ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NÖTRİNO OSİLASYONLARINDA KUANTUM KORELASYONLARI

Özgür DEMİRKAP

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Özgür DEMİRKAP tarafından hazırlanan **"Nötrino Osilasyonlarında Kuantum Korelasyonları"** adlı tez çalışması 05/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. İsmail TURAN
Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Deniz YILMAZ
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

05/12/2018



Özgür DEMİRKAP

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NÖTRİNO OSİLASYONLARINDA KUANTUM KORELASYONLARI

Özgür DEMİRKAP

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Nötrino çeşni özdurumları kütle özdurumlarına üniter bir karışım matrisiyle bağlıdır ve nötrinolar bir çeşniden diğerine kuantum mekaniksel salınım yapmaktadırlar. Nötrino osilasyonlarının kuantum mekaniksel özelliklerinin daha iyi anlaşılması amacıyla bu çalışmada iki çeşnili, üç çeşnili haller ve ayrıca steril nötrinoların da hesaba katıldığı dört çeşnili durumlar için nötrino osilasyonları kuantum korelasyonlar cinsinden incelenmiştir. Bu bağlamda, kuantum bilişimde dolanıklık ve ötesindeki kuantum korelasyonları araştırmak üzere kullanılan Bell-CHSH eşitsizliği ihlali, von Neumann entropisi, konkürans, geometrik diskort ve teleportasyon sadakati ölçümleri aracılığıyla iki çeşnili durum için nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı ve kuantum korelasyonları hesaplanmıştır. Ayrıca iki çeşnili, üç çeşnili ve dört çeşnili durumlar için nötrino osilasyon olasılıkları ve von Neumann entropileri Mathematica programı yardımıyla çizdirilerek incelenmiştir.

Aralık 2018, 89 sayfa

Anahtar Kelimeler: nötrino, nötrino osilasyonları, steril nötrino, kuantum korelasyon, dolanıklık, Bell-CHSH eşitsizliği, von Neumann entropisi, teleportasyon sadakati, konkürans, kuantum diskort, geometrik diskort.

ABSTRACT

Master Thesis

QUANTUM CORRELATIONS IN NEUTRINO OSCILLATIONS

Özgür DEMİRKAP

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Neutrino flavor eigenstates are connected to the mass eigenstates through a unitary mixing matrix. In this thesis, in order to better understand the quantum mechanical aspects of the neutrino oscillations related quantum correlations in two, three flavor cases as well as the role of a sterile neutrino have been invastigated. In this context, the well-known from the field of quantum information are used the violation of the Bell-CHSH inequality, the von Neumann entropy, the concurrance, geometric discord and teleportation fidelity mesurements calculations for the mode entanglement and quantum correlations in two flavor neutrino oscillations have been done. In addition for three and four flavor cases the neutrino oscillations probabilities and von Neumann entropies are calculated and also with the help of Mathematica software their graphs are presented.

December 2018, 89 pages

Key Words: neutrino, neutrino oscillations, sterile neutrino, quantum correlations, entanglement, Bell-CHSH inequality, concurrance, teleportation fidelity, von Neumann entropy, quantum discord, geometric discord.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca bilgi ve önerileriyle katkıda bulunan, destek ve güvenini bir an olsun esirgemeyen, tez konusunu seçerken isteklerimi göz önünde bulundurup her aşamasında çalışmalarıma ışık tutan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER'e (Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı Öğretim Üyesi), tez çalışmam süresince soru ve sorunlarıma önerdiği çözümlerle çalışmalarıma destek veren hocam sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi), çalışmalarımı şekillendirmemde yol gösteren arkadaşım Arş. Gör. Hasan Özgür ÇILDIROĞLU'na (Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı), çalışmam süresince yardımlarını eksik etmeyen arkadaşım E. Uzay KARAKAYA'ya ve öğrenim hayatım boyunca büyük bir emek ve sabır göstererek maddi ve manevi destek olan annem Gülümser DEMİRKAP ve babam Kemal DEMİRKAP'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

Özgür DEMİRKAP
Ankara, Aralık 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK ..... **i**

ÖZET ..... **ii**

ABSTRACT ..... **iii**

TEŞEKKÜR ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **vii**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **x**

ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **xi**

1. GİRİŞ **1**

2. NÖTRİNO OSİLASYONLARI **5**

2.1 Nötrinolar **5**

2.2 İki Çeşnili Durum için Nötrino Osilasyonu **9**

2.3 Üç Çeşnili Durumlar için Nötrino Osilasyonu **13**

2.4 Steril Nötrinonun da Hesaba Katıldığı Hal için Nötrino Osilasyonu **18**

2.5 Nötrino Osilasyon Deneyleri **21**

2.5.1 Atmosferik nötrino deneyleri **23**

2.5.2 Hızlandırıcı deneyleri (Long Baseline Accelarator Experiments) **24**

2.5.3 Reaktör Deneyleri **25**

2.5.4 Güneşsel nötrino deneyleri **26**

2.5.5 Nötrino deneylerinin sonuçları ve gözlenen parametreler **27**

3. KUANTUM KORELASYONLARI **29**

3.1 Kuantum Mekaniğinde Durum Kavramı **29**

3.2 Dolanıklık Ölçümleri **33**

3.2.1 Bell-CHSH eşitsizliği **33**

3.2.2 Von Neumann Entropisi 38

3.2.3 Konkürans 38

3.2.4 Teleportasyon Sadakati 40

3.3 Kuantum Korelasyon Ölçümleri 42

3.3.1 Kuantum Diskort 42

4. NÖTRİNO OSİLASYONLARININ KUANTUM KORELASYONLARI AÇISINDAN İNCELENMESİ 47

4.1 İki Çeşnili Durumda Kuantum Korelasyonları 47

4.1.1 Bell-CHSH eşitsizliği ihlaliyle dolanıklık ölçümü 51

4.1.2 Von Neumann entropisiyle dolanıklık ölçümü 54

4.1.3 Konkürans ile dolanıklık ölçümü 56

4.1.4 Teleportasyon sadakati ile dolanıklık ölçümü 59

4.1.5 Geometrik diskort ile kuantum korelasyonların ölçümü 60

4.2 Üç Çeşni Durumlu Nötrino Osilasyonları İçin Kuantum Korelasyonları 61

4.3 Steril Nötrinonun da Hesaba Katıldığı Hal için Nötrino Osilasyonlarının Kuantum Korelasyonları 66

5. SONUÇ 70

KAYNAKLAR 75

EKLER 80

EK 1 Grafiklerin Mathematica Kodları 81

EK 2 Bell-CHSH eşitsizliği hesabı 86

EK 3 Von Neumann entropisi hesabı 87

EK 4 Korelasyon Matrisinin çıkartılışında kullanılan matrisler 88

EK 5 İndirgenmiş yoğunluk matrislerinin elde edilişi 89

EK 6 Konkürans ifadesinin saf durumlar için türetilişi 90

ÖZGEÇMİŞ 91

SİMGELER DİZİNİ

$c = 1$	ışık hızı
ν	Nötrino
$\hbar = 1$	Planck sabiti
n	Nötron
e^-	Elektron
e^+	Pozitron
m	Kütle
$\bar{\nu}$	Antinötrino
μ	Müon
p^+	Proton
π^+	pozitif yüklü pi mezonu (pion)
π^-	negatif yüklü pi mezonu (pion)
π	pi sayısı
$\vec{p}$	momentum vektörü
L	menzil (nötrinonun aldığı yol)
U	üniter karışım matrisi
U_{PMNS}	Pontecorvo-Naki-Nakagawa-Sakata üniter karışım matrisi
θ	karışım açısı
Δm^2	kütle kare farkı
δ	karışım matrisi fazı
ρ	yoğunluk işlemcisi
$\mathcal{H}$	Hilbert uzayı
$\|.\rangle$	Hilber uzayında tanımlı durum vektörü
$\otimes$	tensörel çarpım
σ	Pauli matrisi
Tr	iz işlemi

$\vec{x}$	konum vektörü
$\|\Psi^{\pm}\rangle$,$\|\varphi^{\pm}\rangle$	Bell durumları
$\vec{S}$	Spin
s	spin kuantum sayısı
T	korelasyon matrisi
W	ölçüm operatörü
I	birim matris
S	Von Neumann entropisi
C	Konkürans
F	Sadakat
E	dolanıklık oluşumu
P	Olasılık
ρ_{cc}	klasik-korele durum
ρ_{qc}	kuantum-klasik durum
ρ_{cq}	klasik-kuantum durum
H	Shannon entropisi
$\|.\|$	Hilbert-Schmidt normu
D_G	geometrik diskort
$\delta(\rho)$	ρ durumunun kuantum diskortu
P_{sur}	yaşama olasılığı
P_{osc}	osilasyon olasılığı

Kısaltmalar

Ar	Argon
CHSH	Clauser, Horne, Shimony ve Holt
CKM	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
Cl	Klor

CP	yük-parite eşleniği
CPT	yük-parite-zaman
CQ	kuantum-klasik
DONUT	Direct Observation of the Nu Tau
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen
Ga	Galyum
GALLEX	Gallium Experiment
Ge	Germanyum
GNO	Gallium Neutrino Observatory
IMB	Irvine-Michigan-Brookhaven
KamLAND	Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector
KEK	Kō Enerugī Kasokuki Kenkyū Kikō
K2K	KEK to Kamioka
LSND	Liquid Scintillating Neutrino Detector
MINOS	Main Injector Neutrino Oscillation Search
OPERA	Oscillation Project with Emulsion Tracking Apparatus
PMNS	Pontecorvo-Naki-Nakagawa-Sakata
RENO	Reactor Experiment for Neutrino Oscillation
SAGE	Soviet-American Gallium Experiment
SK	Super-Kamiokande
SM	Standart Model
SNO	Sudbury Neutrino Observatory
T2K	Tokai to Kamioka

Bu tez çalışmasında Doğal Birim Sistemi ($\hbar = c = 1$) kullanılmıştır.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Standart Model'in temel parçacıkları 6
Şekil 2.2 Kütleli nötrinoların normal ve terslenmiş hiyerarşisi 9
Şekil 2.3 İki çeşnili durumda elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon grafiği 13
Şekil 2.4 Üç çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon grafiği 18
Şekil 2.5 Dört çeşnili durum için nötrino kütle hiyerarşisi 19
Şekil 2.6 Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon grafiği 21
Şekil 3.1 Bell-CHSH eşitsizliğinde spin ölçüm eksenlerinin yönelimleri 35
Şekil 4.1 İki çeşnili durum için elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyonu ve bire boylandırılmış entropi grafiği 55
Şekil 4.2 Elektron nötrinosunun entropi grafiği 56
Şekil 4.3 Üç çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği 64
Şekil 4.4.a. Elektron nötrinosunun, b. Müon nötrinosunun, c. Tau nötrinosunun entropi grafikleri 66
Şekil 4.5 Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği 66
Şekil 4.6.a. Elektron nötrinosunun, b. Müon nötrinosunun, c. Tau nötrinosunun, d. Steril nötrinonun entropi grafikleri 67

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Nötrino osilasyon deneylerinin sonuçları 28
Çizelge 2.2 Gözlenen Parametrelerin en güncel değerleri 28

1. GİRİŞ

Ölçme, fiziksel bir durum hakkında bilgi edinme eylemidir. Bilim tarihine bakıldığında 20. yüzyıla gelene kadar fiziksel sistemlerde nicel sonuçlara dayanan ölçümler kesin olarak gerçekleştirilebilirken, skalalar yeterince küçültülüp evren mikro düzeyde algılanmaya başlanıldığında artık sistemin durumları hakkında yalnızca istatistiksel verilere sahip olunabileceği farkedilmiştir. Klasik sistemlerin durumlarını ölçmek, klasik fiziğin nedensel, belirleyici ve yerel olması sebepleriyle ilkesel olarak sistemi rahatsız etmeden gerçekleştirilebilir. Örneğin, klasik bir sistemin gözlenebilirleri olan konum ve momentum hakkında aynı anda kesin bilgi edinilebilir. Fakat, mikro düzeyde fiziksel olayların sonuçları kesin bir şekilde öngörülemeyeceğinden yalnızca istatistiksel bilgilere ulaşmak mümkün olur ve gözlenebilirler hakkında tüm ölçüm sonuçları topluca ele alındığında ancak ortalama bir sonuç bulunabilir. Kuantum mekaniğinde, sistemin durumu kompleks Hilbert uzayında tanımlı bir dalga fonksiyonudur ve ölçme işlemi yine bu uzayda iç çarpım ile tanımlıdır. Kuantum mekaniksel bir sistemin durumlarını ölçebilmek için laboratuvarlarda özdeğerleri reel olarak ölçülebilen ve fiziksel gözlenebilirlere karşılık gelen Hermitsel işlemcilere ihtiyaç duyulur. Niels Bohr ve Werner Heisenberg tarafından 1925-1927 yılları arasında kuantum mekaniğinin kuralları konularak çerçevesi çizilmiştir. Kopenhag Yorumu adı verilen kuantum mekaniğinin değişmez özellikleri olan bu kriterler atom ve atom altı düzeyde ölçüm yapmanın sistemin durumunu öngörülemez şekilde değiştireceğini söyler.

Kuantum mekaniğinde, birden fazla parçacıklı sistemlerin durumu, ayrık durumların lineer süperpozisyonları ya da tensörel çarpımları olarak betimlenir. Bu bağlamda, tek bir tensörel çarpımla ifade edilemeyen kuantum mekaniksel durumlar dolanık durumlar olarak tanımlanırlar. Klasik paradigmada karşılığı olmayan dolanıklığın en bilindik örneği, 1935 yılında Einstein, Podolsky ve Rosen tarafından ortaya konulan ve literatüre "EPR paradoksu" olarak geçmiş çalışmadır (Einstein vd. 1935). Bu çalışmada Einstein, Podolsky ve Rosen kuantum mekaniğinin yerel olmayan (paradoksal) etkileşmelerle tamamlanamayacağından yola çıkarak, bir dizi saklı değişkenlerle teorinin modifiye edilmesi gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Bunun üzerine kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumunu destekleyen bilim insanları (Schrödinger, Bohr, Heisenberg vb.)

üstüste yayınladıkları makalelerle kuantum mekaniğinin işleyişinin, yerel ve determinist kuantum mekanikten farklarını öne çıkararak Kopenhag yorumunu sağlamlaştırmışlardır. EPR makalesinde, kuantum mekaniğinin Kopenhag yorumunun EPR'de tanımlanan fiziksel gerçeklik kavramına uymadığını kanıtlamak için bir düşünce deneyi önerilmiştir. Ancak önerilen deney, kuantum mekaniksel sistemler için kolay uygulanabilir olmadığından David Bohm, spinlere uygulanabilecek ve ölçümü daha basit olan yeni bir düşünce deneyi önermiştir (Bohm 1952). Ardından, 1964 ve 1966 yıllarında yayınladığı iki makalesiyle John S. Bell, yerel ve deterministik saklı değişken modellerle kuantum mekaniği arasında test imkanı veren ve literatürde Bell Eşitsizlikleri olarak bilinen eşitsizlikleri türetmiştir (Bell 1964, 1966). Bell eşitsizlikleri varsayımsal yerel ve determinist kuantum sistemlerde olası ölçüm sonuçlarının ortalaması için bir sınır değer getirir. Bell eşitsizliğinin geliştirilmiş bir sürümü 1969 yılında, Clauser, Horne, Shimony ve Holt tarafından (CHSH eşitsizliği) ortaya konulmuştur (Clauser vd. 1969). Ayrıca CHSH eşitsizliği, araştırmacılara kuantum mekaniği ile yerel saklı değişken modeller arasında deneysel olarak sınama imkanı sağlamaktadır. Bu tarihten günümüze dek yapılan tüm deneyler yerel olmayan etkileşmeleriyle birlikte kuantum mekaniğini kusursuz bir şekilde doğrulamaktadır (Aspect vd. 1982).

Atom ve atom altı parçacıkların 20. yüzyılda gelişen teknoloji ve kuramlarla birlikte daha iyi anlaşılmaya başlanmasıyla, bu parçacıkları ve doğalarını açıklayacak yeni bir modele ihtiyaç duyulmuştur. Bu bağlamda Standart Model, yapılan deneylerle mükemmel derecede uyumlu, gözlenebilen bütün parçacıkları içeren ve kuantum alan teorisiyle söz konusu parçacıkların etkileşmelerini en iyi açıklayan modeldir. Parçacık fiziğini en iyi betimleyen teori olmasına karşın, Standart Model'in; doğanın bir diğer kuvveti olan kütle çekimini içermemesi, evrende esas olarak var olan maddenin antimaddeye neden tamamen baskın olması gibi soruların yanında teorinin kütlesiz kabul ettiği nötrinoların kütleli olduklarının anlaşılması modelin henüz iyi cevaplayamadığı sorular arasındadır. Standart Model'in nötrino kütlelerini içerecek şekilde yeniden düzenlenmesi "sea-saw" mekanizmasıyla, hatta aynı zamanda Standart Model ötesi yeni bir parçacık olan steril nötrinonun da Model'e eklenmesi vb. yollarla mümkün olabilir.

Standart Model'in temel parçacıklarından olan nötrinoların varlığı ilk olarak 1930 yılında Pauli tarafından öngörülmüştür (Pauli 1930). En hafif yüklü lepton olan elektrondan en az milyon kat küçük kütleye sahip olduğu deneysel sonuçlara göre anlaşılmış olan, yüksüz ve sadece zayıf etkileşim yapan nötrinoların, dedektörlerde algılanmaları zor da olsa mümkündür. Doğada, leptonlarla etkileşerek isimlerini etkileştikleri yüklü leptonlardan alan üç nötrino çeşnisi (elektron, müon ve tau nötrinosu) bulunmaktadır.

Yerküreye güneşsel ve atmosferik nötrinolar ulaşmaktadır. Atmosferik nötrinolar; yüksek enerjili kozmik ışınların atmosferdeki atomlarla etkileşerek meydana getirdiği zincirleme reaksiyonlarla oluşan pi mezonlarının bozunumuyla ve bu reaksiyonun ardından gerçekleşen müon (antimüon) bozunumuyla açığa çıkan müon nötrinoları, antinötrinoları ve elektron nötrinoları, antinötrinolarıdır. Nötrino osilasyonları ilk olarak "Güneşsel nötrino problemi"ne bir çözüm olarak önerilmiştir. Bilindiği üzere Güneş'in neredeyse tamamı hidrojen atomlarından oluşmaktadır. Güneş'in merkezindeki yüksek sıcaklık ile hidrojen atomları nükleer füzyon reaksiyonlarına girer. Bu reaksiyonların sonucunda, çeşni olarak yalnızca elektron nötrinoları açığa çıkmaktadır. 1968 yılında Raymond Davis'in güneşsel nötrinoları ölçmesi ile şaşırtıcı sonuçlar ortaya çıkmış, beklenenin yalnızca üçte biri kadar elektron nötrinosu gözlenmiştir (Davis 1968)[1]. Bu sonuç üzerine aynı yıl Pontecorvo, Standart Model'de o güne kadar kütlesiz kabul edilen nötrinoların çok küçük de olsa kütlelerinin olabileceğini ve buna göre çeşni özdurumlarının kütle özdurumlarının karışımı şeklinde yazılabileceğini öne sürüp, daha önce önermiş olduğu nötrino osilasyonları teorisini yeniden gündeme getirmiştir (Pontecorvo 1968). Nötrino osilasyonları, nötrinoların, belirli bir mesafe ve süre sonunda çeşni değiştirme olasılığı sonucu gözlenen bir fenomendir (örneğin, elektron nötrinosunun müon nötrinosuna dönüşmesi gibi). 1998 yılında ilk sonuçlarını açıklayan Super-Kamiokande grubunun atmosferik nötrino deneyi neticesinde gözlenmiştir (Fukuda vd. 1998). Aslına bakılacak olunursa, Davis'in gözlemeyi beklediği elektron nötrinoları, deney düzeneğine ulaşana kadar müon ya da tau nötrinolarına dönüştüğünden kurduğu düzenek bu nötrinoları ölçmesine imkan vermemiştir.

[1] Raymond Davis, Homestake deneyiyle 2002 yılında Nobel ödülü almıştır.

Nötrinoların çok küçük kütlelere sahip olmaları, çeşni özdurumlarının kütle özdurumlarının birer karışımı olması, ve bunların kuantum mekaniksel bir sonucu olarak osilasyon yapmaları, hem pek çok sorunun cevabı olmuş hem de yakın zamanda oldukça yol katedilen bu konuyla ilgili yeni sorular doğurmuştur. Nötrinoların ve nötrino osilasyonlarının iyi anlaşılması ile birlikte, nötrino fiziğiyle alakalı sorunların, ardında başka sorular bırakmayacak şekilde yanıtlanması, fizikteki pek çok problemin çözülebilmesi açısından da önemli bir rol oynayabilir. Bu bağlamda, nötrino osilasyonlarının kuantum mekaniksel özelliklerinin daha iyi anlaşılabilmesi adına dolanıklık ve ötesindeki kuantum korelasyonlar cinsinden ele alınması mümkündür. Nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı ve kuantum korelasyonları, Bell-CHSH eşitsizliği ihlali, von Neumann entropisi, konkürans, geometrik diskort ve teleportasyon sadakati gibi ölçümlerle araştırılabilir (Banerjee vd. 2015, Alok vd. 2016).

Bu çalışmanın ilk kısmında, doğanın temel parçacıkları olan nötrinolar tanıtılarak, standart modelde oynadığı önemli rolün irdelenmesinin ardından, iki çeşnili, üç çeşnili ve -doğada henüz varlığı kesinleşmemiş olmasına rağmen steril nötrino da teoriye eklenerek- dört çeşnili durumlar için nötrino osilasyonları incelenecek ve geçiş olasılıkları hesaplanacaktır. Ayrıca, nötrino osilasyon deneyleri ele alınarak bu güne kadar gerçekleştirilen deneylerde elde edilen fiziksel parametrelerin en iyi uyumlu değerleri verilecektir. Devam eden aşamada, kuantum mekaniğinde durum kavramı ve gözlenebilirler tanıtılarak, kuantum dolanıklık kavramının betimlenmesinin ardından, kuantum korelasyon ölçümleri, yalnızca kuantum durumlarda görülebilen dolanıklık ölçümleri ve bazı ayrılabilir durumların kuantum korelasyonlarının da ölçülebilmesini sağlayan kuantum diskort ölçümleri ele alınacaktır. Son bölümde ise iki çeşnili nötrino osilasyonlarının kuantum korelasyon hesapları gerçekleştirilmek üzere; öncelikle nötrino osilasyonları yalnızca çeşni özdurumlarına bağlı olarak elde edilecek ve ardından kuantum korelasyon ölçümleri kullanılarak iki çeşnili nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı Bell-CHSH eşitsizliği ihlali, von Neumann entropisi, konkürans, teleportasyon sadakati, geometrik diskort ile ölçülecektir. Buna ek olarak, üç çeşnili ve dört çeşnili nötrino osilasyonları von Neumann entropisiyle ölçülerek, elde edilen nötrino osilasyon ve von Neumann entropisi grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizdirilecektir.

2. NÖTRİNO OSİLASYONLARI

Bölümün ilk kesiminde Standart Model ve parçacıkları, nötrinoların modeldeki yeri özetlenecektir. Ardından, beta bozunumunun sonucundaki tuhaflıkla başlayıp yakın zamanda gözlenen osilasyonlara kadar nötrino osilasyonlarının tarihçesi kısaca anlatılacaktır.

Bu bölümün ikinci kısımında tarihsel süreçte olduğu şekilde öncelikle iki çeşnili hal için nötrino osilasyonları incelenecektir. Akabinde üç çeşnili durumda geçiş olasılıkları hesaplanacaktır. Son olarak -varlığı henüz deneylerle kesinleşmemiş olmasına rağmen steril nötrino da teoriye eklenerek- dört çeşnili hal için teori genişletilerek osilasyon olasılıkları hesaplanacaktır.

Son kısımda ise nötrino osilasyon deneyleri ele alınacak ve günümüze kadar gerçekleştirilmiş deneyler kısaca tanıtılacaktır. Ayrıca nötrino osilasyon grafiklerinde ve dördüncü bölümde gerçekleştirilecek olan hesaplamalarda kullanılmak üzere, fiziksel parametrelerin deneylerle ölçülmüş güncel değerleri bölüm sonunda tablo halinde verilecektir.

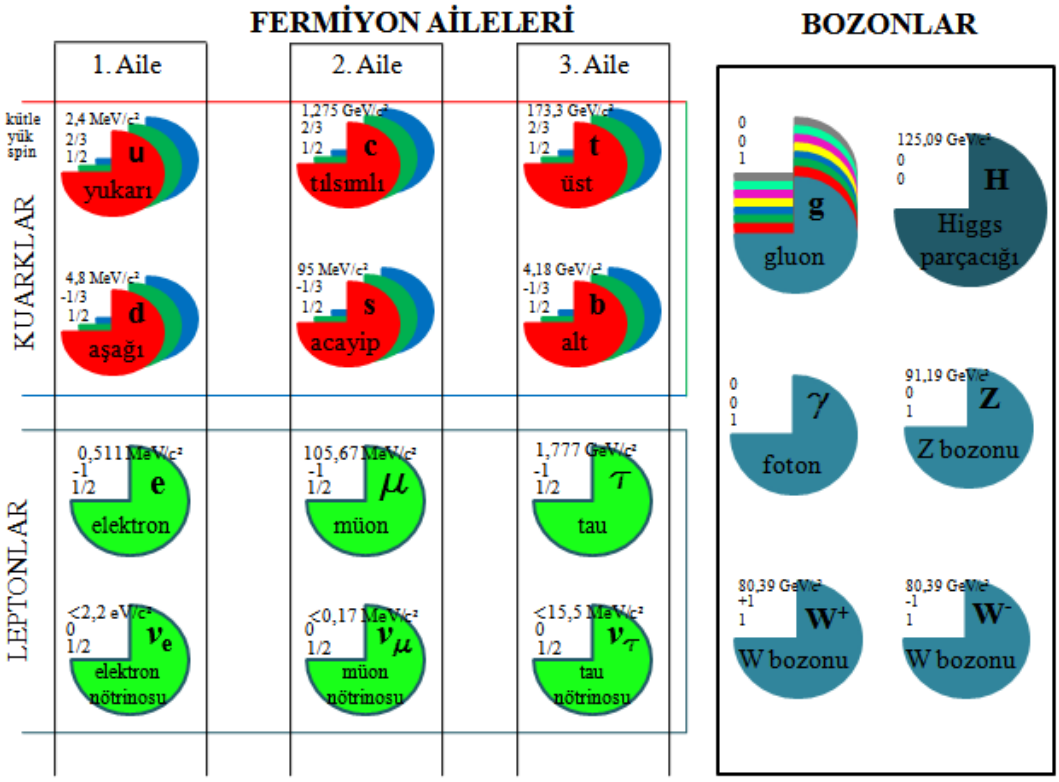
2.1 Nötrinolar

Standart Model günümüzde deneyle mükemmel uyumlu olması ve gözlenebilen bütün parçacıkları bünyesinde barındırmasının yanı sıra kuantum ayar alan teorisiyle temel parçacık etkileşmelerini açıklayan ve üç temel kuvveti (elektromanyetik, güçlü ve zayıf kuvvetleri) içeren bir kuramdır.

Doğanın yapı taşları olan temel parçacıklar Standart Model'de şekil 2.1'de gösterildiği gibi sınıflandırılmıştır. Standart Model'in temel parçacıkları; birbirleriyle etkileşen fermiyonlardan ve bu etkileşmelerin gerçekleşmesini sağlayan bozonlardan oluşur. $\frac{1}{2}$ spinli fermiyonlar; kuarklar ve leptonlar olmak üzere ikiye ayrılır ve tarihte gözlenme sıralarına göre kuarkların ve leptonların I. , II. ve III. aileleri olarak sınıflandırılırlar. Şekil

2.1'de görüldüğü gibi 6 lepton ve bunlara karşılık gelen antiparçacıklarıyla beraber lepton ailesinin toplam 12 parçacığı vardır. Aynı şekilde kuark ailesinin de 12 parçacığı ve her birinin kırmızı, yeşil, mavi olmak üzere üçer renk yükü ile beraber kuark ailesi 36 parçacığa sahiptir.

Tam sayı spinli bozonlar; kuarklar arasındaki güçlü etkileşmeleri sağlayan ve kuarkların 3'er renk yükü olması sebebiyle bu etkileşmelerde ayrı ayrı gözlenen 8 tane gluon, elektromanyetik etkileşmeleri sağlayan foton, zayıf etkileşmelerin aracı bozonları $W^{\pm}$ ve Z bozonu olmak üzere toplam 12 ara bozondan ve Higgs bozonundan oluşur. Dolayısıyla, Standart Model'in toplam 61 tane temel parçacığı vardır.



Şekil 2.1 Standart Model'in temel parçacıkları

Nötrinolar standart modelin lepton ailesinin temel parçacıklarıdır. Zayıf etkileşmeler sonucu oluşur ve gözlenirler. Diğer üç yüklü leptonla etkileşen nötrinolar isimlerini de bu etkileşimlerden alırlar. Elektron ile elektron nötrinosu (ν_e), müon ile müon nötrinosu (ν_μ),

tau parçacığı ile de tau nötrinosu (ν_τ) etkileşime girer. Tüm nötrinolar sol elli (kütlesiz nötrinolar halinde helisitesi -1 olan parçacıklar), antinötrinolar ise sağ elli (kütlesiz nötrinolar halinde helisitesi 1 olan parçacıklar) parçacıklardır. Zayıf etkileştikleri için yüklü leptonlarla yaptıkları etkileşmelerinde nötrinolara W^-, antinötrinolara W^+ bozonları eşlik eder. Nötrinoların birbirleriyle etkileşmelerini ise yüksüz Z bozonu sağlar.

Nötrinoları basitçe anlamak için kısaca tarihçesinden bahsetmek gerekir. 1899 yılında Ernest Rutherford tarafından beta bozunumu keşfedilmiş ve 1914 yılında James Chadwick tarafından beta bozunumunda tek bir değere sahip olması gerektiği düşünülen elektron enerji spektrumunun sürekli olduğu bulunmuştur (Rutherford 1899, Chadwick 1914). Bunun sonucunda enerjinin korunumu yasasının ihlali nedeniyle fizikçiler arasında başlayan tartışmalar; 1930 yılında Wolfgang Pauli'nin beta bozunumunda elektronla birlikte açığa çıkması gereken yüksüz, kütlesiz, 1/2 spinli, sadece zayıf etkileşime giren bir parçacığı önermesiyle bambaşka bir çözüme kavuşmuştur (Pauli 1930). Enrico Fermi tarafından bu parçacığa nötrino adı konulmuştur. Modern terminolojide beta bozunumu (2.1) denklemi ile verilir:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (2.1)$$

Nötrino ilk kez 1956 yılında C.L. Cowan ve F. Reines tarafından gerçekleştirilen Savannah Nehri nükleer reaktörü deneyleri sırasında gözlenmiştir (Cowan ve Reines 1956). Sonradan gözlenen bu parçacığın bir elektron antinötrinosu olduğu lepton korunumu gereği farkedilmiştir.

Nötrino ve antinötrinoların çeşnileri pi mezonunun bozunumu deneylerinin sonuçlarındaki karışıklık sayesinde farkedilmiştir. Teoride henüz yalnızca elektron nötrinosu var olmasına karşın, denklem (2.2) ve (2.3)'te gösterildiği üzere pi mezonu müona bozunduktan sonra çıkan müonun da elektrona dönüşmesi sırasında farkedilen bir başka nötrino araştırılarak bunun bir müon nötrinosu olduğu anlaşılmıştır.

Pion bozunumu:

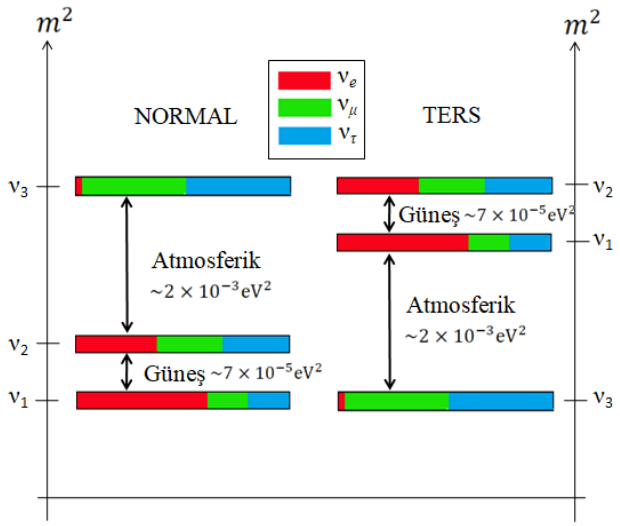
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad , \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \qquad (2.2)$$

Müon bozunumu:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \quad , \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \tag{2.3}$$

Uzun arayışlar ardından tau (τ) parçacığı bulunduktan sonra 2001 yılında tau nötrinosu da bulunmuştur (Kodama vd. 2001). Böylece fermiyonların üçüncü ve son ailesi de tamamlanmıştır.

Nötrino osilasyonları ile ilk olarak Raymond Davis'in 1968 de güneşsel nötrinoları Klor dedektörüyle ölçmesi sonucunda karşılaşılmıştır. Neredeyse tamamı hidrojenden oluşan Güneş'te nükleer füzyon reaksiyonları sonucu elektron nötrinoları açığa çıkar. Davis; Güneş'te yüksek miktarda oluşan elektron nötrinolarını ya da diğer adıyla güneşsel nötrinoları, Homestake madeninde klor atomlarıyla reaksiyona sokarak ölçmüştür (Davis 1968). Elektron nötrinoları klor atomlarıyla tepkimeye girer ve tepkime sonucu elektronlar ile argon atomları açığa çıkar. Ray Davis oluşan argon atomlarının sayısını ölçmüştür. Ancak deney sonucunda beklentisinin yalnızca üçte biri kadar Argon atomu ölçülmüştür. Dolayısıyla, aynı oranda elektron nötrinosunun düzeneğe geldiği sonucuna ulaşmıştır ki bu da Güneş Fiziği ile çelişir. Bunun sebebi ancak 1998 yılında atmosferik nötrino deneyleri neticesinde kanıtlanmış olup nötrinoların çeşni değiştirdiği (örneğin; elektron nötrinosunun müon nötrinosuna dönüştüğü) bulunmuştur. Standart Model'de o güne kadar ölçülememesi sebebiyle kütlesiz kabul edilen nötrinoların çok küçükte olsa kütlelerinin olduğu ve çeşni özdurumlarının kütle özdurumlarının karışımı şeklinde bulunduğu anlaşılmıştır. Bu karışım şekil 2.2'de gösterildiği gibidir. Atmosferik ve güneşsel nötrinoların ölçülmesiyle nötrinoların kütle kare farklarına ve aralarındaki θ karışım açılarının değerlerine çok küçük standart sapmalarla ulaşılmış durumdadır. Buna rağmen nötrinoların kütle hiyerarşisinin normal hiyerarşiye mi yoksa ters hiyerarşiye mi uyduğu henüz anlaşılamamıştır.



Şekil 2.2 Kütleli nötrinoların normal ve terslenmiş hiyerarşisi

Şekil 2.2'de normal ve ters hiyerarşilere göre nötrinoların kütle kare farkları ve hangi oranlarda karıştıkları verilmiştir. Kırmızıyla elektron, yeşil ile müon, mavi renkle tau nötrinosu gösterilerek deneyler sonucu ölçülen karışım oranları gösterilmiştir. Şekilde de belirtildiği gibi en küçük kütleli nötrinonun kütlesi kesin bir değerle belirlenemediği için normal hiyerarşiye göre m_1^2 , ters hiyerarşiye göre m_3^2 en düşük değer kabul edilir.

2.2 İki Çeşnili Durum için Nötrino Osilasyonu

Tau parçacığı ve nötrinosu yakın tarihe kadar gözlenemediğinden, teori ilk olarak 1968 yılında Pontecorvo tarafından elektron ve müon nötrinolarını içerecek şekilde yani yalnızca iki çeşnili hal için geliştirilmiştir.

Davis güneşsel nötrino deneyinde beklediği miktarda elektron nötrinosu gözleyemeyince Pontecorvo nötrinoların da aynı nötral kaonlar gibi osilasyon yaptığı fikrini ortaya atmıştır (Pontecorvo 1968). Pontecorvo'nun fikrine göre deneyde gözlenemeyen elektron nötrinoları müon nötrinolarına dönüşüyor ve Davis'in deney düzeneğinde algılanamıyorlardı. Buna göre nötrinolar kütleli olmalıydı ancak Standart Model'de nötrinolar kütlesiz kabul edilir ve öyle kabul edilmeleri teori açısından da büyük kolaylıktır. Bu nedenle Pontecorvo'nun fikri uzun yıllar destek görmemiştir. Super-

Kamiokande'nin atmosferik nötrino deneyinin sonucunu açıkladığı 1998 yılından bu yana gerçekleştirilen tüm deneylerin sonuçları Pontecorvo'nun teorisini doğrulamıştır.

Nötrinoların çeşni özdurumları, kütle özdurumlarının birer karışımıdır ve nötrinolar bir çeşniden diğerine kuantum mekaniksel salınım yapmaktadırlar. U üniter karışım matrisi olmak üzere çeşni özdurumları kütle özdurumları cinsinden,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{\mathrm{j}} U_{\alpha j}\,|\nu_j\rangle \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilirler. Burada $\alpha = e, \mu, \tau$ olup $|\nu_\alpha\rangle$ lar çeşni özdurumlarını, $j = 1,2,3$ olmak üzere $|\nu_j\rangle$ ler kütle özdurumlarını belirtmektedir. İki çeşnili durum için karışım tek bir parametre (θ karışım açısı) ile şu şekilde yazılır:

$$\begin{pmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_j\\ \nu_k\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Schrödinger denkleminden yararlanarak $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t)\right)$ t = 0 anında $|\nu_j\rangle$ durumunda bulunan nötrinonun kütle özdurumunun t süre sonra zaman evrimi (ħ=1 olmak üzere):

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t}|\nu_j\rangle \tag{2.6}$$

şeklindedir. Bu durumda çeşni özdurumu olan $\nu_\alpha(t)$ aşağıdaki gibi zaman evrimine tabidir:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}\, e^{-iE_j t}|\nu_j\rangle \tag{2.7}$$

t süre sonra ν_α'nın ν_β'ya geçiş olasılığı ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ olmak üzere)

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \left|\langle \nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle\right|^2 \tag{2.8}$$

ile hesaplanır. (2.5) denklemine göre;

$$|\nu_\beta\rangle = -sin\theta|\nu_j\rangle + cos\theta|\nu_k\rangle \tag{2.9}$$

ve (2.5) ile (2.7) denklemlerinden

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = cos\theta\left|\nu_j(t)\right\rangle + sin\theta|\nu_k(t)\rangle \tag{2.10}$$

olduğu görülür. O halde, iki çeşnili durumda başlangıçta (t = 0 anında) $|\nu_\alpha\rangle$ durumunda bulunan nötrinonun t süre $\left|\nu_\beta\right\rangle$ durumuna geçiş olasılığı

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} &= \left|-cos\theta sin\theta e^{-iE_jt} + cos\theta sin\theta e^{-iE_kt}\right|^2 \\ &= 2cos^2\theta sin^2\theta \\ &\quad - cos^2\theta sin^2\theta\left(e^{i(E_k-E_j)t} + e^{-i(E_k-E_j)t}\right) \\ &= sin^2 2\theta \sin^2\frac{(E_k-E_j)t}{2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

olarak elde edilir.

Başlangıçta ν_α çeşni durumunda bulunan bir nötrinonun t süre sonra ν_β çeşni durumuna geçiş olasılığı (2.11) denkleminde olduğu gibi klasik dalgalardakine çok benzer bir salınım yaptığı için bu geçiş olasılığına nötrino osilasyonu denir.

(2.11) denklemini deneylerle ölçülebilen kütle kare farklarına bağlı olarak yazabilmek için aşağıdaki enerji-kütle bağıntısından yararlanılır:

$$E^2 - \left|\vec{p}\right|^2c^2 = m^2c^4 \tag{2.12}$$

Işık hızının bire eşit kabul edildiği durumda bu denklem:

$$\left|\vec{p}\right| = E\sqrt{1-\left(\frac{m}{E}\right)^2} \tag{2.13}$$

halini alır. Nötrino kütlesi m çok küçük olduğundan, Maclaurin seri açılımı $\left(\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}+\ldots\right)$ kullanılarak, E enerjisine ve m_i kütlesine sahip ν_i özdurumunun p_i momentumu:

$$p_i \simeq E - \frac{m_i^2}{2E} \tag{2.14}$$

denklemi ile verilir. Gerçekte enerjilerin sabit olduğunu kabul eden (2.14) denklemi kullanılır ancak nötrinoların kütlesi henüz ölçemediğimiz kadar küçük olup bu parçacıklar ışık hızına çok yakın hızlarda hareket ettikleri için hesabın kolaylığı açısından burada momentumlar sabit kabul edilerek enerji farkı hesaplanacaktır. Aynı nedenle $m \to 0 \Rightarrow |\vec{p}| = \mathrm{E}$ dir. Bu durumda enerjinin kütle kareye bağlı ifadesi için,

$$E_i = |\vec{p}| + \frac{m_i^2}{2|\vec{p}|} = |\vec{p}| + \frac{m_i^2}{2E} \tag{2.15}$$

eşitliği elde edilir. O halde, ν_j ve ν_k özdurumlarının enerji-kütle ilişkisinin:

$$E_k - E_j = \frac{\left(m_k^2 - m_j^2\right)}{2E} = \frac{\left(m_k^2 - m_j^2\right)}{2E} \tag{2.16}$$

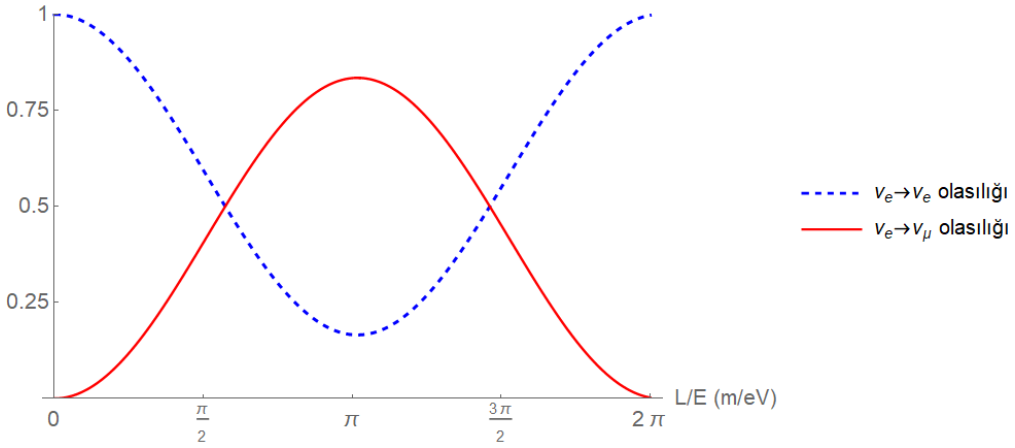
olduğu bulunur. (2.11) denklemindeki geçiş olasılığı sonucunun nötrino kütlelerine bağlı halinin,

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\left(m_k^2 - m_j^2\right)t}{4E} \tag{2.17}$$

şeklinde olduğu görülmektedir. Ayrıca nötrinonun t süre boyunca aldığı yol $z \approx ct$ olduğuna göre menzile bağlı osilasyon olasılığı aşağıdaki gibidir ($z = L$ zira ışık hızı (c) bire eşittir.):

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = sin^2 2\theta sin^2 \frac{\left(m_k^2 - m_j^2\right)L}{4E} \tag{2.18}$$

Denklem (2.18) ile elde edilen osilasyon olasılığı iki çeşnili durum için 0 ile 2π aralığında Mathematica programı yardımıyla çizdirilerek şekil 2.3 ile verilmiştir. Bu grafikte fiziksel parametreler için alınan değerler; $\theta_{12} = 33°$, $\Delta m_{12}^2 = 7.37 \times 10^{-5} eV^2$dir. Şekil 2.3 ile görüldüğü üzere elektron nötrinosunun yaşama olasılığı, müon nötrinosuna osilasyon olasılığının minimum olduğu noktalarda maksimum değerini alır.



Şekil 2.3 İki çeşnili durumda elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon grafiği

2.3 Üç Çeşnili Durumlar için Nötrino Osilasyonu

2001 yılında DONUT deneyinde tau nötrinosu gözlendikten sonra daha önce iki çeşnili durum için geliştirilmiş olan nötrino osilasyon teorisi üç çeşnili hal için genişletilmiştir. Buna göre üç çeşni özdurumu üç kütle özdurumuna üniter U_{PMNS} matrisiyle bağlıdır. Burada PMNS indisi, nötrino osilasyon teorisini ilk ortaya atan Pontecorvo ve üç çeşnili durum için nötrino osilasyon teorisi geliştirilmeden önce kuarkların CKM matrisine benzer şekilde üniter U karışım matrisini oluşturan Maki, Nakagawa ve Sakata anısına, isimlerinin baş harflerini temsil eder (Maki vd. 1962, Pontecorvo 1968).

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{PMNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$i \neq j$ ve $i, j = 1,2,3$ olup $c_{ij} = cos\theta_{ij}$ve $s_{ij} = sin\theta_{ij}$ olmak üzere:

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

matrisi θ_{12}, θ_{13} ve θ_{23} olmak üzere üç açı ve bir δ fazına bağlıdır. Bu matris

$$U_{PMNS} = U(\theta_{23})U(\theta_{13},\delta)U(\theta_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_{32} & \sin\,\theta_{32} \\ 0 & -\sin\,\theta_{32} & \cos\,\theta_{32} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta_{31} & 0 & \sin\,\theta_{31}\,e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\,\theta_{31}\,e^{i\delta} & 0 & \cos\,\theta_{31} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta_{21} & \sin\,\theta_{21} & 0 \\ -\sin\,\theta_{21} & \cos\,\theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

üniter matrislerinin çarpımıyla kurulmuştur.

Üç çeşnili durum için t = 0 anında bir ν_α çeşni özdurumunda bulunan nötrinonun t süre sonra ν_β çeşni özdurumuna geçiş olasılığı ($\alpha,\beta = e,\ \mu,\ \tau$ ve $j,k = 1,2,3$ olmak üzere):

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \left|\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle\right|^2 = \left|\sum_{j,k}\left\langle\nu_j\right|U^\dagger_{j\beta}e^{-iE_kt}U_{\alpha k}\left|\nu_k\right\rangle\right|^2 \qquad (2.22)$$

ifadesi ile hesaplanır.

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \left|\sum_{j,k}U^*_{\beta j}e^{-iE_kt}U_{\alpha k}\langle\nu_j|\nu_k\rangle\right|^2 \qquad (2.23)$$

$\langle\nu_j|\nu_k\rangle = \delta_{jk}$ olduğu kullanılarak osilasyon olasılığı:

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \left|\sum_{j,k}U^*_{\beta j}e^{-iE_kt}U_{\alpha k}\delta_{jk}\right|^2 = \left|\sum_{k}U^*_{\beta k}U_{\alpha k}e^{-iE_kt}\right|^2 \qquad (2.24)$$

olarak elde edilir. Enerji-kütle bağıntısının $E_k - E_j = \frac{(\mathrm{m_k^2}-\mathrm{m_j^2})}{2\mathrm{E}} \equiv \frac{\Delta m^2_{kj}}{2E}$ tanımı kullanılarak osilasyon olasılığının

$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \sum_{j,k}U^*_{\beta k}U_{\alpha k}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}e^{-i\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E}t} \qquad (2.25)$$

denklemi ile verildiği görülür. (2.25) denklemi açık olarak yazıldığında:

$$
\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} &= \left| e^{-iE_1 t} U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* + e^{-iE_2 t} U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* + e^{-iE_3 t} U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* \right|^2 \\
&= |U_{\alpha 1}|^2 \left|U_{\beta 1}\right|^2 + |U_{\alpha 2}|^2 \left|U_{\beta 2}\right|^2 + |U_{\alpha 3}|^2 \left|U_{\beta 3}\right|^2 \\
&+ e^{-i(E_1 - E_2)t} U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} \\
&+ e^{-i(E_1 - E_3)t} U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3} \\
&+ e^{i(E_1 - E_2)t} U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} \\
&+ e^{i(E_1 - E_3)t} U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} \\
&+ e^{i(E_2 - E_3)t} U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^* U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} \\
&+ e^{-i(E_2 - E_3)t} U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

olduğu görülür. (2.26) denkleminde kompleks terimlerin toplamı sonucu (2.25) denklemi;

$$
P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \sum_{j=k} |U_{\alpha k}|^2 \left|U_{\beta k}\right|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re \left\{ U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t} \right\} \tag{2.27}
$$

denklemine eşittir. Özel olarak:

$$
\sum U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* = \sum U_{\beta k}^* U_{\alpha k} \sum U_{\beta j} U_{\alpha j}^* = \left(\delta_{\alpha \beta}\right)^2 = \delta_{\alpha \beta} \tag{2.28}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\sum U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* &= \left(\sum_{k=j} + \sum_{k>j} + \sum_{k<j} \right) U_{\beta k}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \\
&= \sum_{k=j} |U_{\alpha k}|^2 \left|U_{\beta k}\right|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re \left\{ U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right\}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

ifadeleri (2.27) denklemini düzenlemek amacıyla kullanıldıklarında;

$$
\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} &= \delta_{\alpha \beta} - 2 \sum_{k>j} \Re \left\{ U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \right\} \\
&+ 2 \sum_{k>j} \Re \left\{ U_{\alpha k} U_{\beta k}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t} \right\}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

denklemi elde edilir. Bu ifadede $e^{-ix} = cosx - isinx$ eşitliğiyle reel ve sanal kısımlar ayrı olarak yazılır:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{k>j} \Re\left\{U_{\alpha k} U^*_{\beta k} U^*_{\alpha j} U_{\beta j}\right\}$$
$$+ 2\sum_{k>j} \Re\left\{U_{\alpha k} U^*_{\beta k} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} \cos\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} t\right)\right\}$$
$$+ 2\sum_{k>j} \Im\left\{U_{\alpha k} U^*_{\beta k} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} t\right)\right\} \quad (2.31)$$

$cos2x = 1 - 2sin^2 x$ bağıntısı kullanılarak osilasyon denklemi

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{k>j} \Re\left\{U_{\alpha k} U^*_{\beta k} U^*_{\alpha j} U_{\beta j}\right\} \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} t\right)$$
$$+ 2\sum_{k>j} \Im\left\{U_{\alpha k} U^*_{\beta k} U^*_{\alpha j} U_{\beta j}\right\} \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} t\right) \quad (2.32)$$

olarak elde edilir. CP (yük parite eşleniği) simetrisi bozulmadığı sürece

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta} \quad (2.33)$$

olması gerekir. CPT korunumu varsayıldığında ise

$$P_{\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta} = P_{\nu_\beta \to \nu_\alpha} = \sum_{j,k} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{-i\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} t} \quad (2.34)$$

olup (2.32) denkleminde α ile β nın yerleri değiştirilerek,

$$P_{\nu_\beta \to \nu_\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - 4\sum_{k>j} \Re\left\{U_{\beta k} U^*_{\alpha k} U^*_{\beta j} U_{\alpha j}\right\} \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} t\right)$$
$$+ 2\sum_{k>j} \Im\left\{U_{\beta k} U^*_{\alpha k} U^*_{\beta j} U_{\alpha j}\right\} \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} t\right) \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilir. (2.35) denklemi ile (2.32) karşılaştırıldığında $U \to U^*$ değiştirmesinin yapılmış olduğu hemen görülür. Kompleks sayıların sanal kısımları bu değiştirme altında işaret değiştireceğinden,

$$P_{\nu_\beta \to \nu_\alpha} = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{\mathrm{k}>j} \Re\left\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\right\}\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}t\right) - 2\sum_{\mathrm{k}>j} \Im\left\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\right\}\sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}t\right) \tag{2.36}$$

bulunur. CP invaryansı varsayıldığında sanal kısım sıfır olmalıdır yani U_{PMNS} matrisinde δ faz terimi bulunmamalıdır.

Denklem (2.32) ile elde edilen nötrinolar arası geçiş olasılığının, denklem (2.36) ile verilen antinötrinolar arasındaki osilasyona eşit olması için sanal kısmın sıfır olması gerektiği açıkça görülür. O halde t anında ν_α durumundan ν_β durumuna geçiş olasılığı:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{\mathrm{k}>j} \Re\left\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\right\}\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}t\right) \tag{2.37}$$

denklemine eşittir. (2.37) denklemine göre t anında nötrinonun başka bir çeşniye osilasyon yapma olasılığı ($\alpha \neq \beta$)

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = -4\sum_{k>j} \Re\left\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\right\}\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right) \tag{2.38}$$

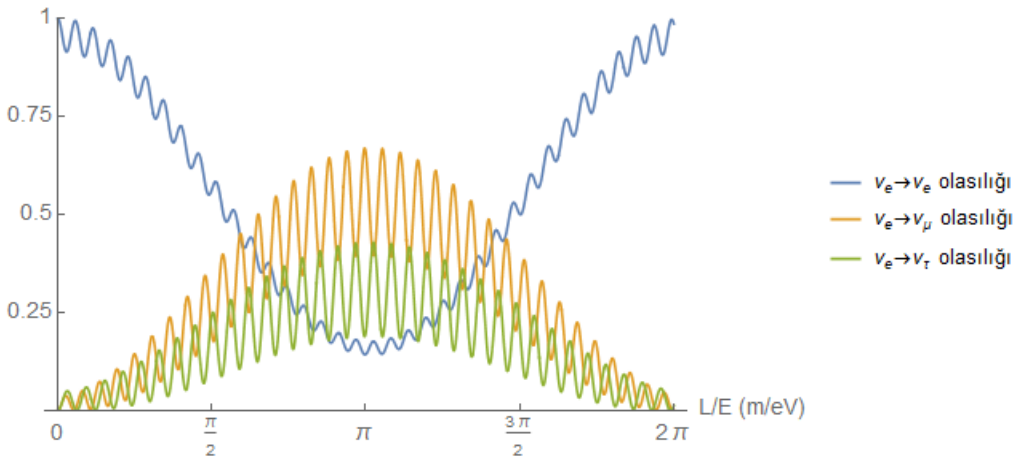
olup ν_α durumunda kalma olasılığı başka bir deyişle yaşama olasılığı ($\alpha = \beta$)

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha} = 1 - 4\sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^2 \left|U_{\alpha j}\right|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right) \tag{2.39}$$

olduğu görülür. Burada L, t sürede nötrinonun aldığı yol olup $c = 1$ için $t \sim L$ dir.

Dikkat edilirse üç çeşnili durumlarda $\alpha \neq \beta$ için elde edilen osilasyon denklemi; denklem (2.38), iki çeşnili durum için elde edilen (2.18) denklemine eşittir. (2.38) denkleminde (2×2) üniter matris elemanları yerine yazıldığında $-\sin^2\theta\cos^2\theta = -\frac{1}{4}\sin 2\theta$ elde edilir.

Denklem (2.37) ile elde edilen osilasyon olasılığı üç çeşnili durum için 0 ile 2π aralığında Mathematica programı yardımıyla çizdirilerek şekil 2.3 ile verilmiştir. Bu grafikte fiziksel parametreler için alınan değerler: $\theta_{12} = 33°$, $\theta_{23} = 40.7°$, $\theta_{13} = 8.43°$, $\Delta m^2_{12} = 7.37 \times 10^{-5} eV^2$, $\Delta m^2_{32} \cong \Delta m^2_{31} = 2.56 \times 10^{-3} eV^2$ olup nötrino osilasyon deneyleriyle gözlenebilmiş en iyi uyumlu değerlerdir ve kesim 2.5.5'de nötrino deneylerinin sonuçları ve deneyle en iyi uyum gösteren fiziksel parametreler çizelge 2.2 ile özetlenmiştir. Bu parametrelere göre şekil 2.4 ile görüldüğü üzere elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon olasılığı, tau nötrinosuna osilasyon olasılığından fazladır. Elektron nötrinosunun yaşama olasılığı osilasyon olasılıklarının minimum olduğu noktalarda maksimum değerine ulaşır. Hemen hemen hiçbir yerde osilasyon ve yaşama olasılıklarının sıfır ya da bir değerlerini almadıkları görülür. Nötrino osilasyon deneylerine göre de daima osilasyon olasılığı vardır ve dolayısıyla osilasyon olasılığının sıfıra, yaşama olasılığının bire eşit olduğu bir durum söz konusu değildir.

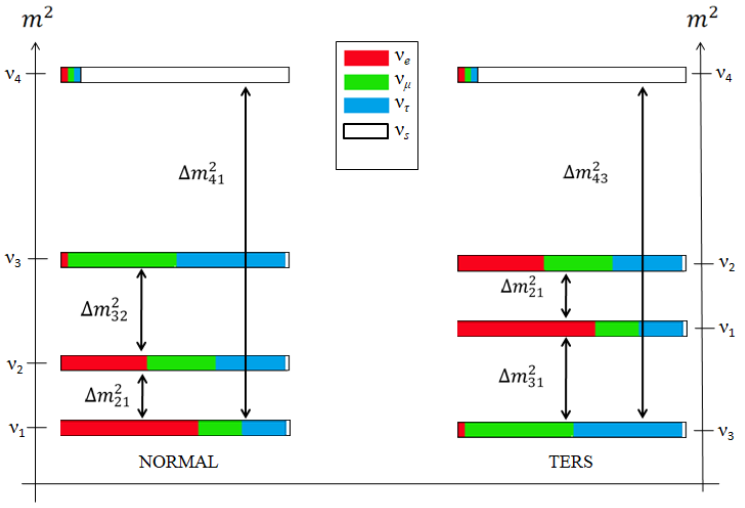


Şekil 2.4 Üç çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon grafiği

2.4 Steril Nötrinonun da Hesaba Katıldığı Hal için Nötrino Osilasyonu

1998 yılından günümüze kadar osilasyon yaptıkları kesin olarak gözlenilmiş olmasına rağmen nötrinolar, Standart Model'de hala kütlesizdir. Teoriye sağ elli (helisitesi 1 olan) ve diğer nötrinolara göre fazlasıyla ağır (diğer üç nötrinoyla arasındaki kütle kare farkı yaklaşık 1 eV^2 olan) bir başka nötrino "steril nötrino" eklenmesi Standart Model'deki bu probleme çözüm olabilir. Steril nötrino diğer üç nötrinonun yaptığı şekilde zayıf etkileşim

gerçekleştirmez ve yüklü leptonlarla etkileşmez bu nedenle deneylerle doğrudan gözlenemez. Ancak nötrino osilasyonları sırasında dolaylı olarak gözlenebilir. Steril nötrinonun teoriye eklendiği durum için nötrinoların kütle hiyerarşisi şekil 2.5'teki gibidir. Dördüncü kütle özdurumu kendisine en yakın kütle özdurumundan neredeyse 1000 kat daha ağır olduğu için normal ve ters hiyerarşilerin ikisinde de en üstte yer alır.



Şekil 2.5 Dört çeşnili durum için nötrino kütle hiyerarşisi

Nötrino osilasyon teorisi; dördüncü nötrino çeşnisi olan steril nötrino (ν_s) ve dördüncü kütle özdurumu (ν_4) ile genişletilerek steril nötrinonun teoriye eklendiği hal için nötrino osilasyonları incelenecektir. Buna göre nötrino çeşni özdurumları, kütle özdurumlarına şu şekilde bağlıdır:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} = U_{(4\times4)} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

(2.40) denklemindeki üniter $U_{(4\times4)}$ matrisi, U_{PMNS} matrisinin bağlı olduğu θ_{12}, θ_{13} ve θ_{23} açıları ve δ_{13} fazının yanında teoriye eklenecek olan θ_{14}, θ_{24} ve θ_{34} açıları ile δ_{14} ve δ_{24} fazlarına da bağlıdır. Nötrinoların dört çeşnili hali için 4×4 üniter karışım matrisi:

$$U_{(4\times4)} = U(\theta_{34})U(\theta_{24}, \delta_{24})U(\theta_{14}, \delta_{14})U(\theta_{23})U(\theta_{13}, \delta_{13})U(\theta_{12}) \tag{2.41}$$

ile verilir. (2.41) denklemindeki $U(\theta_{34})$, $U(\theta_{24},\delta_{24})$ ve $U(\theta_{14},\delta_{14})$ matrisleri;

$$U(\theta_{34}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\,\theta_{43} & \sin\,\theta_{43} \\ 0 & 0 & -\sin\,\theta_{43} & \cos\,\theta_{43} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

ile

$$U(\theta_{24},\delta_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\,\theta_{42} & 0 & \sin\,\theta_{42}\,e^{-i\delta_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\,\theta_{42}\,e^{i\delta_{24}} & 0 & \cos\,\theta_{42} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

ve

$$U(\theta_{14},\delta_{14}) = \begin{pmatrix} \cos\,\theta_{41} & 0 & 0 & \sin\,\theta_{41}\,e^{-i\delta_{14}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\,\theta_{41}\,e^{i\delta_{14}} & 0 & 0 & \cos\,\theta_{41} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

şeklindedir. (2.41) denklemindeki $U(\theta_{23})$, $U(\theta_{13},\delta_{13})$ ve $U(\theta_{12})$ matrislerinin çarpımı (2.20) denklemiyle verilen U_{PMNS} matrisine eşittir.

Dört çeşnili durum için t = 0 anında bir ν_α çeşni özdurumunda bulunan nötrinonun t süre sonra ν_β çeşni özdurumuna geçiş olasılığı ($\alpha,\beta = e,\ \mu,\ \tau,\ s$ ve $j,k = 1,2,3,4$ olmak üzere):

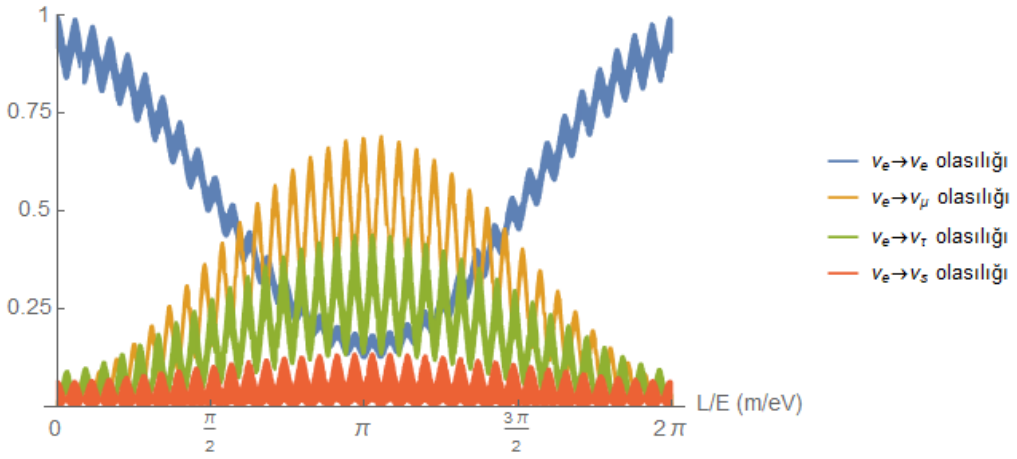
$$P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \left|\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle\right|^2 = \left|\sum_{j,k}\left\langle\nu_j\left|U_{j\beta}^{\dagger}e^{-iE_kt}U_{\alpha k}\right|\nu_k\right\rangle\right|^2$$

$$= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{k>j}\Re\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\}\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right) \tag{2.45}$$

ile hesaplanır. Bir önceki kesim olan üç çeşnili durumda osilasyon olasığı denklem (2.37) olarak elde edilmişti burada tek fark indis sayısının artması sebebiyle toplam sembolü açıldığında (2.37) denklemine $U_{(4\times4)}$ matrisinin $41,42,43$ indisleriyle üç terim daha eklenecek olmasıdır.

Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon olasılığı $\alpha = e$ olmak üzere

denklem (2.45) kullanılarak 0 ile 2π aralığında Mathematica programı yardımıyla çizdirilmiştir. Şekil 2.6 ile verilen grafikte fiziksel parametreler için alınan değerler; $\theta_{12} = 33°$, $\theta_{23} = 40.7°$, $\theta_{13} = 8.43°$, $\theta_{14} = 8.53°$, $\theta_{24} = 9.8°$, $\theta_{34} = 25.84°$, $\Delta m^2_{12} = 7.37 \times 10^{-5} eV^2$, $\Delta m^2_{32} \cong \Delta m^2_{31} = 2.56 \times 10^{-3} eV^2$, $\Delta m^2_{41} = 0.93\ eV^2$ dir[2]. Şekil 2.6 ile görüldüğü üzere elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon olasılığı, tau nötrinosuna osilasyon olasılığından fazladır. Steril nötrinoya osilasyon olasılığı ise çok düşük olmasına rağmen mümkündür. Hemen hemen hiçbir yerde elektron nötrinosunun yaşama ve osilasyon olasılıkları sıfır ya da bir değerlerini almaz. Elektron nötrinosunun yaşama olasılığı $\frac{L}{E} = \pi$ noktasında müon ve tau nötrinolarına osilasyon olasılığından düşük değerler alırken hiçbir yerde steril nötrinoya osilasyon olasılığından daha küçük değerlere ulaşmamıştır. Üç çeşnili duruma göre kesinsizlikler ve anlık değişimler arasındaki farklar her eğri için artmıştır.



Şekil 2.6 Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon grafiği

2.5 Nötrino Osilasyon Deneyleri

Nötrinoların çok küçük kütlelere sahip olmaları, zayıf etkileşim yapmaları ve yüksüz olmaları sebebiyle deney düzeneklerinde algılanmaları zordur. Bu bağlamda, nötrino osilasyon deneyleri yüklü leptonlardan yararlanılarak gerçekleştirilir. Nötrinolar

[2] θ_{12}, θ_{23}, θ_{13}, Δm^2_{12}, Δm^2_{32} ve Δm^2_{31} değerleri kesim 2.5.5'de verilen çizelge 2.2'den alınmıştır. θ_{14}, θ_{24}, θ_{34} ve Δm^2_{41} değerleri ise (Tabrizi, 2015) tez çalışmasından alınmıştır.

ölçülmek üzere belli elementlerle tepkimeye sokularak yüklü leptonların açığa çıkması sağlanır ve söz konusu yüklü leptonlar dedekte edilerek ölçüm gerçekleştirilir. Nötrino osilasyon deneyleri, iki çeşnili durum için elde edilen osilasyon ve yaşama olasılıklarını ((2.38) ve (2.39) denklemlerini) temel alır. Bu deneyler, dedektörle algılanma şekillerine göre ikiye ayrılırlar:

Ortaya çıkma (appearance) deneyleri: Bu tip deneylerde başlangıçta ölçülen nötrino çeşnisiyle, deneyin sonunda gözlenen çeşni farklıdır. Örneğin; başlangıçta müon nötrinosu oluşturulmuş veya dedekte edilmişse belli bir mesafe sonunda elektron ya da tau nötrinosu ölçülerek osilasyon olasılığına bakılır. Dolayısıyla meydana gelme deneyleri ($\alpha \neq \beta$olmak üzere):

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = sin^2 2\theta sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L \tag{2.46}$$

olasılığını kullanır.

Yok olma (disappearance) deneyleri: Bu tip deneylerde ise başlangıçta oluşturulan ya da ölçülen nötrinonun çeşnisiyle, deney düzeneğinin sonunda dedekte edilen nötrino çeşnisi aynıdır. Yani nötrinonun yaşama olasılığını ölçen yok olma deneyleri:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\alpha} = 1 - sin^2 2\theta sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} L \tag{2.47}$$

bağıntısından yararlanır.

Nötrino deneylerinde; θ karışım açısı ile Δm^2 terimlerinin ölçülmesi hedeflenir ve enerji (E) $[GeV]$, menzil (L) $[km]$ cinsinden belirlenir. Dolayısı kütle özdurumlarının kareleri farkı (Δm^2) $[eV^2]$ biriminde ölçülür.

Nötrino osilasyon deneyleri güneşsel, atmosferik, hızlandırıcı ve reaktör deneyleri olmak üzere dörde ayrılırlar. Reaktör nötrino deneylerinde menziller $\sim 1km$ mesafede ve enerjiler $[MeV]$ mertebesindeyken hızlandırıcı nötrino deneylerinde menziller 10^3 km ve üzerinde olup enerjileri $[GeV]$ mertebesindedir.

Tüm nötrino osilasyon deneyleri, θ_{13}'ün çok küçük $(\theta_{13} < 10°)$ olduğunu kesin olarak belirlendikten sonra θ_{12}, θ_{23}, Δm_{12}^2 ve Δm_{23}^2 parametrelerini ölçmeyi amaçlamışlardır.

2.5.1 Atmosferik nötrino deneyleri

Atmosferdeki oksijen ya da nitrojen atomlarıyla etkileşen yüksek enerjili kozmik ışınlar (genellikle protonlar) yüklü pionları meydana getirirler. Pionların bozunumu sonucunda denklem (2.2)'de gösterildiği üzere müon ve müon nötrinoları açığa çıkar. Oluşan müon nötrinoları ile bu reaksiyonun ardından gerçekleşen ve (2.3) denklemiyle verilen müon bozunumuyla ortaya çıkan müon antinötrinoları ve elektron nötrinolarına atmosferik nötrinolar denir. Nötrino osilasyonu ilk kez 1998 yılında Super-Kamiokande deneyiyle atmosferik nötrinolarda gözlenmiştir[3]. Öncesinde gerçekleştirilen IMB ve Kamiokande deneylerinde atmosferik nötrinolar ölçülmüşür. Ancak bu deneylerde teorik olarak ölçülmesi beklenen sonuç denklem (2.2) ve (2.3) görüldüğü üzere iki müona karşın bir elektron ölçülmesi iken bu orandan daha az müon algılanmıştır ve buna atmosferik nötrino anomalisi denilmiştir.

Atmosferik nötrinolar dedekte edilirken R Dünya'nın yarıçapı olmak üzere: $L = 2R\cos\theta$ bağıntısından yararlanılır. Burada θ algılanan nötrinonun dedektörle yaptığı açıdır. Atmosferik nötrinolar meydana gelmelerinin ardından yerküreyi geçerek deney düzeneğine ulaşırlar. Nötrinolar zayıf etkileşim yaptıkları için katettikleri uzun mesafeler ölçüm sonuçlarını değiştirmez. Dünyanın yarıçapıyla kıyaslandığında atmosfer tabakası ince sayıldığından, göz ardı edilerek nötrinonun aldığı yol yerkürenin çapına göre hesaplanır.

Super-Kamiokande (SK) Deneyi: Kamiokande deney düzeneğinde bazı geliştirmeler yapılarak (dedektördeki hedef sayısı 50 kat arttırılarak) 1996 yılında Super-Kamiokande deneyi başlamıştır. 50 kiloton saf suda yüklü akım etkileşimine giren atmoferik nötrinolar

[3] Bu çalışma ile Takaaki Kajita 2015 yılında Arthur B. McDonald ile birlikte Nobel Fizik ödülüne layık görülmüştür.

yüklü leptonlar oluşmasına neden olurlar. Etkileşimden çıkan yüksek enerjili müon ve elektronların Çerenkov ışımasına bakılır. Elektronun suda elektromanyetik sağanak (shower) oluşturması nedeniyle elektronun Çerenkov ışıması bulanıktır. Buna karşın, müonun Çerenkov ışıması net olduğundan dedektöre gelen nötrino çeşnisi rahatlıkla belirlenebilir.

Nötrinoların osilasyon yaptığı Super-Kamiokande deneyinin 1998 yılında yayınladığı ilk sonuçlarla kanıtlanmıştır. SK grubu nötrinoların osilasyon yaptığını kanıtlayan çalışmalarını 2002 yıllarına kadar sürdürmüştür. Alınan ilk sonuçlara yakın değerli sonuçlar elde edilmiştir.

2.5.2 Hızlandırıcı deneyleri (Long Baseline Accelarator Experiments)

Hızlandırıcı deneyleri pion bozunumu sonucu oluşan müon nötrinoları kullanılarak gerçekleştirilir. Pi mezonunun kullanılmasının nedeni neredeyse % 100 kesinlikle pionun (2.2) denkleminde verildiği şekilde bozunmasıdır (dallanma oranı 0.999877 dir). Etkileşime giren her bir pion için bir müon nötrinosu ya da antinötrinosu çıkacağı kesin olduğundan pion kullanımı hata payını azaltır.

Uzun Menzilli Hızlandırıcı Deneyleri (Long Baseline Accelarator Experiments): Bu deneyler uzun mesafeler (mevcut deneylerde en kısa mesafe 250 km) kullanarak atmosferik nötrinoların osilasyon parametrelerini ölçmeyi hedefler. Uzun menzilli deneylerde nötrinoların enerjilerini GeV mertebesine çıkarmak gerekir.

K2K (KEK To Kamioka): 1999 yılında ölçüm almaya başlayan K2K deneyi 2004 yılında sona ermiştir. Müon nötrinosunun yaşama olasılığını ölçen ilk uzun menzilli hızlandırıcı deneyidir. Hızlandırıcısıyla dedektörü olan Süper-Kamiokande arasında 250 km mesafe bulunur.

T2K (Tokai To Kamioka): İlk sonuçlarını 2011 yılında almaya başlayan T2K, K2K deneyine çok benzerdir. Hızladırma ve ölçüm şekli aynıdır. Ancak hızlandırıcısında daha

yüksek enerjili protonlar kullanır ve menzili 295 km'dir. θ_{23} , Δm^2_{23} ve θ_{13} terimlerini hata payı küçük olacak şekilde ölçer.

MINOS (Main Injector Neutrino Oscillation Search): Fermilab da hızlandırılan müon nötrinoları 735 km uzakta dedekte edilir. Bu deneyde de K2K gibi müonun yaşama olasılığına bakılır ancak daha yüksek enerjili ve uzun menzilli bir deneydir. Bu deney (2.2) denkleminde verilen iki pion bozunumundan da yararlanarak müon nötrinolarının yanı sıra antinötrinolarının da yaşama olasılığını ölçer. Böylece CPT korunumuna test imkanı sağlar.

OPERA(Oscillation Project with Emulsion Tracking Apparatus): İsviçre'deki CERN de hızlandırılan müon nötrinoları 732 km uzaklıkta İtalya'da bulunan Gran Sasso laboratuarında ölçülür. Bu deney müon nötrinosunun, tau nötrinosuna osilasyonunu ölçer. $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ osilasyonu için altı olay gözlenmiştir.

Kısa Menzilli Hızlandırıcı Deneyleri (Short Baseline Accelarator Experiments):

LSND(Liquid Scintillating Neutrino Detector): Hızlandırıcısıyla dedektörü arasında yaklaşık 30 metre olan bir kısa menzilli hızlandırıcı deneyidir. Diğer deneylerin aksine, bu deneyin çeşni osilasyonu için gözlediği değer $\Delta m^2 \simeq 1eV^2$ olmuştur.

MiniBooNE: LSND deneyini test etmek amacıyla gerçekleştirilen kısa menzilli (540 m) hızlandırıcı deneyidir. LSND deneyinin çeşni osilasyonu için gözlediği değerleri doğrulamıştır. Bu sonuçların doğru olması durumunda, üç çeşniye ek olarak dördüncü bir nötrino (steril nötrino) var olabilir.

2.5.3 Reaktör Deneyleri

Reaktör deneylerinde uranyum ve plütonyum elementlerinin parçalanmasından (fisyon reaksiyonundan) açığa çıkan elektron antinötrinoları genellikle sıvı sintilatör kullanılarak dedekte edilir. Fisyon sonucu oluşan elektron antinötrinolarına reaktör antinötrinoları denir. Ölçüm gerçekleştirilirken beta bozunumunun tersi olan

$$\overline{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \tag{2.48}$$

reaksiyonundan faydalanılır.

KamLAND Deneyi: 150-200 km uzakta bulunan dedektöre gelen reaktör antinötrinoları 1000 tonluk sıvı sintilatör kullanılarak algılanır.

Double Chooz, Daya Bay ve RENO Deneyleri: Bu üç reaktör deneyi reaktör antinötrinolarının osilasyonlarını 1-2 km'lik mesafede ölçerler. Ayrıca, bu üç deney θ_{13} karışım açısının belirlenmesinde önemli bir rol oynamıştır.

2.5.4 Güneşsel nötrino deneyleri

Güneş'te nükleer füzyon reaksiyonları sonucu meydana gelen elektron nötrinolarına güneşsel nötrinolar denir.

Homestake Deneyi: Güneş'in yaşını tam olarak hesaplamak üzere R. Davis tarafından gerçekleştirilen bu deneyin sonuçları nötrino osilayonlarına dair ilk kanıttır. 1959 yılında kozmik ışınların etkilerini azaltmak için Homestake madeninde ölçüm almaya başlayan grup 1968 de ilk sonuçlarını yayınlamıştır (Davis vd. 1968).

Davis Güneş'ten gelen elektron nötrinolarını (2.49) denklemi ile verilen

$$\nu_e + Cl \rightarrow e^- + Ar \tag{2.49}$$

reaksiyondan yararlanarak ölçmüştür. Tepkimeden çıkan argon atomlarını ölçerek elektron nötrinolarının sayısına ulaşmıştır. Ancak sonuç beklentisinin yalnızca üçte biri kadar olmuştur. İlk sonuçlarını yayınladığı yıldan sonra Homestake 25 yıl daha ölçüm almaya devam etmiştir. Fakat, osilasyon nedeniyle elektron nötrinolarının bir kısmı diğer nötrinolara dönüştüğü ve klor atomlarıyla tepkimeye girmediği için bu süre sonunda da beklediğinin yarısından bile daha az argon atomu ölçmüştür. Nötrino osilasyonları kesin olarak gözlenene kadar güneş nötrinolarındaki bu çıkmaz tam olarak anlaşılamamıştır.

GNO, GALLEX ve SAGE Deneyleri: Bu deneyler Davis'in gerçekleştirdiği deneye çok benzerdir ancak reaksiyonun eşik enerjisini düşürmek amacıyla klor elementi yerine galyum kullanılmıştır. İsimlerini de kullandıkları galyum elementinden alan bu deneylerde kullanılan tepkime denklem (2.50)

$$\nu_e + Ga \rightarrow e^- + Ge \tag{2.50}$$

biçimindedir.

Super-Kamiokande (SK) Deneyi: Atmosferik nötrinolar kısmında da bahsi geçen Super-Kamiokande deneyinde 50 kiloton saf su kullanılarak elektron nötrinolarının elastik saçılması sağlanır ve saçılan elektronun oluşturduğu Çerenkov ışımasıyla güneş nötrinoları ölçülür.

SNO (Sudbury Neutrino Observatory) Deneyi: 1000 tonluk ağır su kullanarak toplam nötrino akısı ile elektron nötrino akısını ölçerek güneşsel nötrinoların osilasyonunu inceler. Güneşsel nötrinoların osilasyon yaptığı bu deneyin sonuçlarına göre açıkça görülmüştür.[4]

Borexino Deneyi:
Dedektör hedefleri sıvı sintilatör içinde bulunduğundan Çerenkov ışımasına göre çok daha güçlü bir ışıma gözlenir. Böylece enerji değerleri daha net elde edilir.

2.5.5 Nötrino deneylerinin sonuçları ve gözlenen parametreler

Atmosferik ve güneşsel nötrinoların ölçümleri neticesinde elde edilen açı değerleri ve kütle kare farkları bu kesimde iki tablo halinde verilmiştir. Bu çalışma boyunca çizdirilmiş olan tüm osilasyon ve entropi grafiklerinde çizelge 2.2 ile verilen değerler kullanılmıştır.

[4] Bu çalışmaya itafen Arthur B. McDonald 2015 yılında Nobel Fizik ödülü kazanmıştır.

Çizelge 2.1 Nötrino osilasyon deneylerinin sonuçları (Suakane 2015)

Deneyler	Geçişler	$\Delta m^2[eV^2]$	P_{osc}	Nötrino Kaynağı
IMB, Kamiokande, SK, K2K, MINOS, T2K	$\nu_\mu \to \nu_\mu$ $\overline{\nu}_\mu \to \overline{\nu}_\mu$	$\sim \pm 2.5 \times 10^{-3}$	~ 1	Atmosferik, Hızlandırıcı
T2K, MINOS	$\nu_\mu \to \nu_e$	$\sim \pm 2.5 \times 10^{-3}$	~ 0.05	Hızlandırıcı
Double Chooz Daya Bay, RENO	$\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_e$	$\sim \pm 2.5 \times 10^{-3}$	~ 0.1	Reaktör
Homestake, GNO, GALLEX, SAGE, SK, SNO, Borexino	$\nu_e \to \nu_e$	$\sim +8 \times 10^{-5}$	~ 0.4	Güneş
KamLAND	$\overline{\nu}_e \to \overline{\nu}_e$	$\sim \pm 8 \times 10^{-5}$	~ 0.8	Reaktör
OPERA	$\nu_\mu \to \nu_\tau$	$\sim 10^{-3}$	–	Hızlandırıcı
LSND, MiniBOONE	$\overline{\nu}_\mu \to \overline{\nu}_e$	~ 1	~ 0.003	Hızlandırıcı

Çizelge 2.2 Gözlenen Parametrelerin en güncel değerleri (Tanabashi 2018)

Parametreler	En iyi uyum	3σ
$\Delta m^2_{21}[10^{-5}eV^2]$	7.37	6.93−7.96
$\Delta m^2_{31(23)}[10^{-3}eV^2]$	2.56 (2.54)	2.45−2.69 (2.42−2.66)
$\sin^2\theta_{12}$	0.297	0.250−0.354
$\sin^2\theta_{23},\ \Delta m^2_{31(32)} > 0$	0.425	0.381−0.615
$\sin^2\theta_{23},\ \Delta m^2_{32(31)} < 0$	0.589	0.384−0.636
$\sin^2\theta_{13},\ \Delta m^2_{31(32)} > 0$	0.0215	0.0190−0.0240
$\sin^2\theta_{13},\ \Delta m^2_{32(31)} < 0$	0.0216	0.0190−0.0242
δ/π	1.38 (1.31)	2σ: (1.0−1.9) (2σ: (0.92−1.88))

3. KUANTUM KORELASYONLARI

İstatistiksel bir terim olan korelasyon, birbiriyle ilişkili en az iki niceliğin bağlılıklarının bir ölçüsüdür. İki nicelik arasında birtakım korelasyonların bulunuyor olması, sistemlerden birisi üzerinde yapılacak ölçümün sonuçlarına bakılarak, diğeri hakkında olasılıksal olarak bilgi sahibi olunması anlamına gelir. En basit manada, sol-elli ve sağ-elli olarak ayırt edilebilir bir çift eldiven kapalı kutulara rastgele yerleştirildikten sonra kutulardan birisinde ölçüm yapılırsa, diğer kutuda eldiven çiftinden hangisinin yer aldığı o kutu üzerinde henüz bir ölçüm yapılmadan kesin bir doğrulukla söylenebilir.

Klasik mekaniksel sistemlerde karşılaşılan korelasyonlar, klasik korelasyonlar olarak adlandırılırlar. Kuantum mekaniği, klasik mekanikten farklı bir matematiksel tasvire sahiptir. Kuantum mekaniksel olarak tanımlanacak sistemler, istatistiksel sistemlerdir ve iki ya da daha fazla parçadan oluşuyorlar ise aralarında bir takım korelasyonlar mevcuttur. Bu noktada betimlenen korelasyonlar, kuantum mekaniksel bir sistemde ortaya konulduğundan kuantum korelasyonlar olarak tanımlanırlar.

Kuantum korelasyonların detaylıca anlaşılabilmesi için bir takım ön hazırlıkların yapılması gerekmektedir. Bu bağlamda, ilk olarak bir ve birden çok parçalı kuantum mekaniksel sistemlerin durumlarının ne şekilde betimleceğinin tartışılması uygun olacaktır.

3.1 Kuantum Mekaniğinde Durum Kavramı

Fiziksel bir sisteme ve özelliklerine dair tüm bilgiye o sistemin durumu denir. Bu bilgiye ulaşabilmek için sistemin gözlenebilirlerinin ölçülmesi gereklidir. Klasik Mekanik nedensel bir teoridir ve sistemin durumu reel uzayda tanımlanan konum-momentum vektör $(\vec{x},\vec{p})$ çifti ile tarif edilir. Kuantum mekaniğinde, Heisenberg Belirsizlik ilkesi gereğince sistemi oluşturan parçacıkların konum ve momentumlarının bilgilerine aynı anda sahip olunamaz. Kuantum mekaniğinde gözlenebilirler operatörlerle temsil edilirler. Bu operatörler genellikle sıra değişimsiz nesneler olduklarından en basit manada ölçümün

sırası da olayları etkileyecektir. Tek parçalı sistemlerin durumu $|\psi\rangle$, olası tüm durumların $|\varphi_i\rangle$ lineer süperpozisyonlarından oluşan dalga fonksiyonları ya da bir iç çarpım uzayı olan kompleks Hilbert ($\mathcal{H}$) uzayında tanımlanan durum vektörleri ile tarif edilirler:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\varphi_i\rangle \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

Sistem birden fazla parçadan oluşuyorsa, toplam durum alt sistemlerin durumlarının tensör çarpımlarından oluşur. Örneğin, iki altsistemli bir bileşik sistemde, birinci durum $\mathcal{H}_1$ uzayında, ikinci durum $\mathcal{H}_2$ uzayında tanımlı ise, sistemin toplam durumu $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, iki altuzayın tensör çarpımı olan $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert uzayında betimlenir. Bu uzay $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ boyutludur.

Tek bir $|\psi\rangle$ durum vektörüyle ifade edilebilen sistemlerde $|\psi\rangle$ bir saf durumdur. Yalnızca $|\psi\rangle$ saf durumu şeklinde ifade edilemeyen durumlara saf olmayan durumlar denir. Saf olmayan durumlar yoğunluk işlemcileriyle gösterilirler. $|\psi_i\rangle$ bir saf durum ve p_i sistemin bu durumda bulunma olasılığı olmak üzere yoğunluk işlemcisi:

$$\rho = \sum_{\mathrm{i}} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada p_i olasılıkları; $p_i \in [0,1]$ ve $\sum_i p_i = 1$ özelliklerini sağlar.

Yoğunluk matrisleri izi bir olan ($Tr[\rho] = 1$) pozitif operatörlerdir ($\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0$). Saf olmayan durumlar bu şekilde koherent olmayan karışımlar olarak yoğunluk matrisiyle ifade edilirler.

Yoğunluk işlemcilerinin pozitif operatörler olması, aynı zamanda hermitsel ($\rho^\dagger = \rho$) olmalarını gerektirir. Böylelikle yoğunluk matrislerinin daima reel özdeğerleri vardır ve dolayısıyla saf durumlardan daha kolay gözlenebilirler. Bu nedenle saf durumları da yoğunluk matrisi cinsinden bulmak yarar sağlar. Saf durumun yoğunluk matrisi, aynı zamanda bir projeksiyon operatörü olduğundan karesi kendisine ($\rho^2 = \rho$) eşittir.

Bileşik sistemlerin kuantum mekaniğinde durumları, dolanık ve ayrılabilir durumlar

olmak üzere ikiye ayrılır:

İki ya da daha fazla altsistemli bir bileşik sistemin durumu, ayrık durumların tensör çarpımları olarak ifade edilebiliyorsa, bu durumlara ayrılabilir ya da çarpım durumları denir. Bu noktadan hareketle, N parçalı saf durumlar,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \dots \otimes |\Psi_{\mathrm{N}}\rangle = |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle \dots |\Psi_{\mathrm{N}}\rangle \tag{3.3}$$

ve N parçalı saf olmayan durumlar,

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \dots \otimes \rho_N = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_N \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabiliyorlarsa, bu durumlar ayrılabilir veya çarpım durumlarıdır. İki ya da daha fazla altsistemli bir bileşik sistemin durumu, ayrık durumların tensör çarpımı ile ifade edilemiyorsa, bu durumlara dolanık durumlar denir. Saf durumlar için dolanıklık,

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_{\mathrm{N}}\rangle \tag{3.5}$$

ile verilirken, saf olmayan durumlar için

$$\rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_N \tag{3.6}$$

biçimindedir.

Dolanık durumlarla ilk olarak, iki elektronlu bir sistemin spin durumu araştırılırken karşılaşılmıştır. İki elektronlu bir sistemin toplam spini $\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2$ dir. Bu sistemi oluşturan spin taşıyıcısı nesnelerden, birinci elektronun spini $\vec{S}_1=\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}_1$ ve ikinci elektronun spini $\vec{S}_2=\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}_2$ ile verilebilir. Böylelikle bileşik sistemin spin kuantum sayısı s, s_1+s_2'den $|s_1-s_2|$'ye kadar değerler alabilir. Yani $s_1=s_2=\frac{1}{2}$ olmak üzere, $s=0$ ya da $s=1$ dir.

Spin kuantum sayısı sıfır olan durumlara singlet durumlar (spin birlisi ya da tekli durum) $|jm\rangle$ toplam açısal momentum olmak üzere;

$$|00\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right] \tag{3.7}$$

spin kuantum sayısı bir olan durumlara ise triplet durumlar (spin üçlüsü ya da üçlü durum)

$$\begin{aligned}
|11\rangle &= \left[\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right] \\
|10\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right] \\
|1-1\rangle &= \left[\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

denir. $|00\rangle$ ve $|10\rangle$ durumları çarpım durumu şeklinde yazılamazlar. Dolayısıyla bu durumlar dolanık durumlardır. Ancak $|11\rangle$ ve $|1-1\rangle$ durumları ayrık durumların tek bir tensör çarpımı ile ifade edilebildiklerinden, dolanık değillerdir. Ancak bu durumların toplamları ya da farklarıyla maksimum dolanık olan iki durum elde edilir:

$$|\varphi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1-1\rangle \pm |11\rangle) \tag{3.9}$$

Singlet durum olan $|00\rangle$ ve triplet durumlardan $|10\rangle$ durumu da maksimum dolanıktır. Söz konusu dört maksimum dolanık saf durum Bell Durumları olarak adlandırılır. Spin aşağı durum olan $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle = |0\rangle$, spin yukarı durum olan $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = |1\rangle$ cinsinden gösterilmek üzere Bell durumları;

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \tag{3.10}$$

ve

$$|\varphi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

Dolanık durumda bulunan bileşik bir sistemde, altsistemlerin durumları ölçüm yapılmadan kesin olarak bilinemez. Bu nedenle yoğunluk işlemcileri ile gösterilirler.

Bileşik bir sistemin altsistemlerinden yalnızca biriyle ilgilenilmek isteniyorsa indirgenmiş yoğunluk işlemcisine ihtiyaç duyulur. Bileşik sistemin durumu ρ^{AB} olmak üzere bu sistemin altsistemleri olan, A sisteminin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi,

$$\rho^{A} = Tr_{B}[\rho^{AB}] \tag{3.12}$$

ve B sisteminin indirgenmiş yoğunluk işlemcisi,

$$\rho^{B} = Tr_{A}[\rho^{AB}] \tag{3.13}$$

ile verilir.

3.2 Dolanıklık Ölçümleri

Kuantum mekaniksel sistemlerde ölçümler projektif ölçümlerle gerçekleştirilir. Saf olmayan durumlarda ise ölçüm operatörleri kullanılır. Kuantum mekaniksel bir sistemin dolanıklığı araştırılırken kullanılabilecek pek çok ölçüm yöntemi vardır. İki çeşnili durumda bulunan nötrino osilasyonlarının dolanıklığı araştırılmak üzere kullanılabilecek iki kübit sistemlerinin dolanıklığını incelemeye yarayan dört farklı ölçüm yöntemine bu bölümün alt kısımlarında değinilecektir.

3.2.1 Bell-CHSH eşitsizliği

1964,1966 yıllarında John S. Bell'in varsayımsal yerel deterministik kuantum mekaniğini araştırmak amacıyla iki ayrı makaleyle ortaya koyduğu Bell eşitsizliklerinin en basit versiyonu 1969 yılında John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony ve Richard Holt tarafından yayınlanan CHSH yorumudur.

Bell eşitsizliklerinin CHSH yorumuna göre; bir kaynak yardımıyla elektron çifti üretilip daha sonra başka bir düzenek yardımıyla yolları ayrılsın. Birinci elektronun spinini Alice ikincisini Bob ölçsün. Her ikisi de yalnızca iki durum ölçebilir. Bu durumlar Alice için A_1, A_2 ve Bob için B_1, B_2 olsun ve bu dört durumun (A_1, A_2, B_1, B_2) ölçümü sadece ±1 değerlerini alabilsin. Bu koşullar altında bileşik sistemin alacağı değerler yalnızca:

$$Q = A_1(B_1 - B_2) + A_2(B_1 + B_2) = \pm 2 \tag{3.14}$$

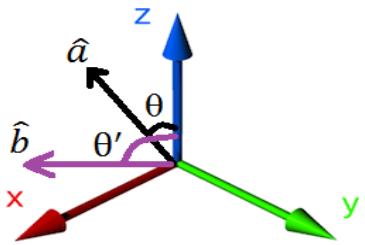
olacaktır. Dolayısıyla Q değerinin istatistiksel ortalaması ya da beklenen değeri;

$$-2 \leq \langle Q \rangle \leq +2 \tag{3.15}$$

olur. Bu eşitsizliğin açık hali yazılarak Bell-CHSH eşitsizliği elde edilir:

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq +2 \tag{3.16}$$

Kuantum mekaniği açısından ise bu ölçüm basit bir dille şu şekilde ifade edilebilir:



Şekil 3.1 Bell-CHSH eşitsizliğinde spin ölçüm eksenlerinin yönelimleri

Spin ölçümünü Alice $\hat{a}$ yönünde, Bob $\hat{b}$ yönünde yapsın. Her ikisi de xz düzleminde olup $\hat{a}$ yönü z ekseniyle θ açısı, $\hat{b}$ yönü ise z ekseniyle θ' açısı yapıyor. Bu durumda Alice'in ölçümü:

$$W_\theta = sin\theta\ \sigma_x + \ cos\theta\ \sigma_z \tag{3.17}$$

olur. Bob'un ölçüm sonucu ise:

$$W_{\theta'} = sin\theta'\ \sigma_x + \ cos\theta'\ \sigma_z \tag{3.18}$$

olacaktır. Alice ve Bob'ın ölçüm sonuçlarına göre bileşik sistemin spin ölçümünün beklenen değeri:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \langle \Psi^- | W_\theta W_{\theta'} | \Psi^- \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle 01| - \langle 10|)(W_\theta W_{\theta'})(|01\rangle - |10\rangle) \end{aligned} \tag{3.19}$$

olur. Burada $|\Psi^-\rangle$ dört Bell durumundan biri olmak üzere bu durum $|0\rangle = \binom{1}{0}$ ve $|1\rangle = \binom{0}{1}$ spinörleri cinsinden alınarak işlemlere devam edilir. Tensörel çarpımlar gerçekleştirildiğinde bileşik sistemin spin ölçümünün beklenen değerinin

$$\langle\Psi^-|W_\theta W_{\theta'}|\Psi^-\rangle = [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'] = -cos(\theta - \theta') \qquad (3.20)$$

denklemine eşit olduğu bulunur[5]. Elde edilen (3.20) denkleminde özel olarak θ açısı 0, $\frac{\pi}{2}$ ve θ' açısı $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ olarak seçilirse (A_1, A_2, B_1, B_2 durumları için sırasıyla):

$$A_1 = W_0\,, \qquad A_2 = W_{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad B_1 = W_{\frac{\pi}{4}}\,, \qquad B_2 = W_{\frac{3\pi}{4}} \qquad (3.21)$$

olmak üzere bileşik durumların beklenen değerleri:

$$\langle A_1B_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \langle A_1B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \langle A_2B_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \langle A_2B_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (3.22)$$

olarak elde edilir. O halde kuantum mekaniksel bakış açısıyla bileşik sistemin spin ölçümünün beklenen değerinin

$$\langle Q\rangle = \langle A_1B_1\rangle - \langle A_1B_2\rangle + \langle A_2B_1\rangle + \langle A_2B_2\rangle = -2\sqrt{2} \qquad (3.23)$$

denklemine eşit olduğu ve Bell-CHSH eşitsizliğini ihlal ettiği görülür.

Yukarıda anlatılan düşünce deneyi 1981-1982 yılları arasında gerçekleştirilmiştir (Aspect vd. 1982). Sonuç olarak hazırlanan sistemde bileşik sistemin spin durumunun varsayımsal yerel ve determinist kuantum mekaniğinin beklentisi olan Bell-CHSH eşitsizliğindeki 2 değerini aştığı görülmüştür. Kuantum mekaniğinin Kopenhag Yorumu doğrulanmıştır.

Bell-CHSH eşitsizliği saf olmayan durumlar için de türetilebilir (Horodecki vd. 1995). Tüm hermitsel $n \times n$ matrisler n^2 boyutlu bir gerçel vektör uzayı oluştururlar. O halde

[5] (3.20) denklemi ile verilen Bell-CHSH eşitsizliğinin ara işlemleri **EK 2** kesiminde verilmiştir.

iki altsistemli bir bileşik sistemin Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ olup 4 boyutlu bir gerçel vektör uzayı oluşturur. $\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli matrisleri olmak üzere dört boyutlu bu uzayı geren bazlar $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$'dır. Bu bazlardan kurulan ve yoğunluk matrisi özelliklerini de sağlayan cebir iki altsistemli bir bileşik sistemin en genel yoğunluk işlemcisi (Block gösterimiyle):

$$\rho = \frac{1}{4}\Bigg[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes (\vec{s} \cdot \vec{\sigma}) + \sum_{\mathrm{m,n=1}}^{3} T_{mn}\,(\sigma_m \otimes \sigma_n)\Bigg] \tag{3.24}$$

biçimindedir. Eşitliğin her iki tarafı önce $(\sigma_m \otimes \sigma_n)$ ile çarpılıp daha sonra Hilbert-Schmidt uzayında $Tr(X \otimes Y) = Tr(X)Tr(Y)$ olduğu kullanılarak iz alındığında:

$$\begin{aligned} Tr[\rho(\sigma_m \otimes \sigma_n)] &= \Big[Tr(\sigma_m)Tr(\sigma_n) + Tr\big(\sigma_m(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})\big)Tr(\sigma_n) \\ &+ Tr(\sigma_m)Tr\big(\sigma_n(\vec{s} \cdot \vec{\sigma})\big) \\ &+ Tr\left(\sum_{m,n=1}^{3} T_{mn}\,(\sigma_m^2 \otimes \sigma_n^2)\right)\Big] \end{aligned} \tag{3.25}$$

denklemi elde edilir. Pauli matrislerinin izi sıfır olduğu için denklemdeki ilk üç terim sıfıra eşittir. $\sigma_m^2 = \mathbb{1}_2$ olup $(\sigma_m^2 \otimes \sigma_n^2) = \mathbb{1}_4$ olur ve $Tr(\mathbb{1}_4) = 4$ tür. Böylece (3.24) denklemi

$$T_{mn} = Tr[\rho(\sigma_m \otimes \sigma_n)] \tag{3.26}$$

denklemine eşit olur. T korelasyon matrisinin elemanları T_{mn} olmak üzere Bell-CHSH eşitsizliğinin yoğunluk matrisine bağlı ifadesi ($i \neq j$ olmak üzere)

$$M(\rho) = \max\left(u_i + u_j\right) \leq 1 \tag{3.27}$$

eşitsizliği ile verilir. Burada $\max\left(u_i + u_j\right)$ ifadesi $T^{\dagger}T$ nin özdeğerleri olan u_i $(i =$

1,2,3)'lerden en büyük ikisinin toplamını ifade eder. Söz konusu iki farklı özdeğerin toplamları birden büyük ise ρ durumu Bell-CHSH eşitsizliğini ihlal eder ve dolanıktır (Horodecki vd. 1995).

3.2.2 Von Neumann Entropisi

Entropi fiziksel sistemlerin durumlarındaki belirsizliğin miktarını ölçmemizi sağlar. Entropi bilişimde bilginin bir ölçüsüdür. Klasik bilişimde bilgi Shanon entropisiyle ölçülürken, kuantum bilişimde von Neuman entropisiyle ölçülür. Von Neumann entropisi iki parçalı saf durumlar için bir dolanıklık ölçümüdür. ρ yoğunluk işlemcisiyle gösterilen bir kuantum durumunun Von Neuman entropisi:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \tag{3.28}$$

ile tanımlanır[6]. Von Neumann entropisi bir kuantum durumun belirsizliğini ölçer. Saf durumlar bir kuantum durum hakkındaki tüm bilgiyi gösterdikleri için saf durumların von Neumann entropisi sıfırdır.

İki parçalı bir sistemin saf durumu olan $|\Psi\rangle_{AB}$ nin dolanıklık oluşumu (*entanglement of formation*) $E(|\Psi\rangle_{AB})$ sistemin indirgenmiş yoğunluk matrislerinin von Neumann entropilerine eşittir.

$$E(|\Psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \tag{3.29}$$

Sistemin durumu $|\Psi\rangle$ eğer bir çarpım durumuysa dolanıklık oluşumu $E(|\Psi\rangle)$ sıfır olacağı için von Neumann entropisi de sıfıra eşit olacaktır.

3.2.3 Konkürans

Kuantum mekaniksel bir özellik olan dolanıklığı iki parçalı sistemler için ölçmenin bir başka yolu da konküranstır. İki altsisteme sahip bileşik sistemler için dolanıklık oluşumu

[6] (3.28) denklemi ile verilen von Neumann entropisinin ara işlemleri **EK 3** kesiminde verilmiştir.

konküransa

$$E(|\Psi\rangle) = \mathcal{E}\big(C(|\Psi\rangle)\big) \tag{3.30}$$

biçiminde bağlıdır (Hill ve Wootters 1997). Dolanıklık oluşumuna eşit olan $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonu

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right) \tag{3.31}$$

denklemi ile tanımlı olup sıfır ile bir arasında değerler alabilen bir fonksiyondur. Konveks ve monoton artan bir fonksiyon olan $\mathcal{E}(C)$; $h(x)$ ikili entropi fonksiyonu ile tanımlanır. Olasılık dağılımları {x,1-x} olmak üzere ikili entropi $h(x)$:

$$h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x) \tag{3.32}$$

şekilde tanımlıdır. $|\Psi\rangle$ iki altsistemli bir sistemin durum vektörü olmak üzere saf durumlar için konkürans

$$C(|\Psi\rangle) = \left|\langle\Psi|\widetilde{\Psi}\rangle\right| \tag{3.33}$$

denklemi ile tanımlanır. Burada $|\widetilde{\Psi}\rangle$ spin flip durumu olup $|\widetilde{\Psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\Psi^*\rangle$ şeklinde tanımlıdır ve $|\Psi^*\rangle$, $|\Psi\rangle$'nin kompleks eşleniğidir. Konkürans dolanık olmayan saf durumlarda spin flip dönüşümü sonucunda ortogonallikten dolayı sıfıra eşit olur.

Saf olmayan bir ρ durumu için ise konkürans

$$C(\rho) = \inf \sum_k p_k C(|\Psi\rangle_k) \tag{3.34}$$

veya daha yaygın olarak

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \tag{3.35}$$

ile verilir. Burada $i = 1,2,3,4$ olmak üzere λ_i ler $\rho\tilde{\rho}$ 'nın özdeğerlerinin karekökleridir. Ve $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\,\rho^*\,(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ ile tanımlı olup burada ρ^* ρ 'nun kompleks eşleniğidir (Wootters 1998).

Konkürans dolanıklığın olmadığı durumda sıfıra, maksimum olduğu durumda ise bire eşittir. Aynı zamanda konveks bir fonksiyon olan konkürans bu özellikleriyle monoton artan bir fonksiyondur.

3.2.4 Teleportasyon Sadakati

Teleportasyon bir Bell durumunu paylaşan iki taraftan, birinin bilinmeyen bir $|\Psi\rangle$ durumunu klasik bir kanal aracılığıyla diğer tarafa aktarması sürecidir. Örneğin bir Bell durumu olan $|\varphi^+\rangle$ durumu:

$$|\varphi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|0\rangle + |1\rangle\otimes|1\rangle) \tag{3.36}$$

Alice ve Bob tarafından paylaşılsın ve Alice bilinmeyen bir $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ durumunu Bob'a aktardığında no-cloning teoremine göre Alice'de $|\psi\rangle$ durumunun herhangi bir kopyası kalamaz. Klasik bir kanal üzerinden klasik bitler gönderildiğinde ise bu durumun aksine Alice'in bir kopyayı tutması mümkündür. O halde Alice'in Bob'a aktardığı durum:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle|\varphi^+\rangle &= (\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle_{\mathrm{B}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha|00\rangle_A|0\rangle_{\mathrm{B}} + \alpha|01\rangle_A|1\rangle_B \\
&+ \beta|10\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_B + \beta|11\rangle_A|1\rangle_B\big) \\
&= \frac{1}{2}\{|\varphi^+\rangle_{\mathrm{A}}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\
&+ |\varphi^-\rangle_{\mathrm{A}}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \\
&+ |\Psi^+\rangle(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\
&+ |\Psi^-\rangle(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B)\}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

biçiminde olur. Burada $|\Psi^{\pm}\rangle$, $|\varphi^{\pm}\rangle$ Bell durumlarıdır ve Bob Pauli matrislerini kullanarak bilinmeyen $|\psi\rangle$ durumunu elde edebilir.

Teleportasyon sadakati kavramına geçmeden önce sadakat (*fidelity*) tanımını yapmak

faydalı olacaktır. Sadakat; iki kuantum durumun birbirine ne kadar yakın olduğunun bir ölçüsüdür. İki saf kuantum durum arasındaki sadakat:

$$F(|\Psi\rangle, |\varphi\rangle) = |\langle\varphi|\Psi\rangle|^2 \tag{3.38}$$

olup iki yoğunluk operatörü ρ ve σ arasındaki sadakat ise:

$$F(\rho, \sigma) = \left(Tr\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}}\right)^2 \tag{3.39}$$

ile tanımlıdır.

Teleportasyon sadakati kavramı ise sadakat (*fidelity*) değerine bakılarak bir kanalın teleportasyona uygun olup olmadığının araştırılmasını sağlar. İki parçalı bir sistemin teleportasyon sadakati:

$$F_{maks} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}N(\rho)\right) \tag{3.40}$$

ile tanımlanır. Burada $N(\rho)$:

$$N(\rho) = \left(\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}\right) \tag{3.41}$$

denklemi ile tanımlı olup u_i 'ler $T^\dagger T$ matrisinin özdeğerleridir. Klasik kanalların teleportasyon sadakati (F_{maks}) $^2/_3$ 'e eşittir. Teleportasyona uygun kuantum kanallar için ise $F_{maks} > {}^2/_3$ olmalıdır. Bunun için (3.40) denklemi ile de görüldüğü üzere $N(\rho) > 1$ olmalıdır. Denklem (3.27) ile tanımlanan $M(\rho)$ ifadesi denklem (3.41) ile verilen $N(\rho)$ ifadesine bağlı olduğu açıktır. Söz konusu iki ifade de korelasyon matrisi T olmak üzere $T^\dagger T$ matrisinin özdeğerlerine bağlı olarak elde edilir ve Bell-CHSH eşitsizliği ihlal edildiği takdirde $M(\rho) > 1$ olacaktır. Dolayısıyla teleportasyon sadakati ile Bell-CHSH eşitsizliği birbirine bağlı terimlerdir ve Bell-CHSH eşitsizliğini ihlal eden saf olmayan iki parçalı $\left(\text{spin} - \frac{1}{2}\right)$ bir durum teleportasyona elverişlidir.

3.3 Kuantum Korelasyon Ölçümleri

Saf bir durumun kuantum korele olması için gerek ve yeter şart bir dolanık durum olmasıdır. Ancak saf olmayan bazı ayrılabilir durumlar dolanık olmadıkları halde kuantum korelasyonlar içerebilirler. Örneğin, saf olmayan bir kuantum-klasik durum ayrılabilir bir durum olmasına rağmen klasik algoritmaya göre daha hızlı olup kuantum korelasyonlar içerebilir. Bu tür kuantum korelasyonların ölçülebilmesi için kuantum diskort kavramından yararlanılır.

3.3.1 Kuantum Diskort

İki sistem birlikteyken ayrık halde tek başlarına içerdikleri bilgiden daha fazla bilgi içeriyorsa bu iki sistem koreledir. İki parçalı bileşik bir sistemin saf olmayan *klasik korele* durumu:

$$\rho_{cc} = \sum_{\mathrm{i,j}} p_{ij} \, |i\rangle\langle i| \otimes |j\rangle\langle j| \tag{3.42}$$

biçimindedir. Burada $\{|i\rangle\}$'ler birinci altsistemin Hilbert uzayı olan $\mathcal{H}_1$ üzerinde ve $\{|j\rangle\}$'ler ikinci altuzay olan $\mathcal{H}_2$ üzerinde tanımlı ortogonal durumlardır. p_{ij}'ler ise negatif olmayan ve toplamları bire eşit olan $\left(\sum_{i,j} p_{ij} = 1\right)$ olasılıklardır. Her klasik korele durum aynı zamanda bir ayrılabilir durumdur. Ancak ayrılabilir bir durumun aynı zamanda bir klasik korele durum olması gerekmez. Çünkü $\rho_{sep} = \sum_{\mathrm{i,j}} p_{ij} \, |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|$ şeklinde tanımlı bir ayrılabilir durumda $\{|a_i\rangle\}$ ve $\{|b_i\rangle\}$ durumları ortogonal olmak zorunda değildir.

p_i olasılıklarının toplamı bire eşit ve $\{|i\rangle\}$ ler ortogonal durumlar olmak üzere iki altsistemli bir bileşik sistemin saf olmayan *klasik-kuantum* durumu:

$$\rho_{cq} = \sum_{\mathrm{i}} p_i \, |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer olarak *kuantum-klasik* durumlar da:

$$\rho_{qc} = \sum_{\mathrm{i}} p_i \, \rho_i \otimes |i\rangle\langle i| \tag{3.44}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tip ayrılabilir durumlar dolanık olmamalarına rağmen klasik algoritmaya göre daha hızlı olup kuantum korelasyonlar içerebilirler.

Kuantum diskort tanımı yapılmadan önce klasik ve kuantum bilişimde önemli olan birkaç kavram tanımlanmalıdır.

Klasik bilişimde bileşik entropi iki rasgele değişken için bileşik bilginin bir ölçüsüdür ve aşağıdaki şekilde

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) \tag{3.45}$$

tanımlıdır. $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ olması için gerek ve yeter şart X ve Y'nin bağımsız olmasıdır.

Kuantum bilişimde entropi von Neumann entropisiyle verildiği için *kuantum bileşik entropi* bileşik durumun entropisidir ve

$$S(\rho^{AB}) = -Tr\rho^{AB} \log \rho^{AB} \tag{3.46}$$

biçiminde tanımlıdır. İki klasik sistemin bileşik entropisi en az sistemlerden birinin entropisine eşittir. Kuantum mekaniksel iki sistemin bileşik durumu bir saf durumsa entropi sıfırdır. Ancak eğer bu sistemler dolanık durumdaysa sistemin durumunu veren yoğunluk operatörünün entropisi sıfırdan farklıdır. Klasik sistemlerden farklı olarak kuantum sistemlerde dolanık durumların bileşik entropisi negatif değerler alabilir.

Klasik bilişimde koşullu entropi bir rastgele değişken verildiğinde diğer rastgele değişkenin sonucunun bilinmesini sağlayan bilgi ölçümüdür. Y bilindiğinde X'in sonucunu veren bilgiyi ölçen koşullu entropi:

$$H(X|Y) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log\big(p(x|y)\big) = H(X,Y) - H(Y) \tag{3.47}$$

ile tanımlanır. Burada $p(x|y) = p(x,y)/p(y)$ dir (*Bayes kuralı*).

Kuantum koşullu entropi iki parçalı bir kuantum durum olan ρ^{AB} için B'nin izdüşümsel ölçümleri koşulu ile A'nın koşullu entropisi:

$$S\big(A\big|\{\Pi_i^B\}\big) = \sum_i p_i\, S\big(\rho_i^A\big) \tag{3.48}$$

ile tanımlıdır. Burada $\{\Pi_i^B\}$'ler B altsistemi üzerindeki von Neumann ölçümüne karşılık gelen ölçüm operatörleri olup rankı bire eşit olan ortogonal projektörlerdir. p_i olasılığı $Tr\big[\Pi_i^B \rho^{AB}\big]$ ifadesine eşit olup A altsisteminin ρ_i^A ölçüm durumu $\rho_i^A = Tr_B\big[\Pi_i^B \rho^{AB}\big]/p_i$ ile tanımlıdır.

Klasik bilişimde iki rastgele değişken arasındaki korelasyon *karşılıklı bilişim* ile ölçülür.

$$J(X:Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{3.49}$$

Burada $H(X)$ Shannon entropisi ve $H(X|Y)$ koşullu entropidir. Bayes kuralı kullanılarak klasik karşılıklı bilişim:

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{3.50}$$

şekilde de tanımlanabilir.

Karşılıklı bilişimin klasik bilişimdeki (3.49) ve (3.50) denklemleri ile verilen iki tanımı birbirine eşdeğerdir ancak kuantum bilişimde farklıdır.

Kuantum bilişimde *von Neumann karşılıklı bilişim*;

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) \tag{3.51}$$

ile tanımlıdır. Kuantum karşılıklı bilişimin bu tanımı klasik karşılıklı bilişimin (3.50) denklemiyle verilen ifadesinin kuantum teorideki karşılığıdır. Ancak (3.49) ile verilen klasik karşılıklı bilişim denkleminin koşullu entropi içermesi nedeniyle kuantum teorideki karşılığı farklıdır. Kuantum karşılıklı bilişimin koşullu entropiye bağlı ifadesi;

$$J(\rho)_{\{\Pi_i^B\}} = S(\rho^A) - S\left(A\middle|\{\Pi_i^B\}\right) \tag{3.52}$$

denklemi ile tanımlıdır. Bu ölçüm ile elde edilen değer B altsisteminin ölçümü sonucunda A altsistemi hakkında kazanılan bilginin miktarına karşılık gelir.

Karşılıklı bilişim klasik ve kuantum korelasyonların toplamına eşit olan tüm korelasyonları verir.

Karşılıklı bilişimin klasik olarak eşdeğer iki tanımı kuantum bilişimde farklıdır ve aralarındaki fark *kuantum diskort* ölçümünü verir. Dolanıklığın ötesinde kuantum korelasyonları ölçmenin bir yolu olan kuantum diskort:

$$\delta(\rho) = \min_{\{\Pi_i^B\}} [I(\rho) - J(\rho)_{\{\Pi_i^B\}}] \tag{3.53}$$

ile tanımlanır. Kuantum diskort negatif değerler almaz ve yalnızca kuantum-klasik durumların kuantum diskort ölçümü sıfıra eşit olabilir.

Kuantum diskortun analitik ifadelerinden biri *geometrik diskort*tur. İki parçalı bileşik bir sistemin saf olmayan durumu ρ ile klasik-kuantum durumların kümesi arasındaki Hilbert-Schmidt uzaklığının minimum değeri diskortun geometrik ölçümünü verir. CQ klasik-kuantum durumların kümesi ve χ durumu bu kümenin bir elemanı olmak üzere bir ρ yoğunluk işlemcisinin geometrik diskortu;

$$\begin{aligned} D_G(\rho) &= \min_{\chi \in CQ} \|\rho - \chi\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\|\vec{x}\|^2 + \| T \|^2 - k_{maks}\right] \end{aligned} \tag{3.54}$$

ile tanımlıdır. Burada $\|.\|$ Hilbert-Schmidt normu olup;

$$\|\vec{x}\| = Tr\left(\vec{x}^{\dagger}\vec{x}\right) \tag{3.55}$$

biçiminde tanımlıdır. σ_m'ler Pauli matrisleri olmak üzere $\vec{x}$ vektörünün bileşenleri $x_m = Tr\big(\rho(\sigma_m \otimes \mathbb{1})\big)$ denklemi ile elde edilir. Ayrıca (3.54) denklemindeki k_{maks} terimi $\left(\vec{x}\vec{x}^{\dagger} + TT^{\dagger}\right)$ matrisinin en büyük özdeğeridir ve T korelasyon matrisi olup elemanları (3.26) denklemi ile elde edilir.

Kuantum diskort ölçümünün analitik bir formu olması nedeniyle kolay uygulanabilir olmasının yanında geometrik diskort; kuantum diskort ölçümünün aksine simetrik bir ölçümdür.

4. NÖTRİNO OSİLASYONLARININ KUANTUM KORELASYONLARI AÇISINDAN İNCELENMESİ

Bu bölümün ilk kısmında iki çeşnili nötrino osilasyonları, kuantum korelasyonlar biçiminde incelenmek üzere öncelikle nötrino osilasyonları yalnızca çeşni özdurumlarına bağlı olarak elde edilmiştir. Ardından nötrino osilasonlarının iki çeşnili hali sırasıyla Bell-CHSH eşitsizliği ihlali, von Neumann entropisi, konkürans, teleportasyon sadakati ve geometrik diskort ölçümleri kullanılarak kuantum korelasyonlar cinsinden ölçülmüştür.

İkinci ve üçüncü kısımlarda, sırasıyla üç çeşnili ve dört çeşnili nötrino osilasyonları von Neumann entropisiyle ölçülmüş ve bu ölçüme göre nötrino osilasyon ve von Neumann entropisi grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizdirilmiştir.

4.1 İki Çeşnili Durumda Kuantum Korelasyonları

Bölüm 2'nin ikinci kesiminde iki çeşnili hal için nötrino osilasyonları incelenerek nötrinoların çeşni özdurumları kütle özdurumlarına bağlı olarak elde edilmişti. Osilasyon yalnızca çeşni özdurumlarına bağlı olarak yazılmak istenildiğinde ilk olarak (2.4) denklemini kütle özdurumlarından bağımsız hale getirmek üzere;

$$|\nu_j\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha j}^{-1} |\nu_\alpha\rangle \tag{4.1}$$

denkleminden yararlanılır. (2.4) denkleminde olduğu gibi burada da $\alpha = e, \mu, \tau$ olup $|\nu_\alpha\rangle$ 'lar çeşni özdurumlarını, $j = 1,2,3$ olmak üzere $|\nu_j\rangle$ 'ler kütle özdurumlarını belirtmektedir. (4.1) denklemi (2.7) denkleminde yerine yazılarak başlangıçta (t=0 anında) $|\nu_\alpha\rangle$ durumunda bulunan nötrinonun t süre sonraki zaman evrimi;

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{j} U_{\alpha j}\, e^{-iE_j t/\hbar} \left(\sum_{\alpha} U_{\alpha j}^{-1} |\nu_\alpha\rangle \right) \tag{4.2}$$

olduğu görülür. Denklem (2.5) ile verilen U matrisinin determinantı bire eşit olup tersi $U^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ 'dir. Dolayısıyla (4.2) denkleminin açık ifadesi;

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = cos\theta e^{-iE_j t/\hbar}(cos\theta|\nu_\alpha\rangle - sin\theta|\nu_\beta\rangle) + sin\theta e^{-iE_k t/\hbar}(sin\theta|\nu_\alpha\rangle + cos\theta|\nu_\beta\rangle) \quad (4.3)$$

biçimindedir. (4.3) denklemi;

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \left(cos^2\theta e^{-\frac{iE_j t}{\hbar}} + sin^2\theta e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}}\right)|\nu_\alpha\rangle + cos\theta sin\theta\left(e^{-iE_k t/\hbar} - e^{-iE_j t/\hbar}\right)|\nu_\beta\rangle \quad (4.4)$$

şeklinde, sadece çeşni özdurumlarına bağlı olarak düzenlenilebilir. Aynı ifade cebirsel formda aşağıdaki gibi;

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U_{\alpha\alpha}(t)|\nu_\alpha\rangle + U_{\alpha\beta}(t)|\nu_\beta\rangle \quad (4.5)$$

gösterilebilir. (4.4) denkleminde görüldüğü üzere (4.5) denklemindeki $U_{\alpha\alpha}(t)$ ve $U_{\alpha\beta}(t)$ terimleri:

$$U_{\alpha\alpha}(t) = cos^2\theta e^{-iE_j t} + sin^2\theta e^{-iE_k t} \quad (4.6)$$

ve

$$U_{\alpha\beta}(t) = cos\theta\ sin\theta\left(e^{-iE_k t} - e^{-iE_j t}\right) \quad (4.7)$$

ifadelerine eşittir.

Nötrinoların bir çeşni özdurumunda bulundukları durum için $|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, aksi durumlar için ise $|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ spinörleri kullanılarak $|\nu_\alpha\rangle$ ve $|\nu_\beta\rangle$ çeşni özdurumları şu şekilde tanımlanabilir:

$$|\nu_\alpha\rangle \equiv |1\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta \equiv |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ve

$$|\nu_\beta\rangle \equiv |0\rangle_\alpha \otimes |1\rangle_\beta \equiv |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

O halde (4.5) denklemi

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= U_{\alpha\alpha}(t)|1\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta + U_{\alpha\beta}(t)|0\rangle_\alpha \otimes |1\rangle_\beta \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\alpha\alpha}(t) \\ U_{\alpha\beta}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.10}$$

denklemine dönüşür.

Saf bir durum olan $|\nu_\alpha(t)\rangle$'nin yoğunluk matrisi (3.2) denklemine göre

$$\rho = |\nu_\alpha(t)\rangle\langle\nu_\alpha(t)| \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) denkleminde elde edilen $|\nu_\alpha(t)\rangle$ durumu (4.11) denkleminde yerine yazılarak

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U_{\alpha\alpha}(t)|^2 & U_{\alpha\alpha}(t)U^*_{\alpha\beta}(t) & 0 \\ 0 & U^*_{\alpha\alpha}(t)U_{\alpha\beta}(t) & \left|U_{\alpha\beta}(t)\right|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

yoğunluk matrisi elde edilir. (4.12) ile verilen ρ matrisinin rankı iki oluduğu için sıfıra eşit olmayan elemanlarıyla 2×2'lik bir matrise denktir.

$\Delta \equiv (\mathrm{m}_\mathrm{k}^2 - \mathrm{m}_\mathrm{j}^2)$ olmak üzere, 2×2'lik yoğunluk matrisi ρ'nun elemanları:

Birinci satır ikinci sütun elemanı:

$$
\begin{aligned}
U_{\alpha\alpha}(t)U^{*}_{\alpha\beta}(t) = &\left(cos^2\theta e^{-iE_jt}\right. \\
&\left. + sin^2\theta e^{-iE_kt}\right)\left[cos\theta\ sin\theta\left(e^{iE_kt} - e^{iE_jt}\right)\right] \\
&= sin\theta\ cos\theta\ (cos^2\theta\ e^{i\frac{\Delta t}{2E}} - sin^2\theta\ e^{-i\frac{\Delta t}{2E}} + sin^2\theta \\
&- cos^2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

İkinci satır birinci sütun elemanı:

$$
\begin{aligned}
U^{*}_{\alpha\alpha}(t)U_{\alpha\beta}(t) = &\left(cos^2\theta e^{iE_jt}\right. \\
&\left. + sin^2\theta e^{iE_kt}\right)\left[cos\theta\ sin\theta\left(e^{-iE_kt} - e^{-iE_jt}\right)\right] \\
&= sin\theta\ cos\theta\ (cos^2\theta\ e^{-i\frac{\Delta t}{2E}} + sin^2\theta\ e^{i\frac{\Delta t}{2E}} + sin^2\theta \\
&- cos^2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$cos\theta \equiv c$ ve $sin\theta \equiv s$ kısaltmaları yapıldıktan sonra, $|\nu_\alpha\rangle$ çeşni özdurumunun t süre sonra $|\nu_\alpha\rangle$ özdurumu olarak kalma olasılığını veren $\left(P_{\nu_\alpha\to\nu_\alpha} = |\langle\nu_\alpha|\nu_\alpha(t)\rangle|^2\right)$ ρ'nun birinci satır birinci sütun elemanı:

$$
\begin{aligned}
|U_{\alpha\alpha}(t)|^2 &= \left(c^2e^{-iE_jt} + s^2e^{-iE_kt}\right)\left(c^2e^{iE_jt} + s^2e^{iE_kt}\right) \\
&= c^4 + s^4 + c^2s^2\left(c^2e^{i(E_k-E_j)t} + s^2e^{-i(E_k-E_j)t}\right) \\
&= c^4 + s^4 + 2c^2s^2cos\left(E_k - E_j\right) \\
&= c^4 + s^4 + 2c^2s^2cos\frac{\Delta t}{2E} \equiv P_{sur}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

olarak elde edilir. $|\nu_\alpha\rangle$ çeşni özdurumunun t süre sonra $|\nu_\beta\rangle$ özdurumuna geçiş olasılığını veren $\left(P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta} = \left|\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle\right|^2\right)$ ρ'nun ikinci satır ikinci sütun elemanı;

$$
\begin{aligned}
\left|U_{\alpha\beta}(t)\right|^2 &= s^2c^2\left(e^{iE_kt} - e^{iE_jt}\right)\left(e^{-iE_kt} - e^{-iE_jt}\right) \\
&= s^2c^2\left(2 - e^{i\frac{\Delta t}{2E}} - e^{-i\frac{\Delta t}{2E}}\right) \\
&= 2s^2c^2\left(1 - cos\left(\frac{\Delta t}{2E}\right)\right) \\
&= 2s^2c^2\left(2sin^2\left(\frac{\Delta t}{4E}\right)\right) = 4s^2c^2sin^2\left(\frac{\Delta t}{4E}\right) \\
&= sin^2 2\theta sin^2\left(\frac{\Delta t}{4E}\right) \equiv P_{osc}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

olduğu görülür. (4.15) ve (4.16) ifadelerine göre ρ matrisinin köşegenleri toplamı

$$\begin{aligned} &|U_{\alpha\alpha}(t)|^2 + \left|U_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \\ &\qquad = c^4 + s^4 + \frac{2c^2s^2\cos\Delta t}{2E} + 2s^2c^2\left(1 - \cos\left(\frac{\Delta t}{2E}\right)\right) \\ &\qquad = c^4 + s^4 + 2c^2s^2 = (c^2 + s^2)^2 = 1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

olup yoğunluk matrisinin izinin bire eşit olma koşulunu sağlamaktadır.

4.1.1 Bell-CHSH eşitsizliği ihlaliyle dolanıklık ölçümü

Nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı araştırılmak üzere ilk olarak iki çeşnili hal için kısım 3.2.1 de incelenen Bell-CHSH eşitsizliği ile ölçüm yapılacaktır. Denklem (4.12) ile elde edilen ρ durumu denklem (3.27) de kullanılarak bu ölçüm gerçekleştirilebilir. O halde, öncelikle korelasyon matrisi T'nin elemanları denklem (3.26) den yararlanılarak elde edilmelidir.

$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \sigma_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli matrisleri olmak üzere[7] T'nin elemanları:

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= Tr\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^* & |U_{\alpha\alpha}|^2 & 0 \\ 0 & \left|U_{\alpha\beta}\right|^2 & U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^* + U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

[7] $(\sigma_m \otimes \sigma_n)$ çarpımları **EK 4** kesiminde verilmiştir.

$$T_{12} = -T_{21} = Tr\left[i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} & |U_{\alpha\alpha}|^{2} & 0 \\ 0 & -\left|U_{\alpha\beta}\right|^{2} & U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$= i\left(-U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right) \quad (4.19)$$

benzer şekilde

$$T_{33} = Tr\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|U_{\alpha\alpha}|^{2} & -U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} & 0 \\ 0 & -U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & -\left|U_{\alpha\beta}\right|^{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1 \quad (4.20)$$

ayrıca $T_{13} = T_{31} = T_{23} = T_{32} = 0$ olduğu için korelasyon matrisi T:

$$T = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & i\left(-U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right) & 0 \\ -i\left(-U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right) & U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

olarak elde edilir. Buna göre T matrisinin hermitik eşleniği:

$$T^{\dagger} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & -i\left(-U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right) & 0 \\ i\left(-U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right) & U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*} + U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = T^{T} \quad (4.22)$$

olarak bulunur. O halde $T^{\dagger}T$ matrislerinin çarpımı

$$T^{\dagger}T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ile gösterildiğinde $T^{\dagger}T$ matrisinin elemanlarının

$$a_{11} = 2|U_{\alpha\alpha}|^{2}\left|U_{\alpha\beta}\right|^{2} + (U_{\alpha\alpha})^{2}\left(U_{\alpha\beta}^{*}\right)^{2} + (U_{\alpha\alpha}^{*})^{2}\left(U_{\alpha\beta}\right)^{2}$$
$$+ 2|U_{\alpha\alpha}|^{2}\left|U_{\alpha\beta}\right|^{2} - \left(U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^{*}\right)^{2} - \left(U_{\alpha\alpha}^{*}U_{\alpha\beta}\right)^{2}$$
$$= 4|U_{\alpha\alpha}|^{2}\left|U_{\alpha\beta}\right|^{2} = 4P_{sur}P_{osc}$$

$$a_{12} = i\Big[-|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 + |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 - \left(U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\right)^2 + \left(U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\right)^2 - |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 \quad + |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 + \left(U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\right)^2 - \left(U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\right)^2\Big] = 0$$

$$a_{21} = -i\Big[-|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 + |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 + \left(U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\right)^2 - \left(U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\right)^2 - |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 + |U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 - \left(U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\right)^2 + \left(U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\right)^2\Big] = 0$$

$$a_{22} = a_{11} = 4|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 = 4P_{sur}P_{osc}$$

$$a_{13} = 0 = a_{23}$$

$$a_{33} = 1 \tag{4.24}$$

olduğu bulunur. Bu durumda $T^\dagger T$ matrisi:

$$T^\dagger T = \begin{bmatrix} 4P_{sur}P_{osc} & 0 & 0 \\ 0 & 4P_{sur}P_{osc} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

eşittir. (4.25) denklemiyle elde edilen $T^\dagger T$, köşegen bir matris olduğundan özdeğerleri, $et(T^\dagger T - uI) = 0$ ifadesine gerek kalmadan, doğrudan belirlenebilir. Bu matrisin özdeğerleri; $u_1 = 1$ ve $u_2 = u_3 = 4P_{sur}P_{osc}$ olarak bulunur. Böylece u_i ve u_j terimleri $T^\dagger T$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, (3.24) denklemine göre en büyük iki özdeğerin toplamı Bell-CHSH eşitsizliğindeki $M(\rho)$ terimine eşittir. Buna göre

$$M(\rho) = \max\left(u_i + u_j\right) = 1 + 4P_{sur}P_{osc} > 1 \tag{4.26}$$

(4.12) denkleminde elde edilen ρ durumu için Bell-CHSH eşitsizliğini verir. Burada P_{sur} , P_{osc} terimleri toplamları bire eşit olacak şekilde sıfırla bir arasında değerler alabilirler. $4P_{sur}P_{osc}$ değeri $P_{sur} = P_{osc} = \frac{1}{2}$ için maksimum değerini alarak bire eşit olur ve bu durumda $M(\rho)$ ifadesinin alabileceği maksimum değer ikiye eşittir.

Nötrinolar için osilasyon yapma olasılığı her zaman vardır ($P_{osc} \neq 0$). Dolayısıyla $M(\rho)$ ifadesi bire eşit olamaz. O halde (4.26) denklemine göre iki çeşnili durumda nötrino osilasyonlarının Bell-CHSH eşitsizliğini ihlal ettiği görülür.

4.1.2 Von Neumann entropisiyle dolanıklık ölçümü

İki çeşnili durum için nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığını araştırmak üzere von Neumann etropisi kullanılarak ölçüm yapılabilir. Bunun için (4.12) denklemiyle elde edilen ρ yoğunluk işlemcisi cebirsel formda:

$$\begin{aligned}\rho = {} & |U_{\alpha\alpha}|^2 |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\alpha| + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^* |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\beta| \\ & + U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} |\nu_\beta\rangle\langle\nu_\alpha| + |U_{\alpha\beta}|^2 |\nu_\beta\rangle\langle\nu_\beta| \\ & = |U_{\alpha\alpha}|^2 |10\rangle\langle 10| + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^* |10\rangle\langle 01| \\ & + U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} |01\rangle\langle 10| + |U_{\alpha\beta}|^2 |01\rangle\langle 01|\end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir. ρ matrisinin indirgenmiş yoğunluk matrisleri[8];

$$\rho_\alpha = |U_{\alpha\alpha}|^2 |1\rangle\langle 1| + |U_{\alpha\beta}|^2 |0\rangle\langle 0| \tag{4.28}$$

ve

$$\rho_\beta = |U_{\alpha\alpha}|^2 |0\rangle\langle 0| + |U_{\alpha\beta}|^2 |1\rangle\langle 1| \tag{4.29}$$

olup bu indirgenmiş yoğunluk matrislerinin von Neumann entropileri (3.28) denkleminden yararlanılarak

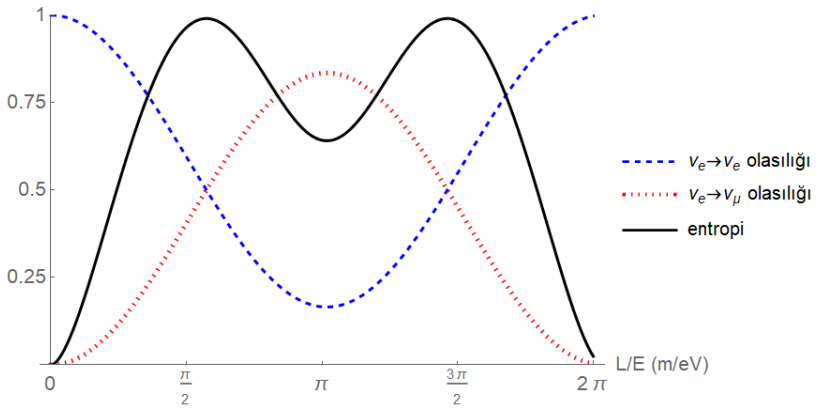
$$\begin{aligned}S(\rho_\alpha) = S(\rho_\beta) &= -|U_{\alpha\alpha}|^2 \log|U_{\alpha\alpha}|^2 - |U_{\alpha\beta}|^2 \log|U_{\alpha\beta}|^2 \\ &= -(P_{sur}) \log(P_{sur}) - (P_{osc}) \log(P_{osc})\end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklinde bulunur. Ek olarak, (4.30) denklemiyle elde edilen sonuç $|\nu_\alpha(t)\rangle$ durumunun (3.29) denklemi ile verilen dolanıklık oluşumuna ($E(|\nu_\alpha(t)\rangle)$) eşittir. Çeşni entropisi:

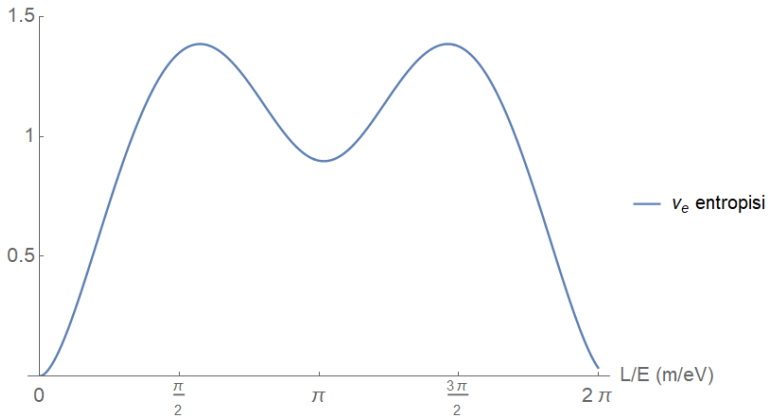
[8] ρ matrisinin indirgenmiş yoğunluk matrisleri ρ_α ve ρ_β'nın elde edilmesi için gerçekleştirilen ara işlemler **EK 5** kesiminde yer almaktadır.

$$
\begin{aligned}
S(|\nu_\alpha(t))) &= -\sum_{\mathrm{j}=\alpha,\beta} Tr(\rho_j \log\, \rho_j) \\
&= -(P_{sur}) \log(P_{sur}) - (P_{osc}) \log(P_{osc}) \\
&- (1 - P_{sur}) \log(1 - P_{sur}) - (1 - P_{osc}) \log(1 - P_{osc})
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

olmak üzere denklem (4.31) ile elde edilir. (4.31) denkleminde $\alpha = e$, $\beta = \mu$ olmak üzere elektron nötrinosunun iki çeşnili durum için entropi grafiği matematica programı ile çizdirilerek şekil 4.2 ile gösterilmiştir. Ayrıca elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon olasılığı ile bire boylandırılmış entropi grafiği şekil 4.1 ile verilmiştir.



Şekil 4.1 İki çeşnili durum için elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyonu ve bire boylandırılmış entropi grafiği



Şekil 4.2 Elektron nötrinosunun entropi grafiği

Şekil 4.1'e göre elektron nötrinosunun yaşama olasılığı ile müon nötrinosuna osilasyon olasılığının birbirine eşit olduğu noktalarda entropi maksimumdur. Bu noktalar arasında kalan bölümde yani osilasyon olasılığının yaşama olasılığından fazla olduğu aralıkta

entropi yine azalmıştır. Yaşama olasılığının maksimum olduğu noktalarda ise entropi minimum değerlerini alır. Deneysel verilere göre alınan parametreler ikinci bölümde çizdirilen osilsyon grafikleri için alınan değerlerle aynıdır.

Şekil 4.2 ile verildiği üzere iki çeşnili durumda elektron nötrinosunun entropisinin maksimum değeri 1.4 civarındadır. 0 ile 2π arasında entropi hiçbir yerde sıfır değildir. Dolayısıyla, iki çeşnili durum için elektron nötrinosu dolanıktır.

4.1.3 Konkürans ile dolanıklık ölçümü

İki çeşnili hal için nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı araştırılırken kullanılabilecek olan bir diğer ölçüm ise 3.2.3 kısmında incelenen konküranstır. Bu ölçüm konküransın saf olmayan durumlar için tanımı olan (3.35) denklemi kullanılarak gerçekleştirilebilir[9]. Denklem (3.35) deki $C(\rho)$ ifadesi elde edilmek üzere ilk olarak $\rho\tilde{\rho}$ çarpımı hesaplanmalıdır ve ardından elde edilecek olan bu matrisin özdeğerlerinin karekökleri bulunmalıdır. Burada ρ denklem (4.12) ile elde edilen yoğunluk matrisi olup bu matrisin spin flip operatörü olan $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\, \rho^* \,(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ eşitliği ile hesaplanacaktır (ρ^*, ρ matrisinin kompleks eşleniğidir). Burada $\sigma_y \otimes \sigma_y$ Pauli matrislerinin tensörel çarpımı;

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

matrisine eşittir. Ve spin flip operatörü $\tilde{\rho}$:

[9] **EK 6** kesiminde (4.10) denklemiyle verilen $|v_\alpha(t)\rangle$ durumunun konküransı (3.33) denklemiyle verilen saf durumlar için konkürans ölçümüyle hesapanarak, burada (4.12) denklemi ile elde edilen yoğunluk işlemcisinin konküransına eşit olduğu gösterilmişitir.

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U_{\alpha\alpha}|^2 & U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & U_{\alpha\alpha} U_{\alpha\beta}^* & |U_{\alpha\beta}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U_{\alpha\beta}|^2 & U_{\alpha\alpha} U_{\alpha\beta}^* & 0 \\ 0 & U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} & |U_{\alpha\alpha}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

matrisidir. (4.12) denklemi ile verilen ρ yoğunluk işlemcisinin, (4.33) denklemi ile elde edilen $\tilde{\rho}$ operatörüyle çarpımı;

$$\rho\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2 & 2|U_{\alpha\alpha}|^2 U_{\alpha\alpha} U_{\alpha\beta}^* & 0 \\ 0 & 2|U_{\alpha\beta}|^2 U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} & 2|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

biçimindedir. Bu matrisin rankı ikiye eşit olduğu için özdeğerlerin ikisi sıfıra eşittir ve diğer ikisi hesaplanmak üzere determinant alınır:

$$\begin{vmatrix} 2|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2 - \lambda & 2|U_{\alpha\alpha}|^2 U_{\alpha\alpha} U_{\alpha\beta}^* \\ 2|U_{\alpha\beta}|^2 U_{\alpha\alpha}^* U_{\alpha\beta} & 2|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \left(2|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2 - \lambda\right)^2 - 4|U_{\alpha\alpha}|^4 |U_{\alpha\beta}|^4 \tag{4.35}$$

O halde, $\rho\tilde{\rho}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2\sqrt{|U_{\alpha\alpha}|^2 |U_{\alpha\beta}|^2} = 2\sqrt{P_{sur} P_{osc}}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ olarak elde edilir. (3.35) denklemine göre ρ işlemcisinin konküransı;

$$C(\rho) = \max(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0) = 2\sqrt{P_{sur} P_{osc}} \tag{4.36}$$

denklemine eşittir. Bu sonuca göre konkürans maksimum değerini, nötrinonun osilasyon yapma olasılığı ile yaşama olasılığının eşit olduğu değer olan $P_{sur} = P_{osc} = 1/2$ durumunda alır ve böyle bir durumda $C(\rho) = 1$ olup sistem maksimum dolanık olacaktır. Diğer yandan osilasyon ya da yaşama olasılıklarından birinin 1 diğerinin 0 oluğu yani kesinliğin mümkün olduğu durumlarda konkürans sıfıra eşit olacak ve

dolanıklık söz konusu olmayacaktır. Nötrino osilasyonlarının deneysel verilerine göre böyle bir durum mümkün değildir. Dolayısıyla konkürans ölçümüne göre iki çeşnili durum için nötrino osilasyonları daima kip dolanıklığına sahiptirler.

Konküransa bağlı fonksiyonun dolanıklık oluşumuna eşitliğini veren (3.30) denklemi burada kontrol edilebilir. Dolanıklık oluşumuna eşit olan konküransa bağlı $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonu denklem (3.31) ile verilir:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(C) &= h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\\ &= -\left(\frac{1+\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\log\left(\frac{1+\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\\ &-\left(\frac{1-\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\log\left(\frac{1-\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.37}$$

Daima $P_{sur}+P_{osc}=1$ olduğu için,

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(C)\\ &= -\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}+\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\log\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}+\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\\ &-\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}-\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\log\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}-\sqrt{1-4P_{sur}P_{osc}}}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.38}$$

ve yukarıda verilen koşul dolayısıyla:

$$P_{sur}{}^2 + P_{osc}{}^2 + 2P_{sur}P_{osc} = 1 \tag{4.39}$$

olduğundan yararlanılarak

$$\begin{aligned}&P_{sur}{}^2 + P_{osc}{}^2 - 2P_{sur}P_{osc} = 1 - 4P_{sur}P_{osc}\\ &\Rightarrow 1 - 4P_{sur}P_{osc} = (P_{sur}-P_{osc})^2\end{aligned} \tag{4.40}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonunda yerine yazılarak fonksiyon

$$\mathcal{E}(C) = -\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}+P_{sur}-P_{osc}}{2}\right)\log\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}+P_{sur}-P_{osc}}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}-(P_{sur}-P_{osc})}{2}\right)\log\left(\frac{P_{sur}+P_{osc}-(P_{sur}-P_{osc})}{2}\right) \quad (4.41)$$

şeklinde düzenlenir. $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonunun yukarıda elde edilen ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\mathcal{E}(C) = -(P_{sur})\log(P_{sur}) - (P_{osc})\log(P_{osc}) \quad (4.42)$$

olduğu bulunur. Bu sonucun (4.30) denkleminde elde edilen yoğunluk matrisinin von Neumann entropisine eşit olduğu görülmektedir. Buna göre, konküransa bağlı $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonu $|\upsilon_\alpha(t)\rangle$ durumunun dolanıklık oluşumuna $(E(|\upsilon_\alpha(t)\rangle))$ eşittir. Dolayısıyla (3.30) denklemi $|\upsilon_\alpha(t)\rangle$ durumu için sağlanır.

4.1.4 Teleportasyon sadakati ile dolanıklık ölçümü

Nötrino osilasyonlarının iki çeşnili hali için kullanılabilecek bir başka ölçüm de teleportasyon sadakatidir. (4.25) denklemi ile elde edilen $T^\dagger T$ matrisinin özdeğerleri; $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 4|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 = 4P_{sur}P_{osc}$ olduğuna göre (3.41) denkleminden yararlanılarak

$$\begin{aligned} N(\rho) &= \left(1 + 2\sqrt{|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2} + 2\sqrt{|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2}\right) \\ &= 1 + 4\sqrt{|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2} = 1 + 4\sqrt{P_{sur}P_{osc}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

elde edilir. (4.43) denklemi (3.40) denkleminde kullanılarak nötrino osilasyonlarının iki çeşnili durum için teleportasyon sadakati:

$$F_{maks} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{P_{sur}P_{osc}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{P_{sur}P_{osc}}\right) \quad (4.44)$$

olarak hesaplanır. Bu sonuç gösteriyorki; (4.44) denkleminde elde edilen F_{maks} değeri teleportasyon sadakatinin klasik değeri olan $^2/_3$ den daima büyüktür. Dolayısıyla iki çeşnili nötrino osilasyonları teleportasyona elverişli birer kuantum kanallardır.

4.1.5 Geometrik diskort ile kuantum korelasyonların ölçümü

İki çeşnili hal için nötrino osilasyonlarının dolanıklık haricindeki durumları içinde kuantum korelasyonları araştırılmak üzere kuantum diskortun analitik bir formu olan geometrik diskort ölçümü kullanılabilir. Denklem (3.54) de kullanılmak üzere $\vec{x}$ vektörünün Hilbert-Schmidt normu denklem (3.55) 'e göre hesaplanmalıdır.
$\vec{x}$ vektörünün bileşenleri; $x_m = Tr\big(\rho(\sigma_m \otimes I)\big)$ şekilde tanımlıdır.O halde,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |U_{\alpha\alpha}|^2 - \left|U_{\alpha\beta}\right|^2 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

olduğuna göre bu vektörün hermitik eşleniği ile çarpımı;

$$\vec{x}^{\dagger}\vec{x} = \left(|U_{\alpha\alpha}|^2 - \left|U_{\alpha\beta}\right|^2\right)^2 \tag{4.46}$$

olacaktır. Bu durumda $\vec{x}$ vektörünün normu;

$$\|\vec{x}\|^2 = \left(|U_{\alpha\alpha}|^2 - \left|U_{\alpha\beta}\right|^2\right)^2 \tag{4.47}$$

denklemine eşittir. Denklem (3.54) de kullanılmak üzere elde edilmesi gereken korelasyon matrisi ve hermitik eşleniğiyle çarpımı denklem (4.25) ile verilmektedir. Bu iki matrisin toplamı:

$$\begin{aligned} &\vec{x}\vec{x}^{\dagger} + TT^{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} 4|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \left(|U_{\alpha\alpha}|^2 - \left|U_{\alpha\beta}\right|^2\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4P_{sur}P_{osc} & 0 & 0 \\ 0 & 4P_{sur}P_{osc} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (P_{sur} - P_{osc})^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak bulunur. Denklem (3.54) deki λ_{maks}; $\left(\vec{x}\vec{x}^{\dagger}+TT^{\dagger}\right)$ matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere; $4P_{sur}P_{osc}\leq 1$ olduğu için denklem (4.48) deki matrisin en büyük özdeğerinin $\lambda_{maks}=1+\left(|U_{\alpha\alpha}|^2-\left|U_{\alpha\beta}\right|^2\right)^2=1+(P_{sur}-P_{osc})^2$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu bağlamda, nötrino osilasyonlarının iki çeşnili hali için (4.12) denklemi ile elde edilen ρ yoğunluk matrisinin geometrik diskortu;

$$\begin{aligned} D_G(\rho)=\frac{1}{4}\Big[&\left(|U_{\alpha\alpha}|^2-\left|U_{\alpha\beta}\right|^2\right)^2+1+8|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2-1\\ &-\left(|U_{\alpha\alpha}|^2-\left|U_{\beta}\right|^2\right)^2\Big]=\frac{8}{4}|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2\\ &=2P_{sur}P_{osc}\neq 0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

denklemine eşittir. Daima osilasyon olasılığı sıfırdan farklı olduğundan (4.49) denklemi sıfıra eşit olamaz. Dolayısıyla, iki çeşnili durum için nötrino osilasyonları dolanık olmasa bile, geometrik diskort ölçümüne göre kuantum korelasyonlar içermektedir.

4.2 Üç Çeşni Durumlu Nötrino Osilasyonları İçin Kuantum Korelasyonları

Üç çeşnili hal için nötrino osilasyonun zaman evrimi, denklem (2.20) ile verilen U_{PMNS} matrisinin elemanlarına bağlı olarak (2.37) denklemi ile aşağıdaki gibi (ħ=1 olmak üzere):

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha\to\nu_\beta}&=\delta_{\alpha\beta}-4\sum_{k>j}\Re\{U_{\alpha k}U_{\beta k}^{*}U_{\alpha j}^{*}U_{\beta j}\}\sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E}L\right)\\ &=\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilmiştir. Burada $a_{\alpha\beta}(t)$ terimi;

$$a_{\alpha\beta}(t)=\sum\nolimits_k U_{\alpha k}\,e^{-iE_kt}U_{\beta k}^{*} \tag{4.51}$$

olup karesi nötrino osilasyon olasılığına eşittir. $t=0$ anında nötrino çeşni özdurumları;

$$|\nu_e\rangle\equiv|1\rangle_e\otimes|0\rangle_\mu\otimes|0\rangle_\tau\equiv|100\rangle\,, \tag{4.52}$$

$$|\nu_\mu\rangle \equiv |0\rangle_e \otimes |1\rangle_\mu \otimes |0\rangle_\tau \equiv |010\rangle,$$
$$|\nu_\tau\rangle \equiv |0\rangle_e \otimes |0\rangle_\mu \otimes |1\rangle_\tau \equiv |001\rangle$$

olsun. Buna göre $\alpha = e, \mu, \tau$ olmak üzere çeşni özdurumlarının zaman evrimi;

$$|\Psi(t)\rangle_\alpha = a_{\alpha e}(t)|100\rangle + a_{\alpha\mu}(t)|010\rangle + a_{\alpha\tau}(t)|001\rangle \tag{4.53}$$

denklemiyle verilebilir. $|\Psi(t)\rangle_\alpha$ durumunun von Neumann entropisi:

$$\begin{aligned} S(|\Psi(t)\rangle_\alpha) &= -\sum_{\mathrm{j}} Tr\left(\rho_j \log\, \rho_j\right) \\ &= -\mathrm{Tr}(\rho_e \log\, \rho_e) - \mathrm{Tr}\left(\rho_\mu \log\, \rho_\mu\right) \\ &\quad - \mathrm{Tr}(\rho_\tau \log\, \rho_\tau) \end{aligned} \tag{4.54}$$

denklemi ile ρ_e, ρ_μ ve ρ_τ indirgenmiş yoğunluk matrislerine bağlı olarak bulunur. ρ_e, ρ_μ ve ρ_τ indirgenmiş yoğunluk matrisleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \rho_e &= Tr_{\mu\tau}|\Psi(t)\rangle_\alpha\langle\Psi(t)|_\alpha = |a_{\alpha e}(t)|^2|1\rangle\langle 1| + \\ &\quad \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2|0\rangle\langle 0| + |a_{\alpha\tau}(t)|^2|0\rangle\langle 0| \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_\mu &= Tr_{e\tau}|\Psi(t)\rangle_\alpha\langle\Psi(t)|_\alpha = |a_{\alpha e}(t)|^2|0\rangle\langle 0| + \\ &\quad \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2|1\rangle\langle 1| + |a_{\alpha\tau}(t)|^2|0\rangle\langle 0| \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= Tr_{e\mu}|\Psi(t)\rangle_\alpha\langle\Psi(t)|_\alpha = |a_{\alpha e}(t)|^2|0\rangle\langle 0| + \\ &\quad \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2|0\rangle\langle 0| + |a_{\alpha\tau}(t)|^2|1\rangle\langle 1| \end{aligned} \tag{4.55}$$

şeklindedir. $|\Psi(t)\rangle_\alpha$ saf durumunun yoğunluk matrisi ρ_α olmak üzere;

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= |\Psi(t)\rangle_\alpha\langle\Psi(t)|_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} |a_{\alpha e}(t)|^2 & a_{\alpha e}(t)a^*_{\alpha\mu}(t) & a_{\alpha e}(t)a^*_{\alpha\tau}(t) \\ a^*_{\alpha e}(t)a_{\alpha\mu}(t) & \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2 & a_{\alpha\mu}(t)a^*_{\alpha\tau}(t) \\ a_{\alpha\tau}(t)a^*_{\alpha e}(t) & a_{\alpha\tau}(t)a^*_{\alpha\mu}(t) & |a_{\alpha\tau}(t)|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.56}$$

biçimindedir ve söz konusu matris izi bire eşit olma koşulunu sağlamalıdır. Buna göre

$$Tr\rho_\alpha = |a_{\alpha e}(t)|^2 + \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2 + |a_{\alpha\tau}(t)|^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2 + |a_{\alpha\tau}(t)|^2 = 1 - |a_{\alpha e}(t)|^2 \tag{4.57}$$

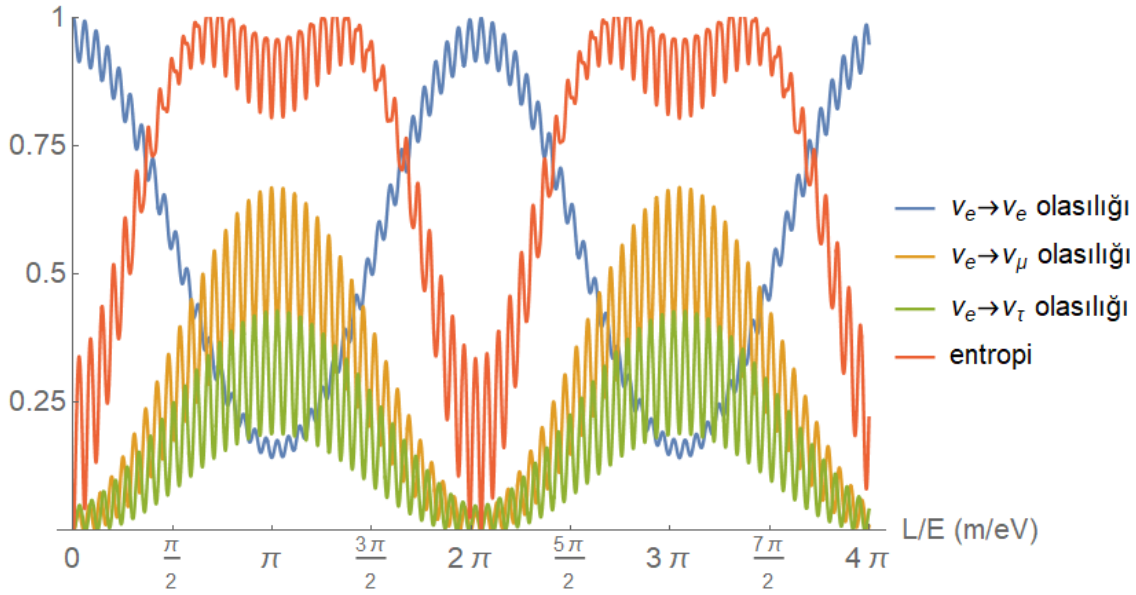
ve

$$\begin{aligned} Tr(\rho_e \log \rho_e) = Tr\Big(\Big(&|a_{\alpha e}(t)|^2|1\rangle\langle 1| \\ &+ \Big(\left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2 \\ &+ |a_{\alpha\tau}(t)|^2\Big)|0\rangle\langle 0|\Big)\log\Big(|a_{\alpha e}(t)|^2|1\rangle\langle 1| \\ &+ \Big(\left|a_{\alpha\mu}(t)\right|^2 + |a_{\alpha\tau}(t)|^2\Big)|0\rangle\langle 0|\Big)\Big) \\ &= |a_{\alpha e}(t)|^2 \log|a_{\alpha e}(t)|^2\, Tr(|1\rangle\langle 1|) \\ &+ (1 \\ &- |a_{\alpha e}(t)|^2)\log(1 - |a_{\alpha e}(t)|^2)\, Tr(|0\rangle\langle 0|) \end{aligned} \tag{4.58}$$

Diğer iki çeşni durumu için de aynı bağıntılar benzer biçimde elde edilir. O halde, $|\Psi(t)\rangle_\alpha$ durumun entropisi:

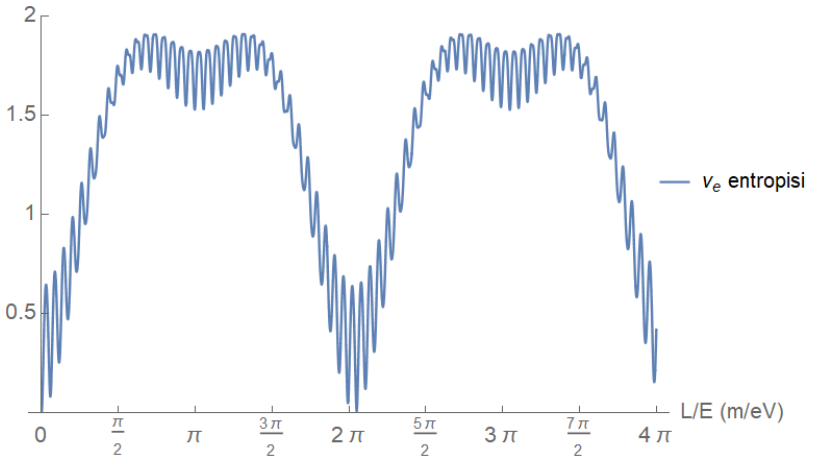
$$\begin{aligned} S(|\Psi(t)\rangle_\alpha) = &-\sum_{\beta}\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \log\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \\ &-\sum_{\beta}(1 - \left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2)\log(1 - \left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2) \end{aligned} \tag{4.59}$$

denklemine eşit olarak elde edilir. (4.59) denklemi ile elde edilen ifade Mathematica programı yardımıyla çizdirildiğinde şekil 4.4 ile verilen grafikler elde edilmektedir. $|\Psi(t)\rangle_\alpha$ durumunun $\alpha = e$ için elektron nötrinosunun, $\alpha = \mu$ için müon nötrinosunun ve $\alpha = \tau$ için tau nötrinosunun entropi grafikleri çizdirilerek farkları incelenmiştir. Şekil 4.3 ile üç çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği verilmiştir. Nötrino osilasyonlarının entropi grafiklerinin minimum değerleri hiçbir noktada sıfır değildir. Dolayısıyla von Neumann entropisi ölçümüne göre üç çeşnili hal için nötrino osilasyonları dolanıktır. Buna ek olarak, elektron nötrinosunun osilasyon yapma ve yaşama olasılıklarının eşit olduğu değerlerde entropi maksimumdur. Yaşama olasılığının maksimum olduğu ve osilasyon olasılığının minimum olduğu noktalarda entropi minimum değerini alır.

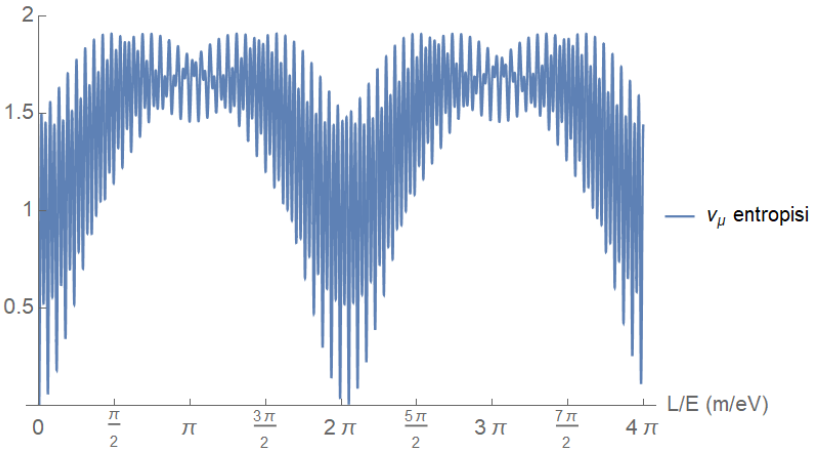


Şekil 4.3 Üç çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği

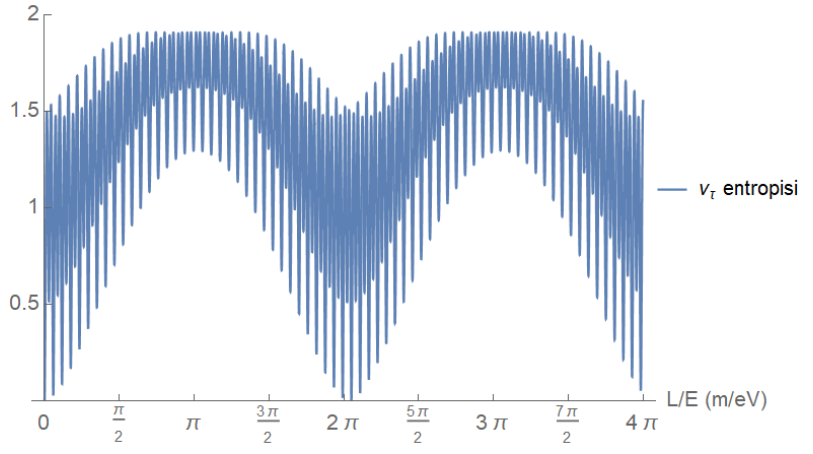
Şekil 4.4'e göre elektron nötrinosunun entropisi müon ve tau nötrinolarının entropilerine göre daha kesin değerlere sahiptir ve müon ve tau nötrinolarının entropilerinin anlık değişimleri arasındaki farklar artmıştır. Şekil 4.4.a grafiğinde elektron nötrinosunun entropi eğrisinin aldığı maksimum değer 1.9 civarındadır. Dolayısıyla, iki çeşnili duruma göre çeşni entropisinin maksimum değeri artmıştır. Müon ve tau nötrinolarının entropi eğrilerinin de aldığı maksimum değer 1.9 civarındadır. Bununla beraber grafiklerde incelenecek olan minimum değerlerin net görülebilmesi amacıyla söz konusu grafikler iki periyot boyunca çizdirilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.4.a. Elektron nötrinosunun, b. Müon nötrinosunun, c. Tau nötrinosunun entropi grafikleri

4.3 Steril Nötrinonun da Hesaba Katıldığı Hal için Nötrino Osilasyonlarının Kuantum Korelasyonları

Bu kesimde 4.2 kesiminde (4.59) deklemi ile elde edilmiş olan entropi ifadesi steril nötrinonun da dahil edildiği duruma genişletilerek söz konusu durum için nötrino osilasyonlarının dolanıklığı incelenecektir. Bunun için dördüncü çeşni olarak steril nötrino ve dördüncü kütle özdurumu teoriye eklenecektir. 2.4 kesiminde elde edilen $U_{(4\times4)}$ matrisiyle dört çeşnili durum için nötrino osilasyon olasılığı söz konusu matris elemanlarına bağlı olarak $\alpha,\beta = e,\mu,\tau,s$, k=2,3,4 ve j=1,2,3 olacak şekilde genişletilmiştir. Buna göre, (4.53) denklemi ile verilen $|\Psi(t)\rangle_\alpha$ durumu:

$$|\varphi(t)\rangle_\alpha = a_{\alpha e}(t)|1000\rangle + a_{\alpha\mu}(t)|0100\rangle + a_{\alpha\tau}(t)|0010\rangle + a_{\alpha s}(t)|0001\rangle \tag{4.60}$$

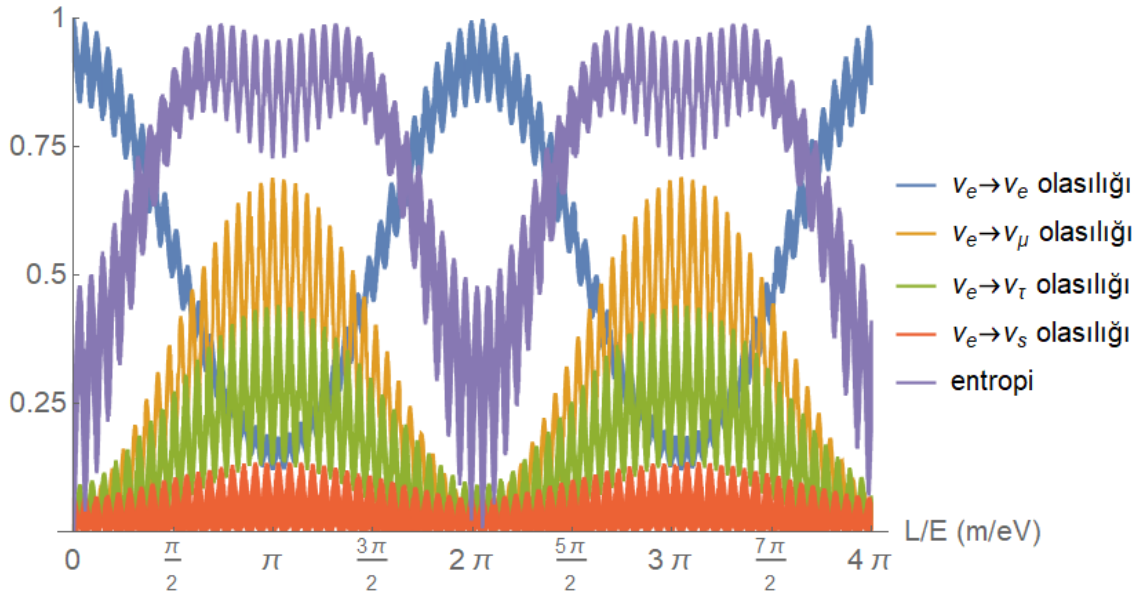
biçimini alır. $|\varphi(t)\rangle_\alpha$ durumunun von Neumann entropisi ise $\beta = e,\mu,\tau,s$ olmak üzere:

$$(|\varphi(t)\rangle_\alpha) = -\sum_{\beta}\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2 \log\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2 - \sum_{\beta}(1-\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2)\log(1-\left|a_{\alpha\beta}(t)\right|^2) \tag{4.61}$$

olacaktır.

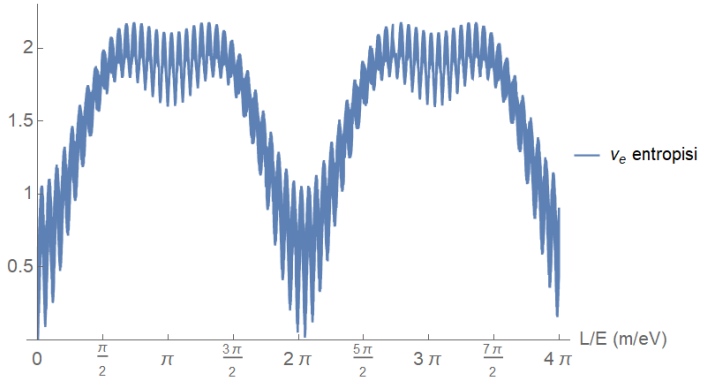
Şekil 4.5'te dört çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre elektron nötrinosunun osilasyon yapma ve yaşama olasılıklarının eşit olduğu değerlerde entropi maksimumdur. Yaşama olasılığının maksimum ve osilasyon olasılıklarının minimum olduğu noktalarda entropi sıfıra yaklaşır. Bununla birlikte, osilasyon ve entropi genlikleri ile entropinin minimum ve maksimum değerleri üç çeşnili duruma göre artmıştır. Dolayısıyla entropinin minimum değeri sıfır noktasından uzaklaşmış olup dolanıklık üç çeşnili duruma göre artmıştır.
Nötrino osilasyonlarının entropi grafiklerinin minimum değerleri hiçbir noktada sıfır değildir. Von Neumann entropisine göre dört çeşnili hal için nötrino osilasyonları

dolanıktır.

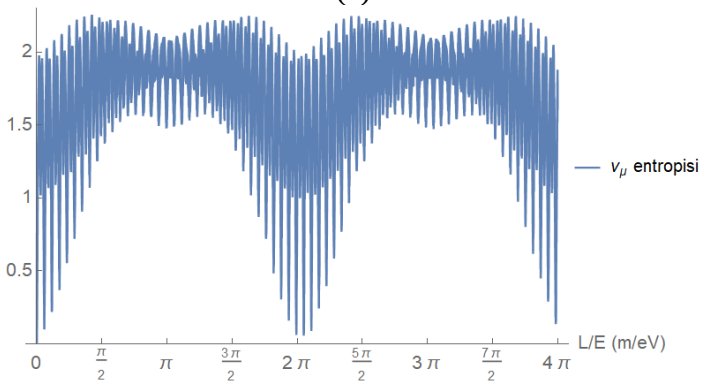


Şekil 4.5 Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği

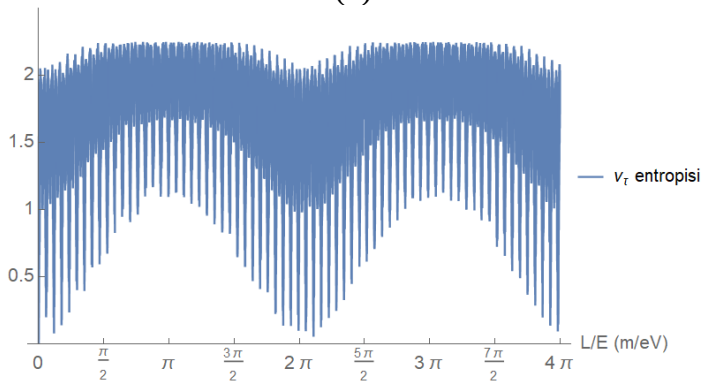
(4.61) denklemi Mathematica programı yardımıyla çizdirildiğinde şekil 4.6 ile verilen grafikler elde edilmektedir. $|\varphi(t)\rangle_\alpha$ durumunun $\alpha = e$ için elektron, $\alpha = \mu$ için müon, $\alpha = \tau$ için tau ve $\alpha = s$ için steril nötrinonun entropi grafikleri sırasıyla çizdirilerek farkları incelenmiştir. Şekil 4.6.a ile verilen elektron nötrinosunun grafiğine bakıldığında entropinin maksimum değerlerinin ikiyi aştığı (2.2 civarında olduğu) ve dolayısıyla üç çeşnili durum için elektron nötrinosunun entropi değerinden büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca anlık değişimler ve kesinsizlikler üç çeşnili duruma göre daha fazladır. Müon ve tau nötrinolarının entropi grafiklerinin sonuçlarında da benzer farklar görülmektedir. Bununla beraber grafiklerde incelenecek olan minimum değerlerin net görülebilmesi amacıyla söz konusu grafikler iki periyot boyunca çizdirilmiştir. Şekil 4.6'da verilen grafiklere göre nötrino osilasyonlarının entropi grafiklerinin minimum değerleri hiçbir noktada sıfır değildir. Dolayısıyla von Neumann entropisine göre dört çeşnili hal için nötrino osilasyonları dolanıktır.



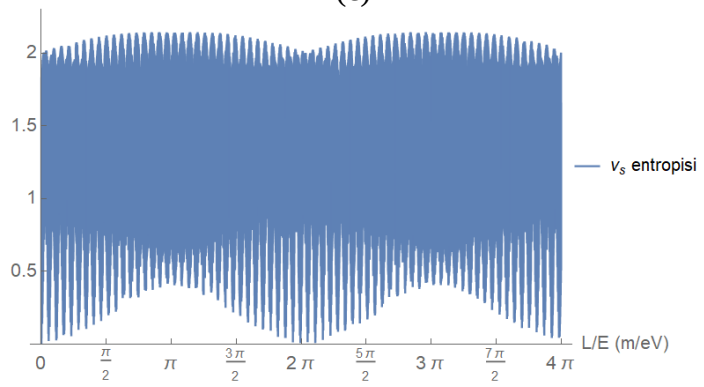
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.6.a. Elektron nötrinosunun, b. Müon nötrinosunun, c. Tau nötrinosunun, d. Steril nötrinonun entropi grafikleri

5. SONUÇ

Standart Model'de kütlesiz kabul edilen nötrinolar çok küçük kütlelere $(\sim 1 MeV/c^2)$ sahiptirler ve çeşni özdurumları kütle özdurumlarının birer karışımıdır. Bunun bir sonucu olarak nötrinolar bir çeşniden diğerine kuantum mekaniksel salınım yapmaktadırlar. Nötrino osilasyonlarının kuantum mekaniksel özelliklerinin daha iyi anlaşılabilmesi adına dolanıklık ve ötesindeki kuantum korelasyonlar cinsinden ele alınması mümkündür.

Bu çalışmada öncelikle bir parçacık olarak nötrinonun tanıtılmasının ardından iki çeşnili, üç çeşnili ve dört çeşnili durumlarda nötrino osilasyonları incelenmiştir. Osilasyon grafikleri Mathematica programı yardımıyla elde edilmiştir. Söz konusu grafiklerde alınan fiziksel parametreler nötrino osilasyon deneyleri kısmında verilmiştir.

Şekil 2.4'e göre üç çeşnili hal için elektron nötrinosunun yaşama olasılığı osilasyon olasılıklarının minimum olduğu noktalarda maksimum değerine ulaşır. Elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon olasılığı, tau nötrinosuna osilasyon olasılığından her noktada daha fazladır. Şekil 2.5'te görüldüğü üzere elektron nötrinosunun steril nötrinoya osilasyon olasılığı çok düşük olmasına rağmen mümkündür. Elektron nötrinosunun yaşama olasılığı müon ve tau nötrinolarına osilasyon olasılığından düşük değerler alırken hiçbir yerde steril nötrinoya osilasyon olasılığından daha küçük değerler almamıştır. Üç çeşnili duruma göre belirsizlikler ve anlık değişimler arasındaki farklar dört çeşnili durum için çizdirilen her eğri için artmıştır.

Nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığını ve kuantum korelasyonlarını incelenmesine geçilmeden önce kuantum mekaniğinin bir özelliği olan dolanıklık kavramı tanıtılmış ve ardından herbiri birer dolanıklık ölçümü olan Bell-CHSH eşitsizliği, von Neumann entropisi, konkürans ve teleportasyon sadakati kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, bazı ayrılabilir durumların kuantum korelasyonlarını araştırmak üzere kullanılan kuantum diskort ve kuantum diskortun analitik bir formu olan geometrik diskort kavramları tanıtılmıştır.

Son olarak nötrino osilasyonları, kuantum korelasyonlar biçiminde incelenmek üzere; öncelikle nötrino osilasyonları yalnızca çeşni özdurumlarına bağlı olarak elde edilmiştir ve yoğunluk matrisi hesaplanmıştır. İki çeşnili durumda nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığı Bell-CHSH eşitsizliği ihlali, von Neumann entropisi, konkürans ve teleportasyon sadakati ölçümleri ile araştırılmıştır.

Bell-CHSH eşitsizliğinin saf olmayan durumlar için kullanılan bir formu olan (3.24) denklemi ile iki çeşnili durum için nötrino osilasyonlarının Bell-CHSH eşitsizliği hesaplanmıştır ve (4.26) denklemine göre söz konusu eşitsizliğin ihlal edildiği görülmüştür. Bu sonuca göre iki çeşnili durumda nötrino osilasyonları dolanıktır.

İki çeşnili durumda nötrino osilasyonlarının von Neumann entropisi denklem (4.31) ile elde edilmiştir ve elektron nötrinosunun müon nötrinosuna osilasyon olasılığı ile bire boylandırılmış entropi grafiği çizdirilmiştir. Şekil 4.1 ile verilen bu grafiğe göre elektron nötrinosunun yaşama olasılığının maksimum olduğu noktalarda entropi minimum değerlerini alırken, osilasyon yapma olasılığı ile yaşama olasılığının birbirine eşit olduğu noktalarda entropi maksimumdur. Osilasyon olasılığının yaşama olasılığınından daha büyük olduğu bölgede entropinin yaşama olasılığına benzer bir eğri ile azaldığı ve arttığı görülmektedir. Denklem (4.31) ile elde edilen iki çeşnili durumlar için nötrino osilasyonlarının von Neumann entropisi şekil 4.2 ile verilmiştir. Buna göre, entropinin maksimum değerinin yaklaşık 1.4 olduğu görülmektedir. Yaşama olasılığının bire, osilasyon olasılığının sıfıra eşit olacağı bir durumda beklenildiği üzere entropide sıfıra eşit olacaktır. Deneysel verilere göre gerçekte böyle bir durum mümkün olamayacağı için entropi hiçbir yerde sıfıra eşit değildir. Dolayısıyla, von Neumann entropisine göre iki çeşnili hal için nötrino osilasyonları dolanıktır.

Nötrino osilasyonlarının iki çeşnili hali için konkürans maksimum değerini osilasyon yapma olasılığı ile yaşama olasılığının eşit olduğu durumda alır. Söz konusu iki olasılığın eşit olduğu durumda sistem maksimum dolanık olacaktır. Ek olarak, (4.36) denklemine göre konküransın sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart osilasyon olasılığının sıfıra eşit olmasıdır. Böyle bir durumda dolanıklık söz konusu olmayacaktır. Ancak, nötrino osilasyonlarının deneysel verilerine göre böyle bir durum mümkün değildir. Dolayısıyla

konkürans ölçümüne göre iki çeşnili durum için nötrino osilasyonları daima kip dolanıklığına sahiptirler.

Konkürans ve von Neumann entropisi ölçümleri kullanılarak dolanıklık oluşumunun (ya da von Neumann entropisinin), konküransa bağlı $\mathcal{E}(C)$ fonksiyonuna eşitliği araştırılmıştır. Bu bağlamda, iki çeşnili hal için nötrino osilasyonlarının von Neumann entropisi ve konkürans ölçümleri (3.30) denklemini doğrulamıştır. Böylece, söz konusu ölçümlerin birbirleri cinsinden ifade edilebilecekleri, nötrino osilasyonlarının kip dolanıklığıyla test edilmiştir.

Nötrino osilasyonlarının iki çeşnili hali için teleportasyon sadakati ölçümü (4.44) denklemi ile elde edilmiştir. Bu ölçüme göre nötrino osilasyonlarının teleportasyon sadakatinin alabileceği maksimum değer, klasik kanalların alabileceği maksimum değerden daima daha büyük olacaktır. Sonuç olarak, iki çeşnili hal için nötrino osilasyonlarının teleportasyona elverişli birer kuantum kanallar oldukları görülmüştür.

Bazı ayrılabilir durumların kuantum korelasyonlarını ölçmeye yarayan kuantum diskortun analitik bir şekli olan geometrik diskort ölçümü kullanılarak nötrino osilasyonlarının iki çeşnili halinin kuantum korelasyonları incelenmiştir. Denklem (4.49)'ün sonucuna göre iki çeşnili durumda nötrino osilasyonları kuantum korelasyonlar içermektedirler.

Üç çeşnili durum için nötrino osilasyon olasılığı ve entropi hesapları yapıldıktan sonra Mathematica programı yardımıyla grafikleri çizdirilerek incelenmiştir. Üç çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon ve bire boylandırılmış entropi grafiği şekil 4.3 ile verilmiştir. Buna göre elektron nötrinosunun müon ve tau nötrinolarına osilasyon olasılıkları ile yaşama olasılığının eşit olduğu noktalarda entropi maksimum değerini alır. Elektron nötrinosunun yaşama olasılığının maksimum olduğu noktalarda ise entropi minimum değerlerini alır. Müon ve tau nötrinolarına osilasyon olasılıklarının yaşama olasılığınından daha büyük olduğu bölgede entropinin yaşama olasılığı eğrisine benzer bir biçimde azaldığı ve arttığı görülmektedir. Denklem (4.59) ile elde edilen üç çeşnili durumlar için nötrino osilasyonlarının von Neumann entropi grafikleri Şekil 4.4 ile

verilmiştir. Buna göre, elektron nötrinosunun entropisinin anlık değişimleri arasındaki farklar diğer çeşnilerin entropilerine göre daha azdır. Müon nötrinosunun entropisinde belirsizlikler artmaktadır. Tau nötrinosunun entropisinde ise belirsizlikler maksimumdur. Üç çeşni içinde entropinin gözlenen maksimum değeri aynıdır ve 1.9 civarındadır. Benzer şekilde minimum değerleride birbirlerine çok yakın olup 0.008 civarındadır ve hiçbir yerde sıfıra eşit değildir. Bunun sonucu olarak, üç çeşnili durumda nötrino osilasyonları von Neumann entropisi ölçümüne göre dolanıktır.

Dört çeşnili durum için elektron nötrinosunun osilasyon olasılığı ve bire boylandırılmış entropi grafiği Mathematica programı ile çizdirilerek şekil 4.5 ile verilmiştir. Dört çeşnili durumda elektron nötrinosunun müon, tau ve steril nötrinolarına osilasyon olasılıkları ile elektron nötrinosunun yaşama olasılığının eşit olduğu noktalarda iki çeşnili ve üç çeşnili durumlarda da olduğu gibi yine entropi maksimum değerini alır. Aynı şekilde, elektron nötrinosunun yaşama olasılığının maksimum olduğu noktalarda ise entropi minimum değerlerini alır. Müon ve tau nötrinolarına osilasyon olasılıklarının yaşama olasılığından daha büyük olduğu bölgede entropinin yaşama olasılığı eğrisine benzer bir biçimde azaldığı ve arttığı görülmektedir. Steril nötrinoya osilasyon olasılığının etkisiyle bu azalma üç çeşnili durum için elde edilen entropi grafiğindeki azalmadan daha zayıftır. Denklem (4.59) ile elde edilen nötrino osilasyonlarının von Neumann entropisi dört çeşnili durum için genişletilerek elektron, müon, tau ve steril nötrinolarının entropi grafikleri şekil 4.6 ile verilmiştir. Buna göre, elektron nötrinosunun entropisinin anlık değişimleri arasındaki farklar diğer çeşnilerin entropilerine göre daha azdır. Sırasıyla her bir çeşnide belirsizlikler artmaktadır ve steril nötrinonun entropisinde ise maksimumdur. Şekil 4.6 ‘ya göre elektron nötrinosunun entropisinin aldığı maksimum değer 2.2 ve minimum değer 0.01 iken müon nötrinosunun entropisinin maksimum değeri 2.25 civarındadır ve minimum değerlerinin de 0.05 olduğu görülür. Tau nötrinosunun minimum ve maksimum değerleri de müon nötrinosuyla neredeyse aynıdır. Ancak, steril nötrinonun entropisinin maksimum değeri 2.15 civarında olup minimum değerlerinin de yaklaşık 0.01 olduğu görülür. Dört çeşnininde entropisi hiçbir yerde sıfıra eşit değildir. Dolayısıyla, dört çeşnili durumda nötrino osilasyonları von Neumann entropisi ölçümüne göre dolanıktır.

İki çeşnili, üç çeşnili ve dört çeşnili durumlarda elektron nötrinosunun entropilerinin maksimum değerleri sırasıyla 1.4, 1.9 ve 2.2 olduğu ve çeşni sayısı arttıkça entropinin maksimum değerinin ve anlık değişimleri arasındaki farkların arttığı görülmüştür. Ayrıca, yine çeşni sayısının artmasıyla beraber osilasyon ve entropi genlikleri ile entropinin minimum değerleri de artmıştır. Bu sonuca göre kip dolanıklığının maksimum olduğu durum; çeşni sayısının en fazla olduğu ve osilasyon ve yaşama olasılıklarının birbirine en yakın değerlere sahip oldukları durumdur.

KAYNAKLAR

Alok, A.K., Banerjee, S. and Sankar, S.U. 2016. Quantum correlations in two-flavour neutrino oscillations. Nuclear Physics B, 909, 65-72.

Aspect, A., Grangier, P. and Roger, G. 1981. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. Physics Review Lettters, 47(7), 460-463.

Aspect, A., Grangier, P. and Roger, G. 1982. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: a new violation of Bell's inequalities. Physics Review Lettters, 49(2), 91-94.

Aspect, A., Dalibard, J. and Roger, G. 1982. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. Physics Review Lettters, 49(25), 1804-1807.

Banerjee, S., Alok, A.K., Srikanth, R. and Hiesmayr, B.C. 2015. A quantum-information theoretic analysis of three-flavor neutrino oscillations. Eur. Phys. J. C, 75:487.

Bell, J.S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics, 1(3), 195-199.

Bell, J.S. 1966. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. Review of Modern Physics, 38(3), 447-452.

Bilenky, S. 2010. Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos. University Press, New York.

Bohm, D. 1952. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I. Physics review, 85(2), 166.

Chadwick, J. 1914. Intensitätsverteilung im magnetischen Spectrum der beta Strahlen von radium B+ C. Verhandl. Dtsc. Phys. Ges., 16, 383.

Clauser, J.F., Horne, M.A., Shimony, A. and Holt, R.A. 1969. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. Physics Review Lettters, 23, 880.

Dakic, B., Vedral, V. and Brukner, C. 2010. Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord. Physics Review Letters, 105(19), 190502(1)-190502(4).

Davis Jr, R., Harmer, D.S. and Hoffman, K.C. 1968. Search for neutrinos from the sun. Physics Review Letters, 20(21), 1205.

Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. 1935. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? Physics Review, 47, 777.

Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E., Inoue, K., Ishihara, K., Ishino, H., Kobayashi, K., Kobayashi, Y., Koshio, Y., Miura, M., Nakahata, M., Nakayama, S.,

Okada, A., Okumura, K., Sakurai, N., Shiozawa, M., Suzuki, Y., Takeuchi, Y., Totsuka, Y., Yamada, S., Earl, M., Habig, A., Kearns, E., Messier, M. D., Scholberg, K., Stone, J.L., Sulak, L.R., Walter, C.W., Goldhaber, M., Barszczxak, T., Casper, D., Gajewski, W., Halverson, P.G., Hsu, J., Kropp, W.R., Price, L.R., Reines, F., Smy, M., Sobel, H.W., Vagins, M.R., Ganezer, K.S., Keig, W.E., Ellsworth, R.W., Tasaka, S., Flanagan, J.W., Kibayashi, A., Learned, J.G., Matsuno, S., Stenger, V.J., Takemori, D., Ishii, T., Kanzaki, J., Kobayashi, T., Mine S., Nakamura, K., Nishikawa, K., Oyama, Y., Sakai, A., Sakuda, M., Sasaki, O., Echigo, S., Kohama, M., Suzuki, A.T., Haines, T. J., Blaufuss, E., Kim, B. K., Sanford, R., Svoboda, R., Chen, M.L., Conner, Z., Goodman, J.A., Sullivan, G.W., Hill, J., Jung, C.K., Martens, K., Mauger, C., McGrew, C., Sharkey, E., Viren, B., Yanagisawa, C., Doki, W., Miyano, K., Okazawa, H., Saji, C., Takahata, M., Nagashima, Y., Takita, M., Yamaguchi, T., Yoshida, M., Kim, S.B., Etoh, M., Fujita, K., Hasegawa, A., Hasegawa, T., Hatakeyama, S., Iwamoto, T., Koga, M., Maruyama, T., Ogawa, H., Shirai, J., Suzuki, A., Tsushima F., Koshiba, M., Nemoto, M., Nishijima, K., Futagami, T., Hayato, Y., Kanaya, Y., Kaneyuki, K., Watanabe, Y., Kielczewska, D., Doyle, R.A., George, J.S., Stachyra, A.L., Wai, L.L., Wilkes, R.J. and Young, K.K. 1998. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. Physical Review Letters, 81(8), 1562.

Giunti, C. and Kim, C.W. 2007. Fundemental of neutrino physics and astrophysics. Oxford University Press, 710 p., New York.

Griffiths, D. 2015. Temel parçacıklara giriş. Çev. Ed: Önengüt, G., Nobel Yayın Dağıtım, 453 s., Ankara.

Henderson, L. and Vedral, V. 2001. Classical, quantum and total correlations. Journal of physics A: mathematical and general, 34(35), 6899.

Hill, S. and Wootters, W.K. 1997. Entanglement of a pair of quantum bits. Physics Review Letters, 78(26), 5022-5025.

Horodecki, R., Horodecki, P. and Horodecki, M. 1995. Violating Bell inequality by mixed spin-$\frac{1}{2}$ states: necessary and sufficient condition. Physics Letters A, 200, 340-344.

Horodecki, R., Horodecki, M. and Horodecki, P. 1996. Teleportation, Bell's inequalities and inseparability. Physics Letters A, 222, 21-25.

Horodecki, R. and Horodecki, M. 1996. Information-theoretic aspects of quantum inseparability of mixd states. Physics Letters A, 54, 1838.

Horodecki, R. 1996. Two-spin-$\frac{1}{2}$ mixtures and Bell'S inequalities. Physics Letters A, 210, 223-226.

Kodama, K., Ushida, N., Andreopoulos, C., Saoulidou, N., Tzanakos, G., Yager, P.,

Baller, B., Boehnlein, D., Freeman, W., Lundberg, B., Morfin, J., Rameika, R., Yun, J.C., Song, J.S., Yoon, C.S., Chung, S.H., Berghaus, P., Kubanstev, M., Reay, N.W., Sidwell, R., Stanton, N., Yoshida, S., Aoki, S., Hara, T., Rhee, J.T., Ciampa, D., Erickson, C., Graham, M., Heller, K., Rusack, R., Schwienhorst, R., Siela, J., Trammell, J., Wilcox, J., Hoshino, K., Jiko, H., Miyanishi, M., Komatsu, M., Nakamura, M., Nakano, T., Niwa, K., Nonaka, N., Okada, K., Sato, O., Akdogan, T., Paolone, V., Rosenfeld, C., Kulik, A., Kafka, T., Oliver, W., Patzak, T. and Schneps, J. 2001. Observation of tau neutrino interactions. Physics Letters B, 504(3), 218-224.

Kayser, B. 2004. Neutrino Physics. SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI04), Aug. 2-13.

Maki, Z., Nakagawa, M. and Sakata, S. 1962. Remarks on the unified model of elementary particles. Progress of Theoretical Physics, 28(5), 870-880.

Meszéna, B. 2015. Web Sitesi: http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino_oscillation. Erişim tarihi: 25.10.2018.

Nielsen, M.A. and Chuang, I.L. 2000. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 704 p., Cambridge.

Ollivier, H. and Zurek, W.Z. 2002. Quantum Discord: A Mesure of the Quantumness of Correlations. Physics Review Letters, 88(1), 017901-1-017901-4.

Pauli, W. E. F. 1930. Open letter to the group of radioactive people at the Gauverein meeting in Tübingen. 4 December 1930; Tübingen/Germany.

Pontecorvo, B. 1968. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. Soviet Physics Jetp, 26, 5.

Reines, F. and Cowan Jr, C.L. 1956. The neutrino. Nature London 178, 446-449.

Rutherford, E. 1899. VIII. Uranium radiation and the electrical conduction produced by it. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 47(284), 109-163.

Schumacher, B. and Westmoreland, M. 2010. Quantum processes, systems and information. Cambrige University Press, New York.

Streltsov, A. 2015. Quantum correlation beyond entanglement and their role in quantum information theory. Springer, 48p., Heidelberg.

Suekane, F. 2015. Neutrino oscillations: a practical guide to basics and applications. Springer, 185 p., Japan.

Tabrizi, Z.K. 2015. Phenomenology of the sterile neutrinos. theory. Ph.D. Thesis.

Institute for Research in Fundamental Sciences, School of Particles and Accelerators, 186, Tehran, Iran.

Tanabashi, M., Hagiwara, K., Hikasa, K., Nakamura, K., Sumino, Y., Takahashi, F., Tanaka, J., Agashe, K., Aielli, G., Amsler, C., Antonelli, M., Asner, D.M., Baer, H., Banerjee, Sw., Barnett, R.M., Basaglia, T., Bauer, C.W., Beatty, J.J., Belousov, V.I., Beringer, J., Bethke, S., Bettini, A., Bichsel, H., Biebel, O., Black, K.M., Blucher, E., Buchmuller, O., Burkert, V., Bychkov, M.A., Cahn, R.N., Carena, M., Ceccucci, A., Cerri, A., Chakraborty, D., Chen, M.-C., Chivukula, R.S., Cowan, G., Dahl, O., D'Ambrosio, G., Damour, T., de Florian, D., de Gouvˆea, A., DeGrand, T., de Jong, P., Dissertori, G., Dobrescu, B.A., D'Onofrio, M., Doser, M., Drees, M., Dreiner, H.K., Dwyer, D.A., Eerola, P., Eidelman, S., Ellis, J., Erler, J., Ezhela, V.V., Fetscher, W., Fields, B.D., Firestone, R., Foster, B., Freitas, A., Gallagher, H., Garren, L., Gerber, H.-J., Gerbier, G., Gershon, T., Gershtein, Y., Gherghetta, T., Godizov, A.A., Goodman, M., Grab, C., Gritsan, A.V., Grojean, C., Groom, D.E., Gr¨unewald, M., Gurtu, A., Gutsche, T., Haber, H.E., Hanhart, C., Hashimoto, S., Hayato, Y., Hayes, K.G., Hebecker, A., Heinemeyer, S., Heltsley, B., Hern´andez-Rey, J. J., Hisano, J., H¨ocker, A., Holder, J., Holtkamp, A., Hyodo, T., Irwin, K.D., Johnson, K.F., Kado, M., Karliner, M., Katz, U.F., Klein, S.R., Klempt, E., Kowalewski, R.V., Krauss, F., Kreps, M., Krusche, B., Kuyanov, Yu.V., Kwon, Y., Lahav, O., Laiho, J., Lesgourgues, J., Liddle, A., Ligeti, Z., Lin, C.-J., Lippmann, C., Liss, T.M., Littenberg, L., Lugovsky, K.S., Lugovsky, S.B., Lusiani, A., Makida, Y., Maltoni, F., Mannel, T., Manohar, A.V., Marciano, W.J., Martin, A.D., Masoni, A., Matthews, J., Meißner, U.-G. Milstead, D., Mitchell, R.E., M¨onig, K., Molaro, P., Moortgat, F., Moskovic, M., Murayama, H., Narain, M., Nason, P., Navas, S., Neubert, M., Nevski, P., Nir, Y., Olive, K.A., Pagan Griso, S., Parsons, J., Patrignani, C., Peacock, J.A., Pennington, M., Petcov, S.T., Petrov, V.A., Pianori, E., Piepke, A., Pomarol, A., Quadt, A., Rademacker, J., Raffelt, G., Ratcliff, B.N., Richardson, P., Ringwald, A., Roesler, S., Rolli, S., Romaniouk, A., Rosenberg, L.J., Rosner, J.L., Rybka, G., Ryutin, R.A., Sachrajda, C.T., Sakai, Y., Salam, G.P., Sarkar, S., Sauli, F., Schneider, O., Scholberg, K., Schwartz, A.J., Scott, D., Sharma, V., Sharpe, S.R., Shutt, T., Silari, M., Sj¨ostrand, T., Skands, P., Skwarnicki, T., Smith, J.G., Smoot, G.F., Spanier, S., Spieler, H., Spiering, C., Stahl, A., Stone, S.L., Sumiyoshi, T., Syphers, M.J., Terashi, K., Terning, J., Thoma, U., Thorne, R.S., Tiator, L., Titov, M., Tkachenko, N.P., T¨ornqvist, N.A., Tovey, D.R., Valencia, G., Van de Water, R., Varelas, N., Venanzoni, G., Verde, L., Vincter, M.G., Vogel, P., Vogt, A., Wakely, S.P., Walkowiak, W., Walter, C.W., Wands, D., Ward, D.R., Wascko, M.O., Weiglein, G., Weinberg, D.H., Weinberg, E.J., White, M., Wiencke, L.R., Willocq, S., Wohl, C.G., Womersley, J., Woody, C.L., Workman, R.L., Yao, W.-M., Zeller, G.P., Zenin, O.V., Zhu, R.-Y., Zhu, S.-L., Zimmermann, F., Zyla, P.A. 2018. Phys. Rev. D, 98, 030001.

Vedral, V. 2006. Introduction to quantum information science. Oxford University Press, 183 p., New York.

Wootters, W.K. 1998. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Physics Review Letters, 80(10); 2245-2248.

EKLER

EK 1 Grafiklerin Mathematica Kodları

EK 2 Bell-CHSH eşitsizliği hesabı

EK 3 Von Neumann entropisi hesabı

EK 4 Korelasyon Matrisinin çıkartılışında kullanılan matrisler

EK 5 İndirgenmiş yoğunluk matrislerinin elde edilişi

EK 6 Konkürans ifadesinin saf durumlar için türetilişi

EK 1 Grafiklerin Mathematica Kodları[10]

İki Çeşnili Durumda Nötrino Osilasyon ve Entropi Grafikleri

(initial=1 için elektron nötrinosunun osilasyon ve entropi grafikleri elde edilir.)

```
CS[z_]=Re[z]^2+Im[z]^2;
c12:=Cos[θ12];
s12:=Sin[θ12];
P[α_,β_,LoverE_,θ12_,Δms12_,inverted_]=Block[{U,ms1,ms2},
   ms1=If[inverted,Δms12,0];
   ms2=If[inverted,0,Δms12];
   U[a_,b_]:=If[a==1,If[b==1,c12,If[b==2,s12]],If[a==2,If[b==1,-s12,If[b==2,c12 ]]]];
   CS[Sum[Conjugate[U[α,i]] U[β,i] E^(-2 I ots If[i==1,ms1,If[i==2,ms2,-1]]
LoverE),{i,1,2}]]];

ots=1.2*10^6;
θ12=33°;
Δms12=(0.0000737/π)°;
initial=1;
maxLE=2π;

Plot[{P[initial,1,LoverE,θ12,Δms12,False],P[initial,2,LoverE,θ12,Δms12,False]},{Love
rE,0,maxLE},PlotLegends->{"νe\[RightArrow]νe olasılığı","νe\[RightArrow]νμ
olasılığı","entropi"},PlotStyle->{ Directive [Blue],Directive [Red]},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""},PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
S=(Sum[-
P[initial,β,LoverE,θ12,Δms12,False]Log[P[initial,β,LoverE,θ12,Δms12,False]]-(1-
P[initial,β,LoverE,θ12,Δms12,False])Log[(1-
P[initial,β,LoverE,θ12,Δms12,False])],{β,1,2}])
Plot[{S},{LoverE,0,maxLE},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.5,1,1.5,2}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""},PlotRange->{0,1.5},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
Plot[{P[initial,1,LoverE,θ12,Δms12,False],P[initial,2,LoverE,θ12,Δms12,False],Rescal
e[S,{0,1.4},{0,1}]},{LoverE,0,maxLE},PlotLegends->{"νe\[RightArrow]νe
olasılığı","νe\[RightArrow]νμ olasılığı","entropi"},PlotStyle->{ Directive [Blue,Opacity
```

[10] Verilen tüm grafiklerin kodları Balázs Meszéna'nın Wolfram Demonstrations Project için 2011 yılında hazırladığı ve 2015 yılında http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino_oscillation sayfasında yayınlanan kaynak kodu değiştirilerek ve geliştirilerek yazılmıştır.

[1],Dashed,Thickness [0.0002]],Directive [Red,Opacity [1],Dashed,Thickness [0.0002]],Directive [Green,Opacity [1],Thickness [0.002]]},Ticks->{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E(m/eV)",""}, PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize->14},ImageSize->500]

Üç Çeşnili Durumda Nötrino Osilasyon ve Entropi Grafikleri

(initial=1 için elektron nötrinosunun, initial=2 için müon nötrinosunun, initial=3 için müon nötrinosunun osilasyon ve entropi grafikleri elde edilir.)

```
CS[z_]=Re[z]^2+Im[z]^2;

c12:=Cos[θ12];c13:=Cos[θ13];c23:=Cos[θ23];

s12:=Sin[θ12];s13:=Sin[θ13];s23:=Sin[θ23];

P[α_,β_,LoverE_,δ_,θ12_,θ23_,θ13_,Δms12_,Δms23_,inverted_]=Block[{U,ms1,ms2,
ms3},

    ms1=If[inverted,Δms23-Δms12,0];
    ms2=If[inverted,Δms23,Δms12];
    ms3=If[inverted,0,Δms12+Δms23];

U[a_,b_]:=If[a==1,If[b==1,c13 c12,If[b==2,c13 s12,If[b==3,s13 E^(-I
δ)]]],If[a==2,If[b==1,-c23 s12-s13 s23 c12 E^(I δ),If[b==2,c23 c12-s13 s23 s12 E^(I
δ),If[b==3,c13 s23]]],If[a==3,If[b==1,s23 s12-s13 c23 c12 E^(I δ),If[b==2,-s23 c12-s13
c23 s12 E^(I δ),If[b==3,c13 c23]]]]]];

CS[Sum[Conjugate[U[α,i]] U[β,i] E^(-2 I ots If[i==1,ms1,If[i==2,ms2,If[i==3,ms3,-1]]]
LoverE),{i,1,3}]]];

ots=1.2*10^6;
θ23=40.7°;
θ12=33°;
θ13=8.43°;
δ=0;
Δms23=(0.00256/π)°;
Δms12=(0.0000737/π)°;
initial=1;
maxLE=4π;

Plot[{P[initial,1,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False],P[initial,2,LoverE,δ,θ12,θ
23,θ13,Δms12,Δms23,False],P[initial,3,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False]},{
```

```
LoverE,0,maxLE},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""},PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]

S=(Sum[-
P[initial,β,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False]Log[P[initial,β,LoverE,δ,θ12,θ23
,θ13,Δms12,Δms23,False]]-(1-
P[initial,β,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False])Log[(1-
P[initial,β,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False])],{β,1,3}])
Plot[{S},{LoverE,0,maxLE},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.5,1,1.5,2}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""},PlotRange->{0,2},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]

Plot[{P[initial,1,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False],P[initial,2,LoverE,δ,θ12,θ
23,θ13,Δms12,Δms23,False],P[initial,3,LoverE,δ,θ12,θ23,θ13,Δms12,Δms23,False],Re
scale[S,{0,1.9},{0,1}]},{LoverE,0,maxLE},PlotLegends->{"νe\[RightArrow]νe
olasılığı","νe\[RightArrow]νμ olasılığı","νe\[RightArrow]ντ olasılığı","νe\[RightArrow]νs
olasılığı","entropi"},PlotStyle->{ Directive [Blue,Opacity [1],Dotted,Thickness
[0.002]],Directive [Orange,Opacity [1],Dashed,Thickness [0.0002]],Directive
[Green,Opacity [1],DotDashed,Thickness [0.0002]],Directive [Red,Opacity
[1],Thickness [0.0002]]},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""}, PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
```

Dört Çeşnili Durumda Nötrino Osilasyon ve Entropi Grafikleri

(initial=1 için elektron nötrinosunun, initial=2 için müon nötrinosunun, initial=3 için müon nötrinosunun, initial=4 için steril nötrinonun osilasyon ve entropi grafikleri elde edilir.)

```
CS[z_]=Re[z]^2+Im[z]^2;
c12:=Cos[θ12];c13:=Cos[θ13];c23:=Cos[θ23];c14:=Cos[θ14];c24:=Cos[θ24];c34:=Cos
[θ34];
s12:=Sin[θ12];s13:=Sin[θ13];s23:=Sin[θ23];s14:=Sin[θ14];s24:=Sin[θ24];s34:=Sin[θ34
];

P[α_,β_,LoverE_,δ13_,δ14_,δ24_,θ12_,θ23_,θ13_,θ14_,θ24_,θ34_,Δms12_,Δms23_,Δ
ms14_,inverted_] = Block[{U,ms1,ms2,ms3,ms4},
ms1=If[inverted,Δms23-Δms12,0];
ms2=If[inverted,Δms23,Δms12];
ms3=If[inverted,0,Δms12+Δms23];
ms4=If[inverted,Δms14+Δms23-Δms12,Δms14];
```

```
U[a_,b_]:=If[a==1,If[b==1,c13 c12 c14,If[b==2,c13 c14 s12,If[b==3,c14 s13 E^(-I
δ13),If[b==4, s14 E^(-I δ14)]]]],
      If[a==2,If[b==1,c24 (-c23 s12-c12 E^(I δ13)s13 s23)-c12 c13 s14 s24 E^(I (δ14-
δ24)),
        If[b==2,c24 (c12 c23-E^(I δ13) s12 s13 s23)-c13 s12 s14 s24 E^(I (δ14-δ24)),
         If[b==3,c13 c24 s23-E^(-I (δ13+δ14-δ24)) s13 s14 s24,If[b==4, c14 E^(-I
δ24)s24]]]],
       If[a==3,If[b==1,c34 (-c12 c23 s13 E^(I δ13)+s12 s23)-c12 c13 c24 E^(I δ14)s14
s34-E^(I δ24)(-c23 s12-c12 E^(I δ13)s13 s23) s24 s34,
         If[b==2,c34 (-c23 E^(I δ13)s12 s13-c12 s23)-c13 c24 E^(I δ14) s12 s14 s34-
E^(I δ24)(c12 c23-E^(I δ13)s12 s13 s23) s24 s34,
          If[b==3,c13 c23 c34-c24 E^(-I (δ13-δ14))s13 s14 s34-c13 E^(I δ24) s23 s24
s34,If[b==4, c14 c24 s34]]]],
        If[a==4,If[b==1,-c12 c13 c24 c34 E^(I δ14)s14-c34 E^(I δ24)(-c23 s12-c12 E^(I
δ13) s13 s23) s24-(-c12 c23 E^(I δ13)s13+s12 s23) s34,
          If[b==2,-c13 c24 c34 E^(I δ14) s12 s14-c34 E^(I δ24)(c12 c23-E^(I δ13) s12
s13 s23) s24-(-c23 E^(I δ13) s12 s13-c12 s23) s34,
           If[b==3,-c24 c34 E^(I (δ14-δ13))s13 s14-c13 c34 E^(I δ24) s23 s24-c13 c23
s34,If[b==4, c14 c24 c34]]]]]]]];

CS[Sum[Conjugate[U[α,i]] U[β,i] E^(-2 I ots If[i==1,ms1,If[i==2,ms2,If[i==3,ms3
,If[i==4,ms4 ,-1]]]] LoverE),{i,1,4}]]];

ots=1.2*10^6;
θ23=40.7°;
θ14=8.53°;
θ24=9.8°;
θ34=25.84°;
θ12=33°;
θ13=8.43°;
δ13=0;
δ14=0;
δ24=0;
Δms14=(0.93/π)°;
Δms23=(0.00256/π)°;
Δms12=(0.0000737/π)°;
initial=1;
maxLE=4π;

Plot[{P[initial,1,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,F
alse],P[initial,2,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fa
lse],P[initial,3,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fal
se],P[initial,4,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fals
e]},{LoverE,0,maxLE},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""} ,PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
```

```
S=(Sum[-
P[initial,β,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,False]Log
[P[initial,β,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,False]]
-(1-
P[initial,β,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,False])
Log[(1-
P[initial,β,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,False])]
,{β,1,4}])
Plot[{S},{LoverE,0,maxLE},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.5,1,1.5,2}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""} ,PlotRange->{0,2.3},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
Plot[{P[initial,1,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,F
alse],P[initial,2,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fa
lse],P[initial,3,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fal
se],P[initial,4,LoverE,δ13,δ14,δ24,θ12,θ23,θ13,θ14,θ24,θ34,Δms12,Δms23,Δms14,Fals
e],Rescale[S,{0,2.2},{0,1}]},{LoverE,0,maxLE},PlotLegends->{"νe\[RightArrow]νe
olasılığı","νe\[RightArrow]νμ olasılığı","νe\[RightArrow]ντ olasılığı","νe\[RightArrow]νs
olasılığı","entropi"},PlotStyle->{Directive [Blue,Dotted],Thickness[0.0002]},Ticks-
>{{0,Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi,5Pi/2,3Pi,7Pi/2,4Pi},{0,0.25,0.5,0.75,1}},AxesLabel->{"L/E
(m/eV)",""} ,PlotRange->{0,1},PlotPoints->500,BaseStyle->{FontSize-
>14},ImageSize->500]
```

EK 2 Bell-CHSH eşitsizliği hesabı

(3.20) denklemi elde edilmek üzere bileşik sistemin spin ölçümünün beklenen değeri aşağıdaki gibi

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{2}(0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\cos\theta' & \sin\theta'\\ \sin\theta' & -\cos\theta'\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

hesaplanır. Tensörel çarpım gerçekleştirilerek

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\theta' & \cos\theta\sin\theta' & \sin\theta\cos\theta' & \sin\theta\sin\theta'\\ \cos\theta\sin\theta' & -\cos\theta\cos\theta' & \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta' & \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\cos\theta' & -\cos\theta\sin\theta'\\ \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' & -\cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta'\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi elde edilir ve bileşik sistemin spin ölçümünün beklenen değeri:

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle &= \langle\Psi^-|W_\theta W_{\theta'}|\Psi^-\rangle\\ &= \frac{1}{2}(0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\\ -\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\\ \sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\\ -\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{2}[-\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\\ &+ (-1)(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta')]\\ &= -[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'] = -cos(\theta - \theta')\end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak elde edilir.

EK 3 Von Neumann entropisi hesabı

$\rho = \sum_i (\lambda_i)\,|u_i\rangle\langle u_i|$ ve $\langle u_i|u_k\rangle = \delta_{ik}$ olmak üzere (3.28) denklemi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\log_2 \rho = -\sum_i (\log_2 \lambda_i)\,|u_i\rangle\langle u_i| \tag{3.1}$$

olduğu kullanılarak ρ operatörünün von Neumann entropisinin;

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_k (\lambda_k)\,|u_k\rangle\langle u_k|\right)\left(\sum_i (\log_2 \lambda_i)\,|u_i\rangle\langle u_i|\right)\right] \\ &= -\sum_{i,k} (\lambda_k)(\log_2 \lambda_i)\ \mathrm{Tr}[|u_k\rangle\langle u_k||u_i\rangle\langle u_i|] \\ &= -\sum_{i,k} (\lambda_k)(\log_2 \lambda_i)\ \mathrm{Tr}[|u_k\rangle\langle u_i|\delta_{ik}] \\ &= -\sum_k (\lambda_k)(\log_2 \lambda_k)\ \mathrm{Tr}[|u_k\rangle\langle u_k|] \\ &= -\sum_k (\lambda_k)(\log_2 \lambda_k)\ \langle u_k|u_k\rangle = -\sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k \end{aligned} \tag{3.2}$$

ifadesine eşit olduğu bulunur.

EK 4 Korelasyon Matrisinin çıkartılışında kullanılan matrisler

Korelasyon matrisi T'nin elemanları hesaplanırken kullanılan Pauli matrislerinin tensörel çarpımları:

$$\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 \otimes \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \otimes \sigma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \otimes \sigma_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 \otimes \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

biçimindedir.

EK 5 İndirgenmiş yoğunluk matrislerinin elde edilişi

(4.12) denklemi ile verilen ρ matrisinin indirgenmiş yoğunluk matrisleri ρ_α ve ρ_β aşağıdaki şekilde elde edilir:

Denklem (4.4) ile verilen $|v_\alpha(t)\rangle$ durumunun yoğunluk işlemcisi:

$$\rho = |U_{\alpha\alpha}|^2|10\rangle\langle 10| + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*|10\rangle\langle 01| + U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}|01\rangle\langle 10| + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2|01\rangle\langle 01| \tag{5.1}$$

biçimindedir. Bileşik sistemin durumu olan ρ'nun indirgenmiş yoğunluk matrisleri (3.7) ve (3.8) denklemleriyle bulunur. Söz konusu denklemler ile;

$$\begin{aligned}\rho_\alpha = Tr_\beta[\rho] &= |U_{\alpha\alpha}|^2|1\rangle\langle 1|\, Tr[|0\rangle\langle 0|] + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*|1\rangle\langle 0|\, Tr[|0\rangle\langle 1|] \\ &+ U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}|0\rangle\langle 1|\, Tr[|1\rangle\langle 0|] + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2|0\rangle\langle 0|\, Tr[|1\rangle\langle 1|] \\ &= |U_{\alpha\alpha}|^2|1\rangle\langle 1|\,\langle 0|0\rangle + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*|1\rangle\langle 0|\,\langle 1|0\rangle \\ &+ U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}|0\rangle\langle 1|\,\langle 0|1\rangle + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2|0\rangle\langle 0|\langle 1|1\rangle \\ &= |U_{\alpha\alpha}|^2|1\rangle\langle 1| + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2|0\rangle\langle 0|\end{aligned} \tag{5.2}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_\beta = Tr_\alpha[\rho] &= |U_{\alpha\alpha}|^2\, Tr[|1\rangle\langle 1|]|0\rangle\langle 0| + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\, Tr[|1\rangle\langle 0|]|0\rangle\langle 1| \\ &+ U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\, Tr[|0\rangle\langle 1|]|1\rangle\langle 0| + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2\, Tr[|0\rangle\langle 0|]|1\rangle\langle 1| \\ &= |U_{\alpha\alpha}|^2\langle 1|1\rangle|0\rangle\langle 0| + U_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}^*\langle 0|1\rangle|0\rangle\langle 1| \\ &+ U_{\alpha\alpha}^*U_{\alpha\beta}\langle 1|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2\langle 0|0\rangle|1\rangle\langle 1| \\ &= |U_{\alpha\alpha}|^2\,|0\rangle\langle 0| + \left|U_{\alpha\beta}\right|^2|1\rangle\langle 1|\end{aligned} \tag{5.3}$$

indirgenmiş yoğunluk matrisleri elde edilir.

EK 6 Konkürans ifadesinin saf durumlar için türetilişi

Konküransın saf durumlar için tanımı olan (3.33) denklemi:

$$C(\rho) = \inf \sum_k p_k \, C(|\Psi_k\rangle) = \inf C(|\Psi\rangle) = C(|\Psi\rangle) = \left|\langle \Psi | \widetilde{\Psi} \rangle\right| \tag{6.1}$$

şeklindedir. (4.5) denklemi ile tanımlanan $|\nu_\alpha(t)\rangle$ durumunu:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U_{\alpha\alpha}(t)|\nu_\alpha\rangle + U_{\alpha\beta}(t)\left|\nu_\beta\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\alpha\alpha}(t) \\ U_{\alpha\beta}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

olup bu durumun spin flip durumu:

$$\left|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\right\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\nu_\alpha^*(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\alpha\alpha}^*(t) \\ U_{\alpha\beta}^*(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\alpha\beta}^*(t) \\ U_{\alpha\alpha}^*(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

biçiminde elde edilir. Buna göre $|\nu_\alpha(t)\rangle$ durumunun konküransı $\left(\langle \nu_\alpha(t)|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\rangle = 2U_{\alpha\alpha}^*(t)U_{\alpha\beta}^*(t)\right.$ ve $\left.\overline{\langle \nu_\alpha(t)|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\rangle} = 2U_{\alpha\alpha}(t)U_{\alpha\beta}(t)\right.$ olmak üzere$\left.\right)$:

$$C(|\nu_\alpha(t)\rangle) = \left|\langle \nu_\alpha(t)|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\rangle\right| = \sqrt{\overline{\langle \nu_\alpha(t)|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\rangle}\langle \nu_\alpha(t)|\widetilde{\nu_\alpha(t)}\rangle}$$

$$= \sqrt{4|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2} = 2\sqrt{|U_{\alpha\alpha}|^2\left|U_{\alpha\beta}\right|^2} = 2\sqrt{P_{sur}P_{osc}} \tag{6.4}$$

olarak bulunur. Bu sonuca göre iki çeşnili durumda nötrino osilasyonlarının konküransı saf $|\nu_\alpha(t)\rangle$ durumu ile de hesaplanabilir. Ancak daha genel ve ölçülebilir bir hal olan saf olmayan drurum için ölçüm gerçekleştirilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özgür DEMİRKAP
Doğum Yeri : İzmir
Doğum Tarihi : 24/07/1988
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise : İzmir Bornova Mustafa Kemal Lisesi (2006)
Lisans : Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü (2014)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2015)
Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı (Eylül 2015-Aralık 2018)

Ulusal Kongre Sunum

Özgür Demirkap, Ali Ulvi Yılmazer, "Nötrino Osilasyonlarının Kuantum Korelasyonlar Cinsinden İncelenmesi", KOBİT (Kuantum Optiği ve Bilişim Toplantısı) 2 / poster sunumu, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul, Türkiye, 1-2 Şubat 2018.

Özgür Demirkap, Fulya Bağcı, A. Egemen Yılmaz, Barış Akaoğlu, "Kutupluluktan Bağımsız Çift Bantlı Elektromanyetik İndüklenmiş Saydamlık-Benzeri Metamalzeme Tasarımı", Ursi Türkiye 2018 9. Bilimsel Kongresi / sözlü sunum, KTO Karatay Üniversitesi, Konya, Türkiye, 6-8 Eylül 2018.

Özgür Demirkap, Fulya Bağcı, Emrullah Karakaya, Barış Akaoğlu, Bant Genişliği ve İletim Oranı Artırılmış Elektromanyetik İndüklenmiş Saydamlık-Benzeri Metamalzeme, 23. Yoğun Madde Fiziği – Ankara Toplantısı / poster sunumu, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 22 Aralık 2017