T.C.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İYİ KONUMLULUK

Habib DEMİRTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz 2018

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Habib DEMİRTAŞ tarafından yapılan "Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin İyi Konumluluk" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Prof. Dr. Necat POLAT
Üye :	Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Asıf YOKUŞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 02/07/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

..../.../2018

Doç. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Prof. Dr. Necat Polat**'a şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR……		I
İÇİNDEKİLER……		II
ÖZET……		III
ABSTRACT……		IV
1.	**GİRİŞ**……	1
2.	**ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**…… ……	3
3.	**MATERYAL VE METOT**.....	5
3.1.	İkinci Mertebeden Dalga Denklemi İçin Bazı Teoremler……....	5
3.2	İki ucu sabitleştirilmiş Titreşen Şerit Problemi ……..…….	7
3.3	İkinci Mertebeden Eliptik Denklemler İçin Bazı Teoremler ……..……	10
3.4	Dikdörtgensel Bölge İçin Dirichlet Problemi …….....	12
4.	**ARAŞTIRMA BULGULARI**.....	17
4.1.	Yüksek Mertebeden Değişken katsayılı Doğrusal Diferansiyel Denklemler.....	17
4.2.	(4.1) Probleminin Fourier Serisi Şeklindeki Çözümü……..	23
5.	**TARTIŞMA VE SONUÇ**…… ……...……...……...	29
6.	**KAYNAKLAR**…….....……..……..……..……..	31
ÖZGEÇMİŞ……...…….....		33

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İYİ KONUMLULUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Habib DEMİRTAŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018

Bu tezin ilk bölümünde kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili bilgiler verilmiştir. Bu denklemlerin modern bilimdeki önemine ilişkin birtakım açıklayıcı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise önceki çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım, teorem, eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca ikinci mertebeden dalga denklemi için bazı teoremler, titreşen şerit ve dikdörtgensel bölge için Dirichlet probleminin çözümü Fourier seri yöntemiyle ele alınmıştır.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır ve iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda, değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal kısmi diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığı, tekliği ve iyi konumluluğu çalışılmıştır. İkinci kısımda, bu problemin Fourier serisi şeklindeki çözümü verilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve sonraki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İyi Konumluluk, Düzgün Çözüm, Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler.

ABSTRACT

WELL POSEDNESS FOR HIGHER ORDER PARTİAL DİFFERENTİAL EQUATIONS

MASTER OF SCIENCE THESIS

Habib DEMİRTAŞ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2018

In the first part of this thesis, information about partial differential equations is given. A number of explanatory notes on the importance of these equations in modern times are given.In the second chapter, related literature was given.

In the third chapter, the basic definition, theorem, equations and inequalities to be used in the thesis are given. In addition, some theorems for the wave equation of the second order, the solution of the Dirichlet problem for the vibrating strip and the rectangular region are taken up by the Fourier series method.

The fourth section is the original part of the thesis and consists of two sub-sections. In the first part, the existence, uniqueness and well posedness of the solution of the high-order linear partial differential equations with variable coefficients are studied. In the second part, this problem is given in Fourier series form.

In the last part, the results obtained were evaluated and suggestions were made for further studies.

Keywords: Well Posedness, Regular Solution, Higher Order Partial Differential Equations

1. GİRİŞ

Günümüzde matematiğin en önemli çalışma alanlarından biri haline gelen Kısmi Diferansiyel Denklemler bilimin çeşitli alanlarında ve ısı iletimi, dalga teorisi, hidrodinamik, aerodinamik, elektrodinamik, akustik, elektrik mühendisliği, quantum mekaniği, kimya mühendisliği gibi sayısız uygulamalarda ortaya çıkar.(D. Polyanin,2002). Kısmi diferansiyel denklemler, doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde, uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte kapsamlı değişik problemlerin matematiksel analizinde ve mühendislikte sıklıkla kullanılmasından dolayı matematiksel bilimlerde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi rol oynar. Matematiksel fiziğin çoğu problemi uygun başlangıç ve / veya sınır koşullarıyla verilmiş kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanmaktadır. Bu problemler, başlangıç, sınır veya başlangıç ve sınır değer problemleri olarak bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler bütün fiziksel problemlerin çözümünde temel teşkil eder. Matematiksel disiplinler içerisinde de diferansiyel denklemler teorisi en önemli olanıdır. (Myint-U ve Debnath 2007).

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik olarak sınıflandırılmaktadır. Daha yüksek mertebeliler için de benzer sınıflandırma mevcuttur.

İki veya daha yüksek mertebeli kısmi diferansiyel denklemleri içeren çok sayıda teorik ve uygulamalı çalışmalar mevcuttur. Bu denklemleri içeren bazı klasik ve klasik olmayan problemlerin çözümleri için (Myint-U ve Debnath 2007), (Amanov and Yuldasheva 2009), (Amanov and Ashralyev 2014), (Sabitov 2015), (Amanov 2015), Kozhanov and Pinigina 2017 ve bunların içindeki referanslara bakılabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Sonraki bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili literatür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölüm olan Materyal ve Metotta, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, tanımlara, uzaylara, eşitsizliklere ve teoremlere yer verilmiştir. Yine bu bölümde ikinci mertebeden dalga denklemini içeren başlangıç ve sınır değer problemi için bazı teoremler verildikten sonra ikinci mertebeden yalın haldeki dalga denklemini içeren bir başlangıç ve sınır değer probleminin ve dikdörtgensel bölge için Dirichlet probleminin değişkenlerin ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne yer verilmiştir.

Araştırma Bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır.

Daha önce çalışılmış olan

$$t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

şeklindeki değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemden farklı olarak Bu bölümde $(-1)^k \frac{\partial u}{\partial t}$ yerine $+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ alınarak oluşturulan sınırlı bölgede değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal aşağıdaki diferansiyel denklem için

$$Lu = \left(t^{2l} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = f(x,t) \tag{1.1}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Problemde kullanılan denklem k nın tek kuvvetlerinde eliptik, k nın çift kuvvetlerinde hiperbolik denklem şeklinde olmaktadır. Problemin çözümünün varlığı,tekliği ve lokal iyi konumluluğu incelendikten sonra Fourier serisi yöntemiyle çözümü aranacaktır.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, tezde elde edilen sonuçlar kısaca tartışılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması konik denklemlerin sınıflandırılması kaynaklıdır. Bu sınıflandırma denklemlerin hiperbolik, parabolik ve eliptik tipten denklemler olarak gruplandırılması şeklindedir. Yüksek basamaktan kısmi diferansiyel denklemlerde bu şekilde sınıflandırılır. En yalın haldeki kısmi diferansiyel denklemler dalga, ısı ve Laplace denklemleri olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \\ u_t - k u_{xx} &= 0, \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Bu denklemler sırası ile hiperbolik,parabolik ve eliptik tipten denklemlerdir.

Matematiksel fiziğin kısmi diferansiyel denklem içeren birçok problemi özellikle yukarıda verilen denklemlere indirgenirler. İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemler neredeyse her yönüyle çalışılmıştır. Ancak yüksek mertebeli denklemler için bu yönlü çalışmalar çok azdır.

Amanov ve Yuldasheva 2009 da $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini gerçekleştirdiler.

Amanov ve Ashyralyev 2014 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için başlangıç ve sınır değer ile sınır değer problemlerinin çözülebilirliğinin k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olduğunu gösterdiler.

Amanov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Sabitov 2015 te $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < p, \quad 0 < t < T\}$ bölgesinde $k \geq 1$ tamsayısı durumunda

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi.

Kozhanov ve Pinigina 2017 de Ω, R^n de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$ bölgesinde $k \geq 2$ tamsayısı durumunda

$$(-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} + \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}) - a(x)u = f(x,t)$$

diferansiyel denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdiler.

3. MATERYAL VE METOT

Tez boyunca kullanılacak ve gerekli olabilecek bazı tanımlar, eşitlikler ve eşitsizlikler, uzaylar için Polat 2005, Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011 kaynaklarına bakınız. Ayrıca tezin temel kısımlarının daha iyi anlaşılmasını sağlayacak ve bunların oluşturulmasında kullanılacak olan teorem ve metotlara da bu bölümde yer verilmiştir.

3.1. İkinci Mertebeden Dalga Denklemi İçin Bazı Teoremler

$U \subset R^n$ açık ve ∂U sınırına sahip sınırlı bir bölge, $T > 0$ olmak üzere $U_T = U \times (0,T]$ olsun.

$$\begin{cases} u_{tt} - Lu = f, & (x,t) \in U_T, \\ u = 0, & (x,t) \in \partial U \times (0,T], \\ u = g, & (x,t) \in U \times \{t = 0\}, \\ u_t = h, & (x,t) \in U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindeki başlangıç-sınır değer problemi verilmiş olsun. Burada $f : U_T \longrightarrow R$, $g,\ h : U \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyonlar ve $u = u(x,t)$ ve U_T nin kapanışı $\overline{U}_T$ olmak üzere $u : \overline{U}_T \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyon ve L sembolü, her bir t zamanı için ikinci mertebeden yer değişkenlerine göre doğrusal bir kısmi diferansiyel operatördür.

Teorem 3.1.1. (Gelişmiş Düzenlilik)

$g \in H_0^1(U),\ h \in L^2(U),\ f \in L^2(0,T;L^2(U))$ koşulları altında $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ ($u' \in L^2(0,T;L^2(U))$ ve $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ ile birlikte), (3.1) probleminin zayıf çözümü ise

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(U)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(U))$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|u(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u'(t)\|_{L^2(U)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}) \\ &\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U)} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\right). \end{aligned}$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Ayrıca, $g \in H^2(U),\ h \in H_0^1(U),\ f' \in L^2(0,T;L^2(U))$ koşulları altında

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(U)), u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(U)),$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(U)),\ u''' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}(\|u(t)\|_{H^2(U)} + \|u'(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u''(t)\|_{L^2(U)} + \|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U)} + \|g\|_{H^2(U)} + \|h\|_{H^1(U)}\right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.2. (Daha Yüksek Düzenlilik)

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ \frac{d^k f}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{m-k}(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)) \quad \text{(k=0,...,m+1)}$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{H^{m+1-k}(U)} \le C\left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{m-k}(U))} + \|g\|_{H^{m+1}(U)} + \|h\|_{H^m(U)} \right).$$

Burada C sabiti $U,\ T$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.1.3.

$g \in H^{m+1}(U),\ h \in H^m(U),\ f \in L^1(0,T;H^m(U))$ (k= 0,...,m) ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C(0,T;H^{m+1}(U)) \cap C^1(0,T;H^m(U)) \cap C^2(0,T;H^{m-1}(U))$$

tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.1.4. (Sonsuz Diferansiyellenebilirlik)

$g,h \in C^\infty(\overline{U}),\ f \in C^\infty(\overline{U_T})$ ve uyum koşulları altında (3.1) problemi için

$$u \in C^\infty(\overline{U_T})$$

tek çözüme sahiptir.

3.2. Uçları sabitleştirilmişTitreşen Şerit Problemi

l uzunluklu, iki ucu bağlı bir şerit için klasik dalga denklemi ve başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u_t(x,0) &= g(x), \qquad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) &= 0, \qquad t \ge 0, \\ u(l,t) &= 0, \qquad t \ge 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ile verilir. Probleminin çözümünü değişkenlerin ayrılması yöntemiyle arayalım. Bunun için

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.3}$$

şeklinde ve aşikar olmayan çözüm aranırsa λ ayrılma sabiti olmak üzere (3.3), (3.2) de yerine bırakılırsa

$$\begin{aligned} XT'' &= c^2 X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} - \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = 0 \\ \frac{X''}{X} &= \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Aşikar olmayan çözüm için son eşitlikteki her bir terim λ sabitine eşit olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{3.4}$$

$$T'' - c\lambda T = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Sınır koşullarından elde edilen $X(0) = 0$ ve $X(l) = 0$ ile birlikte $X(x)$ i belirlemek için

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(l) &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

özdeğer problemini öncelikle çözmeliyiz. $\lambda \geq 0$ durumunda aşikar çözüm olup $\lambda < 0$ durumunda

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$$

genel çözümden $X(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ ve $X(l) = 0$ koşulundan

$$B\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$$

bulunur. Eğer $B = 0$ ise aşikar çözüm vardır. Aşikar olmayan çözüm için

$$\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

veya

$$-\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$$

bulunur. λ nın sonsuz farklı değerler kümesi için problem aşikar olmayan çözüme sahiptir. λ_n nin bu değerleri problemin özdeğerleri ve

$$\sin(\frac{n\pi}{l})x, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

ise tekabul eden öz fonksiyonları olarak adlandırılır.

(3.6) probleminin çözümü

$$X_n(x) = B_n\sin(\frac{n\pi}{l})x$$

dır.

$\lambda = \lambda_n$ için (3.5) denkleminin genel çözümü, C_n ve D_n keyfi sabitler olmak üzere

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $a_n = B_nC_n$ ve $b_n = B_nD_n$ olmak üzere (3.3) her n için yazılabilen

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

fonksiyonları (3.2) yi sağlar. (3.2) deki denklem doğrusal ve homojen olduğundan doğrusal birleşim ilkesinden

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.7}$$

sonsuz serisi de, yakınsak ve x ve t ye göre iki defa sürekli diferansiyellenebilir olması koşulları altında, bir çözümdür. Serinin her bir terimi (3.2) deki sınır koşullarını sağladığından seri de bunları sağlar. Sağlanması gereken iki başlangıç koşulu kaldı. Bu koşullardan a_n ve b_n sabitlerini belirlemeliyiz.

İlk olarak (3.7) serisini t e göre diferansiyeli

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}\left(-a_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + b_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

dır. (3.2) deki başlangıç koşullarını uygularsak

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ u_t(x,0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ Fourier sinüs serileri şeklinde yazılabilirse yukarıdaki son iki denklem sağlanır. Katsayılar da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde olur.

(3.8) de verilen a_n ve b_n katsayıları ile birlikte (3.7) serisi, (3.2) probleminin çözümüdür.

Yukarıda verilen (3.7) çözümü biçimsel çözüm olarak adlandırılır. Bazı koşullar altında bunun çözüm olduğunu göstermemiz gerekir:

$f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları $[0,l]$ de sürekli ve $f(0)=f(l)=0$ ise

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0,l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $f''(x)$ fonksiyonu $[0,l]$ de sürekli ve $f''(0)=f''(l)=0$ olmalıdır.

$g(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonları $[0,l]$ de sürekli ve $g(0)=g(l)=0$ ise

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{n\pi c}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

serisi $[0,l]$ de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(3.2) deki diferansiyel denklemin sağlanması gerektiğinden de $g'(x)$ fonksiyonu $[0,l]$ de sürekli olmalıdır.

Yukarıdaki varlık koşulları altında ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir $u(x,t)$ fonksiyonu (3.2) probleminin çözümü ise tektir.

3.3. İkinci Mertebeden Eliptik Denklemler İçin Bazı Teoremler

$U\subset R^n$ açık ve ∂U sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun.

$$\begin{cases} Lu=f, & x\in U,\\ u=0, & x\in\partial U \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklindeki sınır değer problemi verilsin. Burada $f:U\longrightarrow R$ verilmiş fonksiyon ve $u=u(x,t)$ olmak üzere $u:\overline{U}\longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyon ve L sembolü, ikinci dereceden doğrusal bir (düzgün) eliptik kısmi diferansiyel operatördür ve diverjans şeklinde

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\,u_{x_i}+c(x)\,u$$

veya diverjans olmayan şeklinde

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\,u_{x_i}+c(x)\,u$$

dir.

Teorem 3.3.1. (İç H^2- Düzenlilik)

$a^{ij}\in C^1(U),\quad b^i,c\in L^\infty(U)\quad (i,j=1,\cdots,n)$ ve $f\in L^2(U)$ koşulları altında $u\in H^1(U)$, (3.9) daki denklemin zayıf çözümü ise

$$u \in H^2_{loc}(U)$$

dır ve her açık $V \subset\subset U$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right).$$

Burada C sabiti V, U ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.3.2. (Daha Yüksek İç Düzenlilik)

$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U) \quad (i,j = 1, \cdots, n)$ ve $f \in H^m(U)$ koşulları altında $u \in H^1(U)$, (3.9) daki denklemin zayıf çözümü ise

$$u \in H^{m+2}_{loc}(U)$$

dır ve her açık $V \subset\subset U$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right).$$

Burada C sabiti V, U ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.3.3. (İçte Sonsuz Diferansiyellenebilirlik)

$a^{ij}, b^i, c \in C^{\infty}(U) \quad (i,j = 1, \cdots, n)$ ve $f \in C^{\infty}(U)$ koşulları altında $u \in H^1(U)$, (3.9) daki denklemin zayıf çözümü ise

$$u \in C^{\infty}(U)$$

dır.

Teorem 3.3.4. (Sınır H^2- Düzenlilik)

$a^{ij} \epsilon C^1\left(\overline{U}\right), \quad b^i, c \in L^{\infty}(U) \quad (i,j = 1, \cdots, n)$ ve $f \in L^2(U)$ koşulları altında $u \in H^1_0(U)$, (3.9) eliptik sınır değer probleminin zayıf çözümü ve ayrıca $\partial U \in C^2$ ise

$$u \in H^2(U)$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right).$$

Burada C sabiti U ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.3.5. (Daha Yüksek Düzenlilik)

$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}\left(\overline{U}\right)$ $(i,j=1,\cdots,n)$ ve $f \in H^m(U)$ koşulları altında $u \in H_0^1(U)$, (3.9) eliptik sınır değer probleminin zayıf çözümü ve ayrıca $\partial U \in C^{m+2}$ ise

$$u \in H^{m+2}(U)$$

dır ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right).$$

Burada C sabiti $m,\ U$ ve L nin katsayılarına bağlıdır.

Teorem 3.3.6. (Sınıra Kadar Sonsuz Diferansiyellenebilirlik)

$a^{ij}, b^i, c \in C^{\infty}\left(\overline{U}\right)$ $(i,j=1,\cdots,n)$ ve $f \in C^{\infty}\left(\overline{U}\right)$ koşulları altında $u \in H_0^1(U)$, (3.9) eliptik sınır değer probleminin zayıf çözümü ve ayrıca $\partial U \in C^{\infty}$ ise

$$u \in C^{\infty}\left(\overline{U}\right)$$

dır.

3.4. Dikdörtgensel bölge için Dirichlet problemi

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0<x<a, \quad 0<y<b \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \leq x \leq a, \\ u(x,b) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(a,t) &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

probleminin

$$u(x,t) = X(x)Y(y) \tag{3.11}$$

şeklinde ve aşikar olmayan çözüm aranırsa λ ayrılma sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned} X''Y + XY'' &= 0 \\ XY'' &= -X''Y \\ \frac{X''}{X} &= \frac{-Y''}{Y} = \lambda \end{aligned}$$

ve buradan

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{3.12}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Sınır koşullarından elde edilen $X(0) = 0$ ve $X(a) = 0$ ile birlikte ile birlikte $X(x)$ i belirlemek için

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(a) &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

özdeğer problemini öncelikle çözmeliyiz. $\lambda \geq 0$ durumunda aşikar çözüm olup $\lambda < 0$ durumunda $\alpha > 0$, $\lambda = -\alpha^2$ seçilirse Burada öz değerler;

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

genel çözümden $X(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ ve $X(a) = 0$ koşulundan

$$B\sin\alpha a = 0$$

bulunur. Eğer $B = 0$ ise aşikar çözüm vardır. Aşikar olmayan çözüm için

$$\sin\alpha a = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\alpha a = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

veya

$$-\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2$$

bulunur. λ nın sonsuz farklı değerler kümesi için problem aşikar olmayan çözüme

sahiptir. λ_n nin bu değerleri problemin özdeğerleri ve

$$\sin(\frac{n\pi}{a})x, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

ise tekabul eden öz fonksiyonları olarak adlandırılır.

(3.14) probleminin çözümü

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

şeklindedir.

$\lambda = \lambda_n$ için (3.13) denkleminin genel çözümü, C_n ve D_n keyfi sabitler olmak üzere

$$Y_n(y) = C_n \cosh \alpha y + D_n \sinh \alpha y$$

olup $E_n = (D_n^2 - C_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $F_n = \frac{1}{\alpha} \tanh^{-1}(C_n \ / \ D_n)$ olmak üzere

$$Y_n(y) = E_n \sinh \alpha(y + F_n)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer sınır koşulu $u\,(x, b) = X(x)Y(b) = 0$ uygulanırsa aşikar olmayan $u(x, y)$ çözümü için

$$Y_n(b) = E_n \sinh \alpha(y + F_n) = 0$$

ve buradan $F_n = -b$, $E \neq 0$ olur. Böylece

$$Y_n(y) = E_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b)$$

elde edilir.

Böylece $a_n = B_n E_n$ olmak üzere (3.11) her n için yazılabilen

$$u_n\,(x, t) = X_n(x)Y_n(y) = a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b)$$

fonksiyonları (3.10) yi sağlar. (3.10) deki denklem doğrusal ve homojen olduğundan doğrusal birleşim ilkesinden

$$u\,(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b)$$

sonsuz serisi de, yakınsak ve x ve y ye göre iki defa sürekli diferansiyellenebilir olması koşulları altında, bir çözümdür. Serinin her bir terimi (3.10) deki homojen sınır koşullarını sağladığından seri de bunları sağlar. Sağlanması gereken homojen olmayan sınır koşulu kaldı. Bu koşuldan a_n sabitini belirlemeliyiz.

Homojen olmayan $u(x,0) = f(x)$ sınır koşulunun uygulanmasıyla

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(\frac{-n\pi b}{a}) \sin\frac{n\pi x}{a}$$

elde edilir. Bu Fourier sinüs serisi olup buradan

$$a_n = \frac{-2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a} dx$$

dır. Bundan dolayı biçimsel çözüm $a_n^* = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ olmak üzere

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b)}{\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilir.

(3.15) çözümünün varlığını ispat edelim. C_1 sabit olmak üzere

$$\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(y-b)}{\sinh(\frac{n\pi b}{a})} = e^{\frac{-n\pi y}{a}} \left[\frac{1-e^{-\frac{2n\pi}{a}(b-y)}}{1-e^{\frac{-2n\pi b}{a}}}\right] \leq C_1 e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

dır. $f(x)$ sınırlı olduğundan

$$|a_n^*| = \frac{2}{a}\int_0^a |f(x)|\, dx = C_2$$

elde edilir. Böylece $y \geq y_0 > 0$, $M =$ sabit olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} M e^{-\frac{n\pi y_0}{a}}$$

serisi, $u(x,y)$ serisi için baskın seridir, ve bu yüzden $0 \leq x \leq a$, $y \geq y_0 > 0$ için $u(x,y)$ serisi düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak $u(x,y)$ bu bölgede yakınsaktır ve $u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$ sınır değerlerini sağlar.

Şimdi $u(x,y)$ yi x e ve y ye göre iki defa diferansiyellersek sırasıyla

$$u_{xx}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}-a_n^*(\frac{n\pi}{a})^2\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sin\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$u_{yy}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*(\frac{n\pi}{a})^2\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sin\frac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

elde edilir. Buradan $u_{xx}(x,y)$ ve $u_{yy}(x,y)$ serilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty}M^*n^2e^{-\frac{n\pi y_0}{a}}$$

serisi tarafından baskılandığı görülür ve bu yüzden $u_{xx}(x,y)$ ve $u_{yy}(x,y)$ serileri $0<y_0<b$ için düzgün yakınsaktır. Buradan da $u_{xx}(x,y)$ ve $u_{yy}(x,y)$ nin varlığı ve $u(x,y)$ nin Laplace denklemini sağladığı çıkar.

Şimdi $u(x,0)=f(x)$ olduğunu göstermek kalmıştır. $f(x)$ fonksiyonu $[0,a]$ aralığında sürekli ve $f^{'}(x)$ fonksiyonu $[0,a]$ aralığında parçalı sürekli olsun. Eğer ilaveten $f(0)=f(a)=0$ ise $f(x)$ in Fourier serisi düzgün yakınsaktır. Eğer $u(x,y)$ serisinde $y=0$ yazılırsa

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*\sin\frac{n\pi x}{a}$$

bulunur. $u(x,0)$ serisi $f(x)$ e düzgün yakınsak olduğundan $\varepsilon>0$ için

$$|s_m(x,0)-s_n(x,0)|<\varepsilon,\qquad m.n>N_\varepsilon$$

olup burada

$$s_m(x,y)=\sum_{n=1}^{m}a_n^*\sin\frac{n\pi x}{a}$$

dır. Ayrıca $s_m(x,y)-s_n(x,y)$ nin Laplace denklemini ve $x=0$, $x=a$ ve $y=b$ de sınır koşullarını sağladığı açıktır. O zaman maksimum prensibinden $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$ bölgesinde

$$|s_m(x,0)-s_n(x,0)|<\varepsilon,\quad m.n>N_\varepsilon \text{ için}$$

dir. Böylece $u(x,y)$ serisi düzgün yakınsaktır ve sonuç olarak $u(x,y)$, $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$ bölgesinde süreklidir. Buna göre

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^*\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x)$$

elde edilir. Böylece (3.15) çözümü gerçekleştirildi.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Doğrusal Diferansiyel Denklemler

$\Omega = \{(x,t) \;\; 0 \le x \le p, \;\; 0 \le t \le T\}, \;\; k \in N \qquad l > 0$ dikdörtgensel bölgesinde p ve T pozitif gerçel sayılar ve k bir tek doğal sayı olmak üzere

$$\begin{cases} Lu = \left(t^{2l} \dfrac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = u(x,T) = 0 \;\; 0 \le x \le p, \\ \dfrac{\partial^{2m} u(0,t)}{\partial x^{2m}} = \dfrac{\partial^{2m} u(p,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \;\; m = 0,1,2,...,k-1, \;\; 0 \le t \le T \end{cases} \tag{4.1}$$

sınır değer problemi verilsin. Burada $f : \Omega \longrightarrow R$ verilmiş fonksiyon ve $u = u(x,t)$ olmak üzere $u : \overline{\Omega} \longrightarrow R$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur ve k tek bir doğal sayı alındığı için denklemimiz eliptik tipten bir denklem şeklindedir. Yukarıda verilen problemin $u(x,t)$ çözümü ile ilgileneceğiz.

Aşağıdaki uzayları tanımlayalım:

$$V(\Omega) = \left\{ u : u \in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega}), \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega); (4.1) \text{ deki koşulları sağlasın.} \right\}$$

$$W(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f(x,t) : f \in C_{x,t}^{k,0}(\overline{\Omega}), \;\; \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \in L_2(\Omega); \;\; \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} = 0 \;\; x = 0 \text{ da} \\ \text{ve} \;\; x = p, \; m = 0,1,...,\frac{k-2}{2} \end{array} \right\}$$

Tanım 4.1.1. $f(x,t) \in C(\Omega)$ olmak üzere (4.1) probleminin $u(x,t) \in V(\Omega)$ çözümüne düzenli çözüm denir.

Lemma 4.1.2. $u(x,t)$ (4.1) probleminin düzenli çözümü olsun. Ayrıca

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^m \partial t}, \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}}, \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad m = 0,1,...,k$$

türevleri ve $f(x,t)$ fonksiyonu $C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ sınıfından olsun. O halde sadece k ve T ye bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \le C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}$$

kestirimi sağlanır. Burada

$$\|u\|^2_{W_2^{k,1}(\Omega)} = \sum_{n=0}^{k} \left\| t^{\frac{l}{k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

dır.

İspat.

$$t^{2l}\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu$$

denkleminin her iki tarafı $u(x,t)$ ile çarpılır ve $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid 0 < x < p,\ \ 0 < t < \tau;\ \ \tau < T\}$ bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} u \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} dxdt + \int_0^p \int_0^\tau u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dtdx = \int_0^\tau \int_0^p uLudxdt \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.2) de denklemin solundaki terimlere ayrı ayrı kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} u \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} dxdt = \int_0^\tau \left(t^{2l} u \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}} \right)_0^p dt - \int_0^\tau \int_0^p t^{2l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}} dxdt$$

elde edilir.

(4.1) deki sınır koşullarından $\left(t^{2l} u \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}} \right)_0^p = 0$ olur ve

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} u \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} dxdt = -\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} dxdt$$

elde edilir.

$$\int_0^p \int_0^\tau u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dtdx = \int_0^p \left(u \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0^\tau - \int_0^p \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dtdx$$

denklemine (4.1) deki sınır koşulları uygulanırsa $\left(u \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0^\tau = 0$ olur ve yukarıdaki son denklem

$$\int_0^p \int_0^\tau u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dtdx = -\int_0^p \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dtdx$$

haline geir ve (4.2) denklemi

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} dxdt - \int_0^p \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dtdx = \int_0^\tau \int_0^p uLudxdt$$

haline gelir. Buradan

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 dxdt + \int_0^p \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dtdx = \int_0^\tau \int_0^p - uLudxdt$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^\tau \int_0^p t^{2l} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 dxdt + \int_0^p \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dtdx \leq \int_0^\tau \int_0^p |uLu| \, dxdt$$

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^l \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|uLu\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^l \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra Young eşitsizliğinden

$$\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^l \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$u^2(x,t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \tau} \left[u^2(x,\tau)\right] d\tau = 2\int_0^t u(x,\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \leq 2\int_0^t \left| u(x,\tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right| d\tau$$

yukarıdaki eşitsizliği x e göre 0 dan p ye integrallersek

$$\begin{aligned} \int_0^p u^2(x,t)dx &\leq 2\int_0^p \int_0^T \left| u(x,\tau) \frac{\partial u}{\partial t} \right| dtdx \\ \int_0^p u^2(x,t)dx &\leq 2\|u\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliği t ye göre 0 dan T ye integrallersek

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^p u^2(x,t)dxdt &\leq 2\|u\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\int_0^T dt\\ \|u\|^2 &\leq 2T\|u\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|$ ya bölüp karesini alırsak

$$\|u\|^2 \leq 4T^2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2$$

elde edilir. (4.4) ten

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 4T^2\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\right] \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.4) ve (4.5) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|t^l\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \left(4T^2+1\right)\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\right]$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\varepsilon = \frac{1}{4T^2+1}$ alınırsa

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|t^l\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(4T^2+1\right)\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}$$

elde edilir. Burada $C_1 = 4T^2+1$ alınıp eşitsizlik düzenlenirse

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|t^l\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$\left\|t^{\frac{l}{k}n}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\left\|t^{\frac{l}{k}(n-1)}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|t^{\frac{l}{k}(n+1)}\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) \tag{4.7}$$

eşitsizliğini ele alalım. Bu eşitsizliği n e göre 1 den k-1 e kadar yazarsak

$$\left\| t^{\frac{l}{k}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{2l}{k}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)$$

$$\left\| t^{\frac{2l}{k}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{3l}{k}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{l}{k}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)$$

$$\left\| t^{\frac{3l}{k}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{4l}{k}} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{2l}{k}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 \right)$$

.....

.....

.....

$$\left\| t^{\frac{l}{k}(k-2)} \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{l}{k}(k-1)} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-3)} \frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)$$

$$\left\| t^{\frac{l}{k}(k-1)} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{l}{k}k} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-2)} \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\left\| t^{\frac{l}{k}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-1)} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{l} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.8}$$

elde edilir.

(4.6) dan

$$\left\| t^{\frac{l}{k}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-1)} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.8$_1$}$$

elde edilir.

(4.7) eşitsizliğini n e göre 2 den k-2 ye kadar toplarsak ve 4.8$_1$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\| t^{\frac{2l}{k}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-2)} \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.8$_2$}$$

elde edilir.

(4.7) eşitsizliğini n e göre 3 den k-3 e kadar toplarsak ve 4.8$_2$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\| t^{\frac{3l}{k}} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|^2 + \left\| t^{\frac{l}{k}(k-3)} \frac{\partial^{k-3} u}{\partial x^{k-3}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{4.8$_3$}$$

elde edilir.

Bu işlemleri yukarıdaki şekilde devam edip son olarak (4.7) eşitsizliğini n e göre $\frac{k-1}{2}$ den $\frac{k+1}{2}$ ye kadar toplarsak ve $(4.8_{\frac{(k-3)}{2}})$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k-1)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k-1)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k-1)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k+1)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k+1)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k+1)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (4.8_{\frac{(k-1)}{2}})$$

elde edilir.

Şimdi (4.6), (4.8_1), (4.8_2).....$(4.8_{\frac{(k-1)}{2}})$ eşitsizliklerini toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k} \left\| t^{\frac{l}{k}n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{k+1}{2} C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \\ \|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} &\leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

elde edilir. k tek sayıları için ispat tamamlanmış olur.

k çift olması durumunda denklemimiz hiperbolik tipten bir denklem şeklindedir. k tek sayıları için kullanılan yol benzer olarak takip edilir.

.....

.....

.....

(4.7) eşitsizliğini n e göre $\frac{k-2}{2}$ den $\frac{k+2}{2}$ ye kadar toplarsak

$$\left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k-2)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k-2)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k-2)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k+2)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k+2)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k+2)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (4.8_{\frac{(k-2)}{2}})$$

elde edilir. (4.7) eşitsizliğinde $n = \frac{k}{2}$ alırsak

$$\left\| t^{\frac{l}{k}n} \frac{\partial^{\frac{k}{2}} u}{\partial x^{\frac{k}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k-2)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k-2)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k-2)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| t^{\frac{l}{k}\frac{(k+2)}{2}} \frac{\partial^{\frac{(k+2)}{2}} u}{\partial x^{\frac{(k+2)}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)$$

elde edilir. $(4.8_{\frac{(k-2)}{2}})$ eşitsizliğinden

$$\left\| t^{\frac{l}{k}n} \frac{\partial^{\frac{k}{2}} u}{\partial x^{\frac{k}{2}}} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (4.8_{\frac{k}{2}})$$

elde edilir.

Şimdi (4.6), (4.8_1), (4.8_2), ...$(4.8_{\frac{(k-2)}{2}})$,$(4.8_{\frac{k}{2}})$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k}\left\|t^{\frac{l}{k}n}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{k+2}{2}C_1\left\|Lu\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\ \left\|u\right\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} &\leq C\left\|Lu\right\|_{L_2(\Omega)}\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.3. Lemma 4.1.2 den (4.1) probleminin tek çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.4. Lemma 4.1.2 den (4.1) probleminin $f(x,t)$ ye sürekli olarak bağımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1.5. Lemma 4.1.2, Sonuç 4.1.3 ve Sonuç 4.1.4 den (4.1) probleminin iyi konumlu olduğu çıkar.

4.2. (4.1) Probleminin Fourier Serisi Şeklindeki Çözümü

(4.1) probleminin Fourier serisi

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x) \tag{4.9}$$

şeklinde düzenli çözümünü arayalım. Burada $L_2(0,p)$ de $X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{p}, n\in\mathbb{N}$ özfonksiyonları tam ortonormal sistem oluşturur. $u(x,t)$ nin (4.1) deki sınır koşullarını sağladığı açıktır.

$f\in W(\Omega)$ fonksiyonunu $X_n(x)$ cinsinden

$$f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)dx \tag{4.10}$$

seriye açarsak

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x) \tag{4.11}$$

olur.

(4.9) ve (4.11) i (4.1) denkleminde yazarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}t^{2l}u_n(t)X_n^{(2k)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)$$

olur.

$X_n^{(2k)}$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x \\ X_n'(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

$$k = 1 \ : \qquad X_n''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^2 \sin \lambda_n x$$

$$X_n'''(x) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^3 \cos \lambda_n x$$

$$k = 2 \ : \qquad X_n^{(4)}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^4 \sin \lambda_n x$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$X_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \lambda_n^{2k} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x = (-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x)$$

olup bunu denklemde yerine yazarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{2l} u_n(t) (-1)^k \lambda_n^{2k} X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$u_n''(t) - t^{2l} \lambda_n^{2k} u_n(t) = f_n(t), \qquad 0 < t < T \tag{4.12}$$

şeklinde değişken katsayılı bir diferansiyel denklem elde edilir.

(4.1) in sınır koşulları aşağıdaki hale gelir:

$$u_n(0) = 0, \quad u_n(T) = 0 \ . \tag{4.13}$$

Denklemimizin çözümü için operatör yönteminden

$$\left(D - \lambda_n^k t^l\right) \left(D + \lambda_n^k t^l\right) u_n(t) = \ f_n(t) \tag{4.14}$$

elde edilir.Burada

$$\left(D + \lambda_n^k t^l\right) u_n(t) = v_n(t) \tag{4.15}$$

olsun.(4.14) denklemi

$$\begin{aligned}\left(D-\lambda_n^k t^l\right) v_n(t) &= f_n(t)\\ v_n^{'}(t)-\lambda_n^k t^l v &= f_n(t)\end{aligned}$$

şekline gelir. Burada $e^{(-\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}$ integral çarpanı kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}\left(v_n(t)e^{(-\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\right) = f_n(t)e^{(-\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}$$

elde edilir.Son denklemin iki tarafının t den T ye integrallenmesi ve (4.13) sınır koşulundan

$$v_n(T)=0$$

$$v_n(t)e^{(-\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})} = \int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau$$

$$v_n(t) = e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) denklemi (4.15) de yerine yazılırsa

$$\left(D+\lambda_n^k t^l\right) u_n(t) = e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau$$

elde edilir. Buradan

$$u_n^{'}(t)+\lambda_n^k t^l u = e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau \tag{4.17}$$

elde edilir.Bu son denklemin çözümü için integral çarpanı $e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}$ şeklindedir.Bu integral çarpanı (4.19) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{d}{dx}\left(u_n(t)e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\right) = e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau$$

elde edilir. Bu denklemi 0 dan t ye integrallersek ve (4.13) koşulunu kullanırsak

$$u_n(t)e^{(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})} = \int_0^t e^{(\frac{s^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}e^{(\frac{s^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau$$

elde edilir. Denklem son olarak

$$u_n(t) = e^{-(\frac{t^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_0^t e^{(\frac{s^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}e^{(\frac{s^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\frac{\tau^{l+1}\lambda_n^k}{l+1})}d\tau$$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{(-\lambda_n^k\frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})}\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\lambda_n^k\frac{\tau^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})}d\tau ds$$

$$u_n(t) = \int_0^t\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\lambda_n^k\frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})}e^{(-\lambda_n^k\frac{\tau^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})}d\tau ds$$

$$u_n(t) = \int_0^t\int_t^T f_n(\tau)e^{(-\lambda_n^k\frac{t^{l+1}-2s^{l+1}+\tau^{l+1}}{l+1})}d\tau ds \tag{4.18}$$

haline gelir ve çözüm elde edilir.

Lemma 4.2.1. Eğer $f \in W(\Omega)$ ise, her $t \in [0,T]$ için $f_n^{(2k+1,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{2k+1}f}{\partial x^{2k+1}}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$ olmak üzere

$$|u_n(t)| \le \frac{T\sqrt{T}}{\lambda_n^{2k+1}}\left\| f_n^{(2k+1,0)}\right\|_{L_2} \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.10) denkleminin x e göre kısmi integralini alırsak

$$f_n(t) = \left(f(x,t)\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{\lambda_n}\cos\lambda_n x\right)_0^p + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^p f'(x,t)\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$$

elde edilir. $f \in W(\Omega)$ olduğundan son eşitliğin sağ tarafının birinci kısmı 0 olur. Ve

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^p \frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.10) denkleminin 2. defa x e göre kısmi integralini alırsak;

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^2} \int_0^p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x dx$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.10) denkleminin 3. defa x e göre kısmi integralini alırsak;

$$f_n(t) = \frac{-1}{\lambda_n^3} \int_0^p \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx$$

elde edilir. İşleme bu şekilde devam edip (4.10) denkleminin x e göre 2k+1. defa kısmi integralini alırsak;

$$|f_n(t)| = \left| \frac{1}{\lambda_n^{2k+1}} \int_0^p \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x dx \right|$$

elde edilir.

$$|f_n(t)| = \left| \frac{1}{\lambda_n^{2k+1}} \ f_n^{(2k+1,0)}(t) \right| \tag{4.20}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} e^{(-\lambda_n^k \frac{t^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})} &\leq 1 \\ e^{(-\lambda_n^k \frac{\tau^{l+1}-s^{l+1}}{l+1})} &\leq 1 \end{aligned}$$

ifadesinden

$$e^{(-\lambda_n^k \frac{t^{l+1}-2s^{l+1}+\tau^{l+1}}{l+1})} \leq 1 \tag{4.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.20) ve (4.21), (4.18) de uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &= \int_0^t \int_t^T |f_n(\tau)| \, e^{(-\lambda_n^k \frac{t^{l+1}-2s^{l+1}+\tau^{l+1}}{l+1})} d\tau ds \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^{2k+1}} \int_0^t \int_t^T \left| f_n^{(2k+1,0)}(\tau) \right| d\tau ds \leq \frac{T\sqrt{T}}{\lambda_n^{2k+1}} \left\| \ f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. Eğer $f(x,t) \in W(\Omega)$ ise (4.1) probleminin düzenli çözümü vardır.

İspat. (4.11) serisinin düzgün ve mutlak yakınsaklığını ispatlayalım. ve

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2k} u_n(t) X_n(x) \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x) - t^{2l} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2k} u_n(t) X_n(x) \tag{4.23}$$

olsun.

(4.23) daki ilk seri yakınsaktır çünkü $f \in W(\Omega)$.

(4.23) daki ikinci seri ise (4.22) ile aynıdır.

Bundan dolayı (4.22) serisinin düzgün ve mutlak yakınsak olduğunu gösterirsek bu aynı zamanda (4.9) ve (4.23) in düzgün ve mutlak yakınsaklığı anlamına gelecektir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\lambda}_n^{2k} \left| u_n(t) \right|$$

serisi (4.22) serisi için baskın seridir. Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2k} \left| u_n(t) \right| &\leq T\sqrt{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left\| f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)} \\
&\leq \frac{p}{\pi} T\sqrt{T} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(2k+1,0)} \right\|_{L_2(0,T)}} \\
&\leq pT\sqrt{\frac{T}{6}} \left\| \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x^{2k+1}} \right\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bu nedenle (4.22) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(4.22) denkleminin iki tarafını t^{2l} ile çarpıp (4.23) ile toplarsak (4.9) serisinin (4.1) denklemini sağladığı çıkar.

$X_n(x)$ fonksiyonunun özelliklerinden dolayı (4.9) çözümünün (4.1) deki sınır koşullarını sağlar.

(4.18) ve (4.18) nin türevinden (4.9) çözümü (4.1) deki başlangıç koşullarını sağlar.

Böylece teorem ispatlandı.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Araştırma Bulguları bölümünde ele alınan yüksek mertebeden değişken katsayılı doğrusal diferansiyel denklemin iyi konumluluğu gösterilmiştir. Bu problemdeki değişken katsayılı terimin x e bağlı olduğu durumları için de iyi konumluluk çalışılabilir. x in aralık değil bölge olarak tanımlanması durumunda problem çalışılabilir. Ayrıca sınır koşullarının homojen olmaması durumunda problemin iyi konumluluğu incelenebilir. Yine bu problemin damping terimli bazı durumları için de iyi konumluluk çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Amanov, D., Yuldasheva, A.V., 2009. Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 3(2): 227-248.

Amanov, D., Ashyralyev, A., 2014. Well-posedness of boundary-value problems for partial differential equations of even order, Electronic Journal of Differential Equations, 2014 (108), 1-18.

Amanov, D., 2015. Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation, 268, 1282-1291.

Brezis, H. 2011. Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. Springer.

Evans, L. C. 1998. Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.

Kesavan, S. 1989. Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons. India

Kozhanov, A.I., Pinigina, N.R. 2017, Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations, Mathematical Notes, 101(3), 467–474.

Myint-U, T. ve Debnath, L., 2007. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser Boston.

Polat, N. 2005. Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu (Blow Up), Doktora Tezi.

Sabitov, K.B., 2015. The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations, Mathematical Notes, 97 (2), 255–2675.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Diyarbakır da doğdum. İlkokulu Diyarbakır, ortaokulu Batman ve liseyi Eskişehirde tamamladım. 2008 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı okullarda öğretmenlik yapmaktayım.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	HABİB DEMİRTAŞ
ÖĞRENCİ NO	09504003
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN İYİ KONUMLULUK
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	39
BENZERLİK ORANI	% 10
RAPORLAMA TARİHİ	03/07/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 39 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 dır.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☐ Kaynakça hariç
- ☐ Alıntılar hariç/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)
HABİB DEMİRTAŞ
(Öğrencinin Adı Soyadı)

(İmza) 03/07/2018 Prof. Dr. Necat POLAT **Tez Danışmanı**	(İmza) 03/07/2018 Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY **Anabilim Dalı Başkanı**