T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE SÖNÜM TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Fatma EKİNCİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Temmuz - 2021

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Fatma EKİNCİ tarafından yapılan "Dejenere Sönüm Terimli Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof.Dr. Varga KALANTAROV

Üye : Prof.Dr. Şevket GÜR

Üye : Doç.Dr. Erhan PİŞKİN

Üye : Dr.Öğr. Üyesi M. Ali ARSERİM

Üye : Dr.Öğr. Üyesi Yasin KAYA

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 12/07/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2021

Prof.Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Doktoraya başladığım andan itibaren kendimi çok şanslı hissettiğim değerli hocam Doç. Dr. Erhan PİŞKİN'e bana yol gösterdiği, desteğini hiç esirgemediği, her zaman ve her konuda tecrübelerini aktardığı için sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım boyunca her türlü desteğini esirgemeyen sevgili eşime sonsuz teşekkürler.

Son olarak bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.19.010) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR		**I**
İÇİNDEKİLER		**II**
ÖZET		**III**
ABSTRACT		**IV**
KISALTMA VE SİMGELER		**V**
1.	**GİRİŞ**	**1**
2.	**ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**	**3**
2.1.	Dejenere Sönüm Terimli Denklemler	3
2.2.	Kirchhoff Tipli Denklemler	6
2.3.	Timoshenko Denklemleri	8
3.	**MATERYAL VE METOT**	**11**
3.1.	Güçlü ve Zayıf Yakınsama	11
3.2.	Operatörler	12
3.3.	Lebesgue Uzayı	13
3.4.	Sobolev Uzayı	14
3.5.	Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler	15
3.6.	Kirchhoff Denkleminin Modellenmesi	17
3.7.	Timoshenko Kiriş Modeli	20
3.8.	Galerkin Yaklaşım Metodu	23
4.	**BULGULAR VE TARTIŞMA**	**27**
4.1.	Dejenere Sönüm Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması	27
4.1.1.	Çözümün Patlaması	29
4.2.	Dejenere Sönüm Terimli Kirchhoff Tipli Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Azalması ve Patlaması	36
4.2.1.	Global Varlık	41
4.2.2.	Çözümün Azalması	43
4.2.3.	Çözümlerin Patlaması	59
4.3.	Dejenere Sönüm Terimli Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Varlığı ve Patlaması	71

4.3.1. Lokal Varlık……..... 76
4.3.2. Teklik……..... 96
4.3.3. Çözümün Patlaması..... 102
5. SONUÇ VE ÖNERİLER……..……..…… 115
6. KAYNAKLAR……..……..... 117
ÖZGEÇMİŞ……..…….. 125

ÖZET

DEJENERE SÖNÜM TERİMLİ EVOLÜSYON DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Fatma EKİNCİ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan evolüsyon denklemlere kısaca değinilmiştir. Ayrıca nitel davranış (qualitative theory) ile ilgili kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde dejenere sönüm terimli denklemler, Kirchhoff tipli denklemler ve Timoshenko denklemleri ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmaların tarihi gelişimi ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca Kirchhoff ve Timoshenko denklemlerinin modellenmesi ve Galerkin yaklaşım metodu verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmı olup üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda dejenere sönüm terimli Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır. İkinci kısımda dejenere sönüm terimli Kirchhoff tipli denklem sisteminin çözümlerinin azalması ve patlaması çalışılmıştır. Son kısımda ise dejenere sönüm terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ve patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dejenere sönüm terim, Enerji azalması, Kirchhoff denklem, Lokal varlık, Patlama, Timoshenko denklem

ABSTRACT

BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF EVOLUTION EQUATIONS WITH DEGENERATE DAMPING TERM
PhD THESIS

Fatma EKİNCİ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2021

In the first part of this thesis, we give some brief information on evolution equations appearing in applied sciences, such as engineering and science. In addition, a brief information was given about the qualitative theory.

In the second part, the historical development of the studies on equations with degenerate damping term, Kirchhoff equations and Timoshenko equations are considered.

In the third part, main definitions, lemmas and inequalities that will be used along the thesis are given. Furthermore, modelling of Kirchhoff equation, modelling of Timoshenko equation and Galerkin approximation method are given.

The fourth part is the original part of the thesis and occures of three sections. In the first section nonexistence of global solutions for the Timoshenko equation with degenerate damping term is studied. In the second section, general decay and blow-up of solutions for coupled viscoelastic equation of Kirchhoff-type with degenerate damping term are studied. In the last section local existence and blow-up of solutions for coupled viscoelastic wave equations with degenerate damping term are studied.

Keywords: Blow up, Degenerate damping term, Energy decay, Kirchhoff equation, Local existence, Timoshenko equation

KISALTMA VE SİMGELER

R^n	: n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\,\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	: p. kuvvetten Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert Uzayı
∇	: Nabla operatörü (Gradiyent)
Δ	: Laplace operatörü
$\delta(u)h(u_t)$	: Dejenere sönüm ($\delta(.)$ pozitif ve $h(.)$ doğrusal olmayan fonksiyon)
$\left(\lvert(.)\rvert^a+\lvert(.)\rvert^b\right)\lvert(.)_t\rvert^{r-1}(.)_t$	: Dejenere sönüm $(a,b\geq 0, r\geq 1)$

1. GİRİŞ

Yaşadığımız dünyanın temel süreçlerini anlamamız, büyük ölçüde kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Bundan dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi uzun süredir matematikteki en önemli alanlardan biri olmuştur. Özellikle 19. yüzyılın ikinci yarısından itibaren, çok sayıda matematikçi kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen birçok problemi araştırmaya başlamıştır. Bu araştırmanın birincil nedeni, kısmi diferansiyel denklemlerin hem doğanın birçok temel yasasını ifade etmesi hem de bilim ve mühendislikte çeşitli problemlerin matematiksel analizinde sıklıkla ortaya çıkmasıydı (Strauss 2007, Myint-U ve Debnath 2007).

Zamanla değişen modeller yani bağımsız değişkenlerinden biri t zaman değişkeni olan kısmi diferansiyel denklemlere evolüsyon denklemler denir. Örneğin; ipin titreşimini tanımlayan dalga denklemi veya çubuktaki ısının yayılmasını tanımlayan ısı denklemi, evolüsyon denklemlerine basit iki örnektir. Ayrıca, biyoloji, kimya, fizik, mekanik, malzeme bilimi ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde evrenin işleyişini anlamaya çalışmamızda ve modellenmesinde doğrusal olmayan evolüsyon denklemler önemli rol oynamaktadır. Örneğin; akışkanlar mekaniğinden Navier-Stokes ve Euler denklemleri, ısı transferi ve biyoloji bilimlerinden doğrusal olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri, Kuantum meka niğinden doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemi ve doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ve malzeme biliminden Cahn-Hilliard denklemi doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerine örnek olarak verilebilir (Myint-U ve Debnath 2007, Zheng 2004).

Modellemesi yapılan her problemin analitik çözümünü bulmak mümkün değildir. Hatta analitik çözümü tam olarak bilinen problemler, analitik çözümü tam olarak bilinmeyen problemlere göre oldukça azdır. Bundan dolayı, araştırmacılar çözümleri bulamasalarda çözümün nasıl davrandığını anlayabilmek için nitel davranışıyla "qualitative theory" ilgilenmeye başlamışlardır. Örneğin; Sistemin çözümü var mı? Sistemin bu çözümü tek mi? Sistemin belirli davranışı kontrol edilebilir mi veya kararlı mı? veya sistem belli bir periyodiklik sergiliyor mu? eğer bu soruları diferansiyel denklemleri çözmeden cevaplandırabilirsek, özellikle analitik çözümler bulunmadığında, sistemin çözümü hakkında yine de iyi bir fikre sahip oluruz. Bunun için çözümün varlığı (lokal ve global varlık), patlaması (blow up), kararlılığı,... gibi nitel özelliklerin analitik çözüm bulmadan nasıl analiz edeceğini öğrenmek önemli ve faydalıdır. Diferansiyel denklem-

ler hakkında kapsamlı bir bilgiye sahip olmak ve diferansiyel denklemleri analitik veya sayısal olarak çözmeden de analiz edebilmek için nitel davranış analizi kullanılmaktadır (Liu 2003).

Dejenere sönüm terimli evolüsyon denklemler fen bilimleri ve mühendislikte ortaya çıkmaktadır. Özellikle de fizikte dejenere sönüm terimli problemler sık ortaya çıkmaktadır. Örneğin; sürtünmeden dolayı yaşanan gerilmenin hızı azaltıcı etkisinde bu durum ortaya çıkar (Barbu ve ark. 2007).

Bizim de bu tezde amaçladığımız başlangıç-sınır koşulları verilen dejenere sönüm terimli evolüsyon denklemlerin çözümlerinin nitel davranışını araştırmak olacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin dördüncü bölümü, tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Tezin asıl amacı ise; dördüncü bölümün ilk kısmında yer alan

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + |u|^{\varrho} j'(u_t) = |u|^{q-1} u \tag{2.1}$$

dejenere sönüm terimli Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlamasını (Ekinci ve Pişkin, 2021), dördüncü bölümün ikinci kısmında yer alan

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1} u_t = f_1 \\ v_{tt} - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau + \left(|v|^\theta + |u|^{\varrho}\right)|v_t|^{q-1} v_t = f_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

dejenere sönüm terimli Kirchhoff tipli viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin azalmasını ve patlamasını (Pişkin ve Ekinci 2019a) ve dördüncü bölümün son kısmında yer alan

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \varpi_1(t-s)\Delta u(s)ds + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1} u_t = f_1 \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \varpi_2(t-s)\Delta v(s)ds + \left(|v|^\theta + |u|^{\varrho}\right)|v_t|^{q-1} v_t = f_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

dejenere sönüm terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığını, tekliğini ve patlamasını (Pişkin, Ekinci ve Zennir 2020) incelemektir.

Tezde yer alan dejenere sönüm terimli denklemler, Kirchhoff tipli denklemler ve Timoshenko denklemlerinin incelendiği çalışmaların kaynakçalarına kısaca bir bakalım.

2.1. Dejenere Sönüm Terimli Denklemler

Dejenere sönüm terim içeren evolüsyon denklemlerin davranışlarının incelendiği çok sayıda çalışma yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir. Şimdi, dejenere sönüm terim içeren evolüsyon denklemlerle ilgili yapılan çalışmalara değineceğiz.

Levine ve Serrin (1997)

$$\left(|u_t|^{l-2} u_t\right)_t - a\nabla\left(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right) + b|u|^k |u_t|^{m-2} u_t = c|u|^{p-2} u$$

denklemini incelediler ve lokal çözümün varlığına değinmeden, $p > k+m$ koşulu altında

negatif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını çalıştılar. Pitts ve Rammaha (2002)

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^k |u_t|^m sgn(u_t) = |u|^{p-1} u$$

denkleminin $m+k \geq p$ koşulu altında lokal varlığını, global varlığını ve tekliğini gösterdiler. Ayrıca negatif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını çalıştılar.

Barbu, Lasiecka ve Rammaha (2005a, 2005b); j sürekli ve konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^k \partial j(u_t) = |u|^{p-1} u$$

denklemini çalıştılar. Burada $\partial j(\alpha) = |\alpha|^{m-1} \alpha$ olmak üzere j nin türevini göstermektedir. j fonsiyonu ve denklemdeki parametreler üzerindeki bazı koşullar altında çözümün varlığını ve tekliğini; genelleştirilmiş çözüm, zayıf çözüm ve güçlü çözüm için gösterdiler. Ayrıca global zayıf çözümün yokluğunu negatif başlangıç enerjisi için çalıştılar. 2007 yılında Barbu ve ark. aynı denklemi tekrar incelediler. j fonsiyonu ve denklemdeki parametreler üzerindeki bazı koşullar altında negatif başlangıç enerjisi için genelleştirilmiş çözümün yokluğunu incelediler. Sonra, Hu ve Zhang (2007) aynı denklemin asimptotik davranışını $p < k+m$ ve $0 < m < 1$ koşulları altında; $p > k+m$ koşulu altında ise pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını çalıştılar. Han ve Wang (2011) ise aynı denklemin viskoelastik terimli ($\int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds$) halini incelediler ve zayıf ve genelleştirilmiş çözümün global varlığını ayrıca zayıf çözümün negatif başlangıç enerjisi için patlamasını incelediler. Son olarak da, 2019 yılında Xiao ve Shubin aynı denklemi çalıştılar ve zayıf çözümün $E(0) > 0$ için sonlu zamanda patladığını ispatladılar.

2018 yılında ise Li ve ark.

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + \left(|u|^k u\right)_t = |u|^p u$$

denklemi için çözümün global varlığını, asimptotik davranışını ve pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını gösterdiler.

Dejenere sönüm terim içeren denklem sistemini ise ilk defa Rammaha ve Sakuntasathien (2010) incelemiştir. Rammaha ve Sakuntasathien $f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ lineer

olmayan kaynak terimler olmak üzere

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + \left(|u|^k + |v|^l\right) |u_t|^{s-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - \triangle v + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right) |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sistemi için çözümün lokal varlığını, global varlığını ve tekliğini gösterdiler. Ayrıca zayıf çözümün patlamasını başlangıç enerjisi negatif iken çalıştılar. Daha sonra Benaissa ve ark. (2012) ve Zennir (2013) aynı problemi incelediler ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını ve üstel büyümesini sırasıyla gösterdiler.

Wu (2013)

$$\begin{cases} u_{tt} + \int_0^t \mu_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau - \Delta u + \left(|u|^k + |v|^l\right) |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} + \int_0^t \mu_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau - \Delta v + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right) |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sistemini inceledi ve çözümün global varlığını ve azalmasını ispatladı.

Pişkin (2015b)

$$\begin{cases} u_{tt} - div\left(\rho\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right) + \left(|u|^k + |v|^l\right) |u_t|^{s-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - div\left(\rho\left(|\nabla v|^2\right)\nabla v\right) + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right) |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sisteminde çözümün pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını gösterdi.

Ouaoua ve Maouni (Baskıda)

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + m_1^2 u + \left(|u|^k + |v|^l\right) |u_t|^{s-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - \triangle v + m_2^2 v + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right) |v_t|^{r-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sistemi için çözümün azalmasını gösterdiler.

Son zamanlarda ise Pişkin ve Ekinci (2019b) aşağıdaki denklem sistemini

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\Delta u + \left(|u|^k + |v|^l\right) |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - M(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\Delta v + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right) |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

incelediler ve çözümünün pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını ve patlama zamanının alt sınırını gösterdiler.

2.2. Kirchhoff Tipli Denklemler

1883 yılında Gustav Robert Kirchhoff, D'Alembert dalga denkleminin bir genellemesi olan elastik gerilmiş bir ipin salınımlarının neden olduğu dizi uzunluğundaki müteakip değişikliği hesaba katacak bir kısmi diferansiyel denklem tasarlamıştır. O zamandan beridir bu denklem; matematikçiler, fizikçiler ve mühendislerin ilgisini çekmektedir. Denklemin genel formu: $0 \leq x \leq L,\ t \geq 0$ için

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.2.1}$$

şeklindedir. Burada

- $u = u(x,t)$ yatay yer değiştirme;
- E Young modülü;
- ρ kütle yoğunluğu;
- h kesit alanı;
- L uzunluk;
- p_0 başlangıç eksensel gerilimdir.

Genel olarak (2.2.1) modeli yüksek boyutlu $n \geq 2$ olacak şekilde ikinci mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denkleme genişletilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx \right) \Delta u = f(u) \tag{2.2.2}$$

burada $\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x^2$ Laplasyan operatörü, f doğrusal olmayan bir fonksiyon (örneğin; $f(u) = \pm |u|^\alpha u,\ \alpha > 0$) iken $M(s)$ ise negatif olmayan bir Lipschitz fonksiyonu ve $s \geq 0$ olmak üzere

$$M(s) = \lambda + \beta s^\eta,\ \ (\lambda \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \lambda + \beta > 0,\ \eta > 0) \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. (2.2.2) denklemi (2.2.3) olarak alındığında $\lambda > 0$ ve $\beta > 0$ durumunda dejenere olmayan Kirchhoff, $\lambda = 0$ ve $\beta > 0$ durumunda dejenere Kirchhoff ve $\lambda > 0$ ve $\beta = 0$ durumunda ise yarı doğrusal dalga denklemi denir. Genellikle, (2.2.2) denklemine eğer $M(s) \geq m_0 > 0$ ise dejenere olmayan, eğer $s \geq 0$ iken $M(s) \geq 0$ ise de dejenere denir. M nin sıfırlandığı ancak başlangıç anında $M\left(\int_\Omega \|\nabla u(x,0)\|^2 dx\right) > 0$ olduğu

durumda ise (2.2.2) denklemine yumuşak dejenere (midly degenerate) denir.

(2.2.2) denkleminin lokal varlığını Carrier (1945), Bernstein (1940), Dickey (1970a, 1978), Menzala ve Pereira (1995); Sobolev uzaylarında ise Yammada (1987), Yamazaki (1988) ve Izaguirrea ve ark. (2008) çalışmışlardır. (2.2.2) denkleminin analitik başlangıç verileri için boyut $n = 1$ iken global çözülebilirlik sonucunu ilk defa S. Bernstein çalışmıştır. Daha sonra ise yüksek boyutlarda $(n \geq 2)$ Pohozaev (1975), Arosio ve Spagnolo (1984), Nishihara (1984a), D'Ancona ve Spagnolo (1992a, 1992b) ve D'Ancona ve Shibata (1994) çalışmışlardır.

Sobolev uzaylarında global çözümlerin varlığına yönelik bir çalışma başlangıç-sınır değerleri verilen (2.2.2) problemi için sınırlı bölgeler için hala açıkken bazı sonuçlar sınırsız bölgeler için mevcuttur (Benabidallah ve Ebobisse 2002). Bilindiği üzere, hem global çözümlerin türetilmesi hem de patlama olayını anlamak (2.2.2) probleminin enerjisinin azalma yapısına bağlıdır. Bu nedenle, enerjiyi azaltmayı garanti eden güçlü sönüm terimli Kirchhoff tipi denklemlere doğal olarak yönleniliriz (D'Ancona ve Shibata 1994, Ono 1997a).

Matematikçiler, enerjiyi azaltan bazı etkileri göstermek için (2.2.2) denkleminin genelleştirmelerini çalıştılar. Örneğin; h artan sürekli bir fonksiyon olmak üzere başlangıç-sınır değerleri verilen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, dx\right) \Delta u + h\left(u_t\right) = f\left(u\right), \;\; \Omega \times R_+$$

şeklindeki denklemi incelemeye başladılar. Örneğin; Brito ve Hale (1982) $h\left(u_t\right) = u_t$ ve $f = 0$ durumunda Galerkin metodunu kullanarak yeterince küçük başlangıç verileri için global çözümün varlığını ve tekliğini gösterdi. Nishihara (1984b) $h\left(u_t\right) = u_t$ ve $f = f\left(t\right)$ iken yeterince düzgün başlangıç verileri için global çözümün varlığını inceledi.

Ayrıca, Kirchhoff tipi denklemi farklı sönüm terimleri için çalışanlardan biri Chueshov (2012) dur ve doğrusal olmayan güçlü sönüm terimiyle çalışmıştır. Yan ve ark. (2016) ise kesirli sönüm terimle çalıştılar ve bu iki çalışmada da global attraktor Kalantarov ve Zelik (2009) in yöntemi kullanılarak çalışılmıştır.

Daha sonra sönüm terimli denklemlerin yanı sıra denklem sistemleri de incelenm-

eye başlandı. Örneğin, Liu ve ark. (2014)

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t \mu_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau - \Delta u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t \mu_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau - \Delta v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sistemini incelediler ve çözümün azalmasını ve patlamasını çalıştılar.

Ye (2016)

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - M(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2)\Delta v + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

başlangıç ve sınır şartlarına sahip denklem sistemini inceledi ve çözümün global varlığını ve üstel azalmasını gösterdi.

Pişkin ve Fidan (2017)

$$\begin{cases} u_{tt} + \int_0^t \mu_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + u_t = (p+1)|v|^{q+1}|u|^{p-1}u \\ v_{tt} + \int_0^t \mu_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + v_t = (q+1)|u|^{p+1}|v|^{q-1}v \end{cases}$$

denklem sistemini incelediler ve çözümün patlamasını konkavlık metoduyla çalıştılar.

Pişkin (2019)

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \gamma_2 u_t + |u_t|^p u_t = f_1(u,v) \\ v_{tt} - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \gamma_2 v_t + |v_t|^q v_t = f_2(u,v) \end{cases}$$

denklem sistemini inceledi ve çözümün azalmasını ve patlamasını çalıştı.

2.3. Timoshenko Denklemleri

Woinowsky ve Krieger 1950 yılında uçları sabit bir mesafede tutulan L uzunluğundaki bir kirişin enine sapması $u(x,t)$ için;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left\{\beta + \int_0^L u_\xi^2(\xi,t)\,d\xi\right\}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

şeklinde bir modelleme önermişlerdir. Burada α pozitif bir sabit, β bir sabit ve doğrusal olmayan terim ise uzayabilirliği nedeniyle kirişin gerilimindeki değişikliği temsil eder. Model aynı zamanda Eisley (1964), Dickey (1970b), Ball (1973a, 1973b) tarafından in-

celenirken deneysel sonuçlar Burgeen (1951) tarafından çalışılmıştır. Menzala (1980) $x \in R^n$ ve $M(\lambda) \geq m_0 > 0, \forall \lambda \geq 0$ koşullarını sağlayan gerçel bir fonksiyon olmak üzere

$$M\left(\int_{R^n} |\nabla u|^2 \, dx\right)(-\Delta u)$$

doğrusal olmayan terimi almıştır.

(2.3.1) denkleminin soyut denklemi

$$u'' + \alpha A^2 u - M\left(\left\|A^{1/2}u\right\|^2\right) Au = 0 \tag{2.3.2}$$

şeklindedir. Burada A, Hilbert uzayında bir lineer operatör ve M bir gerçel fonksiyondur. Medeiros (1979), (2.3.2) denkleminin çözümünün global varlığını ve tekliğini gösterdi.

Sönüm terimli (2.3.2) denklemi

$$u'' + \alpha A^2 u - M\left(\left\|A^{1/2}u\right\|^2\right) Au + \delta u' = 0$$

δ pozitif bir sabit olmak üzere Biler (1986) ve Brito (1984) tarafından çalışıldı.

Esquivel-Avila (2011, 2013) ise

$$u_{tt} + \triangle^2 u + M\left(\|\nabla u\|^2\right)(-\Delta u) + |u_t|^{p-2} u_t = |u|^{q-2} u \tag{2.3.3}$$

denkleminin çözümünün global attraktor, yakınsamasını ve sınırsızlığını gösterdi. Pişkin (2015a) ise çözümün varlığını, üstel azalmasını ve negatif başlangıç enerjisi için patlamasını çalıştı. Ayrıca, Pişkin ve Irkıl (2016) pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını incelediler. Daha sonra Pişkin ve Yüksekkaya (2018a, 2018b) $p = 2$ durumu için (2.3.3) denklemini incelediler. (2018a) çalışmasında negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını incelediler. (2018b) çalışmasında ise $-\Delta u_t$ terimi eklenmiş haliyle negatif ve pozitif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını incelediler. Son zamanlarda Periara ve arkadaşları (2019) $p = 2$ durumu için Faedo-Galerkin yaklaşımıyla global çözümün varlığını ve Nakao metoduyla ise asymptotik davranışını gösterdiler. 2021 yılında ise Periara ve arkadaşları (2.3.3) denklemini tekrar çalıştılar ve Faedo-Galerkin yaklaşımıyla global çözümün varlığını ve Nakao metoduyla ise asymptotik davranışını çalıştılar.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, öncelikle fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı ve bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler verilecektir. En son ise Kirchhoff ve Timoshenko denklemlerinin modellenmesine ve Galerkin Yaklaşım metoduna yer verilecektir (Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Kesavan 1989, Polat 2005, Pişkin 2013, Pişkin 2017).

3.1. Güçlü ve Zayıf Yakınsama

Tanım 3.1.1. (u_k), $(V,\ \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in V$ varsa (u_k) dizisine yakınsaktır denir ve bu yakınsama $u_k \to u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. V normlu uzayında bir dizi (u_k) olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_V = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in V$ varsa (u_k) dizisine güçlü yakınsak dizi denir ve bu yakınsama $u_k \to u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3. V normlu uzayında bir dizi (u_k) olmak üzere her $f \in V'$ için

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) \to f(u)$$

sağlayan bir $u \in V$ varsa (u_k) dizisine zayıf yakınsak dizi denir ve bu yakınsama $u_k \to u$ veya $u_k \overset{z}{\to} u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.4. V normlu bir uzay olsun. V üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi V uzayının dual uzayını oluşturur. V' veya V^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{V'} = \sup_{u\in V, u\neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|_V} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. V' uzayının duali $(V')' = V''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve ikinci dual olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.5. V vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ sabitleri için

$$\alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_1$$

eşitsizliği V uzayındaki her u noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına denk normlar denir.

3.2. Operatörler

Tanım 3.2.1. $(V,\ \|.\|_V)$ ve $(W,\ \|.\|_W)$ normlu uzaylarının dual uzayları sırasıyla V' ve W' olsun. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ olmak üzere

$$\langle T^* w^*, v \rangle_{V',V} = \langle w^*, Tv \rangle_{W',W}, \quad \forall w^* \in W', \quad \forall v \in V$$

T nin eşlenik (adjoint) operatörü olan $T^* \in \mathcal{L}(V', W')$ şeklinde tanımlanır.

Not 3.2.2. V ve W; $(.,.)_V$ ve $(.,.)_W$ skaler çarpımına sahip Hilbert uzayları olduğundan böylece dual uzayları $T^* \in \mathcal{L}(V, W)$ ve

$$(T^* w, v)_V = (w, Tv)_W, \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in W$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.3. $(H, (.,.))$ bir Hilbert uzayı olsun. Eğer $T^* = T$ ise

$$(Tu, v) = (u, Tv), \quad \forall u, v \in H$$

sağlıyorsa $T \in \mathcal{L}(H)$ operatörüne öz-eşlenik (self-adjoint) operatörü denir.

Tanım 3.2.4. $(V, \|.\|_V)$ ve $(W, \|.\|_W)$ iki Banach uzayı olsun. Eğer $T(B_v), W$ de kompakt kapanışa sahip ise $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ye kompakt operatör denir. Başka şekilde ifade edilirse, her sınırlı norm dizisi $(u_k) \subseteq V$ için $(T(u_k))$, W de güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse T kompaktır. V den W ye tanımlı kompakt operatör kümesini $K(V, W)$ şeklinde gösterilir ve $K(V) = K(V, V)$ dir.

3.3. Lebesgue Uzayı $\left(L^P(\Omega)\right)$

Tanım 3.3.1. Ω, R^n de ölçülebilir bir küme ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω da tanımlı tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa $L^p(\Omega)$ uzayı olarak adlandırılır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.3.2. X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer;

I) X in tüm elemanları Y de ise $(X \subset Y)$ ve

II) u dan bağımsız bir c sabiti varsa ve $\forall u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.3. $vol(\Omega) = \int_{\Omega} dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L^p$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.3.4. Ω bölgesinde hemen hemen her yerde sınırlı u fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Yani

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to R : \ u \text{ ölçülebilir ve} \\ |u| \leq K \text{ olacak şekilde bir } K \text{ sabiti vardır.} \end{array} \right\}$$

$L^{\infty}(\Omega)$ uzayının normu

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} &= ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \\ &= \inf\{K : |u(x)| \leq K\} \end{aligned}$$

dır.

3.4. Sobolev Uzayı

Tanım 3.4.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall w \in C^0_{\infty}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} w\rho dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} uD^{\alpha}w dx$$

ise $\rho \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun $\alpha.$ zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir.

Tanım 3.4.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|^p_{L_P(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

normları ile Banach uzayıdır.

Burada açıktır ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $C^{\infty}_0(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W^{0,p}_0(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W^{m,p}_0(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.4.3. (Sobolev Gömülme Teoremi). Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şartları altındaki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olacak şekilde;

I) $mp > n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

II) $mp = n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$

veya

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Burada $p = 1$ alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

III) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; p \leq q \leq p^*$$

dır. Burada

$$p* = \{\frac{np}{n-mp}, n > mp; \; +\infty, n \leq mp$$

dır. $W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olacaktır.

3.5. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1. (Young Eşitsizliği). Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği ve

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

$\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ olarak alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^q}{q}$$

formatında da yazılabilir.

Lemma 3.5.2. (Hölder Eşitsizliği). $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L(\Omega)$ olur ve

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.5.3. (Sobolev Poincare Eşitsizliği).

$2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $C_* = C_*(\Omega, p)$ sabit sayısı ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.5.4. (Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form)).

$\eta(t)$ negatif olmayan, $[0, T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa. Bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds \right)$$

olur.

Lemma 3.5.5. (Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form)).

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds$$

ise o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

Lemma 3.5.6. (Green Özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır.

3.6. Kirchhoff Denkleminin Modellenmesi

1883 yılında Gustav Kirchhoff, D'Alembert dalga denkleminin genel hali olan elastik gerilmiş bir ipin salınımlarını; salınımın neden olduğu ipin uzunluğunda meydana gelen değişikliği hesaba katacak bir kısmi diferansiyel denklem modelledi.

Kirchhoff denkleminin modellenmesi aşağıdaki gibidir (Yusuf 2018).

τ_0, $[\alpha_0, \beta_0]$ konumundaki ipin başlangıç gerilimi; $\widehat{\tau}(t)$, $[\alpha_0, \beta_0]$ konumundan $[\alpha(t), \beta(t)]$ konumuna gelen ipin gerilimi; $\tau(t)$ ise $[\alpha(t), \beta(t)]$ konumundaki $u(x,t)$ eğri deformasyonunun gerilimi olsun. $u(x,t)$ eğrisinin her noktasındaki gerilim, bu noktada eğrinin teğet vektörünün yönüne ve $\tau(t)$ modülüne sahip bir vektördür. Bundan dolayı θ, $0x$ ek-

seniyle teğet vektör arasındaki açı olmak üzere dikey bileşeni

$$\tau(t)\sin(\theta)$$

dır. Küçük deformasyon hipotezinden, gerilimin yatay bileşenini dikkate almıyoruz. $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ dir.

Böylece dikey bileşen $\overrightarrow{\tau}(t)$

$$\tau(t)\sin(\theta) = \tau(t)\tan(\theta) = \tau(t)\frac{\partial u}{\partial x}$$

şeklinde yazılabilir. Gerilimin değişimi bir kuvvet meydana getirir ve Newtonun ikinci yasasından

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau(t)\sin(\theta)) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

elde ederiz. Burada $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u(x,t)$ deformasyonunun ivmesini ve m ise ipin kütlesini göstermektedir.

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.6.1}$$

olur.

$\tau(t)$ **Gerilimin Hesaplanması**

$\alpha(t)$, $\beta(t)$ ve $u(x,t)$ fonksiyonlarındaki $\tau(t)$ gerilimi hesaplayacağız. Hooke Kanundan

$$\widehat{\tau}(t) - \tau_0 = k\frac{\mu(t) - \mu_0}{\mu_0} \tag{3.6.2}$$

yazabiliriz. Burada $\mu(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $[\alpha(t), \beta(t)]$ nın uzunluğu ve $\mu_0 = \mu(0) = \beta_0 - \alpha_0$ ise $[\alpha(0), \beta(0)]$ nın uzunluğudur.

Deformasyonu $[\alpha(t), \beta(t)]$ olan $u(x,t)$ eğrisinin yay uzunluğunu $S(t)$ ile gösterirsek

$$S(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx$$

elde ederiz. Küçük deformasyon hipotezi ile $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$ dır. Böylece

$$S(t) - \mu(t) = \frac{1}{2}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

olur. Hooke Kanununu kullanırsak

$$\tau(t) - \widehat{\tau}(t) = k\frac{S(t) - \mu(t)}{\mu(t)}$$

veya

$$\tau(t) - \widehat{\tau}(t) = \frac{k}{2\mu(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.6.3}$$

olur. (3.6.2) ve (3.6.3) den

$$\tau(t) = \tau_0 + k\frac{\mu(t) - \mu_0}{\mu_0} + \frac{1}{2\mu(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.6.4}$$

bulunur. (3.6.4) ifadesinde bulduğumuz $\tau(t)$ değeri (3.6.1) de yerine yazarsak ve m ye bölersek

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m}\frac{\mu(t) - \mu_0}{\mu_0} + \frac{k}{2m\mu(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.6.5}$$

elde ederiz. Bu, iplerin uçlarının sabit olmadığı zaman yani küçük bir yer değiştirme $\alpha(t) < \alpha_0$ ve $\beta(t) > \beta_0$ olduğu durumda küçük düşey deformasyon $u(x,t)$ için bir modeldir.

Not: İpin uçlarının sabit olduğunu kabul edersek yani $\forall t > 0$ için $\alpha(t) = \alpha_0$ ve $\beta(t) = \beta_0$ olsun.

(3.6.5) modeli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2m\mu_0}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

şekline döner.

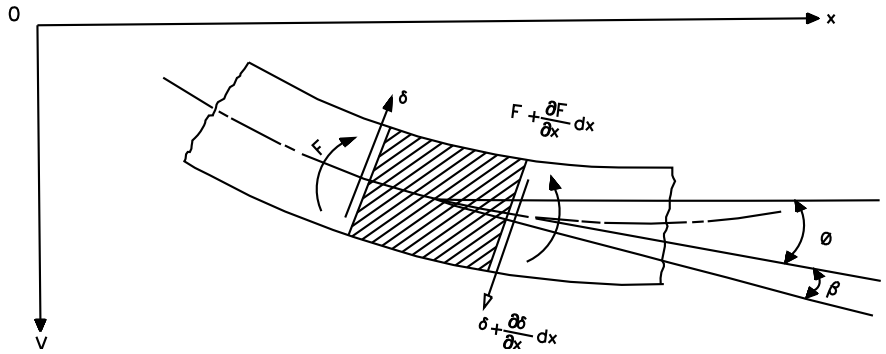
3.7. Timoshenko Kiriş Modeli

Kirişlerin dinamik davranışlarının analizi mühendislikte önemli bir araştırma konusu olmuştur. Uçak kanatları, helikopter palleri, türbin kanatçıkları gibi havacılık alanında önemi bulunan parçaların analizlerinde, demiryolu mühendisliği, sıvı ve gaz iletim hatlarında kullanılan borular, gemi iskeletlerinde ve köprü ayaklarında kullanılan kiriş kolon bağlantıları kirişlerin kullanım alanlarından bazılarıdır. Kiriş, kalınlık ve genişlikleri uzunluklarına göre daha az olan, eksenine düşey yönde etkiyen yükleri taşıyan narin yapı elemanları olarak tanımlanır.

Bir kirişin elastik deformasyonu genel elastisite denklemleri kullanılarak ilk kez Jacob Bernoulli tarafından incelenmiştir. 18.yy'da Jacob Bernoulli (1654-1705), elastik bir kirişin eğilmesinin, kirişin her noktası için eğilme momenti ile orantılı olduğunu belirtmiştir. Daniel Bernoulli (1700-1782) ise titreşen bir kirişin diferansiyel hareket denklemini çıkarmıştır. Leonhard Euler (1707-1783), çeşitli yükleme durumu altında çalışan elastik kirişlerin şekil değişimlerini incelemiş ve Bernoulli teorisini doğrulamıştır. Bu yaklaşım Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak adlandırılır ve mühendislikte klasik kiriş teorisi olarak bilinir. Bu teori mühendislikte kirişlerin yük taşıma ve çökme karakteristiklerini hesaplamakta kullanılmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi birçok mühendislik problemine basit ve makul bir çözüm sunmaktadır. Ancak kirişte meydana gelen kayma ve şekil değişiminin etkisinin göz ardı edilmesinden dolayı bu teori kısa ve kalın kirişlere uygulandığında yetersiz kalmaktadır. 1921'de cisimlerin mukavemetinin bir öncüsü olan Timoshenko, Euler-Bernoulli kiriş teorisine (basit kiriş teorisi) alternatif olarak kesitin dönme ve kayma etkilerini bir arada değerlendirmiştir. Bu yaklaşım Timoshenko kiriş teorisi olarak bilinir. Timoshenko kiriş teorisi, narin kirişlerin yanında kısa ve kalın kirişler için de anlamlı sonuçlar vermektedir (Gül 2015).

3.7.1. Timoshenko Denkleminin Elde Edilmesi

Timoshenko kiriş teorisi, Euler kiriş teorisine dönme ataleti ve kayma deformasyonunun etkisinin yansıtılmış halidir (Doshi 1979).



F : Eğilme momenti

δ : Kesme kuvveti

ϕ : Eğilmeden kaynaklanan dönme açısı

β : Kaymadan kaynaklanan dönme açısı

V sapma olmak üzere çok küçük bir sapma için

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \phi + \beta \tag{3.7.1}$$

ve Euler-Bernoulli Kiriş teorisinden

$$F = -EI\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \delta = kAG\beta \tag{3.7.2}$$

yazılabilir. Burada E elastisite modülü, I eylemsizlik modülü, EI eğilme rijitliği, k kirişin enine kesilme şekline bağlı bir sabit, A enine kesit alanı ve G rijitlik modülüdür.

Hareket denklemleri aşağıdaki gibidir:

Rotasyon (dönme) hareket denklemi, ρ maddenin yoğunluğunu göstermek üzere

$$-\frac{\partial F}{\partial x}dx + \delta dx = \rho I\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}dx \tag{3.7.3}$$

dır. V yönünde öteleme hareket denklemi

$$\frac{\partial \delta}{\partial x}dx = \rho A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dx \tag{3.7.4}$$

şeklindedir. Şimdi, (3.7.2) denklemindeki δ değerini (3.7.3) ve (3.7.4) denklemlerinde

yerine yazarsak

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + kAG\beta = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{3.7.5}$$

$$\frac{\partial \left(kAG\beta\right)}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{3.7.6}$$

olur. (3.7.1) denkleminden $\beta = \frac{\partial V}{\partial x} - \phi$ ve (3.7.2) denkleminden $F = -EI\frac{\partial \phi}{\partial x}$ değerlerini (3.7.5) ve (3.7.6) denklemlerinde yazarsak

$$EI\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + kAG\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \phi\right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{3.7.7}$$

ve

$$\rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - kAG\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.7.8}$$

elde ederiz. (3.7.8) denklemini ϕ ye göre düzenlersek

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

buluruz. (3.7.7) denkleminin x e göre türevi alınırsa ve $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ifadesini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \\ & +kAG\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \\ & -\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\rho A}{kAG}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

olur. İfadeyi biraz düzenlersek

$$-\frac{EI\rho}{kG}\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + EI\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 V}{\partial t^4} - \rho I\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$EI\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \rho I\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 V}{\partial t^4} = 0 \tag{3.7.9}$$

olur. Bu denkleme Timoshenko denklemi denir. (3.7.9) denkleminde dönme ataleti

$$-\rho I \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2}$$

ve kayma deformasyonu

$$-\frac{\rho I E}{kG} \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 V}{\partial t^4}$$

şeklinde gösterilir.

Timoshenko denkleminde dönme ataleti ve kaymaya bağlı deformasyonu düzeltmelerinin çıkartılmasıyla

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Euler denklemi elde edilir.

Timoshenko kiriş teorisi (3.7.7) ve (3.7.8) gibi iki denklem şeklinde ya da sadece (3.7.9) denklemi olarak düşünülebilir.

3.8. Galerkin Yaklaşım Metodu

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri incelemek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin, Lions (1969) tarafından yayınlanan çalışma farklı yöntemlerin ele alındığı önemli bir çalışmadır. Biz ise Galerkin yaklaşım metodunun nasıl çalıştığını basit bir örnekle açıklayacağız.

$V \subset H$ olmak üzere iki Hilbert uzayı olsun. Ayrılabilir Hilbert uzayında $\|.\|$ normu ve $\langle .,. \rangle$ iç çarpımı göstermek üzere ikinci mertebeden

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)\, u(t) = f(t), \ t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u'(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.8.1}$$

Cauchy problemini inceleyelim. Burada $[0,T] \subset R$ kapalı aralığında reel değerli bir H uzayında birer dönüşüm olan u ve f sırasıyla bilinmeyen ve verilen fonksiyonlardır. $A(t)$ $(0 \leq t \leq T)$; $V \subset H$ uzayında tanımlı sınırlı doğrusal operatördür.

$u, v \in V$ ve $a(t;.,.)$ bilineer sürekli olmak üzere $\langle A(t)\, u(t), v(t) \rangle = a(t; u(t), v(t))$

olsun. (3.8.1) problemi aşağıdaki gibi yazılabilir: $u(t)$ çözümü

$$\begin{cases} u \in C([0,T];V),\ u' \in C([0,T];H) \\ \langle u''(t), v\rangle + a(t;u(t),v) = \langle f, v\rangle,\ D'((0,T)) \\ \quad u_0 \in V,\ \ u_1 \in H \end{cases} \tag{3.8.2}$$

olacak şekilde bulunur. Bu problem Fadeo-Galerkin yaklaşım metodu ile çözülebilir.

Boy $V < \infty$ ve d_m ile gösterilmek üzere V_m, V nin bir alt uzayı olsun. Ayrıca $\{w_{mj}\}$, V nin bir tabanı olsun şöyleki

1) $\forall m \in N$ için $V_m \subset V$ (boy $V_m < \infty$).

2) $V_m \to V$ öyleki, V de yoğun bir alt uzay olan ϑ vardır ve her $v \in \vartheta$ için V de $\{u_m\}_{m\in N} \in V_m$ dizisi ve $u_m \to u$ elde edilebilir.

3) $V_m \subset V_{m+1}$ ve $\overline{\bigcup\limits_{m\in N} V_m} = V$.

Yaklaşık problemin çözümü u_m olsun. Böylece

$$\begin{cases} u_m(t) = \sum\limits_{j=1}^{d_m} g_j(t)\, w_{jm}, \\ u_m \in C([0,T];V_m),\ u_m' \in C([0,T];V_m),\ u_m \in L^2(0,T;V_m) \\ \langle u_m''(t), w_{jm}\rangle + a(t;u_m(t),w_{jm}) = \langle f, w_{jm}\rangle,\ \ 1 \le j \le d_m \\ u_m(0) = \sum\limits_{j=1}^{d_m} \xi_j(t)\, w_{jm},\ \ u_m'(0) = \sum\limits_{j=1}^{d_m} \eta_j(t)\, w_{jm}. \end{cases} \tag{3.8.3}$$

olur. Burada V de $m \to \infty$ yakınsarken

$$\sum_{j=1}^{d_m} \xi_j(t)\, w_{jm} \to u_0,\ \ \sum_{j=1}^{d_m} \eta_j(t)\, w_{jm} \to u_1$$

dır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, (3.8.3) sisteminde doğrusal olmayan terimler düzgün olduğundan Zorn lemmasıyla $[0, t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüm vardır. Bir sonraki adımda ise çözüm için bazı önsel kestirimler elde etmeye çalışacağız ve böylece her $t > 0$ için tanımlanmış bir çözüm elde etmek için aralık $[0, t_m)$ dışına genişletilebilir.

3.8.1. Önsel Kestirimler ve Yakınsama

$0 \leq t \leq T$ için

$$\|u_m\|^2 + \|u'_m\|^2 \leq C \left\{ \|u_m(0)\|^2 + \|u'_m(0)\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds \right\}$$

kestirimlerini ve Gronwall lemmasını kullanırsak (3.8.3) yaklaşık probleminin u_m çözümü (3.8.1) başlangıç probleminin u çözümüne yakınsar. Bu şekilde u çözümünün tekliği kanıtlanmış olur (Melouka 2018).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, dejenere sönüm terimli Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlamasını (Ekinci ve Pişkin, 2021) ikinci kısımda, dejenere sönüm terimli Kirchhoff tipli viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin azalması ve patlamasını (Pişkin ve Ekinci 2019) son kısımda ise dejenere sönüm terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığını, tekliğini ve patlamasını (Pişkin, Ekinci ve Zennir 2020) inceleyeceğiz.

4.1. Dejenere Sönüm Terimli Timoshenko Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + |u|^{\varrho} j'(u_t) \\ \qquad = |u|^{q-1} u, \ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç sınır değer problemini ele alacağız (Ekinci ve Pişkin, 2021). Burada $q > 1$, $\varrho \geq 0$ ve Ω, R^n de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. $j'(s)$ ise $j(s)$ fonksiyonunun türevini göstermektedir. $M(s)$ fonksiyonunu $s \geq 0$ olmak üzere

$$M(s) = 1 + s^{\gamma}, \ \gamma > 1$$

şeklinde seçeceğiz.

Aşağıdaki ifadeler sağlansın:

$(\mathbf{A})$: Her $\alpha, \beta \in R$ için c_0, c_1 pozitif sabitler olmak üzere

- $j(s)$, R de tanmlı sürekli, konveks ve reel değerli bir fonksiyon (Barbu 1976).
- $|j'(\alpha)| \leq c_0 |\alpha|^p$ dır.
- $\varrho, p, q \geq 0$ dır. Ayrıca $n \geq 3$ ise $\varrho \leq \frac{n}{n-2}$, $q \leq \frac{n}{n-2}$ dır.
- $(j'(\alpha) - j'(\beta))(\alpha - \beta) \geq c_1 |\alpha - \beta|^{p+1}$ dır.

Lemma 4.1.1. $E(t)$, (4.1.1) probleminin enerji fonsiyoneli olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Omega} |u|^{\varrho} j'(u_t)\, u_t dx \tag{4.1.2}$$

dır.

İspat. (4.1.1) denklemini u_t ile çarpıp Ω üzerinden integral alırsak

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx + \int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx \\ & - \int_{\Omega} M(\|\nabla u\|^2) \Delta u u_t dx + \int_{\Omega} |u|^{\varrho} j'(u_t)\, u_t dx \\ = & \int_{\Omega} |u|^{q-1} u u_t dx \end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci ve üçüncü terime Green özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1}\right] \\ = & -\int_{\Omega} |u|^{\varrho} j'(u_\tau)\, u_\tau dx d\tau \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.1.1) probleminin enerji fonsiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \\ & + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q+1}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^t E'(\tau) d\tau = -\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{\varrho} j'(u_\tau)\, u_\tau dx d\tau$$

olur. Ayrıca $t \geq 0$ için

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{\varrho} j'(u_\tau)\, u_\tau dx d\tau$$

dır.

4.1.1. Çözümün Patlaması

Ana sonucumuzu Açık Eşitsizlik metodunu kullanarak ispatlayacağız.

Lemma 4.1.1.1. ϱ, p, q, c_0 sabitler, $q > \varrho + p \geq 1$,

$$K(L) \equiv q + 1 - \frac{c_0 (\varrho + p + 1)(\varrho + p - 1)}{L(q-1)(p+1)}$$

ve

$$\alpha(L) = \left[(K(L) + 2) \left((K(L) - 2)\lambda_1 - \frac{c_0 (\varrho + p + 1)(q - \varrho - p)}{L(q-1)(p+1)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

olsun. O halde $L_1 > 0$ vardır şöyle ki $\alpha(L)$, $[L_1, +\infty)$ aralığında iyi tanımlıdır ve bazı sabit $L \in (L_1, +\infty)$ için

$$\frac{K(L)}{\alpha(L)} = \frac{pc_0}{(p+1)c_1} L^{\frac{1}{p}} \tag{4.1.1.1}$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\alpha_0(L) = (K(L) - 2)\lambda_1 - \frac{c_0 (\varrho + p + 1)(q - \varrho - p)}{L(p+1)(q-1)}$$

$$L_0 = \frac{c_0 (\varrho + p + 1)(\varrho + p - 1)}{(p+1)(q-1)^2} > 0$$

olsun. Herhangi $L > L_0$ için $K(L_0) = 2$, $K(L) > 2$ ve $L \to L_0$ yakınsarken

$$\alpha_0(L) \to -\frac{(q - \varrho - p)(q-1)}{\varrho + p - 1} < 0 \tag{4.1.1.2}$$

olur. Diğer taraftan, belirtelim ki (4.1.1.2) ile

$$L \to +\infty \text{ iken } \alpha_0(L) \to (q-1)\lambda_1 > 0$$

durumunu birleştirirsek ve $(0, +\infty)$ aralığında $\alpha_0(L)$ nin artan olduğu gerçeğinden $\alpha_0(L) = 0$ ın $(L_0, +\infty)$ aralığında tek bir L_1 çözümü olduğu sonucuna varırız. $L > L_0$ için $K(L) - 2 > 0$, $L > L_1$ için ise $\alpha(L) > 0$ olduğunu belirtelim, bunun anlamı $\alpha(L)$, $[L_1, +\infty)$ aralığında iyi tanımlı demektir.

Son olarak, basit bir hesaplama ile

$$\lim_{L\to L_1} \frac{K(L)}{\alpha(L)} - \frac{pc_0}{(p+1)c_1} L^{\frac{1}{p}} = +\infty$$

ve

$$\lim_{L\to +\infty} \frac{K(L)}{\alpha(L)} - \frac{pc_0}{(p+1)c_1} L^{\frac{1}{p}} = -\infty$$

elde ederiz. Sürekli fonksiyonlar için ortalama değer teoreminden (4.1.1.1) denkleminin bir kökü $(L_1, +\infty)$ aralığında tanımlı L dir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.2. (A) daki koşullar ve $q > \varrho + p \geq 1$ sağlansın. $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ ve u, (4.1.1) probleminin lokal çözümü olsun. Eğer $E(0) > 0$ ve

$$(u_0, u_1) > L^{\frac{1}{p}} \frac{pc_0}{(p+1)c_1} E(0) \tag{4.1.1.3}$$

ise (4.1.1) probleminin zayıf çözümü sonlu zamanda patlar. Burada L, (4.1.1.1) denkleminin köküdür.

İspat. Kabul edelim ki u, (4.1.1) probleminin global çözümü olsun ve buradan çelişki elde edelim. Bu amaçla

$$F(t) = \|u\|^2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $F(t)$ fonsiyonunun türevini alırsak

$$F'(t) = 2\langle u, u_t \rangle$$

olur. Tekrar türevini alırsak

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2\langle u, u_{tt} \rangle + 2\|u_t\|^2 \\ &= 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 \\ &\quad -2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + 2\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} - 2\int_\Omega |u|^\varrho j'(u_t)\, u dx \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$M(t) = F'(t) - \eta E(t) \tag{4.1.1.4}$$

olsun. Burada $\eta = L^{\frac{1}{p}} \frac{2pc_0}{(p+1)c_1}$ dır.

1. Adım:

$$M(t) \geq M(0) e^{\alpha(L)t} > 0 \quad \text{ve} \lim_{t\to+\infty} M(t) = +\infty \tag{4.1.1.5}$$

olduğunu kanıtlayalım.

(4.1.1.4), enerji denklemi (4.1.2) ve (A) koşullarını kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M(t) &= F''(t) - \eta E'(t) \\
&= 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 \\
&\quad -2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + 2\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\
&\quad -2\int_\Omega |u|^\varrho j'(u_t)\, u dx + \eta \int_\Omega |u|^\varrho j'(u_t)\, u_t dx \\
&\geq 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 \\
&\quad -2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + 2\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\
&\quad -2c_0 \int_\Omega |u|^{\varrho+1} |u_t|^p dx + \eta c_1 \int_\Omega |u|^\varrho |u_t|^{p+1} dx
\end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliği ve Young eşitsizliğinden faydalanarak $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{\varrho+1} |u_t|^p dx &= \int_\Omega |u|^{\varrho+1-\frac{\varrho p}{p+1}} |u|^{\frac{\varrho p}{p+1}} |u_t|^p dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{\varrho+p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_\Omega |u|^\varrho |u_t|^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\delta^{p+1} \int_\Omega |u|^{\varrho+p+1} dx \\
&\quad + \frac{p}{p+1}\delta^{-\frac{p+1}{p}} \int_\Omega |u|^\varrho |u_t|^{p+1} dx
\end{aligned} \tag{4.1.1.7}$$

elde ederiz. (4.1.1.7) ifadesini (4.1.1.6) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}M(t) &\geq 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 \\
&\quad -2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + 2\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\
&\quad -\frac{2c_0}{p+1}\delta^{p+1} \int_\Omega |u|^{\varrho+p+1} dx \\
&\quad + \left(\eta c_1 - \frac{2c_0 p}{p+1}\delta^{-\frac{p+1}{p}}\right) \int_\Omega |u|^\varrho |u_t|^{p+1} dx
\end{aligned} \tag{4.1.1.8}$$

olur. $a \geq 0$, $a \neq 1$, $y > 0$ için

$$g(y) = \frac{a^y}{y} \tag{4.1.1.9}$$

konveks fonsiyon ve $q > \varrho + p \geq 1$ için

$$\begin{gathered} \tfrac{q-\varrho-p}{q-1} + \tfrac{p+\varrho-1}{q-1} = 1, \\ p + \varrho + 1 = 2\tfrac{q-\varrho-p}{q-1} + (q+1)\tfrac{p+\varrho-1}{q-1} \end{gathered}$$

olduğunu belirtelim. Konveks fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$\int_\Omega \frac{|u|^{\varrho+p+1}}{p+\varrho+1} dx \leq \frac{q-\varrho-p}{2(q-1)} \int_\Omega |u|^2 dx + \frac{p+\varrho-1}{(q+1)(q-1)} \int_\Omega |u|^{q+1} dx \tag{4.1.1.10}$$

elde ederiz. (4.1.1.8) ve (4.1.1.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M(t) &\geq 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 \\ &\quad -2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + 2\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\ &\quad -\frac{2c_0(p+\varrho+1)(p+\varrho-1)}{L(p+1)(q^2-1)}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\ &\quad -\frac{c_0(p+\varrho+1)(q-\varrho-p)}{L(q-1)(p+1)}\|u\|^2 \\ &\geq 2\|u_t\|^2 - 2\|\Delta u\|^2 - 2\|\nabla u\|^2 - 2\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad +\frac{2K(L)}{q+1}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} - \frac{c_0(p+\varrho+1)(q-\varrho-p)}{L(q-1)(p+1)}\|u\|^2 \end{aligned}$$

olur. $E(t)$ denklemi, Poincare eşitsizliğ ve $K(L) > 2(\gamma+1)$ kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M(t) &\geq (2+K(L))\|u_t\|^2 + (K(L)-2)\|\Delta u\|^2 \\ &\quad +(K(L)-2)\|\nabla u\|^2 \\ &\quad +\left(\frac{K(L)}{\gamma+1}-2\right)\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - 2K(L)E(t) \\ &\quad -\frac{c_0(p+\varrho+1)(q-\varrho-p)}{L(q-1)(p+1)}\|u\|^2 \\ &\geq (2+K(L))\|u_t\|^2 - 2K(L)E(t) \\ &\quad +\left((K(L)-2)\lambda_1 - \frac{c_0(p+\varrho+1)(q-\varrho-p)}{L(q-1)(p+1)}\right)\|u\|^2 \\ &\geq 2\sqrt{(2+K(L))\alpha_0(L)}(u,u_t) - 2K(L)E(t) \\ &= \alpha(M)\left(2(u,u_t) - \frac{2K(L)}{\alpha(L)}E(t)\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\frac{K(L)}{\alpha(L)} = \frac{pc_0}{(p+1)c_1} L^{\frac{1}{p}}$ eşitliğinden

$$\frac{d}{dt} M(t) \geq \alpha(L) M(t)$$

sonucuna ulaşırız. (4.1.1.3) koşulundan $M(0) > 0$ olduğunu söyleyebilirz. Böylece, (4.1.1.5) eşitsizliğini elde ederiz.

2. Adım: u nun global çözüm olduğunu kabul edip, çelişki elde edeceğiz. (4.1.1.4) ifadesinden

$$\begin{aligned} F(t) &= \|u_0\|^2 + \int_0^t F'(\tau)\, d\tau \\ &> \|u_0\|^2 + \int_0^t M(\tau)\, d\tau \\ &> \|u_0\|^2 + \frac{M(0)}{\alpha(L)} \left(e^{\alpha(L)t-1}\right) \end{aligned} \tag{4.1.1.11}$$

yazabiliriz.

$$|u|^{p+\varrho+1} - |u_0|^{p+\varrho+1} = \int_0^t \frac{d}{d\tau} |u|^{p+\varrho+1}\, d\tau$$

olduğundan ve basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{p+\varrho+1}\, dx &= \int_\Omega |u_0|^{p+\varrho+1}\, dx + \int_\Omega \int_0^t \frac{d}{d\tau} |u|^{p+\varrho+1}\, d\tau dx \\ &\leq \int_\Omega |u_0|^{p+\varrho+1}\, dx \\ &\quad + (p+\varrho+1) \int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho+p} |u_\tau|\, dx d\tau \end{aligned} \tag{4.1.1.12}$$

olur. Şimdi, (4.1.1.12) eşitsizliğindeki $\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho+p} |u_\tau|\, dx d\tau$ terimi için kestirimde bulu-

nalım. Hölder eşitsizliği, (A) koşulları ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho+p} |u_\tau| \, dxd\tau \\
= &\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho+p-\frac{\varrho}{p+1}} |u|^{\frac{\varrho}{p+1}} |u_\tau| \, dxd\tau \\
\leq &\int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{p+\varrho+1} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |u|^{\varrho} |u_\tau|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{1}{p+1}} d\tau \\
\leq &\frac{1}{c_1} \int_0^t \|u\|_{L^{\varrho+p+1}}^{\frac{p(p+\varrho+1)}{p+1}} \int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{\varrho} j'(u_\tau) u_\tau dx \right)^{\frac{1}{p+1}} d\tau \\
\leq &\frac{1}{c_1} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{p+\varrho+1})}^{\frac{p(p+\varrho+1)}{p+1}} \int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{\varrho} j'(u_\tau) u_\tau dx \right)^{\frac{1}{p+1}} d\tau \\
\leq &\frac{1}{c_1} t^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{p+\varrho+1})}^{\frac{p(p+\varrho+1)}{p+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho} j'(u_\tau) u_\tau dxd\tau \right)^{\frac{1}{p+1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $E(t) \geq 0$ kabulünden ve (4.1.2) enerji denkleminden, $\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho} j'(u_\tau) u_\tau dxd\tau \leq E(0)$ olur. Burdan $0 < \varepsilon < \frac{1}{p+\varrho+1}$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho+p} |u_\tau| \, dxd\tau &\leq \varepsilon \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{\varrho+p+1})}^{p+\varrho+1} \\
&\quad + C_\varepsilon t^p \int_0^t \int_\Omega |u|^{\varrho} j'(u_\tau) u_\tau dxd\tau \\
&\leq \varepsilon \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{p+\varrho+1})}^{p+\varrho+1} + C_\varepsilon t^p E(0) \qquad (4.1.1.13)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.1.1.13) eşitsizliğini (4.1.1.12) de yerine yazarsak $\forall t > 0$ için

$$\|u\|_{L^\infty(0,t;L^{p+\varrho+1})} \leq C \|u_0\|_{L^{p+\varrho+1}} + Ct^{\frac{p}{p+\varrho+1}} E(0)^{\frac{1}{p+\varrho+1}}$$

olur. $p + \varrho + 1 \geq 2$ olduğundan ve Gömme teoreminden

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(0,t;L^2)} &\leq |\Omega|^{\frac{p+\varrho-1}{2(p+\varrho+1)}} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{p+\varrho+1})} \\
&\leq C |\Omega|^{\frac{p+\varrho-1}{2(p+\varrho+1)}} \left(\|u_0\|_{L^{p+\varrho+1}} + t^{\frac{p}{p+\varrho+1}} E(0)^{\frac{1}{p+\varrho+1}} \right) \qquad (4.1.1.14)
\end{aligned}$$

sağlanır. Burada $|\Omega|$, Ω nın Lebesgue ölçüsünü göstermektedir. (4.1.1.11) den $\forall t > 0$ için

$$\|u\|_{L^\infty(0,t;L^2)} \geq \|u_0\| + C\left(e^{ct} - 1\right) \qquad (4.1.1.15)$$

elde ederiz. (4.1.1.14) ve (4.1.1.15) sonuçlarından $\forall t > 0$ için

$$\|u_0\| + C\left(e^{ct} - 1\right) \leq C\left|\Omega\right|^{\frac{p+\varrho-1}{2(p+\varrho+1)}} \left(\|u_0\|_{L^{p+\varrho+1}} + t^{\frac{p}{p+\varrho+1}} E\left(0\right)^{\frac{1}{p+\varrho+1}}\right)$$

sonucuna ulaşırız ve bu da t nin yeteri kadar büyük olmasıyla çelişir. Bundan dolayı, çözümler sonlu zamanda patlar ve ispat tamamlanır.

4.2. Dejenere Sönüm Terimli Kirchhoff Tipli Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Azalması ve Patlaması

Bu kısımda Kirchhoff tipli viskoelastik

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau \\ \quad + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau \\ \quad + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t = f_2(u,v), \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x), \ \ x \in \Omega \end{cases} \tag{4.2.1}$$

denklem sistemini ele alacağız (Pişkin ve Ekinci 2019a). Burada Ω, R^n $(n = 1, 2, 3)$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $p, q \geq 1$, $j, k, l, \theta, \varrho \geq 0$; $f_i(.\,,.) : R^2 \to R$ fonksiyonları daha sonra belirtilecektir. Ayrıca $M(s) = b_1 + b_2 s^\gamma$ fonksiyonu $\gamma, s \geq 0$ için negatif olmayan bir fonksiyondur. Daha basit gösterim için $b_1 = b_2 = 1$ alalım.

Şimdi, bu çalışma boyunca kullanacağımız bazı kabulleri ve lemmaları vereceğiz.

$(\mathbf{A1})$ $g_i : R^+ \to R^+$ $(i = 1, 2)$ fonksiyonları $\tau \geq 0$ için

$$g_i(\tau) \geq 0, \ \ g_i'(\tau) \leq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_i(\tau)d\tau = l_i > 0 \tag{4.2.2}$$

koşullarını sağlayan C^1 sınıfından negatif olmayan fonksiyonlardır ve

$$l = \min\{l_1, l_2\}$$

olsun.

$(\mathbf{A2})$ $i = 1, 2$ ve $t \geq 0$ olmak üzere ξ_i

$$g_i'(t) \leq -\xi_i(t)g_i(t),$$

$$g_i(0) > 0 \ \text{ ve } \int_0^\infty \xi_i(t)dt = \infty$$

koşullarını sağlayan diferansiyellenebilen pozitif iki fonksiyondur.

$(\mathbf{A3})$ Ayrıca

$$\begin{cases} 1 \leq p, q; & n = 1, 2, \\ 1 \leq p, q \leq 5; & n = 3 \end{cases}$$

olsun.

$f_1(u,v)$ ve $f_2(u,v)$ fonksiyonlarını $a, b > 0$ sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= a\left|u+v\right|^{2(r+1)}(u+v) + b\left|u\right|^r u\left|v\right|^{r+2}, \\ f_2(u,v) &= a\left|u+v\right|^{2(r+1)}(u+v) + b\left|v\right|^r v\left|u\right|^{r+2} \end{aligned}$$

olacak şekilde seçelim. Burada r,

$$\begin{cases} -1 < r\ ;\ n = 1, 2, \\ -1 < r \leq 1;\ n = 3 \end{cases} \tag{4.2.3}$$

olsun. Yukarıdaki eşitliklerden $\forall\,(u,v) \in R^2$ için

$$uf_1(u,v) + vf_2(u,v) = 2(r+2)F(u,v) \tag{4.2.4}$$

yazılabilir. Burada

$$F(u,v) = \frac{1}{2(r+2)}\left[a\left|u+v\right|^{2(r+2)} + 2b\left|uv\right|^{r+2}\right] \tag{4.2.5}$$

dır. Ayrıca $\forall t \geq 0$ için

$$(g_i \diamond \nabla w)(t) = \int_0^t g_i(t-\tau)\left\|\nabla w(t) - \nabla w(\tau)\right\|^2 d\tau,$$

$$g_0(t) = \max\left\{g_1(t), g_2(t)\right\}$$

gösterimlerini kullanacağız.

Lemma 4.2.1. (4.2.3) sağlansın. Bu durumda $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ için $\eta > 0$ sayısı vardır ki

$$\left\|u+v\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + 2\left\|uv\right\|_{r+2}^{r+2} \leq \eta(l_1\left\|\nabla u\right\|^2 + l_2\left\|\nabla v\right\|^2)^{r+2} \tag{4.2.6}$$

eşitsizliği sağlanır (Said-Houari ve ark. 2011).

Lemma 4.2.2. $E(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için artmayandır. Şöyle ki

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &\leq \frac{1}{2}\left[(g_1' \diamond \nabla u)(t) + (g_2' \diamond \nabla v)(t)\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(g_1(t)\left\|\nabla u\right\|^2 + g_2(t)\left\|\nabla v\right\|^2\right) \\ &\quad -\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1}\,dx \\ &\quad -\int_\Omega \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q+1}\,dx \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

dır.

İspat. (4.2.1) denklem sisteminin birinci denklemini u_t ile ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω üzerinden integral alırsak

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u_t u_{tt} + v_t v_{tt})\,dx - \int_\Omega \left[u_t M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + v_t M(\|\nabla v\|^2)\Delta v\right]dx \\ &+\int_\Omega \left[u_t \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u d\tau + v_t \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v d\tau\right]dx \\ &+\int_\Omega u_t\left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t dx - \int_\Omega v_t\left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t dx \\ =\ &\int_\Omega \left(u_t f_1(u,v) + v_t f_2(u,v)\right)dx\end{aligned}$$

olur. Green özdeşliği kullanılır ve her bir terim tek tek düzenlenirse

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left((g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t)\right)\right. \\ &+\frac{1}{2(\gamma+1)}(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\ &+\frac{1}{2}(1 - \int_0^t g_1(\tau)d\tau)\|\nabla u(t)\|^2 \\ &\left.+\frac{1}{2}(1 - \int_0^t g_2(\tau)d\tau)\|\nabla v(t)\|^2 - \int_\Omega F(u,v)\,dx\right] \\ =\ &-\int_\Omega \left(\left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1} + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q+1}\right)dx \\ &-\frac{1}{2}\left[g_1(t)\|\nabla u(t)\|^2 + g_2(t)\|\nabla v(t)\|^2\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[(g_1' \diamond \nabla u)(t) + (g_2' \diamond \nabla v)(t)\right]\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left[(g_1\diamond\nabla u)(t)+(g_2\diamond\nabla v)(t)\right] \\ &+\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\ &+\frac{1}{2}(1-\int_0^t g_1(\tau)d\tau)\|\nabla u(t)\|^2 \\ &+\frac{1}{2}(1-\int_0^t g_2(\tau)d\tau)\|\nabla v(t)\|^2 \\ &-\int_\Omega F(u,v)\,dx \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0)-\int_0^t\int_\Omega\left(\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_\tau|^{p+1}+\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)|v_\tau|^{q+1}\right)dxd\tau \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\left[g_1(\tau)\|\nabla u(\tau)\|^2+g_2(\tau)\|\nabla v(\tau)\|^2\right]d\tau \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\left[(g_1'\diamond\nabla u)(\tau)+(g_2'\diamond\nabla v)(\tau)\right]d\tau \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} I(t) &= (1-\int_0^t g_1(\tau)d\tau)\|\nabla u(t)\|^2+(1-\int_0^t g_2(\tau)d\tau)\|\nabla v(t)\|^2 \\ &+(g_1\diamond\nabla u)(t)+(g_2\diamond\nabla v)(t)-2(r+2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

ve

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\left[(1-\int_0^t g_1(\tau)d\tau)\|\nabla u(t)\|^2+(1-\int_0^t g_2(\tau)d\tau)\|\nabla v(t)\|^2\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[(g_1\diamond\nabla u)(t)+(g_2\diamond\nabla v)(t)\right] \\ &+\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\ &-\int_\Omega F(u,v)\,dx \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

olsun.

Lemma 4.2.3. Kabul edelim ki

$$p \leq 2\frac{n-1}{n-2},\ n \geq 3$$

olsun. $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ 2 \leq s \leq p$ olmak üzere

$$\|u\|_p^s \leq C\left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_p^p\right)$$

olur. Burada $C > 1$ dır (Messaoudi 2003).

Lemma 4.2.4. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$c_0\left(|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}\right) \leq 2(r+2)F(u,v) \leq c_1\left(|u|^{2(r+2)} + |v|^{2(r+2)}\right)$$

dır (Messaoudi ve Said-Houari 2010).

(Han ve Wang 2009, Rammaha ve Sakuntasathien 2010, Ono 1997b) çalışmalarına benzer olarak lokal varlık elde edilebilir.

Teorem 4.2.5 (Lokal varlık**).** $(A1)$, $(A2)$ ve (4.2.3) sağlansın. $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ve $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ verilsin. Öyle bir $T > 0$ zamanı vardır ki (u,v), (4.2.1) probleminin lokal çözümüdür ve

$$u, v \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right),$$

$$u_t \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap L^{p+1}(\Omega),$$

$$v_t \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap L^{q+1}(\Omega)$$

dır.

4.2.1. Global Varlık

Bu bölümde, (4.2.1) problemi için çözümün global varlığını ifade ve ispat edeceğiz.

Lemma 4.2.1.1. $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ koşulları sağlansın ve $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$; $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ için

$$\beta = \eta \left(\frac{2(r+2)}{r+1} E(0) \right)^{r+1} < 1 \tag{4.2.1.1}$$

ve

$$I(0) = I(u_0, v_0) > 0$$

olsun. Bu durumda $\forall t > 0$ için

$$I(t) = I(u(t), v(t)) > 0$$

dır.

İspat. $I(0) > 0$ kabulünden, $u(t)$ ve $v(t)$ nin sürekliliğinden, $t_1 > 0$ olan bir zaman vardır ki $t \in (0, t_1)$ olmak üzere

$$I(t) \geq 0$$

sağlar. Her $0 \leq t < t_0$ için

$$I(t_0) = 0 \text{ ve } I(t) > 0 \tag{4.2.1.2}$$

sağlayan t_0 zamanı olsun. (4.2.9) ve (4.2.10) fonksiyonlarını birleştirsek ve $(A1)$ koşulunu kullanırsak

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2(r+2)} I(t) + \frac{r+1}{2(r+2)} \left[(1 - \int_0^t g_1(\tau) d\tau) \|\nabla u(t)\|^2 \right] \\ &\quad + \frac{r+1}{2(r+2)} \left[(1 - \int_0^t g_2(\tau) d\tau) \|\nabla v(t)\|^2 \right] \\ &\quad + \frac{r+1}{2(r+2)} \left[(g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t) \right] \\ &\geq \frac{r+1}{2(r+2)} \left[l_1 \|\nabla u(t)\|^2 + l_2 \|\nabla v(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t) \right] \end{aligned} \tag{4.2.1.3}$$

elde ederiz. (4.2.7) ve (4.2.8) ifadelerini kullanırsak $\forall t \in [0, t_0]$ için

$$\begin{aligned} l_1 \|\nabla u(t)\|^2 + l_2 \|\nabla v(t)\|^2 &\leq \frac{2(r+2)}{r+1} J(t) \\ &\leq \frac{2(r+2)}{r+1} E(t) \\ &\leq \frac{2(r+2)}{r+1} E(0) \end{aligned} \tag{4.2.1.4}$$

buluruz. (4.2.6) ve (4.2.1.1) ifadelerinden

$$\begin{aligned} & 2(r+2) \int_\Omega F(u(t_0), v(t_0)) dx \\ \leq\ & \eta (l_1 \|\nabla u(t_0)\|^2 + l_2 \|\nabla v(t_0)\|^2)^{r+2} \\ \leq\ & \eta \left(\frac{2(r+2)}{r+1} E(0) \right)^{r+1} \left[l_1 \|\nabla u(t_0)\|^2 + l_2 \|\nabla v(t_0)\|^2 \right] \\ =\ & \beta (l_1 \|\nabla u(t_0)\|^2 + l_2 \|\nabla v(t_0)\|^2) \\ <\ & (1 - \int_0^t g_1(\tau) d\tau) \|\nabla u(t)\|^2 + (1 - \int_0^t g_2(\tau) d\tau) \|\nabla v(t)\|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (4.2.9) ifadesini kullanarak

$$I(t_0) > 0$$

sonucuna ulaşırız ve (4.2.1.2) kabulüyle çelişir. Böylece, $[0, T]$ aralığında $I(t) > 0$ dır.

Teorem 4.2.1.2. Lemma 4.2.1.1 in koşulları sağlansın. Bu durumda (4.2.1) probleminin çözümü sınırlı ve globaldir.

İspat. İspat için

$$\|(u, v)\|_H := \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2$$

ifadesinin t den bağımsız sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (4.2.7), (4.2.8),

(4.2.10) ve (4.2.1.4) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ &\geq \frac{r+1}{2(r+2)}\left(l_1\|\nabla u(t)\|^2 + l_2\|\nabla v(t)\|^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.2.1.5}$$

buluruz. Böylece

$$\|(u,v)\|_H \leq CE(0)$$

sonucuna ulaşırız. Burada C pozitif bir sabit ve ifade sadece r, l_1, l_2 ye bağlı olduğundan ispat tamamlanır.

4.2.2. Çözümün Azalması

Bu bölümde, zaman sonsuza yaklaşırken (4.2.1) probleminin çözümünün sıfıra azalmasını ifade ve ispat edeceğiz. Bu amaçla

$$G(t) := E(t) + \varepsilon_1\phi(t) + \varepsilon_2\Psi(t) \tag{4.2.2.1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada ε_1 ve ε_2 sonra belirlenecek pozitif sabitlerdir ve

$$\phi(t) = \xi_1(t)\int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \xi_2(t)\int_\Omega v(t)v_t(t)dx, \tag{4.2.2.2}$$

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= -\xi_1(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\ &\quad -\xi_2(t)\int_\Omega v_t(t)\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.2.3}$$

şeklindedir. İşlem kolaylığı için $\xi_i \equiv 1$ $(i = 1, 2)$ olacak şekilde alıyoruz.

Şimdi de bazı yardımcı teoremleri ifade edelim.

Lemma 4.2.2.1. (u, v), (4.2.1) probleminin bir çözümü olsun ve (4.2.1.1) sağlansın. Böylece, $\upsilon \geq 0$ için

$$\begin{cases} \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau \right)^{\upsilon+2} dx \\ \leq (1-l_1)^{\upsilon+1} c_*^{\upsilon+2} \left(\frac{2(r+2)E(0)}{l_1(r+1)} \right)^{\frac{\upsilon}{2}} (g_1 \diamond \nabla u)(t), \\ \int_\Omega \left(\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau \right)^{\upsilon+2} dx \\ \leq (1-l_2)^{\upsilon+1} c_*^{\upsilon+2} \left(\frac{2(r+2)E(0)}{l_2(r+1)} \right)^{\frac{\upsilon}{2}} (g_2 \diamond \nabla v)(t) \end{cases} \tag{4.2.2.4}$$

dır (Wu 2011).

İspat. Hölder eşitsizliği, Sobolev-Poincare eşitsizliği, (4.2.2) ve (4.2.1.4) ifadelerini kullanılırsak

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau \right)^{\upsilon+2} dx \\ \leq & \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)d\tau \right)^{\upsilon+1} \left(\int_0^t g_1(t-\tau) \left| u(t)-u(\tau) \right|^{\upsilon+2} d\tau \right) dx \\ \leq & (1-l_1)^{\upsilon+1} c_*^{\upsilon+2} \int_0^t g_1(t-\tau) \left\| u(t)-u(\tau) \right\|^{\upsilon+2} d\tau \\ \leq & (1-l_1)^{\upsilon+1} c_*^{\upsilon+2} \left(\frac{2(r+2)E(0)}{l_1(r+1)} \right)^{\frac{\upsilon}{2}} (g_1 \diamond \nabla u)(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau \right)^{\upsilon+2} dx \\ \leq & (1-l_2)^{\upsilon+1} c_*^{\upsilon+2} \left(\frac{2(r+2)E(0)}{l_2(r+1)} \right)^{\frac{\upsilon}{2}} (g_2 \diamond \nabla v)(t) \end{aligned}$$

olur.

Lemma 4.2.2.2. β_1 ve β_2 pozitif iki sabit olmak üzere $\forall t \geq 0$ için

$$\beta_1 G(t) \leq E(t) \leq \beta_2 G(t) \tag{4.2.2.5}$$

dır.

İspat. Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği, Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (4.2.8) ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned}
|\phi(t)| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 + \|v\|_2 \|v_t\|_2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|v\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
&\leq \frac{1}{2}C^2(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
&\leq C^2\frac{r+2}{l(r+1)}E(t) + E(t) \\
&= \left(1 + C^2\frac{r+2}{l(r+1)}\right)E(t) \qquad (4.2.2.6)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği ve Sobolev-Poincare eşitsizliğini aşağıdaki terime uygularsak

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
\leq\ & \|u_t\|_2 \cdot \left[\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^2 dx\right]^{1/2} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^2 dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}(1-l)\int_\Omega\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))^2 d\tau dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}C^2(1-l)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \qquad (4.2.2.7)
\end{aligned}$$

buluruz. Benzer şekilde

$$\int_\Omega v_t(t)\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau dx \leq \frac{1}{2}\|v_t\|^2 + \frac{1}{2}C^2(1-l)(g_2 \diamond \nabla v)(t) \quad (4.2.2.8)$$

olur. (4.2.2.6)-(4.2.2.8) ve (4.2.1.3) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &\leq \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}C^2(1-l)\left[(g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t)\right] \\
&\leq E(t) + \frac{r+2}{r+1}C^2(1-l)E(t) \\
&= \left(1 + \frac{r+2}{r+1}C^2(1-l)\right)E(t) \qquad (4.2.2.9)
\end{aligned}$$

bulunur. ε_1 ve ε_2 sabitlerini yeterince küçük seçersek (4.2.2.5) ifadesi; (4.2.2.1), (4.2.2.6), ve (4.2.2.9) ifadeleri kullanılarak elde edilir.

Lemma 4.2.2.3. $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ ve (4.2.1.1) sağlansın. $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ verilsin. Böylece herhangi bir $t_0 > 0$ için $G(t)$ fonsiyoneli $\delta_i > 0$, $(i = 1, 2)$ için

$$G'(t) \leq -\delta_1 E(t) + \delta_2 \left[(g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t) \right]$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (4.2.1) ve (4.2.2.2) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &\leq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \int_\Omega u u_{tt} dx + \int_\Omega v v_{tt} dx \\
&= \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - M(\|\nabla u\|^2) \|\nabla u\|^2 - M(\|\nabla v\|^2) \|\nabla v\|^2 \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g_1(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla v(t) \int_0^t g_2(t-\tau) \nabla v(\tau) d\tau dx \\
&\quad - \int_\Omega u \left(|u|^k + |v|^l \right) u_t |u_t|^{p-1} dx \\
&\quad - \int_\Omega v \left(|v|^\theta + |u|^\varrho \right) v_t |v_t|^{q-1} dx \\
&\quad + 2(r+2) \int_\Omega F(u, v) dx \qquad (4.2.2.10)
\end{aligned}$$

sonucuna kolayca ulaşırız. Şimdi, (4.2.2.10) ifadesinin sağ tarafında yer alan beşinci terim için (Messaoudi 2008a, 2008b)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g_1(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau dx \\
\leq\ & \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau) \left(|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)| \right) d\tau \right)^2 dx \quad (4.2.2.11)
\end{aligned}$$

kestirimini kullanalım. Lemma 4.2.2.1, Young eşitsizliği ve

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau) d\tau \leq 1 - l_1$$

kabulünden herhangi $\eta_1 > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g_1(t-\tau)\nabla u(\tau) d\tau dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(1+\eta_1)\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)\nabla u(t) d\tau\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)\left|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right| d\tau\right)^2 dx \\
\leq\ & \frac{1+(1+\eta_1)(1-l_1)^2}{2}\|\nabla u\|^2 \\
&+\frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}(g_1 \diamond \nabla u)(t) \qquad (4.2.2.12)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde herhangi $\eta_2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla v(t) \int_0^t g_2(t-\tau)\nabla v(\tau) d\tau dx \\
\leq\ & \frac{1+(1+\eta_2)(1-l_2)^2}{2}\|\nabla v\|^2 \\
&+\frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}(g_2 \diamond \nabla v)(t) \qquad (4.2.2.13)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.2.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki yedinci terim

$$\left|\int_\Omega u\left(|u|^k+|v|^l\right)u_t|u_t|^{p-1}dx\right| \leq \int_\Omega |u|^{k+1}|u_t|^p dx + \int_\Omega |u||v|^l|u_t|^p dx \qquad (4.2.2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği, Sobolev-Poincare eşitsizliği,

$(A3)$ koşulu ve (4.2.1.4) eşitsizliğini kullanarak $\lambda_1 > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u|^{k+1} |u_t|^p \, dx \\
\leq\ & \left(\int_\Omega |u|^k |u_t|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |u|^{k+p+1} \, dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
\leq\ & \frac{p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \int_\Omega |u|^k |u_t|^{p+1} \, dx \\
& + \frac{\lambda_1^{p+1} C_*^{k+p+1}}{p+1} \|\nabla u\|^{k+p+1} \\
\leq\ & \frac{p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \int_\Omega (|u|^k + |v|^l) |u_t|^{p+1} \, dx \\
& + \frac{\lambda_1^{p+1} C_*^{k+p+1} \Lambda_1^{\frac{k+p-1}{2}}}{p+1} \|\nabla u\|^2
\end{aligned} \tag{4.2.2.15}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega |u| |v|^l |u_t|^p \, dx \right| \\
\leq\ & \left(\int_\Omega |v|^l |u_t|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |v|^l |u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
\leq\ & \frac{p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \int_\Omega (|u|^k + |v|^l) |u_t|^{p+1} \, dx \\
& + \frac{\lambda_1^{p+1}}{2(p+1)} \left(\|v\|_{2l}^{2l} + \|u\|_{2(p+1)}^{2(p+1)} \right) \\
\leq\ & \frac{p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \int_\Omega (|u|^k + |v|^l) |u_t|^{p+1} \, dx \\
& + \frac{\lambda_1^{p+1} C_*^{2l} \Lambda_2^{l-1}}{2(p+1)} \left(\|\nabla v\|^2 \right) \\
& + \frac{\lambda_1^{p+1} C_*^{2p+2} \Lambda_1^p}{2(p+1)} \left(\|\nabla u\|^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.2.2.16}$$

bulunur. Burada

$$\Lambda_1 = \frac{2(r+2)E(0)}{l_1(r+1)} \quad \text{ve} \quad \Lambda_2 = \frac{2(r+2)E(0)}{l_2(r+1)}$$

dır. (4.2.2.15) ve (4.2.2.16) ifadelerini (4.2.2.14) ifadesinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u\left(|u|^k+|v|^l\right)u_t\,|u_t|^{p-1}\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{2p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega(|u|^k+|v|^l)\,|u_t|^{p+1}\,dx \\
&+\frac{\lambda_1^{p+1}C_*^{2l}\Lambda_2^{l-1}}{2(p+1)}\left(\|\nabla v\|^2\right) \\
&+\frac{\lambda_1^{p+1}}{p+1}\left(C_*^{k+p+1}\Lambda_1^{\frac{k+p-1}{2}}+\frac{C_*^{2p}\Lambda_1^p}{2}\right)\|\nabla u\|^2
\end{aligned} \tag{4.2.2.17}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\lambda_2>0$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega v\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)v_t\,|v_t|^{q-1}\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{2q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega(|v|^\theta+|u|^\varrho)\,|v_t|^{q+1}\,dx \\
&+\frac{\lambda_2^{q+1}C_*^{2\varrho}\Lambda_1^{\varrho-1}}{2(q+1)}\left(\|\nabla u\|_2^2\right) \\
&+\frac{\lambda_2^{q+1}}{q+1}\left(C_*^{\theta+q+1}\Lambda_2^{\frac{\theta+q-1}{2}}+\frac{C_*^{2q}\Lambda_2^q}{2}\right)\|\nabla v\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.2.2.18}$$

olur. Böylece (4.2.2.12)-(4.2.2.13) ve (4.2.2.17)-(4.2.2.18) ifadelerini (4.2.2.10) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\phi'(t) \leq\ & \|u_t\|^2+\|v_t\|^2-k_1\|\nabla u\|^2-k_2\|\nabla v\|^2 \\
&-(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
&+2(r+2)\int_\Omega F(u,v)dx \\
&+\frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}(g_1\diamond\nabla u)(t) \\
&+\frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}(g_2\diamond\nabla v)(t) \\
&+\frac{2p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega(|u|^k+|v|^l)\,|u_t|^{p+1}\,dx \\
&+\frac{2q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega(|v|^\theta+|u|^\varrho)\,|v_t|^{q+1}\,dx
\end{aligned} \tag{4.2.2.19}$$

elde ederiz. Burada

$$k_1 = \frac{1-(1+\eta_1)(1-l_1)^2}{2} - \frac{\lambda_1^{p+1}}{p+1}\left(C_*^{k+p+1}\Lambda_1^{\frac{k+p-1}{2}} + \frac{C_*^{2p}\Lambda_1^p}{2}\right) - \frac{\lambda_2^{q+1}C_*^{2\varrho}\Lambda_1^{\varrho-1}}{2(q+1)}$$

ve

$$k_2 = \frac{1-(1+\eta_2)(1-l_2)^2}{2} - \frac{\lambda_2^{q+1}}{q+1}\left(C_*^{\theta+q+1}\Lambda_2^{\frac{\theta+q-1}{2}} + \frac{C_*^{2q}\Lambda_2^q}{2}\right) - \frac{\lambda_1^{p+1}C_*^{2l}\Lambda_2^{l-1}}{2(p+1)}$$

dır. Bu noktada $\eta_1 = \frac{l_1}{1-l_1}$, $\eta_2 = \frac{l_2}{1-l_2}$ olacak şekilde seçersek ve λ_1 ve λ_2 yeterince küçük alınırsa

$$\frac{\lambda_1^{p+1}}{p+1}\left(C_*^{k+p+1}\Lambda_1^{\frac{k+p-1}{2}} + \frac{C_*^{2p}\Lambda_1^p}{2}\right) + \frac{\lambda_2^{q+1}C_*^{2\varrho}\Lambda_1^{\varrho-1}}{2(q+1)} \leq \frac{l_1}{4}$$

ve

$$\frac{\lambda_2^{q+1}}{q+1}\left(C_*^{\theta+q+1}\Lambda_2^{\frac{\theta+q-1}{2}} + \frac{C_*^{2q}\Lambda_2^q}{2}\right) + \frac{\lambda_1^{p+1}C_*^{2l}\Lambda_2^{l-1}}{2(p+1)} \leq \frac{l_2}{4}$$

olur. Sonuç olarak, (4.2.2.19) ifadesi

$$\begin{aligned}
\phi'(t) \leq\ & \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - \frac{l_1}{4}\|\nabla u\|^2 - \frac{l_2}{4}\|\nabla v\|^2 \\
& -(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}) \\
& +2(r+2)\int_\Omega F(u,v)dx \\
& +\frac{1-l_1}{2l_1}(g_1 \diamond \nabla u)(t) + \frac{1-l_2}{2l_2}(g_2 \diamond \nabla v)(t) \\
& +\frac{2p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega (|u|^k + |v|^l)\,|u_t|^{p+1}\,dx \\
& +\frac{2q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega (|v|^\theta + |u|^\varrho)\,|v_t|^{q+1}\,dx \qquad (4.2.2.20)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de $\psi(t)$ fonksiyonunun türevi ile ilgili kestirimler elde edelim.

$$\psi_1(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx$$

olsun. (4.2.1) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\psi_1'(t) &= \int_\Omega M(\|\nabla u\|^2)\nabla u(t)\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau\right)dx \\
&\quad +\int_\Omega\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g_1'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
&\quad -\left(\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right)\|u_t\|^2 \\
&= I_1+...+I_4 \\
&\quad -\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\
&\quad -\left(\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right)\|u_t\|^2 \qquad (4.2.2.21)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.2.21) ifadesindeki terimlerin kestirimlerini ayrı ayrı yapabilmek için terimleri sırayla $I_1+...+I_4$ olacak şekilde aldık. Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, $(A1)$ koşulu ve (4.2.1.4) ifadesini kullanarak $\forall\lambda>0$ için

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \lambda M(\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2\int_0^t g_1(\tau)d\tau \\
&\quad +\frac{1}{4\lambda}M(\|\nabla u\|^2)(g_1\diamond\nabla u)(t) \\
&= \lambda\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\right)\int_0^t g_1(\tau)d\tau \\
&\quad +\frac{1}{4\lambda}\left(1+\|\nabla u\|_2^{2\gamma}\right)(g_1\diamond\nabla u)(t) \\
&\leq \lambda(1-l_1)\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\right) \\
&\quad +\frac{1}{4\lambda}\left(1+\left(\frac{2(r+2)}{l_1(r+1)}E(0)\right)^\gamma\right)(g_1\diamond\nabla u)(t) \qquad (4.2.2.22)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.2.21) deki I_2 için ise $(A1)$ koşulu, Hölder eşitsizliği ve Young eşitsizliğini

uygularsak $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \lambda \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)\nabla u(\tau) d\tau \right)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4\lambda} \int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(t) - \nabla u(\tau)) d\tau \right)^2 dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega \left[\int_0^t g_1(t-\tau) \left(|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)| \right) d\tau \right]^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\
&\leq 2\lambda \left(\int_0^t g_1(\tau) d\tau \right)^2 \|\nabla u\|^2 \\
&\quad + \left(2\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) (1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\
&\leq 2\lambda (1-l_1)^2 \|\nabla u\|^2 \\
&\quad + \left(2\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) (1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \qquad (4.2.2.23)
\end{aligned}$$

buluruz.

$$|I_3| = K_1 + K_2 \qquad (4.2.2.24)$$

olacak şekilde aldık. Burada

$$K_1 = \int_\Omega |u|^k |u_t|^{p-1} u_t \int_0^t g_1(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx,$$

$$K_2 = \int_\Omega |v|^l |u_t|^{p-1} u_t \int_0^t g_1(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx$$

dır. Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği, (4.2.1.4) ve (4.2.2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
|K_1| &\leq \left(\int_\Omega |u|^k |u_t|^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&\quad \times \left(\int_\Omega |u|^k \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq \frac{p\lambda^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1} dx \\
&\quad + \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\left(\frac{1}{2}\|u\|_{2k}^{2k} + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau\right)^{2(p+1)} dx\right) \\
&\leq \frac{p\lambda^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1} dx \\
&\quad + \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\left(\frac{c_*^{2k}}{2}\Lambda_1^{k-1}\|\nabla u\|^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-l_1)^{2p+1}c_*^{2p+2}(2\Lambda_1)^p}{2}(g_1 \diamond \nabla u)(t)\right) \qquad (4.2.2.25)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|K_2| &\leq \frac{p\lambda^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1} dx \\
&\quad + \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\left(\frac{c_*^{2l}}{2}\Lambda_2^{l-1}\|\nabla v\|_2^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{(1-l_1)^{2p+1}c_*^{2p+2}(2\Lambda_1)^p}{2}(g_1 \diamond \nabla u)(t)\right) \qquad (4.2.2.26)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dördüncü terim için ise Hölder eşitsizliği, Young eşitsizliği, Sobolev-Poincare eşitsizliği ve $(A1)$ koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \lambda\|u_t\|^2 + \frac{1}{4\lambda}\int_\Omega \left(\int_0^t g_1'(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau\right)^2 dx \\
&\leq \lambda\|u_t\|^2 + \frac{c_*^2}{4\lambda}\left(\int_0^t g_1'(\tau)d\tau\right)(g_1' \diamond \nabla u)(t) \\
&\leq \lambda\|u_t\|_2^2 - \frac{g_1(0)c_*^2}{4\lambda}(g_1' \diamond \nabla u)(t) \qquad (4.2.2.27)
\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. (4.2.2.22)-(4.2.2.27) ve (4.2.2.21) ifadelerini birleştirirsek

$$\begin{aligned}\psi_1'(t) \leq\ & \left[\frac{1}{4\lambda}\left(1+\left(\frac{2(r+2)}{l_1(r+1)}E(0)\right)^{\gamma}\right)+\left(2\lambda+\frac{1}{2\lambda}\right)(1-l_1)\right.\\ &\left.+\frac{\lambda^{p+1}(1-l_1)^{2p+1}c_*^{2p+2}(2\Lambda_1)^p}{p+1}\right](g_1\diamond\nabla u)(t)\\ &+\left(\lambda(1-l_1)+2\lambda(1-l_1)^2+\frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\frac{c_*^{2k}}{2}\Lambda_1^{k-1}\right)\|\nabla u\|^2\\ &+\frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\frac{c_*^{2l}}{2}\Lambda_2^{l-1}\|\nabla v\|^2\\ &+\lambda(1-l_1)\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}-\frac{g_1(0)c_*^2}{4\lambda}(g_1'\diamond\nabla u)(t)\\ &+\left(\lambda-\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right)\|u_t\|^2\\ &+\frac{2p\lambda^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_t|^{p+1}dx\\ &-\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \end{aligned}\tag{4.2.2.28}$$

sonucuna ulaşırız. Benzer şekilde

$$\psi_2(t)=-\int_\Omega v_t\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau dx$$

alalım ve böylece

$$\begin{aligned}\psi_2'(t) \leq\ & \left[\frac{1}{4\lambda}\left(1+\left(\frac{2(r+2)}{l_2(r+1)}E(0)\right)^{\gamma}\right)+\left(2\lambda+\frac{1}{2\lambda}\right)(1-l_2)\right.\\ &\left.+\frac{\lambda^{q+1}(1-l_2)^{2q+1}c_*^{2q+2}(2\Lambda_2)^q}{q+1}\right](g_2\diamond\nabla v)(t)\\ &+\left(\lambda(1-l_2)+2\lambda(1-l_2)^2+\frac{\lambda^{q+1}}{q+1}\frac{c_*^{2\theta}}{2}\Lambda_2^{\theta-1}\right)\|\nabla v\|^2\\ &+\frac{\lambda^{q+1}}{q+1}\frac{c_*^{2\varrho}}{2}\Lambda_1^{\varrho-1}\|\nabla u\|^2\\ &+\lambda(1-l_2)\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}-\frac{g_2(0)c_*^2}{4\lambda}(g_2'\diamond\nabla v)(t)\\ &+\left(\lambda-\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right)\|v_t\|^2\\ &+\frac{2q\lambda^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)|v_t|^{q+1}dx\\ &-\int_\Omega f_2(u,v)\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau dx \end{aligned}\tag{4.2.2.29}$$

olur. g_i $(i = 1, 2)$ fonksiyonları pozitif ve $g_i(0) > 0$ $(i = 1, 2)$ durumunda sürekli olduğundan $t_0 > 0$ için

$$\int_0^t g_i(\tau)d\tau \geq \int_0^{t_0} g_i(\tau)d\tau = g_i(0),\ \forall t \geq t_0$$

$$\begin{aligned} g_3 &= \min\{g_1(0), g_2(0)\}, \\ l &= \min\{l_1, l_2\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, (4.2.7), (4.2.2.1), (4.2.2.20), (4.2.2.28) ve (4.2.2.29) ifadelerinden

$$\begin{aligned} G'(t) \leq\ & -\left(\varepsilon_2 g_3 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1\right)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\ & + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_2 g_0(0)c_*^2}{4\lambda}\right)\left((g_1' \diamond \nabla u)(t) + (g_2' \diamond \nabla v)(t)\right) \\ & - \left(\frac{\varepsilon_1 l_1}{4} - \varepsilon_2 c_2\right)\|\nabla u\|^2 - \left(\frac{\varepsilon_1 l_2}{4} - \varepsilon_2 c_3\right)\|\nabla v\|^2 \\ & + \left(\frac{\varepsilon_1(1-l_1)}{2l_1} + \varepsilon_2 c_4\right)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ & + \left(\frac{\varepsilon_1(1-l_2)}{2l_2} + \varepsilon_2 c_5\right)(g_2 \diamond \nabla v)(t) \\ & + \left(\varepsilon_2\lambda(1-l_1) - \varepsilon_1\right)\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ & + \left(\varepsilon_2\lambda(1-l_2) - \varepsilon_1\right)\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \\ & + 2\varepsilon_1(r+2)\int_\Omega F(u,v)dx \\ & + \left(\frac{2\varepsilon_1 p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} + \frac{2\varepsilon_2 p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} - 1\right)\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p+1}\,dx \\ & + \left(\frac{2\varepsilon_1 q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} + \frac{2\varepsilon_2 q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} - 1\right)\int_\Omega \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q+1}\,dx \\ & - \varepsilon_2\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx \\ & - \varepsilon_2\int_\Omega f_2(u,v)\int_0^t g_2(t-\tau)(v(t)-v(\tau))d\tau dx \end{aligned} \tag{4.2.2.30}$$

bulunur. Burada

$$c_2 = \lambda(1-l) + 2\lambda(1-l)^2 + \frac{\varepsilon_2\lambda^{p+1}c_*^{2k}\Lambda_1^{k-1}}{2(p+1)} + \frac{\varepsilon_2\lambda^{q+1}c_*^{2\varrho}\Lambda_1^{\varrho-1}}{2(q+1)},$$

$$c_3 = \lambda(1-l) + 2\lambda(1-l)^2 + \frac{\varepsilon_2 \lambda^{q+1} c_*^{2\theta} \Lambda_2^{\theta-1}}{2(q+1)} + \frac{\varepsilon_2 \lambda^{p+1} c_*^{2l} \Lambda_2^{l-1}}{2(p+1)},$$

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \left(\frac{2(r+2)}{l(r+1)}E(0)\right)^{\gamma}\right) + \left(2\lambda + \frac{1}{2\lambda}\right)(1-l) \\ &\quad + \frac{\lambda^{p+1}(1-l)^{2p+1} c_*^{2p+2} (2\Lambda_1)^p}{p+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \left(\frac{2(r+2)}{l(r+1)}E(0)\right)^{\gamma}\right) + \left(2\lambda + \frac{1}{2\lambda}\right)(1-l) \\ &\quad + \frac{\lambda^{q+1}(1-l)^{2q+1} c_*^{2q+2} (2\Lambda_2)^q}{q+1} \end{aligned}$$

dır. (4.2.2.31) eşitsizliğindeki son iki terime Sobolev Poincare eşitsizliği ve (4.2.1.4) uygularsak

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega f_1(u,v) \int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \right| \\ \leq\ & \lambda \int_\Omega \left(a|u+v|^{2r+3} + b|u|^{r+1}|v|^{r+2}\right)^2 dx \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ \leq\ & c_*\lambda \int_\Omega |u|^{2(2r+3)} + |v|^{2(2r+3)} + |u|^{2(r+1)}|v|^{2(r+2)} dx \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ \leq\ & c_*\lambda \left[\|u\|_{2(2r+3)}^{2(2r+3)} + \|v\|_{2(2r+3)}^{2(2r+3)} + \|u\|_{2(2r+3)}^{2(r+1)} \|v\|_{2(2r+3)}^{2(r+2)}\right] \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ \leq\ & c_*\lambda c_*^{2(2r+3)} \left[\|\nabla u\|^{2(2r+3)} + \|\nabla v\|^{2(2r+3)} + \|\nabla u\|^{2(r+1)} \|\nabla v\|^{2(r+2)}\right] \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ \leq\ & c_*\lambda c_*^{2(2r+3)} \left(\frac{2(r+2)}{l(r+1)}E(0)\right)^{2r+2} \left[\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\| \|\nabla v\|\right] \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l_1)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ \leq\ & \frac{3}{2} c_*\lambda c_6 \left[\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right] \\ & + \frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l)(g_1 \diamond \nabla u)(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$c_6 = c_*^{2(2r+3)} \left[\frac{2(r+2)}{l(r+1)}E(0)\right]^{2(r+1)}$$

dır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega f_2(u,v)\int_0^t g_2(t-\tau)(u(t)-u(\tau))d\tau dx\right| \\ \leq\ & \frac{3}{2}c_*\lambda c_6\left[\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right] \\ & +\frac{c_*^2}{4\lambda}(1-l)\left(g_2\diamond\nabla v\right)(t) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} G'(t) \leq\ & -\left(\varepsilon_2 g_3-\varepsilon_2\lambda-\varepsilon_1\right)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ & +\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_2 g_0(0)c_*^2}{4\lambda}\right)\left((g_1'\diamond\nabla u)(t)+(g_2'\diamond\nabla v)(t)\right) \\ & -\left(\frac{\varepsilon_1 l}{4}-\varepsilon_2(c_2+3\lambda c_* c_6)\right)\|\nabla u\|^2 \\ & -\left(\frac{\varepsilon_1 l}{4}-\varepsilon_2(c_3+3\lambda c_* c_6)\right)\|\nabla v\|^2 \\ & +\left[\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l}+\varepsilon_2\left(c_4+\frac{c_*(1-l)}{4\lambda}\right)\right](g_1\diamond\nabla u)(t) \\ & +\left[\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l}+\varepsilon_2\left(c_5+\frac{c_*(1-l)}{4\lambda}\right)\right](g_2\diamond\nabla v)(t) \\ & -\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\lambda(1-l)\right)\left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}+\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}\right) \\ & +2\varepsilon_1(r+2)\int_\Omega F(u,v)dx \\ & +\left(\frac{2\varepsilon_1 p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}+\frac{2\varepsilon_2 p\lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}-1\right)\int_\Omega\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_t|^{p+1}dx \\ & +\left(\frac{2\varepsilon_1 q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}+\frac{2\varepsilon_2 q\lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}-1\right)\int_\Omega\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)|v_t|^{q+1}dx \end{aligned}$$

olur. Bu noktada $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ve λ yeterince küçük seçilirse ve g_i pozitif fonksiyonlar olduğundan dolayı $t_0 > 0$ için

$$\varepsilon_2\lambda(1-l) < \varepsilon_1 < \varepsilon_2(g_3-\lambda) \tag{4.2.2.31}$$

ve

$$\begin{aligned} c_7 &= \varepsilon_2 g_3 - \varepsilon_2\lambda - \varepsilon_1 > 0, \\ c_8 &= \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_2 g_0(0) c_*^2}{4\lambda} > 0, \\ c_9 &= \frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2(c_2 + 3\lambda c_* c_6) > 0, \\ c_{10} &= \frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2(c_3 + 3\lambda c_* c_6) > 0, \\ c_{11} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2\lambda(1-l) > 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, ε_1 ve ε_2 yeterince küçük seçersek (4.2.2.5) ve (4.2.2.31) sağlanır ve

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon_1 p \lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} + \frac{2\varepsilon_2 p \lambda_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} - 1 &< 0, \\ \frac{2\varepsilon_1 q \lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} + \frac{2\varepsilon_2 q \lambda_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} - 1 &< 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece her $t \geq t_0$ için $\delta_i,\ i = 1, 2$ pozitif sabitler olmak üzere

$$G'(t) \leq -\delta_1 E(t) + \delta_2 \left((g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t)\right) \tag{4.2.2.32}$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 4.2.2.4. $(A1),\ (A2)\,,\ (A3)$ ve (4.2.3) sağlansın. $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ verilsin ve (4.2.1.1) i sağlasın. Böylece K ve k pozitif sabitler olmak üzere, $t \geq t_0$ için

$$E(t) \leq K e^{-k\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\xi(t) := \min\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ dır.

İspat. (4.2.2.32) eşitsizliğini $\xi(t)$ ile çarparsak

$$\xi(t)G'(t) \leq -\delta_1 \xi(t) E(t) + \delta_2 \xi(t) \left[(g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t)\right]$$

olur. $(A2)$ ve $\xi(t) := \min\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ olduğundan dolayı ve (4.2.7) ifadesinden

$$-\left[(g_1' \diamond \nabla u)(t) + (g_2' \diamond \nabla v)(t)\right] \leq -2E'(t)$$

eşitsizliği yazılabilir ve

$$\begin{aligned} \xi(t)G'(t) &\leq -\delta_1 \xi(t)E(t) - \delta_2 \xi(t)\left[(g_1' \diamond \nabla u)(t) + (g_2' \diamond \nabla v)(t)\right] \\ &\leq -\delta_1 \xi(t)E(t) - 2\delta_2 E'(t),\ \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani

$$F'(t) \leq -c_* \xi(t)E(t) \leq -k\xi(t)F(t),\ \forall t \geq t_0 \tag{4.2.2.33}$$

yazılabilir. Burada k pozitif bir sabit, $F(t) = \xi(t)G(t) + CE(t)$ dir ve (4.2.7) den dolayı $E(t)$ ye eşittir. Basit bir hesaplama ile (4.2.2.33) eşitsizliğinden $\forall t \geq t_0$ için

$$F(t) \leq F(t_0)e^{-k\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}$$

istenen sonuca ulaşılır ve ispat tamamlanır.

4.2.3. Çözümlerin Patlaması

Bu kısımda, çözümün patlamasını ifade edeceğiz ve Georgiev ve Todorova metodu ile de ispat edeceğiz.

Teorem 4.2.3.1. Kabul edelim ki

$$2(r+2) > \max\left\{2\gamma + 2, k + p + 1, l + p + 1, \theta + q + 1, \varrho + q + 1, \frac{l_1}{1 - l_1}, \frac{l_2}{1 - l_2}\right\}$$

ve başlangıç enerjisi $E(0) < 0$ olsun. Bu durumda, (4.1.1) probleminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1 - \sigma}{\xi \sigma \Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Burada $\Psi(t)$ ve σ sırasıyla (4.2.3.1) ve (4.2.3.2) ifadelerinde verilmiştir.

İspat.

$$H(t) = -E(t)$$

olsun. $H\left(t\right)$ fonksiyonunun türevini alırsak

$$H'(t) = -E'(t)$$

olur. Bu durumda teoremdeki $E(0) < 0$ kabulünden ve (4.2.7) den $H(t) \geq H(0) > 0$ elde edilir.

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \right) \tag{4.2.3.1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\varepsilon > 0$ daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı ve

$$\begin{aligned} 0 \quad < \quad \sigma \leq \min \Bigg\{ & \frac{2r+3-(k+p)}{2p\left(r+2\right)}, \frac{2r+3-(l+p)}{2p\left(r+2\right)}, \\ & \frac{2r+3-(\varrho+q)}{2q\left(r+2\right)}, \frac{2r+3-(\theta+q)}{2q\left(r+2\right)}, \frac{r+1}{2(r+2)} \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.2.3.2}$$

olsun.

(4.2.3.1) in türevini alırsak ve (4.2.1) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \Psi'\left(t\right) \quad = \quad & \left(1-\sigma\right) H^{-\sigma}\left(t\right) H'\left(t\right) \\ & + \varepsilon \left(\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \int_\Omega \left|v_t\right|^2 dx \right) \\ & + \varepsilon \left(\int_\Omega u_{tt} u dx + \int_\Omega v_{tt} v dx \right) \\ = \quad & \left(1-\sigma\right) H^{-\sigma}\left(t\right) H'\left(t\right) + \varepsilon \left(\left\|u_t\right\|^2 + \left\|v_t\right\|^2 \right) \\ & - \varepsilon \int_\Omega \left(M\left(\left\|\nabla u\right\|^2 \right) \left|\nabla u\right|^2 + M\left(\left\|\nabla v\right\|^2 \right) \left|\nabla v\right|^2 \right) dx \\ & + 2\varepsilon(r+2) \int_\Omega F(u,v) dx \\ & + \varepsilon \int_\Omega \int_0^t g_1(t-\tau) \nabla u(\tau) \nabla u(t) d\tau dx \\ & + \varepsilon \int_\Omega \int_0^t g_2(t-\tau) \nabla v(\tau) \nabla v(t) d\tau dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega u \left(\left|u\right|^k + \left|v\right|^l \right) u_t \left|u_t\right|^{p-1} dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega v \left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho \right) v_t \left|v_t\right|^{q-1} dx \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (4.2.2.12) ve (4.2.2.13) eşitsizliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&\quad -\varepsilon \left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \right) \\
&\quad -\varepsilon \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
&\quad +2\varepsilon(r+2) \int_\Omega F(u,v)dx \\
&\quad +\varepsilon \frac{1+(1+\eta_1)(1-l_1)^2}{2} \|\nabla u\|^2 \\
&\quad +\varepsilon \frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2} (g_1 \diamond \nabla u)(t) \\
&\quad +\varepsilon \frac{1+(1+\eta_2)(1-l_2)^2}{2} \|\nabla v\|^2 \\
&\quad +\varepsilon \frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2} (g_2 \diamond \nabla u)(t) \\
&\quad -\varepsilon \int_\Omega u \left(|u|^k + |v|^l \right) u_t |u_t|^{p-1} dx \\
&\quad -\varepsilon \int_\Omega v \left(|v|^\theta + |u|^\varrho \right) v_t |v_t|^{q-1} dx
\end{aligned} \tag{4.2.3.3}$$

elde ederiz. $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
&\quad -\left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
&= 2(\gamma+1)H(t) + (\gamma+1)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&\quad +(\gamma+1)\left((g_1 \diamond \nabla u)(t) + (g_2 \diamond \nabla v)(t) \right) \\
&\quad +(\gamma+1)\left[(1 - \int_0^t g_1(\tau)d\tau) \|\nabla u(t)\|^2 + (1 - \int_0^t g_2(\tau)d\tau) \|\nabla v(t)\|^2 \right] \\
&\quad -2(\gamma+1) \int_\Omega F(u,v)dx
\end{aligned} \tag{4.2.3.4}$$

yazılabilir. (4.2.3.4) ü (4.2.3.3) de yazarsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \varepsilon(\gamma+2)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)\\
&\quad+\varepsilon\left(1-\frac{\gamma+1}{r+2}\right)\left[\|u+v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+2\|uv\|_{r+2}^{r+2}\right]\\
&\quad+2\varepsilon(\gamma+1)H(t)\\
&\quad+\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_1)+\frac{(1+\eta_1)(1-l_1)^2-1}{2}\right]\|\nabla u\|^2\\
&\quad+\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_2)+\frac{(1+\eta_2)(1-l_2)^2-1}{2}\right]\|\nabla v\|^2\\
&\quad+\varepsilon\left[(\gamma+1)+\frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}\right](g_1\diamond\nabla u)(t)\\
&\quad+\varepsilon\left[(\gamma+1)+\frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}\right](g_2\diamond\nabla u)(t)\\
&\quad-\varepsilon\int_\Omega u\left(|u|^k+|v|^l\right)u_t|u_t|^{p-1}dx\\
&\quad-\varepsilon\int_\Omega v\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)v_t|v_t|^{q-1}dx \qquad (4.2.3.5)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki son iki terimi için kestirim elde etmek için $\alpha,\beta\geq 0,\ \delta>0,\ x,y\in R^+$ ve $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ olmak üzere

$$\alpha\beta\leq\frac{\delta^x\alpha^x}{x}+\frac{\delta^{-y}\beta^y}{y}$$

formundaki Young eşitsizliği kullanılır ve $x=p+1$ ve $y=\frac{p+1}{p}$ olacak şekilde seçilirse

$$\int_\Omega uu_t|u_t|^{p-1}dx\leq\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}+\frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\|u_t\|_{p+1}^{p+1}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\left(|u|^k+|v|^l\right)u_t|u_t|^{p-1}dx &\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\int_\Omega\left(|u|^k+|v|^l\right)|u|^{p+1}dx\\
&\quad+\frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_t|^{p+1}dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\int_\Omega v v_t \left|v_t\right|^{q-1} dx \leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \left\|v\right\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1} \left\|v_t\right\|_{q+1}^{q+1}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho\right) v_t \left|v_t\right|^{q-1} dx \quad &\leq \quad \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\int_\Omega \left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho\right)\left|v\right|^{q+1} dx \\ &\quad + \frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega \left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho\right)\left|v_t\right|^{q+1} dx\end{aligned}$$

olur. Burada $\delta_1,\ \delta_2\ t$ ye bağlı ve daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Böylece Lemma 4.2.4. den ve yukarıda yapılan kestirimleri yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \quad \geq \quad & 2\varepsilon(\gamma+1)H(t) + (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) \\ & + \varepsilon(\gamma+2)\left(\left\|u_t\right\|^2 + \left\|v_t\right\|^2\right) \\ & + \varepsilon c'\left(\left\|u\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \left\|v\right\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\ & + \varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_1) + \frac{(1+\eta_1)(1-l_1)^2-1}{2}\right]\left\|\nabla u\right\|^2 \\ & + \varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_2) + \frac{(1+\eta_2)(1-l_2)^2-1}{2}\right]\left\|\nabla v\right\|^2 \\ & + \varepsilon\left[(\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}\right](g_1 \diamond \nabla u)(t) \\ & + \varepsilon\left[(\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}\right](g_2 \diamond \nabla v)(t) \\ & - \varepsilon\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\left|u\right|^k + \left|v\right|^l\right)\left|u\right|^{p+1} dx \\ & - \varepsilon\frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1}\int_\Omega \left(\left|u\right|^k + \left|v\right|^l\right)\left|u_t\right|^{p+1} dx \\ & - \varepsilon\frac{\delta_2^{q+1}}{q+1}\int_\Omega \left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho\right)\left|v\right|^{q+1} dx \\ & - \varepsilon\frac{q\delta_2^{-\frac{q+1}{q}}}{q+1}\int_\Omega \left(\left|v\right|^\theta + \left|u\right|^\varrho\right)\left|v_t\right|^{q+1} dx \qquad (4.2.3.6)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada teoremdeki kabulden $c' = c_0\left(1 - \frac{\gamma+1}{r+2}\right) > 0$.

Böylece $k_1,\ k_2 > 0$ olmak üzere δ_1 ve δ_2 yi $\delta_1^{-\frac{p+1}{p}} = k_1 H^{-\sigma}(t)$, $\delta_2^{-\frac{q+1}{q}} =$

$k_2 H^{-\sigma}(t)$ olacak şekilde seçersek $K = \frac{k_1 p}{p+1} + \frac{k_2 q}{q+1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq\ & 2\varepsilon(\gamma+1)H(t) + [(1-\sigma) - K\varepsilon] H^{-\sigma}(t) H'(t) \\
& +\varepsilon(\gamma+2)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
& +\varepsilon c'\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
& +\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_1) + \frac{(1+\eta_1)(1-l_1)^2 - 1}{2}\right]\|\nabla u\|^2 \\
& +\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_2) + \frac{(1+\eta_2)(1-l_2)^2 - 1}{2}\right]\|\nabla v\|^2 \\
& +\varepsilon\left[(\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}\right](g_1 \diamond \nabla u)(t) \\
& +\varepsilon\left[(\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}\right](g_2 \diamond \nabla v)(t) \\
& -\varepsilon\frac{k_1^{-p} H^{\sigma p}(t)}{p+1}\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u|^{p+1}\,dx \\
& -\varepsilon\frac{k_2^{-q} H^{\sigma q}(t)}{q+1}\int_\Omega \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v|^{q+1}\,dx
\end{aligned} \tag{4.2.3.7}$$

bulunur. Young eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l\right)|u|^{p+1}\,dx &\leq \int_\Omega |u|^{k+p+1}\,dx + \int_\Omega |v|^l |u|^{p+1}\,dx \\
&\leq \int_\Omega |u|^{k+p+1}\,dx + \frac{l}{l+p+1}\delta_1^{\frac{l+p+1}{l}}\int_\Omega |v|^{l+p+1}\,dx \\
&\quad + \frac{p+1}{l+p+1}\delta_1^{-\frac{l+p+1}{p+1}}\int_\Omega |u|^{l+p+1}\,dx \\
&= \|u\|_{k+p+1}^{k+p+1} + \frac{l}{l+p+1}\delta_1^{\frac{l+p+1}{l}}\|v\|_{l+p+1}^{l+p+1} \\
&\quad + \frac{p+1}{l+p+1}\delta_1^{-\frac{l+p+1}{p+1}}\|u\|_{l+p+1}^{l+p+1}
\end{aligned} \tag{4.2.3.8}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v|^{q+1}\,dx &\leq \|v\|_{\theta+q+1}^{\theta+q+1} + \frac{\varrho}{\varrho+q+1}\delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}}\|u\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1} \\
&\quad + \frac{q+1}{\varrho+q+1}\delta_2^{-\frac{\varrho+q+1}{q+1}}\|v\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1}
\end{aligned} \tag{4.2.3.9}$$

olur.

(4.2.3.8) ve (4.2.3.9) ifadelerini (4.2.3.7) de yazarsak

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq\ & 2\varepsilon(\gamma+1)H(t)+[(1-\sigma)-K\varepsilon]H^{-\sigma}(t)H'(t)\\
&+\varepsilon(\gamma+2)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)\\
&+\varepsilon c'\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right)\\
&+\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_1)+\frac{(1+\eta_1)(1-l_1)^2-1}{2}\right]\|\nabla u\|^2\\
&+\varepsilon\left[(\gamma+1)(1-l_2)+\frac{(1+\eta_2)(1-l_2)^2-1}{2}\right]\|\nabla v\|^2\\
&+\varepsilon\left[(\gamma+1)+\frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}\right](g_1\diamond\nabla u)(t)\\
&+\varepsilon\left[(\gamma+1)+\frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}\right](g_2\diamond\nabla v)(t)\\
&-\varepsilon\frac{k_1^{-p}H^{\sigma p}(t)}{p+1}\left(\|u\|_{k+p+1}^{k+p+1}+\frac{l}{l+p+1}\delta_1^{\frac{l+p+1}{l}}\|v\|_{l+p+1}^{l+p+1}\right)\\
&-\varepsilon\frac{k_1^{-p}H^{\sigma p}(t)}{p+1}\frac{p+1}{l+p+1}\delta_1^{-\frac{l+p+1}{p+1}}\|u\|_{l+p+1}^{l+p+1}\\
&-\varepsilon\frac{k_2^{-q}H^{\sigma q}(t)}{q+1}\left(\|v\|_{\theta+q+1}^{\theta+q+1}+\frac{\varrho}{\varrho+q+1}\delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}}\|u\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1}\right)\\
&-\varepsilon\frac{k_2^{-q}H^{\sigma q}(t)}{q+1}\frac{q+1}{\varrho+q+1}\delta_2^{-\frac{\varrho+q+1}{q+1}}\|v\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1} \qquad (4.2.3.10)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Teoremdeki

$$2(r+2)>\max\{2(\gamma+1),k+p+1,\ l+p+1,\ \theta+q+1,\ \varrho+q+1\}$$

kabulünden

$$H^{\sigma p}(t)\|u\|_{k+p+1}^{k+p+1}\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+k+p+1}+\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|u\|_{k+p+1}^{k+p+1}\right), \qquad (4.2.3.11)$$

$$H^{\sigma q}(t)\|v\|_{\theta+q+1}^{\theta+q+1}\leq C\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+\theta+q+1}+\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)}\|v\|_{\theta+q+1}^{\theta+q+1}\right), \qquad (4.2.3.12)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{l+p+1}\delta_1^{\frac{l+p+1}{l}}H^{\sigma p}(t)\|v\|_{l+p+1}^{l+p+1}\\
\leq\ & C\frac{l}{l+p+1}\delta_1^{\frac{l+p+1}{l}}\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+l+p+1}+\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|v\|_{l+p+1}^{l+p+1}\right) \qquad (4.2.3.13)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho}{\varrho+q+1}\delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}} H^{\sigma q}(t)\|u\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1} \\ \leq\ & C\frac{\varrho}{\varrho+q+1}\delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}}\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+\varrho+q+1}+\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)}\|u\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1}\right) \end{aligned} \tag{4.2.3.14}$$

bulunur. (4.2.3.2) ve $\forall z \geq 0,\ 0<\upsilon\leq 1,\ a\geq 0$ olmak üzere

$$z^{\upsilon} \leq z+1 \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)(z+a) \tag{4.2.3.15}$$

cebirsel eşitsizliğini kullanırsak $t\geq 0$ için

$$\begin{aligned} \|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+k+p+1} &\leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H(0)\right) \\ &\leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H(t)\right) \end{aligned} \tag{4.2.3.16}$$

ve

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+\theta+q+1} \leq d\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H(t)\right) \tag{4.2.3.17}$$

bulunur. Burada $d=1+\frac{1}{H(0)}$ dır. Benzer olarak

$$\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)+\varrho+q+1} \leq d\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H(t)\right) \tag{4.2.3.18}$$

ve

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)+l+p+1} \leq d\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+H(t)\right) \tag{4.2.3.19}$$

olur. Ayrıca $(k+l)^{\lambda}\leq C\left(k^{\lambda}+l^{\lambda}\right),\ k,l>0$ eşitsizliği, Young eşitsizliği, (4.2.3.2) ve (4.2.3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|u\|_{k+p+1}^{k+p+1} &\leq |\Omega|^{\frac{2(r+2)-(k+p+l)}{2(r+2)}}\left(\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)}\|u\|_{2(r+2)}^{k+p+l}\right) \\ &= |\Omega|^{\frac{2(r+2)-(k+p+l)}{2(r+2)}}\left(\|v\|_{2(r+2)}^{\sigma p}\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{k+p+l}{2(r+2)}}\right)^{2(r+2)} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{2(r+2)-(k+p+l)}{2(r+2)}}\left(c'\|v\|_{2(r+2)}^{\frac{2\sigma p(r+2)+k+p+l}{2(r+2)}}\right. \\ &\quad \left.+c''\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{2\sigma p(r+2)+k+p+l}{2(r+2)}}\right)^{2(r+2)} \\ &\leq C\left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}+\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \end{aligned} \tag{4.2.3.20}$$

bulunur. Burada $c' = \frac{2\sigma p(r+2)}{2\sigma p(r+2)+k+p+l}$ ve $c'' = \frac{k+p+l}{2\sigma p(r+2)+k+p+l}$ dır.

Benzer şekilde

$$\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)} \|v\|_{\theta+q+1}^{\theta+q+1} \leq C \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right), \tag{4.2.3.21}$$

$$\|u\|_{2(r+2)}^{2\sigma p(r+2)} \|v\|_{l+p+1}^{l+p+1} \leq C \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \tag{4.2.3.22}$$

ve

$$\|v\|_{2(r+2)}^{2\sigma q(r+2)} \|u\|_{\varrho+q+1}^{\varrho+q+1} \leq C \left(\|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right) \tag{4.2.3.23}$$

elde edilir. Böylece (4.2.3.11)-(4.2.3.14) ve (4.2.3.16)-(4.2.3.23) ifadeleri birleştirilip (4.2.3.10) da yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) \geq\ & [(1-\sigma) - K\varepsilon] H^{-\sigma}(t) H'(t) \\
& + \varepsilon(\gamma+2) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
& + \varepsilon C_1 (g_1 \diamond \nabla u)(t) + \varepsilon C_2 (g_2 \diamond \nabla v)(t) \\
& + \varepsilon C_3 \|\nabla u\|^2 + \varepsilon C_4 \|\nabla v\|^2 \\
& + \varepsilon \left[2(\gamma+1) - C k_1^{-p} \left(1 + \frac{l}{l+p+1} \delta_1^{\frac{l+p+1}{l}} + \frac{p+1}{l+p+1} \delta_1^{-\frac{l+p+1}{p+1}} \right) \right. \\
& \left. - C k_2^{-q} \left(1 + \frac{\varrho}{\varrho+q+1} \delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}} + \frac{q+1}{\varrho+q+1} \delta_2^{-\frac{\varrho+q+1}{q+1}} \right) \right] H(t) \\
& + \varepsilon \left[c' - C k_1^{-p} \left(1 + \frac{l}{l+p+1} \delta_1^{\frac{l+p+1}{l}} + \frac{p+1}{l+p+1} \delta_1^{-\frac{l+p+1}{p+1}} \right) \right. \\
& \left. - C k_2^{-q} \left(1 + \frac{\varrho}{\varrho+q+1} \delta_2^{\frac{\varrho+q+1}{\varrho}} + \frac{q+1}{\varrho+q+1} \delta_2^{-\frac{\varrho+q+1}{q+1}} \right) \right] \\
& \times \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.3.24}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_1})(1-l_1)}{2}, \\
C_2 &= (\gamma+1) + \frac{(1+\frac{1}{\eta_2})(1-l_2)}{2}, \\
C_3 &= (\gamma+1)(1-l_1) + \frac{(1+\eta_1)(1-l_1)^2 - 1}{2}, \\
C_4 &= (\gamma+1)(1-l_2) + \frac{(1+\eta_2)(1-l_2)^2 - 1}{2}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu noktoda, l_1 ve l_2 yeterince küçük olmak üzere $\eta_1 = \frac{l_1}{1-l_1}$, $\eta_2 = \frac{l_2}{1-l_2}$

$$(\gamma+1)(1-l_1) \geq \frac{l_1}{2} \text{ ve } (\gamma+1)(1-l_2) \geq \frac{l_2}{2}$$

olacak şekilde seçelim. Pozitif sabitler $C_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ ve büyük k_1 ve k_2 değerleri için, pozitif K_1 ve K_2 sabitlerini bulabiliriz. Şöyle ki (4.2.3.24)

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq [(1-\sigma) - K\varepsilon] H^{-\sigma}(t) H'(t) \\
&\quad +\varepsilon(\gamma+2)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
&\quad +\varepsilon C_1(g_1 \diamond \nabla u)(t) + \varepsilon C_2(g_2 \diamond \nabla v)(t) \\
&\quad +\varepsilon C_3 \|\nabla u\|^2 + \varepsilon C_4 \|\nabla v\|^2 \\
&\quad +\varepsilon K_1 H(t) + \varepsilon K_2 \left(\|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \\
&\geq \beta\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right. \\
&\quad \left. + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}\right) \qquad (4.2.3.25)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\beta = \min\{\varepsilon(\gamma+2),\ \varepsilon C_1,\ \varepsilon C_2, \varepsilon C_3,\ \varepsilon C_4,\ \varepsilon K_1,\ \varepsilon K_2\}$$

ve yeterince küçük ε için

$$(1-\sigma) - K\varepsilon \geq 0$$

dır. Bundan dolayı

$$\Psi(t) \geq \Psi(0) > 0,\ \forall t \geq 0 \qquad (4.2.3.26)$$

olur. Şimdi $\Psi(t)^{\frac{1}{1-\sigma}}$ kestirimi için Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\int_\Omega u_t u dx\right| \leq \|u_t\|_2 \|u\|_2 \leq C \|u_t\|_2 \|u\|_{2(r+2)} \qquad (4.2.3.27)$$

buluruz. Böylece

$$\left|\int_\Omega u_t u dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u\|_{2(r+2)}^{\frac{1}{1-\sigma}} \qquad (4.2.3.28)$$

yazabiliriz. Young eşitsizliği kullanılırsa ve $1 < \frac{1}{1-\sigma} < 2$ olduğundan

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C(\|u_t\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{\frac{2}{1-2\sigma}}) \tag{4.2.3.29}$$

elde ederiz. Burada $\frac{2}{1-2\sigma} \leq 2(r+2)$ olur. Lemma 4.2.3 de $s = \frac{2}{1-2\sigma}$ alınırsa

$$\|u\|_{2(r+2)}^{\frac{2}{1-2\sigma}} \leq C(\|\nabla u\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}), \tag{4.2.3.30}$$

bulunur. Böylece

$$\left| \int_\Omega u_t u dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C(\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) \tag{4.2.3.31}$$

olur. Benzer şekilde

$$\left| \int_\Omega v_t v dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C(\|v_t\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)}) \tag{4.2.3.32}$$

olur.

(4.2.3.31)-(4.2.3.32) ve $a_1, a_2, ..., a_m \geq 0,\ \lambda \geq 1$ olmak üzere

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^\lambda \leq 2^{(m-1)/(\lambda-1)} \left(a_1^\lambda + a_2^\lambda + ... + a_m^\lambda\right),$$

eşitsizliği kullanırsa

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\left(\int_\Omega u_t u dx + \int_\Omega v_t v dx\right)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C\Big(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + \|u\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} + \|v\|_{2(r+2)}^{2(r+2)} \\ &\quad + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\Big) \end{aligned} \tag{4.2.3.33}$$

bulunur. (4.2.3.25) ve (4.2.3.33) den ξ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\Psi'(t) \geq \xi \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \tag{4.2.3.34}$$

olur.

$(0,t)$ aralığında (4.2.3.34) ün integrali alınırsa, $\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi\sigma t}{1-\sigma}}$ elde

ederiz. Burada çözüm sonlu T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi\sigma\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır.

4.3. Dejenere Sönüm Terimli Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Varlığı ve Patlaması

Bu kısımda, dejenere sönüm terim ve güçlü kaynak terim içeren hiperbolik tipten başlangıç sınır değer problemini

$$\begin{cases} \begin{array}{c} u_{tt}-\Delta u+\int_0^t \varpi_1(t-s)\Delta u(s)ds \\ +\left(|u|^k+|v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t=f_1(u,v), \\ v_{tt}-\Delta v+\int_0^t \varpi_2(t-s)\Delta v(s)ds \\ +\left(|v|^\theta+|u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t=f_2(u,v), \end{array} \\ u(x,t)=v(x,t)=0, \qquad (x,t)\in \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), \qquad x\in\Omega, \\ v(x,0)=v_0(x),\ v_t(x,0)=v_1(x), \qquad x\in\Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

inceleyeceğiz (Pişkin, Ekinci ve Zennir 2020). Burada $\Omega\subset R^n$ $(n=1,2,3)$, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $f_i(.\,,.):R^2\longrightarrow R$, $\varpi_i(.):R^+\to R^+$ $(i=1,2)$ fonksiyonları daha sonra belirtilecektir.

Bu çalışmada

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1\le q<\infty;\ n=1,2, \\ H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1\le q\le 6;\ n=3 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

şeklinde belirtilen Sobolev gömülmesi çokça kullanılacak ve çoğu zaman kullanıldığı belirtilmeyecektir.

Çalışmada kullanılacak bazı kabuller:

$(\mathbf{A1})$

(1) $0<p,q<1$. Ayrıca

$$\begin{cases} r\ge 3;\ \ n=1,2, \\ r=3;\quad n=3 \end{cases}$$

olsun.

(2) Parametreler $k,l,\theta,\varrho\ge 1$ ve eğer $n=3$ ise

$$\max\{k,l\}\le 3(1-p) \text{ ve } \max\{\theta,\varrho\}\le 3(1-q)$$

olsun.

(3) Başlangıç koşulları $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ dır.

(4) Pozitif c_0 ve c_1 sabitleri vardır ki

$$c_0\left(|u|^{r+1}+|v|^{r+1}\right) \leq F(u,v) \leq c_1\left(|u|^{r+1}+|v|^{r+1}\right) \tag{4.3.3}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\forall\,(u,v) \in R^2$ için $uf_1(u,v)+vf_2(u,v)=(r+1)F(u,v)$ dır.

$a, b > 0$ sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= (r+1)\left[a\,|u+v|^{r-1}(u+v)+b\,|u|^{\frac{r-3}{2}}u\,|v|^{\frac{r+1}{2}}\right], \\ f_2(u,v) &= (r+1)\left[a\,|u+v|^{r-1}(u+v)+b\,|v|^{\frac{r-3}{2}}v\,|u|^{\frac{r+1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

ve

$$F(u,v) = a\,|u+v|^{r+1}+2b\,|uv|^{\frac{r+1}{2}}$$

olacak şekilde seçelim.

$(\mathbf{A2})$ ϖ_i $(i=1,2)$ fonksiyonları $\tau \geq 0$ için

$$\varpi_i(\tau) \geq 0, \;\; \varpi_i'(\tau) \leq 0, \;\; \int_0^\infty \varpi_i(\tau)d\tau < 1 \tag{4.3.5}$$

koşullarını sağlayan C^1 sınıfından negatif olmayan fonksiyonlardır.

$(\mathbf{A3})$ Kabul edelim ki

$$\max\left\{\int_0^\infty \varpi_1(\tau)d\tau, \int_0^\infty \varpi_2(\tau)d\tau\right\} < \frac{r-1}{r+1} \tag{4.3.6}$$

olsun.

Çalışma boyunca $i=1,2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &(\varpi_i \diamond \vartheta)(t) = \textstyle\int_0^t \varpi_i(t-\tau)\left\|\vartheta(t)-\vartheta(\tau)\right\|^2 d\tau, \\ &0 < \rho_i = 1-\textstyle\int_0^\infty \varpi_i(\tau)d\tau < 1, \\ &\rho = \min\{\rho_1,\rho_2\} \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

notasyonlarını kullanacağız.

Öncelikle, (4.3.1) probleminin zayıf çözümünün tanımını vereceğiz.

Tanım 4.3.1. (u, v) ikilisi $[0, T]$ aralığında aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (4.3.1) probleminin zayıf çözümü olur:

$(\mathbf{i})$ $u, v \in C_w\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)$,

$(\mathbf{ii})$ $u_t, v_t \in C_w\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$,

$(\mathbf{iii})$ $(u(0), v(0)) = (u^0, v^0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$(\mathbf{iv})$ $(u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$;

$(\mathbf{v})$ $\varphi, \vartheta \in H_0^1(\Omega)$ test fonksiyonları için hemen hemen bütün $t \in [0, T]$ için (u, v) ikilileri

$$\begin{cases} \langle u'(t), \varphi\rangle - \langle u^1, \varphi\rangle + \int_0^t \langle \nabla u(s), \nabla\varphi\rangle\, ds \\ \quad - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\nabla u(\tau)d\tau, \nabla\varphi \right\rangle ds \\ + \int_0^t \left\langle \left(|u|^k + |v|^l\right)|u'(s)|^{p-1}u'(s), \varphi \right\rangle ds \\ \quad = \int_0^t \langle f_1(u(s), v(s)), \varphi\rangle\, ds, \\ \langle v'(t), \vartheta\rangle - \langle v^1, \vartheta\rangle + \int_0^t \langle \nabla v(s), \nabla\vartheta\rangle\, ds \\ \quad - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_2(s-\tau)\nabla v(\tau)d\tau, \nabla\vartheta \right\rangle ds \\ + \int_0^t \left\langle \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v'(s)|^{q-1}v'(s), \vartheta \right\rangle ds \\ \quad = \int_0^t \langle f_2(u(s), v(s)), \vartheta\rangle\, ds, \end{cases} \tag{4.3.8}$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 4.3.2 (Lokal varlık). $(A1)$-$(A2)$ koşulları sağlansın. $T_0 > 0$ olmak üzere $[0, T_0]$ aralığında tanımlı bir tek (u, v) lokal zayıf çözümü vardır ve bu çözüm

$$\begin{aligned} & E(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\varpi_1(s)\|\nabla u(s)\|^2 + \varpi_2(s)\|\nabla v(s)\|^2\right] ds \\ & -\frac{1}{2}\int_0^t \left[(\varpi_1' \diamond \nabla u)(s) + (\varpi_2' \diamond \nabla v)(s)\right] ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left(|u(s)|^k + |v(s)|^l\right)|u'(s)|^{p+1}\, dxds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left(|v(s)|^\theta + |u(s)|^\varrho\right)|v'(s)|^{q+1}\, dxds \\ = \; & E(0) \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

enerji özdeşliğini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}(1-\int_0^t \varpi_1(s)ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}(1-\int_0^t \varpi_2(s)ds)\left\|\nabla v(t)\right\|^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[(\varpi_1 \diamond \nabla u)(t)+(\varpi_2 \diamond \nabla v)(t)\right] \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|^2+\left\|v'(t)\right\|^2\right) \\ &\quad -\int_\Omega F(u(t),v(t))\,dx \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

dır.

Teorem 4.3.3 (Çözümlerin patlaması). $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ koşulları sağlansın. Ayrıca $r > \max\{k+p, l+p, \theta+q, \varrho+q\}$ ve başlangıç enerjisi

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\left(\left\|u^1\right\|^2+\left\|v^1\right\|^2+\left\|\nabla u^0\right\|^2+\left\|\nabla v^0\right\|^2\right)-\int_\Omega F\left(u^0,v^0\right)dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

olsun. Böylece Teorem 4.3.2 de belirtilen (u,v) zayıf çözümü sonlu zamanda patlar.

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel eşitsizlikleri bazı $C>0$ sabitleri ve her $x,y \in R$ için aşağıdaki gibi ifade edeceğiz:

$\forall p>0$ için

$$\left(|x|^{p-1}x-|y|^{p-1}y\right)(x-y) \geq C\left|x-y\right|^{p+1}, \tag{4.3.11}$$

$\forall l \geq 1$ için

$$\left||x|^l-|y|^l\right| \leq C\left|x-y\right|\left(|x|^{l-1}+|y|^{l-1}\right) \tag{4.3.12}$$

ve $\forall m \geq 0$ için

$$\left||x|^m x-|y|^m y\right| \leq C\left|x-y\right|\left(|x|^m+|y|^m\right) \tag{4.3.13}$$

dır. (4.3.11)-(4.3.13) eşitsizlikleri ve f_1, f_2 ve F fonksiyonları kullanılarak

$$\begin{aligned}
&|f_1(u,v)-f_1(\widetilde{u},\widetilde{v})| \\
\leq\ & C_0\left(|u-\widetilde{u}|+|v-\widetilde{v}|\right)\left(|u|^{r-1}+|v|^{r-1}+|\widetilde{u}|^{r-1}+|\widetilde{v}|^{r-1}\right) \\
&+C_1\left[|v-\widetilde{v}|\,|u|^{\frac{r-1}{2}}\left(|v|^{\frac{r-1}{2}}+|\widetilde{v}|^{\frac{r-1}{2}}\right)\right. \\
&\left.+|u-\widetilde{u}|\,|\widetilde{v}|^{\frac{r+1}{2}}\left(|u|^{\frac{r-3}{2}}+|\widetilde{u}|^{\frac{r-3}{2}}\right)\right], \qquad (4.3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|f_2(u,v)-f_2(\widetilde{u},\widetilde{v})| \\
\leq\ & C_0\left(|u-\widetilde{u}|+|v-\widetilde{v}|\right)\left(|u|^{r-1}+|v|^{r-1}+|\widetilde{u}|^{r-1}+|\widetilde{v}|^{r-1}\right) \\
&+C_1\left[|u-\widetilde{u}|\,|v|^{\frac{r-1}{2}}\left(|u|^{\frac{r-1}{2}}+|\widetilde{u}|^{\frac{r-1}{2}}\right)\right. \\
&\left.+|v-\widetilde{v}|\,|\widetilde{u}|^{\frac{r+1}{2}}\left(|v|^{\frac{r-3}{2}}+|\widetilde{v}|^{\frac{r-3}{2}}\right)\right] \qquad (4.3.15)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&|F(u,v)-F(\widetilde{u},\widetilde{v})| \\
\leq\ & C_0\left(|u-\widetilde{u}|+|v-\widetilde{v}|\right)\left(|u|^{r}+|v|^{r}+|\widetilde{u}|^{r}+|\widetilde{v}|^{r}\right) \\
&+C_1\left(|u-\widetilde{u}|\,|v|+|\widetilde{u}|\,|v-\widetilde{v}|\right)\left(|u|^{\frac{r-1}{2}}\,|v|^{\frac{r-1}{2}}+|\widetilde{u}|^{\frac{r-1}{2}}\,|\widetilde{v}|^{\frac{r-1}{2}}\right) \qquad (4.3.16)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\forall u,v,\widetilde{u},\widetilde{v}\in R$ ve C_0, C_1 ise pozitif sabitlerdir.

4.3.1. Lokal Varlık

Bu bölümde, Teorem 4.3.2 yi üç adımda ispatlayacağız.

1. Adım: Yaklaşık çözüm

İspat için Faedo-Galerkin metodunu kullanacağız. $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ olmak üzere, sıfır Dirichlet sınır koşuluna sahip $A = -\Delta$ olsun. A pozitif, öz-eşlenik ve ayrıca kompakt bir operatörün tersidir. Ayrıca A pozitif özdeğerlerinin sonsuz bir dizisi $\{\lambda_j : j = 1, 2, ...\}$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen $L^2(\Omega)$ için ortonormal bir bazı olan $\{e_j : j = 1, 2, ...\}$ özfonksiyon dizisine sahiptir. Aynı zamanda $\{e_j : j = 1, 2, ...\}$ dizisi $H_0^1(\Omega)$ için de ortogonal bir bazdır.

$\{e_N\}$, V_N nin bir tabanı ve P_N, $L^2(\Omega)$ nin V_N üzerine dik izdüşümü olsun. (4.3.1) sisteminin lokal zayıf çözümünün varlığını belirlemek için $A = -\Delta$ operatörünün $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ özfonksiyonlarına dayalı standart Galerkin yaklaşım şemasını kullanacağız. Öncelikle

$$u_N(t) = \sum_{j=1}^{N} u_{N,j}(t) e_j$$

ve

$$v_N(t) = \sum_{j=1}^{N} v_{N,j}(t) e_j$$

(4.3.1) probleminin V_N deki yaklaşık çözümleri olsun. Böylece $u_N(t), v_N(t); j = 1, 2, ..., N$ için aşağıdaki adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleridir:

$$\begin{cases} \langle u_N''(t), e_j \rangle + \langle \nabla u_N(t), \nabla e_j \rangle \\ - \left\langle \int_0^t \varpi_1(t-s) \nabla u_N(s) ds, \nabla e_j \right\rangle \\ + \left\langle \left(|u_N(t)|^k + |v_N(t)|^l \right) |u_N'(t)|^{p-1} u_N'(t), e_j \right\rangle \\ = \langle f_1(u_N(t), v_N(t)), e_j \rangle, \\ \langle v_N''(t), e_j \rangle + \langle \nabla v_N(t), \nabla e_j \rangle \\ - \left\langle \int_0^t \varpi_2(t-s) \nabla v_N(s) ds, \nabla e_j \right\rangle \\ + \left\langle \left(|v_N(t)|^\theta + |u_N(t)|^\varrho \right) |v_N'(t)|^{q-1} v_N'(t), e_j \right\rangle \\ = \langle f_2(u_N(t), v_N(t)), e_j \rangle, \\ u_N(0) = P_N u^0, \;\; v_N(0) = P_N v^0, \\ u_N'(0) = P_N u^1, \;\; v_N'(0) = P_N v^1. \end{cases} \tag{4.3.1.1}$$

Özel olarak, $(4.3.1.1)_9$ ve $(4.3.1.1)_{10}$

$$u_{N,j}(0) = u_j^0, \;\; v_{N,j}(0) = v_j^0, \;\; u'_{N,j}(0) = u_j^1, \;\; v'_{N,j}(0) = v_j^1 \tag{4.3.1.2}$$

eşittir. Burada $j = 1, 2, ..., N$ için

$$u_j^0 = \left\langle u^0, e_j \right\rangle,$$

$$v_j^0 = \left\langle v^0, e_j \right\rangle,$$

$$u_j^1 = \left\langle u^1, e_j \right\rangle$$

ve

$$v_j^1 = \left\langle v^1, e_j \right\rangle$$

dir.

Açıktır ki (4.3.1.1), bilinmeyen $u_{N,j}$, $v_{N,j}$ fonksiyonları ve türevlerinden oluşan sürekli doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin ikinci dereceden $2N \times 2N$ boyutlu bir başlangıç değer problemidir. Bundan dolayı Picard iterasyon metodundan bazı $T_N > 0$ için $u_{N,j}, v_{N,j} \in C^2 [0, T_N]$, (4.3.1.1) in bir çözümüdür.

Şimdi her $N \geq 1$ için T_N nin bazı $T > 0$ ile değiştirilebileceğini öncelikle göstereceğiz.

Lemma 4.3.1.1. $T > 0$ bir sabit olsun öyle ki $\{u_N\}$ ve $\{v_N\}$ yaklaşık çözüm dizileri aşağıdakileri sağlar.

(1) $\{u_N\}, \{v_N\}; L^\infty (0, T; H_0^1(\Omega))$ da düzgün sınırlıdır.

(2) $\{u'_N\}, \{v'_N\}; L^\infty (0, T; L^2(\Omega))$ da düzgün sınırlıdır.

(3)

$$\left\{ \int_0^t \int_\Omega \left(|u_N (s)|^k + |v_N (s)|^l \right) |u'_N(s)|^{p+1} \, dxds \right\}$$

ve

$$\left\{ \int_0^t \int_\Omega \left(|v_N (s)|^\theta + |u_N (s)|^\varrho \right) |v'_N(s)|^{q+1} \, dxds \right\}$$

$L^{\infty}(0,T)$ da düzgün sınırlıdır.

İspat. (4.3.1.1)$_1$ denklemini $u'_{N,j}(t)$ ile (4.3.1.1)$_2$ denklemini de $v'_{N,j}(t)$ ile çarpalım ve $j=1,...,N$ için toplarsak

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u'_N(t)\right\|^2+\left(\varpi_1\diamond\nabla u_N\right)(t)\right. \\ \quad\left.+\left(1-\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_N(t)\right\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\varpi_1(t)\left\|\nabla u_N(t)\right\|^2-\frac{1}{2}\left(\varpi'_1\diamond\nabla u_N\right)(t) \\ +\int_\Omega\left(\left|u_N(t)\right|^k+\left|v_N(t)\right|^l\right)\left|u'_N(t)\right|^{p+1}dx \\ \quad=\int_\Omega f_1(u_N(t),v_N(t))u'_N(t)dx, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|v'_N(t)\right\|^2+\left(\varpi_2\diamond\nabla v_N\right)(t)\right. \\ \quad\left.+\left(1-\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\right)\left\|\nabla v_N(t)\right\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\varpi_2(t)\left\|\nabla v_N(t)\right\|^2-\frac{1}{2}\left(\varpi'_2\diamond\nabla v_N\right)(t) \\ +\int_\Omega\left(\left|v_N(t)\right|^\theta+\left|u_N(t)\right|^\varrho\right)\left|v'_N(t)\right|^{q+1}dx \\ \quad=\int_\Omega f_2(u_N(t),v_N(t))v'_N(t)dx \end{cases} \tag{4.3.1.3}$$

buluruz.

(4.3.1.3) deki denklemleri taraf tarafa toplayıp 0 dan $t \leq T_N$ ye integral alırsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|u_N'(t)\|^2+\|v_N'(t)\|^2\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t \varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla u_N(t)\|^2\\
&+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t \varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla v_N(t)\|^2\\
&+\frac{1}{2}\left[(\varpi_1\diamond\nabla u_N)(t)+(\varpi_2\diamond\nabla v_N)(t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\varpi_1(s)\|\nabla u_N(s)\|^2+\varpi_2(s)\|\nabla v_N(s)\|^2\right]ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\left[(\varpi_1'\diamond\nabla u_N)(s)+(\varpi_2'\diamond\nabla v_N)(s)\right]ds\\
&+\int_0^t\int_\Omega\left(|u_N(s)|^k+|v_N(s)|^l\right)|u_N'(s)|^{p+1}\,dxds\\
&+\int_0^t\int_\Omega\left(|v_N(s)|^\theta+|u_N(s)|^\varrho\right)|v_N'(s)|^{q+1}\,dxds\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\|u_N'(0)\|^2+\|v_N'(0)\|^2\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\|\nabla u_N(0)\|^2+\|\nabla v_N(0)\|^2\right)\\
&+\int_0^t\int_\Omega[f_1(u_N(s),v_N(s))u_N'(s)\\
&+f_2(u_N(s),v_N(s))v_N'(s)]\,dxds\\
\leq\;&C_0+\int_0^t\int_\Omega[f_1(u_N(s),v_N(s))u_N'(s)\\
&+f_2(u_N(s),v_N(s))v_N'(s)]\,dxds,
\end{aligned}\tag{4.3.1.4}$$

elde ederiz. Burada $C_0=C\left(|u^0|_{1,\Omega},|v^0|_{1,\Omega},|u^1|_{0,\Omega},|v^1|_{0,\Omega}\right)$ pozitif bir sabit ve

$$\begin{aligned}
&u_N(0)\to u^0, \qquad v_N(0)\to v^0, \;\; H_0^1(\Omega)\\
&u_N'(0)\to u^1, \qquad v_N'(0)\to v^1, \;\; L^2(\Omega)
\end{aligned}\tag{4.3.1.5}$$

uzayında güçlü yakınsak olduğundan yazabiliriz.

(4.3.1.4) deki son iki terim için kestirime ihtiyacımız var. Bunun için (4.3.4), Hölder eşitsizliği ve Young eşitsizliğini kullanırsak ve (4.3.2) deki Sobolev Gömme teo-

reminden

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f_1(u_N,v_N)u'_N dx\right| \\
\leq\ & C\int_\Omega \left(|u_N+v_N|^r\,|u'_N| + |v_N|^{\frac{r+1}{2}}\,|u_N|^{\frac{r-1}{2}}\,|u'_N|\right)dx \\
\leq\ & C\left[\left(\|u_N\|_{2r}^r + \|v_N\|_{2r}^r\right)\|u'_N\| + \|u_N\|_{3(r-1)}^{\frac{r-1}{2}}\,\|v_N\|_{\frac{3(r+1)}{2}}^{\frac{r+1}{2}}\,\|u'_N\|\right] \\
\leq\ & C\left[\|u_N\|_{2r}^{2r} + \|v_N\|_{2r}^{2r} + \|u_N\|_{3(r-1)}^{r-1}\,\|v_N\|_{\frac{3(r+1)}{2}}^{r+1} + \|u'_N\|^2\right] \\
\leq\ & C\left[\|\nabla u_N\|^{2r} + \|\nabla v_N\|^{2r} + \|\nabla u_N\|^{r-1}\,\|\nabla v_N\|^{r+1} + \|u'_N\|^2\right] \qquad (4.3.1.6)
\end{aligned}$$

buluruz. Burada $n=3$ alındığında $2r = 3(r-1) = \frac{3(r+1)}{2} = 6$ olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f_2(u_N,v_N)v'_N dx\right| \\
\leq\ & C\left[\|\nabla u_N\|^{2r} + \|\nabla v_N\|^{2r} + \|\nabla v_N\|^{r-1}\,\|\nabla u_N\|^{r+1} + \|v'_N\|^2\right] \qquad (4.3.1.7)
\end{aligned}$$

olur.

$y_N(t) := \|u'_N(t)\|^2 + \|v'_N(t)\|^2 + \|\nabla u_N(t)\|^2 + \|\nabla v_N(t)\|^2$ alalım. Böylece (4.3.1.4)-(4.3.1.7) ifadelerinin birleşiminden ve (4.3.7) deki kabülden

$$\begin{aligned}
&y_N(t) + \frac{1}{\rho}\left[(\varpi_1 \diamond \nabla u_N)(t) + (\varpi_2 \diamond \nabla v_N)(t)\right] \\
&+\frac{1}{\rho}\int_0^t \left[\varpi_1(s)\,\|\nabla u_N(s)\|^2 + \varpi_2(s)\,\|\nabla v_N(s)\|^2\right]ds \\
&-\frac{1}{\rho}\int_0^t \left[(\varpi'_1 \diamond \nabla u_N)(s) + (\varpi'_2 \diamond \nabla v_N)(s)\right]ds \\
&+\frac{2}{\rho}\int_0^t\int_\Omega \left(|u_N(s)|^k + |v_N(s)|^l\right)|u'_N(s)|^{p+1}\,dxds \\
&+\frac{2}{\rho}\int_0^t\int_\Omega \left(|v_N(s)|^\theta + |u_N(s)|^\varrho\right)|v'_N(s)|^{q+1}\,dxds \\
\leq\ & C_0 + C\int_0^t y_N(s)^r\,ds \qquad (4.3.1.8)
\end{aligned}$$

olur. Burada $C_0 = C\left(|u^0|_{1,\Omega}, |v^0|_{1,\Omega}, |u^1|_{0,\Omega}, |v^1|_{0,\Omega}\right) > 0$ dır. Özellikle

$$y_N(t) \leq C_0 + C\int_0^t y_N(s)^r\,ds \qquad (4.3.1.9)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle, standart bir karşılaştırma teoremi kullanılarak (Lakshmikantham ve Leela 1969) (4.3.1.9) dan $y_N(t) \leq z(t)$ elde edilir. Burada $z(t) = \left[C_0^{1-r} - C(r-1)t\right]^{-\frac{1}{r-1}}$ dır ve

$$z(t) = C_0 + C\int_0^t z(s)^r\, ds$$

Volterra integral denkleminin çözümüdür. $z(t)$ sonlu bir zamanda patlamasına rağmen ($r \geq 3$ durumunda) yine de $0 < T < T_N$ olan bir zaman var şöyle ki $\forall\, t \in [0,T]$ için

$$y_N(t) \leq z(t) \leq C_1$$

dir. Burada C_1, N ye bağlı olmayan pozitif bir sabittir. Bu nedenle her $N \geq 1$ için $\forall t \in [0,T]$ olmak üzere

$$y_N(t) \leq C_1 \tag{4.3.1.10}$$

olur. Lemma 4.3.1.1 in ilk iki özelliği elde edildi ve son özellik ise (4.3.1.8) den elde edilir.

Not 4.3.1.2. Lemma 4.3.1.1 in ispatı üstlerin $0 < p,q < 1$ aralığında olması kabulüne dayanmaz. Bundan dolayı Lemma 4.3.1.1 deki ifadeler $p,q > 0$ değerleri için sağlanır. Şimdi Lemma 4.3.1.1 den (u_N, v_N) dizilerinin alt dizileri vardır ve hala (u_N, v_N) olarak gösterilirler şöyle ki $N \to \infty$ yakınsarken bazı $u, v \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ için

$$\begin{cases} u_N \to u,\ \ v_N \to v\ ;\ L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \\ u_N' \to u',\ v_N' \to v';\ L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{4.3.1.11}$$

uzayında zayıf $*$ yakınsar.

Ayrıca, $0 < p,q < 1$ koşulu altında aşağıdaki güçlü yakınsama sonucuna ulaşırız.

Lemma 4.3.1.3. Yaklaşık çözüm dizileri olan u_N ve v_N

$$\begin{cases} \{u_N\},\ \ \{v_N\}\,;\, L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)) \\ \{u_N'\},\ \ \{v_N'\}\,;\, L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{4.3.1.12}$$

uzayında Cauchy dizileridir.

İspat. (u_N, v_N) ve (u_L, v_L) iki yaklaşık çözüm çiftini ve genelliği bozmadan $N > L$ alalım.

$$u_{L,j}(t) = v_{L,j}(t) \equiv 0,\ j > L$$

olmak üzere

$$u_{NL}(t) = u_N(t) - u_L(t) = \sum_{j=1}^{N} (u_{N,j}(t) - u_{L,j}(t)) e_j$$

ve

$$v_{NL}(t) = v_N(t) - v_L(t) = \sum_{j=1}^{N} (v_{N,j}(t) - v_{L,j}(t)) e_j$$

olsun. Böylece u_{NL} ve v_{NL} çözüm çifti $j = 1, 2, ..., N$ için

$$\begin{cases} \langle u''_{NL}, e_j\rangle + \langle \nabla u_{NL}, \nabla e_j\rangle - \left\langle \int_0^t \varpi_1(t-s)\nabla u_{NL}(s)ds, \nabla e_j \right\rangle \\ + \left\langle \left(|u_N|^k + |v_N|^l\right)|u'_N|^{p-1}u'_N - \left(|u_L|^k + |v_L|^l\right)|u'_L|^{p-1}u'_L, e_j \right\rangle \\ = \langle f_1(u_N, v_N) - f_1(u_L, v_L), e_j\rangle, \\ \langle v''_{NL}, e_j\rangle + \langle \nabla v_{NL}, \nabla e_j\rangle - \left\langle \int_0^t \varpi_2(t-s)\nabla v_{NL}(s)ds, \nabla e_j \right\rangle \\ + \left\langle \left(|v_N|^\theta + |u_N|^\varrho\right)|v'_N|^{q-1}v'_N - \left(|v_L|^\theta + |u_L|^\varrho\right)|v'_L|^{q-1}v'_L, e_j \right\rangle \\ = \langle f_2(u_N, v_N) - f_2(u_L, v_L), e_j\rangle, \\ u_{NL}(0) = P_N u^0 - P_L u^0, \qquad v_{NL}(0) = P_N v^0 - P_L v^0, \\ u'_{NL}(0) = P_N u^1 - P_L u^1, \qquad v'_{NL}(0) = P_N v^1 - P_L v^1 \end{cases} \tag{4.3.1.13}$$

sağlar.

(4.3.1.13)$_1$ denklemini $u'_{N,j}(t) - u'_{L,j}(t)$ ile (4.3.1.13)$_2$ denklemini ise $v'_{N,j}(t) -$

$v'_{L,j}(t)$ ile çarpalım ve $j=1,...,N$ için toplarsak

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u'_{NL}(t)\right\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_1(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_{NL}(t)\right\|^2+\left(\varpi_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\varpi_1(t)\left\|\nabla u_{NL}(t)\right\|^2-\frac{1}{2}\left(\varpi'_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t) \\ +\left\langle\left(\left|u_N\right|^k+\left|v_N\right|^l\right)\left|u'_N\right|^{p-1}u'_N-\left(\left|u_L\right|^k+\left|v_L\right|^l\right)\left|u'_L\right|^{p-1}u'_L,u'_{NL}\right\rangle \\ =\left\langle f_1(u_N(t),v_N(t))-f_1(u_L(t),v_L(t)),u'_{NL}(t)\right\rangle, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|v'_{NL}(t)\right\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_2(s)\,ds\right)\left\|\nabla v_{NL}(t)\right\|^2+\left(\varpi_2\diamond\nabla v_{NL}\right)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\varpi_2(t)\left\|\nabla v_{NL}(t)\right\|^2-\frac{1}{2}\left(\varpi'_2\diamond\nabla v_{NL}\right)(t) \\ +\left\langle\left(\left|v_N\right|^\theta+\left|u_N\right|^\varrho\right)\left|v'_N\right|^{q-1}v'_N-\left(\left|v_L\right|^\theta+\left|u_L\right|^\varrho\right)\left|v'_L\right|^{q-1}v'_L,v'_{NL}\right\rangle \\ =\left\langle f_2(u_N(t),v_N(t))-f_2(u_L(t),v_L(t)),v'_{NL}(t)\right\rangle \end{cases} \tag{4.3.1.14}$$

buluruz. $(4.3.1.14)_1$ deki son terim için kestirim elde etmek için (4.3.4) ü kullanırsak

$$\left|\left\langle f_1(u_N(t),v_N(t))-f_1(u_L(t),v_L(t)),u'_{NL}(t)\right\rangle\right|\leq G_1+G_2+G_3 \tag{4.3.1.15}$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} G_1 &= C_0\int_\Omega\left(\left|u_{NL}\right|+\left|v_{NL}\right|\right)\left(\left|u_N\right|^{r-1}+\left|v_N\right|^{r-1}+\left|u_L\right|^{r-1}+\left|v_L\right|^{r-1}\right)\left|u'_{NL}\right|dx, \\ G_2 &= C_1\int_\Omega\left|v_{NL}\right|\left|u_N\right|^{\frac{r-1}{2}}\left(\left|v_N\right|^{\frac{r-1}{2}}+\left|v_L\right|^{\frac{r-1}{2}}\right)\left|u'_{NL}\right|dx, \\ G_3 &= C_1\int_\Omega\left|u_{NL}\right|\left|v_L\right|^{\frac{r+1}{2}}\left(\left|u_N\right|^{\frac{r-3}{2}}+\left|u_L\right|^{\frac{r-3}{2}}\right)\left|u'_{NL}\right|dx \end{aligned}$$

dır. G_1 deki her bir terimin kestirimini elde edebilmek için Hölder eşitsizliği, Sobolev Gömme teoremi ve Young eşitsizliği uygulanılacak ve ayrıca Lemma 4.3.1.1 deki sınırlılık ifadesi kullanılacaktır. Özellikle, G_1 terimi için $n=3$ iken $3(r-1)=6$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\left(\left|u_{NL}\right|+\left|v_{NL}\right|\right)\left|u_N\right|^{r-1}\left|u'_{NL}\right|dx \\ \leq\ &\left(\left\|u_{NL}\right\|_6+\left\|v_{NL}\right\|_6\right)\left\|u_N\right\|^{r-1}_{3(r-1)}\left\|u'_{NL}\right\|_2 \\ \leq\ &C\left(\left\|\nabla u_{NL}\right\|+\left\|\nabla v_{NL}\right\|\right)\left\|\nabla u_N\right\|^{r-1}\left\|u'_{NL}\right\| \\ \leq\ &C\left(\left\|\nabla u_{NL}\right\|+\left\|\nabla v_{NL}\right\|\right)\left\|u'_{NL}\right\| \end{aligned} \tag{4.3.1.16}$$

buluruz. Buradan da

$$G_1 \leq C\left(\|\nabla\left(u_N - u_L\right)\|^2 + \|\nabla\left(v_N - v_L\right)\|^2 + \|u'_{NL}\|^2\right) \tag{4.3.1.17}$$

olur. Benzer şekilde G_2 deki terim ise

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |v_{NL}|\,|u_N|^{\frac{r-1}{2}}\,|v_N|^{\frac{r-1}{2}}\,|u'_{NL}|\,dx \\ \leq\ & \|v_{NL}\|_6\,\|u_N\|^{\frac{r-1}{2}}_{3(r-1)}\,\|v_N\|^{\frac{r-1}{2}}_{3(r-1)}\,\|u'_{NL}\| \\ \leq\ & C\,\|\nabla v_{NL}\|\,\|\nabla u_N\|^{\frac{r-1}{2}}\,\|\nabla v_N\|^{\frac{r-1}{2}}\,\|u'_{NL}\| \\ \leq\ & C\,\|\nabla v_{NL}\|\,\|u'_{NL}\| \end{aligned} \tag{4.3.1.18}$$

olur. Böylece

$$G_2 \leq C\left(\|\nabla v_{NL}\|^2 + \|u'_{NL}\|^2\right) \tag{4.3.1.19}$$

sonucuna ulaşırız. $n = 3$ durumunda $r = 3$ olduğundan G_3 terimi

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_{NL}|\,|v_N|^{\frac{r+1}{2}}\,|v_L|^{\frac{r-3}{2}}\,|u'_{NL}|\,dx &\leq \|u_{NL}\|_6\,\|v_L\|^{\frac{r+1}{2}}_{\frac{3(r+1)}{2}}\,\|u'_{NL}\| \\ &\leq C\,\|\nabla u_{NL}\|\,\|u'_{NL}\| \end{aligned} \tag{4.3.1.20}$$

olur. Aynı şekilde $n = 1, 2$ durumu için ise G_3 deki son terim için kestirim kolayca bulunur ve

$$G_3 \leq C\left(\|\nabla u_{NL}\|^2 + \|u'_{NL}\|^2\right) \tag{4.3.1.21}$$

olur. (4.3.15) den

$$\begin{aligned} & |\langle f_1(u_N(t), v_N(t)) - f_1(u_L(t), v_L(t)), u'_{NL}(t)\rangle| \\ \leq\ & C\left(\|\nabla u_{NL}\|^2 + \|\nabla v_{NL}\|^2 + \|u'_{NL}\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.3.1.22}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & |\langle f_2(u_N(t), v_N(t)) - f_2(u_L(t), v_L(t)), v'_{NL}(t)\rangle| \\ \leq\ & C\left(\|\nabla u_{NL}\|^2 + \|\nabla v_{NL}\|^2 + \|v'_{NL}\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.3.1.23}$$

olur. (4.3.1.14) ve (4.3.1.22)-(4.3.1.23) ün birleşiminden

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u'_{NL}(t)\right\|^2+\left(\varpi_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t)\right. \\ \left.+\left(1-\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_{NL}(t)\right\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\left\|\nabla u_{NL}(s)\right\|^2ds-\frac{1}{2}\left(\varpi'_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t) \\ +\int_\Omega\left[\left(\left|u_N\right|^k+\left|v_N\right|^l\right)\left|u'_N\right|^{p-1}u'_N\right. \\ \left.-\left(\left|u_L\right|^k+\left|v_L\right|^l\right)\left|u'_L\right|^{p-1}u'_L\right]u'_{NL}dx \\ \leq C\left(\left\|\nabla u_{NL}\right\|^2+\left\|\nabla v_{NL}\right\|^2+\left\|u'_{NL}\right\|^2\right), \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|v'_{NL}(t)\right\|^2+\left(\varpi_2\diamond\nabla v_{NL}\right)(t)\right. \\ \left.+\left(1-\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\right)\left\|\nabla v_{NL}(t)\right\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_2(s)\left\|\nabla v_{NL}(s)\right\|^2ds-\frac{1}{2}\left(\varpi'_2\diamond\nabla v_{NL}\right)(t) \\ +\int_\Omega\left[\left(\left|v_N\right|^\theta+\left|u_N\right|^\varrho\right)\left|v'_N\right|^{q-1}v'_N\right. \\ \left.-\left(\left|v_L\right|^\theta+\left|u_L\right|^\varrho\right)\left|v'_L\right|^{q-1}v'_L\right]v'_{NL}dx \\ \leq C\left(\left\|\nabla u_{NL}\right\|^2+\left\|\nabla v_{NL}\right\|^2+\left\|v'_{NL}\right\|^2\right) \end{cases} \tag{4.3.1.24}$$

elde ederiz. $(4.3.1.24)_1$ denkleminin her iki tarafına

$$\int_\Omega\left(\left|u_L(t)\right|^k+\left|v_L(t)\right|^l\right)\left|u'_N(t)\right|^{p-1}u'_N(t)\,u'_{NL}(t)\,dx$$

terimi eklenirse

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u'_{NL}(t)\right\|^2+\left(\varpi_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t)\right. \\ &\left.+\left(1-\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_{NL}(t)\right\|^2\right] \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\left\|\nabla u_{NL}(s)\right\|^2ds-\frac{1}{2}\left(\varpi'_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t) \\ &+\int_\Omega\left(\left|u_L(t)\right|^k+\left|v_L(t)\right|^l\right)\left(\left|u'_N(t)\right|^{p-1}u'_N(t)\right. \\ &\left.-\left|u'_L(t)\right|^{p-1}u'_L(t)\right)u'_{NL}(t)\,dx \\ \leq\;& C\left(\left\|\nabla u_{NL}\right\|^2+\left\|\nabla v_{NL}\right\|^2+\left\|u'_{NL}\right\|^2\right)+H_2(t) \end{aligned} \tag{4.3.1.25}$$

olacak şekilde buluruz. Burada

$$\begin{aligned} H_2(t) &= -\int_\Omega \Big[|u_N(t)|^k - |u_L(t)|^k \\ &\quad + |v_N(t)|^l - |v_L(t)|^l \Big] |u'_N(t)|^{p-1} u'_N(t) u'_{NL}(t)\, dx \end{aligned} \tag{4.3.1.26}$$

dır.

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \int_\Omega \left(|u_L(t)|^k + |v_L(t)|^l \right) \\ &\quad \times \left(|u'_N(t)|^{p-1} u'_N(t) - |u'_L(t)|^{p-1} u'_L(t) \right) u'_{NL}(t)\, dx \end{aligned} \tag{4.3.1.27}$$

olsun. Şimdi, (4.3.11) i kullanırsak

$$H_1(t) \geq C \int_\Omega \left(|u_L(t)|^k + |v_L(t)|^l \right) |u'_{NL}(t)|^{p+1}\, dx \tag{4.3.1.28}$$

buluruz. Ayrıca

$$\begin{aligned} |H_2(t)| &\leq \int_\Omega \Big[\Big| |u_N(t)|^k - |u_L(t)|^k \Big| \\ &\quad + \Big| |v_N(t)|^l - |v_L(t)|^l \Big| \Big] |u'_N(t)|^p |u'_{NL}(t)|\, dx \end{aligned} \tag{4.3.1.29}$$

olur. Burada her iki terimin benzer şekilde kestirimini elde edeceğiz. Bunu yapmak için $\delta = \frac{6}{6-3p-k}$ ve Hölder indislerini $\left\{ \frac{6}{k-1}, 6, \frac{2}{p}, \delta \right\}$ olacak şekilde seçelim. Ayrıca $n = 3$ iken $k \leq 3(1-p)$ kabulümüzden ve $0 < p < 1$ olduğundan dolayı $1 < \delta \leq 2$ olur. Böylece Hölder eşitsizliği, Sobolev Gömme teoremi ve Lemma 4.3.1.1 uygulanarak

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big| |u_N(t)|^k - |u_L(t)|^k \Big| |u'_N(t)|^p |u'_{NL}(t)|\, dx \\ &\leq C \int_\Omega |u_N(t) - u_L(t)| \left(|u_N(t)|^{k-1} + |u_L(t)|^{k-1} \right) |u'_N(t)|^p |u'_{NL}(t)|\, dx \\ &\leq C \left(\|u_N(t)\|_6^{k-1} + \|u_L(t)\|_6^{k-1} \right) \|u_{NL}(t)\|_6 \|u'_N(t)\|_2^p \|u'_{NL}(t)\|_\delta \\ &\leq C \|\nabla u_{NL}(t)\| \|u'_{NL}(t)\| \end{aligned} \tag{4.3.1.30}$$

bulunur. (4.3.1.29) daki ikinci terime de benzer hesaplamalar uygulanır ve $\delta = \frac{6}{6-3p-l}$

alınırsa

$$\int_{\Omega}\left||v_N(t)|^l-|v_L(t)|^l\right||u'_N(t)|^p|u'_{NL}(t)|\,dx\le C\|\nabla v_{NL}(t)\|\,\|u'_{NL}(t)\| \qquad (4.3.1.31)$$

olur. (4.3.1.29)-(4.3.1.31) eşitsizliklerinin birleşiminden

$$|H_2(t)|\le C_1\left[\|\nabla u_{NL}(t)\|^2+\|\nabla v_{NL}(t)\|^2+\|u'_{NL}(t)\|^2\right] \qquad (4.3.1.32)$$

sonucuna ulaşırız. (4.3.1.25), (4.3.1.28) ve (4.3.1.32) den

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_{NL}(t)\|^2+(\varpi_1\diamond\nabla u_{NL})(t)\right.\\&\left.+\left(1-\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla u_{NL}(t)\|^2\right]\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\|\nabla u_{NL}(s)\|^2\,ds-\frac{1}{2}(\varpi'_1\diamond\nabla u_{NL})(t)\\&+C\int_{\Omega}\left(|u_L(t)|^k+|v_L(t)|^l\right)|u'_{NL}(t)|^{p+1}\,dx\\\le\;&C_2\left(\|\nabla u_{NL}\|^2+\|\nabla v_{NL}\|^2+\|u'_{NL}\|^2+\|v'_{NL}\|^2\right)\end{aligned} \qquad (4.3.1.33)$$

buluruz. $(4.3.1.24)_2$ denklemine de benzer işlemler uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|v'_{NL}(t)\|^2+(\varpi_2\diamond\nabla v_{NL})(t)\right.\\&\left.+\left(1-\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla v_{NL}(t)\|^2\right]\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_2(s)\|\nabla v_{NL}(s)\|^2\,ds-\frac{1}{2}(\varpi'_2\diamond\nabla v_{NL})(t)\\&+C\int_{\Omega}\left(|v_L(t)|^\theta+|u_L(t)|^\varrho\right)|v'_{NL}(t)|^{q+1}\,dx\\\le\;&C_3\left(\|\nabla u_{NL}\|^2+\|\nabla v_{NL}\|^2+\|u'_{NL}\|^2+\|v'_{NL}\|^2\right)\end{aligned} \qquad (4.3.1.34)$$

olur.

$$Y_{NL}(t):=\|u'_{NL}(t)\|^2+\|v'_{NL}(t)\|^2+\|\nabla u_{NL}(t)\|^2+\|\nabla v_{NL}(t)\|^2$$

olsun. Şimdi (4.3.1.33)-(4.3.1.34) den

$$\begin{aligned}
& Y_{NL}(t)+\frac{1}{\rho}\int_0^t\left[\varpi_1(s)\left\|\nabla u_{NL}(s)\right\|^2+\varpi_2(s)\left\|\nabla v_{NL}(s)\right\|^2\right]ds \\
& +\frac{1}{\rho}\left[\left(\varpi_1\diamond\nabla u_{NL}\right)(t)+\left(\varpi_2\diamond\nabla v_{NL}\right)(t)\right] \\
& -\frac{1}{\rho}\int_0^t\left[\left(\varpi_1'\diamond\nabla u_{NL}\right)(s)+\left(\varpi_2'\diamond\nabla v_{NL}\right)(s)\right]ds \\
& +C\int_0^t\int_\Omega\left(\left|u_L(t)\right|^k+\left|v_L(t)\right|^l\right)\left|u_{NL}'(t)\right|^{p+1}dxds \\
& +C\int_0^t\int_\Omega\left(\left|v_L(t)\right|^\theta+\left|u_L(t)\right|^\varrho\right)\left|v_{NL}'(t)\right|^{q+1}dxds \\
\leq\ & \frac{1}{\rho}Y_{NL}(0)+C\int_0^t Y_{NL}(s)\,ds, \qquad (4.3.1.35)
\end{aligned}$$

buluruz. Burada $Y_{NL}(0):=\left\|u_{NL}'(0)\right\|^2+\left\|v_{NL}'(0)\right\|^2+\left\|\nabla u_{NL}(0)\right\|^2+\left\|\nabla v_{NL}(0)\right\|^2$ dır.

(4.3.1.5) deki başlangıç datasının güçlü yakınsamasından $L,N\to\infty$ yakınsarken $Y_{NL}(0)\to 0$ dır. Böylece (4.3.1.35) den ve Gronwall eşitsizliğinden

$$Y_{NL}(t)\leq\frac{1}{\rho}Y_{NL}(0)\,e^{CT}\to 0 \qquad (4.3.1.36)$$

elde ederiz. Bu durumda (4.3.1.35) ve (4.3.1.36) eşitsizliklerinden (4.3.1.12) yi elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Not 4.3.1.4. Kabul edelim ki (u_N,v_N) ve (u_L,v_L), Lemma 4.3.1.3 ün ispatında verilen yaklaşık çözümler olsun. Böylece (4.3.1.35) den

$$\lim_{N,L\to\infty}\int_\Omega\left(\left|u_L(t)\right|^k+\left|v_L(t)\right|^l\right)\left|u_{NL}'(t)\right|^{p+1}dx=0$$

ve

$$\lim_{N,L\to\infty}\int_\Omega\left(\left|v_L(t)\right|^\theta+\left|u_L(t)\right|^\varrho\right)\left|v_{NL}'(t)\right|^{q+1}dx=0$$

olur. Ayrıca (u,v) fonksiyon çifti vardır ki

$$\begin{cases} u_N\to u \ \text{ ve } \ v_N\to v;\ L^\infty\left(0,T:H_0^1(\Omega)\right) \\ u_N'\to u' \ \text{ ve } \ v_N'\to v';\ L^\infty\left(0,T:L^2(\Omega)\right) \end{cases} \qquad (4.3.1.37)$$

uzayında güçlü yakınsar. Lemma 4.3.1.3 ün sonucundan iki ayrı sonuca ulaşırız. Birincisi,

kaynak terim ile ikincisi ise sönüm terimle ilgilidir.

Sonuç 4.3.1.5. $N \to \infty$ yaklaşırken yaklaşık çözüm dizileri $\{u_N\}$ ve $\{v_N\}$

$$\begin{cases} f_1(u_N, v_N) \longrightarrow f_1(u, v), \\ f_2(u_N, v_N) \longrightarrow f_2(u, v), \end{cases} \tag{4.3.1.38}$$

$L^{\infty}(0, T, L^2(\Omega))$ uzayında güçlü yakınsar.

İspat. (4.3.4) ü kullanarak

$$|f_1(u_N(t), v_N(t)) - f_1(u(t), v(t))|^2 \leq K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \tag{4.3.1.39}$$

buluruz. Burada

$$\begin{aligned} K_1 &= C_0 \int_{\Omega} |u_N - u|^2 \left(|u_N|^{2(r-1)} + |v_N|^{2(r-1)} + |u|^{2(r-1)} + |v|^{2(r-1)} \right) dx, \\ K_2 &= C_0 \int_{\Omega} |v_N - v|^2 \left(|u_N|^{2(r-1)} + |v_N|^{2(r-1)} + |u|^{2(r-1)} + |v|^{2(r-1)} \right) dx, \\ K_3 &= C_1 \int_{\Omega} |v_N - v|^2 |u_N|^{r-1} \left(|v_N|^{r-1} + |v|^{r-1} \right) dx, \\ K_4 &= C_1 \int_{\Omega} |u_N - u|^2 |v|^{r+1} \left(|u_N|^{r-3} + |u|^{r-3} \right) dx \end{aligned}$$

dır. Şimdi K_1 ve K_2 deki terimlerin kestirimini elde etmek için Hölder eşitsizliği, Sobolev Gömme teoremi ve Lemma 4.3.1.1 deki sınırlar kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_N - u|^2 |u_N|^{2(r-1)} dx &\leq \|u_N - u\|_6^2 \|u_N\|_{3(r-1)}^{2(r-1)} \\ &\leq C \|\nabla (u_N - u)\|^2 \|\nabla u_N\|^{2(r-1)} \\ &\leq C \|\nabla (u_N - u)\|^2 \end{aligned} \tag{4.3.1.40}$$

buluruz. Burada $n = 3$ iken $3(r-1) = 6$ dır. Bu durumda her $t \in [0, T]$ için

$$K_1 + K_2 \leq C \left(\|\nabla (u_N(t) - u(t))\|^2 + \|\nabla (v_N(t) - v(t))\|^2 \right) \tag{4.3.1.41}$$

olur. Aynı şekilde K_3 deki terim

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |v_N - v|^2 \, |u_N|^{r-1} \, |v_N|^{r-1} \, dx \\ \leq \; & \|v_N - v\|_6^2 \, \|u_N\|_{3(r-1)}^{r-1} \, \|v_N\|_{3(r-1)}^{r-1} \\ \leq \; & C \, \|\nabla (v_N(t) - v(t))\|^2 \end{aligned} \tag{4.3.1.42}$$

olur. K_4 deki terim de benzer şekilde elde edilir ve

$$K_3 + K_4 \leq C \left(\|\nabla (u_N(t) - u(t))\|^2 + \|\nabla (v_N(t) - v(t))\|^2 \right) \tag{4.3.1.43}$$

bulunur. Böylece Lemma 4.3.1.3 de sağlanan güçlü yakınsama (4.3.1.39), (4.3.1.41) ve (4.3.1.43) ile birlikte (4.3.1.38) deki birinci yakınsamayı kanıtlar.

Sonuç 4.3.1.6. Yaklaşık çözümlerin alt dizileri vardır ki $\{u_N\}$ ve $\{v_N\}$ ile gösterilmektedir. $W_T = \Omega \times (0,T)$ olmak üzere $L^2(W_T)$ de

$$\begin{cases} |u_N|^k \, |u_N'|^{p-1} \, u_N' \longrightarrow |u|^k \, |u'|^{p-1} \, u', \\ |v_N|^l \, |u_N'|^{p-1} \, u_N' \longrightarrow |v|^l \, |u'|^{p-1} \, u', \\ |v_N|^\theta \, |v_N'|^{q-1} \, v_N' \longrightarrow |v|^\theta \, |v'|^{q-1} \, v', \\ |u_N|^\varrho \, |v_N'|^{q-1} \, v_N' \longrightarrow |v|^\varrho \, |v'|^{q-1} \, v' \end{cases} \tag{4.3.1.44}$$

zayıf yakınsar.

İspat. Lemma 4.3.1.3 deki güçlü yakınsama ile yaklaşık çözümlerin alt dizileri $\{u_N\}$ ve $\{v_N\}$ olmak üzere vardır ve W_T bölgesinde

$$\begin{cases} u_N \to u \;\text{ ve }\; v_N \to v, \\ u_N' \to u' \text{ ve } \; v_N' \to v' \end{cases} \tag{4.3.1.45}$$

sağlar. Özellikle W_T bölgesinde

$$|u_N|^k \, |u_N'|^{p-1} \, u_N' \longrightarrow |u|^k \, |u'|^{p-1} \, u' \tag{4.3.1.46}$$

olur. (4.3.1.46) ile her $N \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \left\| |u_N|^k |u'_N|^{p-1} u'_N \right\| &\leq \|u_N\|^k_{\frac{2k}{1-p}} \|u'_N\|^p \\ &\leq \|\nabla u_N\|^k \|u'_N\|^p \\ &\leq C_T \end{aligned} \tag{4.3.1.47}$$

birleşiminin analizinden (4.3.1.44) deki ilk yakınsamayı elde ederiz. (4.3.1.44) deki diğer ifadeler de benzer şekilde ispatlanır.

2. Adım: Yakınsama

Teorem 4.3.2 deki lokal varlığın ispatını tamamlamak için her $t \in [0,T]$ olacak şekilde $(0,t)$ aralığında (4.3.1.1) eşitliğinin integralini alırsak

$$\begin{cases} \langle u'_N(t), e_j \rangle - \langle u'_N(0), e_j \rangle + \int_0^t \langle \nabla u_N(s), \nabla e_j \rangle \, ds \\ \quad - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_1(s-\tau) \nabla u_N(\tau) d\tau, \nabla e_j \right\rangle ds \\ \quad + \int_0^t \left\langle \left(|u_N|^k + |v_N|^l \right) |u'_N|^{p-1} u'_N, e_j \right\rangle ds \\ \quad = \int_0^t \langle f_1(u_N(s), v_N(s)), e_j \rangle \, ds, \\ \langle v'_N(t), e_j \rangle - \langle v'_N(0), e_j \rangle + \int_0^t \langle \nabla v_N(s), \nabla e_j \rangle \, ds \\ \quad - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_2(s-\tau) \nabla v_N(\tau) d\tau, \nabla e_j \right\rangle ds \\ \quad + \int_0^t \left\langle \left(|v_N|^\theta + |u_N|^\varrho \right) |v'_N|^{q-1} v'_N, e_j \right\rangle ds \\ \quad = \int_0^t \langle f_2(u_N(s), v_N(s)), e_j \rangle \, ds \end{cases} \tag{4.3.1.48}$$

buluruz. Lemma 4.3.1.3 deki güçlü yakınsama, Sonuç 4.3.1.5, (4.3.1.5) ve Sonuç 4.3.1.6 daki zayıf yakınsamayı kullanarak, (4.3.1.48) limiti kolayca bulunur. Bu durumda $u_t, v_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $u, v \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ ve Tanım 4.3.1 deki gereklilikleri sağlayan bir (u,v) fonksiyon çifti vardır. Bu nedenle, zayıf lokal çözüm elde edilmiş oldu.

Ayrıca, ikinci mertebeden türevlerle ilgili olarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz (Han ve Wang 2009, Rammaha ve Sakuntasathien 2010).

Lemma 4.3.1.7. $u_t, v_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $u, v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ olsun ve (u,v), (4.3.1.8) eşitsizliğini sağlasın. Böylece $H^{-1}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ ın dual uzayı olmak üzere

$$\Delta u,\ \Delta v,\ u'',\ v'',\ \int_0^t \varpi_1(t-s)\nabla u(s)ds,\ \int_0^t \varpi_2(t-s)\nabla v(s)ds \in L^\infty\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$$

dır.

3. Adım: Teorem 4.3.2 deki enerji özdeşliğinin ispatı

u_t ve v_t nin düzgünlüğünden dolayı (4.3.1) deki denklemleri u_t ve v_t ile direk test edemediğimizden dolayı $D_h y$ ve $D_h z$ katsayılarını kullanıyoruz ve katsayıların özellikleri (Koch ve Lasiecka 2002) referansındaki gibidir.

Her $y \in C_w([0,T],L^2(\Omega))$ fonksiyonu, $h>0$ ve $s \in (0,T)$ olmak üzere

$$D_h y(s) = \frac{1}{2h}\left(y_e(s+h) - y_e(s-h)\right) \tag{4.3.1.49}$$

olsun. Burada $s \in (0,T)$ için $y_e(s) = y(s)$; $s \geq T$ için $y_e(s) = y(T)$; ve $s \leq 0$ için $y_e(s) = y(0)$ özelliklerine sahip $y_e(s)$, $y(s)$ nin R ye genişlemesini gösterir.

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \langle u_t(s), D_h u_t(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\, ds = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2 - \|u_t(0)\|^2\right], \\ \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \langle v_t(s), D_h v_t(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\, ds = \frac{1}{2}\left[\|v_t(t)\|^2 - \|v_t(0)\|^2\right], \\ \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \langle \nabla u(s), D_h \nabla u(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\, ds = \frac{1}{2}\left[\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla u(0)\|^2\right], \\ \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \langle \nabla v(s), D_h \nabla v(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\, ds = \frac{1}{2}\left[\|\nabla v(t)\|^2 - \|\nabla v(0)\|^2\right], \\ \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \left\langle \int\limits_0^s \varpi_1(s-\tau)\nabla u(\tau)\, d\tau, D_h\nabla u(s)\right\rangle_{L^2(\Omega)} ds \\ = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varpi_1(s)\, ds\, \|\nabla u(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\varpi_1' \diamond \nabla u)(s)\, ds \\ +\frac{1}{2}(\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varpi_1(s)\|\nabla u(s)\|^2 ds, \\ \lim\limits_{h\to 0}\int\limits_0^t \left\langle \int\limits_0^s \varpi_2(s-\tau)\nabla v(\tau)\, d\tau, D_h\nabla v(s)\right\rangle_{L^2(\Omega)} ds \\ = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varpi_2(s)\, ds\, \|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\varpi_2' \diamond \nabla v)(s)\, ds \\ +\frac{1}{2}(\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \varpi_2(s)\|\nabla v(s)\|^2 ds \end{cases} \tag{4.3.1.50}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{h\to 0} D_h u = u_t,\ \ \lim\limits_{h\to 0} D_h v = v_t;\ \ L^2(0,t;L^2(\Omega)) \text{ güçlü yakınsak,} \\ \lim\limits_{h\to 0} D_h u(0) = \frac{1}{2}u_t(0),\ \ \lim\limits_{h\to 0} D_h v(0) = \frac{1}{2}v_t(0);\ L^2(\Omega) \text{ zayıf yakınsak,} \\ \lim\limits_{h\to 0} D_h u(t) = \frac{1}{2}u_t(t),\ \ \lim\limits_{h\to 0} D_h v(t) = \frac{1}{2}v_t(t);\ L^2(\Omega) \text{ zayıf yakınsak} \end{array} \tag{4.3.1.51}$$

ve her $s \in (0,t)$ için

$$\lim_{h\to 0} D_h u(s) = u_t(s) \text{ ve } \lim_{h\to 0} D_h v(s) = v_t(s);\ L^2(\Omega) \text{ zayıf yakınsaktır.}$$

Şimdi, (4.3.1) deki denklemleri $D_h u$ ve $D_h v$ ile çarpar ve $\Omega \times (0,t)$ üzerinde

integral alırsak

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \left(u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \varpi_1 (s-\tau) \Delta u (s)\, ds \right) D_h u dx ds \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega \left(|u|^k + |v|^l \right) |u_t|^{p-1} u_t D_h u dx ds \\
&\quad = \int_0^t \int_\Omega f_1 (u,v)\, D_h u dx ds, \\
&\int_0^t \int_\Omega \left(v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \varpi_2 (s-\tau) \Delta v (s)\, ds \right) D_h v dx ds \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega \left(|v|^\theta + |u|^\varrho \right) |v_t|^{q-1} v_t D_h v dx ds \\
&\quad = \int_0^t \int_\Omega f_2 (u,v)\, D_h v dx ds.
\end{aligned} \tag{4.3.1.52}$$

(u, v) nin düzgünlüğünden de görüleceği üzere

$$f_1 (u,v), f_2 (u,v), \left(|u|^k + |v|^l \right) |u_t|^{p-1} u_t, \left(|v|^\theta + |u|^\varrho \right) |v_t|^{q-1} v_t \in L^2 (\Omega \times (0,T))$$

dır (bakınız (4.3.1.44)). Bundan dolayı, (4.3.1.52) deki lineer olmayan terimlerin $h \to \infty$ yakınsarken limiti alınabilir. Ayrıca, $u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \varpi_1 (s-\tau) \Delta u (s)\, ds$ ve $v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \varpi_2 (s-\tau) \Delta v (s)\, ds \in L^2 (\Omega \times (0,T))$ olduğunu belirtelim. $\langle ., . \rangle$; $H^{-1} (\Omega)$ ve $H_0^1 (\Omega)$ ın iç çarpımını göstersin. Böylece, u, v nin düzgünlüğünden ve (Koch ve Lasiecka 2002) nın elde ettiği sonuçlardan

$$\lim_{h \to 0} \int_0^t \langle u_{tt} (s), D_h u (s) \rangle\, ds = \frac{1}{2} \left[\|u_t (t)\|^2 - \|u_t (0)\|^2 \right] \tag{4.3.1.53}$$

olur. Lemma 4.3.1.7 ve $u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \varpi_1 (s-\tau) \Delta u (s)\, ds \in L^2 (\Omega \times (0,T))$ olmasından

dolayı (4.3.1.50) ve (4.3.1.52) den

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_0^t\int_\Omega\left(u_{tt}-\Delta u+\textstyle\int_0^t \varpi_1(s-\tau)\Delta u(s)\,ds\right)D_h u(s)\,dxds\\
&\quad=\int_0^t\int_\Omega\left(u_{tt}-\Delta u+\textstyle\int_0^t \varpi_1(s-\tau)\Delta u(s)\,ds\right)u_t dxds\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\int_0^t\langle u_{tt},D_h u(s)\rangle\,ds+\int_0^t\langle\nabla u(s),D_h\nabla u(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\,ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^t\left\langle\textstyle\int_0^t\varpi_1(s-\tau)\nabla u(s)\,ds,D_h\nabla u(s)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right]\\
&=\tfrac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2-\|u_t(0)\|^2\right]+\tfrac{1}{2}\left[\|\nabla u(t)\|^2-\|\nabla u(0)\|^2\right]\\
&\qquad-\tfrac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\,\|\nabla u(t)\|^2+\tfrac{1}{2}(\varpi_1\diamond\nabla u)(t)\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\,\|\nabla u(s)\|^2\,ds-\tfrac{1}{2}(\varpi_1'\diamond\nabla u)(t)
\end{aligned}\tag{4.3.1.54}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_0^t\int_\Omega\left(v_{tt}-\Delta v+\textstyle\int_0^t \varpi_2(s-\tau)\Delta v(s)\,ds\right)D_h v(s)\,dxds\\
&\quad=\int_0^t\int_\Omega\left(v_{tt}-\Delta v+\textstyle\int_0^t \varpi_2(s-\tau)\Delta v(s)\,ds\right)v_t dxds\\
&=\lim_{h\to 0}\left[\int_0^t\langle v_{tt},D_h v(s)\rangle\,ds+\int_0^t\langle\nabla v(s),D_h\nabla v(s)\rangle_{L^2(\Omega)}\,ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^t\left\langle\textstyle\int_0^t\varpi_2(s-\tau)\nabla v(s)\,ds,D_h\nabla v(s)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\right]\\
&=\tfrac{1}{2}\left[\|v_t(t)\|^2-\|v_t(0)\|^2\right]+\tfrac{1}{2}\left[\|\nabla v(t)\|^2-\|\nabla v(0)\|^2\right]\\
&\qquad-\tfrac{1}{2}\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\,\|\nabla v(t)\|^2+\tfrac{1}{2}(\varpi_2\diamond\nabla v)(t)\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}\int_0^t\varpi_2(s)\,\|\nabla v(s)\|^2\,ds-\tfrac{1}{2}(\varpi_2'\diamond\nabla v)(t)
\end{aligned}\tag{4.3.1.55}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, (4.3.1.52) in $h \to 0$ yakınsarken limitini alırsak

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\|u'(t)\|^2 + (\varpi_1 \diamond \nabla u)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t \varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 \\ +\frac{1}{2}\varpi_1(t)\|\nabla u(t)\|^2 - \frac{1}{2}(\varpi_1' \diamond \nabla u)(t) \\ +\int_0^t \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l\right)|u'(t)|^{p+1}\,dxds \\ = \int_0^t \int_\Omega f_1(u(t), v(t))u'(t)dxds \\ +\frac{1}{2}\left[\|u'(0)\|^2 + \|\nabla u(0)\|^2\right], \\ \frac{1}{2}\left[\|v_N'(t)\|^2 + (\varpi_2 \diamond \nabla v_N)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t \varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla v_N(t)\|^2 \\ +\frac{1}{2}\varpi_2(t)\|\nabla v_N(t)\|^2 - \frac{1}{2}(\varpi_2' \diamond \nabla v_N)(t) \\ +\int_\Omega \left(|v_N(t)|^\theta + |u_N(t)|^\varrho\right)|v_N'(t)|^{q+1}\,dx \\ = \int_\Omega f_2(u_N(t), v_N(t))v_N'(t)dx \\ +\frac{1}{2}\left[\|v'(0)\|^2 + \|\nabla v(0)\|^2\right] \end{cases} \tag{4.3.1.56}$$

(4.3.1.56) deki denklemleri taraf tarafa toplarsak ve

$$f_1(u(s), v(s))u'(s) + f_2(u(s), v(s))v'(s) = \frac{d}{ds}F(u(s), v(s))$$

kullanırsak enerji özdeşliği elde edilir.

4.3.2. Teklik

Bu kısımda ki amacımız Teorem 4.3.2 deki teklik ifadesini ispatlamaktır.

Lemma 4.3.2.1. (u, v) ve $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ ikilileri; Tanım 4.3.1 de belirtilen $[0, T]$ aralığında tanımlı (4.3.1) başlangıç-sınır değer probleminin zayıf çözümleri olsun. Böylece $(u, v) = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ dir.

İspat. $y = u - \widetilde{u}$ ve $z = v - \widetilde{v}$ olsun. Böylece y ve z,

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + \int_0^t \varpi_1(t-s)\Delta y(s)ds + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t \\ -\left(|\widetilde{u}|^k + |\widetilde{v}|^l\right)|\widetilde{u}_t|^{p-1}\widetilde{u}_t = f_1(u,v) - f_1(\widetilde{u},\widetilde{v}),\ \Omega\times(0,T), \\ z_{tt} - \Delta z + \int_0^t \varpi_2(t-s)\Delta z(s)ds + \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t \\ -\left(|\widetilde{v}|^\theta + |\widetilde{u}|^\varrho\right)|\widetilde{v}_t|^{q-1}\widetilde{v}_t = f_2(u,v) - f_2(\widetilde{u},\widetilde{v}),\ \Omega\times(0,T), \\ y(x,0)=0,\ y_t(x,0)=0,\ z(x,0)=0,\ z_t(x,0)=0,\ \Omega \\ y = z = 0,\ \partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \tag{4.3.2.1}$$

sağlar. $y_t,\ z_t \in C_w([0,T], L^2(\Omega))$ olduğundan dolayı (4.3.2.1) deki y_t ve z_t li denklemleri direk test etmek için standart enerji kestirimlerini kullanamadığımız için istenen teklik sonucunu elde edemeyiz. Bundan dolayı $D_h y$ ve $D_h z$ katsayılarını ve katsayıların özellikleri ((4.3.1.49) da tanımlanan her sabitlenmiş $t \in [0,T]$ gibi olacak şekilde) ve (4.3.1.50)-(4.3.1.51) ve (4.3.1.53) deki özellikleri kullanıyoruz.

Öncelikle, Hölder eşitsizliği, Sobolev Gömme teoremi ve $n = 3$ iken $r = 3$ kabulünden

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f_1(u,v)|^2 dx &\leq C\int_\Omega \left[|u|^{2r} + |v|^{2r} + |u|^{r-1}|v|^{r+1}\right]dx \\ &\leq C\int_\Omega \left[\|u\|_{2r}^{2r} + \|v\|_{2r}^{2r} + \|u\|_{3(r-1)}^{r-1}\|v\|_{\frac{3(r+1)}{2}}^{r+1}\right] \\ &\leq C\left[\|\nabla u\|^{2r} + \|\nabla v\|^{2r} + \|\nabla u\|^{r-1}\|\nabla v\|^{r+1}\right] \\ &\leq C\left(\|\nabla u\|^{2r} + \|\nabla v\|^{2r}\right) \leq C \end{aligned}$$

buluruz. Bu durumda $f_1(u,v) \in L^2(\Omega)$ bulunur. Benzer şekilde $f_2(u,v) \in L^2(\Omega)$ olduğunu da gösterebiliriz.

$\left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t, \left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t \in L^2(\Omega\times(0,T))$ ve (4.3.2.1) denkleminden

$$\begin{cases} y_{tt}(s) - \Delta y(s) + \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau \in L^2(\Omega\times(0,T)), \\ z_{tt}(s) - \Delta z(s) + \int_0^s \varpi_2(s-\tau)\Delta z(\tau)d\tau \in L^2(\Omega\times(0,T)) \end{cases} \tag{4.3.2.2}$$

olur.

$(4.3.2.1)_1$ denklemini $D_h y$ ve $(4.3.2.1)_2$ denklemini de $D_h z$ ile çarpıp $\Omega\times(0,t)$

bölgesinde integral alırsak

$$\left\{\begin{array}{c} \int_0^t \int_\Omega \left(y_{tt}(s) - \Delta y(s) + \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau\right) D_h y(s)\, dxds \\ - \int_0^t \int_\Omega \left[f_1(u(s), v(s)) - f_1(\widetilde{u}(s), \widetilde{v}(s))\right] D_h y(s)\, dxds \\ = -\int_0^t \int_\Omega \left[\left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1} u_t - \left(|\widetilde{u}|^k + |\widetilde{v}|^l\right)|\widetilde{u}_t|^{p-1}\widetilde{u}_t\right] D_h y(s)\, dxds, \\ \int_0^t \int_\Omega \left(z_{tt}(s) - \Delta z(s) + \int_0^s \varpi_2(s-\tau)\Delta z(\tau)d\tau\right) D_h z(s)\, dxds \\ - \int_0^t \int_\Omega \left[f_2(u(s), v(s)) - f_2(\widetilde{u}(s), \widetilde{v}(s))\right] D_h z(s)\, dxds \\ = -\int_0^t \int_\Omega \left[\left(|v|^\theta + |u|^\varrho\right)|v_t|^{q-1} v_t - \left(|\widetilde{v}|^\theta + |\widetilde{u}|^\varrho\right)|\widetilde{v}_t|^{q-1}\widetilde{v}_t\right] D_h z(s)\, dxds, \end{array}\right. \tag{4.3.2.3}$$

elde ederiz. Şimdi ise $h \to 0$ yakınsarken (4.3.2.3) ün limitini alalım. Lemma 4.3.1.7 den

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega \left(y_{tt}(s) - \Delta y(s) + \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau\right) D_h y(s)\, dxds \\ = & \int_0^t \langle y_{tt}(s), D_h y(s)\rangle\, ds - \int_0^t \langle \Delta y(s), D_h y(s)\rangle\, ds \\ & + \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau, D_h y(s)\right\rangle ds \\ = & \langle y_t(t), D_h y(t)\rangle - \langle y_t(0), D_h y(0)\rangle \\ & - \int_0^t \langle y_t(s), \partial_t D_h y(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle \nabla y(s), \nabla D_h y(s)\rangle\, ds \\ & - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\nabla y(\tau)d\tau, \nabla D_h y(s)\right\rangle ds \\ = & \langle y_t(t), D_h y(t)\rangle - \int_0^t \langle y_t(s), D_h y_t(s)\rangle\, ds \\ & + \int_0^t \langle \nabla y(s), \nabla D_h y(s)\rangle\, ds \\ & - \int_0^t \left\langle \int_0^s \varpi_1(s-\tau)\nabla y(\tau)d\tau, \nabla D_h y(s)\right\rangle ds \end{aligned} \tag{4.3.2.4}$$

olur. (4.3.1.51) ve (4.3.2.2) yi kullanarak, (4.3.2.4) ün limitini alırsak

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_0^t\int_\Omega\left(y_{tt}(s)-\Delta y(s)+\int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau\right)D_h y(s)\,dxds\\
=\;&\int_0^t\int_\Omega\left(y_{tt}(s)-\Delta y(s)+\int_0^s \varpi_1(s-\tau)\Delta y(\tau)d\tau\right)y_t(s)\,dxds\\
=\;&\frac{1}{2}\|y_t(t)\|^2+\frac{1}{2}(\varpi_1\diamond\nabla y)(t)\\
&+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla y(t)\|^2\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_1(s)\,ds\,\|\nabla y(t)\|^2-\frac{1}{2}\int_0^t(\varpi_1'\diamond\nabla y)(s)\,ds
\end{aligned}\tag{4.3.2.5}$$

buluruz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_\Omega\left(z_{tt}(s)-\Delta z(s)+\int_0^s \varpi_2(s-\tau)\Delta z(\tau)d\tau\right)D_h z(s)\,dxds\\
=\;&\frac{1}{2}\|z_t(t)\|^2+\frac{1}{2}(\varpi_2\diamond\nabla z)(t)\\
&+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla z(t)\|^2\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\varpi_2(s)\,ds\,\|\nabla z(t)\|^2-\frac{1}{2}\int_0^t(\varpi_2'\diamond\nabla z)(s)\,ds
\end{aligned}\tag{4.3.2.6}$$

olur. (4.3.1.51), (4.3.2.5) ve (4.3.2.6) in birleşiminden

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\|y_t(t)\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla y(t)\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\left((\varpi_1\diamond\nabla y)(t)+\int_0^t \varpi_1(s)\|\nabla y(s)\|^2\,ds\right) \\ -\frac{1}{2}\int_0^t (\varpi_1'\diamond\nabla y)(s)\,ds \\ +\int_0^t\int_\Omega\left[\left(|u(s)|^k+|v(s)|^l\right)|u_t(s)|^{p-1}u_t(s)\right. \\ \left.-\left(|\widetilde{u}(s)|^k+|\widetilde{v}(s)|^l\right)|\widetilde{u}_t(s)|^{p-1}\widetilde{u}_t(s)\right]y_t(s)\,dxds \\ =\int_0^t\int_\Omega\left[f_1(u(s),v(s))-f_1(\widetilde{u}(s),\widetilde{v}(s))\right]y_t(s)\,dxds, \\ \frac{1}{2}\left[\|z_t(t)\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla z(t)\|^2\right] \\ +\frac{1}{2}\left((\varpi_2\diamond\nabla z)(t)+\int_0^t \varpi_2(s)\|\nabla z(s)\|^2\,ds\right) \\ -\frac{1}{2}\int_0^t (\varpi_2'\diamond\nabla z)(s)\,ds \\ +\int_0^t\int_\Omega\left[\left(|v(s)|^\theta+|u(s)|^\varrho\right)|v_t(s)|^{q-1}v_t(s)\right. \\ \left.-\left(|\widetilde{v}(s)|^\theta+|\widetilde{u}(s)|^\varrho\right)|\widetilde{v}_t(s)|^{q-1}\widetilde{v}_t(s)\right]z_t(s)\,dxds \\ =\int_0^t\int_\Omega\left[f_2(u(s),v(s))-f_2(\widetilde{u}(s),\widetilde{v}(s))\right]z_t(s)\,dxds, \end{cases} \tag{4.3.2.7}$$

elde ederiz. Burada $y(x,0)=y_t(x,0)=z(x,0)=z_t(x,0)=0$ kabulü kullanıldı.

(4.3.2.7) denkleminin her iki tarafına sırasıyla

$$\int_0^t\int_\Omega\left(|\widetilde{u}|^k+|\widetilde{v}|^l\right)|u_t|^{p-1}u_t y_t dxds,\quad \int_0^t\int_\Omega\left(|\widetilde{v}|^\theta+|\widetilde{u}|^\varrho\right)|v_t|^{q-1}v_t z_t dxds$$

terimlerini eklersek

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\|y_t(t)\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_1(s)\,ds\right)\|\nabla y(t)\|^2+(\varpi_1\diamond\nabla y)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \varpi_1(s)\|\nabla y(s)\|^2\,ds-\frac{1}{2}\int_0^t(\varpi_1'\diamond\nabla y)(s)\,ds+\int_0^t J_1(s)\,ds \\ =\int_0^t\int_\Omega\left[f_1(u(s),v(s))-f_1(\widetilde{u}(s),\widetilde{v}(s))\right]y_t(s)\,dxds+\int_0^t J_2(s)\,ds, \\ \frac{1}{2}\left[\|z_t(t)\|^2+\left(1-\int_0^t \varpi_2(s)\,ds\right)\|\nabla z(t)\|^2+(\varpi_2\diamond\nabla z)(t)\right] \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \varpi_2(s)\|\nabla z(s)\|^2\,ds-\frac{1}{2}\int_0^t(\varpi_2'\diamond\nabla z)(s)\,ds+\int_0^t K_1(s)\,ds \\ =\int_0^t\int_\Omega\left[f_2(u(s),v(s))-f_2(\widetilde{u}(s),\widetilde{v}(s))\right]z_t(s)\,dxds+\int_0^t K_2(s)\,ds \end{cases} \tag{4.3.2.8}$$

buluruz. Burada

$$\begin{aligned} J_1(s) &= \int_\Omega \left(|\widetilde{u}|^k + |\widetilde{v}|^l\right) \left[|u_t|^{p-1} u_t - |\widetilde{u}_t|^{p-1} \widetilde{u}_t\right] y_t dx, \\ J_2(s) &= -\int_\Omega \left(|u|^k - |\widetilde{u}|^k + |v|^l - |\widetilde{v}|^l\right) |u_t|^{p-1} u_t y_t dx, \\ K_1(s) &= \int_\Omega \left(|\widetilde{v}|^\theta + |\widetilde{u}|^\varrho\right) \left[|v_t|^{q-1} v_t - |\widetilde{v}_t|^{q-1} \widetilde{v}_t\right] z_t dx, \\ K_2(s) &= -\int_\Omega \left(|v|^\theta - |\widetilde{v}|^\theta + |u|^\varrho - |\widetilde{u}|^\varrho\right) |v_t|^{q-1} v_t z_t dx \end{aligned} \tag{4.3.2.9}$$

dır. (4.3.11) deki monotonluk probleminden

$$\begin{aligned} J_1(s) &\geq c_0 \int_\Omega \left(|\widetilde{u}|^k + |\widetilde{v}|^l\right) |y_t|^{p+1} dx, \\ K_1(s) &\geq c_0 \int_\Omega \left(|\widetilde{v}|^\theta + |\widetilde{u}|^\varrho\right) |z_t|^{q+1} dx \end{aligned} \tag{4.3.2.10}$$

elde ederiz. Ayrıca (4.3.2.8) in sağ tarafındaki terimlerin kestirimini elde etmek için (4.3.1.22) ve (4.3.1.23) eşitsizliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \left[f_1(u(s), v(s)) - f_1(\widetilde{u}(s), \widetilde{v}(s))\right] y_t(s) dx \right| \\ \leq\ & C\left(\|\nabla y(s)\|^2 + \|\nabla z(s)\|^2 + \|y_t(s)\|^2\right), \\ & \left| \int_\Omega \left[f_2(u(s), v(s)) - f_1(\widetilde{u}(s), \widetilde{v}(s))\right] z_t(s) dx \right| \\ \leq\ & C\left(\|\nabla y(s)\|^2 + \|\nabla z(s)\|^2 + \|z_t(s)\|^2\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |J_2(s)| &\leq C\left(\|\nabla y(s)\|^2 + \|\nabla z(s)\|^2 + \|y_t(s)\|^2\right), \\ |K_2(s)| &\leq C\left(\|\nabla y(s)\|^2 + \|\nabla z(s)\|^2 + \|z_t(s)\|^2\right) \end{aligned} \tag{4.3.2.11}$$

elde ederiz. Şimdi, (4.3.7) notasyonunu ve (4.3.11) eşitsizliğini kullanırsak ve

$$Y(t) := \|y_t(t)\|^2 + \|z_t(t)\|^2 + \|\nabla y(t)\|^2 + \|\nabla z(t)\|^2$$

şeklinde alırsak o zaman (4.3.2.8)-(4.3.2.11) birleşiminden

$$\begin{aligned} & Y(t)+\frac{1}{\rho}\int_0^t \left[\varpi_1(s)\|\nabla y(s)\|^2+\varpi_2(s)\|\nabla z(s)\|^2\right] ds \\ & +\frac{1}{\rho}\left[(\varpi_1\diamond\nabla y)(t)+(\varpi_2\diamond\nabla z)(t)\right] \\ & -\frac{1}{\rho}\int_0^t \left[(\varpi_1'\diamond\nabla y)(s)+(\varpi_2'\diamond\nabla z)(s)\right] ds \\ & +c_0\int_0^t\int_\Omega \left[\left(|\widetilde{u}|^k+|\widetilde{v}|^l\right)|y_t|^{p+1}+\left(|\widetilde{v}|^\theta+|\widetilde{u}|^\varrho\right)|z_t|^{q+1}\right] dxds \\ \leq\ & C\int_0^t Y(s)\,ds \end{aligned} \tag{4.3.2.12}$$

buluruz. Gronwall eşitsizliğinden her $t\in[0,T]$ için $Y(t)=0$ olur. Böylece $(u,v)=(\widetilde{u},\widetilde{v})$ olur ve ispat tamamlanır.

4.3.3. Çözümün Patlaması

Bu kısımda, Georgiev ve Todorova metodunu kullanarak Teorem 4.3.3 ün ispatını vereceğiz.

İspat. (u,v), Tanım 4.3.1 i sağlayan ve (4.3.1) probleminin zayıf çözümü olsun. $t\in[0,T)$ için

$$M(t)=\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2,\quad G(t)=\int_\Omega F(u(t),v(t))\,dx \tag{4.3.3.1}$$

ve

$$\begin{aligned} H(t) &= -E(t)=-\frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2+\|v'(t)\|^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-\int_0^t \varpi_1(s)ds)\|\nabla u(t)\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-\int_0^t \varpi_2(s)ds)\|\nabla v(t)\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[(\varpi_1\diamond\nabla u)(t)+(\varpi_2\diamond\nabla v)(t)\right]+G(t) \end{aligned} \tag{4.3.3.2}$$

olsun.

Teoremdeki $E(0) < 0$ kabulünden $H(0) > 0$ olduğu sonucuna ulaşırız. Ayrıca enerji özdeşliği (4.3.9) dan

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{1}{2}\left[\varpi_1(t)\|\nabla u(t)\|^2 + \varpi_2(t)\|\nabla v(t)\|^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[(\varpi_1' \diamond \nabla u)(t) + (\varpi_2' \diamond \nabla v)(t)\right] \\ &\quad + \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l\right)|u'(t)|^{p+1}\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(|v(t)|^\theta + |u(t)|^\varrho\right)|v'(t)|^{q+1}\,dx \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.3.3.3}$$

elde ederiz. Böylece, (4.3.3) den $t \in [0,T)$ için

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq G(t) \leq c_1\left(\|u(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|v(t)\|_{r+1}^{r+1}\right) \tag{4.3.3.4}$$

sonucuna ulaşırız. Ayrıca, (4.3.3) den $0 \leq t < T$ için

$$c_0\left(\|u(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|v(t)\|_{r+1}^{r+1}\right) \leq G(t) \tag{4.3.3.5}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda < \min\Bigg\{ &\frac{r-(k+p)}{(p+1)(r+1)}, \frac{r-(l+p)}{(p+1)(r+1)}, \\ &\frac{r-(\varrho+q)}{(q+1)(r+1)}, \frac{r-(\theta+q)}{(q+1)(r+1)}, \frac{r-1}{2(r+1)}\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.3.3.6}$$

olsun. Özellikle, (4.3.3.6) dan $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ olduğu kolayca görülür. $|\Omega|$, Ω nın Lebesgue ölçüsü ve (4.3.3.5) de geçen $c_0 > 0$ sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \tfrac{r+1}{8}H(0)^{\frac{r-(k+p)}{(p+1)(r+1)}}, \quad \gamma_2 = \tfrac{r+1}{8}H(0)^{\frac{r-(l+p)}{(p+1)(r+1)}}, \\ \gamma_3 &= \tfrac{r+1}{8}H(0)^{\frac{r-(\varrho+q)}{(q+1)(r+1)}}, \quad \gamma_4 = \tfrac{r+1}{8}H(0)^{\frac{r-(\theta+q)}{(q+1)(r+1)}} \end{aligned} \tag{4.3.3.7}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_0^{-\frac{k+p+1}{(p+1)(r+1)}}|\Omega|^{\frac{r-(k+p)}{(p+1)(r+1)}}, \quad \sigma_2 = c_0^{-\frac{l+p+1}{(p+1)(r+1)}}|\Omega|^{\frac{r-(l+p)}{(p+1)(r+1)}}, \\ \sigma_3 &= c_0^{-\frac{\varrho+q+1}{(q+1)(r+1)}}|\Omega|^{\frac{r-(\varrho+q)}{(q+1)(r+1)}}, \quad \sigma_4 = c_0^{-\frac{\theta+q+1}{(q+1)(r+1)}}|\Omega|^{\frac{r-(\theta+q)}{(q+1)(r+1)}} \end{aligned} \tag{4.3.3.8}$$

değişkenlerini işimizi kolaylaştırmak için kullanacağız. $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ olduğundan ve $0 < \varepsilon \leq 1$ aralığında yeterince küçük seçilirse

$$\begin{aligned} A := 1 - \lambda - 2\varepsilon \Big[& \sigma_1^{\frac{p+1}{p}} \gamma_1^{-\frac{1}{p}} H(0)^{\frac{k+p-r}{(p+1)(r+1)}+\lambda} \\ & + \sigma_2^{\frac{p+1}{p}} \gamma_2^{-\frac{1}{p}} H(0)^{\frac{l+p-r}{(p+1)(r+1)}+\lambda} \\ & + \sigma_3^{\frac{q+1}{q}} \gamma_3^{-\frac{1}{q}} H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(q+1)(r+1)}+\lambda} \\ & + \sigma_4^{\frac{q+1}{q}} \gamma_4^{-\frac{1}{q}} H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(q+1)(r+1)}+\lambda} \Big] \\ & \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3.3.9}$$

olur. ε değeri daha sonra belirlenecektir.

(4.3.3.9) daki ε nun küçüklük koşulu

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \ &\geq \ C\varepsilon \Big[H(0)^{\frac{k+p-r}{(p+1)(r+1)}+\lambda} + H(0)^{\frac{l+p-r}{(p+1)(r+1)}+\lambda} \\ &\qquad + H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(q+1)(r+1)}+\lambda} + H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(q+1)(r+1)}+\lambda} \Big] \\ &\geq \ C\varepsilon H(0)^{-\eta} \end{aligned} \tag{4.3.3.10}$$

eşitsizliğini sağlacak şekildedir. Burada

$$\eta = \begin{cases} -\lambda + \max\left\{ \frac{r-(k+p)}{p(r+1)}, \frac{r-(l+p)}{p(r+1)}, \frac{r-(\varrho+q)}{q(r+1)}, \frac{r-(\theta+q)}{q(r+1)} \right\} : \ H(0) \geq 1, \\ -\lambda + \min\left\{ \frac{r-(k+p)}{p(r+1)}, \frac{r-(l+p)}{p(r+1)}, \frac{r-(\varrho+q)}{q(r+1)}, \frac{r-(\theta+q)}{q(r+1)} \right\} : \ 0 < H(0) < 1 \end{cases} \tag{4.3.3.11}$$

ile $\eta > 0$ olur. Böylece, yeterince küçük bir genel sabit olan $c > 0$ için $\varepsilon = cH(0)^{\eta}$ olacak şekilde seçersek (4.3.3.9) sağlanır. Bu nedenle,

$$\varepsilon = \min\left\{1, cH(0)^{\eta}\right\} \tag{4.3.3.12}$$

olarak seçilir. Burada asıl ilgilendiğimiz durum yeterince küçük $H(0) > 0$ olması durumudur.

$M(t)$ nin tanımından

$$M'(t) = 2 \int_{\Omega} \left[u'(t)\, u(t) + v'(t)\, v(t) \right] dx \tag{4.3.3.13}$$

olur. Ayrıca (4.3.8) den her $\varphi, \vartheta \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\begin{cases} \langle u''(t), \varphi \rangle = \frac{d}{dt} \langle u'(t), \varphi \rangle \\ = -\langle \nabla u(t), \nabla \varphi \rangle + \left\langle \int_0^t \varpi_1 (t-s) \nabla u(s) ds, \nabla \varphi \right\rangle \\ - \left\langle \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l \right) |u'(t)|^{p-1} u'(t), \varphi \right\rangle \\ + \langle f_1(u(t), v(t)), \varphi \rangle, \\ \langle v''(t), \vartheta \rangle = \frac{d}{dt} \langle v'(t), \vartheta \rangle \\ = -\langle \nabla v(t), \nabla \vartheta \rangle + \left\langle \int_0^t \varpi_2 (t-s) \nabla v(s) ds, \nabla \vartheta \right\rangle \\ - \left\langle \left(|v(t)|^\theta + |v(t)|^\varrho \right) |v'(t)|^{q-1} v'(t), \vartheta \right\rangle \\ + \langle f_2(u(t), v(t)), \vartheta \rangle \end{cases} \tag{4.3.3.14}$$

olur. Burada $\langle ., . \rangle$ gösterimi $H^{-1}(\Omega)$ ve $H_0^1(\Omega)$ arasındaki ikili eşleşmedir.

Şimdi, (4.3.3.14) ü kullanarak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega u'(t) u(t) dx \\ = & \|u'(t)\|^2 + \langle u''(t), u(t) \rangle \\ = & \|u'(t)\|^2 - \|\nabla u(t)\|^2 + \int_0^t \varpi_1 (t-s) \int_\Omega \nabla u(s) \nabla u(t) dx ds \\ & - \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l \right) |u'(t)|^{p-1} u'(t) u(t) dx \\ & + \int_\Omega f_1(u(t), v(t)) u(t) dx \end{aligned} \tag{4.3.3.15}$$

elde ederiz. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\Omega} v'(t)\, v(t)\, dx \\
= \;& \|v'(t)\|^2 + \langle v''(t), v(t)\rangle \\
= \;& \|v'(t)\|^2 - \|\nabla v(t)\|^2 \\
&+ \int_0^t \varpi_2(t-s) \int_{\Omega} \nabla v(s)\, \nabla v(t)\, dxds \\
&- \int_{\Omega} \left(|v(t)|^{\theta} + |v(t)|^{\varrho}\right) |v'(t)|^{q-1} v'(t)v(t)dx \\
&+ \int_{\Omega} f_2(u(t), v(t))\, v(t)\, dx
\end{aligned} \tag{4.3.3.16}$$

olur. Böylece (4.3.4) denklemleri kullanılır ve (4.3.3.13), (4.3.3.15) ve (4.3.3.16) ifadeleri birleştirilirse

$$\begin{aligned}
M''(t) = \;& 2\left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2\right) \\
&-2\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\right) \\
&+2(r+1)\int_{\Omega} F(u(t), v(t))\, dx \\
&+2\left(\int_0^t \varpi_1(t-s)\int_{\Omega} \nabla u(s)\, \nabla u(t)\, dxds\right) \\
&+2\left(\int_0^t \varpi_2(t-s)\int_{\Omega} \nabla v(s)\, \nabla v(t)\, dxds\right) \\
&-2\int_{\Omega} \left(|u(t)|^{k} + |v(t)|^{l}\right) |u'(t)|^{p-1} u'(t)u(t)dx \\
&-2\int_{\Omega} \left(|v(t)|^{\theta} + |v(t)|^{\varrho}\right) |v'(t)|^{q-1} v'(t)v(t)dx
\end{aligned} \tag{4.3.3.17}$$

elde ederiz. $0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere

$$Y(t) = H(t)^{1-\lambda} + \varepsilon M'(t) \tag{4.3.3.18}$$

olsun. (4.3.3.17) ve (4.3.3.18) den

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (1-\lambda) H(t)^{-\lambda} H'(t) \\ &\quad +2\varepsilon \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right) \\ &\quad -2\varepsilon \left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 \right) \\ &\quad +2\varepsilon \left(\int_0^t \varpi_1(t-s) \int_\Omega \nabla u(s) \nabla u(t) \, dx ds \right) \\ &\quad +2\varepsilon \left(\int_0^t \varpi_2(t-s) \int_\Omega \nabla v(s) \nabla v(t) \, dx ds \right) \\ &\quad +2\varepsilon (r+1) G(t) \\ &\quad -2\epsilon \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l \right) |u'(t)|^{p-1} u'(t) u(t) dx \\ &\quad -2\varepsilon \int_\Omega \left(|v(t)|^\theta + |v(t)|^\varrho \right) |v'(t)|^{q-1} v'(t) v(t) dx \end{aligned} \tag{4.3.3.19}$$

olur. Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} &\int_0^t \varpi_1(t-s) \int_\Omega \nabla u(s) \nabla u(t) \, dx ds \\ = &\int_0^t \varpi_1(t-s) \int_\Omega \nabla u(t) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) \, dx ds \\ &+ \int_0^t \varpi_1(s) \, ds \, \|\nabla u(t)\|^2 \\ \geq &-\int_0^t \varpi_1(s) \, ds \, \|\nabla u(t)\|^2 - \frac{1}{4} (\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) \\ &+ \int_0^t \varpi_1(s) \, ds \, \|\nabla u(t)\|^2 \\ = &-\frac{1}{4} (\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) \end{aligned} \tag{4.3.3.20}$$

buluruz. Aynı şekilde

$$\int_0^t \varpi_2 (t-s) \int_\Omega \nabla v (s) \nabla v (t) \, dxds \geq -\frac{1}{4} (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) \tag{4.3.3.21}$$

olur. Böylece (4.3.3.19)-(4.3.3.21) ifadelerinin birleşiminden

$$\begin{aligned} Y'(t) \geq\ & (1-\lambda) H(t)^{-\lambda} H'(t) \\ & +2\varepsilon \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right) \\ & -2\varepsilon \left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 \right) \\ & -\varepsilon \frac{1}{2} (\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) \\ & -\varepsilon \frac{1}{2} (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) + 2\varepsilon (r+1) G(t) \\ & -2\varepsilon \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l \right) |u'(t)|^{p-1} u'(t) u(t) dx \\ & -2\varepsilon \int_\Omega \left(|v(t)|^\theta + |v(t)|^\varrho \right) |v'(t)|^{q-1} v'(t) v(t) dx. \end{aligned} \tag{4.3.3.22}$$

elde ederiz. Şimdi $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} & -\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 \right) \\ \geq\ & \frac{2}{\rho} H(t) + \frac{1}{\rho} \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right) \\ & +\frac{1}{\rho} \left((\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) + (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) \right) - \frac{2}{\rho} G(t) \end{aligned} \tag{4.3.3.23}$$

dır. (4.3.3.22) ve (4.3.3.23) den

$$\begin{aligned} Y'(t) &\geq (1-\lambda) H(t)^{-\lambda} H'(t) + \varepsilon \frac{4}{\rho} H(t) \\ &\quad + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2\right) \\ &\quad + 2\varepsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4}\right) [(\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) + (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t)] \\ &\quad + 2\varepsilon \left(r + 1 - \frac{1}{\rho}\right) G(t) \\ &\quad - 2\varepsilon \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l\right) |u'(t)|^{p-1} u'(t) u(t) dx \\ &\quad - 2\varepsilon \int_\Omega \left(|v(t)|^\theta + |u(t)|^\varrho\right) |v'(t)|^{q-1} v'(t) v(t) dx \end{aligned} \tag{4.3.3.24}$$

olur. (4.3.3.24) ün son iki teriminin kestirimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \left(|u(t)|^k + |v(t)|^l\right) |u'(t)|^{p-1} u'(t) u(t) dx \right| \\ \leq &\int_\Omega |u(t)|^{k+1} |u'(t)|^p dx + \int_\Omega |v(t)|^l |u(t)| |u'(t)|^p dx \\ = &\; L_1 + L_2. \end{aligned} \tag{4.3.3.25}$$

Hölder eşitsizliği ve $r > k + p$ kabulünden

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_\Omega |u(t)|^{k+1-\frac{kp}{p+1}} |u(t)|^{\frac{kp}{p+1}} |u'(t)|^p dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u(t)|^k |u'(t)|^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |u(t)|^{k+p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq H'(t)^{\frac{p}{p+1}} \|u(t)\|_{k+p+1}^{\frac{k+p+1}{p+1}} \\ &\leq H'(t)^{\frac{p}{p+1}} \|u(t)\|_{r+1}^{\frac{k+p+1}{p+1}} |\Omega|^{\frac{r-(k+p)}{(r+1)(p+1)}} \end{aligned} \tag{4.3.3.26}$$

elde ederiz. $0 < H(0) \leq H(t) \leq G(t)$, $k + p - r < 0$ olduğundan ve ayrıca (4.3.3.5) ve

Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_1 &\leq |\Omega|^{\frac{r-(k+p)}{(r+1)(p+1)}} c_0^{-\frac{k+p+1}{(r+1)(p+1)}} G(t)^{\frac{k+p+1}{(r+1)(p+1)}} H'(t)^{\frac{p}{p+1}} \\ &= \sigma_1 G(t)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} G(t)^{\frac{1}{p+1}} H'(t)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\leq H(t)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} \left(\sigma_1 G(t)^{\frac{1}{p+1}} H'(t)^{\frac{p}{p+1}}\right) \\ &\leq H(t)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} \left[\gamma_1 G(t) + \sigma_1^{\frac{p+1}{p}} \gamma_1^{-\frac{1}{p}} H'(t)\right] \\ &\leq \gamma_1 H(0)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} G(t) + \sigma_1^{\frac{p+1}{p}} \gamma_1^{-\frac{1}{p}} H(t)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} H'(t) \end{aligned} \tag{4.3.3.27}$$

sonucuna ulaşırız. Burada λ nın tanımından $\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)} + \lambda < 0$ olduğunu hatırlarsak

$$\begin{aligned} L_1 &\leq \gamma_1 H(0)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} G(t) \\ &\quad + \sigma_1^{\frac{p+1}{p}} \gamma_1^{-\frac{1}{p}} H(t)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}+\lambda} H^{-\lambda}(t) H'(t) \\ &\leq \gamma_1 H(0)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}} G(t) \\ &\quad + \sigma_1^{\frac{p+1}{p}} \gamma_1^{-\frac{1}{p}} H(0)^{\frac{k+p-r}{(r+1)(p+1)}+\lambda} H^{-\lambda}(t) H'(t) \end{aligned} \tag{4.3.3.28}$$

elde ederiz. L_2 nin kestirimini elde etmek için Hölder eşitsizliği ve (4.3.3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_\Omega |v(t)|^l |u'(t)|^p |u(t)| \, dx \\ &= \int_\Omega \left\{|v(t)|^{\frac{lp}{p+1}} |u'(t)|^p\right\} \left\{|v(t)|^{l-\frac{lp}{p+1}} |u(t)|\right\} dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |v(t)|^l |u'(t)|^{p+1} \, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |v(t)|^l |u(t)|^{p+1} \, dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq H'(t)^{\frac{p}{p+1}} \|v(t)\|_{r+1}^{\frac{l}{p+1}} \|u(t)\|_{r+1} |\Omega|^{\frac{r-(l+p)}{(p+1)(r+1)}} \\ &\leq \sigma_2 H'(t)^{\frac{p}{p+1}} G(t)^{\frac{l+p+1}{(r+1)(p+1)}} \end{aligned} \tag{4.3.3.29}$$

olur.

Şimdi, (4.3.3.27) eşitsizliğinde k ile l yer değiştirilirse benzer şekilde

$$L_2 \leq \gamma_2 H(0)^{\frac{l+p-r}{(r+1)(p+1)}} G(t) + \sigma_2^{\frac{p+1}{p}} \gamma_2^{-\frac{1}{p}} H(0)^{\frac{l+p-r}{(r+1)(p+1)}+\lambda} H^{-\lambda}(t) H'(t) \tag{4.3.3.30}$$

olur. (4.3.3.24) deki son terim için de benzer adımlar uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left(|v(t)|^{\theta} + |u(t)|^{\varrho} \right) |v'(t)|^{q-1} v'(t) v(t) dx \right| \\ \leq & \int_{\Omega} |v(t)|^{\theta+1} |v'(t)|^{q} dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{\varrho} |v'(t)|^{q} |v(t)| dx \\ = & K_1 + K_2 \end{aligned} \tag{4.3.3.31}$$

olur. Burada K_1, K_2 yi L_1 ve L_2 gibi kestirimini elde edebiliriz, sırasıyla k yerine θ, p yerine q, l yerine ϱ, u yerine v, ve v yerine u yazılabilir.

Şöyle ki

$$K_2 \leq \gamma_3 H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(r+1)(q+1)}} G(t) + \sigma_3^{\frac{q+1}{q}} \gamma_3^{-\frac{1}{q}} H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(r+1)(q+1)}+\lambda} H^{-\lambda}(t) H'(t) \tag{4.3.3.32}$$

ve

$$K_1 \leq \gamma_4 H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(r+1)(q+1)}} G(t) + \sigma_4^{\frac{q+1}{q}} \gamma_4^{-\frac{1}{q}} H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(r+1)(q+1)}+\lambda} H^{-\lambda}(t) H'(t) \tag{4.3.3.33}$$

olur. (4.3.3.24)-(4.3.3.33) eşitsizliklerini birleştirirsek ve (4.3.3.9) daki A nın tanımından

$$\begin{aligned} Y'(t) \geq & \varepsilon \frac{4}{\rho} H(t) + (1-\lambda) H(t)^{-\lambda} H'(t) \\ & + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right) \\ & + 2\varepsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4}\right) \left[(\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) + (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) \right] \\ & + 2\varepsilon \left(r + 1 - \frac{1}{\rho}\right) G(t) \\ & - 2\varepsilon \left[L_1 + L_2 + K_2 + K_1 \right] \\ \geq & A H^{-\lambda}(t) H'(t) + \varepsilon \frac{4}{\rho} H(t) \\ & + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 \right) \\ & 2\varepsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4}\right) \left[(\varpi_1 \diamond \nabla u)(t) + (\varpi_2 \diamond \nabla v)(t) \right] \\ & + 2\varepsilon G(t) \left(r + 1 - \frac{1}{\rho} - \left\{ \gamma_1 H(0)^{\frac{k+p-r}{(p+1)(r+1)}} + \gamma_2 H(0)^{\frac{l+p-r}{(p+1)(r+1)}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_3 H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(q+1)(r+1)}} + \gamma_4 H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(q+1)(r+1)}} \right\} \right) \end{aligned} \tag{4.3.3.34}$$

buluruz. $\gamma_1, ..., \gamma_4$ ün tanımlarından

$$\begin{aligned} & \gamma_1 H(0)^{\frac{k+p-r}{(p+1)(r+1)}} + \gamma_2 H(0)^{\frac{l+p-r}{(p+1)(r+1)}} \\ & + \gamma_3 H(0)^{\frac{\varrho+q-r}{(q+1)(r+1)}} + \gamma_4 H(0)^{\frac{\theta+q-r}{(q+1)(r+1)}} \\ = & \frac{r+1}{2} \end{aligned} \tag{4.3.3.35}$$

elde ederiz. (4.3.3.6) ve (4.3.3.7) den

$$\frac{r+1}{2} - \frac{1}{\rho} > 0, \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4} > 0$$

kolayca görebiliriz ve $A \geq 0$ olduğundan (4.3.3.34) eşitsizliği $C > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} Y'(t) & \geq 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2\right) + \varepsilon \frac{4}{\rho} H(t) \\ & \quad + 2\varepsilon \left(\frac{r+1}{2} - \frac{1}{\rho}\right) G(t) \\ & \geq C\varepsilon \left[\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 + \|u(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|v(t)\|_{r+1}^{r+1} + H(t)\right] \end{aligned} \tag{4.3.3.36}$$

elde ederiz. Açıkçası (4.3.3.36) dan $Y(t)$ nin $(0, T]$ aralığında artan olduğunu yani

$$Y(t) = H(t)^{1-\lambda} + \varepsilon M'(t) \geq H(0)^{1-\lambda} + \varepsilon M'(0) \tag{4.3.3.37}$$

sonucuna varabiliriz. $M'(0) \geq 0$ durumunda ε üzerinde herhangi bir sınırlamaya ihtiyaç yoktur. Ancak $M'(0) < 0$ durumunda ise $0 < \varepsilon \leq -\frac{H(0)^{1-\lambda}}{2M'(0)}$ almamız gerekmektedir. Her iki durumda da $t \in (0, T]$ için

$$Y(t) \geq \frac{1}{2} H(0)^{1-\lambda} > 0 \tag{4.3.3.38}$$

dır. Şimdi $t \in (0, T]$ için

$$Y'(t) \geq \varepsilon^{1+\rho} C Y(t)^{\xi} \tag{4.3.3.39}$$

olduğunu ispatlayalım. Burada

$$\xi := \frac{1}{1-\lambda}, \quad \rho := \frac{1}{\eta}\left(1 - \frac{2}{(1-2\lambda)(r+1)}\right)$$

ve C pozitif bir sabittir. λ nin tanımından $1<\xi<2$ ve $\rho>0$ olur.

1. Durum: Bazı $t\in(0,T]$ için $M'(t)\leq 0$ böylece t nin böyle değerleri için

$$Y(t)^{\xi}=\left[H(t)^{1-\lambda}+\varepsilon M'(t)\right]^{\xi}\leq H(t) \tag{4.3.3.40}$$

olur ve bu durumda (4.3.3.36) ve (4.3.3.40) dan

$$Y'(t)\geq C\epsilon H(t)\geq C\varepsilon^{1+\rho}H(t)\geq C\varepsilon^{1+\rho}Y(t)^{\xi} \tag{4.3.3.41}$$

olur. Bundan dolayı her $t\in(0,T]$ için $M'(t)\leq 0$ iken (4.3.3.39) eşitsizliği sağlanır. Ancak $t\in(0,T]$ iken $M'(t)>0$ durumunda ise (4.3.3.39) eşitsizliği hala sağlanır fakat daha fazla çalışmayla. İlk önce

$$Y(t)^{\xi}\leq 2^{\xi-1}\left[H(t)+M'(t)^{\xi}\right] \tag{4.3.3.42}$$

dır. $M'(t)^{\xi}$ teriminin kestirimini bulmak için Hölder eşitsizliği ve Young eşitsizliğını kullanırsak ve $1<\xi<2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
M'(t)^{\xi} &= 2^{\xi}\left[\int_{\Omega}\left(u(t)u'(t)+v(t)v'(t)\right)dx\right]^{\xi}\\
&\leq 2^{\xi}\left(\|u(t)\|\|u'(t)\|+\|v(t)\|\|v'(t)\|\right)^{\xi}\\
&\leq C\left(\|u(t)\|_{r+1}\|u'(t)\|+\|v(t)\|_{r+1}\|v'(t)\|\right)^{\xi}\\
&\leq C\left(\|u(t)\|_{r+1}^{\xi}\|u'(t)\|^{\xi}+\|v(t)\|_{r+1}^{\xi}\|v'(t)\|^{\xi}\right)\\
&\leq C\left(\|u(t)\|_{r+1}^{\frac{2\xi}{2-\xi}}+\|u'(t)\|^{2}+\|v(t)\|_{r+1}^{\frac{2\xi}{2-\xi}}+\|v'(t)\|^{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.3.43}$$

buluruz. λ nın tanımını kullanırsak, şöyle ki $\lambda<\frac{r-1}{2(r+1)}$ iken

$$\frac{2\xi}{(2-\xi)(r+1)}-1=\frac{2}{(1-2\lambda)(r+1)}-1<0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (4.3.3.4), (4.3.3.10) u kullanırsak ve ρ nun tanımından

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{r+1}^{\frac{2\xi}{2-\xi}} &= \left(\|u(t)\|_{r+1}^{r+1}\right)^{\frac{2\xi}{(2-\xi)(r+1)}}\leq CG(t)G(t)^{\frac{2\xi}{(2-\xi)(r+1)}-1}\\
&\leq CG(t)H(0)^{\frac{2\xi}{(2-\xi)(r+1)}-1}\leq C\varepsilon^{-\rho}G(t)
\end{aligned} \tag{4.3.3.44}$$

buluruz. Benzer şekilde

$$\|v(t)\|_{r+1}^{\frac{2\xi}{2-\xi}} \leq C\varepsilon^{-\rho}G(t) \tag{4.3.3.45}$$

olur. (4.3.3.43)-(4.3.3.45) in birleşiminden

$$M'(t)^{\xi} \leq C\varepsilon^{-\rho}\left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 + G(t)\right) \tag{4.3.3.46}$$

olur. Son olarak (4.3.3.36), (4.3.3.42)-(4.3.3.43) ve (4.3.3.46) dan bütün $t \in (0,T]$ değerleri için $M'(t) > 0$ iken

$$\begin{aligned} Y'(t) &\geq C\varepsilon\left[H(t) + \|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2 + G(t)\right] \\ &\geq C\varepsilon^{1+\rho}Y(t)^{\xi} \end{aligned} \tag{4.3.3.47}$$

sonucuna varırız. Bundan dolayı (4.3.3.39) sağlanır. Böylece $Y(t)$ sonlu T zamanında patlar

$$T < C\varepsilon^{-1-\rho}Y(0)^{-\lambda\backslash(1-\lambda)} \tag{4.3.3.48}$$

dır. Ayrıca (4.3.3.38) ve (4.3.3.48) den

$$T < C\varepsilon^{-1-\rho}\left[H(0)^{1-\lambda} + \varepsilon M'(0)\right]^{-\lambda\backslash(1-\lambda)} \leq C\varepsilon^{-1-\rho}H(0)^{-\lambda} \tag{4.3.3.49}$$

çözümün üst sınırı bulunur. Son olarak (4.3.3.12) yi 2. durum için düşünürsek $H(0) > 0$ yeterince küçük olmak üzere

$$T < CH(0)^{-[\lambda+\eta(1+\rho)]} \tag{4.3.3.50}$$

elde ederiz.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dejenere sönüm terimli evolüsyon denklemler fen bilimleri ve mühendiste ortaya çıkmaktadır. Dejenere sönüm terim içeren evolüsyon denklemlerinin davranışlarının incelendiği çok sayıda çalışma yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir. Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Bulgular veTartışma bölümünde ele alınan dejenere sönüm terimli üç tane evolüsyon denkleminin farklı davranışlarını inceledik.

İlk kısmında başlangıç-sınır değerlerine sahip

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + |u|^{\varrho} j'(u_t) = |u|^{q-1} u$$

dejenere sönüm terimli Timoshenko denklemini inceledik. Problemin global çözümünün yokluğunu göstermek için açık eşitsizlik metodunu kullandık. Burda patlama zamanı ile ilgili bir sonuç elde etmeden global çözümün olmadığını gösterdik. Şimdiye kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde dejenere sönüm terimli Timoshenko problemini ilk defa biz inceledik ve bu problemin çözümünün lokal ve global varlığı gibi davranışları hala açık problemdir.

İkinci kısmında ise başlangıç-sınır değerlerine sahip

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1} u_t = f_1 \\ v_{tt} - M(\|\nabla v\|^2)\Delta v + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau + \left(|v|^\theta + |u|^{\varrho}\right)|v_t|^{q-1} v_t = f_2 \end{cases}$$

dejenere sönüm terimli Kirchhoff tipli viskoelastik denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını, azalmasını ve patlamasını gösterdik. Negatif başlangıç enerjisi için çözümün patlamasını Georgiev-Todorova yöntemini kullanarak inceledik. Bu çalışma ile dejenere sönüm terime sahip Kirchhoff tipli denklem sistemlerini ilk defa biz incelemiş olduk. Bu çalışmada R^n $(n = 1, 2, 3)$ bölgesinde çalıştık ve bu çalışma R^n durumu için hala açık bir problemdir. Ayrıca çözümün patlaması başka yöntemlerle tekrar incelenebilir.

Son kısımda da başlangıç-sınır değerlerine sahip

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \varpi_1(t-s)\Delta u(s)ds + \left(|u|^k + |v|^l\right)|u_t|^{p-1} u_t = f_1 \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t \varpi_2(t-s)\Delta v(s)ds + \left(|v|^\theta + |u|^{\varrho}\right)|v_t|^{q-1} v_t = f_2 \end{cases}$$

dejenere sönüm terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığını

Faedo-Galerkin metoduyla ve patlamasını ise Georgiev-Todorova yöntemi ile inceledik. R^n $(n = 1, 2, 3)$ bölgesi için çözümün lokal varlığını gösterdik ve R^n durumu için ise hala açık bir problemdir.

Ayrıca, dejenere sönüm terimli problemlerin lokal varlığı incelenirken sadece Faedo Galerkin metodundan faydalanılmış ancak başka metodlarla tekrar incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

Arosio, A., Spagnolo, S. 1984. Global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation. Nonlinear P.D.E. and their Applications, College de France Seminar, Eds (H. Brezis, and J. L. Lions, eds.), Research Notes Math., VI, 1-26. Pitman, Boston).

Brezis, H. 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science & Business Media.

Ball, J. M. 1973a. Initial-boundary value problems for an extensible beam. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 42(1): 61-90.

Ball, J. M. 1973b. Stability theory for an estensible beam. ***Journal of Differential Equations***, 14(3): 399-418.

Barbu, V. 1976. Nonlinear Differential Equations in Banach Spaces. Nordhoff.

Barbu, V., Lasiecka, I., Rammaha, A. 2005a. Existence and uniqueness of solutions to wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms. ***Control and Cybernetics***, 34: 665-687.

Barbu, V., Lasiecka, I., Rammaha, M. 2005b. On nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. ***Transactions of the American Mathematical Society*** , 357(7): 2571-2611.

Barbu, V., Lasiecka, I., Rammaha, M. A. 2007. Blow-up of generalized solutions to wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms. ***Indiana University Mathematics Journal*** , 995-1021.

Benabidallah, R., Ebobisse, F. 2002. On Global solvability of nonlinear Kirchhoff model in infinitely increasing domains. ***Applicable Analysis***, 81(3): 705-723.

Benaissa, A., Ouchenane, D., Zennir, K. 2012. Blow up of positive initial energy solutions to system of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. ***Nonlinear Studies***, 19(4): 523-535.

Bernstein, S. 1940. Sur une Classe d'equations Fonctionelles aux De´rive´es Partielles. ***Izv. Aka., Nauk SSSR***, 4: 17-26.

Biler, P. 1986. Remark on the decay for damped string and beam equations. ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications***, 10(9): 839-842.

Brito, E. H., Hale, J. 1982. The damped elastic stretched string equation generalized: existence, uniqueness, regularity and stability. ***Applicable Analysis***, 13(3): 219-233.

Brito, E. H. 1984. Decay estimates for generalized damped extensible string and beam equation. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 8(12): 1489-1496.

Burgreen, D. 1951. Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends. ***Journal of Applied Mechanics***, 18(2): 135-139.

Carrier, G. F. 1945. On the nonlinear vibration problem of the elastic string. ***Quarterly of Applied Mathematics***, 3(2): 157-165.

Chueshov, I. 2012. Long-time dynamics of Kirchhoff wave models with strong nonlinear damping. ***Journal of Differential Equations***, 252: 1229-1262.

D'Ancona, P., Spagnolo, S. 1992a. Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data. ***Inventiones Mathematicae***, 108(1): 247-262.

D'Ancona, P., Spagnolo, S. 1992b. On an abstract weakly hyperbolic equation modelling the nonlinear vibrating string. In Developments in Partial Differential Equations and Applications to Mathematical Physics (pp.27-32). Springer, Boston, MA.

D'Ancona, P., Shibata, Y. 1994. On global solvavility of non-linear viscoelastic equations in the analytic category. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 17(6): 477-486.

Dickey, R. W. 1970a. Infinite systems of nonlinear oscillation equations. ***Journal of Differential Equations***, 8(1): 16-26.

Dickey, R. W. 1970b. Free vibrations and dynamic buckling of extensible beam. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications*** , 29(2), 443-454.

Dickey, R. W. 1978. The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string. ***Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A:Mathematics***, 82(1-2): 19-26.

Doshi, C. 1979. On the analysis of the Timoshenko beam theory with and without internal damping, Rochester Institute of Technology, Thesis.

Eisley, J. G. 1964. Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates. ***Zeitschrift für ange wandte Mathematik und Physik ZAMP***, 15(2): 167-175.

Ekinci, F., Pişkin, E. 2021. Nonexistence of global solutions for the Timoshenko equation with degenerate damping. ***Menemui Matematik (Discovering Mathematics)***, 43(1): 1-8.

Esquivel-Avila, JA. 2011. Dynamic analysis of a nonlinear Timoshenko equation. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2011). Hindawi.

Esquivel-Avila, JA. 2013. Global attractor for a nonlinear Timoshenko equation with source terms. ***Mathematical Sciences***, 7(1): 1-8.

Evans, L.C. 1998. Partial differantial equations, Graduate Studies in Mathematics: vol. 19.

Gül, U. 2015. Kirişlerin dinamik davranışlarının kayma deformanyonlu kiriş teorileri ile analizi, Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi.

Han, X., Wang, M. 2009. Global existence and blow-up of solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 71: 5427-5450.

Han, X., Wang, M. 2011. Global existence and blow-up of solutions for nonlinear viscoelastic wave equation with degenerate damping and source. ***Mathematische Nachrichten***, 284(5-6): 703-716.

Hu, Q., Zhang, H. 2007. Blowup and asymptotic stability of weak solutions to wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms. ***Electronic Journal of Differential Equations***, 2007(76): 1-10.

Izaguirrea, R., Fuentesb, R., Miranda, M. M. 2008. Existence of local solutions of the Kirchhoff -Carrier equation in Banach spaces. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 68(11): 3565-3580.

Kalantarov, V., Zelik, S. 2009. Finite-dimensional attractors for the quasi-linear strongly-damped wave equation. ***Journal of Differential Equations***, 247: 1120-1155.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications, John Wiley Sons, India.

Kirchhoff, G. 1883. Vorlesunger über Mechanik. Teubner, Stuttgart.

Koch, H., Lasiecka, I. 2002. Hadamard well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamic elasticity-full von Karman systems. In Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis (pp. 197-216). Birkhauser, Basel.

Lakshmikantham, V., Leela, S. 1969. Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications. Volume I: Ordinary Differential Equations. Academic press.

Levine, H. A., Serrin, J. 1997. Global nonexistence theorems for quasilinear evolution with dissipation. ***Archive for Rational Mechanics and Analysis***, 137: 341-361.

Li, D., Zhang, H., Zhang, X. 2018. Global existence and blow-up of solutions to strongly damped wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms. ***Journal of Computational Analysis and Applications***, 25(6): 999-1013.

Lions, J. L. 1969. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villard.

Liu, J. H. 2003. A first course in the qualitative theory of differential equations. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

Liu, W., Li, G., Hong, L. 2014. General decay and blow up of solutions for a system of viscoelastic equations of Kirchhoff type with strong damping. ***Journal of Function Spaces***, 2014: 1-21.

Medeiros, L. A. 1979. On a new class of nonlinear wave equations. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 69(1): 252-262.

Menzala, G. P. 1980. On global classical solutions of a non-linear wave equation. ***Applicable Analysis***, 10(3): 179-195.

Melouka R. 2018. Existence et non existence de solutions globales pour les équations d'évolution, Doctorat, Université Djilali Liabes.

Menzala, G. P., Pereira, J. M. 1995. On smooth global solutions of Kirchhoff type equation on unbounded domains. ***Differential and Integral Equations***, 8(6): 1571-1583.

Messaoudi, S. A. 2003. Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. ***Mathematische Nachrichten*** , 260(1): 58-66.

Messaoudi, S. A. 2008a. General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 69, 2589-2598.

Messaoudi, S. A. 2008b. General decay of the solution of a viscoelastic equation. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 341: 1457-1467.

Messaoudi, S. A., Said-Houari, B. 2010. Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 365(1): 277-287.

Myint-U, T., Debnath L. 2007. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhauser Boston.

Nishihara, K. 1984a. On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation. ***Tokyo Journal of Mathematics***, 7(2): 437-459.

Nishihara, K. 1984b. Degenerate quasilinear hyperbolic equation with strong damping. ***Funkcial. Ekvac***, 27(1): 125-145.

Ono K. 1997a. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 20(2): 151-177.

Ono K. 1997b. Global existence decay and blowup of solutions for some mildly degenerate non-linear Kirchhoff strings. ***Journal of Differantial Equations***,
137(2): 273-301.

Ouaoua, A., Maouni, M. Baskıda. Exponential growth of positive initial energy solutions for Coupled Nonlinear Klein-Gordon Equations with Degenerate Damping and Source Terms. ***Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática***, 1-9.

Pereira, D. C, Nguyen, H., Raposo, C. A, Maranhao, C. H. 2019. On the solutions for an extensible beam equation with internal damping and source terms. ***Differential Equations Applications***, 11(3): 367-377.

Pereira, D. C, Raposo, C. A, Maranhao, C. H., Cattai A. P. 2021. Global existence and uniform decay of solutions for a Kirchhoff beam equation with nonlinear damping and source term. ***Differential Equations and Dynamical Systems***, 1-14.

Pişkin, E. 2013. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E. 2015a. Existence, decay and blow up of solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms. ***Open Mathematics***, 13(1): 408-420.

Pişkin, E. 2015b. Blow up of positive initial-energy solutions for coupled nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. ***Boundary Value Problems***, 2015(1): 1-11.

Pişkin, E. 2017. Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. 2019. On decay and blow up of solutions for a system of Kirchhoff type equations with damping terms. ***Middle East Journal of Science,*** 5(1): 1-12.

Pişkin, E., Ekinci, F. 2019a. General decay and blowup of solutions for coupled viscoelastic equation of Kirchhoff type with degenerate damping terms. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***, 42(16): 5468-5488.

Pişkin E., Ekinci F. 2019b. Blow up of solutions for a coupled Kirchhoff-type equations with degenerate damping terms. ***Applications Applied Mathematics***, 14(2): 942-956.

Pişkin E., Ekinci F., Zennir K. 2020. Local existence and blow-up of solutions for coupled viscoelastic wave equations with degenerate damping terms. ***Theoretical and Applied Mechanics***, 47(1): 123-154.

Pişkin E., Fidan A. 2017. Blow-up of solutions for a viscoelastic wave equations of Kirchhoff type with arbitrary positive initial energy. ***Electronic Journal of Differential Equations***, 2017(242): 1-10.

Pişkin, E., Irkıl, N. 2016. Blow up positive initial-energy solutions for the extensible beam equation with nonlinear damping and source terms. ***Ser. Math. Inform***, 31(3): 645-654.

Pişkin, E., Yüksekkaya, H. 2018a. Non-existence of solutions for a Timoshenko equations with weak dissipation. ***Mathematica Moravica***, 22(2): 1-9.

Pişkin, E., Yüksekkaya, H. 2018b. Blow up of solutions for a Timoshenko equations with damping terms. ***Middle East Journal of Science***, 4(2): 70 -80.

Pitts, D. R., Rammaha, M. A. 2002. Global existence and non-existence theorems for nonlinear wave equations. ***Indiana University Mathematics Journal***, 51: 1479-1509.

Pohozaev, S. I. 1975. On a class of quasilinear hyperbolic equations. ***Mathematics of the USSR-Sbornik***, 25(1): 145.

Polat, N. 2005. Doğrusal olmayan parobolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu , Doktora Tezi, Dicle Ünivesitesi.

Rammaha, M.A., Sakuntasathien, S. 2010. Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 72(5): 2658-2683.

Said-Houari, B., Messaoudi, S. A., Guesmia, A. 2011. General decay of solutions of a nonlinear system of viscoelastic wave equations. ***Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA***, 18(6): 659-684.

Staruss W. A. 2007. Partial Diferential Equations: An Introduction, 2nd Edition, John Wiley Sons.

Xiao, S., Shubin, W. 2019. A blow-up result with arbitrary positive initial energy for nonlinear wave equations with degenerate damping terms. ***Journal of Partial Differential Equations***, 32(2): 181-190.

Yamada, Y. 1987. Some nonlinear degenerate wave equations. ***Nonlinear Analysis:Theory, Methods Applications***, 11(10): 1155-1168.

Yamazaki, T. 1988. On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations, ***Funkcial Ekvac.***, 31: 439-457.

Yang, Z., Ding, P., Li, L. 2016. Longtime dynamics of the Kirchhoff equations with fractional damping and supercritical nonlinearity, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 442(2): 485-510.

Ye, Y. 2016. Global existence and energy decay for a coupled system of Kirchhoff type equations with damping and source terms. ***Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series***, 32(3): 731-738.

Yusuf, O. 2018. On models of Kirchhoff equations with damping terms: Existence results and asymptotic behaviour of solutions. (Master's thesis, University of Cape Town)

Zeng, S. 2004. Nonlinear Evolution Equations. CRC Press.

Zennir, K. 2013. Growth of solutions to system of nonlinear wave equations with degenerate damping and strong sources. ***Journal Nonlinear Analysis and Application***, 2013:1-11.

Woinowsky-Krieger, S. 1950. The effect of axial force on the vibration of hinged bars. ***Journal of Applied Mechanics***, 17: 35-36.

Wu, S. T. 2011. General decay of solutions for a viscoelastic equation with nonlinear damping and source terms. ***Acta Mathematica Scientia***, 31(4): 1436-1448.

Wu, S. T. 2013. General decay of solutions for a nonlinear system of viscoelastic wave equations with degenerate damping and source terms. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 406(1): 34-48.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma EKİNCİ

Eğitim Derecesi	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans:	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği	2009
Yüksek Lisans:	University of Trieste Informatics (Erasmus Programı)	Eylül,2007-Şubat,2008
Lisans:	Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü	2006
Lise:	Pazarcık Lisesi	2000

İş Deneyimi

- Keysoft Yazılım Hizmetleri - Analitik Uygulama Danışmanı (Ocak,2010 - Mart,2014)
- Smartiks Yazılım Hizmetleri - Analitik Uygulama Danışmanı (Haziran,2009 - Aralık,2009)
- Kültür Dershaneleri - Matematik Öğretmeni (Aralık,2005 - Ağustos,2007)

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Fatma EKİNCİ
ÖĞRENCİ NO	17804503
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Doktora
TEZ KONUSU	Dejenere Sönüm Terimli Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	134
BENZERLİK ORANI	%21
RAPORLAMA TARİHİ	26/07/2021

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 134 sayfalık kısmına ilişkin, 26/07/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 21 'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Fatma EKİNCİ

../../2021 Doc.Dr. Erhan PİŞKİN **Tez Danışmanı**	../../2021 Dr. Öğr. Üyesi Arife ATAY **Anabilim Dalı Başkanı V.**

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.