T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN DOĞRUSAL KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Ömer TANTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz 2018

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ömer TANTAŞ tarafından yapılan "Yüksek Mertebeden Doğrusal Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof. Dr. M. Enver AYDIN
Üye :	Prof. Dr. Necat POLAT
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Asıf YOKUŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 02/07/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2018

Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Prof. Dr. Necat Polat**'a şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR……		I
İÇİNDEKİLER……		II
ÖZET……		III
ABSTRACT……		IV
1.	**GİRİŞ**……	1
2.	**ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**…… ……	3
3.	**MATERYAL VE METOT**.....	5
3.1.	İkinci Mertebeden Dalga Denklemi İçin Bazı Teoremler……....	5
3.2	Titreşen Şerit Problemi ……..…..…..……..……	7
4.	**ARAŞTIRMA BULGULARI**.....	11
4.1.	Yüksek Mertebeden Doğrusal Hiperbolik Diferansiyel Denklemler……	11
4.2.	(4.1) Probleminin Fourier Serisi Şeklindeki Çözümü……	17
5.	**TARTIŞMA VE SONUÇ**…… ……...……..…….	23
6.	**KAYNAKLAR**…….....……..……..……..……..	25
ÖZGEÇMİŞ……...…….....		27

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN DOĞRUSAL KISMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer TANTAŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezin ilk bölümünde tez konusuna ilişkin bazı açıklayıcı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde literatür çalışmasına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem, eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca ikinci mertebeden dalga denklemi için bazı teoremler ve titreşen şerit probleminin çözümü Fourier seri yöntemiyle ele alınmıştır.

Dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmıdır ve iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda, dispersive terimli yüksek mertebeden doğrusal hiperbolik diferansiyel denklemin çözümlerinin iyi konumluluğu çalışılmıştır. İkinci kısımda, bu problemin Fourier serisi şeklindeki çözümü verilmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İyi Konumluluk, Düzgün Çözüm, Yüksek Mertebeden Hiperbolik Denklemler.

ABSTRACT

EXISTING OF SOLUTION TO THE HIGHER ORDER LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MASTER OF SCIENCE THESIS

Ömer TANTAŞ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2018

In the first chapter of this thesis some explanatory information on the thesis topic was given.

In the second chapter, related literature was given.

In the third chapter, basic definitions, theorems, equalities and inequalities that will be used throughout the thesis are given. Moreover, some theorems on solutions of second order linear hyperbolic differential equations and the solution of vibrating string problem by Fourier series method were given.

The fourth chapter is the original part of this thesis and consists of two subsections. In the first part, well-posedness of solutions of higher order linear hyperbolic differential equations with dispersive term is studied. In the second part, the solution of this problem was given by the form of Fourier series

In the fifth chapter, the obtained results are summarized and suggestions are presented.

Keywords: Well Posedness, Regular Solution, Higher Order Partial Equations

1. GİRİŞ

Mühendislik, Fizik ve diğer uygulamalı bilimlerin birçok dalında karşımıza cıkan dinamik sistemlerin ve problemlerın kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmesinden dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi matematiğin çalışma alanları içinde ağırlığını hissettirmekte ve önemli bir yer tutmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler günümüzde doğanın temel kanunlarının matematiksel modelle formüllendirilmesinde, uygulamalı matematiğin geniş bir alanında, matematiksel fizikte birden çok değişkene bağlı kapsamlı değişik problemlerin matematiksel olarak analizinde ve mühendislikte karşımıza çıktıklarından dolayı matematiksel birçok bilimde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi bir rol oynar.Bugün matematiksel fizikte birçok problem kısmi diferansiyel denklemlere uygun başlangıç ve / veya sınır koşulları verilerek tanımlanabilmektedir. Bu problemler,verilen ek koşullara bağlı olarak başlangıç, sınır veya başlangıç ve sınır değer problemleri olarak adlandırılmaktadır.Bütün fiziksel teoremlerin temeli kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisi, matematiksel disiplinler içerisinde en önemlisidir (Myint-U ve Debnath 2007).

Genel olarak ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik olmak üzere üç sınıfta toplanırlar. Daha yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için de her ne kadar ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu kadar kolay belirlenemese de benzer sınıflandırma bulunmaktadır.

Bugün elimizde bulunan birçok teorik ve uygulamalı çalışma iki veya daha yüksek mertebeli kısmi diferansiyel denklemler içermektedir. Bu denklemleri barındıran bazı klasik ve klasik olmayan problemlerin çözümleri için daha geniş bilgi almak isteyenler (Myint-U ve Debnath 2007), (Amanov and Yuldasheva 2009), (Amanov and Ashralyev 2014), (Sabitov 2015), (Amanov 2015), Kozhanov and Pinigina 2017 kaynaklarına ve bunların içindeki referanslara başvurulabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.Birinci bölüm olan giriş bölümünden sonra, bizim üzerinde çalıştığımız denkleme benzer daha önce yapılan çalışmalara değindiğimiz Önceki Çalışmalar adını alan ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili var olan literatürün özeti verilmiştir.

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, tanımlara, eşitsizliklere,uzaylara, ve teoremlere yer verilen Materyal ve Metod adını verdiğimiz üçüncü bölümde ise ikinci mertebeden dalga denklemini içeren bir başlangıç ve sınır değer problemi için bazı teoremler verildikten sonra buna örnek olarak ele alabiceğimiz en yalın haldeki ikinci mertebeden dalga denklemini içeren bir başlangıç ve sınır değer

probleminin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne yer verilmiştir .

Araştırma Bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde daha önceki çalışmalardan farklı olarak sınırlı bölgede yüksek mertebeden doğrusal sabit katsayılı hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denkleme dispersive terim (u) ekleyerek aşağıdaki dispersive terimli yüksek mertebeden doğrusal sabit katsayılı hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denklem için

$$Lu = \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I \right) \right) u = f(x,t)$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır.Bu denklem için öncelikle verilen sınırlı bölgede süreklilik ve sınırlılıktan faydalanılarak bir çözümün var olduğu gösterilmeye calışılacak ve ardından verilen bölgede elde edilen çözümün tekliği ve kararlılığı (denklemde verilen verilere bağlılık) ile birlikte problemin iyi konumlu olduğu verilerek problemin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümü elde edilmeye çalışılacaktır.

Beşinci bölümde ise, tezde elde edilen temel sonuçlar verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi diferansiyel denklemlerin birçoğunun hiperbolik, parabolik ve eliptik tiplerinden biri olduğu bilinmektedir.Konik denklem sınıflandırılması yardımıyla ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırmaktayız.Elimizdeki en yalın haldeki kısmi diferansiyel denklemler dalga (hiperbolik), ısı (parabolik) ve Laplace (eliptik) denklemleri olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u_t - k u_{xx} &= 0, \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Matematiksel fizikte ve yine birçok uygulamalı bilimde karşımıza çıkan birçok problem kısmi diferansiyel denklemlere özellikle yukarıda verilen tipten veya bunları içeren problemlere indirgenirler. İkinci mertebeden olan kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemler çeşitli yönlerden çalışılmıştır. Ancak karşılaşılan çeşitli zorluklardan dolayı yüksek mertebeli denklemler için bu yönlü çalışmalar azdır.

Amanov and Yuldasheva 2009 da $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda ele aldıkları

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

doğrusal sabit katsayılı yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklem için sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini gerçekleştirdiler.Bu çalışmada k nın bazı değerleri için hiperbolik tipe dönüşen denklem için sınır değer problemi çalışmanın zorluğu ortadadır.

Amanov and Ashyralyev 2014 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda ele aldıkları

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

doğrusal sabit katsayılı yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklem için başlangıç ve sınır değer ile sınır değer problemlerinin çözülebilirliğinin k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olduğunu gerçekleştirdiler.Bu çalışmada da k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olarak ortaya çıkan hiperbolik tip için sınır koşullarından dolayı ve eliptik tip için de başlangıç koşullarından dolayı çalışmanın zorluğu ortadadır.

Amanov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı

durumunda ele aldığı

$$t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

doğrusal değişken katsayılı yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklem için başlangıç ve sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

Sabitov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 1$ tamsayısı durumunda ele aldığı

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t)$$

doğrusal sabit katsayılı yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

Kozhanov and Pinigina 2017 de Ω, R^n de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$(-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} + \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}) - a(x)u = f(x,t)$$

kısmi diferansiyel denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi.

3. MATERYAL VE METOT

Sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar, eşitlikler ve eşitsizlikler için Polat 2005, Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011 kaynaklarına bakınız. Ayrıca tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. İkinci Mertebeden Dalga Denklemi İçin Bazı Teoremler

$U \subset R^n$ açık ve ∂U sınırına sahip sınırlı bir bölge, $T > 0$ olmak üzere $U_T = U \times (0,T]$ olsun.

$$\begin{cases} u_{tt} - Lu = f, & (x,t) \in U_T, \\ u = 0, & (x,t) \in \partial U \times (0,T], \\ u = g, & (x,t) \in U \times \{t = 0\}, \\ u_t = h, & (x,t) \in U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemi verilsin. Burada $f : U_T \longrightarrow R$, $g,\ h : U \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyonlar ve $u = u(x,t)$ ve $\overline{U}$,U' nun kapanışı olmak üzere $u : \overline{U}_T \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyon ve L sembolü, her bir t zamanı için ikinci mertebeden yer değişkenlerine göre doğrusal bir kısmi diferansiyel operatördür.

Teorem 3.1.1. (Gelişmiş Düzenlilik)

$g \in H_0^1(U),\ h \in L^2(U),\ f \in L^2(0,T;L^2(U))$ koşulları altında $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ ($u' \in L^2(0,T;L^2(U))$ ve $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ ile birlikte), (3.1) probleminin zayıf çözümü ise

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(U)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(U))$$

dır ve burada aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|u(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u'(t)\|_{L^2(U)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}) \\ &\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U)} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\right). \end{aligned}$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Ayrıca, $g \in H^2(U),\ h \in H_0^1(U),\ f' \in L^2(0,T;L^2(U))$ koşulları altında

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(U)), u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(U)),$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(U)),\ u''' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

dır ve burada aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|u(t)\|_{H^2(U)} + \|u'(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u''(t)\|_{L^2(U)} + \|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U)} + \|g\|_{H^2(U)} + \|h\|_{H^1(U)}\right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.2. (Daha Yüksek Düzenlilik)

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ \frac{d^k f}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{m-k}(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)) \quad \text{(k=0,...,m+1)}$$

dır ve burada aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{H^{m+1-k}(U)} \le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{m-k}(U))} + \|g\|_{H^{m+1}(U)} + \|h\|_{H^m(U)}\right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.3.

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ f \in L^1(0,T;H^m(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C(0,T;H^{m+1}(U)) \cap C^1(0,T;H^m(U)) \cap C^2(0,T;H^{m-1}(U))$$

tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.1.4. (Sonsuz Diferansiyellenebilirlik)

$g,h \in C^\infty(\overline{U}),\ f \in C^\infty(\overline{U_T})$ ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C^\infty(\overline{U_T})$$

tek çözüme sahiptir.

3.2. iki Ucu Sabitleştirilmiş Titreşen Şerit Problemi

Aşağıda iki ucu sabitleştirlimiş titreşen şerit problemi olarak bilinen problem için elde edilen ve uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla ikinci mertebeden doğrusal sabit katsayılı hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilebilen problem verilmiştir

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) &= g(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= 0, \qquad t \ge 0, \\ u(l,t) &= 0, \qquad t \ge 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Probleminin çözümünü değişkenlerin ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle arayalım. Bunun için

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.3}$$

şeklinde ve aşikar olmayan çözüm aranırsa λ ayrılma sabiti olmak üzere

$$XT'' = c^2 X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda$$

ve buradan

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{3.4}$$

$$T'' - c\lambda T = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Sınır koşullarından elde edilen $X(0) = 0$ ve $X(l) = 0$ ile birlikte $X(x)$ i belirlemek için

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

özdeğer problemini öncelikle çözmeliyiz. $\lambda \ge 0$ durumunda aşikar çözüm olup $\lambda <$

0 durumunda

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$$

genel çözümden $X(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ ve $X(l) = 0$ koşulundan

$$B\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$$

bulunur. Eğer $B = 0$ ise aşikar çözüm vardır. Aşikar olmayan çözüm için

$$\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

veya

$$-\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$$

bulunur. λ nın sonsuz farklı değerler kümesi için problem aşikar olmayan çözüme sahiptir. λ_n nin bu değerleri problemin özdeğerleri ve

$$\sin(\frac{n\pi}{l})x, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

ise tekabul eden öz fonksiyonları olarak adlandırılır.

(3.6) probleminin çözümü

$$X_n(x) = B_n\sin(\frac{n\pi}{l})x$$

dır.

$\lambda = \lambda_n$ için (3.5) denkleminin genel çözümü, C_n ve D_n keyfi sabitler olmak üzere

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $a_n = B_nC_n$ ve $b_n = B_nD_n$ olmak üzere (3.3) her n için yazılabilen

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

fonksiyonları (3.2) yi sağlar. (3.2) deki denklem doğrusal ve homojen olduğundan doğrusal birleşim ilkesinden

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.7}$$

sonsuz serisi de, yakınsak ve x ve t ye göre iki defa sürekli diferansiyellenebilir olması koşulları altında, bir çözümdür. Serinin her bir terimi (3.2) deki sınır koşullarını sağladığından seri de bunları sağlar. Sağlanması gereken iki başlangıç koşulu kaldı. Bu koşullardan a_n ve b_n sabitlerini bulabiliriz.

İlk olarak (3.7) serisini t e göre diferansiyeli

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}\left(-a_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + b_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

dır. (3.2) deki başlangıç koşullarını uygularsak

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ u_t(x,0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ Fourier sinüs serileri cinsinden yazlabilirse bu denklemler sağlanır. Katsayılar da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde olur.

(3.8) de verilen a_n ve b_n katsayıları ile birlikte (3.7) serisi, (3.2) probleminin çözümüdür.

Yukarıda verilen (3.7) çözümü biçimsel çözüm olarak adlandırılır. Bazı koşullar altında bunun çözüm olduğunu göstermemiz gerekir:

$f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ de sürekli ve $f(0) = f(l) = 0$ ise

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0, l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $f''(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ de sürekli ve $f''(0) = f''(l) = 0$ olmalıdır.

$g(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ de sürekli ve $g(0) = g(l) = 0$ ise

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0, l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $g'(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ de sürekli olmalıdır.

Yukarıdaki varlık koşulları altında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir $u(x, t)$ fonksiyonu (3.2) probleminin çözümü ise tektir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yüksek Mertebeden Doğrusal Hiperbolik Diferansiyel Denklemler

$\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, 0 < t < T\}$ dikdörtgensel bölgesinde p ve T pozitif gerçel sayılar ve k belirli doğal sayı olmak üzere

$$\begin{cases} Lu = \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I\right)\right) u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le p, \\ \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(0,t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(p,t) = 0, \quad m = 0,1,2,...,k-1, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç-sınır değer problemi verilsin. Burada $f : \Omega \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyon ve $u = u(x,t)$ olmak üzere $u : \overline{\Omega} \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur. Yukarıda verilen problemin $u(x,t)$ çözümü ile ilgileneceğiz.

Aşağıdaki uzayları tanımlayalım:

$$V(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C_{x,t}^{2k-2,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega); (4.1) \text{ deki koşulları sağlasın.} \right\}$$

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f(x,t) : f \in C_{x,t}^{k,0}(\overline{\Omega}),\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \in L_2(\Omega);\ \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} = 0 \ \ x = 0 \text{ da} \\ \text{ve} \ \ x = p,\ m = 0,1,...,\frac{k-2}{2} \end{array} \right\}$$

Tanım 4.1.1. $f(x,t) \in C(\Omega)$ olmak üzere (4.1) probleminin $u(x,t) \in V(\Omega)$ çözümüne düzenli çözüm denir.

Lemma 4.1.2. $1 \le n \le k$ olmak üzere herhangi bir n ve $u(x,t) \in V(\Omega)$ fonksiyonu içinaşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 \le \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \right\|^2$$

İspat.

$$\left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 = \int_0^T \left[\int_0^p \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right) dx \right] dt$$

olup parantez içi integralin x e göre kısmi integrali alınır ve (4.1) deki koşullar kullanılırsa

$$\left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 = \int_0^T \int_0^p \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} dx dt$$

olup buradan

$$\left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2 \leq \int_0^T \int_0^p \left| \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right| dxdt$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliğinin uygulanmasıyla eşitsizliğin geçerliliğine ulaşılır.

Lemma 4.1.3. $u(x,t)$ (4.1) probleminin düzenli çözümü olsun. Ayrıca

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial t}, \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}}, \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad m = 0, 1, ..., k$$

türevleri ve $f(x,t)$ fonksiyonu $C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ sınıfından olsun. O halde sadece k ve T ye bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}$$

kestirimi sağlanır. Burada

$$\|u\|^2_{W_2^{k,1}(\Omega)} = \sum_{m=0}^{k} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

dır.

İspat.

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \right) = Lu$$

denkleminin her iki tarafı $\frac{\partial u}{\partial t}$ ile çarpılır ve $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \ 0 < t < \tau; \ \tau < T\}$ bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \right) \right) dxdt = \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Ludxdt \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.2) denkleminde elde edilen kısmi türevlerin çarpımı aşağıdaki gibi bulunur;

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x^m} \frac{\partial^{2k-1-m} u}{\partial x^{2k-1-m}} \right) + (-1)^k \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

(4.1) deki başlangıç ve sınır koşullarıyla (4.2) denklemi

$$(-1)^k \frac{1}{2}\int_0^p \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx + (-1)^k \frac{1}{2}\int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx + (-1)^k \frac{1}{2}\int_0^p u^2 dx = \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Lu dx dt$$

haline gelir. Yukarıdaki son denklemin her iki tarafı $2(-1)^k$ ile çarpılırsa

$$\int_0^p \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx + \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx + \int_0^p u^2 dx = 2(-1)^k \int_0^\tau \int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} Lu dx dt$$

$$\int_0^p \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx + \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx + \int_0^p u^2 dx \leq 2\int_0^\tau \int_0^p |u_t Lu| \, dx dt \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.3) denklemindeki integralin üst sınırı τ yu T ile değiştirirsek

$$\int_0^p \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx + \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx + \int_0^p u^2 dx \leq 2\int_0^T \int_0^p |u_t Lu| \, dx dt \tag{4.4}$$

elde edilir.

(4.4) denkleminin τ ya göre 0 dan T ye integrali

$$\int_0^T \int_0^p \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]^2 dx dt + \int_0^T \int_0^p \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2 dx dt + \int_0^T \int_0^p u^2 dx dt \leq 2T \int_0^T \int_0^p |u_t Lu| \, dx dt$$

olup buradan

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 \leq 2T \int_0^T \int_0^p |u_t Lu| \, dx dt$$

elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafına

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|b|^2$$

eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 &\leq \frac{2T\epsilon}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{2T}{2\epsilon}\|Lu\|^2 \\ \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 &\leq T\epsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{T}{\epsilon}\|Lu\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\epsilon = \frac{1}{2T}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 &\leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + 2T^2\|Lu\|^2 \\ 2\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + 2\|u\|^2 &\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + 4T^2\|Lu\|^2 \\ \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 &\leq 4T^2\|Lu\|^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. $C_1 = 4T^2$ alınırsa

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|u\|^2 \leq C_1\|Lu\|^2 \tag{4.6}$$

olur.

$\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2$, $m = 1, 2, ..., k-1$ normuna ait kestirim elde etmek için aşağıdaki Lemma 4.1.2 deki eşitsizliği

$$\left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}\right\|^2 \tag{4.7}$$

kullanalım. Eğer (4.7) eşitsizliğini n ye göre 1 den $k-1$ e kadar toplarsak ve (4.10) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} n &= 1 : \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 \\ n &= 2 : \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2 \\ n &= 3 : \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2 \\ n &= 4 : \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right\|^2 \end{aligned}$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{aligned} n &= k-3 : \left\|\frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-4} u}{\partial x^{k-4}}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \\ n &= k-2 : \left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 \\ n &= k-1 : \left\|\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2 \end{aligned}$$

$+$

.....

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2\\
\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 &\leq \|u\|^2+\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2\\
\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 &\leq \|u\|^2+\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2\leq C_1\|Lu\|^2\\
\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 &\leq C_1\|Lu\|^2 \qquad (4.8_1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Aynı şekilde (4.7) eşitsizliğini n ye göre 2 den $k-2$ ye kadar toplarsak

$$\begin{aligned}
n &= 2: \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2\\
n &= 3: \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2\\
n &= 4: \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right\|^2
\end{aligned}$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$\begin{aligned}
n &= k-4: \left\|\frac{\partial^{k-4} u}{\partial x^{k-4}}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-5} u}{\partial x^{k-5}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2\\
n &= k-3: \left\|\frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-4} u}{\partial x^{k-4}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2\\
n &= k-2: \left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2
\end{aligned}$$

$+$

.....

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{2k-2}u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2$$
$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2$$

eelde edilir. (4.8_1) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2 \leq C_1\|Lu\|^2$$
$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-2}u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2 \leq C_1\|Lu\|^2 \qquad (4.8_2)$$

elde edilir.

Yukarıdaki şekilde devam edilirse

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^{k-3}u}{\partial x^{k-3}}\right\|^2 \leq C_1\|Lu\|^2 \qquad (4.8_3)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\left\|\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 \leq C_1\|Lu\|^2 \qquad (4.8_{k-1})$$

elde edilir.

(4.8_1) , (4.8_2) , ..., (4.8_{k-1}) eşitsizliklerini toplarsak

$$\sum_{m=1}^{k-1}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2+\sum_{m=1}^{k-1}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2 \leq (k-1)C_1\|Lu\|^2$$

$$2\sum_{m=1}^{k-1}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2 \leq (k-1)C_1\|Lu\|^2$$

$$\sum_{m=1}^{k-1}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2 \leq \frac{k-1}{2}C_1\|Lu\|^2 \qquad (4.9)$$

elde edilir.

(4.9) ve (4.6) eşitsizliğini toplarsak

$$\sum_{m=1}^{k-1}\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2+\|u\|^2+\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leq \frac{k+1}{2}C_1\|Lu\|^2$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 &\leq \frac{k+1}{2} C_1 \|Lu\|^2 \\ \|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} &\leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C = \frac{k+1}{2} C_1$ alındı. İspat tamamlandı.

Sonuç 4.1.4. Lemma 4.1.3 den (4.1) probleminin tek çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.5. Lemma 4.1.3 den (4.1) probleminin $f(x,t)$ ye sürekli olarak bağımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.6. Lemma 4.1.3, Sonuç 4.1.4 ve Sonuç 4.1.5 den (4.1) probleminin iyi konumlu olduğu çıkar.

4.2. (4.1) Probleminin Fourier Serisi Şeklindeki Çözümü

(4.1) probleminin Fourier serisi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \tag{4.10}$$

şeklinde düzenli çözümünü arayalım. Burada $L_2(0,p)$ de $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n \in \mathbb{N}$ özfonksiyonları tam ortonormal sistem oluşturur. $u(x,t)$ nin (4.1) deki sınır koşullarını sağladığı açıktır.

$f \in W(\Omega)$ fonksiyonunu $X_n(x)$ cinsinden

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \tag{4.11}$$

seriye açarsak

$$f_n(t) = \int_0^p f(x,t) X_n(x) dx \tag{4.12}$$

olur.

(4.10) ve (4.11) i (4.1) denkleminde yazarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n^{(2k)}(x) + (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

olur.

$X_n^{(2k)}$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x \\ X_n'(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

$$k = 1 \ : \qquad X_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^2 \sin \lambda_n x$$

$$X_n'''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^3 \cos \lambda_n x$$

$$k = 2 \ : \qquad X_n^{(4)}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^4 \sin \lambda_n x$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$X_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^{2k} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x)$$

olup bunu yerine yazar ve $(-1)^k$ ile çarparsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x) + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$u_n''(t) + u_n(t) + \lambda_n^{2k} u_n(t) = (-1)^k f_n(t) \quad , \qquad 0 < t < T \tag{4.13}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.1) in başlangıç koşulları aşağıdaki hale gelir:

$$u_n(0) = 0, \quad u_n^{'}(0) = 0 \ . \tag{4.14}$$

(4.13) ve (4.14) probleminin çözümü

$$u_n(t) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}} \int_0^t f_n(\tau) \sin\left(\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}(t-\tau)\right) d\tau \tag{4.15}$$

dır.

Lemma 4.2.1. Eğer $f \in W(\Omega)$ ise, her $t \in [0,T]$ için $f_n^{(k+1,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|u_n(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}\lambda_n^{k+1}} \left\| f_n^{(k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)}.$$

İspat. (4.12) nın x e göre kısmi integralini alırsak

$$f_n(t) = \left(f(x,t) \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{-1}{\lambda_n} \cos \lambda_n x \right)_0^p + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^p \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$$

elde edilir. $f \in W(\Omega)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafının birinci kısmı sıfır olur. Buna göre

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^p \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$$

olur. 2. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^2} \int_0^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x dx$$

olur. 3. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^3} \int_0^p \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$$

olur. 4. defa x e göre kısmi integral alırsak

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^p \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x dx$$

olur. Nihayet x e göre k+1. defa kısmi integral alırsak

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\lambda_n^{k+1}} \left| f_n^{(k+1,0)}(t) \right| \tag{4.16}$$

olur.

(4.16) ve Cauchy Schwarz Bunyakowsky eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}}\frac{1}{\lambda_n^{k+1}}\int_0^t \left|f_n^{(k+1,0)}(\tau)\right| d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}}\frac{1}{\lambda_n^{k+1}}\left(\int_0^T |1|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \left|\left|f_n^{(k+1,0)}(\tau)\right|\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.17) \\ &\leq \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}\lambda_n^{k+1}} \left\|f_n^{(k+1,0)}\right\|_{L_2(0,T)} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma ispatlandı.

Teorem 4.2.2. Eğer $f \in W(\Omega)$ ise o zaman (4.1) probleminin düzenli çözümü vardır.

İspat. (4.10) serisinin ve aşağıdaki (4.18) ve (4.19) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsaklığını ispatlayalım:

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n^{(2k)}(x)$$

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n^{(2k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \lambda_n^{2k} u_n(t)X_n(x) \qquad (4.18)$$

$$(-1)^k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u\right) = f(x,t) - \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}$$

$$(-1)^k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \lambda_n^{2k} u_n(t)X_n(x). \qquad (4.19)$$

(4.19) deki ilk seri $f \in W(\Omega)$ olduğundan yakınsaktır. (4.19) deki ikinci seri (4.18) serisiyle aynıdır. Bu nedenle (4.18) serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu gösterirsek bu aynı zamanda (4.10) ve (4.19) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsak olduğu çıkar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} |u_n(t)|$$

serisi (4.18) için baskın seridir. Lemma 4.2.1, Cauchy Schwarz Bunyakowsky, Bessel

eşitsizliği ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} |u_n(t)| &\leq \sqrt{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{\sqrt{1+\lambda_n^{2k}}} \left\| f_n^{(k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)} \\ &\leq \frac{p}{\pi} \sqrt{T} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)}} \qquad (4.20) \\ &\leq \frac{p}{\sqrt{6}} \sqrt{T} \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Bu nedenle (4.18) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Lemma 4.2.1 den ve (4.20) kestiriminden (4.10), (4.18) ve (4.19) serilerinin düzgün ve mutlak yakınsak olduğu çıkar.

(4.18) ve (4.19) denklemlerini toplarsak (4.10) çözümünün (4.1) denklemini sağladığı çıkar.

$X_n(x)$ fonksiyonunun özelliklerinden dolayı (4.10) çözümü (4.1) deki sınır koşullarını sağlar.

(4.15) ve (4.15) in türevinden (4.10) çözümü (4.1) deki başlangıç koşullarını sağlar.

Böylece teorem ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Araştırma Bulguları bölümünde ele alınan aşağıdaki dispersive terimli yüksek mertebeden doğrusal sabit katsayılı hiperbolik tipten kısmi diferansiyel denklem için

$$Lu = \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I \right) \right) u = f(x,t)$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmış ve problemin çözümünün varlığı gösterildikten sonra çözümün tekliği ve kararlılığı özellikleriyle birlikte iyi konumlu olduğu gösterilmiştir. Bu problemde bizim denkleme eklediğimiz dispersive teriminin yerine damping terim eklenen durumları için de benzer çalışmalar yapılarak iyi konumluluk çalışılabilir. Yine bizim ele aldığımız sabit katsayılı problem yerine değişken katsayılı bazı durumları için de iyi konumluluk çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Amanov, D., Yuldasheva, A.V., 2009. Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 3(2): 227-248.

Amanov, D., Ashyralyev, A., 2014. Well-posedness of boundary-value problems for partial differential equations of even order, Electronic Journal of Differential Equations, 2014 (108), 1-18.

Amanov, D., 2015. Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation, 268, 1282-1291.

Brezis, H. 2011. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Evans, L. C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India.

Kozhanov, A.I., Pinigina, N.R. 2017, Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations, Mathematical Notes, 101(3), 467–474.

Myint-U, T. ve Debnath, L., 2007. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser Boston.

Polat, N. 2005. Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu (Blow Up), Doktora Tezi.

Sabitov, K.B., 2015. The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations, Mathematical Notes, 97 (2), 255–2675.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2006 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Anabilim Dalında lisans öğrenimimi tamamladım. 2013 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde ikinci lisans öğrenimimi tamamladım. 2006 yılından beri MEB bünyesinde öğretmenlik yapiyorum.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	ÖMER TANTAŞ
ÖĞRENCİ NO	15804003
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	YÜKSEK MERTEBEDEN DOĞRUSALKISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	33
BENZERLİK ORANI	% 11
RAPORLAMA TARİHİ	03/07/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 33 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 11 dır.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☐ Alıntılar hariç/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)
ÖMER TANTAŞ
(Öğrencinin Adı Soyadı)

(İmza) 03/07/2018 Prof. Dr. Necat POLAT **Tez Danışmanı**	(İmza) 03/07/2018 Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY **Anabilim Dalı Başkanı**