m(0)$ dizisinin H_0^3 te sınırlı olduğunu elde ederiz. $H_0^3 \hookrightarrow L^\infty$ uzayında Sobolev gömülmesi ve $t > 0$ için

$$\left|t^2 \log t\right| \leq C\left(1 + t^3\right)$$

eşitsizliğinden $C_1 = C\left(\|u_0\|_{H_0^3}, \|u_1\|\right)$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_{0mx}^2 \log |u_{0mx}|^k \, dx &\leq C\left(1 + \|u_{0m}\|^3\right) \\ &\leq C\left(1 + \|u_{0m}\|_{H_0^3}^3\right) \leq C_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra, (4.1.1.4) den dolayı

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mxt}\|^2 + \|u_{mxxt}\|^2 \\ & + \|u_{mx}\|^2 + \|u_{mxx}\|^2 + \|u_{mxxx}\|^2 \\ \leq\ & C + 2\int_\Omega u_{mx}^2 \log |u_{mx}|^k \, dx \end{aligned} \tag{4.1.1.5}$$

olarak yazabiliriz. (4.1.1.5) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan son terime Logaritmik Sobolev eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & 2\int_\Omega u_{mx}^2 \log |u_{mx}|^k \, dx \\ =\ & 2k\int_\Omega u_{mx}^2 \left(\log \frac{|u_x|}{\|u_{mx}\|} + \log \|u_{mx}\|\right) dx \\ \leq\ & k\left(\begin{array}{c} \frac{a^2}{\pi}\int_\Omega u_{mxx}^2 dx - (1 + \log a)\|u_{mx}\|^2 \\ + \log \|u_{mx}\| \, \|u_{mx}\|^2 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

ifadesi elde edilir. (4.1.1.6) ifadesi (4.1.1.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mxt}\|^2 + \|u_{mxxt}\|^2 \\ & + \|u_{mx}\|^2 + \left(1 - \frac{ka^2}{\pi}\right) \|u_{mxx}\|^2 + \|u_{mxxx}\|^2 \\ \leq \; & C + k \left(\begin{array}{c} \frac{\alpha^2}{\pi} \int\limits_{\Omega} u_{mxx}^2 dx - (1 + \log a) \|u_{mx}\|^2 \\ + \log \|u_{mx}\|^2 \|u_{mx}\|^2 \end{array} \right) \end{aligned} \tag{4.1.1.7}$$

olur. (4.1.1.7) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mxt}\|^2 + \|u_{mxxt}\|^2 \\ & + (1 + k + k \log a) \|u_{mx}\|^2 \\ & + \left(1 - \frac{ka^2}{\pi}\right) \|u_{mxx}\|^2 + \|u_{mxxx}\|^2 \\ \leq \; & C + \left(1 + \log \|u_{mx}\|^2 \|u_{mx}\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.1.1.8}$$

elde edilir.

(4.1.1.8) te

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}\|^2 + \|u_{mxt}\|^2 + \|u_{mxxt}\|^2 \\ & + \|u_{mx}\|^2 + \|u_{mxx}\|^2 + \|u_{mxxx}\|^2 \\ \leq \; & C \left(1 + \log \|u_{mx}\|^2 \|u_{mx}\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.1.1.9}$$

olur. Şimdi

$$u_{mx}(t) = u_{mx}(0) + \int\limits_0^t u_{mxt}(s)\, ds$$

olarak alınsın. Aşağıdaki

$$(a + b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|u_{mx}(t)\|^2 &= \left\|u_{mx}(0)+\int_0^t u_{mxt}^2(s)\,ds\right\|^2 \\ &\leq 2\|u_{mx}(0)\|^2+2T\int_0^t \|u_{mxt}\|^2(s)\,ds \\ &\leq 2\|u_{mx}(0)\|^2+\max\{1,2T\}\frac{1+C}{C}\int_0^t \|u_{mxt}\|^2(s)\,ds \qquad (4.1.1.10)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.1.1.10) eşitsizliği (4.1.1.9) ta yerine yazılır ve $X=2\|u_{mx}(0)\|^2+\max\{1,2T\}(1+C)T, Y=\max\{1,2T\}(1+C)$ olarak alınırsa (4.1.1.10) ifadesi

$$\|u_{mx}\|^2 \leq X+Y\int_0^t \log\|u_{mx}\|\,\|u_{mx}\|^2\,ds$$

şeklinde ifade edilir. $B\geq 1$ alınır ve Logaritmik Gronwall eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|u_{mx}\|^2 \leq X+Ye^{Yt}\leq C_t \qquad (4.1.1.11)$$

olur. Böylece, (4.1.1.11) ve (4.1.1.9) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}&\|u_{mt}\|^2+\|u_{mxt}\|^2+\|u_{mxxt}\|^2 \\ &+\|u_{mx}\|^2+\|u_{mxx}\|^2+\|u_{mxxx}\|^2 \\ \leq\, &C \qquad (4.1.1.12)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (4.1.1.12) teki kabulümüzden $T_{\max}=T$ olarak alınırsa u_{mtt} nin $L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega))$ uzayında sınırlı olduğu elde edilir. Buradan, $\{u_m\}$, ile gösterilen bir $\{u_m\}$ alt dizisi vardır, öyle ki

$$\begin{cases} u_m\to u, \text{ zayıf}^* \text{ yakınsak } L^\infty(0,T;H_0^3(\Omega)) \text{ da} \\ u_{mt}\to u_t, \text{ zayıf}^* \text{ yakınsak } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \text{ da} \\ u_{mtt}\to u_{tt}, \text{ zayıf yakınsak } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \text{ da}\end{cases}$$

dır. Aubin–Lions' lemması ve Lebesgue güçlü yakınsaklık teoreminin kullanılmasıyla

$$u_{mx}\log|u_{mx}|^{k}\to u_{x}\log|u_{x}|^{k}\ \text{ zayıf}^{*}\ \text{yakınsak}\ L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)\ \text{da}$$

elde edilir

(4.1.1.1) denklemi $(0,t)$ aralığında integarallenir ve s sabit olmak üzere $m\to\infty$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&(u_t,w_s)+(u_{xt},w_{sx})+(u_{xxt},w_{sxx})\\
&+\int_0^t\left[(u_xw_{sx})+(u_{xx},w_{sxx})+(u_{xxx},w_{sxxx})\right]ds\\
&-\int_0^t\left(u_x\log|u_x|^{k},w_{sx}\right)ds\\
=\ &(u_1,w_s)+(u_{1x},w_{sx})+(u_{1xx},w_{sxx})
\end{aligned}$$

elde edilir ve (4.1.1) probleminin çözümleridir. Başka bir ifadeyle, (4.1.1.1) den $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=u_1(x)$ olduğu görülür. (4.1.1.4) den u (4.1.3) i sağladığını görebiliriz. Böylece $u(x,t)$ (4.1.1) probleminin global zayıf bir çözümü olacaktır. Bu şekilde teoremimizi ispatlamış olduk.

Teorem 4.1.1.2. $u_0\in H_0^3(\Omega)$, $u_1\in H^1(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki $E(0)<d$, ve $I(u_0)>0$ veya $\|u_0\|=0$ dır. Böylece, $0\le t<\infty$ için $u(t)\in W$ ve $u\in L^{\infty}(0,\infty,H_0^3(\Omega))$ ile $u_t\in L^{\infty}(0,\infty,H^1(\Omega))$ olacak şekilde global zayıf çözüme sahiptir.

İspat. Teoremden 4.1.1.1 den dolayı (4.1.1) probleminin zayıf çözüme sahip olduğunu biliyoruz. Lemma 4.1.6 dan dolayı $0\le t<T$ için $u(t)\in W$ olarak elde edilir. Böylece $T=\infty$ olarak alınabilir

4.1.2. Sonsuz Zamanda Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde (4.1.1) probleminin çözümlerinin sonsuz zamanda patlamasını çalışacağız. Aslında, uygun başlangıç koşulları altında zaman sonsuza giderken $H_0^3(\Omega)$ normu altında çözümlerin üstel olarak büyüdüğünü göstermeyi amaçlıyoruz.

Teorem 4.1.2.1. $u_0 \in H_0^3(\Omega),\ u_1 \in H^1(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki $u_0 \in V,\ 0 < E(0) < d$ ve

$$(u_0, u_1) + (u_{0x}, u_{1x}) + (u_{0xx}, u_{1xx}) > 0$$

dır. Böylece zaman sonsuza giderken (4.1.1) probleminin çözümleride sonsuza gider.

İspat. $J(u_0) < E(0) < d\ ,\ I(u_0) < 0$ şartları altında $u(t,x)$, (4.1.1) probleminin zayıf bir çözümü olsun. $\phi(t) : [0,\infty) \to R^+$ olmak üzere

$$\phi(t) = \|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \tag{4.1.2.1}$$

şeklinde tamınlanan bir fonksiyon alalım.

(4.1.2.1) ifadesinin türevini alırsak

$$\phi'(t) = 2\int_\Omega u\ u_t dx + 2\int_\Omega u_x\ u_{xt} dx + 2\int_\Omega u_{xx}\ u_{xxt} dx \tag{4.1.2.2}$$

elde edilir. Böylece, (4.1.2.2) ifadesi, (4.1.1), (4.1.6) ve kısmi integral formüllerinden

dolayı

$$\begin{aligned}
\phi''(t) &= 2\int_{\Omega} u\, u_{tt} + 2\int_{\Omega} u_x\, u_{xtt} + 2\int_{\Omega} u_{xx}\, u_{xxtt} \\
&\quad +2\int_{\Omega} u_t^2 + 2\int_{\Omega} u_{xt}^2 + 2\int_{\Omega} u_{xxt}^2 \\
&= +2\int_{\Omega} u \begin{pmatrix} u_{xx} + u_{xxtt} - u_{xxxxtt} - u_{xxxx} \\ -u_{xxxxxx} - \left(u_x \log |u_x|^k\right)_x \end{pmatrix} \\
&\quad +2\int_{\Omega} u_x\, u_{xtt} + 2\int_{\Omega} u_{xx}\, u_{xxtt} \\
&\quad +2\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&= 2\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad -2\|u_x\|^2 - 2\int_{\Omega} u_x\, u_{xtt} - 2\int_{\Omega} u_{xx}\, u_{xxtt} \\
&\quad -2\|u_{xx}\|^2 - 2\|u_{xxx}\|^2 + 2\int_{\Omega} u_x^2 \log |u_x|^k \\
&\quad +2\int_{\Omega} u_x\, u_{xtt} + 2\int_{\Omega} u_{xx}\, u_{xxtt} \\
&= 2\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad -2\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 - \int_{\Omega} u_x^2 \log |u_x|^k\right) \\
&= 2\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) - 2I(u) \qquad (4.1.2.3)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Aşağıda belirtilen Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$(ax + by + cz)^2 \leq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$t \in [0, \infty)$ için (4.1.2.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
|\phi'(t)|^2 &\leq 4\left(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad \left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) \\
&= 4\,\phi(t)\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2\right) \qquad (4.1.2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, her $t \in [0,\infty)$ için (4.1.2.1), (4.1.2.3), (4.1.2.4) ifadelerinin birleşimi ve (4.1.3), (4.1.8) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}\phi''(t)\,\phi(t)-[\phi'(t)]^2 &\geq 2\left(\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_{xxt}\|^2-I(u)\right)\phi(t)\\ &\quad -4\,\phi(t)\left(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2\right)\\ &= -2\phi(t)\left(\|u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_{xxt}\|^2+I(u)\right)\\ &\geq -2\phi(t)\left[E(0)-J(u)+I(u)\right] \qquad (4.1.2.5)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teoremdeki kabulden $u_0 \in V$ ve $0 < E(0) < d$ olarak alınırsa Lemma 4.1.6 dan dolayı $I(u) < 0$ olduğu sonucu çıkar. Böylece, Lemma 4.1.5 ten dolayı

$$\begin{aligned}E(0)-J(u)+I(u) &< d-J(u)+2\left(J(u)-d\right)\\ &= J(u)-d\\ &< 0\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.1.2.5) ifadesinde bu sonuç kullanılırsa

$$\phi''(t)\,\phi(t)-[\phi'(t)]^2>0 \qquad (4.1.2.6)$$

elde ederiz. Ayrıca, türev alma kurallarını kullanarak

$$(\log|\phi(t)|)'=\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \qquad (4.1.2.7)$$

olarak yazabiliriz. (4.1.2.7) ve (4.1.2.6) ifadelerinden

$$(\log|\phi(t)|)''=\frac{\phi''(t)\,\phi(t)-[\phi'(t)]^2}{\phi^2(t)}>0 \qquad (4.1.2.8)$$

dır. (4.1.2.8) ifadesinden

$$(\log|\phi(t)|)'=\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$$

ifadesinin t ye göre artan olduğunu söyleyebiliriz. Elde edilen bu sonucu kullanır, (4.1.2.7)

ifadesini t_0 dan t ye integrallersek $0 \leq t_0 < t$ iken

$$\begin{aligned} \log|\phi(t)| - \log|\phi(t_0)| &= \int_{t_0}^{t} (\log|\phi(\tau)|)' \, d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\phi'(\tau)}{\phi(\tau)} d\tau \\ &\geq \frac{\phi'(t_0)}{\phi(t_0)} (t - t_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \log \frac{|\phi(t)|}{|\phi(t_0)|} &\geq \frac{\phi'(t_0)}{\phi(t_0)} (t - t_0) \\ |\phi(t)| &\geq |\phi(t_0)| \, e^{\left(\frac{\phi'(t_0)}{\phi(t_0)}(t-t_0)\right)} \end{aligned} \tag{4.1.2.9}$$

dır. Eğer $t_0,\ \phi'(t_0) > 0,\ \phi(t_0) > 0$ olacak şekilde yeterince küçük seçilirse, (4.1.2.9) ifadesinden $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ elde edilir. Böylece (4.1.1) probleminin çözümleri üstel olarak büyüdüğünü elde etmiş oluruz.

4.1.3. Doğrusal Sönüm Terimli (4.1.1) Problemin Çözümlerinin Enerji Azalması

Bu kısımda, (4.1.1) probleminin çözümlerinin azalmasını çalışacağız. Bunun için,(4.1.1) denklemine doğrusal sönüm terim ekleyeceğiz. Böylece, problemi $x \in \Omega,\ t > 0$ için

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} + u_{xxxxt} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxxx} + \left(u_x \log|u_x|^k\right)_x = 0 \tag{4.1.3.1}$$

$x \in \Omega$ için başlangıç şartı

$$(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

$t \geq 0$ için sınır şartı

$$u(x,t) = u(l,t) = 0, u_{xx}(x,t) = u_{xx}(l,t) = 0, u_{xxx}(x,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$$

olacak şekilde yazılabilir. Bu bölümün ikinci kısım ve üçüncü kısmın elde edebilen tüm sonuçlar (4.1.3.1) denklemi içinde elde edilir. Bu denklem için

$$E'(t) = -\|u_{xt}\|^2 - \|u_{xxt}\|^2 \tag{4.1.3.2}$$

enerji fonksiyoneli olarak elde edilir. Böylece $E(t)$ enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 4.1.3.1 $u_0 \in W, u_1 \in H^1(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki; α pozitif bir sabit olsun ve $0 < k^4\alpha^4\frac{2\pi}{k}e^2 < 1$ şartını sağlasın. Böylece t den bağımsız M ve η iki pozitif sabit vardır öyle ki $t \geq 0$ için

$$0 < E(t) < Me^{-\eta t}$$

dır.

İspat. $u(x,t)$, (4.1.3.1) probleminin zayıf bir çözümü olsun. Teorem 4.1.1.2 den $u_0 \in W, u_1 \in H^1(\Omega)$ olduğundan $\forall t \in [0,\infty)$ için $u \in W$ dır. Ve böylece $0 < E(t) < d$ ve $I(u) > 0$ olur.

Bu amaçla, ε pozitif bir sabit iken

$$\Phi(t) = E(t) + \varepsilon\left[\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega u_x u_{xt} dx + \int_\Omega u_{xx}u_{xxt} dx\right] \tag{4.1.3.3}$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. $\Phi(t)$ ve $E(t)$ nin denk olduğunu göstereceğiz. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için, γ_1 ve γ_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$\gamma_1\Phi(t) \leq E(t) \leq \gamma_2\Phi(t) \tag{4.1.3.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\Phi(t)$ fonksiyonunun zamana bağlı türevi alınır, (4.1.3.1) ifadesi kullanılır ve bazı

ifadelere kısmi integrasyon özdeşlikleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= E'(t) + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \int\limits_\Omega u u_{ttt} dx + \int\limits_\Omega u_t^2 dx + \int\limits_\Omega u_x u_{xtt} dx \\ + \int\limits_\Omega u_{xt}^2 dx + \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxtt} dx + \int\limits_\Omega u_{xxt}^2 dx \end{array} \right] \\
&= -\|u_{xt}\|^2 - \|u_{xxt}\|^2 + \varepsilon \left[\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \right. \\
&\quad + \int\limits_\Omega u u_{xx} dx + \int\limits_\Omega u u_{xxt} dx - \int\limits_\Omega u u_{xxxxt} dx + \int\limits_\Omega u u_{xxtt} dx \\
&\quad - \int\limits_\Omega u u_{xxxx} dx - \int\limits_\Omega u u_{xxxxxx} dx - \int\limits_\Omega u u_{xxxxtt} dx \\
&\quad \left. - \int\limits_\Omega u \left(u_x \log |u_x|^k \right)_x dx + \int\limits_\Omega u_x u_{xtt} dx + \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxtt} dx \right] \\
&= -\|u_{xt}\|^2 - \|u_{xxt}\|^2 + \varepsilon \left[\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2 \right. \\
&\quad + \|u_{xxt}\|^2 - \|u_x\|^2 - \int\limits_\Omega u_x u_{xt} dx - \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxt} dx \\
&\quad - \int\limits_\Omega u_x u_{xtt} dx - \|u_{xx}\|^2 - \|u_{xxx}\|^2 - \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxtt} dx \\
&\quad \left. + \int\limits_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k dx + \int\limits_\Omega u_x u_{xtt} dx + \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxtt} dx \right] \\
&= (\varepsilon - 1) \left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \right) + \varepsilon \|u_t\|^2 \\
&\quad - \varepsilon \left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xxx}\|^2 \right) \\
&\quad - \varepsilon \left(\int\limits_\Omega u_x u_{xt} dx + \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxt} dx \right) \\
&\quad + \varepsilon \int\limits_\Omega u_x^2 \log |u_x|^k dx \qquad (4.1.3.5)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\delta > 0$ olarak alınmak üzere (4.1.3.5) ifadesine Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_\Omega u_x u_{xt} dx + \int\limits_\Omega u_{xx} u_{xxt} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{4\delta} \left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2 \right) \\
&\quad + \delta \left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \right) \qquad (4.1.3.6)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

(4.1.3.6) ifadesi (4.1.3.5) de yazarsak

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\leq \left(\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4\delta}-1\right)\left(\|u_{xt}\|^2+\|u_{xxt}\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon\|u_t\|^2-\varepsilon\|u_{xxx}\|^2\\ &\quad+\varepsilon(\delta-1)\left(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon\int_\Omega u_x^2\log|u_x|^k\,dx \end{aligned} \tag{4.1.3.7}$$

elde ederiz.

$0<\theta<2$ pozitif bir sabit iken (4.1.3.7) ifadesine $\varepsilon\theta E(t)$ ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\leq -\varepsilon\theta E(t)+\left(\frac{\varepsilon\theta}{2}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4\delta}-1\right)\left(\|u_{xt}\|^2+\|u_{xxt}\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon\left(1+\frac{\theta}{2}\right)\|u_t\|^2+\varepsilon\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\|u_{xxx}\|^2\\ &\quad+\varepsilon\left(\frac{\theta}{2}+\delta-1\right)\left(\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon\frac{\theta k}{4}\|u_x\|^2+\varepsilon\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\int_\Omega u_x^2\log|u_x|^k\,dx \end{aligned} \tag{4.1.3.8}$$

olur.

$0<\theta<2$ olarak alınır ve (4.1.3.8) ifadesinin son terimine Logaritmik Sobolev

eşitsizliği uygulanır ve Sobolev gömülme teoremleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &\leq -\varepsilon\theta E(t) + \left(\frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)\left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(1 + \frac{\theta}{2}\right)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_{xxx}\|^2 \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right)\left(\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2\right) + \varepsilon\frac{\theta k}{4}\|u_x\|^2 \\
&\quad + \varepsilon\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)k\left[\begin{array}{c} \frac{a^2}{2\pi}\|u_{xx}^2\| - \frac{(1+\log a)}{2}\|u_x\|^2 \\ +\log\|u_x\|^2\|u_x\|^2 \end{array}\right] \\
&\leq -\varepsilon\theta E(t) + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)(1 + C_0) \\ +C_1\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \end{array}\right]\left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_{xxx}\|^2 + \varepsilon\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) \\ +\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\frac{ka^2}{2\pi} \end{array}\right]\left(\|u_{xx}\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)k\frac{(1+\log a)}{2} \\ +\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)k\log\|u_x\|^2 + \frac{\theta k}{4} \end{array}\right]\|u_x\|^2 \qquad (4.1.3.9)
\end{aligned}$$

olarak düzenlenir.

$0 < \theta < 2$ olduğundan $1 - \frac{\theta}{2} > 0$ dır. Ayrıca (4.1.7) ten

$$\begin{aligned}
J(u) &> \frac{k}{4}\|u_x\|^2, \\
\log\frac{4J(u)}{k} &> \log\|u_x\|^2 \qquad (4.1.3.10)
\end{aligned}$$

olduğunu söyleyebilirz.

(4.1.3.10) ifadesi (4.1.3.9) ta yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &\leq -\varepsilon\theta E(t) + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)(1 + C_0) \\ +C_1\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \end{array}\right]\left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_{xxx}\|^2 + \varepsilon\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) \\ +\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\frac{ka^2}{2\pi} \end{array}\right]\left(\|u_{xx}\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)k\frac{(1+\log a)}{2} \\ +\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)k\log\frac{4J(u)}{k} + \frac{\theta k}{4} \end{array}\right]\|u_x\|^2 \qquad (4.1.3.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3.1 daki kabulümüzden, $0 < \theta < 2$ ve $J(u) < E(0) < \frac{\alpha k}{4} r^2 < d$ olduğunu biliyoruz. a yı Teorem 4.1.3.1 daki varsayıma uygun olacak ve $k^4 \alpha^4 \frac{2\pi}{k} e^2 < a^2 < \frac{2\pi}{k}$ şartını sağlayacak şekilde alır ve yeterince küçük $\delta > 0$ seçersek

$$\frac{\theta}{2} - 1 < 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \frac{ka^2}{2\pi} &< 0, \\ \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{ka^2}{2\pi}\right) &< 0, \\ \left(1 - \frac{ka^2}{2\pi}\right) &> 0, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\theta}{2} + \delta - 1\right) - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) k \left(\frac{(1 + \log a)}{2} - \log \frac{4J(u)}{k}\right) + \frac{\theta k}{4} < 0,$$

dır. Böylece,

$$\Phi'(t) \leq -\varepsilon\theta E(t) + \left[\begin{array}{c} \left(\frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)(1 + C_0) \\ +C_1\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \end{array}\right] \left(\|u_{xt}\|^2 + \|u_{xxt}\|^2\right) \quad (4.1.3.12)$$

olarak elde edilir.

Yeterince küçük olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilirse

$$\left(\frac{\varepsilon\theta}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)(1 + C_0) + C_1\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) < 0,$$

$$\begin{aligned} 1 + C_0 &> 0, \\ C_0 &> -1 \end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak, (4.1.3.12) ifadesi

$$\Phi'(t) \leq -\varepsilon\theta E(t)$$

olarak elde edilir. (4.1.3.4) ifadesinden

$$\Phi'(t) \leq -\varepsilon\theta\gamma_2\Phi(t) \tag{4.1.3.13}$$

yazabiliriz. $\eta = \varepsilon\theta\gamma_2 > 0$ olarak alınır ve (4.1.3.13), $(0,t)$ aralığında integrallenirse

$$\Phi(t) \leq Me^{-\eta t}$$

elde edilir.

4.2. Logaritmik Kaynak Terimli Hiperbolik Tipten p-Laplasyan Denklemin Çözümlerinin Davranışı

Tezimizin bu kısmında, aşağıda yer alan logaritmik kaynak terimli hiperbolik tipten p-Laplasyan denklemini $x \in \Omega,\ t > 0$ için

$$\begin{cases} u_{tt} - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + |u|^{p-2}u + u_t = |u|^{p-2}u\ln|u| \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x) \\ u(x,t) = 0\ \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.1}$$

problemini ele aldık (Pişkin ve ark. 2021). Burada, $\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ bu bölgenin yeterince düzgün sınırıdır. u_0, u_1 başlangıç fonksiyonları olarak verilmiş olup, p ise aşağıda verilen

$$\begin{cases} 2 < p < \frac{np}{n-p};\ n > p \\ 2 < p < \infty; \quad n \leq p \end{cases}$$

şartları sağlamaktadır.

(4.2.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \ln|u|\,u^p dx + \frac{1}{p^2}\|u\|_p^p \tag{4.2.2}$$

dır. Şimdi enerji fonksiyoneli ile ilgili lemmayı ifade edelim.

Lemma 4.2.1. $E(t)$ artmayan bir fonksiyon olmak üzere, $t \geq 0$ için,

$$E'(t) = -\|u_t\|^2 \leq 0 \tag{4.2.3}$$

dır.

İspat. (4.2.1) problemini u_t ile çarpıp Ω bölgesinde integrallersek,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)u_t dx \\ & + \int_\Omega |u|^{p-2}uu_t dx + \int_\Omega u_t u_t dx \\ = & \int_\Omega u^{p-2}u\ln|u|\,u_t dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada gerekli matematiksel işlemler yapılıp Green özdeşlikleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{p}\|u\|_p^p \\ -\frac{1}{p}\int_\Omega \ln|u|\,u^p dx + \frac{1}{p^2}\|u\|_p^p \end{pmatrix} \\ = & -\|u_t\|^2 \end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Böylece

$$E'(t) = -\|u_t\|^2$$

olarak bulunur.

Lemma 4.2.2. (Genelleştirilmiş Logaritmik Sobolev Eşitsizliği). $p > 1$, $\mu > 0$ için $u \in W^{1,p}(R^n) \setminus \{0\}$ olsun. Böylece,

$$\ell_p = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\pi^{-\frac{p}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right]^{\frac{p}{n}}$$

iken

$$p\int_{R^n} u^p \ln\left(\frac{|u|}{\|u\|_{L^p(R^n)}}\right)dx \leq \mu\int_{R^n}|\nabla u|^p\,dx - \frac{n}{p}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right)\int_{R^n}|u|^p\,dx$$

dır (Del Pino ve Dolbeault 2002).

Sonuç 4.2.3. Eğer $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ ise böylece $x \in R^n \backslash \Omega$ için $u(x) = 0$ tanımından Lemma 4.2.2. yi,

$$p \int_\Omega u^p \ln\left(\frac{|u|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\right) dx \leq \mu \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{n}{p} \ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right) \int_\Omega |u|^p \, dx$$

olarak ifade edebiliriz.

Lemma 4.2.4. ϑ pozitif bir sayı olsun. Böylece, $C = \frac{e^{-1}}{\vartheta}$ iken tüm $s \in [1, \infty)$ için aşağıdaki

$$\log s \leq C s^\vartheta$$

eşitsizlik sağlanır

İspat. Her $u \in R$ için

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

$$1 + u \leq e^u$$

olsun. Burada $u = \vartheta \ln s - 1$ dönüşümünü uygularsak ve eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\ln s \leq \frac{s^\vartheta e^{-1}}{\vartheta}$$

olarak elde edilmiş olur.

Sonuç 4.2.5. Lemma 4.2.4 e göre $s \in [1, \infty)$ olmak üzere

$$s^p \log s \leq C s^{p+\vartheta}$$

dır.

Lemma 4.2.6.

(i) Her $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fonksiyonu için $n \leq p$ iken $q \in [1, \infty]$ ve $n > p$ iken $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ olmak üzere

$$\|u\|_q \leq B_{q,p} \|\nabla u\|_p$$

olur. En iyi sabit olan $B_{q,p}$ sadece $\Omega,\ n,\ p$ ve q ya bağlıdır. $B_{p,p}$ sabiti yerine B_p ifadesini kullanacağız.

(ii) Her $u \in W_0^{1,p}(\Omega), p \geq 1$ ve $r \geq 1$ için, C pozitif sabit olmak üzere

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p^{\alpha} \|u\|_r^{1-\alpha}$$

elde ederiz. Burada

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$$

ve

- $p \geq n = 1$ için $r \leq q \leq \infty$,
- $n > 1$ ve $p < n$ için, $r \leq \frac{np}{n-p}$ ise $q \in \left[r, \frac{np}{n-p}\right]$ ve $r \geq \frac{np}{n-p}$ ise $q \in \left[\frac{np}{n-p}, r\right]$,
- $p = n > 1$ için $r \leq q < \infty$,
- $p > n > 1$ için $r \leq q \leq \infty$

dır (Ladyzenskaja ve ark.1967).

4.2.1.Çözümlerin Global Varlığı

Bu kısımda çözümlerin (4.2.1) probleminin çözümlerinin global varlığını kanıtlıyacağız. Bu nedenle ispatta kullanılacak bazı fonksiyonelleri

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx \tag{4.2.1.1}$$

ve

$$I(u) = \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx \tag{4.2.1.2}$$

olarak tanımladık. (4.2.1.1) ve (4.2.1.2) ifadelerinden

$$J(u) = \frac{1}{p} I(u) + \frac{1}{p^2}\|u\|_p^p \tag{4.2.1.3}$$

ve

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \tag{4.2.1.4}$$

açık bir şekilde elde edilir.

Payne'nin (1975) daki çalışmasına benzer şekilde, potansiyel kuyu derinliği

$$0 < d = \inf_{u} \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p^p \neq 0 \right\} \tag{4.2.1.5}$$

ve

$$0 < d = \inf_{u \in N} J(t) \tag{4.2.1.6}$$

olarak tanımladık.

Daha sonrai W kararlı kümesini ve V kararsız kümesini

$$W = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I(u) > 0,\ J(u) < d \right\} \cup \{0\},$$

$$V = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I(u) < 0,\ J(u) < d \right\}$$

olarak tanımlandık.

Lemma 4.2.1.1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\|u\|_p^p \neq 0$ ve $g(\lambda) = J(\lambda u)$ olsun. Böylece,

(i) $\lim_{\lambda \to 0^+} g(\lambda) = 0,\ \lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = -\infty;$

(ii)

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_{\Omega} \ln|u| \, |u|^p \, dx}{\|u\|_p^p} \right)$$

iken

$$I(\lambda u) = \lambda g'(\lambda) \begin{cases} > 0,\ 0 \leq \lambda < \lambda^* \\ = 0,\ \lambda = \lambda^* \\ < 0,\ \lambda < \lambda^* < \infty \end{cases}$$

dır..

İspat.

(i) $g(\lambda)$ nın tanımından açıktır ki,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= J(\lambda u) \\ &= \frac{1}{p}\|\lambda\nabla u\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\|\lambda u\|_p^p \\ &\quad -\frac{1}{p}\int_\Omega \ln|\lambda u|\,(\lambda u)^p\,dx \\ &= \frac{\lambda^p}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{\lambda^p}{p}\left(\frac{p+1}{p} - \ln|\lambda|\right)\|u\|_p^p \\ &\quad -\frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega \ln|u|\,|u|^p\,dx \end{aligned}$$

dır. $\|u\|_p^p \neq 0$ olduğundan dolayı $\lim_{\lambda\to 0^+} g(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = -\infty$ olur.

(ii) Şimdi, λ ya göre $g(\lambda)$ nın türevini alırsak

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) \\ &= \lambda^{p-1}\left(\|\nabla u\|_p^p + (1-\ln|\lambda|)\|u\|_p^p - \int_\Omega \ln|u|\,|u|^p\,dx\right) \end{aligned} \qquad (4.2.1.7)$$

elde ederiz. $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)\,|_{\lambda=\lambda^*} = 0$ sağlanmak üzere

$$\lambda^* = \exp\left(\frac{\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_\Omega \ln|u|\,|u|^p\,dx}{\|u\|_p^p}\right)$$

tek bir λ^* vardır. Son özellik,

$$\lambda\frac{dJ(\lambda u)}{d\lambda} = \lambda g'(\lambda) = I(\lambda u)$$

ifadesinin açık bir sonucudur. Böylece aşağıdaki sonuçları

$$I(\lambda u) = \lambda g'(\lambda)\begin{cases} > 0, & 0 \le \lambda < \lambda^* \\ = 0, & \lambda = \lambda^* \\ < 0, & \lambda < \lambda^* < \infty \end{cases}$$

elde ederiz.

Lemma 4.2.1.2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ ve $l = e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler elde edilir.

(i) $0 < \|u\|_p < l$ iken $I(u) > 0$,

(ii) $I(u) < 0$ iken $\|u\|_p > l$,

(iii) $I(u) = 0$ iken $\|u\|_p \geq l$

dır.

İspat. İspat için Logaritmik Sobolev eşitsizliğini ve (4.2.1.2) de verilen $I(u)$ tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} I(u) &= \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_\Omega \left(\ln \frac{|u|}{\|u\|_p} + \ln \|u\|_p\right) |u|^p \, dx \\ &\geq \|\nabla u\|_p^p + \left(1 - \ln \|u\|_p\right) \|u\|_p^p \\ &\quad - \left[\frac{\mu}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{n}{p^2} \ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right) \int_\Omega |u|^p \, dx\right] \\ &\geq \left(1 - \frac{\mu}{p}\right) \|\nabla u\|_p^p + \left(1 - \ln \|u\|_p + \frac{n}{p^2} \ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right)\right) \|u\|_p^p \end{aligned} \tag{4.2.1.8}$$

olarak elde ederiz. (4.2.1.8) eşitsizliğinde $\mu = p$ olarak seçilirse

$$I(u) \geq \left(1 - \ln \|u\|_p + \frac{n}{p^2} \ln\left(\frac{p^2 e}{n\ell_p}\right)\right) \|u\|_p^p \tag{4.2.1.9}$$

olur. Böylece;

(i) (4.2.1.8) eşitsizliğinden $0 < \|u\|_p < l$ iken $I(u) > 0$ dır.

(ii) Kabul edelim ki $I(u) < 0$ olsun. (4.2.1.9) den dolayı

$$\|u\|_p > e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = l$$

olarak elde edilir.

(iii) (ii) önermesindeki ispata benzer olarak (iii) önermesi elde edilir.

Böylece Lemma 4.2.1.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

J fonksiyoneline bağlı olarak Nehari manifoldu

$$N = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I(u) = 0\right\} \tag{4.2.1.10}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 4.2.1.1 den dolayı açıktır ki N boş küme değildir. Aslında, eğer $u \in N$ olarak kabul edilirse (4.2.1.3) ifadesini

$$J(u) = \frac{1}{p^2} \|u\|_p^p \tag{4.2.1.11}$$

olarak elde ederiz. Böylece, J nin N üzerinde baskın olduğu görülür. Diğer taraftan, Ω_1 ve Ω_2 kümelerini

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u(x) \leq 1|\} \text{ ve } \Omega_2 = \{x \in \Omega : |u(x) > 1|\}$$

olarak tanımlayalım.

Sonuç 4.2.5 ten dolayı $\zeta > 0$ iken

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p \ln|u| \, dx &\leq \int_{\Omega_1} |u|^p \ln|u| \, dx + \int_{\Omega_2} |u|^p \ln|u| \, dx \\ &\leq C \int_{\Omega_2} |u|^{p+\zeta} \, dx \\ &\leq C \|u\|_{p+\zeta}^{p+\zeta} \end{aligned}$$

dır. Lemma 4.2.6 dan,

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\zeta}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{n\zeta}{p(p+\zeta)}$$

iken

$$\int_\Omega \ln|u| \, |u|^p \, dx \leq C \|u\|_{p+\zeta}^{p+\zeta} \leq C \|\nabla u\|_p^{\alpha(p+\zeta)} \|u\|_p^{(1-\alpha)(p+\zeta)} \tag{4.2.1.12}$$

elde edilir.

Eğer, $\zeta < \frac{p^2}{n}$ olarak seçilirse

$$\alpha(p+\zeta) < p$$

olduğu açıktır.

Young eşitsizliği ve (4.2.1.12) ifadesi kullanılırsa $0 < \varepsilon < 1$ ve

$$\beta = \frac{(1-\alpha)(p+\zeta)}{p-\alpha(p+\zeta)} > 1$$

iken

$$\int_{\Omega} |u|^p \ln|u| \, dx \leq \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + C_\varepsilon \left(\|u\|_p^p\right)^\beta \tag{4.2.1.13}$$

elde edilir. $u \in N$ olduğundan, $I(u) = 0$, (4.2.1.2) ve (4.2.1.13) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p &= \int_{\Omega} |u|^p \ln|u| \, dx, \\
\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p &\leq \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + C_\varepsilon \left(\|u\|_p^p\right)^\beta, \\
\|\nabla u\|_p^p &\leq \varepsilon \|\nabla u\|_p^p + C_\varepsilon \left(\|u\|_p^p\right)^\beta, \\
(1-\varepsilon)\|\nabla u\|_p^p &\leq C_\varepsilon \left(\|u\|_p^p\right)^\beta
\end{aligned}$$

olur. (4.2.1.11) ve (4.2.1.13) ifadeleri birlikte ele alınırsa

$$J(t) = \frac{1}{p^2}\|u\|_p^p \geq C_\varepsilon \left(\|\nabla u\|_p^p\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

elde ederiz.

Lemma 4.2.1.3.

(i) Potansiyel kuyunun derinlik tanımı

$$d = \inf_{u \in N} J(u) = \inf \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, \|u\|_p^p \neq 0 \right\}$$

dır.

(ii) d pozitif bir alt sınıra sahiptir, yani,

$$d \geq \frac{1}{p^2} e^{\frac{n+p^2}{p}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p}} = \frac{l^p}{p^2} = K$$

burada ℓ_p, Lemma 4.2.2 de tanımlanmıştır.

(iii) $u \in N$ pozitif fonksiyonu vardır öyle ki $J(u) = d$ dır.

İspat.

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Lemma 4.2.1.1 den $I(\lambda^* u) = 0$ olacak şekilde λ^* vardır öyle ki $\lambda^* u \in N$ dır. (4.2.1.14) den dolayı

$$J(\lambda^* u) \geq \inf_{u \in N} J(u) = d \tag{4.2.1.15}$$

elde edilir. Lemma 4.2.1.1 den dolayı, λ^*, $J(\lambda u)$ fonksiyonunun maksimum değeri aldığı noktadır öyle ki

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) &= J(\lambda^* u) \\ &= \frac{1}{p} I(\lambda^* u) + \frac{1}{p^2} \|\lambda^* u\|_p^p \\ &= \frac{1}{p^2} \|\lambda^* u\|_p^p \end{aligned} \tag{4.2.1.16}$$

dır. (4.2.1.16) ve (4.2.1.15) kombinasyonundan

$$\inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)/\{0\}} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)/\{0\}} J(\lambda^* u) \geq d \tag{4.2.1.17}$$

elde edilir. Böylece, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ iken $d \neq 0$ elde ederiz. Diğer taraftan, eğer $u \in N$ ise (4.2.1.7) ifadesinin kullanılmasıyla $g(\lambda)$ fonksiyonunun eşitinin $(0, \infty)$ aralığında kritik noktasının $\lambda^* = 1$ olduğu elde edilir. Böylece, her $u \in N$ için

$$\sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) = J(u)$$

dır. Bu nedenle,

$$\inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)/\{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) \leq \inf_{u \in N} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u) = \inf_{u \in N} J(u) = d \tag{4.2.1.18}$$

olur. (4.2.1.17) ve (4.2.1.18) den dolayı (i) ispatlanmış olur.

(ii) Lemma 4.2.1.1 den dolayı, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ için $I(\lambda^* u) = 0$ dır. Lemma

4.2.1.2 den

$$\|\lambda^* u\|_p \geq e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = l \tag{4.2.1.19}$$

elde edilir. (4.2.1.16) ve (4.2.1.19) ifadelerinin birlikte ele alınmasıyla

$$\sup_{\lambda>0} J(\lambda u) \geq \frac{l^p}{p^2} = K$$

ifadesi oluşur. (i) den dolayı $d \geq K$ olduğu söylenir.

J nin bir alt dizisi $\{u_k\}_k^\infty \subset u \in N$ olsun öyle ki

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = d$$

dır. Böylece, açıktır ki $\{|u_k|\}_k^\infty \subset N$ de J nin daraltılmış bir alt dizisidir ayrıca $|u_k| \subset u \in N$ ve $J(|u_k|) = J(u_k)$ dır. Bu nedenle, her $k \in u \in N$ için Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $u_k > 0$ dır.

Diğer taraftan, (i) den dolayı $\{u_k\}_k^\infty$ dizisinin $W_0^{1,p}(\Omega)$ uzayında sınırlı olduğu söylenebilir. $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt gömülmesinden, u fonksiyonu ve $\{u_k\}_k^\infty$ alt dizisi vardır, öyle ki

$$\begin{cases} u_k \to u \text{ zayıf yakınsak } W_0^{1,p}(\Omega) \\ u_k \to u \text{ güçlü yakınsak } L^p(\Omega) \\ u_k(x) \to u(x) \quad \text{h.h.h } \Omega \end{cases}$$

dır.

Sonra, zayıf alttan yarı süreklilik ve Lebesgue baskın yakınsama teoremi kullanılarak Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $u \geq 0$ ve

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \ln|u|\, u^p dx \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\inf\left(\frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \ln|u|\, u^p dx\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\inf J(u_k) = d \end{aligned}$$

elde edilir.

$u_k \in N$ olduğundan $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ ve $I(u_k)$ elde edilir öyle ki

$$\|u_k\|_p \geq e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}} = l$$

sağlanır.

Lemma 4.2.1.2 den $L^p(\Omega)$ de güçlü yakınsamadan $\|u\|_p \neq 0$ anlamına gelir, böylece, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ dır. Dahası, zayıf alttan yarı süreklilikten

$$\begin{aligned} I(u) &= \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_\Omega \ln|u|\, u^p dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p - \int_\Omega \ln|u|\, u^p dx \right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} I(u_k) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) ün ispatının son adımında, $I(u) = 0$ olduğunu gösteriyoruz. Eğer bu yanlışsa, $I(u) < 0$ dır, o zaman Lemma 4.2.1.1 ye göre, $I(\lambda^* u) = 0$ ı sağlayan pozitif bir $\lambda^* < 1$ sabiti vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} 0 &< d \leq J(\lambda^* u) = \frac{1}{p^2}\|\lambda^* u\|_p^p \\ &\leq \frac{(\lambda^*)^p}{p^2} \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_p^p \\ &= (\lambda^*)^p \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \\ &= (\lambda^*)^p d < d \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Böylece Lemma 4.2.1.3 ün ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 4.2.1.4. $\Omega \times [0,T)$ da $u(t)$ fonksiyonu aşagıdaki koşulları sağlıyorsa

$$u \in C\left((0,T); W_0^{1,p}(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T); L^2(\Omega)\right)$$

ve

$$u_t \in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega)\right)$$

(4.2.1) probleminin zayıf bir çözümüdür. Ayrıca $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega u_{tt}(x,t)\, w(x)\, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx \\ \quad + \int\limits_\Omega |u|^{p-2} uw(x)\, dx \quad + \int\limits_\Omega u_t w(x)\, dx \\ \quad = k \int\limits_\Omega \ln|u(x,t)|\, u^{p-2}(x,t)\, w(x)\, dx \\ \quad u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 4.2.1.5. $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \times L^2(\Omega)$ ve $l = e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}}$ olsun. Kabul edelim ki $0 < E(0) < \frac{l^p}{p^2} < d$ dır. $u(t)$ nin maksimum varlık zamanı olmak üzere

(i) Eğer $u_0 \in W$ ise $0 \le t \le T$ için $u \in W$;

(ii) Eğer $u_0 \in V$, ise $0 \le t \le T$ için $u \in V$;

dır.

İspat.

(i) u nun zayıf çözümünün maksimum varlık zamanı T olsun. (4.2.1.4) ve (4.2.1.14) den $\forall t \in [0, T)$ için

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) \le \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + J(u_0) < d \tag{4.2.1.20}$$

elde edilir. Böylece, tüm $t \in [0, T)$ için $u(t) \in W$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer yanlışsa, bir $t_0 \in [0, T)$ vardır öyle ki $u(t_0) \in \partial W$ dır, yani $I(u_0) = 0$ ve $\|(u_0)\| \neq 0$, veya (b) $J(u_0) = d$ olur.

(4.2.1.20) ten dolayı, (b) nin gerçekleşmesi imkansızdır, böylece $I(u_0) = 0$ ve $\|(u_0)\| \neq 0$ olur. Ancak, $0 < d = \inf\limits_{u \in \aleph} J(u)$ ise en az bir $J(u_0) \ge d$ vardır. Bu çelişkiden dolayı, $\forall t \in [0, T)$ için $u(t) \in W$ olarak bulunur.

(ii) (ii) nin ispatı (i) e benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.1.6. $u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. Eğer $I(u_0) > 0$ ve $E(0) < d$ veya $\|u_0\|_p^p = 0$, ise (4.2.1) probleminin global zayıf çözümü $u(t) \in L^\infty\left(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}\right)$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ olur.

İspat. $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $L^2(\Omega)$ uzayında ortonormal $W_0^{1,p}(\Omega)$ ayrık uzayının ortogonal bir bazı olsun.

$$V_m = \text{span}\{w_1, w_2, ..., w_m\}$$

tanımlansın ve sonlu boyutlu uzay V_m de başlangıç değerleri $j = 1, 2, ..., m$ ve $(u_0, u_1) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega)\right)$ için

$$\begin{aligned} u_0^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} a_j w_j(x) \to u_0, \\ u_1^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} b_j w_j(x) \to u_1 \end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun.

(4.2.1) probleminin yaklaşık çözümlerini V_m de $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \int_\Omega u_{tt}^m(x,t)\, w(x)\, dx + \int_\Omega |\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m \nabla w dx \\ + \int_\Omega |u^m|^{p-2} u^m w(x)\, dx + \int_\Omega u_t^m w(x)\, dx \\ = \int_\Omega |u^m|^{p-2}(x,t) \ln|u^m(x,t)|\, w(x)\, dx \\ u^m(0) = u_0^m = \sum_{j=1}^{m} (u_0, w_j) w_j \\ u_t^m(0) = u_1^m = \sum_{j=1}^{m} (u_1, w_j) w_j \end{cases} \tag{4.2.1.21}$$

dır.

(4.2.1.21) probleminin yaklaşık çözümü olan

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_j^m(t)\, w_j(x)$$

şeklinde çözüm bulmaya çalışacağız.

Böylece bilinmeyen $h_j^m(t)$ fonksiyonları adi diferansiyel denklemlerin sistemine dönüşür. Adi diferansiyel denklemlerin klasik varlık teoreminden, (4.2.1.21) denklemini $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$ maksimum aralığında sağlayan

$$h_j : [0, t_m) \to R, \quad j = 1, 2, ..., m$$

bir fonksiyon olsun. Sonra, $t_m = T$ olduğunu olduğunu ve lokal çözümlerin m ve t den bağımsız olarak varlığını göstermeye çalışacağız. Bu iddianın ispatı için, (4.2.1.21) ifadesinde yer alan w yerine u_t^m terimi alınır ve integrallenirse

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = -\left\|u_t^m\right\|^2 \leq 0 \tag{4.2.1.22}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} E^m(t) &= \frac{1}{2}\left\|u_t^m\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|\nabla u^m\right\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\left\|u^m\right\|_p^p \\ &\quad -\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u^m|^p \ln|u^m|\, dx \end{aligned} \tag{4.2.1.23}$$

dır.

(4.2.1.22) ifadesi 0 dan t ye integrallenir, ve (4.2.1.4) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\left\|u_t^m\right\|^2 + J(u^m) + \int\limits_0^t \left\|u_s^m\right\|^2 ds = E^m(0) \tag{4.2.1.24}$$

elde ederiz. (4.2.1.21) probleminin başlangıç koşullarının yardımıyla, $m \to \infty$ için $E^m(0) \to E(0)$ elde edilir. m yeterince büyük seçilirse

$$\frac{1}{2}\left\|u_t^m\right\|^2 + J(u^m) + \int\limits_0^t \left\|u_s^m\right\|^2 ds < d \tag{4.2.1.25}$$

dır. (4.2.1.3) ten dolayı

$$J(u) = \frac{1}{p}I(u) + \frac{1}{p^2}\left\|u\right\|_p^p \tag{4.2.1.26}$$

olduğu görülür.

$u_0 \in W$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\left\|u_t^m(0)\right\|^2 + J(u^m(0)) = E(0) \tag{4.2.1.27}$$

ve başlangıç koşulları $0 \leq t < \infty$ için m yeterince büyük seçilirse $u^m(0) \in W$ elde edilir. (4.2.1.4) ve Lemma 4.2.1.5 dekine benzer işlemlerden, yeterince büyük m seçimi ve $0 \leq t < \infty$ için $u^m(t) \in W$ olarak elde edilir. Böylece, (4.2.1.25) ve (4.2.1.1)

ifadelerinden $0 \leq t < \infty$ iken

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}\left\|u_t^m\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|\nabla u^m\right\|_p^p + \frac{p+1}{p^2}\left\|u^m\right\|_p^p \\ -\frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u^m|^p \ln|u^m|\,dx + \int\limits_0^t \left\|u_s^m\right\|^2 ds < d \end{array} \tag{4.2.1.28}$$

elde edilir. Yeterince büyük m ve $0 \leq t < \infty$ için, (4.2.1.28) ifadesinden

$$\left\|u_t^m\right\|^2 < 2d,$$

$$\left\|\nabla u^m\right\|_p^p < pd,$$

$$\left\|u^m\right\|_p^p < \frac{p^2}{p+1}d,$$

$$\int\limits_0^t \left\|u_s^m\right\|^2 ds < d$$

olarak ifade edilir. Sonuç 4.2.5 teki çıkarımdan dolayı $p < n$ iken $p + \zeta < \frac{np}{n-p}$ ve $p \geq n$ iken $\zeta > 0$ olacak şekilde ζ seçilir ve $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u^m(x) < 1|\}$ ve $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u^m(x) \geq 1|\}$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega |u^m|^p \ln|u^m|\,dx &\leq \int\limits_{\Omega_1} |u^m|^p \ln|u^m|\,dx + \int\limits_{\Omega_2} |u^m|^p \ln|u^m|\,dx \\ &\leq C\int\limits_{\Omega_2} |u^m|^{p+\zeta}\,dx \\ &\leq C\left\|u^m\right\|_{p+\zeta}^{p+\zeta} \end{aligned} \tag{4.2.1.29}$$

olarak bulunur.

Lemma 4.2.6, Sobolev gömme teoremi ve Young Eşitsizliği kullanılırsa, (4.2.1.29) ifadesi

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \ln|u^m|\,|u^m|^p\,dx &\leq C\left\|u^m\right\|_{p+\zeta}^{p+\zeta} \\ &\leq C\left\|\nabla u^m u\right\|_p^{\alpha(p+\zeta)}\left\|u^m\right\|_p^{(1-\alpha)(p+\zeta)} \\ &\leq \varepsilon\left\|\nabla u^m u\right\|_p^p + C_\varepsilon\left(\left\|u^m\right\|_p^p\right)^{\frac{(1-\alpha)p(p+\zeta)}{p[p-\alpha(p+\zeta)]}} \\ &\leq C_\varepsilon\left\|\nabla u^m u\right\|_p^p \end{aligned} \tag{4.2.1.30}$$

olarak elde edilir. Burada $\varepsilon \in (0,1)$ iken $p > \alpha(p+\zeta)$ için $0 < \zeta$ seçilmiştir. $0 \leq t < \infty$ için

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\zeta}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\right)^{-1} \text{ ve } \frac{(1-\alpha)\,p\,(p+\zeta)}{p-\alpha\,(p+\zeta)} > 1$$

olduğundan, (4.2.1.30) ve (4.2.1.28) den dolayı

$$\int_{\Omega} \ln|u^m|\,|u^m|^p\,dx < C_\varepsilon pd$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} u^m,\ L^\infty\left(0,\infty;W_0^{1,p}(\Omega)\right) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \\ u_t^m,\ L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \end{cases}$$

dır.

Böylece, (4.2.1.21) ifadesi t ye göre integrallenirse, $0 \leq t < \infty$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t w_s dx &= \int_{\Omega} u_1 w_s dx + \int_0^t \int_{\Omega} \ln|u^m|^k\,|u^m|^{p-1}\,w_s dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} u_t^m w_s dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u^m|^{p-2}(s)\nabla u^m(s)\nabla w_s dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} |u^m|^{p-2}(s)u^m(s)w_s dx \end{aligned} \tag{4.2.1.31}$$

elde edilir. Bu nedenle, alt diziden, (4.2.1.31) ifadesinde limite geçilebilir ve u, (4.2.1) probleminin yukarıdaki eşitlikten dolayı zayıf bir çözümü olur. Diğer taraftan, (4.2.1.21) deki başlangıç koşullarından $W_0^{1,p}$ de $(u(x,0)) = (u_0)$ ve $L^2(\Omega)$ de $(u_t(x,0)) = (u_1)$ sonucuna varabiliriz.

4.2.2. Çözümlerin Üstel Büyümesi

Bu bölümde, (4.2.1) probleminin çözümlerinin üstel büyümesi için gerekli şartları oluşturduk.

Teorem 4.2.2.1. $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ sağlansın. $u(t,x)$, (4.2.1) probleminin bir zayıf çözümü olsun. $0 < E(0) < \frac{l^p}{p^2} < d$, ve $u_0 \in V$ iken, problemin çözümleri zaman sonsuza giderken üstel bir fonksiyon olarak büyür.

İspat.

$$E(0) < E_1 < \frac{l^p}{p^2}$$

iken

$$H(t) = E_1 - E(t) \tag{4.2.2.1}$$

olsun. $E(t)$ nin tanımı ve (4.2.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$H'(t) = -E'(t) = \|u_t\|^2 > 0 \tag{4.2.2.2}$$

ve

$$\begin{aligned} H(t) &\geq H(0) \\ &= E_1 - E(0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\varepsilon > 0$ daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere $\forall t \geq 0$ için

$$L(t) = H(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t u dx + \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 \tag{4.2.2.3}$$

tanımlayalım. Sonra, $L(t)$ nin t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} &L'(t) = H'(t) + \varepsilon \int_\Omega \left(u_{tt} u + u_t^2\right) dx + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx \\ &= H'(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t^2 dx + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx \\ &+\varepsilon \int_\Omega \left(div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) - u^{p-2} u - u_t + \ln|u| \, u^{p-2} u\right) u \\ &= (1+\varepsilon) \|u_t\|^2 - \varepsilon \left(\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p\right) + \varepsilon \int_\Omega \ln|u| \, u^p dx \end{aligned} \tag{4.2.2.4}$$

olarak elde edilir.

β pozitif bir sabit olmak üzere (4.2.2.4) eşitliğine $\varepsilon\beta H(t)$ ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned} L'(t) &= \varepsilon\beta H(t) - \varepsilon\beta E_1 + \left(1+\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p + \varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|u\|_p^p \\ &\quad -\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\int_\Omega \ln|u|\,u^p dx + \frac{1}{p^2}\beta\varepsilon\|u\|_p^p \\ &= \varepsilon\beta H(t) + \left(1+\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p + \varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|u\|_p^p \\ &\quad -\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\int_\Omega \ln|u|\,u^p dx + \varepsilon\beta\left[\frac{1}{p^2}\|u\|_p^p - E_1\right] \end{aligned} \tag{4.2.2.5}$$

elde ederiz.

$u_0 \in V$ ve Lemma 4.2.1.2 ve Lemma 4.2.1.5 den, $u \in V$ dır. Ayrıca $I(u) < 0$ iken $\|u\|_p > l$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $E_1 < \frac{l^p}{p^2} < \frac{1}{p^2}\|u\|_p^p$ olarak yazılabilir. Bu ifade (4.2.2.5) te yerine yazılır ve Logaritmik Sobolev eşitsizliğini kullanılırsak

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \varepsilon\beta H(t) + \left(1+\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p + \varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|u\|_p^p \\ &\quad -\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\int_\Omega \ln|u|\,u^p dx, \\ &\geq \varepsilon\beta H(t) + \left(1+\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p + \varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\|u\|_p^p \\ &\quad -\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\left(\frac{\mu}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{n}{p^2}\ln\frac{p\mu e}{n\ell_p}\|u\|_p^p + \ln\|u\|_p\|u\|_p^p\right) \\ &= \varepsilon\beta H(t) + \left(1+\varepsilon+\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right)\left(1-\frac{\mu}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\beta-p}{p}\right).\left[1+\frac{n}{p^2}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right) - \ln\|u\|_p\right]\|u\|_p^p \end{aligned} \tag{4.2.2.6}$$

olarak elde edilir.

Lemma 4.2.1.2 den $p=\mu$, ve $\|u\|_p > e^{\frac{n+p^2}{p^2}}\left(\frac{p^2}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p^2}}$ olarak alınabilir. Böylece $1+\frac{n}{p^2}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right)-\ln\|u\|_p<0$ olduğu açıktır. Burada $\beta\geq 2p$ olarak seçilirse $\varepsilon>0$ için $\theta>0$, $\left\{\|\nabla u\|_p^p, \|u\|_p^p, \|u_t\|^2, H(t)\right\}$ katsayılarının minimumu olmak üzere yani

$$\theta=\min\left\{\|\nabla u\|_p^p, \|u\|_p^p, \|u_t\|^2, H(t)\right\}$$

iken, (4.2.2.6) ifadesi

$$L'(t)\geq\theta\left[\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_p^p+\|u_t\|^2+H(t)\right] \tag{4.2.2.7}$$

dır.

Ayrıca, Hölder ve Young eşitsziliklerinden, $0<\frac{2}{p}<1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L(t) &\leq H(t)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\|u\|^2+\|u_t\|^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 \\ &= H(t)+\varepsilon\|u\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 \\ &\leq H(t)+\varepsilon c\|u\|_p^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 \\ &\leq \varepsilon c\left(\|u\|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2+H(t) \end{aligned} \tag{4.2.2.8}$$

elde edilir. Aşağıdaki cebirsel eşitsizliğin kullanılmasıyla $\forall z\geq 0$, $0<v\leq 1$, $\alpha\geq 0$ olarak alınırsa

$$z^v\leq z+1\leq\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(z+\alpha)$$

ve $H(t)\geq H(0)$ olduğundan, $C=1+\frac{1}{H(0)}$ iken

$$\left(\|u\|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}\leq C\left(\|u\|_p^p+H(t)\right) \tag{4.2.2.9}$$

olur. (4.2.2.9) yi (4.2.2.8) te yerine yazarsak

$$\begin{aligned} L(t) &\leq H(t)+\varepsilon C\left(\|u\|_p^p+H(t)\right)+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 \\ &\leq C_1\left(\|u\|_p^p+\|u_t\|^2+H(t)\right) \\ &\leq C_1\left(\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_p^p+\|u_t\|^2+H(t)\right) \end{aligned}$$

olur.

(4.2.2.7) ve (4.2.2.8) eşitsizliklerinin birleşiminden

$$L'(t) \geq C_1 L(t) \tag{4.2.2.10}$$

elde edilir.

(4.2.2.10) ifadesinin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$L(t) \geq L(0)\, e^{C_1 t}$$

dır. Böylece bu eşitsizliğin elde edilmesiyle teoremin ispatı tamamlanır.

4.2.3. Çözümlerin Azalması

Bu bölümde, (4.2.1) probleminin çözümlerinin azalmasını ele alacağız. Bu ispat için, ε pozitif sabit olmak üzere Lyapunov fonksiyonelini

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \tag{4.2.3.1}$$

olarak tanımlayacğız. $L(t)$ ve $E(t)$ fonksiyonlarının denk olduğunu göstereceğiz.

Lemma 4.2.3.1. $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olmak üzere, aşağıdaki

$$\beta_1 L(t) \leq E(t) \leq \beta_2 L(t) \tag{4.2.3.2}$$

eşitsizlik β_1 ve β_2 pozitif iki sabit olmak üzere sağlansın.

Teorem 4.2.3.2. $u_0 \in V$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki

$$l = e^{\frac{n+p^2}{p^2}} \left(\frac{p^2}{n\ell_p} \right)^{\frac{n}{p^2}}$$

ve

$$\mu^{\frac{n-p^2}{np}} e^{(1-p)\left(n+p^2\right)} \left(\frac{p}{n\ell_p} \right)^{\frac{1-p}{p}} < \mu < \frac{p(\beta - p) + \beta C^*}{(\beta - p)}$$

iken, $0 < E(0) < \frac{p+1}{p^2} \mu l^p < d$ sağlansın, böylece c_1 ve c_2 gibi iki sabit vardır öyle ki, $t \geq 0$ için

$$0 < E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t}$$

dır.

İspat. $L(t)$ nin zamana göre türevini alır ve (4.2.1) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} L'(t) &= E'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} \left(u_{tt}u + u_t^2\right) dx + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \\ &= (\varepsilon - 1)\|u_t\|^2 - \varepsilon\left(\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_p^p\right) + \varepsilon \int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx \end{aligned} \tag{4.2.3.3}$$

elde edilir. β pozitif sabit olmak üzere (4.2.3.3) eşitliğine $\varepsilon\beta E(t)$ ifadesi eklenir ve çıkarılırsa ve C^* pozitif sabit iken $\|u\|_p^p \leq C^* \|\nabla u\|_p^p$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= \left(\varepsilon + \frac{\beta\varepsilon}{2} - 1\right)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\|u\|_p^p + \varepsilon\left(1 - \frac{\beta}{p}\right)\int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx \\ &\quad + \frac{1}{p^2}\varepsilon\beta\|u\|_p^p - \varepsilon\beta E(t) \\ &= \left(\varepsilon + \frac{\beta\varepsilon}{2} - 1\right)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\|u\|_p^p \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\left(1 + \frac{C^*\beta}{p(\beta - p)}\right)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad + \varepsilon\left(1 - \frac{\beta}{p}\right)\int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx \end{aligned} \tag{4.2.3.4}$$

olur. (4.2.3.4) ifadesinde Logaritmik Sobolev eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq \left(\varepsilon + \frac{\beta\varepsilon}{2} - 1\right)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\left(1 + \frac{C^*\beta}{p(\beta - p)}\right)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\|u\|_p^p + \varepsilon\left(1 - \frac{\beta}{p}\right)\int_{\Omega} \ln|u|\, u^p dx - \varepsilon\beta E(t) \\ &= -\varepsilon\beta E(t) + \left(\varepsilon + \frac{\beta\varepsilon}{2} - 1\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right)\left(1 + \frac{C^*\beta}{p(\beta - p)} - \frac{\mu}{p}\right)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad - \varepsilon\left(\frac{\beta - p}{p}\right).\left[\ln\|u\|_p - \left(\frac{n}{p^2}\ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right) + 1\right)\right]\|u\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \beta < p$ olduğu dikkate alınır ve (4.2.1.1) ifadesi ve Teorem 4.2.3.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\ln \|u\|_p &\leq \ln\left(\frac{p^2}{p+1} J(u)\right) \\
&\leq \ln\left(\frac{p^2}{p+1} E(t)\right) \\
&\leq \ln\left(\frac{p^2}{p+1} E(0)\right) \\
&\leq \ln\left(\mu l^p\right) \\
&= \ln\left(\mu e^{\frac{n+p^2}{p}} \left(\frac{p\mu}{n\ell_p}\right)^{\frac{n}{p}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

μ sabiti

$$\mu^{\frac{n-p^2}{np}} e^{(1-p)\left(n+p^2\right)} \left(\frac{p}{n\ell_p}\right)^{\frac{1-p}{p}} < \mu < \frac{p(\beta-p)+\beta C^*}{(\beta-p)}$$

ifadesini sağladığından

$$\left(1 + \frac{C^*\beta}{p(\beta-p)} - \frac{\mu}{p}\right) > 0$$

ve

$$\ln \|u\|_p - \left(\frac{n}{p^2} \ln\left(\frac{p\mu e}{n\ell_p}\right) + 1\right) > 0$$

olduğunu garanti edilmiş olur ve böylece

$$L'(t) \leq -\varepsilon\beta E(t) + \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\beta - 1\right) \|u_t\|^2 \tag{4.2.3.5}$$

elde edilir.

$\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilirse

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\beta - 1 < 0$$

olur. Sonuç olarak, (4.2.3.5) ifadesi

$$L'(t) \leq -\varepsilon\beta E(t)$$

elde edilir. (4.2.3.2) den dolayı

$$L'(t) \leq -\varepsilon\beta\beta_2 L(t) \tag{4.2.3.6}$$

dır. $c_2 = \varepsilon\beta\beta_2 > 0$ olarak alınır ve (4.2.3.6) eşitsizliği $(0,t)$ aralığında integrallenirse aşağıdaki

$$L(t) \leq c_1 e^{-c_2 t}$$

eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3. Logartimik Kaynak Terime Sahip Yüksek Mertebeden Kirchhoff Denklem Sisteminin Çözümlerinin Varlığı ve Asimptotik Davranşı

Bu çalışmada logaritmik kaynak terime ve doğrusal olmayan sönüm terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff tipli sistemi $x \in \Omega$, $t > 0$ için

$$\begin{cases} u_{tt} + M\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{r_1} u - \Delta u_t + |u_t|^{q-2} u_t = |u|^{p-2} u \ln|u| \\ v_{tt} + M\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)(-\triangle)^{r_2} v - \Delta v_t + |v_t|^{q-2} v_t = |v|^{p-2} v \ln|v| \end{cases} \tag{4.3.1}$$

başlangıç

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \;\; v_t(x,0) = v_1(x) \end{cases}$$

ve sınır koşulları ile

$$\begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial\nu^i} u(x,t) = 0, \;\; i = 0,1,2,...r_1 - 1, \\ \frac{\partial^j}{\partial\nu^j} v(x,t) = 0, \;\; j = 0,1,2,...r_2 - 1 \end{cases}$$

$q \geq 2$ ve $p \geq 2\gamma + 2$ reel sayılar ve $r_i \geq 1\,(i = 1,2,)$ pozitif tam sayılar olmak üzere ele aldık. Kirchhoff terimi $M(s) = \beta_1 + \beta_2 s^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $\beta_1 \geq 1$, $\beta_2 \geq 0$ olarak tanımlanmıştır. Burada $\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ bu bölgenin yeterince düzgün sınırıdır. ν vektörü $\partial\Omega$ üzerindeki birim dışa doğru normal vektörü ve $\frac{\partial^i}{\partial\nu^i}$, i ninci mertebeden türevi ifade etmek üzere D operatörü $Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ...\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ olacak şekilde gradient operatör olarak alınmıştır. Ayrıca $r = 2k$ ise $D^r u = \Delta^k u$ ve $r = 2k+1$ ise $D^r u = D\Delta^k u$ olarak ifade edilmiştir.

Çalışmamızda (4.3.1) denklemini başlangıç ve sınır koşulları ile ele alarak problemin çözümlerinin global varlığını ve çözümlerin üstel azalmasını çalıştık (Pişkin ve Irkıl 2021).

(4.3.1) probleminin potansiyel enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} J(t) &= J(u,v) \\ &= \frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)+\frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right) \\ &\quad +\frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\ &\quad -\frac{1}{p}\left(\int_\Omega |u|^p\ln|u|\,dx+\int_\Omega |v|^p\ln|v|\,dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

ve Nehari fonksiyoneli

$$\begin{aligned} I(t) &= I(u,v) \\ &= \beta_1\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)+\beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\ &\quad -\left(\int_\Omega |u|^p\ln|u|\,dx+\int_\Omega |v|^p\ln|v|\,dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

dır.

(4.3.2) ve (4.3.3) ifadelerinden açıkça görülür ki

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{p}I(t)+\frac{\beta_1(p-2)}{2p}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right) \\ &\quad +\frac{\beta_2(p-2\gamma-2)}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\ &\quad +\frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

dır.

Potansiyel kuyu metoduna uygun olarak iki küme tanımlayalım. Kararlı küme

$$W=\{(u,v)\in H_0^{r_1}(\Omega)\times H_0^{r_2}(\Omega): I(u,v)>0\}\cup\{0\}$$

olmak üzere kararsız küme ise

$$V = \{(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega) : I(u,v) < 0\}$$

olarak tanımlansın.

$(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)$ olmak üzere $t \geq 0$ için problemin toplam enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= E(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right) \\ &\quad - \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx + \int_\Omega |v|^p \ln|v|\, dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

ve buna bağlı olarak $(u_0,v_0) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)$ ve $(u_1,v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ olmak üzere başlangıç enerjisi

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|v_1\|^2\right) + \frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2 + \|D^{r_2}v_0\|^2\right) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2 + \|D^{r_2}v_0\|^2\right)^{\gamma+1} \\ &\quad + \frac{1}{p^2}\left(\|u_0\|_p^p + \|v_0\|_p^p\right) \\ &\quad - \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |u_0|^p \ln|u_0|\, dx + \int_\Omega |v_0|^p \ln|v_0|\, dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

olarak bulunur. (4.3.5) ve (4.3.4) ifadelerinden

$$E(t) = E(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + J(u,v) \tag{4.3.7}$$

sonucuna varılır.

Lemma 4.3.1. $n \leq 2r$ ise $2 \leq m < \infty$ ve $n > 2r$ ise $2 \leq m \leq \frac{2n}{n-2r}$ olacak şekilde bir m sayısı olsun. C bir bağımsız sabit olmak üzere $\forall u \in H_0^r(\Omega)$ için

$$\|u\|_m \leq C \|D^r u\|$$

eşitsizliği sağlanır (Adams 2003, Pişkin 2017).

Lemma 4.3.2. $t \geq 0$ olmak üzere $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur ve

$$E'(t) = -\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) - \left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \leq 0 \tag{4.3.8}$$

yani

$$E(0) = E(t) + \left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) + \left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right)$$

dır.

İspat. (4.3.1) probleminin ilk denklemini u_t ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω bölgesinde integrallersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx\right) \\ & \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^\gamma\right)\frac{d}{dt}\|D^{r_1}u\|^2 \\ = & -\int_\Omega |u_t|^{q+1}\, dx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p^2}\|v\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |v|^p \ln|v|\, dx\right) \\ & \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^\gamma\right)\frac{d}{dt}\|D^{r_2}v\|^2 \\ = & -\int_\Omega |v_t|^{q+1}\, dx - \int_\Omega |\nabla v_t|^2\, dx \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

olarak elde edilir.

(4.3.9) ve (4.3.10) ifadeleri toplanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma}\right)\frac{d}{dt}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
&\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|u|^p\ln|u|+|v|^p\ln|v|\right)dx+\frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\right)\\
=\;&-\left[\int_\Omega u_t^{q+1}dx+\int_\Omega v_t^{q+1}dx+\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx+\int_\Omega|\nabla v_t|^2\,dx\right] \qquad (4.3.11)
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

(4.3.11) ifadesinin $[0,t]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)-\frac{1}{p}\int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\beta_1+\beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma}\right)d\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2+\|v_1\|^2\right)-\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|u_0|^p\ln|u_0|+|v_0|^p\ln|v_0|\right)dx\\
&+\frac{1}{p^2}\left(\|u_0\|_p^p+\|v_0\|_p^p\right)-\left(\int_0^t\|u_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau+\int_0^t\|v_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau\right)\\
&-\left(\int_0^t\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+\int_\Omega\|\nabla v_\tau\|^2\,d\tau\right) \qquad (4.3.12)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

(4.3.12) ifadesinin solunda yer alan dördüncü terimini

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t\left(\beta_1+\beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma}\right)d\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
=\;&\frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)-\frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2+\|D^{r_2}v_0\|^2\right)\\
&+\frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&-\frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2+\|D^{r_2}v_0\|^2\right)^{\gamma+1} \qquad (4.3.13)
\end{aligned}$$

olarak düzenleyebiliriz. (4.3.13) ifadesi (4.3.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
&+\frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&+\frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&+\left(\int_0^t\|u_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau+\int_\Omega\|v_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau\right)\\
&+\left(\int_0^t\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+\int_\Omega\|\nabla v_\tau\|^2\,d\tau\right)\\
&-\frac{1}{p}\int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2+\|v_1\|^2\right)+\frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2+\|D^{r_2}v_0\|^2\right)\\
&+\frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u_0\|^2+\|D^{r_2}v_0\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&+\frac{1}{p^2}\left(\|u_0\|_p^p+\|v_0\|_p^p\right)\\
&-\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|u_0|^p\ln|u_0|+|v_0|^p\ln|v_0|\right)dx
\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

olarak elde edilir. Böylece toplam enerji fonksiyoneli ve başlangıç enerjisi fonksiyonelinin (4.3.5) ve (4.3.6) daki tanımlarından

$$\begin{aligned}
E(0) &= E(t)+\left(\int_0^t\|u_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau+\int_\Omega\|v_\tau\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau\right)\\
&\quad+\left(\int_0^t\|\nabla u_\tau\|^2\,d\tau+\int_\Omega\|\nabla v_\tau\|^2\,d\tau\right)
\end{aligned}\tag{4.3.15}$$

olduğu görülebilir.

Şimdi, $J(u,v)$ ve $I(u,v)$ ile ilgili birkaç özellik vereceğiz:

Lemma 4.3.3. $(u,v)\in H_0^{r_1}(\Omega)\times H_0^{r_2}(\Omega)$, $\|D^{r_1}u\|\neq 0$, $\|D^{r_2}v\|\neq 0$ ve $g(\lambda)=J(\lambda u,\lambda v)$ olsun. Böylece,

(ii) $\lim_{\lambda\to 0}g(\lambda)=0$, $\lim_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=-\infty$;

(ii) Tek bir $\lambda_1=\lambda_1(u)$ vardır öyle ki $g'(\lambda)=0$;

(iii) $J(\lambda u, \lambda v)$ fonksiyonu $0 < \lambda \leq \lambda_1$ aralığında artan, $\lambda > \lambda_1$ aralığında azalan ve $\lambda = \lambda_1$ eşitliğinde fonksiyon maksimum değerini alır. Başka bir ifadeyle; $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ olacak şekilde öyle bir λ_1 vardır öyle ki

$$I(\lambda u, \lambda v) = \lambda g'(\lambda) \begin{cases} > 0, & 0 \leq \lambda < \lambda_1 \\ = 0, & \lambda = \lambda_1 \\ < 0, & \lambda_1 < \lambda \end{cases}$$

ifade edilebilir.

İspat. $J(u, v)$ tanımından

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= J(\lambda u, \lambda v) \\ &= \frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}\lambda u\|^2 + \left\|D^{r_2\lambda} v\right\|^2\right) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\left(\|D^{r_1}\lambda u\|^2 + \|D^{r_2}\lambda v\|^2\right)\right)^{\gamma+1} \\ &\quad - \frac{1}{p}\left(\int_\Omega (\lambda u)^p \ln|\lambda u|\, dx + \int_\Omega (\lambda v)^p \ln|\lambda v|\, dx\right) \\ &\quad + \frac{1}{p^2}\left(\|\lambda u\|_p^p + \|\lambda v\|_p^p\right) \\ &= \frac{\beta_1\lambda^2}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\ &\quad + \frac{\beta_2\lambda^{2\gamma+2}}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{2\gamma+2} \\ &\quad + \frac{\lambda^p}{p^2}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right) \\ &\quad - \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega \left(u^p \ln|u| + v^p \ln|v|\right) dx \\ &\quad - \frac{\lambda^p}{p}\ln\lambda \int_\Omega (u^p + v^p)\, dx \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

olarak elde edilir. $\|D^{r_1}u\| \neq 0$, ve $\|D^{r_2}v\| \neq 0$ olarak kabul edilirse $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ ve $\lim_{\lambda\to\infty} \ln x = \infty$ olduğu bilindiğinden $\lim_{\lambda\to 0} g(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = -\infty$ olduğu açıkça

görülür. Daha sonra $g(\lambda)$ fonksiyonelinin λ ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= \beta_1\lambda\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
&\quad+\beta_2\lambda^{2\gamma+1}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&\quad+\frac{\lambda^{p-1}}{p}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&\quad-\lambda^{p-1}\left(\int_\Omega u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\,dx\right)\\
&\quad-\frac{\lambda^{p-1}}{p}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&\quad-\lambda^{p-1}\ln\lambda\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&= \beta_1\lambda\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\
&\quad+\beta_2\lambda^{2\gamma+1}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&\quad-\lambda^{p-1}\left(\int_\Omega u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\,dx\right)\\
&\quad-\lambda^{p-1}\ln\lambda\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&= \lambda\left(\beta_1\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\right.\\
&\quad+\beta_2\lambda^{2\gamma}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&\quad-\lambda^{p-2}\int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx\\
&\quad\left.-\lambda^{p-2}\ln\lambda\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\right) \qquad (4.3.17)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
(\lambda) &= \beta_2\lambda^{2\gamma}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\
&\quad-\lambda^{p-2}\ln\lambda\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\\
&\quad-\lambda^{p-2}\int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx
\end{aligned}$$

olarak alınsın. Böylece, $\gamma > 0$, $\beta_1 \geq 1$, $\beta_2 \geq 0$ için

$$\begin{aligned}(\lambda) &= \lambda^{p-2}\left[\beta_2\lambda^{2\gamma-p+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\right. \\ &\quad \left.-\int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx-\ln\lambda\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right)\right] \\ &= \lambda^{p-2}\left(x\lambda^{2\gamma-p+2}-y-z\ln\lambda\right)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $x = \beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \geq 0$, $y = \int_\Omega\left(u^p\ln|u|+v^p\ln|v|\right)dx$ ve $z = \left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right) \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda) = -\infty \text{ ve } \lim_{\lambda\to 0}(\lambda) = 0 \tag{4.3.18}$$

olduğunu görebiliriz. Ayrıca gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}'(\lambda) &= (p-2)\lambda^{p-3}\left(x\lambda^{2\gamma-p+2}-y-z\ln\lambda\right) \\ &\quad +\lambda^{p-3}\left(x(2\gamma-p+2)\lambda^{2\gamma-p+2}-z\right) \\ &= \lambda^{p-3}\left(2\gamma x\lambda^{2\gamma-p+2}-y(p-2)-z\ln\lambda(p-2)-z\right)\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. $k \geq 2\gamma+2$, $\gamma > 0$ ve

$$h(\lambda) = 2\gamma x\lambda^{2\gamma-p+2}-y(p-2)-z\ln\lambda(p-2)-z$$

olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\infty}h(\lambda) = -\infty \text{ ve } \lim_{\lambda\to 0}h(\lambda) = 0$$

sağlanır. Ayrıca $h(\lambda)$

$$h'(\lambda) = 2\gamma x(2\gamma-p+2)\lambda^{2\gamma-p+1}-\frac{z(p-2)}{\lambda} < 0$$

olarak elde edilir.

Şimdi $h(\lambda)\ |_{\lambda=\lambda_0} = 0$ olacak şekilde tek bir λ_0 olduğu sonucuna varıyoruz öyle

ki

$$\begin{cases} \psi'(\lambda) < 0, & \lambda \in (\lambda_0, \infty) \\ \psi'(\lambda) = 0, & \lambda = \lambda_0 \\ \psi'(\lambda) > 0, & \lambda \in (0, \lambda_0) \end{cases} \tag{4.3.19}$$

dır. Dolayısıyla, (4.3.18) ve (4.3.19) ifadelerinden $\lambda^* > \lambda_0$ vardır öyle ki

$$(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

olur.

Bundan dolayı $2\gamma \leq p-2$ olmak üzere $\lim\limits_{\lambda\to\infty} (\lambda) = -\infty$ olduğu sonucuna varılır ve $\lambda > \lambda^*$ iken $\psi(\lambda)$ monoton azalandır ve $\psi(\lambda^*) = 0$ olacak şekilde sadece bir λ^* vardır. Sadece bir $\lambda_1 > \lambda^*$ vardır öyle ki $\beta_1\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) + \psi(\lambda) = 0$, yani $g'(\lambda_1) = 0$ dır.

(iii) önermesi

$$\lambda \frac{dJ(\lambda u, \lambda v)}{d\lambda} = \lambda g'(\lambda) = I(\lambda u, \lambda v) \tag{4.3.20}$$

ifadesinin açık bir sonucudur.

Lemma 4.3.4.

(i)

$$N = \{(u,v) : (u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega) \setminus \{0\} : I(u,v) = 0\}$$

iken potansiyel kuyu derinlik tanımı

$$d = \inf_{u\in N} J(u,v) \tag{4.3.21}$$

olarak tanımlansın ve

$$d = \inf\left\{\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u, \lambda v) : (u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega), \|D^{r_1}u\|^2 \neq 0, \|D^{r_2}v\|^2 \neq 0\right\} \tag{4.3.22}$$

olarakta ifade edilir.

(ii) (4.3.21) ifadesinde tanımlanan d sabiti, C_1 Lemma 4.3.1 deki eşitsizliği sağlayan en iyi sabit ($H_0^{r_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, $H_0^{r_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$) ve

$$\begin{cases} 2\gamma+2 \leq p \leq \min\left\{\frac{n+2r_1}{n-2r_1}, \frac{n+2r_2}{n-2r_2}\right\}, & n > 2\max(r_1, r_2) \\ 2\gamma+2 \leq p \leq \infty, & n \leq 2\min(r_1, r_2) \end{cases} \tag{4.3.23}$$

olmak üzere

$$d = \frac{\beta_1 (p-2k)}{2p} \left(\frac{\beta_1}{C_1^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p-1}}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

(i) Lemma 4.3.3 (iii) önermesinden dolayı $(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)$ sağlamak üzere λ_1 vardır öyle ki $I(\lambda_1 u, \lambda_1 v) = 0$, böylece $(\lambda_1 u, \lambda_1 v) \in N$ olur. (4.3.21) de verilen d tanımından $\forall (u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega) \setminus \{0\}$ için

$$J(\lambda_1 u, \lambda_1 v) \geq d \tag{4.3.24}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.3 ten dolayı

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u, \lambda v) = J(\lambda_1 u, \lambda_1 v)$$

olur ve (4.3.24) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \inf_{(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u, \lambda v) \\ = & \inf_{(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)} J(\lambda_1 u, \lambda_1 v) \\ \geq & d \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

olarak ifade edilebilir.

$(u,v) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega) \setminus \{0\}$ iken (4.3.22) ifadesinden $d \neq 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir ifadeyle, (4.3.21) de ifade edilen d tanımından λ^* vardır öyleki

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u, \lambda v) = J(\lambda^* u, \lambda^* v)$$

ifadesi sağlanır.

Lemma 4.3.3 ten dolayı $\lambda^* = \lambda_1$ sonucuna varılır. Lemma 4.3.3 ten

$$I(\lambda^* u, \lambda^* v) = I(\lambda_1 u, \lambda_1 v) = 0$$

olduğu görülür yani $(\lambda^* u, \lambda^* v) \in N$ dir. (4.3.21) de verilen d nin tanımından

$$d = \inf_{(\lambda^* u, \lambda^* v) \in N} J(\lambda^* u, \lambda^* v)$$

olarak yazılır. Böylece,

$$d = \inf_{(u,v) \in N} J(u, v) \tag{4.3.26}$$

olur. Bununla birlikte (i) önermesinin ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $I(u, v) = 0$ kabülü, (4.3.3) te verilen $I(u, v)$ tanımı ve Sobolev gömme teoreminden

$$\begin{aligned} & \beta_1 \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) + \beta_2 \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ = & \int_\Omega |u|^p \ln |u| \, dx + \int_\Omega |v|^p \ln |v| \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta_1 \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \\ \leq & \int_\Omega |u|^p \ln |u| \, dx + \int_\Omega |v|^p \ln |v| \, dx \\ \leq & \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} \\ \leq & C_1^{p+1} \left(\|D^{r_1} u\|^{p+1} + \|D^{r_2} v\|^{p+1} \right) \\ \leq & C_1^{p+1} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

elde edilir. Böylece

$$\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \geq \left(\frac{\beta_1}{C_1^{p+1}} \right)^{\frac{2}{p-1}} \tag{4.3.28}$$

olarak yazılabilir. d nin tanımından $(u, v) \in N$ olduğu sonucuna varılır. (4.3.2) deki $J(u, v)$ tanımı, (4.3.27), (4.3.4) ifadeleri ve $I(u, v) = 0$ kabülünden $2\gamma \leq p - 2$ ve

$\beta_1 > 1, \beta_2 > 0$ iken

$$\begin{aligned} & J(u,v) \\ = & \frac{1}{p} I(u,v) + \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \\ & + \frac{\beta_2 (p-2\gamma-2)}{2\gamma+2} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ & + \frac{1}{p^2} \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) \\ \geq & \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \\ \geq & \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\frac{\beta_1}{C_1^{p+1}} \right)^{\frac{2}{p-1}} \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

olarak ifade edilir. (4.3.26) ve (4.3.29) ifadelerinin birleştirilmesiyle

$$d = \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\frac{\beta_1}{C_1^{p+1}} \right)^{\frac{2}{p-1}}$$

olduğu açık bir şekilde görülür.

4.3.1. Çözümlerin Global Varlığı

Tanım 4.3.1.1. (4.3.1) probleminin $\Omega \times [0,T)$ da her $(u_0, v_0) \in (H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega))$ olmak üzere $t \in [0,T)$ için

$$\begin{aligned} u & \in C\left((0,T);\ H_0^{r_1}(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T);\ H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left((0,T);\ H^{-r_1}\right) \\ v & \in C\left((0,T);\ H_0^{r_2}(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T);\ H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left((0,T);\ H^{-r_2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$(u_t, v_t) \in L^\infty\left((0,T);\ H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)\right) \times L^\infty\left((0,T);\ H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)\right)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} (u_{tt}, \phi) + M\left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \left((-\triangle)^{r_1} u, \phi \right) + \int\limits_\Omega |u_t|^{q-2} u_t \phi dx \\ \qquad = \int\limits_\Omega |u|^{p-2} u \ln |u| \, \phi dx, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_{tt},\varphi)+M\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\left((-\triangle)^{r_2}v,\varphi\right)+\int\limits_{\Omega}|v_t|^{q-2}v_t\varphi dx \\ \qquad =\int\limits_{\Omega}|v|^{p-2}v\ln|v|\,\varphi dx \end{cases}$$

denklemlerini sağlıyorsa $(u(t),v(t))$ problemin zayıf bir çözümüdür.

Lemma 4.3.1.2. (u,v), (4.3.1) probleminin zayıf bir çözümü ve $(u_0,v_0)\in H_0^{r_1}(\Omega)\times H_0^{r_2}(\Omega),(u_1,v_1)\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki $E(0)<d$ olsun. Böylece T, $(u(t),v(t))$ çözümünün maksimum varlık zamanı olmak üzere

(i) Eğer $(u_0,v_0)\in W$ ise $0\le t\le T$ için $(u,v)\in W$;

(ii) Eğer $(u_0,v_0)\in V$, ise $0\le t\le T$ için $(u,v)\in V$;

dır.

İspat. Burada sadece Lemma 4.3.1.2 (i) durumunun ispatı ele alınacaktır. (ii) durumunun ispatı (i) dekine benzer şekilde yapılabilir. $E(0)<d$ ve $(u_0,v_0)\in W$ şartları altında T çözümün maksimum varlık zamanı olarak tanımlanmak üzere $(u(t),v(t))$ çözümü (4.3.1) probleminin zayıf çözümü olsun. Böylece, (4.3.8) dan dolayı enerji fonksiyonelinin zamana (t ye) göre artmayan olduğu açıktır. Böylece, $E((u(t),v(t)))<E(0)<d$ vardır öyle ki $0<t<T$ için $I((u(t),v(t)))>0$ olduğu anlamına gelir. Çelişki metodunu kullanacağız ve kabul edeceğiz ki; $t_1\in(0,T)$ olmak üzere bir t_1 zamanı vardır öyle ki $I(u(t_1),v(t_1))<0$ dır. Bu nedenle, $I(u(t),v(t))$ zamana göre sürekli olduğundan $I(u(t^*),v(t^*))=0$ olacak şekilde $t^*\in(0,T)$ vardır. Daha sonra, (4.3.21) ifadesinden,

$$d>E(0)\ge E(u(t^*),v(t^*))\ge J(u(t^*),v(t^*))\ge d$$

olarak elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3.1.3. Lemma 4.3.1.2 (i) şartları altında,

$$E(0)\ge E(u,v)\ge J(u,v)>\frac{\beta_1(p-2)}{2p}\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2$$

dır.

İspat. (4.3.4) tanımının ve $I(u,v) > 0$ şartının kullanılmasıyla $p > 2\gamma + 2$, $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 0$ iken

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{I(t)}{p} + \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 + \frac{1}{p^2} \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) \\ &\quad \frac{\beta_2 (p-2\gamma-2)}{2\gamma+2} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ &> \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 + \frac{1}{p^2} \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) \\ &\quad \frac{\beta_2 (p-2\gamma-2)}{2\gamma+2} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ &> \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.3.15) ve (4.3.7) ifadelerinden

$$E(0) \geq E(t) \geq J(t) > \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.3.1.4. $(u_0, v_0) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega), (u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ olsun. Eğer $E(0) < d$ ve $I(u_0, v_0) > 0$ veya $\|D^{r_1} u_0\|^2 + \|D^{r_2} v_0\|^2 = 0$ ise,

$$(u(t), v(t)) \in L^\infty(0, \infty;\ H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)),$$

$$(u_t(t), v_t(t)) \in L^\infty\left(0, \infty;\ H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)\right)$$

(4.3.1) probleminin global zayıf bir çözümü olur.

İspat. $H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)$ uzayının temel bazı $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ olsun. Ayrıca

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} h_j^m(t) w_j(x),\ m = 1, 2, ...$$

ve

$$v^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t) w_j(x),\ m = 1, 2, ...$$

V_m de (4.3.1) probleminin yaklaşık çözümü olarak kabul edilsin. $h_j^m(t)$ ve $g_j^m(t)$ fonksiyonları t ye bağımlı; $w_j(x)$ fonksiyonu ise x e bağımlı fonksiyon olsun. Ayrıca $u^m(x,t)$

ve $v^m(x,t)$ ifadeleri sırasıyla $s=1,2,3,...m$ iken aşagıdaki

$$\begin{cases} (u_{tt}^m, w_s) + M\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)\left((-\triangle)^{r_1}u^m, w_s\right) \\ \quad + (\nabla u_t^m, \nabla w_s) + \left(|u_t^m|^{q-1}u_t^m, w_s\right) \\ \quad = \left(\ln|u^m|\, u^m\, |u^m|^{p-2}, w_s\right) \end{cases} \tag{4.3.1.1}$$

ve

$$\begin{cases} (v_{tt}^m, w_s) + M\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)\left((-\triangle)^{r_1}v^m, w_s\right) \\ \quad + (\nabla v_t^m, \nabla w_s) + \left(|v_t^m|^{q-1}v_t^m, w_s\right) \\ \quad = \left(\ln|v^m|\, v^m\, |v^m|^{p-2}, w_s\right) \end{cases} \tag{4.3.1.2}$$

denklemlerini sağlasın. Ve m sonsuza giderken başlangıç ve sınır değerleri sırasıyla $(u_0, v_0) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega), (u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_0^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} h_j^m(t)\, w_j(x) \to u_0 \text{ in } H_0^{r_1}(\Omega), \\ v_0^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} g_j^m(t)\, w_j(x) \to v_0 \text{ in } H_0^{r_2}(\Omega) \end{aligned} \tag{4.3.1.3}$$

ve

$$\begin{aligned} u_1^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{dh_j^m(t)}{dt} w_j(x) \to u_1 \text{ in } H_0^1(\Omega), \\ v_1^m(x) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{dg_j^m(t)}{dt} w_j(x) \to v_1 \text{ in } H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{4.3.1.4}$$

dır.

(4.3.1.1) ifadesi $\frac{dh_j^m(t)}{dt}$ ve (4.3.1.2) ifadesi $\frac{dg_j^m(t)}{dt}$ ile çarpılır, s e göre toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t^m\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)^{\gamma}\right)\frac{d}{dt}\left(\|D^{r_1}u^m\|^2\right) \\ & \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{p}\int_\Omega |u^m|^p \ln|u^m|\, dx + \frac{1}{p^2}\|u^m\|_p^p\right) \\ = & -\left(\int_\Omega |u_t^m|^{q-1}u_t^m dx + \int_\Omega |\nabla u_t^m|^2\, dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.1.5}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_t^m\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\beta_1 + \beta_2\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)^{\gamma}\right)\frac{d}{dt}\left(\|D^{r_2}v^m\|^2\right) \\ & \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{p}\int_\Omega |v^m|^p \ln|v^m|\,dx + \frac{1}{p^2}\|v^m\|_p^p\right) \\ = & -\left(\int_\Omega |v_t^m|^{q-1}v_t^m dx + \int_\Omega |\nabla v_t^m|^2\,dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.1.6}$$

olarak elde edilir.

(4.3.1.5) ve (4.3.1.6) ifadelerinin $(0,t)$ aralığında integrali alınır ve bu ifadeler toplanırsa, $0 \le t < \infty$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\|u_t^m\|^2 + \|v_t^m\|^2\right) + J(u^m, v^m) \\ & + \int_0^t \|u_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau + \int_\Omega \|v_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau \\ & + \int_0^t \|\nabla u_\tau^m\|^2\,d\tau + \int_\Omega \|\nabla v_\tau^m\|^2\,d\tau \\ = & \ E^m(0) \end{aligned} \tag{4.3.1.7}$$

olarak yazılır.

(4.3.1.3) ve (4.3.1.4) ifadelerinin başlangıç verilerinden, $m \to \infty$ iken $E^m(0) \to E(0)$ olarak elde edilir. m yeterince büyük seçilirse

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\|u_t^m\|^2 + \|v_t^m\|^2\right) + J(u^m, v^m) \\ & + \int_0^t \|u_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau + \int_\Omega \|v_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau \\ & + \int_0^t \|\nabla u_\tau^m\|^2\,d\tau + \int_\Omega \|\nabla v_\tau^m\|^2\,d\tau \\ < & \ d \end{aligned} \tag{4.3.1.8}$$

olduğu görülür. (4.3.4) ifadesinden

$$\begin{aligned} & J(u^m, v^m) \\ = \; & \frac{I(u^m, v^m)}{p} + \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\|D^{r_1} u^m\|^2 + \|D^{r_2} v^m\|^2 \right) \\ & + \frac{\beta_2 (p-2\gamma-2)}{2\gamma+2} \left(\|D^{r_1} u^m\|^2 + \|D^{r_2} v^m\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ & + \frac{1}{p^2} \left(\|u^m\|_p^p + \|v^m\|_p^p \right) \end{aligned} \tag{4.3.1.9}$$

olarak yazılabilir.

$(u_0, v_0) \in W$ olduğundan m yeterince büyük seçilirse

$$\frac{1}{2} \left(\|u_t^m(0)\|^2 + \|v_t^m(0)\|^2 \right) + J(u^m(0), v^m(0)) = E(0)$$

(4.3.1.3) ve (4.3.1.4) ifadelerinden, $0 \leq t < \infty$ için $(u^m(0), v^m(0)) \in W$ olduğunu elde ederiz. (4.3.1.8) ve Lemma 4.3.1.2 nin ispatında kullanılan benzer yöntemle yeterince büyük m ve $0 \leq t < \infty$ için $(u^m(t), v^m(t)) \in W$ olarak elde edilir. Böylece, $0 \leq t < \infty$ ve $p \geq 2\gamma + 2$ için (4.3.1.8) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|u_t^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 \right) \\ & + \frac{\beta_1 (p-2)}{2p} \left(\|D^{r_1} u^m\|^2 + \|D^{r_2} v^m\|^2 \right) \\ & + \frac{\beta_2 (p-2\gamma-2)}{2\gamma+2} \left(\|D^{r_1} u^m\|^2 + \|D^{r_2} v^m\|^2 \right)^{\gamma+1} \\ & + \frac{1}{p^2} \left(\|u^m\|_p^p + \|v^m\|_p^p \right) \\ & + \int_0^t \|u_\tau^m\|_{q+1}^{q+1} d\tau + \int_\Omega \|v_\tau^m\|_{q+1}^{q+1} d\tau \\ & + \int_0^t \|\nabla u_\tau^m\|^2 d\tau + \int_\Omega \|\nabla v_\tau^m\|^2 d\tau \\ < \; & d \end{aligned} \tag{4.3.1.10}$$

sonucuna varılır.

Yeterince büyük m ve $0 \leq t < \infty$ için, (4.3.1.10) ifadesinden

$$\|u_t^m\|^2 < 2d, \;\; \|v_t^m\|^2 < 2d,$$

$$\|D^{r_1}u^m\|^2 < \frac{2p}{\beta_1\,(p-2)}d,$$

$$\|D^{r_1}v^m\|^2 < \frac{2p}{\beta_1\,(p-2)}d,$$

$$\|D^{r_1}u^m\|^{2\gamma+2} < \frac{p\,(2\gamma+2)}{\beta_2\,(p-2\gamma-2)}d,$$

$$\|D^{r_1}u^m\|^{2\gamma+2} < \frac{p\,(2\gamma+2)}{\beta_2\,(p-2\gamma-2)}d,$$

$$\|u^m\|_p^p < p^2 d,\ \ \|v^m\|_p^p < p^2 d,$$

$$\int_0^t \|u_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau < d,\ \ \int_0^t \|v_\tau^m\|_{q+1}^{q+1}\,d\tau < d$$

ve

$$\int_0^t \|\nabla u_\tau^m\|^2\,d\tau < d,\ \ \int_0^t \|\nabla v_\tau^m\|^2\,d\tau < d$$

ifadelerini buluruz. Böylece,

$$\begin{cases} u^m \text{ ve } v^m \text{ düzgün sınırlı } \ L^\infty\left(0,\infty;H_0^{r_1}(\Omega)\times H_0^{r_2}(\Omega)\right) \text{ da} \\ u_t^m \text{ ve } v_t^m \text{ düzgün sınırlı } \ L^\infty\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right) \text{ da} \\ |u_t^m|^{q+1} \text{ ve } |v_t^m|^{q+1} \text{ düzgün sınırlı } L^\infty\left(0,\infty;L^{q+1}(\Omega)\right) \text{ da} \end{cases}.$$

dır. Lemma 4.3.1 te verilen Sobolev gömme eşitsizliği kullanılırsa

$$\|u^m\|_{p+1}^2 + \|v^m\|_{p+1}^2 \le C_1^2\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_1}u^m\|^2\right) \tag{4.3.1.11}$$

olur. Böylece, $\int\limits_\Omega |u|^p \ln|u|\,dx \le \|u\|_{p+1}^{p+1}$ olduğundan (4.3.1.11) ifadesini $0 \le t < \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u^m|^p \ln|u^m|\,dx + \int_\Omega |v^m|^p \ln|v^m|\,dx \\ \le\ & \|u^m\|_{p+1}^{p+1} + \|v^m\|_{p+1}^{p+1} \\ \le\ & C_1^{p+1}\left(\|D^{r_1}u^m\|^{p+1} + \|D^{r_2}v^m\|^{p+1}\right) \\ \le\ & C_1^{p+1}\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_1}u^m\|^2\right)^{\frac{p+1}{2}} \\ <\ & C_1^{p+1}\left(\frac{2pd}{\beta_1\,(p-2)}\right)^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \tag{4.3.1.12}$$

olarak elde edebiliriz. Böylece,

$$|u^m|^{p+1} \text{ ve } |v^m|^{p+1} \text{ düzgün sınırlı } L^{\infty}\left(0,\infty;L^{p+1}(\Omega)\right) \text{ da}$$

dır

$0 \leq t < \infty$ için t ye göre (4.3.1.1) ve (4.3.1.2) ifadelerinin integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&(u_t^m, w_s) + \int_0^t M\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)(D^{r_1}u^m, D^{r_1}w_s)\,ds \\
&+ (\nabla u^m, \nabla w_s) + \int_0^t \left(|u_t^m|^{q-1}u_t^m, w_s\right)ds \\
= \;& (u_1, w_s) + (\nabla u_0^m, \nabla w_s) + \int_0^t \left(\ln|u^m|\,u^m\,|u^m|^{p-1}, w_s\right)ds \qquad (4.3.1.13)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&(v_t^m, w_s) + \int_0^t M\left(\|D^{r_1}u^m\|^2 + \|D^{r_2}v^m\|^2\right)(D^{r_2}v^m, D^{r_2}w_s)\,ds \\
&+ (\nabla v^m, \nabla w_s) + \int_0^t \left(|v_t^m|^{q-1}v_t^m, w_s\right)ds \\
= \;& (v_1, w_s) + (\nabla v_0^m, \nabla w_s) + \int_0^t \left(\ln|v^m|\,v^m\,|v^m|^{p-1}, w_s\right)ds \qquad (4.3.1.14)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu nedenle, alt dizilerde (4.3.1.13) ve (4.3.1.14) ifadelerinde düzgün sınırlı olma şartı sağlandığından limite geçilebilir. Böylece, (4.3.1) probleminin (u, v) zayıf çözüme sahip olduğu sonucuna varılır. (4.3.1.3) ve (4.3.1.4) başlangıç-sınır değerlerinden $H_0^{r_1}(\Omega)\times H_0^{r_2}(\Omega)$ uzayında $(u(x,0), v(x,0)) = (u_0, v_0)$ ve $(H_0^1(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap L^{q+1}(\Omega))$ uzayında $(u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, v_1)$ olduğu görülür.

4.3.2. Çözümlerin Azalması

Bu kısımda (4.3.1) probleminin çözümlerinin azalmasını ele alacağız.

Teorem 4.3.2.1.

$$(u_0, v_0) \in H_0^{r_1}(\Omega) \times H_0^{r_2}(\Omega)$$

ve

$$(u_1, v_1) \in \left(H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)\right)$$

olsun. Kabul edelim ki $E(0) < d$ ve $I(u_0, v_0) > 0$ veya $\|D^{r_1}u_0\|^2 + \|D^{r_2}v_0\|^2 = 0$ olsun. Ayrıca q aşağıda verilmiş olan

$$\begin{cases} 2 < q \leq \min\left\{\frac{2n}{n-r_1}, \frac{2n}{n-r_2}\right\}, & n > 2\max(r_1, r_2) \\ 2 < q < \infty, & n \leq 2\min(r_1, r_2) \end{cases}$$

şartlarını sağlansın. Bu durumda N ve n pozitif sabitler olmak üzere $t \geq 0$ için

$$E(t) \leq Ne^{-nt}$$

dır.

İspat. Yardımcı fonksiyonelimizi

$$L(t) = E(t) + \varepsilon\left(\int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx\right) \tag{4.3.2.1}$$

olacak şekilde tanımlıyoruz. Böylece, yeterince küçük ε için pozitif sabitler λ_1, λ_2 vardır öyle ki

$$\lambda_1 E(t) \leq L(t) \leq \lambda_2 E(t) \tag{4.3.2.2}$$

ve her $t \geq 0$ için $L(t) > 0$ dır.

(4.3.1) denklem sisteminin ilk denklemini u ve ikinci denklemini v ile çarparsak

$$\begin{aligned} &(u_{tt}, u) + M\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)(D^{r_1}u, D^{r_1}u) \\ &+ (\nabla u_t, \nabla u) + \left(|u_t|^{q-2}u_t, u\right) \\ &= \left(\ln|u|\,|u|^{p-2}u, u\right) \end{aligned} \tag{4.3.2.3}$$

ve

$$\begin{aligned}&(v_{tt},v)+M\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)(D^{r_2}v,D^{r_2}v)\\&+(\nabla v_t,\nabla v)+\left(|v_t|^{q-2}v_t,v\right)\\&=\left(\ln|v|\,|v|^{p-2}v,v\right)\end{aligned}\tag{4.3.2.4}$$

elde edilir.

(4.3.2.1) ifadesinin türevi alınır (4.3.8), (4.3.2.3) ve (4.3.2.4) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned}L'(t) &= E'(t)+\varepsilon\left(\int_\Omega uu_{tt}dx+\int_\Omega vv_{tt}dx+\int_\Omega|u_t|^2dx+\int_\Omega|v_t|^2dx\right)\\&=-\left(\|u_t\|_q^q+\|v_t\|_q^q\right)-\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\\&\quad+\varepsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\varepsilon\left(\int_\Omega|u|^p\ln|u|\,dx+\int_\Omega|v|^p\ln|v|\,dx\right)\\&\quad-\varepsilon\left(\int_\Omega\nabla u\nabla u_tdx+\int_\Omega\nabla v\nabla v_tdx\right)\\&\quad-\varepsilon\left[M\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\right]\\&\quad-\varepsilon\left(\int_\Omega|u_t|^{q-2}u_tudx+\int_\Omega|v_t|^{q-2}v_tvdx\right)\\&=-\left(\|u_t\|_q^q+\|v_t\|_q^q\right)-\left(\|\nabla u_t\|^2+\|\nabla v_t\|^2\right)\\&\quad+\varepsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-\varepsilon\beta_1\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)\\&\quad-\varepsilon\beta_2\left(\|D^{r_1}u\|^2+\|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1}\\&\quad+\varepsilon\left(\int_\Omega|u|^p\ln|u|\,dx+\int_\Omega|v|^p\ln|v|\,dx\right)\\&\quad-\varepsilon\left(\int_\Omega\nabla u\nabla u_tdx+\int_\Omega\nabla v\nabla v_tdx\right)\\&\quad-\varepsilon\left(\int_\Omega|u_t|^{q-2}u_tudx+\int_\Omega|v_t|^{q-2}v_tvdx\right)\end{aligned}\tag{4.3.2.5}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\int_\Omega\nabla u\nabla u_tdx+\int_\Omega\nabla v\nabla v_tdx=\mu_1,$$

$$\int_{\Omega} |u|^p \ln |u| \, dx + \int_{\Omega} |v|^p \ln |v| \, dx = \mu_2$$

ve

$$\int_{\Omega} |u_t|^{q-2} u_t u dx + \int_{\Omega} |v_t|^{q-2} v_t v dx = \mu_3$$

olarak alalım. Amacımız (4.3.2.5) ifadesinin herbir terimi ile ilgili kestirimlerde bulunmaktır.

μ_1 ifadesi için, Cauchy-Schwarz, Young eşitisizlikleri ve Sobolev gömme teoremleri kullanılırsa, her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \right| \\ \leq & \frac{1}{4\delta} \left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \right) + \delta \left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \right) \\ \leq & \frac{1}{4\delta} \left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \right) + \delta C \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \end{aligned} \tag{4.3.2.6}$$

elde edilir.

μ_2 terimiyle ilgili kestirimde bulunmak için Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.1.3 den, $\Psi = C_1^{p+1} \left(\frac{2p}{\beta_1 (p-2)} E(0) \right)^{\frac{p-1}{2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |u|^p \ln |u| \, dx + \int_{\Omega} |v|^p \ln |v| \, dx \right| \\ \leq & \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} \\ \leq & C_1^{p+1} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} \\ \leq & C_1^{p+1} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \\ \leq & C_1^{p+1} \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \left(\frac{2p}{\beta_1 (p-2)} E(0) \right)^{\frac{p-1}{2}} \\ = & \Psi \left(\|D^{r_1} u\|^2 + \|D^{r_2} v\|^2 \right) \end{aligned} \tag{4.3.2.7}$$

sonucu elde edilir. Böylece (4.3.2.7) ifadesinden ve $E(t)$ enerji fonksiyoneli tanımından $K > \frac{2}{p}$, daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere sırasıyla (4.3.27) ifadesinin

$x^p \ln x \leq \|x\|_{p+1}^{p+1}$ eşitsizliğinin ve (4.3.5) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} \\
= \; & (1-K)\left(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}\right) + K\left(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}\right) \\
< \; & (1-K)\,\Psi\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) + K\left(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}\right) \\
\leq \; & Kp\left(\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{\beta_1}{2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)\right. \\
& \left. + \frac{\beta_2}{2\gamma+2}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{p^2}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right)\right) \\
& -KpE(t) + (1-K)\,\Psi\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \qquad (4.3.2.8)
\end{aligned}$$

elde edilir.

μ_3 terimi için, Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliklerinden $X, Y \geq 0, \forall \delta > 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^a}{a} X^a + \frac{\delta^{-b}}{b} Y^b$$

$a = \frac{q}{q-1}$ ve $b = q$ olarak seçilirse $\delta = \frac{q}{q-1}\delta^{\frac{q}{q-1}}$, $C_2(\delta) = \frac{1}{q\delta^q}$ iken

$$\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega |u_t|^{q-2} u_t u dx + \int_\Omega |v_t|^{q-2} v_t v dx \right| \\
\leq \; & \delta\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) + C_2(\delta)\left(\|u\|_q^q + \|v\|_q^q\right) \qquad (4.3.2.9)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.3.2.6), (4.3.2.8) ve (4.3.2.9) ifadeleri (4.3.2.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq \; & (\varepsilon\delta - 1)\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) \\
& + \left(\frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\
& + \varepsilon\left(1 + \frac{Kp}{2}\right)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
& + \varepsilon\beta_2\left(\frac{Kp}{2\gamma+2} - 1\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\
& + \varepsilon\left(\left(\frac{Kp}{2} - 1\right)3\beta_1 + C\delta + (1-K)\,\Psi\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
& + \varepsilon C_2(\delta)\left(\|u\|_q^q + \|v\|_q^q\right) \\
& + \frac{\varepsilon K}{p}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right) - \varepsilon KpE(t) \qquad (4.3.2.10)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. $\rho = C_3^q \left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)} E(0)\right)^{\frac{q-2}{2}} > 0$ olmak üzere Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.1.3 nin tekrar kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \|u\|_q^q + \|v\|_q^q \\
\leq\ & C_3^q \left(\|D^{r_1}u\|^q + \|D^{r_2}v\|^q\right) \\
\leq\ & C_3^q \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\frac{q}{2}} \\
\leq\ & C_3^q \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\frac{q-2}{2}} \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
\leq\ & C_3^q \left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)} E(0)\right)^{\frac{q-2}{2}} \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
\leq\ & \rho \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \qquad (4.3.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.3.2.11) teki işlemlerini benzerini $\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right)$ terimini tahmin etmek için uygularsak $\zeta = C_4^p \left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)} E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}}$ için

$$\begin{aligned}
& \|u\|_p^p + \|v\|_p^p \\
\leq\ & C_4^p \left(\|D^{r_1}u\|^p + \|D^{r_2}v\|^p\right) \\
\leq\ & C_4^p \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
\leq\ & C_4^p \left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)} E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2 \\
& = \zeta \|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2 \qquad (4.3.2.12)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(4.3.2.11) ve (4.3.2.12) nin (4.3.2.10) ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq\ & (\varepsilon\delta - 1)\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) + \left(\frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\
& + \varepsilon\left(1 + \frac{Kp}{2}\right)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \varepsilon K p E(t) \\
& + \varepsilon \begin{bmatrix} \left(\frac{Kp}{2} - 1\right) 3\beta_1 + C\delta + (1-K)\Psi \\ \\ +C_2(\delta)\rho + \frac{K\zeta}{p} \end{bmatrix} \left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
& + \varepsilon\beta_2 \left(\frac{Kp}{2\gamma + 2} - 1\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \qquad (4.3.2.13)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Gömme teoremlerinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq (\varepsilon\delta - 1)\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) + \left(\frac{\varepsilon}{4\delta} - 1\right)\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\left(1 + \frac{Kp}{2}\right)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \varepsilon KpE(t) \\
&\quad + \varepsilon\begin{bmatrix} \left(\frac{Kp}{2} - 1\right)3\beta_1 + C\delta + (1-K)\Psi \\ \\ +C_2(\delta)\rho + \frac{K\zeta}{p} \end{bmatrix}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\beta_2\left(\frac{Kp}{2\gamma+2} - 1\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\
&\leq (\varepsilon\delta - 1)\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) - \varepsilon KpE(t) \\
&\quad + \left[\varepsilon\left(\frac{1}{4\delta} + C_5\left(1 + \frac{Kp}{2}\right)\right) - 1\right]\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\begin{bmatrix} \left(\frac{Kp}{2} - 1\right)3\beta_1 + C\delta + (1-K)\Psi \\ \\ +C_2(\delta)\rho + \frac{K\zeta}{p} \end{bmatrix}\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
&\quad + \varepsilon\beta_2\left(\frac{Kp}{2\gamma+2} - 1\right)\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \\
&\leq I_1\left(\|u_t\|_q^q + \|v_t\|_q^q\right) + I_2\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) - \varepsilon KpE(t) \\
&\quad + I_3\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right) \\
&\quad + I_4\left(\|D^{r_1}u\|^2 + \|D^{r_2}v\|^2\right)^{\gamma+1} \qquad (4.3.2.14)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Sonra, $i = 1, 2, 3, 4$ iken $I_i \leq 0$ olacak şekilde K, ε ve δ sabitlerinin pozitif olarak nasıl bulunduğunu göstermeye çalışacağız. İlk olarak, $E(0) < d$ ve d nin tanımından

$$\begin{aligned}
E(0) &< d = \frac{\beta_1(p-2)}{2p}\left(\frac{\beta_1}{C_1^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p-1}}, \\
\beta_1 &> C_1^{p+1}\left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)}E(0)\right)^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned}$$

iken

$$\Psi = C_1^{p+1}\left(\frac{2p}{\beta_1(p-2)}E(0)\right)^{\frac{p-1}{2}} < \beta_1 \qquad (4.3.2.15)$$

olduğu açıktır. Benzer şekilde $\rho < \beta_1$ olduğu gösterilebilir. $\Psi, \rho < \beta_1$ için $I_3 \leq 0$ sağlanması için $I_3 \leq 0$

$$\frac{2}{p} < K \leq \frac{3\beta_1 - \Psi - C_2(\delta)\rho - C\delta}{3\beta_1 - \Psi + \frac{\zeta}{p}} \tag{4.3.2.16}$$

olması gerekir.

$I_4 \leq 0$ sağlanması için

$$\frac{2}{p} < K \leq \frac{2\gamma + 2}{p} \tag{4.3.2.17}$$

olarak alınır. (4.3.2.16) ve (4.3.2.17) ifadelerinin birleşiminden $I_3 \leq 0$, $I_4 \leq 0$ olacak şekilde

$$\frac{2}{p} < K \leq \min\left\{\frac{3\beta_1 - \Psi - C_2(\delta)\rho - C\delta}{3\beta_1 - \Psi + \frac{\zeta}{p}}, \frac{2\gamma + 2}{\beta_2}\right\}$$

şeklinde seçilecektir. Sonuç olarak ε ve δ yeterince küçük pozitif sabitler olarak seçilirse $I_1 \leq 0$ ve $I_2 \leq 0$ olur.

Dolayısıyla, yukarıdaki bağımsız değişkenler ve (4.3.2.2) ifadesinden $n = \frac{\varepsilon pK}{\lambda_2}$ olduğundan (4.3.2.14) ifadesi

$$L'(t) \leq -\varepsilon KpE(t) \leq \frac{-\varepsilon pK}{\lambda_2} L(t) = -nL(t) \tag{4.3.2.18}$$

olarak yazılır. (4.3.2.18) de diferansiyel denklemin çözümünden

$$L(t) \leq L(0)\, e^{-nt}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.3.2.2) ten dolayı $N = \frac{\lambda_2 E(0)}{\lambda_1}$ iken

$$E(t) \leq Ne^{-nt}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur..

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Logaritmik kaynak terime sahip denklemler fizikte ve mühendislikte geniş uygulama alanlarına sahip denklemler olarak matematik literatüründe gün geçtikçe önem kazanmaktadır.

Sonuç olarak tezimizin Bulgular ve Tartışma bölümünde logaritmik kaynak terime sahip hiperbolik tipten üç farklı denklemi ele alarak denklemlerin çözümlerinin farklı davranışları incelenmiştir. İlk kısımda altıncı mertebeden Boussinesq denklemini başlangıç ve sınır değerleri ile çalışıldı. Problemin global varlığı Faedo-Galerkin metodu ve potansiyel kuyu metodu sentezlenerek ve Logaritmik Sobolev eşitsizliği kullanılarak ispatlandı. Problemin çözümlerinin sonsuz zamanda patladığı $E(0) < d$ şartı altında konkavlık metodu kullanılarak gösterildi. Problem doğrusal sönüm terimle ele alınarak çözümlerinin üstel olarak azaldığı ispatlandı.

Tezimizin dördüncü bölümünün ikinci kısmında ise logaritmik kaynak terime ve zayıf sönüm terime sahip p-Laplasyan denklemi başlangıç-sınır koşulları ile ele alındı. Problemin çözümlerinin global varlığı potansiyel kuyu metodu ve Genelleştirilmiş Logaritmik Sobolev eşitsizliği kullanılarak gösterildi Ayrıca problemin çözümlerinin üstel olarak büyümesi Logaritmik Konvekslik metodu kullanılarak elde edildi. Son kısımda ise çözümlerin azalması Lyapunov fonksiyon teknikleri kullanılarak çalışıldı.

Dördüncü bölümün son kısmında ise hiperbolik tipten Kirchhoff tipli bir denklem sistemi ele alındı. Problemin global varlığının ispatı potensiyel kuyu metoduna dayandırılarak başlangıç verileri için bazı kestirimler elde edildi. Ayrıca bu problemde Logaritmik Sobolev eşitsizliğinin yerine logartima fonksiyonun bazı özellikleri ve Sobolev Gömülmeleri kullanıldı. Son kısımda ise çözüm kararlı kümeye kıyasla daha küçük bir kümede yer alıyorsa, çözümlerin azalma oranının tahmin edilebileceği kanıtlandı.

Yapılan literatür taramasında bu alanda birçok açık problem olduğunu tespit edildi. Örneğin; Boussinesq denkleminin $u^{p-2}u\ln|u|$ terimi ile lokal varlık, global varlık, çözümlerinin azalması, üstel büyümesi veya patlamasının el alınması, Kirchhoff tipli denklemin global ve lokal varlığının $u\ln|u|$ logaritmik kaynak terimi ile çalışılması, denklemlerin çözümlerinin Georgive-Todorova yöntemiyle pozitif başlangıç enerjisi ile elde edilmesi, denklem sistemlerinin oluşturulurken bağlantının logaritmik kaynak terim ile ilişkilendirilerek kurulması hala açık problemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu ne-

denle bu alanda matematiksel olarak elde edilen sonuçların ilerde yapılacak çalışmalar için fayda sağlayacağını düşünmekteyiz.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J.J.F. (2003). Sobolev spaces. Academic Press, 320, New York.

Agarwal, R. S., Bhargava, R., Balaji, A. V. S. (1990). Finite element solution of nonsteady three-dimensional micropolar fluid flow at a stagnation-point. ***International Journal of Engineering Science***, 28 (8): 851-857.

Al-Gharabli M. M., Messaoudi S. A. (2017). The existence and the asymptotic behavior of a plate equation with frictional damping and a logarithmic source term. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, (454): 1114-1128.

Ames K., Starughan B. (1997). Non-standard and improperly posed problems. Academic Press, 319, New York.

Ames, W. F. (1965). Nonlinear partial differential equations in engineering. Academic Press, 511, New York.

Ang, D. D., Ngoc Dinh, A. P. (1988). On the strongly damped wave equation: $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + f(u) = 0$. ***SIAM Journal on Mathematical Analysis,*** 19 (6): 1409-1418.

Astarita, G., Marrucci, G. (1974). Principles of non-Newtonian fluid mechanics. London: McGraw-Hill, 289, New York.

Aubin, J. P. (1963). Un théoreme de compacite. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin, 256: 5042–5044.

Barrow, J. D., Parsons, P. (1995). Inflationary models with logarithmic potentials. ***Physical Review D***, 52: 5576–5587.

Bartkowski, K., Gorka, P. (2008). One-dimensional Klein–Gordon equation with logarithmic nonlinearities. ***Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical***, 41 (35): 355201.

Benyoub, F. Z. (2018). Equations d'évolution pour les ponts suspendus, Doktora Tezi, Universite Djillali Liabes Faculte des Sciences Exactes Sidi Bel Abbès, Cezayir, 83.

Bialynicki-Birula I., Mycielski J. (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. ***Bulletin L'Académie Polonaisedes Science, Sériedes Sciences Mathématiques, Astronomiqueset Physiques***, 23 (4): 461-466.

Bialynicki-Birula I., Mycielski J. (1976). Nonlinear wave mechanics. ***Annalen der Physik***, 100: 62-93.

Bilgin, B. A., Kalantarov, V. K. (2013). Blow up of solutions to the initial boundary value problem for quasilinear strongly damped wave equations. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 403 (1): 89-94.

Bloom, F. (1981). Ill-posed problems for integro differential equations in mechanics and electromagnetic theory. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. ***Journal de Mathématiques Pureset Appliquées***, 55-108.

Bona, J. L., Sachs, R. L. (1988). Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation. ***Communications in Mathematical Physics***, 118 (1):15–29.

Boulaaras, S., Draifia, A., Alnegga, M. (2019). Polynomial decay rate for Kirchhoff type in viscoelasticity with logarithmic nonlinearity and not necessarily decreasing kernel. ***Symmetry***, 11 (2): 226,1-24.

Boulaaras, S., Draifia, A., Zennir, K. (2019). General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and logarithmic nonlinearity. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 42 (14): 4795-4814.

Brezis, H. (2010). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, 600, New York.

Brezis, H., Gallouet, T. (1980). Nonlinear Schrödinger evolution equations. ***Nonlinear Analysis***, 4: 677-681.

Buljan, H., Siber, A., Soljacic, M., Schwartz, T., Segev, M., Christodoulides, D.N. (2003). Incoherent white light solitons in logarithmically saturable noninstantaneous nonlinear media. ***Physical Review***, 68: 258-275.

Cao, Y., Liu, C. (2018). Initial boundary value problem for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity. ***Electronic Journal of Differential Equations***, 116 (2018): 1-19.

Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. D., Prates Filho, J. S., Soriano, J. A. (1999). Existence and uniform decay of solutions of a degenerate equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term. ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications***, 38 (3): 281-294.

Cazenave T., Haraux A. (1980). Equations d'evolution avec non linéarité logarithmique. ***Annales de la Facultedes Sciences de Toulouse***, 2 (1): 21–51.

Chatterjee, A. (1999). Asymptotic solution for solitary waves in a chain of elastic spheres. ***Physical Review E***, 59 (5): 5912.

Chen, X., Jüngel, A., Liu, J. G. (2014). A note on Aubin-Lions-Dubinskiĭ lemmas. ***Acta Applicandae Mathematicae***, 133 (1): 33-43.

Chen, H., Tian, S. (2015). Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. ***Journal of Differential Equations***, 258 (12): 4424-4442.

Cordeiro, S. M. S., Pereira, D. C., Ferreira, J., Raposo, C. A. (2021). Global solutions and exponential decay to a Klein–Gordon equation of Kirchhoff-Carrier type with strong damping and nonlinear logarithmic source term. ***Partial Differential Equations in Applied Mathematics***, 3: 100018.

Daripa, P. (2006). Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves. ***European Journal of Mechanics-B/Fluids***, 25 (6): 1008-1021.

De Brito, E. H., Hale, J. (1982). The damped elastic stretched string equation generalized: existence, uniqueness, regularity and stability. ***Applicable Analysis***, 13 (3): 219–233.

Dé Godefroy, A. (1998). Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. ***IMA Journal of Applied Mathematics***, 60(2): 123-138.

Del Pino, M., Dolbeault, J. (2002). Nonlinear diffusions and optimal constants in Sobolev type inequalities: asymptotic behaviour of equations involving the p-Laplacian. ***Comptes Rendus Mathematique***, 334 (5): 365-370.

Dickey, R. W. (1970). Infinite systems of nonlinear oscillation equations with linear damping. ***SIAM Journal on Mathematical Analysis***, 19 (1): 208-214.

Di, H., Shang, Y., Song, Z. (2020). Initial boundary value problem for a class of strongly damped semilinear wave equations with logarithmic nonlinearity. ***Nonlinear Analysis: Real World Applications***, 51: 102968.

Dubinskiĭ, Y. A. (1965). Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. ***Matematicheskii Sbornik***, 109 (4): 609–642.

Enqvist, K., McDonald, J. (1998). Q-balls and baryogenesis in the MSSM. ***Physics Letters B***, 425 (3–4): 309–321.

Esfahani, A., Farah, L. G., Wang, H. (2012). Global existence and blow-up for the generalized sixth-order Boussinesq equation. ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications***, 75(11), 4325-4338.

Esfahani, A., Farah, L. G. (2012). Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 385 (1): 230-242.

Evans, L.C. (1998). Partial differantial equations. Graduate Studies in Mathematics,19 (2).

Ezechiáš, J. (1988). Contribution to the calculation of thick arcs with respect to shearing strain and extension of the centroid axis. ***Computers and Structures***, 29 (4): 645-656.

Gao, Q., Li, F., Wang, Y. (2011). Blow-up of the solution for higher-order Kirchhoff-type equations with nonlinear dissipation. ***Central European Journal of Mathematics***, 9 (3): 686-698.

Giga, Y., Matsui, S., Sawada, O. (2001). Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity. ***Journal of Mathematical Fluid Mechanics***, 3: 302–315.

Gorka, P. (2009). Logarithmic Klein-Gordon equation. ***Acta Physica Polonica B***, 40 (1): 59–66.

Gorka, P., Prado, H., Reyes, E. G. (2010). Functional calculus via Laplace transform andequations with infinitely many derivatives. ***Journal of Mathematical Physics***, 51 (10): 103512, 1-10.

Gorka, P., Prado, H., Reyes, E. G. (2011). Nonlinear equations with infinitely many derivatives. ***Complex Analysis and Operator Theory***, 5 (1): 313–323.

Greenberg, J. M., CamY, R. C. M., Mizel, V. J. (1968). On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)\,u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. ***Journal of Mathematics and Mechanics***, 707-728.

Gross, L. (1975). Logarithmic Sobolev inequalities. ***American Journal of Mathematics***, 97 (4): 1061-1083.

Güngör, F. (1990). Sobolev ve logaritmik Sobolev eşitsizlikleri. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 62.

Han, X.S. (2013). Global existence of weak solutions for a logarithmic wave equation

arising from Q-ball dynamics. ***Bulletin of the Korean Mathematical Society***, 50: 275-283.

Hiramatsu, T., Kawasaki, M., Takahashi, F. (2010). Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation. ***Journal of Cosmology and Astroparticle Physics***, 6: 008.

Holmåker, K. (1993). Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones. ***SIAM Journal on Mathematical Analysis***, 24 (1): 116-128.

Hu, B., Yin, H. M. (1995). Semilinear parabolic equations with prescribed energy. ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo***, 44: 479-505.

Hu, Q., Zhang, H., Liu, G. (2016). Global existence and exponential growth of solution for the logarithmic Boussinesq-type equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 436 (2): 990-1001.

Hu, Q., Zhang, H. (2017). Initial boundary value problem for generalized logarithmic improved Boussinesq equation. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 40 (10): 3687-3697.

Hu, Q., Zhang, H., Liu, G. (2019). Asymptotic behavior for a class of logarithmic wave equations with linear damping. ***Applied Mathematics and Optimization***, 79 (1): 131-144.

Ikehata, R. (1995). A note on the global solvability of solutions to some nonlinear wave equations with dissipative terms. ***Differential and Integral Equations***, 8 (3): 607-616.

Irkıl, N., Pişkin, E. (2021). Global existence and decay of solutions for a higher-order Kirchhoff-type systems with logarithmic nonlinearities. ***Quaestiones Mathematicae***, 1-24 (baskıda).

Jain, P. K., Jain, P. K., Gupta, V. P. (1986). Lebesgue measure and integration. New Age International Publishers, 342, New Delhi, India.

James, G., Pelinovsky, D. (2014). Gaussian solitary waves and compactons in Fermi–Pasta–Ulam lattices with Hertzian potentials. ***Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences***, 470 (2165): 20130462.

John, F. (1955). A note on "improper" problems in partial differential equations. ***Communications on Pure and Applied Mathematics***, 8 (4): 591–594.

Kalantarov, V. K., Ladyzhenskaya, O. A. (1978). The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types. ***Journal of Soviet Mathematics***, 10(1): 53–70.

Kalantarov, V. K., Özsarı, T. (2016). Qualitative properties of solutions for nonlinear Schrödinger equations with nonlinear boundary conditions on the half-line. ***Journal of Mathematical Physics***, 57 (2): 021511.

Kant, T., Varaiya, J. H., Arora, C. P. (1990). Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes. ***Computers and Structures***, 36 (3): 401-420.

Kaplan, S., (1963). On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. ***Communications on Pure and Applied Mathematics***,16: 305-330.

Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2010). The theory of differential equations. Springer-Verlag, 423, New York.

Kesavan, S. (1989). Topics in functional analysis and applications. Wiley-Blackwell, 267, India.

Komornik, V., Zuazua, E. (1990). A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. ***Journal de Mathematiques Pure set Appliquĕes***, 69, 33-54.

Komornik, V. (1994). Exact controllability and stabilization: The Multiplier Method. RAM: Research in Applied Mathematics, Masson-John Wiley, Paris.

Kopeikin, I. D., Shishkin, V. P. (1984). Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity. ***Journal of Applied Mathematics and Mechanics***, 48 (1): 117-119.

Köklü, K. (2018). İntegral denklemler. Papatya Yayıncılık Eğitim, 310, İstanbul.

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N. (1967). Linear and quasilinear equations of parabolic type. ***American Mathematical Society***, 23 (3).

Le, C. N., Le, X. T. (2017). Global solution and blow-up for a class of p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. ***Acta Applicandae Mathematicae***, 151 (1): 149–169.

Levine, H. A., Sleeman, B. D. (1985). A note on the non-existence of global solutions of initial boundary value problems for the Boussinesq equation $u_{tt} = 3u_{xxxx} + u_{xx} - 12\left(u^2\right)_{xx}$. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 107(1): 206-210.

Li, F. (2004). Global existence and blow-up of solutionsfor a higher-order kirchhoff-type equation with nonlinear dissipation. ***Applied Mathematics Letters***, 17 (12): 1409-1414.

Li, G., Hong, L. H., Liu, W. J. (2012). Global nonexistence of solutions for viscoelastic wave equations of Kirchoff type with high energy. ***Journal of Function Spaces and Applications***, 530861: 1-15.

Lian, W., Xu, R. (2019). Global well-posedness of nonlinear wave equation with weak and strong damping terms and logarithmic source term. ***Advances in Nonlinear Analysis***, 9 (1): 613-632.

Lin, G., Yang, Y. (2020). The global attractors and dimensions estimation for the higher-order nonlinear Kirchhoff-type equation with strong damping. ***International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application***, 9 (04): 63.

Linares, F. (1993). Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation. ***Journal of Differential Equations***, 106 (2): 257-293.

Lions, J. L. (1969). Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris.

Liu, J. H. (2003). A first course in the qualitative theory of differential equations. Prentice Hall, Pearson Education, 450, New Jersey.

Liu, Y. (1996). Existence and blow up of solutions of a nonlinear Pochhammer-Chree equation. ***Indiana University Mathematics Journal***, 797-816.

Ma, L., Fang, Z. B. (2018). Energy decay estimates and infinite blow-up phenomena for a strongly damped semilinear wave equation with logarithmic nonlinear source. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 41 (7): 2639-2653.

Martino, S. D., Falanga, M., Godano, C., Lauro, G. (2003). Logarithmic Schrödinger-like equation as a model for magma transport. ***Europhysics Letters***, 63 (3): 472–475.

Matsuyama, T., Ikehata, R. (1996). On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 204 (3): 729-753.

Messaoudi, S. A. (2005). On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with non-linear damping and source terms. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 28 (15): 1819-1828.

Messaoudi, S. A., Houari, B. S. (2007). A blow-up result for a higher-order nonlinear Kirchhoff-type hyperbolic equation. ***Applied Mathematics Letters***, 20 (8): 866-871.

Nakao, M. (1995). Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. ***Mathematische Zeitschrift***, 219 (1): 289-299.

Nelson, E. (1966). A quartic interaction in two dimensions. In Mathematical Theory of Elementary Particles, Dedham, 69-73.

Nicaise. S, Pignotti. C. (2008). Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. ***Differential Integral Equations***, 21: 935-958.

Ono, K. (1997). On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 216 (1): 321-342.

Özsarı, T., Kalantarov, V. K., Lasiecka, I. (2011). Uniform decay rates for the energy of weakly damped defocusing semilinear Schrödinger equations with in homogeneous Dirichlet boundary control. ***Journal of Differential Equations***, 251 (7): 1841-1863.

Park, J. Y., Bae, J. J. (1998). On existence of solutions of degenerate wave equations with nonlinear damping terms. ***Journal of the Korean Mathematical Society***, 35 (2): 465-490.

Payne, L. E. (1960). Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation. ***Archive for Rational Mechanics and Analysis***, 5 (1): 35–45.

Payne, L.E., Sattinger, D.H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. ***Israel Journal of Mathematics***, 22: 273–303.

Pesterev, A. V., Bergman, L. A. (1997). Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator. ***Journal of Engineering Mechanics***, 123 (8): 878-884.

Peyravi, A. (2017). Blow up solutions to a system of higher-order Kirchhoff type equations with positive initial energy. ***Taiwanese Journal of Mathematics***, 21 (4): 767-789.

Pişkin, E. (2013). Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, 102.

Pişkin, E. (2013). Blow up of solutions for the Cauchy problem of the damped sixth-order Boussinesq equation. ***Theoretical Mathematics and Applications***, 4 (3): 61-71.

Pişkin, E. (2014). Blow up of solutions for a system of nonlinear higher-order Kirchhoff-type equations. ***Mathematics and Statistics***, 2 (6): 219-229.

Pişkin, E. (2015). On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. ***Boundary Value Problems***, 2015 (1): 1-14.

Pişkin, E. (2017). Sobolev Uzayları. Seçkin Yayıncılık, 147, Ankara.

Pişkin, E. (2021). Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması. Pegem Akademi Yayıncılık, 204, Ankara.

Pişkin, E., Irkıl, N. (2019). Well-posedness results for a sixth-order logarithmic Boussinesq equation. ***Filomat***, 33 (13): 3985-4000.

Pişkin, E., Irkıl, N. (2019). Mathematical behavior of solutions of p-Laplacian equation with logarithmic source term. ***Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences***, 10: 213-220.

Pişkin, E., Irkıl, N. (2019). Mathematical Behavior of Solutions of Fourth-Order Hyperbolic Equation with Logarithmic Source Term. ***In Conference Proceedings of Science and Technology***, 2 (1): 27-36.

Pişkin, E., Boulaaras, S., Irkıl, N. (2021). Qualitative analysis of solutions for the p-laplacian hyperbolic equation with logarithmic nonlinearity. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 44: 4654–4672.

Pişkin, E., Çalışır, Z. (2020). Decay and blow up at infinite time of solutions for a logarithmic Petrovsky equation. ***Tbilisi Mathematical Journal***, 13(4): 113-127.

Pişkin, E., Polat, N. (2013). On the decay of solutions for a nonlinear higher-order Kirchhoff-type hyperbolic equation. ***Journal of Advanced Research Applied Mathematics***, 5 (2): 107-116.

Polat, N. (2005) Doğrusal olmayan parabolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu. Doktora tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır, 90.

Polat, N., Pişkin, E. (2012). Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equation. ***Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series***, 31(3): 735–746.

Remil, M. (2018). Existence et non existence de solutions globales pour les équations d'évolution. Doktora Tezi, Universite Djillali Liabes Faculte des Sciences Exactes

Sidi Bel Abbès, Cezayir, 121.

Santos, M. L., Ferreira, J., Pereira, D. C., Raposo, C. A. (2003). Global existence and stability for wave equation of Kirchhoff type with memory condition at the boundary. ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications***, 54 (5): 959-976.

Sattinger, D. H. (1968). On global solution of nonlinear hyperbolic equations. ***Archive for Rational Mechanics and Analysis***, 30: 148–172.

Scott-Russel, J. (1844). Report on water waves. British Association for the Advancement of Science, 311-390, New York.

Strauss, W. A. (2008). Partial differantial equations. John Wiley and Sons, 446, Chichester, U. S. A.

Sulem, C., Sulem, P. L. (2007). The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse. Springer Science and Business Media, 347, New York.

Sun, Y., Gao, Y., Lin, G. (2016). The global attractors for the higher-order Kirchhoff-type equation with nonlinear strongly damped term. ***International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application***, 5 (4): 203-217.

Tsutsumi, M. (1971). Some nonlinear evolution equations of second order. ***Proceedings of the Japan Academy***, 47: 950-955.

Visik, M. I. (1963). Quasi-linear strongly elliptic systems of differential equations in divergence form. ***Transactions of the Moscow Mathematical Society***, 12: 140-208.

Vladimirov, V. S., Volovich, Y. I. (2004). Nonlinear dynamics equation in p-Adic string theory. ***Theoretical and Mathematical Physics***, 138 (3): 297–309.

Wang, X., Chen, Y., Yang, Y., Li, J., Xu, R. (2019). Kirchhoff-type system with linear weak damping and logarithmic nonlinearities. ***Nonlinear Analysis***, 188: 475-499.

Wang, H., Esfahani, A. (2014). Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications***, 102: 97-104.

Wang, Y. (2016). Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. ***Electronic Journal of Differential Equations***, 2016 (64): 1-16.

Wazwaz, A. M. (2015). Gaussian solitary waves for the logarithmic Boussinesq equation and the logarithmic regularized Boussinesq equation. ***Ocean Engineering***, 94: 111-115.

Woinowsky-Krieger, S. (1950). The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. ***ASME Journal of Applied Mechanics***,17: 35–36.

Wolibner, W. (1933). Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. ***Mathematische Zeitschrift***, 37: 698- 726.

Wu, Y., Xue, X. (2013). Uniform decay rate estimates for a class of quasi-linear hyperbolic equations with non-linear damping and source terms. ***Applicable Analysis***, 92 (6): 1169-1178.

Xu, R., Lian, W., Kong, X., Yang, Y. (2019). Fourth order wave equation with nonlinear strain and logarithmic nonlinearity. ***Applied Numerical Mathematics***, 141: 185-205.

Yamada, Y. (1980). Some remarks on the equation $y_{tt} - \sigma\left(y_x\right) y_{xx} - y_{xtx} = f$. ***Osaka Journal of Mathematics***, 17 (2): 303-323.

Yan, L., Yang, Z. (2018). Blow-up and non-extinction for a nonlocal parabolic equation with logarithmic nonlinearity. ***Boundary Value Problems***, 1: 1-11.

Yang, Z., Li, X. (2011). Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff equation with a strong dissipation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 375 (2): 579-593.

Yang, Y., Li, J., Yu, T. (2019). Qualitative analysis of solutions for a class of Kirchhoff equation with linear strong damping term, nonlinear weak damping term and power-type logarithmic source term. ***Applied Numerical Mathematics***, 141: 263-285.

Yang, Z., Wang, X. (2003). Blowup of solutions for improved Boussinesq type equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 278(2): 335-353.

Ye, Y. (2013). Global existence and energy decay estimate of solutions for a higher-order Kirchhoff type equation with damping and source term. ***Nonlinear Analysis: Real World Applications***, 14 (6): 2059-2067.

Ye, Y. (2015). Global existence and asymptotic behavior of solutions for a system of higher-order Kirchhoff-type equations. ***Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations***, 2015 (20): 1-12.

Ye, Y. (2017). Blow-up of solutions for a system of higher-order nonlinear Kirchhoff-type equations. ***Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society***, 40 (2): 665-677.

Yusuf, O. (2018). On models of Kirchhoff Equations with damping terms: existence results and asymptotic behaviour of solutions. Master's thesis, University of Cape

Town. South Africa, 80.

Zakharov, V. E., Shabat, A. B. (1972). Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. ***Soviet Physics JETP***, 34 (1): 62–69.

Zeng, F., Shi, P., Jiang, M. (2021). Global existence and finite time blow-up for a class of fractional p-Laplacian Kirchhoff type equations with logarithmic nonlinearity. ***[J]. AIMS Mathematics***, 6 (3): 2559-2578.

Zhang, H., Liu, G., Hu, Q. (2015). Exponential decay of energy for a logarithmic wave equation. ***Journal of Partial Differantial Equations***,28 (3): 269-277.

Zhijian, Y. (2002). Existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of quasilinear evolution with nonlinear damping and source terms. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 25 (10): 795-814.

Zloshchastiev, K. G. (2010). Logarithmic nonlinearity in theories of quantum gravity: Origin of time and observational consequences. ***Gravitation and Cosmology***, 16 (4): 288-297.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimimi Mardin'de tamamladım. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi birincilikle tamamladım. 2016 yılında Yüksek Lisansımı Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsün de tamamladım. 2014 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak çalışmaktayım.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Nazlı IRKIL
ÖĞRENCİ NO	17804501
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Doktora
TEZ KONUSU	Logaritmik Kaynak Terimli Dalga Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	146
BENZERLİK ORANI	%21
RAPORLAMA TARİHİ	26/07/ 2021

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 146 sayfalık kısmına ilişkin, 26/07/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %21 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐Kaynakça hariç
☒Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Nazlı IRKIL
(26/07/2021)

Doç.Dr. Erhan PİŞKİN **Tez Danışmanı** (26/07/2021)	Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY **Anabilim Dalı Başkanı V.** (26/07/2021)

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.