ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MORİTA YAPILARININ İNCELENMESİ

Farzin JAHEDPOUR AZAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Farzin JAHEDPOUR AZAR tarafından hazırlanan "**MORİTA YAPILARININ İNCELENMESİ**" adlı tez çalışması 29/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. A. Çiğdem ÖZCAN

Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

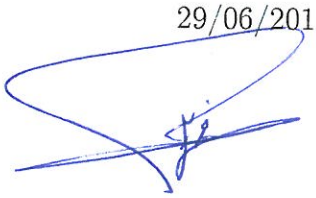
Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

29/06/2017



Farzin JAHEDPOUR AZAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MORİTA YAPILARININ İNCELENMESİ

Farzin JAHEDPOUR AZAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde çalışma için gerekli olan ön bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde Morita halkalarının genel ve aşikar durumu tanımlanmakta ve bazı özellikleri incelenmektedir. Ayrıca genelleştirilmiş matris halkaları tanımlanarak bazı özellikleri incelenmektedir.

Haziran 2017, 87 sayfa

Anahtar Kelimeler : Morita Halkaları, Genelleştirilmiş Matris Halkaları, Matris Halkaları, Değişim Halkaları, Mükemmel Halkalar, Düzenli Halkalar, Güçlü Halkalar, Yerel Halkalar, Yarı Asal Halkalar, Yarı İlkel Halkalar

ABSTRACT

Master Thesis

Study of Morita Contexts

Farzin JAHEDPOUR AZAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis consists of three chapters. The first chapter is the introduction of the thesis. In the second chapter, basic concepts which are necessary for the thesis are given. In the third chapter, general and trivial case of Morita rings are defined and some results of the general and trivial cases are given. Also, in this chapter generalized matrix rings are introduced and studied.

June 2017, 87 pages

Key Words : Morita Rings, Generalized Matrix Rings, Matrix Rings, Exchange Rings, Perfect Rings, Regular Rings, Potent Rings, Local Rings, Semiprime Rings, Semiprimitive Rings

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde de engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU' na (Ankara Üniversitesi Matematik A.B.D.), tezimde çok önemli katkıları olan, üzerimde çok emeği bulunan, hem matematiğe hem de hayata yaklaşımıyla bizlere örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini her zaman çok cömertce bizlerle paylaşan, birlikte çalışmaktan zevk aldığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Abdullah HARMANCI' ya (Hacettepe Üniversitesi Matematik A.B.D.), çalışma süresince büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım kıymetli hocam Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR' e (Ankara Üniversitesi Matematik A.B.D.), bilimsel çalışmaların yanında her aşamada pratik çözümleriyle bir hoca, bir arkadaş olarak destek olan Mete Burak ÇALCI ve Tuğçe ÇALCI' ya, bugünlere gelmemde çok emeği bulunan, her zaman desteğini, sevgisini hissettiğim aileme çok teşekkür ederim.

Farzin JAHEDPOUR AZAR
Ankara, Haziran 2017

SİMGELER DİZİNİ

$r_R(a)$	a nın R halkasındaki sağ sıfırlayanı
$l_R(a)$	a nın R halkasındaki sol sıfırlayanı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$I \trianglelefteq R$	I kümesi R halkasının bir ideali
$\mathrm{End}(M)$	M modülünün endomorfizma halkası
$\mathrm{Hom}(M,N)$	M den N ye R-modül homomorfizmalarının sınıfı
${}_AM$	M sol A-modül (A bir halka)
M_B	M sağ B-modül (B bir halka)
${}_AM_B$	M sol A- sağ B-ikili modül
$N \leq M$	N modülü M nin altmodülü
$M \otimes_R N$	M modülü ile N modülünün tensör çarpımı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathrm{Spec}(R)$	R halkasının asal idealler kümesi
R/I	R halkasının I idealine göre bölüm halkası
$C(R)$	R halkasının merkezi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$U(R)$	R halkasının tersinir elemanlarının kümesi
$p_A(I)$	R Morita halkasının I daki A bileşeni
$p_B(I)$	R Morita halkasının I daki B bileşeni
$p_M(I)$	R Morita halkasının I daki M bileşeni
$p_N(I)$	R Morita halkasının I daki N bileşeni
$r_1(I)$	R Morita halkasının I daki birinci satırı
$r_2(I)$	R Morita halkasının I daki ikinci satırı
$c_1(I)$	R Morita halkasının I daki birinci sütunu
$c_2(I)$	R Morita halkasının I daki ikinci sütunu
$K_s(R)$	R üzerindeki Morita içeriği halkası
$\mathbb{M}_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki matrislerin halkası
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK i

ÖZET ii

ABSTRACT iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER DİZİNİ.....v

1. GİRİŞ.....1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Sıfırlayanlar, Eşkare ve Üstel Sıfır Elemanlar 3

2.2 Modüller ve Altmodüller 4

2.3 Modül Homomorfizmaları 7

2.4 Basit, Yarı Basit, Asal ve Yarı Asal Halkalar/İdealler 8

2.5 Artinian ve Noetherian Halkalar/Modüller 10

2.6 Jacobson Radikali 12

2.7 Değişim Halkaları 12

2.8 Düzenli, Yarı Düzenli, Kuvvetli π −Düzenli ve Tersinir Düzenli Halkalar. 14

2.9 Yerel ve Yarı Yerel Halkalar 17

2.10 Güçlü ve Yarı Güçlü Halkalar 18

2.11 Temiz Halkalar 19

2.12 Mükemmel, Yarı Mükemmel ve Yarı Asalımsı Halkalar 22

2.13 Abel Halkalar ve Durgunluk Aralığı Koşulu 24

2.14 Serbest Modüller 25

2.15 Modüllerin Tensör Çarpımı 26

3. MORİTA YAPILARI 28

3.1 Morita Yapıları: Genel Durum.....28

3.2 Morita Yapıları: Özel Durumlar 54

3.3 Bir Halka Üzerinde Genelleştirilmiş Matris Halkaları.....65

4. TARTIŞMA ve SONUÇ 83

KAYNAKLAR 84

ÖZGEÇMİŞ 87

1. GİRİŞ

Morita yapısı (Morita context) ilk kez (1958) yılında Morita tarafından *"Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition"* isimli makalesinde tanımlanmıştır. Bu tanım Mod-A ve Mod-B arasında $D_1D_2 = Id_{Mod-A}$ ve $D_2D_1 = Id_{Mod-B}$ sağlanacak biçimde D_1 ve D_2 kontravaryant funktorların incelenmesinde ortaya konulmuştur. Morita bu çalışmalar sonucunda D_1 ve D_2 funktorlarının Hom-funktor olduğunu ispatlamıştır.

10 yıl sonra, (1968) yılında, Bass, *K-Theory* isimli kitabında Morita yapısını *"Pre-equivalence Data"* ismiyle ele almıştır. Bass' ın tanımı ise Mod-A ve Mod-B arasında $D'_1D'_2 = Id_{Mod-A}$ ve $D'_2D'_1 = Id_{Mod-B}$ sağlanacak biçimde D'_1 ve D'_2 kovaryant funktorların incelenmesinde ortaya çıkmıştır. Bass bu çalışmalar sonucunda D'_1 ve D'_2 funktorlarının bir Tensör-funktor olduğunu ispatlamıştır.

Morita yapısı ilerleyen yıllarda yararlı bir kavrama ve güçlü bir araca dönüşmüştür. Örnek olarak, Bass, (1962) yılında Morita yapısı yardımıyla Wedderburn teoremlerini basit halkalar yapısı üzerinde ispatlamıştır. Bir başka örnek daha verilecek olursa, (1971) yılında Amitsur, Goldie teoremini yarı basit halkaların bölüm halkası üzerinde ispatlamak için Morita yapısını kullanmıştır. Ayrıca Morita yapısını kullanarak Wedderburn yapısının teoremini yarı basit halkalar için ispatlamıştır.

$(A, B, M, N, \phi, \theta)$ Morita yapısı, A halkasının özelliklerini B halkasına taşımak için oldukça yararlı bir yapıdır. Örneğin, radikallerin incelenmesinde, Amitsur çalışmalarında $MN(B)N \subseteq N(A)$ olduğunu göstermiştir. Burada $N(-)$ zayıf radikal, yerel üstel sıfır radikal, Jacobson radikali ve nil radikal olarak alınmaktadır. Sands'ın (1973) yılındaki makalesinde R Morita yapısı için $N(-)$ radikallerin genel sınıfına ait olmak üzere $N(R)$ öne sürülmüştür.

Varadarajan'ın (2008) yılında yaptığı çalışmasında, Morita halkasının yarı yerel, yarı mükemmel, yarı ilkel, vs. olması için gerek ve yeter şartların ne olduğu incelenmiştir. Daha sonra Tang vd., (2014) yılındaki makalelerinde daha kapsamlı olarak bu cebirsel özellikleri incelemişlerdir.

Bu çalışmada gerekli olan ön bilgilerden hemen sonra Morita halkaları ile ilgili genel özellikler verilecek, bir sonraki bölümde ise Morita halkası ve sağladığı bazı özellikler incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde halkalar ve modüller ile ilgili tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanım ve özellikler verilecektir. Bu tez boyunca aksi belirtilmedikçe halkalar birimli ve modüller birimsel modül olarak alınacaktır.

2.1 Sıfırlayanlar, Eşkare ve Üstel Sıfır Elemanlar

Tanım 2.1.1 R bir halka olmak üzere $e \in R$ için $e^2 = e$ ise o zaman e ye *eşkare (idempotent) eleman*; $e_1, e_2 \in R$ eşkare elemanlar olmak üzere $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$ ise, e_1 ve e_2 elemanlarına *dik eşkare (orthogonal idempotent) elemanlar* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.2 R bir halka ve $\{e_1, ..., e_n\}$ de R nin eşkare elemanlarının bir altkümesi olsun. Bu durumda eğer $e_ie_j = 0$ $(i \neq j)$ ve $e_1 + \cdots + e_n = 1$ ise o zaman $\{e_1, ..., e_n\}$ kümesine R nin *tam dik eşkare (complete orthogonal idempotent) elemanlar kümesi* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.3 R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Eğer $e \in C(R)$ ise o zaman e ye *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.4 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $1 - x$; R içinde sol terse sahip ise x e *sol kısmi düzenli (left quasi-regular)*; $1 - x$; R içinde sağ terse sahip ise x e *sağ kısmi düzenli (right quasi-regular)*; $1 - x$; R içinde hem sağ hemde sol terse sahipse x e *kısmi düzenli (quasi-regular) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.5 R bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise R ye bir *bölme (division) halkası* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.6 R bir halka olsun. $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ mevcut ise a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.7 R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Eğer $I^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa o zaman I ya R nin *üstel sıfır (nilpotent) ideali* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.8 R bir halka ve S de R nin bir altkümesi olsun.

$$r_R(S) = \{x \in R : Sx = 0\}$$
$$l_R(S) = \{x \in R : xS = 0\}$$

şeklinde tanımlanan $r_R(S)$ kümesine S nin *sağ sıfırlayanı (right annihilator)*, $l_R(S)$ kümesine de S nin *sol sıfırlayanı (left annihilator)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Uyarı 2.1.9 Eğer S tek bir a elemanından oluşuyorsa $r_R(S)$ kümesi $r_R(a)$ şeklinde gösterilecektir. R de bir sağ sıfırlayan, S kümesi R nin bir altkümesi olmak üzere $r_R(S)$ formundaki bir sağ idealidir. Benzer şekilde R de bir sol sıfırlayan, T kümesi R nin bir altkümesi olmak üzere $l_R(T)$ formundaki bir sol idealidir.

Tanım 2.1.10 R bir halka ve I da R nin bir sağ ideali olsun. Eğer I nın sağ sıfırlayanı sıfır yani $r_R(I) = 0$ ise o zaman I idealine *vefalı (faithful)* denir (Hungerford 1974).

2.2 Modüller ve Altmodüller

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli bir grup olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için mr ile tanımlı $M \times R \longrightarrow M$ fonksiyonu her $x, y \in M$ ve her $a, b \in R$ için

(1) $(x + y)a = xa + ya$

(2) $x(a+b) = xa + xb$

(3) $x(ab) = (xa)b$

şartlarını sağlayacak biçimde mevcutsa, M ye bir *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir. Benzer şekilde $m \in M$ ve $r \in R$ için rm ile tanımlı $R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu modül olma şartlarını sağlıyorsa M ye bir *sol R-modül* adı verilir ve ${}_RM$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.2.2 R birimli bir halka ve M sağ R-modülünün her x elemanı için $x1 = x$ ise M *birimsel (unital) sağ R-modül* olarak adlandırılır (Dauns 1994).

Uyarı 2.2.3 R ve S birer birimli halka, M değişmeli bir grup olsun. M bir sağ R-modül ve bir sol S-modül iken her $s \in S$, $r \in R$, $m \in M$ için $s(mr) = (sm)r$ oluyorsa M ye (S,R)-*ikili modül* denir.

Örnek 2.2.4 $(M,+)$ değişmeli grubu, $m \in M$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$mn = \begin{cases} \underbrace{m + ... + m}_{\text{n tane}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ \underbrace{(-m) + ... + (-m)}_{\text{(-n) tane}} & n < 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan $M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$ fonksiyonu ile bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

Örnek 2.2.5 A ve B birer halka ve M de bir (B,A)-ikili modül olsun.

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ m & b \end{pmatrix} : a \in A, m \in M, b \in B \right\}$$

kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ m_1 + m_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ m_1a_2 + b_1m_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda R bir halkadır. R ye *formal üçgensel matris halkası (formal triangular matrix ring)* adı verilir.

Örnek 2.2.6 Bir R halkasının toplamsal grubu bir R-modüldür.

Tanım 2.2.7 M bir sağ R-modül ve N de M nin bir altgrubu olsun. Eğer her $n \in N$ ve $r \in R$ için $nr \in N$ oluyorsa N ye M nin *altmodülü (submodule)* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.2.8 R bir halka, M bir sol R-modül ve $N \leq M$ olsun. N nin M içindeki sol kosetlerinden oluşan $M/N = \{x + N : x \in M\}$ kümesi eğer her $x+N,\ y+N \in M/N$ ve $a \in R$ için

(1) $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$

(2) $a(x + N) = ax + N$

ile tanımlı işlemlerle bir sol R-modül olur. Bu modüle *M nin N ye göre sol R-bölüm modülü (left R-factor module of M modulo N)* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.2.9 M bir sol R-modül olsun. Eğer her $x \in M$ için $x = r_1a_1 + r_2a_2 + ... + r_na_n$ olacak şekilde $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \in M$ varsa M ye *sonlu üretilmiş (finitely generated) R-modülü* denir (Anderson ve Fuller 1992).

2.3 Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 M ve N iki sol R-modül olsun. Her $x, y \in M$ ve her $a, b \in R$ için $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ şartını sağlayan $f : M \longrightarrow N$ fonksiyonuna *R-modül homomorfizması (R-homomorphism)* denir. Ayrıca f örten ise, f ye R-modül *epimorfizması (epimorphism)*, birebir ise R-modül *monomorfizması (monomorphism)* adı verilir. Eğer f hem birebir hem de örten ise, f ye R-modül *izomorfizması (isomorphism)* denir. Bu durumda M ile N *izomorf modüller* olup, $M \cong N$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.3.2 $f : M \longrightarrow N$ bir sol R-modül homomorfizması olsun.

$$Imf = \{f(x) : x \in M\} \quad \text{ve} \quad Kerf = \{x \in M : f(x) = 0\}$$

kümelerine sırasıyla f nin görüntü kümesi ve çekirdeği denir (Anderson ve Fuller 1992).

Teorem 2.3.3[İzomorfizma Teoremleri] M ve N sol R-modüller olsun.

(1) $f : M \longrightarrow N$ R-modül homomorfizması ise $M/Kerf \cong Imf$ dir.

(2) $K \leq L \leq M$ ise $M/L \cong (M/K)/(L/K)$ dir.

(3) $K, H \leq M$ için $(H + K)/K \cong H/(H \cap K)$ dir (Anderson ve Fuller 1992).

Örnek 2.3.4 M bir R-modül ve $L \leq M$ olsun. Bu durumda $i_L : L \longrightarrow M$ içerme fonksiyonu bir R-modül monomorfizmasıdır. i_L ye *doğal gömme (natural embedding) fonksiyonu* da denir. Ayrıca $Imi_L = L$ dir. Böylece M nin her altmodülü bir monomorfizmanın görüntüsüdür.

Örnek 2.3.5 M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. $x \in M$ için $\pi_N(x) = x + N$ ile tanımlanan $\pi_N : M \longrightarrow M/N$ fonksiyonu bir R-modül epimorfizmasıdır. Bu epimorfizmaya *doğal epimorfizma (canonical epimorphism)* denir. Ayrıca $Ker\pi_N = N$ dir. Dolayısıyla M nin her altmodülü bir epimorfizmanın çekirdeğidir.

2.4 Basit, Yarı Basit, Asal ve Yarı Asal Halkalar/İdealler

Tanım 2.4.1 Sıfırdan farklı R halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa R ye *basit (simple) halka* adı verilir (Lam 2001).

Tanım 2.4.2 R bir halka olsun. Eğer R halkası basit ideallerinin direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa R ye *yarı basit (semisimple) halka* denir (Lam 2001).

Tanım 2.4.3 R bir halka ve P de R halkasının R den farklı bir ideali olsun. Bu durumda eğer R nin A ve B idealleri için, $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R halkasının *asal (prime) ideali* denir (Lam 2001).

Önerme 2.4.4 R halkasının bir P ideali için aşağıdakiler denktir:

(1) P bir asal idealdir.

(2) $a, b \in R$ için $< a >< b > \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(3) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(4) R nin A, B sol idealleri için $AB \subseteq P$ ise $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.

(5) R nin A, B sağ idealleri için $AB \subseteq P$ ise $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir (Lam 2001).

Tanım 2.4.5 R halkasının bütün asal ideallerinin kümesine R nin *asal spektrumu (prime spectrum)* denir ve $Spec(R)$ ile gösterilir (Atiyah 1969).

Tanım 2.4.6 R bir halka ve C de R halkasının R den farklı bir ideali olsun. Bu durumda, eğer R nin A ideali için, $A^2 \subseteq C$ iken $A \subseteq C$ oluyorsa C ye *yarı asal (semiprime) ideal* denir (Lam 2001).

Önerme 2.4.7 R halkasının bir C ideali için aşağıdakiler denktir:

(1) C bir yarı asal idealdir.

(2) $a \in R$ için $< a >^2 \subseteq C$ ise $a \in C$ dir.

(3) $a \in R$ için $aRa \subseteq C$ ise $a \in C$ dir.

(4) R nin A sol ideali için $A^2 \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

(5) R nin A sağ ideali için $A^2 \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir (Lam 2001).

Tanım 2.4.8 R bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı her sol ideali vefalı ise R ye *asal (prime) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.4.9 R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) R bir asal halkadır.

(2) R nin sıfırdan farklı her sağ ideali (sağ) vefalıdır.

(3) R nin sıfırdan farklı I_1 ve I_2 idealleri için $I_1 I_2 \neq 0$ dır.

(4) Her $a, b \in R$ için $aRb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.4.10 R bir halka ve I da R nin bir ideali ve $a \in C(R)$ olsun. Bu durumda

$$(a : I) = \{x \in R : ax \in I\}$$

ve $a^{\perp} = (a : 0)$ olarak tanımlanır (Atiyah ve Macdonald 1969).

2.5 Artinian ve Noetherian Halkalar/Modüller

Tanım 2.5.1 R bir halka ve $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$, R nin azalan sol (sağ) ideallerinin bir zinciri olsun. Eğer bu zincir sonlu bir adımda duruyorsa, yani bir pozitif n tamsayısı için $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ oluyorsa, o zaman R ye *sol (sağ) Artinian halka* denir. Ayrıca, S bir halka ve $J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq ...$, S nin artan sol (sağ) ideallerinin bir zinciri olsun. Eğer bu zincir sonlu bir adımda duruyorsa, yani bir pozitif m tamsayısı için $J_m = J_{m+1} = I_{m+2} = \cdots$ oluyorsa, o zaman S ye *sol (sağ) Noetherian halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.5.2 R bir halka ve M bir sol (sağ) R-modül olsun. $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq ...$, M nin azalan sol (sağ) R-altmodüllerinin bir zinciri olmak üzere eğer bu zincir sonlu bir adımda duruyorsa, yani bir pozitif r tamsayısı için $K_r = K_{r+1} = K_{r+2} = \cdots$ oluyorsa, o zaman M ye *sol (sağ) Artinian modül* denir. Ayrıca, S bir halka ve N bir sol (sağ) S-modül olsun. $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq ...$, N nin artan sol (sağ) S-altmodüllerinin bir zinciri olmak üzere eğer bu zincir sonlu bir adımda duruyorsa, yani bir pozitif p tamsayısı için $L_p = L_{p+1} = L_{p+2} = \cdots$ oluyorsa, o zaman N ye sol *(sağ) Noetherian modül* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Örnek 2.5.3 $\mathbb{Z}$ halkası Noetherian olmasına rağmen Artinian değildir. Ayrıca $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gibi sonlu sayıda ideali olan bütün halkalar hem Artinian hem de Noetheriandır.

Teorem 2.5.4 R bir halka, M bir R-modül ve $L \leq M$ olsun. M nin Artinian (Noetherian) olması için gerek ve yeter şart L ve M/L nin Artinian (Noetherian) olmasıdır (Anderson ve Fuller 1992).

İspat: ($\Rightarrow$) M bir Artinian modül ve $L \subseteq M$ olsun. $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \cdots$ L nin azalan bir altmodüller zinciri olsun. Bu zincir aynı zamanda M nin de azalan bir altmodüller zinciri olur. M Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur.

Böylece L Artiniandır. Ayrıca $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ M nin L yi kapsayan azalan altmodüller zinciri olsun. Bu durumada M Artinian olduğundan $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n = M_{n+1} = \cdots$ dir. Buradan

$$M_1/L \supseteq M_2/L \supseteq \cdots \supseteq M_n/L = M_{n+1}/L = \cdots$$

elde edilir. Bu ise M/L nin Artinian olduğunu gösterir. Benzer şekilde eğer M Noetherian ise L ve M/L de Noetheriandır.
($\Leftarrow$) $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ M nin bir altmodüller zinciri olsun. Buradan

$$M_1 \cap L \supseteq M_2 \cap L \supseteq M_3 \cap L \supseteq \cdots$$

L nin bir altmodüller zinciridir. L Artinian olduğundan pozitif bir k sayısı için $M_k \cap L = M_{k+1} \cap L = \cdots$ olur. Ayrıca

$$M_1 + L/L \supseteq M_2 + L/L \supseteq M_3 + L/L \supseteq \cdots$$

M/L nin bir altmodüller zinciri olmak üzere M/L Artinian olduğundan $M_k + L/L = M_{k+1} + L/L = \cdots$ olur. Genelliği bozmaksızın $n > k$ olsun. Bu durumda $M_n \supseteq M_{n+1}$, $L \cap M_n = L \cap M_{n+1}$ ve $M_n + L = M_{n+1} + L$ dir. Eğer $M_n \subseteq M_{n+1}$ olduğu gösterilirse ispat biter. $m \in M_{n+1}$ olsun. $m = l + m'$ olacak şekilde $l \in L$ ve $m' \in M_n$ vardır. $m' \in M_{n+1}$ olduğundan $m - m' = l + m' - m' = l \in L$ dir. Böylece $m - m' \in L$ ve $m - m' \in M_{n+1}$ yani $m - m' \in L \cap M_n$ dir. $L \cap M_n = L \cap M_{n+1}$ olduğundan $m - m' \in L \cap M_n$ olup $m - m' \in M_n$ dir. $m' \in M_n$ olduğundan $m - m' + m' = m \in M_n$ olup $M_{n+1} \subseteq M_n$ elde edilir. Dolayısıyla $M_n = M_{n+1}$ dir ve böylece M Artiniandır. Benzer şekilde L ve M/L Noetherian ise M nin de Noetherian olduğu gösterilebilir.

Sonuç 2.5.5 R bir halka olsun. Eğer M ve N birer Artinian (Noetherian) R-modül ise o zaman $M \oplus N$ de Artinian (Noetherian) R-modüldür (Anderson ve Fuller 1992).

İspat: $\phi : (M \oplus N)/N \longrightarrow M$ homomorfizması $\phi(m + n + N) = m$ şeklinde tanımlansın. Bu bir izomorfizma olduğundan $(M \oplus N)/N \cong M$ dir. Bu durumda M Artinian modül olduğundan $(M \oplus N)/N$ de Artinian modüldür. Teorem 2.5.4 gereğince N ve $(M \oplus N)/N$ Artinian olduğundan $M \oplus N$ Artinian olur. Benzer şekilde M ve N Noetherian modül ise $M \oplus N$ nin de Noetherian olduğu gösterilir.

Önerme 2.5.6 R bir Artinian halka olsun. R nin bir yarı basit halka olması için gerek ve yeter şart D_i ler birer bölme halkası ve n_i ler pozitif tamsayı olmak üzere R nin $\mathbb{M}_{n_1}(D_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(D_2) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_r}(D_r)$ ye izomorf olmasıdır (Lam 2001).

2.6 Jacobson Radikali

Tanım 2.6.1 R bir halka olsun. R nin bütün maksimal sol ideallerinin veya denk olarak bütün maksimal sağ ideallerinin arakesitine R nin *Jacobson radikali* adı verilir ve $J(R)$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.6.2 R bir halka olsun. Aşağıdaki kümeler eşittir.

(1) R nin bütün maksimal sol (sağ) ideallerinin arakesiti,

(2) $\{x \in R : \text{her } r, s \in R \text{ için } rxs \text{ kısmi düzenli}\}$

(3) $\{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } rx \text{ kısmi düzenli}\}$

(4) $\{x \in R : \text{her } s \in R \text{ için } xs \text{ kısmi düzenli}\}$

(5) R nin bütün kısmi düzenli sol (sağ) ideallerinin birleşimi,

(6) R nin bütün kısmi düzenli ideallerinin birleşimi (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.6.3 R bir halka olsun. Eğer $J(R) = 0$ ise o zaman R ye *yarı ilkel (semi primitive) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

2.7 Değişim Halkaları

Önerme 2.7.1 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır.

(2) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.

(3) $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.

(4) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır (Nicholson 1977).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcut olsun. Dolayısıyla $e-x = r(x-x^2)$ olacak şekilde $r \in R$ mevcut olup $e = x+r(x-x^2) \in Rx$ dir. Böylece $1 - e = (1 - rx)(1 - x)$ olup $c = (1 - rx) \in R$ için $(1 - e) - c(1 - x) = 0 \in J(R)$ elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (3) $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ mevcut olsun. $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ olup $1 - ((1 - e) - c(1 - x)) = e + c(1 - x) \in R$ tersinirdir. Dolayısıyla $u \in R$ için $1 = u(e+c(1-x)) = ue+uc(1-x) \in Re+R(1-x)$ olacağından $R = Re + R(1 - x)$ dir.
(3) $\Rightarrow$ (4) $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ olsun. $R = Re + R(1 - x)$ olduğundan $1 = te+s(1-x) \in R$ olacak şekilde $t, s \in R$ mevcut olup $f = e+(1-e)te$ alınırsa $f^2 = f \in Rx$ olup $1 - f = (1 - e)s(1 - x) \in R(1 - x)$ bulunur.
(4) $\Rightarrow$ (1) $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ olsun. $e^2 = e \in Rx$ olup Rx, R nin ideali olduğundan $e^2 = e \in R$ dir. Böylece $e \in Rx$ ve $1 - e \in R(1 - x)$ için $e - x = e - x + ex - ex = e(1 - x) - (1 - e)x \in R(x - x^2)$ dir.

Tanım 2.7.2 R bir halka olsun. Eğer R halkasındaki her eleman Önerme 2.7.1 deki denk şartlardan birini sağlıyor ise R ye *sol değişim (exchange) halkası* denir (Nicholson 1977).

Tanım 2.7.3 R bir halka ve I da R nin toplamsal bir altgrubu olsun. $x - x^2 \in I$ şartını sağlayan $x \in R$ için $e-x \in I$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ varsa eşkare elemanlar I ya göre yükselir denir (Nicholson 1977).

Sonuç 2.7.4 Bir halkanın değişim halkası olması için gerek ve yeter şart eşkare elemanların her sol ideale göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

İspat: ($\Rightarrow$) R bir değişim halkası ve I da R nin sol ideali olsun. $x - x^2 \in I$ şartını sağlayan $x \in R$ göz önüne alınsın. R değişim halkası olduğundan $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. $x - x^2 \in I$ olup $R(x - x^2)$, I nın ideali olduğundan $e - x \in I$ dir.
($\Leftarrow$) Eşkare elemanlar her sol ideale göre yükselsin ve $x \in R$ olsun. $R(x - x^2)$ sol ideal ve $x \in R$ olup $x - x^2 \in R(x - x^2)$ dir. Kabul gereğince $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır.

Önerme 2.7.5 R nin bir değişim halkası olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ bölüm halkasının bir değişim halkası olması ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükselmesidir (Nicholson 1977).

İspat: ($\Rightarrow$) R bir değişim halkası olsun. Dolayısıyla $R/J(R)$ değişim halkası olup Sonuç 2.7.4 gereğince eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir.
($\Leftarrow$) $\bar{R} = R/J(R)$ bir değişim halkası ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor olsun. $x \in R$ alınsın. $x + J(R) = \bar{x} \in \bar{R}$ için kabul gereğince $(\bar{1} - \bar{e}) - \bar{c}(\bar{1} - \bar{x}) \in J(\bar{R})$ olacak şekilde $\bar{e}^2 = \bar{e} \in \bar{R}\bar{x}$ ve $\bar{c} \in \bar{R}$ vardır. $J(\bar{R}) = 0$ olduğundan $\bar{1} - \bar{e} = \bar{c}(\bar{1} - \bar{x})$ olup $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ dir. Eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseldiği için $e^2 = e \in Rx$ olup ispat tamamlanır.

2.8 Düzenli, Yarı Düzenli, Kuvvetli π-Düzenli ve Tersinir Düzenli Halkalar

Tanım 2.8.1 R bir halka olsun. $x \in R$ için $xyx = x$ şartını sağlayan $y \in R$ mevcut ise x e *düzenli (regular) eleman* adı verilir. Eğer her $x \in R$ için $xyx = x$ olacak

şekilde bir $y \in R$ varsa R ye *düzenli (regular) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Lemma 2.8.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer bir $y \in R$ için $a - aya$ düzenli ise o zaman a da düzenlidir (Brown ve McCoy 1950).

İspat: R bir halka ve $a, y \in R$ olmak üzere $a - aya \in R$ düzenli bir eleman olsun. O halde $(a - aya)z(a - aya) = a - aya$ olacak biçimde $z \in R$ vardır. $x = z - zay - yaz + yazay + y$ alınırsa o zaman $axa = aza - azaya - ayaza + ayazaya + aya = (a - aya)z(a - aya) + aya = a - aya + aya = a$ olup $a = axa$ olur. Böylece a düzenli bir elemandır.

Önerme 2.8.3 Her düzenli halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R bir düzenli halka ve $x \in R$ olsun. R düzenli halka olduğundan $xyx = x$ olacak şekilde $y \in R$ vardır. $f = yx$ için $f^2 = f \in R$ sağlanır. f ye bağlı olarak $e = f + (1 - f)xf$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ eşkare elemanı tanımlanabilir. Dolayısıyla $1 - e = (1 - f)(1 - x) \in R(1 - x)$ olup R değişim halkasıdır.

Tanım 2.8.4 R bir halka olmak üzere $R/J(R)$ bir düzenli halka olsun. Eğer eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor ise R ye *yarı düzenli (semiregular) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 2.8.5 Her yarı düzenli halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R bir yarı düzenli halka olsun. Dolayısıyla $R/J(R)$ düzenli bir halka olup eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. $R/J(R)$ düzenli olduğundan Önerme 2.8.3 gereğince değişim halkasıdır. Böylece Önerme 2.7.5 gereğince R bir değişim halkasıdır.

Önerme 2.8.6 R nin bir yarı düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir değişim halkası ve $R/J(R)$ nin bir düzenli halka olmasıdır (Nicholson 1977).

Tanım 2.8.7 R bir halka olmak üzere $a \in R$ için $a^n = a^{n+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $n \geq 1$ tamsayısı varsa, $a \in R$ ye bir *kuvvetli π-düzenli (strongly π-regular) eleman* denir. Her elemanı kuvvetli π-düzenli olan halkaya bir kuvvetli π-düzenli halka denir (Nicholson 1999).

Önerme 2.8.8 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.
(1) R bir kuvvetli π-düzenli halkadır.
(2) Her $a \in R$ için $a^m = za^{m+1}$ olacak şekilde $z \in R$ ve $m \geq 1$ tamsayısı vardır.
(3) Her $a \in R$ için $aR \supseteq a^2R \supseteq \cdots \supseteq a^nR \supseteq \cdots$ azalan dizisi sonlu bir adımda durur.
(4) Her $a \in R$ için $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \cdots \supseteq Ra^n \supseteq \cdots$ azalan dizisi sonlu bir adımda durur.
(5) Her $a \in R$ ve $j \geq 1$ tamsayısı için $a^t \in a^{t+j}R \cap Ra^{t+j}$ olacak şekilde $t \geq 1$ tamsayısı vardır (Tuganbaev 2002).

Tanım 2.8.9 R bir halka olsun. Eğer R üzerindeki bütün matris halkaları kuvvetli π-düzenli halka ise o zaman R ye *matris anlamında kuvvetli π-düzenli (matricially strongly π-regular) halka* denir (Haghany 1999).

Tanım 2.8.10 R bir halka olsun. $r \in R$ olmak üzere eğer $r = rur$ olacak şekilde $u \in U(R)$ elemanı mevcut ise r ye bir *tersinir düzenli (unit regular) eleman* denir. Eğer her $x \in R$ için $x = xux$ olacak şekilde tersinir $u \in R$ varsa R ye bir *tersinir düzenli (unit regular) halka* denir (Han ve Nicholson 2001).

Önerme 2.8.11 Her tersinir düzenli halka bir düzenli halkadır.

İspat: R bir tersinir düzenli halka ve $a \in R$ olsun. Dolayısıyla $a = aua$ olacak şekilde tersinir $u \in R$ vardır. Böylece R bir düzenli halkadır.

2.9 Yerel ve Yarı Yerel Halkalar

Tanım 2.9.1 R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ bir bölme halkası ise o zaman R ye bir *yerel (local) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.9.2 Her yerel halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R bir yerel halka ve $x \in R$ olsun. $x \in J(R)$ ise $0^2 = 0 = e \in Rx$ ve $c = 1 \in R$ için $(1-e) - c(1-x) = x \in J(R)$ olduğundan R değişim halkasıdır. Karşıt olarak $x \notin J(R)$ olsun. Dolayısıyla $ux = 1$ olacak şekilde $u \in R$ vardır. Ayrıca $Rx = R$ ve $1 - ux = 0 \in J(R)$ dir. $1^2 = 1 = e \in Rx = R$ ve $c = 1 \in R$ için $(1-e) - c(1-ux) = -(1-ux) \in J(R)$ olacağından R bir değişim halkasıdır.

Önerme 2.9.3 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) R bir yerel halkadır.

(2) R halkası tek maksimal ideale sahiptir.

(3) $J(R)$ bir maksimal sol idealdir.

(4) R nin sol terse sahip olmayan elemanlarının kümesi toplamaya göre kapalıdır.

(5) $J(R) = \{x \in R : Rx \neq R\}$

(6) $J(R) = \{x \in R : x \notin U(R)\}$

(7) Her $x \in R$ için $x \in U(R)$ ya da $1 - x \in U(R)$ dir (Anderson ve Fuller 1992).

Uyarı 2.9.4 R bir halka olsun. Her $u \in U(R)$ ve $r \in J(R)$ için $u + r \in U(R)$ dir.

Tanım 2.9.5 R bir halka olmak üzere $R/J(R)$ yarı basit Artinian halka ise R ye bir *yarı yerel (semilocal) halka* denir (Lam 2001).

2.10 Güçlü ve Yarı Güçlü Halkalar

Tanım 2.10.1 R bir halka olmak üzere R deki eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor ve $J(R)$ de kapsanmayan her sol ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman içeriyorsa, R ye bir *güçlü (potent) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 2.10.2 Her değişim halkası bir güçlü halkadır (Nicholson 1977).

İspat: R bir değişim halkası olsun. Böylece eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. $x \notin J(R)$ için $0 \neq e = e^2 \in Rx$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $x \in R$ için $e^2 = e \in Rx$ ise $e = 0$ olduğu kabul edilsin. R bir değişim halkası olduğundan bir $a \in R$ için $1 - e \in R(1 - ax)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rax$ vardır. Kabul gereğince $e = 0$ olup $1 \in R(1 - ax)$ dir. Dolayısıyla $x \in J(R)$ olur. Bu durum $x \notin J(R)$ olması ile çelişir. Böylece $e \neq 0$ olup R bir güçlü halkadır.

Tanım 2.10.3 R bir halka olmak üzere $J(R)$ de kapsanmayan her sol (sağ) ideal sıfırdan farklı bir eşkare eleman içeriyorsa R ye bir *yarı güçlü (semipotent) halka* denir (Han ve Nicholson 2001).

Önerme 2.10.4 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda eğer R bir yarı güçlü halka ise o zaman aRb de yarı güçlüdür (Nicholson 1975).

2.11 Temiz Halkalar

Tanım 2.11.1 R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a = e+u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ varsa, a ya *temiz (clean) eleman* denir. Her elemanı temiz eleman olan halkaya bir *temiz (clean) halka* denir (Nicholson 1977).

Önerme 2.11.2 Her temiz halka bir değişim halkasıdır (Nicholson 1977).

İspat: R bir temiz halka olsun. $x \in R$ için $x = e + u$ olacak şekilde $u \in U(R)$ ve $e^2 = e \in R$ vardır. u tersinir eleman olduğundan $u^{-1}u = uu^{-1} = 1$ olacak şekilde $u^{-1} \in R$ vardır. Böylece $x - x^2 = u(1 - u^{-1}eu - e - u) = u(u^{-1}(1 - e)u - x)$ olup $f = u^{-1}(1 - e)u$ için $f^2 = f \in R$ ve $u(f - x) = x - x^2$ dir. Dolayısıyla $f - x = u^{-1}(x - x^2) \in R(x - x^2)$ olacağından R bir değişim halkasıdır.

Önerme 2.11.3 Her yerel halka bir temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R bir yerel halka ve $x \in R$ olsun. Dolayısıyla x veya $1-x$ tersinir elemanlardır. x elemanı tersinir ise, $0^2 = 0 \in R$ ve tersinir x elemanı için $x = 0 + x$ olur. $1 - x$ elemanı tersinir ise, $x - 1$ de tersinir eleman olup $1^2 = 1 \in R$ için $x = 1 + x - 1$ olduğundan R bir temiz halkadır.

Önerme 2.11.4 Temiz halkanın her homomorfik görüntüsü de bir temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R bir temiz halka olsun. R nin her homomorfik görüntüsü bir I ideali için R/I biçimindedir. $\bar{r} \in R/I$ için $r \in R$ olup R temiz halka olduğundan $r = e + u$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır. Ayrıca $\bar{e}^2 = \bar{e} \in R/I$ ve $\bar{u}^{-1}\bar{u} = \bar{u}\bar{u}^{-1} = 1$ için $\bar{r} = \bar{e} + \bar{u}$ dir. Böylece R/I bir temiz halkadır.

Önerme 2.11.5 R bir halka ve R nin bir ideali A olmak üzere $A \subseteq J(R)$ olsun. R halkasının temiz halka olması için gerek ve yeter şart R/A nın temiz halka ve eşkare elemanların A ya göre yükselmesidir (Han ve Nicholson 2001).

İspat: ($\Rightarrow$) R bir temiz halka ise R/A bölüm halkası R nin bir homomorfik görüntüsü olup bir temiz halkadır. $r \in R$ ve $r^2 - r \in A$ olsun. R bir temiz halka olduğundan $r = e+u$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ ve $u \in U(R)$ vardır. Dolayısıyla $u^{-1}(1-e)u \in R$ eşkare olup $r - u^{-1}(1-e)u = u^{-1}(r^2 - r) \in A$ olduğundan eşkare elemanlar A ya göre yükselir.
($\Leftarrow$) $r \in R$ olmak üzere R/A bir temiz halka olduğundan $\bar{r} = \bar{e} + \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{e}^2 = \bar{e} \in R/A$ ve $\bar{u} \in U(R/A)$ vardır. Eşkare elemanlar A ya göre yükseldiğinden $e^2 = e \in R$ olarak göz önüne alınabilir. $\overline{r-e} = \bar{u}$ tersinir olup $A \subseteq J(R)$ olduğundan $r - e \in R$ tersinirdir. Böylece $r = e + r - e$ olduğundan R bir temiz halkadır.

Sonuç 2.11.6 R halkasının bir temiz halka olması için gerek ve yeter şart $R/J(R)$ nin bir temiz halka ve eşkare elemanların $J(R)$ ye göre yükseliyor olmasıdır (Nicholson 1977).

Uyarı 2.11.7 M bir sağ R-modül olmak üzere, $M = A \oplus B$ ve

$$U = \begin{pmatrix} End(A) & Hom(B,A) \\ Hom(A,B) & End(B) \end{pmatrix}$$

olsun. $f \in End(M)$ ve $m \in M$ için $a_1 \in A$ ve $b_1 \in B$ olmak üzere $f(m) = a_1 + b_1$ olarak alınsın. $f_1 : A \to A$, $f_2 : B \to A$, $f_3 : A \to B$ ve $f_4 : B \to B$ dönüşümleri sırasıyla $f_1(a) = a_1$, $f_2(b) = a_1$, $f_3(a) = b_1$ ve $f_4(b) = b_1$ ile tanımlansın. $\phi(f) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$ ile tanımlı $\phi : End(M) \to U$ dönüşümünün iyi tanımlı, birebir ve halka homomorfizması olduğu açıktır. $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in U$ için $f : M \to M$ dönüşümü $f(a+b) = (g_1+g_2)(a)+(g_3+g_4)(b)$ ile tanımlansın. Bu durumda $\phi(f) = g$ olduğundan

ϕ örten olup

$$End(M) \cong \begin{pmatrix} End(A) & Hom(B,A) \\ Hom(A,B) & End(B) \end{pmatrix} = U$$

dir. Böylece e_1 ve e_2 eşkare elemanlar olmak üzere

$$End(e_1R \oplus e_2R) \cong \begin{pmatrix} End(e_1R) & Hom(e_2R, e_1R) \\ Hom(e_1R, e_2R) & End(e_2R) \end{pmatrix}$$

sağlanır. Diğer taraftan $f(e_2) = e_1r$ olmak üzere $\varphi : Hom(e_2R, e_1R) \to e_1Re_2$ dönüşümü $\varphi(f) = e_1re_2$ ile tanımlansın. φ dönüşümünün iyi tanımlı, örten ve halka homomorfizması olduğu açıktır. $e_1re_2 = 0$ olmak üzere $f(e_2) = f(e_2^2) = e_1re_2 = 0$ olduğundan $f = 0$ olup φ birebirdir. Dolayısıyla

$$End(e_1R \oplus e_2R) \cong \begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 \end{pmatrix}$$

dir. Daha genel olarak $e^2 = e$ için $End(eR) \cong eRe$ olduğundan

$$End(e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR) \cong \begin{pmatrix} e_1Re_1 & \cdots & e_1Re_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_nRe_1 & \cdots & e_nRe_n \end{pmatrix}$$

sağlanır.

Önerme 2.11.8 R bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. eRe ve $(1-e)R(1-e)$ birer temiz halka ise o zaman R de bir temiz halkadır (Han ve Nicholson 2001).

İspat: R halkası için Uyarı 2.11.7 göz önüne alınırsa

$$R \cong \begin{pmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{pmatrix}$$

olur. $A = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ olsun. Kabul gereğince $a = f+u$ olacak şekilde $f^2 = f \in eRe$ ve $uu' = 1_{eRe} = e$ şartını sağlayan $u' \in eRe$ vardır. Ayrıca $b - yu'x = g + v$ olacak

şekilde $g^2 = g \in (1-e)R(1-e)$ ve $vv' = 1_{(1-e)R(1-e)} = 1-e$ şartını sağlayan $v' \in (1-e)R(1-e)$ vardır. Bu durumda

$$A = \begin{pmatrix} f+u & x \\ y & g+v+yu'x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu'x \end{pmatrix}$$

dir. $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ olduğundan eşkare elemandır. Diğer taraftan

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ -yu' & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu'x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -u'x \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & x \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -u'x \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

olur.

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-e \end{pmatrix}$$

olduğundan $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ matrisi tersinirdir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} u & x \\ y & v+yu'x \end{pmatrix} \in U(R)$ dir. Böylece R temiz halkadır.

2.12 Mükemmel, Yarı Mükemmel ve Yarı Asalımsı Halkalar

Tanım 2.12.1 R bir halka ve $I \subseteq R$ olsun. I da herhangi bir $s_1, s_2, \cdots$ dizisi için $s_1 \cdots s_n = 0$ ($s_n \cdots s_1 = 0$) olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı varsa o zaman I ya *sol (sağ) T-üstel sıfır (T-nilpotent)* adı verilir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.12.2 R bir halka olsun. R nin bir sol (sağ) mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı yerel halka ve $J(R)$ nin bir sol (sağ) T-üstel sıfır olmasıdır (Lam 2001).

Önerme 2.12.3 R bir halka ve $\{e_1, ..., e_n\}$ de R nin tam dik eşkare elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda R nin bir sol (sağ) mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart e_iRe_i nin bir sol (sağ) mükemmel halka olmasıdır (Anderson ve Fuller 1992).

Teorem 2.12.4 R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) R bir sağ mükemmel halkadır.

(2) R nin azalan temel sol ideallerinin zinciri sonlu bir adımda durur.

(3) Her sol R-modülünün azalan devirli altmodüllerinin zinciri sonlu bir adımda durur.

(4) R halkası sonsuz elemanlı sıfırdan farklı dik eşkare elemanlar kümesi içermez ve sıfırdan farklı her R-modülü bir basit altmodül içerir.

(5) Her sol R-modülünün azalan sonlu üretilmiş altmodüllerinin zinciri sonlu bir adımda durur.

(6) R halkasının azalan sonlu üretilmiş sol ideallerinin zinciri sonlu bir adımda durur.

(7) R halkasının artan temel sağ ideallerinin zinciri sonlu bir adımda durur (Lam 2001).

Tanım 2.12.5 R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ bir yarı basit Artinian halka ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükseliyor ise R ye bir *yarı mükemmel (semiperfect) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.12.6 R bir halka ve $e_1, \cdots, e_n \in R$ nin sıfırdan farklı dik eşkare elemanları ve $e_1 + \cdots + e_n = 1$ olsun. Bu durumda R nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart e_iRe_i $(1 \leq i \leq n)$ nin bir yarı mükemmel halka olmasıdır (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.12.7 R bir halka olsun. R nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı yerel ve bir değişim halkası olmasıdır (Nicholson 1977).

Tanım 2.12.8 R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ bir yarı basit Artinian halka ve $J(R)$ bir üstel sıfır ideal ise o zaman R ye *yarı asalımsı (semiprimary) halka* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.12.9 R bir halka ve $\{e_1, ..., e_n\}$ de R nin tam dik eşkare elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda R nin bir yarı asalımsı halka olması için gerek ve yeter şart e_iRe_i $(1 \leq i \leq n)$ nin bir yarı asalımsı halka olmasıdır (Anderson ve Fuller 1992).

2.13 Abel Halkalar ve Durgunluk Aralığı Koşulu

Tanım 2.13.1 R bir halka olsun. Eğer R nin bütün eşkare elemanları merkezil ise o zaman R halkasına *Abel (Abelian) halka* denir (Lam 2007).

Tanım 2.13.2 R bir halka olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $aR + bR = R$ olmak üzere $a + by \in U(R)$ olacak şekilde $y \in R$ varsa R ye *durgunluk aralığı 1 (stable range 1)* dir denir (Chen 2011).

Önerme 2.13.3 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) R nin durgunluk aralığı 1 dir.

(2) Her $a, x, b \in R$ için $ax + b = 1$ olmak üzere $a + by \in U(R)$ olacak şekilde $y \in R$ vardır (Chen 2011).

Önerme 2.13.4 R bir halka olsun. R nin bir tersinir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir düzenli halka ve durgunluk aralığının 1 olmasıdır (Chen 2011).

Tanım 2.13.5 R bir halka olsun. $a, b \in R$ için eğer $ab = 1$ iken $ba = 1$ ise R ye *Dedekind sonlu (directly finite) halka* denir (Lam 2001).

Önerme 2.13.6 Her tersinir düzenli halka Dedekind sonludur (Goodearl ve Wehrung 2005).

İspat: R halkası tersinir düzenli ve $ab = 1$ olsun. Dolayısıyla $a = aua$ olacak şekilde tersinir $u \in R$ vardır. $1 = ab = auab = au$ için u tersinir olduğundan $a \in R$ tersinir olup $ba = 1$ dir.

Önerme 2.13.7 Her Abel halka Dedekind sonludur (Huynh vd. 2012).

İspat: $a, b \in R$ için $ab = 1$ olsun. O zaman $(ba)^2 = b(ab)a = ba$ olup ba eşkare olur. R Abel olduğundan $ba = (ba)1 = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = 1$ yazabiliriz. Böylece R halkası Dedekind sonludur.

Tanım 2.13.8 R bir halka olsun. Eğer R nin her elemanı iki tersinir elemanın toplamı şeklinde yazılabiliyorsa, yani $a \in R$ için $a = u + v$ olcak şekide $u, v \in U(R)$ varsa R ye *2-iyi (2-good) halka* denir (Krylov ve Tuganbaev 2010).

2.14 Serbest Modüller

Tanım 2.14.1 M sağ R-modülünün X altkümesi için

(1) $< X >= XR = M$ ise X kümesi M yi üretir denir.

(2) $i = 1, ..., n \in \mathbb{N}$ için $x_i \in X$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $x_1r_1 + \cdots + x_nr_n = 0$ iken, her i için $r_i = 0$ oluyorsa X e *R-bağımsız (R-independent)* denir (Dauns 1994).

Tanım 2.14.2 M sağ R-modülünün X altkümesi hem M yi üretir hem de R-bağımsız ise X e M nin *R-bazı (R-basis)* denir (Dauns 1994).

Lemma 2.14.3 M sağ R-modülünün X altkümesi için aşağıdakiler denktir.

(1) X kümesi M nin bir bazıdır.

(2) M nin sıfırdan farklı her bir m elemanı farklı $x_i \in X$ ve $0 \neq r_i \in R$ olmak üzere $m = x_1r_1 + \cdots + x_nr_n$ biçiminde tek türlü yazılır (Dauns 1994).

Tanım 2.14.4 M R-modülü bir X bazına sahipse M ye *serbest (free) modül* denir (Dauns 1994).

2.15 Modüllerin Tensör Çarpımı

Tanım 2.15.1 R bir halka, M bir sağ R-modül ve N de bir sol R-modül olsun. G herhangi bir değişmeli grup ve $\beta : M \times N \to G$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, x_1, x_2 \in M$ ve $y, y_1, y_2 \in N$ ve $r \in R$ için

(1) $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$

(2) $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$

(3) $\beta(xr, y) = \beta(x, ry)$

oluyorsa o zaman β dönüşümüne *R-dengeli (R-balanced)* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.15.2 A herhangi bir küme olsun. A üzerindeki serbest değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$-modül olarak alınsın ve $F(A)$ ile gösterilsin. Yani

$$F(A) = \left\{ \sum m_a.a : a \in A, m_a \in \mathbb{Z}, \text{sonlu sayıda } a \text{ için } m_a \neq 0 \right\}$$

olsun. M bir sağ R-modül ve N bir sol R-modül olsun. $F = F(M \times N)$ kümesi $M \times N$ üzerinde bir serbest değişmeli gruptur. Yani

$$F = \left\{ \sum m_{(x.y)}(x, y) : x \in M, y \in N, \text{sonlu sayıda } m_{(x,y)} \neq 0, m_{(x,y)} \in \mathbb{Z} \right\}$$

dir. F nin içinde $m, m_1, m_2 \in M$ ve $n, n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ için

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$$
$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$$
$$(mr, n) - (m, rn)$$

şeklindeki elemanların ürettiği altgrup H ise o zaman F/H bölüm grubu $M \otimes_R N$ ile gösterilir. Bu gruba M_R ve ${}_RN$ nin *tensör çarpımı (tensor product)* denir. $m \in M$ ve $n \in N$ olmak üzere $(m, n) + H$ koseti $m \otimes n$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller 1992).

Önerme 2.15.3 R bir halka, M bir sağ R-modül ve N de bir sol R-modül olsun. $M \otimes_R N$ tensör çarpımı aşağıdaki formda sonlu toplam şeklinde ifade edilebilir.

$$\sum\nolimits_i (m_i \otimes n_i) \qquad (m_i \in M, n_i \in N)$$

Ayrıca her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $n, n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ için

(1) $(m_1 + m_2) \otimes n = (m_1 \otimes n) + (m_2 \otimes n)$,

(2) $m \otimes (n_1 + n_2) = (m \otimes n_1) + (m \otimes n_2)$,

(3) $mr \otimes n = m \otimes rn$

dir (Anderson ve Fuller 1992).

3. MORİTA YAPILARI

A, B birer halka ve M, N sırasıyla sol A- sağ B- ve sol B- sağ A-ikili modüller olsun. $\phi : M \otimes_B N \to A$ ve $\psi : N \otimes_A M \to B$ dönüşümleri göz önüne alındığında eğer ϕ ve ψ birleşme özelliğini sağlıyor, yani her $m, m' \in M$ ve $n, n' \in N$ için $\phi(m \otimes n)m' = m\psi(n \otimes m')$ ve $\psi(n \otimes m)n' = n\phi(m \otimes n')$ ise o zaman (A, B, M, N, ϕ, ψ) altılısına *Morita yapısı (Morita context)* adı verilir. Ayrıca

$$R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} : a \in A, x \in M, y \in N, b \in B \right\}$$

kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + \phi(x_1 \otimes y_2) & a_1x_2 + x_1b_2 \\ y_1a_2 + b_1y_2 & \psi(y_1 \otimes x_2) + b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda R bir halkadır. R ye *Morita halkası (Morita ring)* denir.

3.1 Morita Yapıları: Genel Durum

Burada $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ matrisi Morita halkası olarak alınacaktır. R Morita halkasının hangi şartlar altında Artinian, Noetherian, sol mükemmel, yarı yerel, yarı mükemmel, yarı asalımsı, yarı düzenli, düzenli, tersinir düzenli, değişim ve yarı güçlü olacağı incelenecektir.

Öncelikle bazı gösterimler verilecektir. I kümesi R nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Burada

R nin I daki A bileşeni kümesi: $$p_A(I) = \left\{ a \in A : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

R nin I daki M bileşeni kümesi: $$p_M(I) = \left\{ x \in M : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

R nin I daki N bileşeni kümesi: $$p_N(I) = \left\{ y \in N : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

R nin I daki B bileşeni kümesi: $$p_B(I) = \left\{ b \in B : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

R nin I daki sırasıyla birinci ve ikinci satırlar kümesi:

$$r_1(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}, \qquad r_2(I) = \left\{ \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

R nin I daki sırasıyla birinci ve ikinci sütunlar kümesi:

$$c_1(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}, \qquad c_2(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

$(A \oplus N)_A$ ve $(M \oplus B)_B$ nin elemanları sütun vektörü; ${}_A(A \oplus M)$ ve ${}_B(N \oplus B)$ nin elemanları ise satır vektörü olarak yazılır. $C_1 \leq (A \oplus N)_A$, $C_2 \leq (M \oplus B)_B$, $R_1 \leq {}_A(A \oplus M)$ ve $R_2 \leq {}_B(N \oplus B)$ altmodülleri için

$$C_1M = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} ax \\ yx \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in C_1, x \in M \right\},$$

$$C_2N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} xy \\ by \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in C_2, y \in N \right\},$$

$$NR_1 = \left\{ y \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & yx \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in R_1, y \in N \right\},$$
$$MR_2 = \left\{ x \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & xb \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in R_2, x \in M \right\}.$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.1.1 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ Morita halkası ve I da R nin boştan farklı bir altkümesi olsun.

(1) I altkümesinin R nin bir sağ ideali olması için gerek ve yeter şart $I = (C_1 \quad C_2)$ olacak şekilde $C_1 \leq (A \oplus N)_A$ ve $C_2 \leq (M \oplus B)_B$ vardır öyle ki $C_1M \subseteq C_2$ ve $C_2N \subseteq C_1$ dir. Burada, $C_1 = c_1(I)$ and $C_2 = c_2(I)$ dir.

(2) I altkümesinin R nin bir sol ideali olması için gerek ve yeter şart $I = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $R_1 \leq {}_A(A \oplus M)$ ve $R_2 \leq {}_B(N \oplus B)$ vardır öyle ki $MR_2 \subseteq R_1$ ve $NR_1 \subseteq R_2$ dir. Burada $R_1 = r_1(I)$ ve $R_2 = r_2(I)$ dir.

(3) I altkümesinin R nin bir ideali olması için gerek ve yeter şart $I = \begin{pmatrix} A_1 & M_1 \\ N_1 & B_1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $A_1 \trianglelefteq A$, $B_1 \trianglelefteq B$, $M_1 \leq {}_AM_B$ ve $N_1 \leq {}_BN_A$ vardır öyle ki $M_1N \subseteq A_1$, $N_1M \subseteq B_1$, $A_1M \subseteq M_1$, $B_1N \subseteq N_1$, $MN_1 \subseteq A_1$, $NM_1 \subseteq B_1$, $MB_1 \subseteq M_1$, ve $NA_1 \subseteq N_1$ dir. Burada, $A_1 = p_A(I)$, $B_1 = p_B(I)$, $M_1 = p_M(I)$ ve $N_1 = p_N(I)$ (Tang vd. 2014).

İspat: $0 \neq e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ ve $\bar{e} = 1 - e$ olsun.

(1) I altkümesi R nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda

$$Ie = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I) \right\} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I$$

ve

$$I\bar{e} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I) \right\} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \subseteq I$$

dir. Böylece $I = Ie + I\bar{e} = I = (C_1 \quad C_2)$ olur. Şimdi $a^{'} \in A$, $b^{'} \in B$, $x^{'} \in M$ ve $y^{'} \in N$ için

$$\begin{pmatrix} c_1(I) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I),\ a^{'} \in A \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} aa^{'} & 0 \\ yb^{'} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I),\ a^{'} \in A \right\} \subseteq \begin{pmatrix} c_1(I) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_2(I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^{'} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^{'} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I),\ b^{'} \in B \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & xb^{'} \\ 0 & bb^{'} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I),\ b^{'} \in B \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & c_2(I) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(I) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^{'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^{'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I),\ x^{'} \in M \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & ax^{'} \\ 0 & yx^{'} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I),\ x^{'} \in M \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & c_2(I) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_2(I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y^{'} & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y^{'} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I),\ y^{'} \in N \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} xy^{'} & 0 \\ by^{'} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I),\ b^{'} \in B \right\} \subseteq \begin{pmatrix} c_1(I) & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $c_1(1) \leq (A \oplus N)_A$ ve $c_2(I) \leq (M \oplus B)_B$, $c_1(I)M \subseteq c_2(I)$ ve $c_2(I)N \subseteq c_1(I)$ olur. Karşıt olarak $I = (C_1 \quad C_2)$ olsun. O zaman her eleman $r = \begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} \in R$ ve $s = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I$ öyle ki $\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I)$ ve $\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I)$ için

$$sr = \begin{pmatrix} aa' + xn & am + xb' \\ ya' + bn & ym + bb' \end{pmatrix}$$

dir. Burada $c_2(I)N \subseteq c_1(I)$ olduğundan $\begin{pmatrix} xn \\ bn \end{pmatrix} \in c_1(I)$ ve $c_1(1) \leq (A \oplus N)_A$ olduğundan $\begin{pmatrix} aa^{'} \\ ya^{'} \end{pmatrix} \in c_1(I)$ olup $\begin{pmatrix} aa^{'} + xn \\ ya^{'} + bn \end{pmatrix} \in c_1(I)$ olur. Ayrıca $c_1(I)M \subseteq c_2(I)$ olduğun-

dan $\begin{pmatrix} am \\ ym \end{pmatrix}$ ve $c_2(I) \leq (M \oplus B)_B$ olduğundan $\begin{pmatrix} xb' \\ bb' \end{pmatrix} \in c_2(I)$ olup $\begin{pmatrix} am + xb' \\ ym + bb' \end{pmatrix} \in c_2(I)$ olur. Dolayısıyla $sr \in I = (C_1 \quad C_2)$ olup böylece I, R nin bir sağ idealidir.

(2) I altkümesi R nin bir sol ideali olsun. Bu durumda:

$$eI = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in r_1(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} r_1(I) \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq I$$

ve

$$\bar{e}I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in r_2(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ r_2(I) \end{pmatrix} \subseteq I$$

dir. Böylece $I = eI + (1 - e)I = \begin{pmatrix} r_1(I) \\ r_2(I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ olur. Şimdi $a' \in A$, $b' \in B$, $x' \in M$ ve $y' \in N$ için

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(I) \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in r_1(I),\ a' \in A \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} aa' & a'x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in r_1(I),\ a' \in A \right\} \subseteq \begin{pmatrix} r_1(I) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_2(I) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in r_2(I),\ b' \in B \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b'y & b'b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in r_2(I),\ b' \in B \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ r_2(I) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r_2(I) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in r_2(I),\ x' \in M \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x'y & x'b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} \in r_2(I),\ x' \in M \right\} \subseteq \begin{pmatrix} r_1(I) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1(I) \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in r_1(I),\ y' \in N \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y'a & y'x \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} \in r_1(I),\ y' \in N \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 \\ r_2(I) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $r_1(I) \leq {}_A(A \oplus M)$ ve $r_2(I) \leq {}_B(N \oplus B)$, $Mr_2(I) \subseteq r_1(I)$ ve $Nr_1(I) \subseteq r_2(I)$. Karşıt olarak $I = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman her $r = \begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} \in R$ ve $s = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I$ öyle ki $(a \quad x) \in r_1(I)$ ve $(y \quad b) \in r_2(I)$ için

$$rs = \begin{pmatrix} a'a + my & a'x + mb \\ na + b'y & nx + b'b \end{pmatrix}$$

dir. Burada $Mr_2(I) \subseteq r_1(I)$ olduğundan $(my \quad mb) \in r_1(I)$ ve $r_1(1) \leq {}_A(A \oplus M)$ olduğundan $(a'a \quad a'x) \in r_1(I)$ olup $(a'a + my \quad a'x + mb) \in r_1(I)$ olur. Ayrıca $Nr_1(I) \subseteq r_2(I)$ olduğundan $(na \quad nx)$ ve $c_2(I) \leq {}_B(N \oplus B)$ olduğundan $(b'y \quad b'b) \in r_2(I)$ olup $(na+b'y \quad nx+b'b) \in r_2(I)$ olur. Dolayısıyla $rs \in I = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ olup böylece I da R nin bir sol idealidir.

(3) I altkümesi R nin bir ideali olsun. Bu durumda:

$$eIe = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in p_A(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I$$

$$\bar{e}I\bar{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix} \subseteq I$$

$$eI\bar{e} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I$$

ve

$$\bar{e}Ie = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix} \subseteq I$$

dir. Yani $I = eIe + \bar{e}I\bar{e} + eI\bar{e} + \bar{e}Ie$ olur. Şimdi $a', a'' \in A,\ \ b', b'' \in B,\ \ x' \in M$ ve $y' \in N$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in p_A(I) \right\}$$
$$\subseteq \begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\}$$
$$\subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix}$$

olduğundan $A_1 \trianglelefteq A$ ve $B_1 \trianglelefteq B$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} : x \in p_M(I) \right\}$$
$$\subseteq \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : y \in p_N(I) \right\}$$
$$\subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $M_1 \leq {}_AM_B$ ve $N_1 \leq {}_BN_A$ dır.

$$\begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} : x \in p_M(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : y \in p_N(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu için $M_1N \subseteq A_1$ ve $MN_1 \subseteq A_1$ olur. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : y \in p_N(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in p_M(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix}$$

olup $N_1M \subseteq B_1$ ve $NM_1 \subseteq B_1$ olarak elde edilir. Son olarak

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_B(I) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in p_B(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in p_A(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & p_M(I) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_A(I) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in p_A(I) \right\} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_N(I) & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $B_1N \subseteq N_1$, $MB_1 \subseteq M_1$, $A_1M \subseteq M_1$ ve $NA_1 \subseteq N_1$ dır. Karşıt olarak

$I = \begin{pmatrix} p_A(I) & p_M(I) \\ p_N(I) & p_B(I) \end{pmatrix}$ olsun. $r = \begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} \in R$ ve $s = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I$ olmak üzere

$$sr = \begin{pmatrix} aa' + xn & am + xb' \\ ya' + bn & ym + bb' \end{pmatrix} \in I$$

dir. $A_1 \trianglelefteq A$ ve $M_1N \subseteq A_1$ olduğundan $aa' + xn \in A_1$ ve $M_1 \leq {}_AM_B$ $A_1M \subseteq M_1$ ve olduğundan $am + xb' \in M_1$ dir. Ayrıca $N_1 \leq {}_BN_A$ ve $B_1N \subseteq N_1$ olduğundan $ya' + bn \in N_1$ ve $B_1 \trianglelefteq B$ ve $N_1M \subseteq B_1$ olduğundan $ym + bb' \in B_1$ dır. Benzer şekilde

$$rs = \begin{pmatrix} a'a + my & a'x + mb \\ ma + b'y & mx + b'b \end{pmatrix} \in I$$

olup böylece I altkümesi R nin bir idealidir.

Önerme 3.1.2 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. Bu durumda:

(1) R_R nin Artinian (Noetherian) olması için gerek ve yeter şart A_A, N_A, M_B ve B_B nin Artinian (Noetherian) olmasıdır.

(2) ${}_RR$ nin Artinian (Noetherian) olması için gerek ve yeter şart ${}_AA$, ${}_BN$, ${}_AM$ ve ${}_BB$ nin Artinian (Noetherian) olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) ($\Rightarrow$) R_R Artinian olsun. Bu durumda

(i) A_A nın Artinian olduğunu göstermek için $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ A nın bir sağ

idealler zinciri alınsın. A_1 kümesi A nın bir sağ ideali olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_1 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a_1 \in A_1,\ x \in M \right\}$$

kümesi R nin bir sağ ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} A_1 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} A_2 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} A_3 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sağ idealler zinciri olur ve R Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir n tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} A_n & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+1} & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+2} & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = ...$ elde edilir. Bu ise A_A nın Artinian olduğunu söyler.

(ii) N_A nın Artinian olduğunu göstermek için $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq ...$ N_A nin bir sağ A-altmodüller zinciri alınsın. N_1 kümesi N nin bir sağ altmodülü olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_1 & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 & b \end{pmatrix} : y_1 \in N_1,\ b \in B \right\}$$

kümesi R nin bir sağ ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_1 & B \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_2 & B \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_3 & B \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sağ idealler zinciridir ve R Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir k tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_k & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_{k+1} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_{k+2} & B \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = ...$ elde edilir. Bu ise N_A nın Artinian olduğunu söyler.

(iii) M_B nin Artinian olduğunu göstermek için $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq ...$ M_B nin bir sağ B-altmodüller dizisi olsun. M_1 kümesi M nin bir altmodülü olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in A,\ x \in M_1 \right\}$$

kümesi R nin bir sağ ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} A & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} A & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} A & M_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sağ idealler zinciridir ve R Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir t tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} A & M_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & M_{t+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & M_{t+2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $M_t = M_{t+1} = M_{t+2} = ...$ elde edilir. Bu ise M_B nin Artinian olduğunu söyler.

(iv) B_B nin Artinian olduğunun gösterilmesi gerekirse $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ...$ B nin bir sağ idealler zinciri olsun. B_1 kümesi B nin bir sağ ideali olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b_1 \end{pmatrix} : b_1 \in B_1,\ y \in N \right\}$$

kümesi R nin bir sağ ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_1 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_2 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_3 \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sağ idealler zinciridir ve R Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir p tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & B_{p+2} \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $B_p = B_{p+1} = B_{p+2} = ...$ elde edilir. Bu ise B_B nin Artinian olduğunu söyler.

($\Leftarrow$) A_A, N_A, M_B ve B_B Artinian olsun. R nin $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ bir sağ idealler zinciri alınsın. Buradan $c_1(I_1) \supseteq c_1(I_2) \supseteq c_1(I_3) \supseteq ...$ dir. R nin I ideali için

$$c_1(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x' \\ y & b' \end{pmatrix} \in I \right\} \leq (A \oplus N)_A$$

olduğu biliniyor. Hipotezden A_A ve N_A Artinian olduğundan $(A \oplus N)_A$ da Artinian olup böylece $c_1(I_1) \supseteq c_1(I_2) \supseteq c_1(I_3) \supseteq ...$ zinciri sonlu bir adımda durur, yani

pozitif bir n tamsayısı için $c_1(I_n) = c_1(I_{n+1}) = c_1(I_{n+2}) = ...$ dir. Benzer şekilde

$$c_2(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a' & x \\ y' & b \end{pmatrix} \in I \right\} \leq (M \oplus B)_B$$

olduğundan ve M_B, B_B Artinian olmak üzere $(M \oplus B)_B$ Artinian olduğundan $c_2(I_1) \supseteq c_2(I_2) \supseteq c_2(I_3) \supseteq ...$ zinciri sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir k tamsayısı için $c_2(I_k) = c_2(I_{k+1}) = c_2(I_{k+2}) = ...$ dir. Şimdi maks$\{n, k\} = t$ olsun. $I_t = I_{t+1} = ...$ olduğu gösterilirse ispat biter. Hipotezden $I_t \supseteq I_{t+1}$ vardır. $I_t \subseteq I_{t+1}$ olduğu gösterilsin. $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I_t$ olsun. $\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \in c_1(I_t) = c_1(I_{t+1}) = c_1(I_{t+2}) = ...$ olduğundan $\begin{pmatrix} a & x_1 \\ y & b_1 \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olacak şekilde $x_1 \in M$ ve $b_1 \in B$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ söylenilebilir. Ayrıca $\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} \in c_2(I_t) = c_2(I_{t+1}) = c_2(I_{t+2}) = ...$ olduğundan $\begin{pmatrix} a_1 & x \\ y_1 & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olacak şekilde $a_1 \in A$ ve $y_1 \in N$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ yazılabilir. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$$

olup $I_t \subseteq I_{t+1}$ dir. Dolayısıyla $I_t = I_{t+1}$ elde edilir. Böylece R_R Artiniandır. Benzer şekilde R_R nin Noetherian olduğu da gösterilebilir.

(2) ($\Rightarrow$) ${}_RR$ Noetherian olsun. Bu durumda; (i) ${}_AA$ nın Noetherian olduğunu göstermek için $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ A nin bir sol idealler zinciri alınsın. A_1, A nın bir sol ideali olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : a_1 \in A_1,\ y \in N \right\}$$

kümesi R nin bir sol ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} \subseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sol idealler zinciridir ve R Noetherian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir n tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} A_n & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+1} & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+2} & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $A_n = A_{n+1} = A_{n+2} = ...$ elde edilir. Bu ise A_A nın Noetherian olduğunu söyler.

(ii) ${}_BN$ nin Noetherian olduğunu göstermek için $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq ...$ ${}_BN$ nin altmodüller zinciri alınsın. N_1 kümesi N nin bir altmodülü olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ N_1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} : y \in N_1,\ a \in A \right\}$$

kümesi R nin bir sağ ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ N_1 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ N_2 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & 0 \\ N_3 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sol idealler zinciridir ve R Noetherian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir k tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ N_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ N_{k+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ N_{k+2} & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = ...$ elde edilir. Bu ise ${}_BN$ nin Noetherian olduğunu söyler.

(iii) ${}_AM$ nin Noetherian olduğunun gösterilmesi için $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ ${}_AM$ nin bir altmodüller zinciri alınsın. M_1 kümesi M nin bir altmodülü olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in B,\ x \in M_1 \right\}$$

kümesi R nin bir sol ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & B \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & B \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M_3 \\ 0 & B \end{pmatrix} \subseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sol idealler zinciridir. R Noetherian olduğundan bu dizi sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir t tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M_{t+1} \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M_{t+2} \\ 0 & B \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $M_t = M_{t+1} = M_{t+2} = ...$ elde edilir. Bu ise ${}_AM$ nın Noetherian olduğunu söyler.

(iv) ${}_BB$ nin Noetherian olduğunu göstermek için $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq ...,$ B nin bir sol idealler zinciri alınsın. B_1, B nin bir sol ideali olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} : b_1 \in B_1,\ x \in M \right\}$$

kümesi R nin bir sol ideali olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \subseteq \cdots$$

zinciri R nin bir sol idealler zinciridir. R Noetherian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir p tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & B_{p+2} \end{pmatrix} = \cdots$$

olup buradan $B_p = B_{p+1} = B_{p+2} = ...$ elde edilir. Bu ise ${}_BB$ nin Noetherian olduğunu söyler.

($\Leftarrow$) ${}_AA$, ${}_BN$, ${}_AM$ ve ${}_BB$ Noetherian olsun. R nin $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ...$ bir sol idealler zinciri alınsın. Buradan $r_1(I_1) \subseteq r_1(I_2) \subseteq r_1(I_3) \subseteq ...$ dir. R nin sol I ideali için

$$r_1(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & x \\ y' & b' \end{pmatrix} \in I \right\} \leq {}_A(A \oplus M)$$

olduğu biliniyor. Hipotezden ${}_AA$ ve ${}_AM$ Noetherian olduğundan ${}_A(A \oplus M)$ Noetheriandır. Böylece $r_1(I_1) \subseteq r_1(I_2) \subseteq c_1(I_3) \subseteq ...$ zinciri sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir n tamsayısı için $r_1(I_n) = r_1(I_{n+1}) = r_1(I_{n+2}) = ...$ dir. Benzer şekilde

$$r_2(I) = \left\{ \begin{pmatrix} y & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a' & x' \\ y & b \end{pmatrix} \in I \right\} \leq {}_B(N \oplus B)$$

olduğundan ve ${}_BN$, ${}_BB$ Noetherian olmak üzere ${}_B(N \oplus B)$ Noetherian olduğundan $r_2(I_1) \subseteq r_2(I_2) \subseteq r_2(I_3) \subseteq ...$ zinciri sonlu bir adımda durur, yani pozitf bir k tamsayısı için $r_2(I_k) = r_2(I_{k+1}) = r_2(I_{k+2}) = ...$ dir. Şimdi maks$\{n, k\} = t$ olsun.

$I_t = I_{t+1} = ...$ olduğu gösterilirse ispat biter. Hipotezden $I_t \subseteq I_{t+1}$ açıktır. $I_t \supseteq I_{t+1}$ gösterilirse ispat biter. $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I_t$ olsun.

$$(a \quad x) \in r_1(I_t) = r_1(I_{t+1}) = r_1(I_{t+2}) = \cdots$$

olduğundan $\begin{pmatrix} a & x \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olacak şekilde $y_1 \in N$ ve $b_1 \in B$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ dir. Ayrıca

$$(y \quad b) \in r_2(I_t) = r_2(I_{t+1}) = r_2(I_{t+2}) = \cdots$$

olduğundan $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olacak şekilde $a_1 \in A$ ve $x_1 \in M$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ yazılabilir. $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in I_{t+1}$$

olup $I_t \subseteq I_{t+1}$ dir. Dolayısıyla $I_t = I_{t+1}$ elde edilir. Böylece ${}_RR$ Noetheriandır. Benzer şekilde ${}_RR$ nin Artinian olduğu da gösterilebilir.

Lemma 3.1.3 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. Ayrıca M_B ve N_A sonlu üretilmiş modül ve I da R nin bir sağ ideali olsun. Bu durumda, I_R nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter şart $c_1(I)$ ve $c_2(I)$ sırasıyla $(A \oplus N)_A$ ve $(M \oplus B)_B$ nin sonlu üretilmiş altmodülü olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: R nin bir sağ ideali I olmak üzere $I = (c_1(I) \quad c_2(I))$ olacak şekilde $c_1(I) \leq (A \oplus N)_A$ ve $c_2(I) \leq (M \oplus B)_B$ olduğu biliniyor.

($\Rightarrow$) I_R sonlu üretilmiş ve N_A sonlu üretilmiş bir modül olsun.

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} R + \cdots + \begin{pmatrix} a_n & x_n \\ y_n & b_n \end{pmatrix} R \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_n & x_n \\ y_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1A + x_1N & a_1M + x_1B \\ y_1A + b_1N & y_1M + b_1B \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_nA + x_nN & a_nM + x_nB \\ y_nA + b_nN & y_nM + b_nB \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} c_1(I) &= \begin{pmatrix} a_1A + x_1N \\ y_1A + b_1N \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_nA + x_nN \\ y_nA + b_nN \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ y_1 \end{pmatrix} A + \cdots + \begin{pmatrix} a_n \\ y_n \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} x_1 \\ b_1 \end{pmatrix} N + \cdots + \begin{pmatrix} x_n \\ b_n \end{pmatrix} N \end{aligned}$$

dir. N_A sonlu üretilmiş bir modül olduğundan böylece $c_1(I)$ da $(A \oplus N)_A$ nın sonlu üretilmiş bir altmodülüdür. Benzer şekilde, M_B sonlu üretilmiş bir modül olsun. O halde

$$\begin{aligned} c_2(I) &= \begin{pmatrix} a_1M + x_1B \\ y_1M + b_1B \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_nM + x_nB \\ y_nM + b_nB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ b_1 \end{pmatrix} B + \cdots + \begin{pmatrix} x_n \\ b_n \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} a_1 \\ y_1 \end{pmatrix} M + \cdots + \begin{pmatrix} a_n \\ y_n \end{pmatrix} M \end{aligned}$$

sonlu üretilmiş B-altmodüldür.

($\Leftarrow$) $c_1(1)$ ve $c_2(I)$ sonlu üretilmiş, yani

$$c_1(I) = \begin{pmatrix} a_1 \\ y_1 \end{pmatrix} A + \cdots + \begin{pmatrix} a_m \\ y_m \end{pmatrix} A \quad \text{ve} \quad c_2(I) = \begin{pmatrix} x_1 \\ b_1 \end{pmatrix} B + \cdots + \begin{pmatrix} x_n \\ b_n \end{pmatrix} B$$

olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} c_1(I) & c_2(I) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_i & x_j \\ y_i & b_j \end{pmatrix} : 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \right\}$$

I_R nin üreteç kümesi sonlu olup böylece I_R sonlu üretilmiş bir R-altmodülüdür.

Teorem 3.1.4 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası ve M_B, N_A birer sonlu üretilmiş modül olsun. Bu durumda, R nin bir sol mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer sol mükemmel halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: ($\Rightarrow$) R bir sol mükemmel halka ve $e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Önerme 2.12.3 gereğince eRe ve $(1-e)R(1-e)$ sol mükemmeldir. $eRe \cong A$ ve $(1-e)R(1-e) \cong B$ olduğundan böylece A ve B birer sol mükemmel halkadır.
($\Leftarrow$) A ve B birer sol mükemmel halka olsun. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$, R nin azalan bir sağ idealler zinciri olsun. Buradan A_A ve N_A sonlu üretilmiş modüller olduğundan $c_1(I_1) \supseteq c_1(I_2) \supseteq \cdots$ $(A \oplus N)_A$ nın azalan sonlu üretilmiş altmodüllerinin bir zinciri olur. Benzer şekilde $c_2(I_1) \supseteq c_2(I_2) \supseteq \cdots$ $(M \oplus B)_B$ nin azalan sonlu üretilmiş altmodüllerinin bir zinciri olur. Teorem 2.12.4 gereğince A sol mükemmel olduğundan $(A \oplus N)_A$ nın sonlu üretilmiş altmodüller zinciri sonlu bir adımda durur. Yani pozitif bir n tamsayısı için $c_1(I_n) = c_1(I_{n+1}) = \cdots$ olur. Benzer şekilde B sol mükemmel olduğundan $(M \oplus B)_B$ nin sonlu üretilmiş altmodüller zinciri sonlu bir adımda durur. Yani pozitif bir m tamsayısı için $c_2(I_m) = c_2(I_{m+1}) = \cdots$ olur. Genelliği bozmaksızın $n > m$ olsun. Böylece her $k \geq 1$ tamsayısı için $I_{n+k} = (c_1(I_{n+k}),\ c_2(I_{n+k})) = (c_1(I_n),\ c_2(I_n)) = I_n$ dir. Ayrıca Lemma 3.1.3 gereğince $c_1(I)$ ve $c_2(I)$ sonlu üretilmiş olduğundan I da sonlu üretilmiş olup böylece R nin $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ sonlu üretilmiş sağ ideallerinin zinciri sonlu bir adımda durur. Dolayısıyla Teorem 2.12.4 gereğince R bir sol mükemmel halkadır.

Teorem 3.1.5 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. O zaman R nin Jacobson radikali

$$J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $M_0 = \{x \in M : xN \subseteq J(A)\}$ ve $N_0 = \{y \in N : yM \subseteq J(B)\}$ dir (Tang vd. 2014).

İspat: $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in J(R)$ olsun. Buradan her $a' \in A$ için

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U(R)$, yani $\begin{pmatrix} 1-aa' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(R)$ dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} 1-aa' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & m \\ n & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & m \\ n & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-aa' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a_1 & m \\ n & b_1 \end{pmatrix} \in R$ vardır. Böylece $(1-aa')a_1 = a_1(1-aa') = 1$ olup $(1-aa') \in U(R)$ dir. Bu ise $a \in J(A)$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca her $b' \in B$ için

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in U(R)$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-bb' \end{pmatrix} \in U(R)$ olup

$$\begin{pmatrix} a_2 & m' \\ n' & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-bb' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & m' \\ n' & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a_2 & m' \\ n' & b_2 \end{pmatrix} \in R$ vardır. Dolayısıyla $b_2(1-bb') = (1-bb')b_2 = 1$ olduğundan $(1-bb') \in U(B)$ olup $b \in J(B)$ elde edilir. Şimdi $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(R)$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere $J(R)$ ideal olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J(R)$$

olur. Buradan her $a_2' \in A$ için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U(R)$, yani, $\begin{pmatrix} 1-xya_2' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $(1-xya_2') \in U(A)$ olup $xy \in J(A)$ dır. Böylece $x \in M_0$ olur. Ayrıca $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in J(R)$ ve $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yx \end{pmatrix} \in J(R)$ olup benzer şekilde $yx \in J(B)$ dir. Buradan da $y \in N_0$ elde edilir.

Böylece $J(R) \subseteq \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix}$ dir.

$\begin{pmatrix} a & x_0 \\ y_0 & b \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix}$ olsun. Her $\begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & x_0 \\ y_0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-aa'-x_0n & -am-x_0b' \\ -y_0a'-bn & 1-y_0m-bb' \end{pmatrix}$$

olup $aa' + x_0n \in J(A)$ olduğundan $1 - aa' - x_0n \in U(A)$ ve benzer şekilde $y_0m + bb' \in J(B)$ olduğundan $1 - y_0m - bb' \in U(B)$ olur. Dolayısıyla $u(1 - aa' - x_0n) = (1 - aa' - x_0n)u = 1$ ve $v(1 - y_0m - bb') = (1 - y_0m - bb')v = 1$ olacak şekilde $u \in A$ ve $v \in B$ vardır.

Bu durumda $\begin{pmatrix} u & u(am + x_0b')v \\ v(y_0a' + bn)u & v \end{pmatrix} \in R$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} 1-aa'-x_0n & -am-x_0b' \\ -y_0a'-bn & 1-y_0m-bb' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u(am+x_0b')v \\ v(y_0a'+bn)u & v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(am+x_0b')v(y_0a'+bn)u & 0 \\ 0 & 1-(y_0a'+bn)u(am+x_0b')v \end{pmatrix}$$

olur. $(am + x_0b')v(y_0a' + bn)u \in J(A)$ olduğundan sol üst bileşen tersinirdir. Ayrıca $(y_0a' + bn)u(am + x_0b')v \in J(B)$ olduğundan sağ alt bileşen de tersinirdir. Yani

$$t[1 - (am + x_0b')v(y_0a' + bn)u] = [1 - (am + x_0b')v(y_0a' + bn)u]t = 1$$

ve

$$s[1 - (y_0a' + bn)u(am + x_0b')v] = [1 - (y_0a' + bn)u(am + x_0b')v]s = 1$$

olacak şekilde $t \in A$ ve $s \in B$ vardır. Bu durumda $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in R$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} 1-(am+x_0b')v(y_0a'+bn)u & 0 \\ 0 & 1-(y_0a'+bn)u(am+x_0b')v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & x_0 \\ y_0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & m \\ n & b' \end{pmatrix} \in U(R)$ olup $\begin{pmatrix} a & x_0 \\ y_0 & b \end{pmatrix} \in J(R)$ olur. Böylece $\begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix} \subseteq J(R)$ dir.

Doğal olarak M/M_0 ve N/N_0 sırasıyla sol $A/J(A)$- sağ $B/J(B)$-ikili modül ve sol $B/J(B)$- sağ $A/J(A)$-ikili modüldür. Bu durumda:

$$\begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix}$$

bir Morita halkası olur öyle ki her $x \in M$ ve $y \in N$ için;

$$(x + M_0)(y + N_0) = xy + J(A), \quad (y + N_0)(x + M_0) = yx + J(B)$$

dir.

Teorem 3.1.6 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. O halde

$$R/J(R) \cong \begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix}$$

dir (Tang vd. 2014).

İspat: Bir $f : R/J(R) \longrightarrow \begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix}$ dönüşümü her $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ için

$$f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) \right) = \begin{pmatrix} a + J(A) & x + M_0 \\ y + N_0 & b + J(B) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)$, $\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R) \in R/J(R)$ için $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R) = \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)$ olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} a_1 + J(A) & x_1 + M_0 \\ y_1 + N_0 & b_1 + J(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + J(A) & x_2 + M_0 \\ y_2 + N_0 & b_2 + J(B) \end{pmatrix}$$

dir. Yani $f\left(\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right)$ dir. Böylece f iyi tanımlıdır.

Ayrıca her $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in R$ için

$$
\begin{aligned}
&f\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)\right) + \left(\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right)\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + J(A) & x_1 + x_2 + M_0 \\ y_1 + y_2 + N_0 & b_1 + b_2 + J(B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + J(A) & x_1 + M_0 \\ y_1 + N_0 & b_1 + J(B) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + J(A) & x_2 + M_0 \\ y_2 + N_0 & b_2 + J(B) \end{pmatrix} \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&f\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)\right)\left(\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right)\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 + x_1y_2 & a_1x_2 + x_1b_2 \\ y_1a_2 + b_1y_2 & y_1x_2 + b_1b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1a_2 + x_1y_2 + J(A) & a_1x_2 + x_1b_2 + M_0 \\ y_1a_2 + b_1y_2 + N_0 & y_1x_2 + b_1b_2 + J(B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + J(A) & x_1 + M_0 \\ y_1 + N_0 & b_1 + J(B) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 + J(A) & x_2 + M_0 \\ y_2 + N_0 & b_2 + J(B) \end{pmatrix} \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} + J(R)\right) f\left(\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} + J(R)\right)
\end{aligned}
$$

olup f bir halka homomorfizmasıdır. Son olarak

$$\begin{aligned} Kerf &= \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) : f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) : \begin{pmatrix} a + J(A) & x + M_0 \\ y + N_0 & b + J(B) \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) : a \in J(A),\ x \in M_0,\ y \in N_0,\ b \in J(B) \right\} = \{0 + J(R)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Imf &= \left\{ f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) \right) : \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + J(R) \in R/J(R) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a + J(A) & x + M_0 \\ y + N_0 & b + J(B) \end{pmatrix} : a \in A,\ x \in M,\ y \in N,\ b \in B \right\} \\ &= \begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan f bir izomorfizma olup

$$R/J(R) \cong \begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 3.1.7 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. Bu durumda:

(1) R nin bir değişim halkası olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer değişim halkası olmasıdır.

(2) R nin bir yarı güçlü halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer yarı güçlü halka olmasıdır.

(3) R nin bir yarı yerel halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer yarı yerel halka ve $(M/M_0)_B$, $(N/N_0)_A$ nin birer Artinian modül olmasıdır.

(4) R nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer yarı mükemmel halka ve $(M/M_0)_B, (N/N_0)_A$ nin birer Artinian modül olmasıdır.

(5) R nin bir yarı asalımsı halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer yarı asalımsı halka ve $(M/M_0)_B$, $(N/N_0)_A$ nin birer Artinian modül olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) ($\Rightarrow$) R bir değişim halkası ve $e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ olsun. $x \in R$ olmak üzere $exe \in eRe$ alınsın. R değişim halkası olduğundan $f \in Rexe$ ve $(1-f) \in R(1-exe)$ olacak şekilde eşkare f mevcuttur. Öncelikle efe nin eRe de bir eşkare eleman olduğu gösterilsin. $fe = rexee = rexe = f$ olduğundan $(efe)^2 = efeefe = efefe = ef^2e = efe$ olup efe, eRe nin bir eşkare elemanıdır. Diğer taraftan $efe = e(rexe)e = erexe \in eRexe$ olup $efe \in eRexe$ dir. Ayrıca $e(1-f)e = er(1-exe)e = er(e-exe) = ere(1-exe) \in eRe(1-exe)$ olup $e(1-f)e \in eRe(1-exe)$ dir. Dolayısıyla eRe değişim halkasıdır. Benzer şekilde $(1-e)^2 = 1-e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ alınırsa $(1-e)R(1-e)$ nin değişim halkası olduğu görülür. $eRe \cong A$ ve $(1-e)R(1-e) \cong B$ olduğundan böylece A ve B değişim halkasıdır.

($\Leftarrow$) eRe bir değişim halkası olsun. Bu durumda $exe \in eRe$ için $f \in eRexe$ ve $(1-f) \in eRe(1-exe)$ olacak biçimde $f^2 = f \in eRe$ vardır. Şimdi R nin değişim halkası olduğu gösterilsin. $(ef)^2 = efef = ef^2 = ef$ ve $f = er'exe \in eRexe$ olduğundan $ef - er'exe = 0$ dır. Buradan $e(f - r'exe) = 0$ olup $e \neq 0$ olduğundan $f = r'exe$ olur. $exe = y$ denirse $f = r'y$ olup $f \in Ry$ olur. Ayrıca $e - ef = e[er''e(1-exe)] = er''(e-exe)$ dir. Yani $e(1-f) = er''(e-exe)$ olup $e[1-f-r''(e-exe)] = 0$ olduğundan $1 - f - r''(e-exe) = 0$ ve $1 - f = r''e(1-exe)$ olur. Böylece $1 - f \in R(1-y)$ elde edilir. Dolayısıyla R değişim halkasıdır.

(2) ($\Rightarrow$) R bir yarı güçlü halka olsun. Önerme 2.10.4 gereğince $a = b = e$ alınırsa $eRe \cong A$ olup eRe yarı güçlü bir halka olduğundan A da yarı güçlü bir halkadır. Benzer şekilde $a = b = 1 - e$ alınırsa $(1-e)R(1-e) \cong B$ olup $(1-e)R(1-e)$ yarı güçlü bir halka olduğundan B de yarı güçlü bir halkadır.

($\Leftarrow$) A ve B birer yarı güçlü halka olsun.

Durum 1. $a \notin J(A)$ olsun. Bu durumda $e \in aA$ olacak şekilde bir $e \in A$ eşkare elemanı vardır. Buradan $e = aa'$ olacak biçimde $a' \in A$ bulunur. O halde $r = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} e & 0 \\ ya'e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rR nin sıfırdan farklı bir eşkare elemanıdır.

Durum 2. $b \notin J(B)$ ise o zaman $f \in bB$ olacak şekilde $0 \neq f^2 = f \in R$ vardır. Yani $f = bb'$ olacak şekilde $b' \in B$ bulunur. Böylece $r = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 0 & xb'f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b'f \end{pmatrix}$ rR ye ait sıfırdan farklı bir eşkare elemandır.

Durum 3. $x \notin M_0$ veya $y \notin N_0$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x \notin M_0$ alınsın. O halde $xy' \notin J(A)$ olacak şekilde $y' \in N$ vardır ve $r' := \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy' & 0 \\ by' & 0 \end{pmatrix} \in rR$ olur. $xy' \notin J(A)$ olduğundan benzer şekilde $r'R$ nin sıfırdan farklı bir eşkare elemanı olacağı gösterilebilir. Dolayısıyla rR sıfırdan farklı bir eşkare eleman içerir. Dolayısıyla R bir yarı güçlü halkadır.

(3) R yarı yereldir. $\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ yarı basit Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} A/J(A) & M/M_0 \\ N/N_0 & B/J(B) \end{pmatrix}$ Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $(A/J(A))_{A/J(A)}$, $(B/J(B))_{B/J(B)}$, $(N/N_0)_{A/J(A)}$, $(M/M_0)_{B/J(B)}$ yarı basit Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ A, B yarı yerel ve $(N/N_0)_A, (M/M_0)_B$ Artiniandır.

(4) Teorem 2.12.7 gereğince R nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart R nin yarı yerel ve değişim halkası olmasıdır. (1) ve (3) gereğince bu önerme sağlanır.

(5) R bir yarı asalımsı halka olsun. O zaman R yarı yerel ve $J(R)$ üstel sıfırdır. (3) gereğince R nin yarı yerel olması için gerek ve yeter şart A ve B nin yarı yerel olmasıdır. Şimdi $J(R)$ bir üstel sıfır ideal olsun. $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$(J(R))^n = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı vardır. Her $a \in J(A)$ ve $b \in J(B)$ için $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = 0$ olduğundan $J(A)$ ve $J(B)$ sırasıyla A ve B nin üstel sıfır idealidir. Karşıt olarak $J(A)$ ve $J(B)$ üstel sıfır olsun. O zaman $\begin{pmatrix} J(A) & 0 \\ N_0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & M_0 \\ 0 & J(B) \end{pmatrix}$ kümeleri $J(R)$ nin üstel sıfır sol idealleridir. Buradan $J(R)$ üstel sıfır olur. Dolayısıyla $J(R)$ nin bir üstel sıfır ideal olması için gerek ve yeter şart $J(A)$ ve $J(B)$ nin birer üstel sıfır ideal olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.8 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. R nin durgunluk aralığının 1 oması için gerek ve yeter şart A ve B nin durgunluk aralığının 1 olmasıdır (Chen 2002).

Teorem 3.1.9 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. Bu durumda:

(1) R nin bir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer düzenli halka ve her $x \in M$, $y \in N$ için $x \in xNx$ ve $y \in yMy$ olmasıdır.

(2) R nin bir tersinir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer tersinir düzenli halka ve her $x \in M$ ve $y \in N$ için $x \in xNx$ ve $y \in yMy$ olmasıdır.

(3) R nin bir yarı düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer yarı düzenli ve her $x \in M$ ve $y \in N$ için $x - xy'x \in M_0$ ve $y - yx'y \in N_0$ olacak şekilde $x' \in M$ ve $y' \in N$ var olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) ($\Rightarrow$) R bir düzenli halka olsun. Her $a \in A$, $b \in B$ ve $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

olduğundan $a = aa_1a$ ve $b = bb_1b$ olup A ve B düzenlidir. Ayrıca her $x \in M$ ve $y \in N$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & x'' \\ y'' & b'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a'' & x'' \\ y'' & b'' \end{pmatrix} \in R$ var olduğundan $x = xy'x \in xNx$ ve $y = yx''y \in yMy$ olur.

($\Leftarrow$) $A = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ olsun. $x \in xNx$ olduğundan $x = xy'x$ olacak şekilde $y' \in N$ vardır. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = A - AXA$ olarak alınsın. Buradan $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ z & d \end{pmatrix}$ biçiminde bir matris elde edilir öyle ki $c = cc'c$ ve $d = dd'd$ olacak şekilde $c' \in A$ ve $d' \in B$ dir. $Y = \begin{pmatrix} c' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ ve $C = B - BYB$ alınırsa $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $k \in N$ vardır. Son olarak $k = kk'k \in kMk$ olacak biçimde $k' \in M$ mevcut olacağından, $Z = \begin{pmatrix} 0 & k' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $C = CZC$ olur. Lemma 2.8.2 gereğince C düzenli olduğundan B düzenli olur ve böylece A düzenlidir. Dolayısıyla R bir düzenli halkadır.

(2) Önerme 2.13.4 gereğince R nin bir tersinir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin düzenli ve durgunluk aralığının 1 olmasıdır. Önerme 3.1.8 gereğince R nin durgunluk aralığının 1 olması için gerek ve yeter şart A ve B nin durgunluk

aralığının 1 olmasıdır. Böylece (1) gereğince ispat tamamlanır.

(3) Önerme 2.8.6 gereğince R nin bir yarı düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir değişim halkası ve $R/J(R)$ nin bir düzenli halka olmasıdır. Dolayısıyla Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7(1) ve (1) gereğince bu önerme sağlanır.

3.2 Morita Yapıları: Özel Durumlar

Bir $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ Morita halkası ve $\theta : M \otimes_B N \longrightarrow A$ ve $\psi : N \otimes_A M \longrightarrow B$ olmak üzere eğer $\theta = 0$ ve $\psi = 0$, yani $MN = 0$ ve $NM = 0$ ise R ye *aşikar Morita halkası* adı verilir.

Bu bölümde $\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ Morita halkasının sol mükemmel, kuvvetli π-düzenli, güçlü, temiz, Dedekind sonlu ve 2-iyi halka olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır.

Lemma 3.2.1 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası öyle ki $MN \subseteq J(A)$ ve $NM \subseteq J(B)$ olsun. Bu durumda:

(1) $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$ ve $R/J(R) \cong A/J(A) \times B/J(B)$ dir.

(2) $U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R : a \in U(A)\ ,\ b \in U(B) \right\}$ dir (Tang vd. 2014).

İspat: (1) R Morita halkasının Jacobson radikali $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M_0 \\ N_0 & J(B) \end{pmatrix}$ öyle ki $M_0 = \{x \in M : xN \subseteq J(A)\}$ ve $N_0 = \{y \in N : yM \subseteq J(B)\}$ olduğu biliniyor. Hipotezden her $x \in M$ için $xN \subseteq J(A)$ olduğundan $M = M_0$ elde edilir. Benzer şekilde her $y \in N$ için $yM \subseteq J(B)$ olduğundan $N = N_0$ olur. Dolayısıyla $MN \subseteq$

$J(A)$ ve $NM \subseteq J(B)$ olduğu için $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$ dir. Bu durumda

$$R/J(R) \cong \begin{pmatrix} A/J(A) & M/M \\ N/N & B/J(B) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} A/J(A) & 0 \\ 0 & B/J(B) \end{pmatrix} \cong A/J(A) \times B/J(B)$$

dir.

(2) $r = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in U(R)$ olsun. O zaman $rr' = r'r = 1$ olacak şekilde $r' \in R$ vardır. $r' = \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$rr' = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + xy' & ax' + xb' \\ ya' + by' & yx' + bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan $aa' + xy' = 1$ olduğundan $aa' = 1 - xy'$ dir. $xy' \in J(A)$ olduğundan $1 - xy' \in U(A)$ dir. Böylece $aa' \in U(A)$ dir. Benzer şekilde $r'r = 1$ den de $a'a \in U(A)$ elde edilir. Diğer taraftan $aa',\ a'a \in U(A)$ olduğundan $(aa')h = h(aa') = 1_A$ ve $(a'a)k = k(a'a) = 1_A$ olacak şekilde $h,\ k \in A$ vardır. Buradan $a(a'h) = (ka')a = 1_A$ olup

$$a'h = 1(a'h) = [k(a'a)]a'h = (ka')[(aa')h] = ka'$$

elde edilir. O halde $a \in U(A)$ dır. Ayrıca $yx' + bb' = 1$ olduğundan $bb' = 1 - yx'$ dir. $yx' \in J(B)$ olduğundan $1 - yx' \in U(B)$ dir. Böylece $bb' \in U(B)$ dir. Benzer şekilde $r'r = 1$ den de $b'b \in U(B)$ elde edilir. Ayrıca $bb',\ b'b \in U(B)$ olduğundan $(bb')u = u(bb') = 1_B$ ve $(b'b)v = v(b'b) = 1_B$ olacak şekilde $u,\ v \in B$ vardır. Buradan $b(b'u) = (vb')b = 1_B$ olup

$$b'u = 1(b'u) = [v(b'b)]b'u = (vb')[(bb')u] = vb'$$

bulunur. O halde $b \in U(B)$ dir. Böylece $U(R) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} : a \in U(A),\ b \in U(B) \right\}$ dir.

Şimdi $A = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$, $a \in U(A)$ ve $b \in U(B)$ olsun. Bu durumda $aa' = a'a = 1$

ve $bb' = b'b = 1$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a' & -a'xb' \\ -b'ya' & b' \end{pmatrix} \in R$ alınırsa

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -a'xb' \\ -b'ya' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - xb'ya' & -aa'xb' + xb' \\ ya' - bb'ya' & -ya'xb' + bb' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - xb'ya' & 0 \\ 0 & 1 - ya'xb' \end{pmatrix}$$

dir. $xb'ya' \in J(A)$ olduğundan $1 - xb'ya' \in U(A)$ dir. Yani $(1 - xb'ya')u = u(1 - xb'ya') = 1$ olacak şekilde $u \in A$ vardır. Ayrıca $ya'xb' \in J(B)$ olduğundan $1 - ya'xb' \in U(B)$ olup $(1 - ya'xb')v = v(1 - ya'xb') = 1$ olacak şekilde $v \in B$ vardır. O halde $A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 1 - xb'ya' & 0 \\ 0 & 1 - ya'xb' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - xb'ya' & 0 \\ 0 & 1 - ya'xb' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup böylece $S = \begin{pmatrix} a' & -a'xb' \\ -b'ya' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ alınırsa $AS = SA = 1$ olacak şekilde $S \in R$ bulunur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in U(R)$ dir. Böylece

$$U(R) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} : a \in U(A),\ b \in U(B) \right\} \text{ dir.}$$

Lemma 3.2.2 $R := \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası ve $MN \subseteq J(A)$ ve $NM \subseteq J(B)$ olsun. Bu durumda eğer A ve B halkalarının eşkare elemanları Jacobson radikaline göre yükseliyor ise o zaman R nin eşkare elemanları da $J(R)$ ye göre yükselir (Tang vd. 2014).

İspat: $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in J(R)$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} a^2 - a + xy & ax + xb - x \\ ya + by - y & b^2 - b + yx \end{pmatrix} \in J(R)$ dir. Böylece $a^2 - a \in J(A)$ ve $b^2 - b \in J(B)$ dir. Hipotezden $a - e \in J(A)$ ve $b - f \in J(B)$ olacak şekilde $e^2 = e \in A$ ve $f^2 = f \in B$ vardır. Böylece $\begin{pmatrix} a-e & x \\ y & b-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \in J(R)$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ eşkare elemanı bulunur.

Teorem 3.2.3 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası ve $MN \subseteq J(A)$ ve $NM \subseteq J(B)$ olsun. Bu durumda

(1) R nin bir güçlü halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer güçlü halka olmasıdır.

(2) R nin bir temiz halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer temiz halka olmasıdır.

(3) R nin bir Dedekind sonlu halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer Dedekind sonlu halka olmasıdır.

(4) R nin bir 2-iyi halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer 2-iyi halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: $e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ olmak üzere $eRe \cong A$ ve $(1-e)R(1-e) \cong B$ dir.
(1) ($\Rightarrow$) R bir güçlü halka olsun. Önerme 2.10.4 gereğince sırasıyla $a = b = e$ ve $a = b = 1 - e$ alınır ise eRe ve $(1-e)R(1-e)$ güçlü halkalar olup $eRe \cong A$ ve $(1-e)R(1-e) \cong B$ olduğundan A ve B birer güçlü halka olur.
($\Leftarrow$) A ve B birer güçlü halka olsun. A ve B yarı güçlü olduğundan Teorem 3.1.7(2)

den R de yarı güçlüdür. Ayrıca A ve B nin eşkare elemanları sırasıyla $J(A)$ ve $J(B)$ ye göre yükseldiğinden Lemma 3.2.2 gereğince R nin eşkare elemanları da $J(R)$ ye göre yükselir. Böylece R güçlü halkadır.

(2) ($\Rightarrow$) R bir temiz halka olsun. Sonuç 2.11.6 gereğince $R/J(R)$ bir temiz halka ve eşkare elemanlar $J(R)$ ye göre yükselir. Böylece $R/J(R) \cong A/J(A) \times B/J(B)$ temiz halka olup $A/J(A)$ ve $B/J(B)$ temiz halkadır. Diğer taraftan Önerme 2.11.2 gereğince her temiz halkanın değişim halkası olduğu biliniyor. Teorem 3.1.7(1) gereğince R nin değişim halkası olması için gerek ve yeter şart A ve B nin değişim halkası olmasıdır. Buradan A ve B değişim halkası olduğundan Sonuç 2.7.4 gereğince A ve B deki eşkare elemanlar sırasıyla $J(A)$ ve $J(B)$ ye göre yükselir. Böylece A ve B temiz halkalardır.

($\Leftarrow$) A ve B birer temiz halka olsun. Önerme 2.11.8 gereğince R de bir temiz halkadır.

(3) ($\Rightarrow$) R bir Dedekind sonlu halka olsun. Eğer $aa' = 1$ olacak şekilde $a, a' \in A$ varsa o zaman $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ dir. R Dedekind sonlu olduğundan $\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olup $a'a = 1$ olur. Böylece A bir Dedekind sonlu halkadır. Benzer şekilde B Dedekind sonludur.

($\Leftarrow$) A ve B birer Dedekind sonlu halka olsun. Eğer R de $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise o zaman $1 = aa' + xy' \in A$ ve $1 = bb' + yx' \in B$ dir. $xy' \in J(A)$ ve $yx' \in J(B)$ olduğundan $aa' = 1 - xy' \in U(A)$ ve $bb' = 1 - yx' \in U(B)$ dir. A ve B Dedekind sonlu olduğundan $a \in U(A)$ ve $b \in U(B)$ olur. Buradan $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in U(R)$ olup $\begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} = 1$ elde edilir. Böylece R Dedekind sonludur.

(4) ($\Rightarrow$) R bir 2-iyi halka ve $a \in A$ olsun. O zaman $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & x_1 \\ y_1 & v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 & x_2 \\ y_2 & v_2 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $i = 1, 2$ için $\begin{pmatrix} u_i & x_i \\ y_i & v_i \end{pmatrix} \in U(R)$ vardır. Buradan $u_1, u_2 \in$

$U(A)$ ve $a = u_1 + u_2$ olduğundan A 2-iyi halkadır. Benzer şekilde B 2-iyi halkadır.
($\Leftarrow$) A ve B birer 2-iyi halka ve $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in R$ olsun. O zaman $a = u_1 + u_2$ ve $b = v_1 + v_2$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in U(A)$ ve $v_1, v_2 \in U(B)$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 & x \\ y & v_2 \end{pmatrix}$ olarak yazılır. $\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 & x \\ y & v_2 \end{pmatrix} \in U(R)$ olduğundan R 2-iyidir.

Lemma 3.2.4 T bir halka ve $T = S + K$ olacak şekilde $S \leq T$ ve K da T nin üstel sıfır ideali mevcut olsun. Bu durumda S nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart T nin bir kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: K bir üstel sıfır ideal olduğundan $K^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
($\Rightarrow$) $t \in T$ ve $t = s + x$ olacak şekilde $s \in S$ ve $x \in K$ olsun. S kuvvetli π-düzenli olduğundan bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $s^k S = s^{k+1} S = \dots$ dir. Yani $s^k = s^{k+1} s_0$ olacak şekilde $s_0 \in S$ vardır. Böylece $t^k = (s+x)^k = s^k + x_0 = s^{nk+1} s_0 + x_0$ olacak şekilde $x_0 \in K$ vardır ve $t^{nk+1} = (s+x)^{nk+1} = s^{nk+1} + x_1$ olacak şekilde $x_1 \in K$ vardır. Buradan $t^k - t^{nk+1} s_0 = s^{nk+1} s_0 + x_0 - s^{nk+1} s_0 - x_1 s_0 = x_0 - x_1 s_0 \in K$ dir. $K^n = 0$ olduğundan $(t^k - t^{nk+1} s_0)^n = 0$ dır. $(t^k - t^{nk+1} s_0)^n = t^{nk} - t^{nk+1} t_1 = 0$ olacak şekilde $t_1 \in T$ vardır. Buradan $t^{nk} = t^{nk+1} t_1$ olup $t^{nk} \in t^{nk+1} T$ elde edilir. Böylece T kuvvetli π-düzenlidir.
($\Leftarrow$) $s \in S$ olsun. T kuvvetli π-düzenli olduğundan $s^k T = s^{k+1} T = \dots$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Yani $s^k = s^{nk+1} t$ olacak şekilde $t \in T$ vardır. $t = a + x$ olacak şekilde $a \in S$ ve $x \in K$ mevcut olduğundan $a = t - x$ yazılabilir. Buradan $s^k - s^{nk+1} a = s^{nk+1} t - s^{nk+1} a = s^{nk+1}(t - a) = s^{nk+1} x \in K$ dır. $K^n = 0$ olduğundan $(s^k - s^{nk+1} a)^n = s^{nk} - s^{nk+1} a_0 = 0$ olacak şekilde $a_0 \in S$ vardır. Böylece $s^{nk} = s^{nk+1} a_0$ olup $s^{nk} \in s^{nk+1} S$ dir. Dolayısıyla S kuvvetli π-düzenlidir.

Teorem 3.2.5 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası, MN ve NM sırasıyla A ve B nin birer üstel sıfır ideali olsun. Bu durumda R nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması

için gerek ve yeter şart A ve B nin birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: $R = S + K$ olacak şekilde $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ kümesi R nin bir althalkası ve R nin $K = \begin{pmatrix} MN & M \\ N & NM \end{pmatrix}$ üstel sıfır ideali alınsın. Gerçekten de her $s_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in S$ için

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} \in S$$

ve

$$s_1 - s_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & b_1 - b_2 \end{pmatrix} \in S$$

olup S altkümesi R nin bir althalkasıdır. Ayrıca MN ve NM üstel sıfır ideal ve

$$K^{2k} = \begin{pmatrix} (MN)^k & (MN)^k M \\ (NM)^k N & (NM)^k \end{pmatrix}$$

olduğundan $(MN)^n = 0$ ve $(NM)^m = 0$ olmak üzere $k = ekok(m, n)$ alınırsa K bir üstel sıfır ideal olur. Lemma 3.2.4 gereğince R nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart S nin bir kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır. Buradan $S \cong A \times B$ olduğundan A ve B kuvvetli π-düzenlidir. Böylece R nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır.

Sonuç 3.2.6 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir aşikar Morita halkası olsun. Bu durumda R nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix}$ olarak yazılabilir. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ kümesi R nin bir

althalkası ve $\begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix}$ üstel sıfır olduğundan Teorem 3.2.5 gereğince R nin bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır.

Sonuç 3.2.7 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun. O zaman R nin matris anlamında bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin matris anlamında birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: $T = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_n(A) & \mathbb{M}_n(M) \\ \mathbb{M}_n(N) & \mathbb{M}_n(B) \end{pmatrix}$ kümesi R nin yapısından dolayı bir aşikar Morita halkasıdır. $f : T \to \mathbb{M}_n(R)$ dönüşümü $\begin{pmatrix} (a_{ij}) & (x_{ij}) \\ (y_{ij}) & (b_{ij}) \end{pmatrix} \to (r_{ij}),\ r_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & x_{ij} \\ y_{ij} & b_{ij} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. Buradan f bir izomorfizma olup $T \cong \mathbb{M}_n(R)$ dir. Sonuç 3.2.6 gereğince $\mathbb{M}_n(R)$ nin kuvvetli π-düzenli olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{M}_n(A)$ ve $\mathbb{M}_n(B)$ nin kuvvetli π-düzenli olmasıdır. Böylece R nin matris anlamında bir kuvvetli π-düzenli halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin matris anlamında birer kuvvetli π-düzenli halka olmasıdır.

Sonuç 3.2.8 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ bir aşikar Morita halkası olsun. R nin bir sol mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart A ve B nin birer sol mükemmel halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: ($\Rightarrow$) Önerme 2.12.3 gereğince R bir sol mükemmel halka ise o zaman eRe ve $(1-e)R(1-e)$ de birer sol mükemmel halkadır. $eRe \cong A$ ve $(1-e)R(1-e) \cong B$ olduğundan A ve B sol mükemmeldir.

($\Leftarrow$) A ve B birer sol mükemmel halka olsun. O zaman $J(A)$ ve $J(B)$ sol T-üstel sıfır ideal ve $A/J(A)$ ve $B/J(B)$ yarı basit Artiniandır. R bir aşikar Morita halkası

olduğundan $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$ ve

$$R/J(R) = \begin{pmatrix} A/J(A) & 0 \\ 0 & B/J(B) \end{pmatrix} \cong A/J(A) \times B/J(B)$$

olup $R/J(R)$ yarı basit Artiniandır. Şimdi $J(R)$ nin sol T-üstel sıfır olduğunun gösterilmesi gerekirse $r_i = \begin{pmatrix} a_i & x_i \\ y_i & b_i \end{pmatrix} \in J(R)$, i=1,2,... olsun. $a_i \in J(A)$ ve $b_i \in J(B)$ ve $J(A),\ J(B)$ sol T-üstel sıfır olduğundan $a_1 \dots a_{n_1} = 0 = b_1 \dots b_{n_1}$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_{n_1+1} \dots a_{n_2} = 0 = b_{n_1+1} \dots b_{n_2}$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan

$$r_1 \dots r_{n_2} = (r_1 \dots r_{n_1})(r_{n_1+1} \dots r_{n_2}) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir. Böylece $J(R)$ ideali sol T-üstel sıfır olup R bir sol mükemmel halkadır.

Uyarı 3.2.9 Her formal üçgensel matris halkası bir aşikar Morita halkasıdır. Fakat her Morita halkası formal üçgensel bir matris halkasına izomorf olmayabilir.

Örnek 3.2.10 $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ bir aşikar Morita halkası olsun ve çarpma işlemi $\mathbb{Z}_4$ ün çarpma işlemi olarak alınsın. Bu durumda R ayrıştırılamazdır. Ayrıca R ye izomorf olmayan bir aşikar Morita halkası vardır (Tang vd. 2014).

İspat: R nin aşikar olmayan merkezil eşkare elemanı olmadığından R ayrıştırılamaz. R nin eşkare elemanları $x, y \in 2\mathbb{Z}_4$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan merkezil değildir. $e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in R$ alınsın. $S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ bir aşikar Morita halkası ve $f^2 = f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ eşkare elemanı olsun. $\phi : R \to S$ ye bir izomorfizma tanımlansın öyle ki $\phi(e) = f$ olsun. $R \cong S$ olduğundan $eR(1-e) \cong fS(1-f)$ olması

gerekir. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ alınsın.

$er(1-e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in eR(1-e)$ olmak üzere, her $s = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S$ için $fs(1-f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in fS(1-f)$ olduğundan kabul ile çelişir. Dolayısıyla R ye izomorf olmayan bir aşikar Morita halkası vardır.

Örnek 3.2.11 $R := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ bir Morita halkası olsun ve çarpma işlemi $\mathbb{Z}_4$ ün çarpma işlemi olarak alınsın. Bu durumda R ye izomorf olan bir aşikar Morita halkası yoktur (Tang vd. 2014).

İspat: $\theta : R \to S$ bir izomorfizma ve $S = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ de bir aşikar Morita halkası olsun. Buradan $A/J(A) \times B/J(B) \cong S/J(S) \cong R/J(R) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olup $A/J(A) \cong B/J(B) \cong \mathbb{Z}_2$ elde edilir. Ayrıca aşikar olan bir $e \in R$ eşkare elemanı vardır öyle ki $\theta(e)S\theta(e) = A,\ \theta(e)S(1-\theta(e)) = M,\ (1-\theta(e))S\theta(e) = N$ ve $(1-\theta(e))S(1-\theta(e)) = B$ dir. Diğer taraftan R nin aşikar olmayan bütün eşkare elemanlarının kümesi

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} : xy = 0 \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 2 & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2 & 2 \end{pmatrix} : 2x = 2 \right\}$$

dir. Buradan her $f \in I$ için $|fRf| \geq 4,\ |(1-f)R(1-f)| \geq 4,\ |fR(1-f)| \geq 2$ ve $|fR(1-f)|.|(1-f)Rf| \geq 8$ dir. Gerçekten de $f^2 = f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olmak üzere,

$$|fRf| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 0 \end{pmatrix} \right| \geq 4$$

$$|fR(1-f)| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \right| \geq 2$$

$$|(1-f)Rf| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 0 \end{pmatrix} \right| \geq 2$$

$$|(1-f)R(1-f)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \right| \geq 4$$

olup buradan $|fR(1-f)|.|(1-f)Rf| \geq 8$ dir. $|A|.|B|.|M|.|N| = |S| = |R| = 2^7$ olduğundan $|A| = |B| = 4$ ve $|M|$ ve $|N|$ nin biri 2 diğeri ise 4 olması gerekir. Genelliği bozmaksızın, $|M| = 4$ ve $|N| = 2$ olsun. θ izomorfizma olduğundan θ^{-1} mevcut olup bir izomorfizmadır. Buradan $\theta^{-1}\big(\theta(e)S\theta(e)\big) = \theta^{-1}(A)$ dan $eRe \cong A$ olup $A \cong \mathbb{Z}_4$ tür. Benzer şekilde $(1-\theta)^{-1}\big[(1-\theta(e))S(1-\theta(e))\big] = (1-\theta)^{-1}(B)$ den $(1-e)R(1-e) \cong B$ olup $B \cong \mathbb{Z}_4$ tür. Böylece $S = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & M \\ N & \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$, $|M| = 4,\ |N| = 2$ dir. $r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ olsun. $\theta(r) \in \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \in S$ olur. $r \in J(R) = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ olduğundan $\theta(r) \in J(S) = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & M \\ N & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ dir. Fakat $2r \neq 0$ olduğundan $\theta(2r) = 2\theta(r) = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ dir. Buradan $2x \neq 0$ elde edilir. $r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan görülür ki $\theta(r^2) = 0 = \theta(r)\theta(r) = \begin{pmatrix} a^2 & ax+xb \\ ya+by & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax+xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir. Yani $(a+b)x = xa + xb = 0$ dir. Böylece $2x \neq 0$ ve $a, b \in 2\mathbb{Z}_4$ olduğundan $a = b \in 2\mathbb{Z}$ olur. Diğer yandan $r_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in R$ olsun. O zaman $r_1 \in \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in J(R) = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$ ve $2r_1 = 0$ olup $\theta(r_1) \in J(S)$ ve $2\theta(r_1) = 0$ dir. Böylece $\theta(r_1) = \begin{pmatrix} 2a_1 & x_1 \\ y_1 & 2b_1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_4$ ve $2x_1 = 0$ yazılabilir. $r_1 r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ ve $rr_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$

Bu durumda

$$\theta(r_1)\theta(r) = \begin{pmatrix} 2a_1 & x_1 \\ y_1 & 2b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1a & 2a_1x + x_1b \\ y_1a + 2b_1y & 2b_1b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a_1x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\theta(r)\theta(r_1) = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_1 & x_1 \\ y_1 & 2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2aa_1 & ax_1 + 2xb_1 \\ 2ya_1 + by_1 & 2bb_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2xb_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. $rr_1 \neq 0$ ve $r_1r \neq 0$, $2a_1x \neq 0$ ve $2b_1x \neq 0$ olduğundan $2a_1x = 2x$ ve $2b_1x = 2x$ olması gerekir. Bu da $\theta(r)\theta(r_1) = \theta(r_1)\theta(r)$ olduğunu gösterir. Fakat $rr_1 \neq r_1r$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla R ye izomorf olan bir aşikar Morita halkası yoktur.

3.3 Bir Halka Üzerinde Genelleştirilmiş Matris Halkaları

R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun. $\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ matrisi, matrislerin bilinen toplama işlemi ve $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + sx_1y_2 & a_1x_2 + x_1b_2 \\ y_1a_2 + b_1y_2 & sy_1x_2 + b_1b_2 \end{pmatrix}$$

çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halka $K_s(R)$ ile gösterilir ve s elemanına $K_s(R)$ nin çarpanı denir. Bir $\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ Morita yapısı için $A = B = M = N = R$ alınırsa o zaman bu matrise R üzerinde *genelleştirilmiş matris halkası (generalized matrix ring)* adı verilir.

Teorem 3.3.1 R bir halka olsun. $K(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ nin bir Morita halkası olması için gerek ve yeter şart $K(\phi, \psi) = K_s(R)$ olacak şekilde bir $s \in C(R)$ nin var olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: R bir halka ve $K = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ matrisi R halkası üzerinde bir matris halkası olsun. R nin her R-R-ikili modül endomorfizması R nin bir merkezil elemanı çarpımıyla çakışır. Yani $s, t \in R$ elemanları vardır öyle ki her $x \in R$ için $\alpha(x) = sx$ ve $\alpha(x) = tx$ dir. Buradan eğer $x = 1$ alınırsa $s = t$ olur. Böylece her $x \in R$ için $xs = sx$ olup $s \in C(R)$ dir. Diğer taraftan $\omega : R \otimes_R R \to R$, R-R-ikili modül homomorfizması $\omega(x \otimes y) = xy$ şeklinde tanımlansın. Buradan ω bir izomorfizmadır. Ayrıca $\phi : R \otimes_R R \to R$ dönüşümü $\phi = \alpha\omega$ şeklinde tanımlı ve $s \in C(R)$ ve $x \in R$ olmak üzere $\alpha(x) = sx$ ise o zaman $\phi(x \otimes y) = sxy$ dir. Şimdi $K(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ matris halkası ve $\phi, \psi : R \otimes_R R \to R$, R-R-ikili modül homomorfizmaları olsun. Ayrıca $\phi(x \otimes y)z = x\psi(y \otimes z)$ ve $\psi(x \otimes y)z = x\phi(y \otimes z)$ birleşme özellikleri sağlansın. $s, t \in C(R)$ olmak üzere $x, y \in R$ için $\phi(x \otimes y) = sxy$ ve $\psi(x \otimes y) = txy$ olsun. Buradan $x = y = z = 1$ alınırsa o zaman $s = \phi(1 \otimes 1)1 = 1\psi(1 \otimes 1) = t$ böylece $\phi = \psi$ dir. Yani her $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ için

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \phi(x \otimes y') & ax' + xb' \\ ya' + by' & \psi(y \otimes x') + bb' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa' + sxy' & ax' + xb' \\ ya' + by' & syx' + bb \end{pmatrix}$$

olur. Böylece $K(\phi, \psi) = K_s(R)$ dir.

Lemma 3.3.2 R bir halka, $s \in C(R)$ ve K da $K_s(R)$ nin bir altkümesi olsun. Bu durumda:

(1) K altkümesinin $K_s(R)$ nin bir ideali olması için gerek ve yeter şart $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix}$ olacak biçimde $i = 1, 2, 3, 4$ için I_i kümeleri R nin idealleri ve $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3$, $s(I_2 + I_3) \subseteq I_1 \cap I_4$ olmasıdır.

(2) $J(K_s(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & (s : J(R)) \\ (s : J(R)) & J(R) \end{pmatrix}$ dir (Tang vd. 2014).

İspat: (1) Lemma 3.1.1(3) gereğince $A = B = M = N = R$ ve $I_1 = A_1,\ I_2 = M,\ I_3 = N,\ I_4 = B$ alınırsa, kolayca görülür ki $i = 1, 2, 3, 4$ için $I_i \trianglelefteq R$ dir. Ayrıca $M_1N \subseteq A_1$ olduğundan $sI_2R \subseteq I_1$ ve $sI_2 \subseteq I_1$ dir. $MN_1 \subseteq A_1$ olduğundan $sRI_3 \subseteq I_1$ olup $sI_3 \subseteq I_1$ dir. Benzer şekilde $NM_1 \subseteq B_1$ olduğundan $sRI_2 \subseteq I_4$ olup $sI_2 \subseteq I_4$ ve $N_1M \subseteq B_1$ olduğundan $sI_3R \subseteq I_4$ olup $sI_3 \subseteq I_4$ olur. Böylece $sI_2 \subseteq I_1 \cap I_4$ ve $sI_3 \subseteq I_1 \cap I_4$ olduğundan $sI_2 + sI_3 \subseteq I_1 \cap I_4$ olup $s(I_2 + I_3) \subseteq I_1 \cap I_4$ elde edilir. Diğer yandan $A_1M \subseteq M_1$ ve $MB_1 \subseteq M_1$ olduğundan $I_1R \subseteq I_2$ ve $RI_4 \subseteq I_2$ olup $I_1 \subseteq I_2$ ve $I_4 \subseteq I_2$ olur. Buradan $I_1 + I_4 \subseteq I_2$ elde edilir. Ayrıca $B_1N \subseteq N_1$ ve $NA_1 \subseteq N_1$ olduğundan $I_4R \subseteq I_3$ ve $RI_1 \subseteq I_3$ olup $I_4 \subseteq I_3$ ve $I_1 \subseteq I_3$ olur. Buradan $I_1 + I_4 \subseteq I_3$ elde edilir. Dolayısıyla $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3$ tür. Böylece Lemma 3.1.1 gereğince $K \trianglelefteq K_s(R)$ olması için gerek ve yeter şart $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $I_i \trianglelefteq R$ ve $s(I_2 + I_3) \subseteq I_1 \cap I_4$ ve $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3$ olmasıdır.
(2) Teorem 3.1.5 gereğince $J(K_s(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & J_0 \\ J_0 & J(R) \end{pmatrix}$ olsun. Buradan $J_0 = \{r \in R : srR \subseteq J(R)\} = \{r \in R : sr \in J(R)\} = (s : J(R))$ dir. Dolayısıyla $J(K_s(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & (s :\ J(R)) \\ (s :\ J(R)) & J(R) \end{pmatrix}$ dir.

Teorem 3.3.3 R bir halka olsun. Bu durumda:

(1) $K_s(R)$ nin bir sağ Artinian halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir sağ Artinian halka olmasıdır.

(2) $K_s(R)$ nin bir sağ Noetherian halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir sağ Noetherian halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir sağ Artinian halka ve $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$, R nin bir sağ idealler zinciri olsun. I kümesi R nin bir sağ ideali olmak üzere $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$ da $K_s(R)$

nin sağ idealidir. Bu durumda,

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_1 \\ I_1 & I_1 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} I_3 & I_3 \\ I_3 & I_3 \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

zinciri $K_s(R)$ nin bir sağ idealler zinciridir. $K_s(R)$ sağ Artinian olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur, yani pozitif bir k tamsayısı için

$$\begin{pmatrix} I_k & I_k \\ I_k & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k+1} & I_{k+1} \\ I_{k+1} & I_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k+2} & I_{k+2} \\ I_{k+2} & I_{k+2} \end{pmatrix} = \cdots$$

Buradan $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$ olup R sağ Artiniandır.

($\Leftarrow$) R bir sağ Artinian halka ve $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$, $K_s(R)$ nin bir sağ idealler zinciri, yani

$$K_1 = \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{2,1} \\ I_{3,1} & I_{4,1} \end{pmatrix} \supseteq K_2 = \begin{pmatrix} I_{1,2} & I_{2,2} \\ I_{2,3} & I_{2,4} \end{pmatrix} \supseteq K_3 = \begin{pmatrix} I_{1,3} & I_{2,3} \\ I_{3,3} & I_{4,3} \end{pmatrix} \supseteq \cdots$$

olsun. $i = 1, 2, 3, 4$ için $I_{i,1} \supseteq I_{i,2} \supseteq I_{i,3} \supseteq \cdots$ sağ idealler zinciri sonlu bir adımda durur. Yani $i = 1, 2, 3, 4$ için $n, m, l, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere sırasıyla n, m, k ve l adımda durur. $r = max\{n, m, k, l\}$ olsun. Bu durumda $K_r = K_{r+1} = K_{r+2} = \cdots$ olur. Bu ise $K_s(R)$ nin sağ Artinian olduğu anlamına gelir.

(2) Benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.4 R bir halka olsun. Bu durumda:

(1) $K_s(R)$ nin bir değişim halkası olması için gerek ve yeter şart R nin bir değişim halkası olmasıdır.

(2) $K_s(R)$ nin bir yarı yerel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı yerel halka olmasıdır.

(3) $K_s(R)$ nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı mükemmel halka olmasıdır.

(4) $K_s(R)$ nin bir sol mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir sol mükemmel halka olmasıdır.

(5) $K_s(R)$ nin bir yarı asalımsı halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı asalımsı halka olmasıdır.

(6) $K_s(R)$ nin bir yarı güçlü halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı güçlü halka olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) $e^2 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere Teorem 3.1.7 gereğince $K_s(R)$ nin bir değişim halkası olması için gerek ve yeter şart $eK_s(R)e$ ve $(1-e)K_s(R)(1-e)$ nin birer değişim halkası olmasıdır. $eK_s(R)e \cong R \cong (1-e)K_s(R)(1-e)$ olduğundan $K_s(R)$ nin bir değişim halkası olması için gerek ve yeter şart R nin bir değişim halkası olmasıdır.

(2) $K_s(R)$ yarı yereldir. $\Leftrightarrow$ $K_s(R)/J(K_s(R))$ yarı basit Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $K_s(R)/J(K_s(R))$ sağ Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} R/J(R) & R/(s:J(R)) \\ R/(s:J(R)) & R/J(R) \end{pmatrix}$ sağ Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ $R/J(R)$ ve $R/(s:J(R))$ sağ Artiniandır.

$\Leftrightarrow$ R yarı yereldir.

(3) Önerme 2.12.7 gereğince $K_s(R)$ nin bir yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter şart $K_s(R)$ nin yarı yerel ve değişim halkası olmasıdır. (1) ve (2) gereğince bu önerme sağlanır.

(4) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir sol mükemmel halka ve $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ R nin bir temel azalan sağ ideallerinin zinciri yani $I_1 = a_1R \supseteq I_2 = a_2R \supseteq \cdots$ şeklinde olsun. Buradan

$$K_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K_s(R) \supseteq K_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K_s(R) \supseteq \cdots$$

$K_s(R)$ nin temel azalan sağ idealler zinciri olur. Teorem 2.12.4 gereğince $K_s(R)$ sol mükemmel olduğundan bu zincir sonlu bir adımda durur. Yani pozitif bir n tamsayısı için $K_n = K_{n+1} = \cdots$ dir. Buradan $I_n = I_{n+1} = \cdots$ olup böylece R sol mükemmeldir.

($\Leftarrow$) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K_s(R)$ olmak üzere $e_1 K_s(R) e_1 \cong R$ ve $e_2 K_s(R) e_2 \cong R$ olup R bir sol mükemmel halka olduğundan Teorem 2.12.3 gereğince $K_s(R)$ de bir sol mükemmel halkadır.

(5) (2) gereğince $K_s(R)$ nin bir yarı yerel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı yerel halka olmasıdır. Ayrıca $J(K_s(R))$ bir üstel sıfır ideal olsun. O zaman $[J(K_s(R))]^k = 0$ olacak şekilde pozitif bir k sayısı vardır. Her $r \in J(R)$ için $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \in J(K_s(R))$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} r^k & 0 \\ 0 & r^k \end{pmatrix} = 0$ olduğundan $J(R)$ üstel sıfır olur. Karşıt olarak $J(R)$ bir üstel sıfır ideal olsun. O zaman $[J(R)]^n = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı vardır. Buradan $(K_s(R))^n = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde olup $(K_s(R))^{4n} = 0$ olur. Dolayısıyla $J(K_s(R))$ bir üstel sıfır idealdir. Böylece $J(K_s(R))$ nin bir üstel sıfır ideal olması için gerek ve yeter şart $J(R)$ nin bir üstel sıfır ideal olmasıdır.

(6) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir yarı güçlü halka, I kümesi R nin bir sol ideali ve $I \nsubseteq J(R)$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$ kümesi $K_s(R)$ nin bir sol idealidir. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix} \nsubseteq J(K_s(R))$ ve $K_s(R)$ yarı güçlü halka olduğundan $\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$ sol ideali eşkare eleman içerir. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$ elemanı $\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}$ nin bir eşkare elemanı olsun. Buradan $\begin{pmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ra & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$ olup $a = a^2$ olur. Böylece R nin $I \nsubseteq J(R)$ sol ideali eşkare elemanına sahiptir. Dolayısıyla R bir yarı güçlü halkadır.

($\Leftarrow$) R bir yarı güçlü halka ve $r = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \notin J(K_s(R))$ olsun.

Durum 1. $a \notin J(R)$ olsun. O zaman $aR \nsubseteq J(R)$ bir sağ idealdir. R yarı güçlü olduğundan $e \in aR$ olacak şekilde bir e eşkare elemanı vardır. $e = aa'$ olacak biçimde $a' \in R$ dir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ ya'e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in rK_s(R)$$

de bir eşkare elemanı olur.

Durum 2. $b \notin J(R)$ olsun. O zaman $bR \nsubseteq J(R)$ bir sağ idealdir. R yarı güçlü olduğundan $f \in aR$ olacak şekilde bir f eşkare elemanı vardır. $e = bb'$ olacak biçimde $b' \in R$ dir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & xb'f \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b'f \end{pmatrix} \in rK_s(R)$$

olup $rK_s(R)$ bir eşkare elemanı içerir.

Durum 3. $a, b \in J(R)$ ve $x \notin (s : J(R))$ veya $y \notin (s : J(R))$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x \notin (s : J(R))$ olsun. O zaman $xy' \notin J(R)$ olacak şekilde $y' \in R$ vardır ve $r' = \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy' & 0 \\ by' & 0 \end{pmatrix} \in rK_s(R) \nsubseteq J(K_s(R))$ dir. $xy' \notin J(R)$ olduğundan $xy'R \nsubseteq J(R)$ olacak şekilde bir ideal vardır. R yarı güçlü olduğundan $xy'R$ ideali bir g eşkare elemanı içerir. O zaman $g = (xy')a''$ olacak şekilde $a'' \in R$ vardır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ bya''g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ by & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in r'K_s(R)$$

de bir eşkare elemandır. $r'K_s(R) \subseteq rK_s(R)$ olduğundan $\begin{pmatrix} g & 0 \\ bya''g & 0 \end{pmatrix} \in rK_s(R)$ dir. Böylece $K_s(R)$ yarı güçlüdür.

Önerme 3.3.5 R bir halka olmak üzere $K_s(R)$ nin bir asal halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir asal halka ve $s \neq 0$ olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir asal halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. O zaman $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in K_s(R)$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} axb & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ dır. $K_s(R)$ asal olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ olur. Böylece R asaldır. $s \neq 0$ olduğunu göstermek için $s = 0$ seçilsin. $0 \neq a, b \in R$ alınsın. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sayb & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

0 olup $K_s(R)$ asal olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $s \neq 0$ dır.

($\Leftarrow$) R bir asal halka ve $s \neq 0$ olsun. Her $r \in R$ için

$$(i) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xrx' & xry' \\ zrx' & szry' \end{pmatrix} = 0$$

ise $xrx' = 0$ ve $xry' = 0$ olduğundan sırasıyla $x = 0$ veya $x' = 0$; ve $x = 0$ veya $y' = 0$ dır. Ayrıca $zrx' = 0$ ve $szry' = 0$ olduğundan sırasıyla $z = 0$ veya $x' = 0$; ve $z = 0$ veya $y' = 0$ dır.

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sxrz' & xrt' \\ zrz' & zrt' \end{pmatrix} = 0$$

ise $sxrz' = 0$ ve $xrt' = 0$ olduğundan sırasıyla $x = 0$ veya $z' = 0$; ve $x = 0$ veya $t' = 0$ dır. Ayrıca $zrz' = 0$ ve $zrt' = 0$ olduğundan sırasıyla $z = 0$ veya $z' = 0$; ve $z = 0$ veya $t' = 0$ dır.

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} syrx' & syry' \\ trx' & stry' \end{pmatrix} = 0$$

ise $syrx' = 0$ ve $syry' = 0$ olduğundan sırasıyla $y = 0$ veya $x' = 0$; ve $y = 0$ veya $y' = 0$ dır. Ayrıca $trx' = 0$ ve $stry' = 0$ olduğundan sırasıyla $t = 0$ veya $x' = 0$; ve $t = 0$ veya $y' = 0$ dır.

$$(iv) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} syrz' & yrt' \\ trz' & trt' \end{pmatrix} = 0$$

ise $syrz' = 0$ ve $yrt' = 0$ olduğundan sırasıyla $y = 0$ veya $z' = 0$; ve $y = 0$ veya $t' = 0$ dır. Ayrıca $trz' = 0$ ve $trt' = 0$ olduğundan sırasıyla $t = 0$ veya $z' = 0$; ve $t = 0$ veya $t' = 0$ dır.

Şimdi $\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \neq 0$ olsun. O zaman bu matrisin en az bir bileşeni sıfırdan farklıdır. Genelliği bozmaksızın $x' \neq 0$ olsun. Bu durumda (i) den $x = 0$ ve $z = 0$ dır. Ayrıca (ii) den $y = 0$ ve $t = 0$ elde edilir. Böylece $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0$ olur. Benzer şekilde eğer y', z', t' sıfırdan farklı alınırsa $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla $K_s(R)$ asaldır.

Lemma 3.3.6 R bir halka, $s, v \in C(R)$, $v \in U(R)$ ve $\alpha \in Aut(R)$ olsun. Bu durumda,

$$K_s(R) \cong K_{vs}(R) \cong K_{\alpha(s)}(R) \cong K_{v\alpha(s)}(R)$$

dir (Krylov 2008).

Önerme 3.3.7 R bir halka olsun. Bu durumda:

(1) $K_s(R)$ nin bir basit halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir basit halka ve $s \neq 0$ olmasıdır.

(2) $K_s(R)$ nin bir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir düzenli halka ve $s \in U(R)$ olmasıdır.

(3) $K_s(R)$ nin bir tersinir düzenli halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir tersinir düzenli halka ve $s \in U(R)$ olmasıdır.

(4) $K_s(R)$ nin bir yarı ilkel halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı ilkel halka ve s nin sıfır bölenden farklı olmasıdır.

(5) $K_s(R)$ nin bir yarı asal halka olması için gerek ve yeter şart R nin bir yarı asal halka ve s nin sıfır bölenden farklı olmasıdır (Tang vd. 2014).

İspat: (1) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir basit halka ve I da R nin sıfırdan farklı bir öz ideali olsun. O zaman $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$ da $K_s(R)$ nin bir ideali olup $K_s(R)$ basit olduğundan $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} = 0$ veya $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} = K_s(R)$ dir. Buradan $I = 0$ veya $I = R$ olup kabul ile çelişir. Dolayısıyla R basittir. $s = 0$ olsun. $A = \begin{pmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{pmatrix}$ göz önüne alınsın. O zaman A kümesi $K_s(R)$ nin bir ideali olur. $K_s(R)$ basit olduğundan $A = 0$ olmak zorundadır. Bu ise kabul ile çelişir. Dolayısıyla $s \neq 0$ dır.

($\Leftarrow$) R bir basit halka ve $s \neq 0$ olsun. Bu durumda $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix} \trianglelefteq K_s(R)$ olmak üzere

Durum 1. $I_1 = 0$ olsun. Bu durumda $s(I_2 + I_3) \subseteq I_1 \cap I_4 = 0$ dır.

(i) $I_2 = 0$ olsun. O zaman $sI_3 = 0$ olur. $I_3 = R$ ise bu durumda $sR = 0$ veya $sR = R$ dir. $sR = 0$ ise $s = 0$ olup kabul ile çelişir. $sR = R$ ise $s \in U(R)$ olur. Böylece $I_3 = 0$ olur. Buradan $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3 = 0$ ve $I_1 = 0$ olduğundan $I_4 = 0$ olur. Böylece $K = 0$ olarak elde edilir.

(ii) $I_2 \neq 0$ olsun. $s(I_2 + I_3) = 0$ olduğundan $I_2 + I_3 = 0$ olup $I_2 = I_3 = 0$ olur. Bu ise çelişkidir.

Durum 2. $I_1 \neq 0$ olsun. $I_1 \cap I_4 = 0$ veya $I_1 \cap I_4 = R$ dir.

(i) $I_1 \cap I_4 = 0$ ise $I_4 = 0$ dir. $s(I_2 + I_3) = 0$ ve $s \in U(R)$ olduğundan $I_2 + I_3 = 0$ dır. Buradan $I_2 = I_3 = 0$ olur. O zaman $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3 = 0$ ve $I_4 = 0$ olduğundan $I_1 = 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

(ii) $I_1 \cap I_4 \neq 0$ olsun. O zaman $I_1 = I_4 = R$ dir. $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3$ olduğundan $R \subseteq I_2 \cap I_3$ olup $I_2 = I_3 = R$ elde edilir.

Dolayısyla $K_s(R)$ nin idealleri $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ dir. Böylece $K_s(R)$ basittir.

(2) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir düzenli halka olsun. O zaman her $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \in K_s(R)$ ve $a \in R$ için

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar_1a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan $a = ar_1a$ olup R düzenlidir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $s \in C(R)$ olduğundan $1 = sy = ys$ olup $s \in U(R)$ dir.

($\Leftarrow$) R bir düzenli halka ve $s \in U(R)$ olsun. Teorem 3.1.8(1) gereğince $K_1(R)$ düzenlidir. Lemma 3.3.6 gereği $K_s(R) \cong K_1(R)$ olduğundan $K_s(R)$ bir düzenli halkadır.

(3) (2) ve Teorem 3.1.8(2) ve Lemma 3.3.6 gereğince bu önerme sağlanır.

(4) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir yarı ilkel halka yani $J(K_s(R)) = 0$ olsun. Buradan

$J(K_s(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & (s:J(R)) \\ (s:J(R)) & J(R) \end{pmatrix} = 0$ olup $J(R) = 0$ dır. Böylece R yarı ilkeldir. Ayrıca $s \neq 0$ olsun. $(s:J(R)) = \{r \in R : rs \in J(R)\} = 0$ olduğundan $rs = 0$ iken $r = 0$ dır. Dolayısıyla s sıfır bölen değildir.

($\Leftarrow$) $J(R) = 0$ olsun. $s \neq J(R)$ olmak üzere $(s:J(R)) = (s:0) = \{r \in R : rs = 0\}$ ve s sıfır bölen olmadığından $r = 0$ olup $(s:J(R)) = 0$ dır. Dolayısıyla $J(K_s(R)) = 0$ olarak elde edilir. Böylece $K_s(R)$ bir yarı ilkel halkadır.

(5) ($\Rightarrow$) $K_s(R)$ bir yarı asal halka ve I da R nin bir ideali olsun. $K = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \trianglelefteq K_s(R)$ alınırsa $K^2 = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}^2 = 0$ iken $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} = 0$ olduğundan $I^2 = 0$ iken $I = 0$ olup R yarı asaldır. Ayrıca $r_R(s)$ kümesi s nin sağ sıfırlayanı olmak üzere $sx = 0$ olacak şekilde $0 \neq x \in r(s)$ mevcut olsun. Buradan $I = \begin{pmatrix} 0 & r_R(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da $K_s(R)$ nin bir sağ idealidir. $r_R(s)$ kümesi R nin sağ ideali olmak üzere $s \in C(R)$ olduğundan aynı zamanda bir sol ideal olur. Yani $x \in r_R(s)$ ve $a \in R$ için $s(ax) = a(sx) = 0$ olduğundan $ax \in r_R(s)$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in K_s(R)$ ve $m \in r_R(s)$ olmak üzere $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xm \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olup I bir sol ideal de olur. $I^2 = \begin{pmatrix} 0 & r(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ olduğundan $r_R(s) = 0$ dır. Buradan $x \in r_R(s)$ olmak üzere $sx = 0$ iken $x = 0$ olup s sıfır bölen değildir.

($\Leftarrow$) R bir yarı asal halka ve s sıfır bölenden farklı olsun. R nin her I ideali için $I^2 = 0$ iken $I = 0$ dir. $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix} \in K_s(R)$ alınsın. $K^2 = \begin{pmatrix} I_1^2 + sI_2I_3 & I_1I_2 + I_2I_4 \\ I_3I_1 + I_4I_3 & sI_3I_2 + I_4^2 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Buradan $I_1^2 + sI_2I_3 = 0$ ve $sI_3I_2 + I_4^2 = 0$ olduğundan $I_1^2 = 0,\ I_4^2 = 0$ ve $sI_2I_3 = sI_3I_2 = 0$ olur. R yarı asal olduğundan $I_1^2 = I_4^2 = 0$ olup $I_1 = 0$ ve $I_4 = 0$ dır. Ayrıca s sıfır bölenden farklı olduğu için $I_2I_3 = I_3I_2 = 0$ olup $I_2 = I_3 = 0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla $K^2 = 0$ iken $K = 0$ olup $K_s(R)$ bir yarı asal halkadır.

Teorem 3.3.8 R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun. Bu durumda;

$$Spec(K_s(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} P & P \\ P & P \end{pmatrix} : P \in Spec(R),\ s \notin P \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R \\ R & P \end{pmatrix} : P \in Spec(R),\ s \in P \right\}$$

dir (Tang vd. 2014).

İspat: (i) Öncelikle $\left\{ \begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R \\ R & P \end{pmatrix} : P \in Spec(R),\ s \in P \right\} \subseteq Spec(K_s(R))$ olduğu gösterilsin. $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in K_s(R)$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}$ olsun. Buradan $a_1a_2 + sx_1y_2 \in P$ dir. $s \in P$ olduğundan $sx_1y_2 \in P$ olup $a_1a_2 \in P$ olur. P asal olduğundan $a_1 \in P$ veya $a_2 \in P$ dir. Bu durumda $\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}$ olur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} P & R \\ R & R \end{pmatrix}$ asal olup $Spec(K_s(R))$ nin elemanıdır. Benzer şekilde $\begin{pmatrix} R & R \\ R & P \end{pmatrix} \in Spec(K_s(R))$ olur. Şimdi $P \in Spec(R)$ ve $s \notin P$ olmak üzere $K = \begin{pmatrix} P & P \\ P & P \end{pmatrix} \in Spec(K_s(R))$ olduğu incelensin. P asal oldğundan R/P bölüm halkası da asaldır. Önerme 3.3.5 gereğince $\bar{s} = s + P$ olmak üzere $K_{\bar{s}}(R/P)$ de asaldır. $f : K_s(R)/K \to K_{\bar{s}}(R/P)$ izomorfizması $\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & P \\ P & P \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+P & x+P \\ y+P & b+P \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanabilir. Buradan $K_s(R)/K \cong K_{\bar{s}}(R/P)$ olup $K_{\bar{s}}(R/P)$ asal olduğundan $K_s(R)/K$ asal olup böylece $K \in Spec(K_s(R))$ dir.

(ii) $K \in Spec(K_s(R))$ olsun. Lemma 3.3.1(2) gereğince $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $i = 1, 2, 3, 4$ için $I_i \trianglelefteq R$, $I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3$ ve $s(I_2 + I_3) \in I_1 \cap I_4$ vardır.

Buradan

$$K_s(R)/K \cong \begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$$

asal halkadır.

Durum 1. $s \in I_1 \cap I_4$ olsun. Bu durumda her $x + I_2 \in R/I_2$ ve $y + I_3 \in R/I_3$ için $s(x + I_2)(y + I_3) = sxy + I_1$ ve $s(y + I_3)(x + I_2) = syx + I_4$ olur. $sxy \in I_1$ ve $syx \in I_4$ olduğundan $\begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$ asal halkası, aşikar Morita halkası olur. Bu ise $R/I_2 = \bar{0}$ ve $R/I_3 = \bar{0}$ dır. Ayrıca $R/I_1 = \bar{0}$ veya $R/I_4 = \bar{0}$ olmasını gerektirir. Gerçekten de

$\begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$ altkümesi göz önüne alındığında

$\begin{pmatrix} a + I_1 & x + I_2 \\ y + I_3 & b + I_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \bar{0} & x' + I_2 \\ y' + I_3 & \bar{0} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix}$ için

$$\begin{pmatrix} a + I_1 & x + I_2 \\ y + I_3 & b + I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & x' + I_2 \\ y' + I_3 & \bar{0} \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & x' + I_2 \\ y' + I_3 & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + I_1 & x + I_2 \\ y + I_3 & b + I_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix}$ kümesi $\begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$ nin bir idealidir.

$\begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix}^2 = 0$ ve $\begin{pmatrix} R/I_1 & R/I_2 \\ R/I_3 & R/I_4 \end{pmatrix}$ asal olduğundan $\begin{pmatrix} \bar{0} & R/I_2 \\ R/I_3 & \bar{0} \end{pmatrix} = 0$ olup $R/I_2 = R/I_3 = \bar{0}$ dır. Şimdi $R/I_1 \neq \bar{0}$ ve $R/I_4 \neq \bar{0}$ olduğu kabul edilsin. O zaman $r \in R \backslash I_1$ ve $t \in R \backslash I_4$ olacak şekilde $r, t \in R$ vardır. Her $a, c \in R$ için

$$\begin{pmatrix} r + I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + I_1 & 0 \\ 0 & c + I_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t + I_4 \end{pmatrix} = 0$$

dır. $\begin{pmatrix} R/I_1 & 0 \\ 0 & R/I_4 \end{pmatrix}$ asal halka olduğundan $\begin{pmatrix} r + I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ veya $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t + I_4 \end{pmatrix} = 0$ olur. Böylece $r \in I_1$ veya $t \in I_4$ olarak elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla

$\begin{pmatrix} R & R \\ R & I_4 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $s \in I_4 \in Spec(R)$ veya $\begin{pmatrix} I_1 & R \\ R & R \end{pmatrix}$ olacak şekilde $s \in I_1 \in Spec(R)$ dir.

Durum 2. $s \notin I_1 \cap I_4$ olsun. Genelliği bozmaksızın $s \notin I_1$ olsun. $I_1 \in Spec(R)$ olduğu gösterilsin. $J_1, J_2 \trianglelefteq R$ öyle ki $J_1J_2 \subseteq I_1$ olsun. Buradan $K_1 = \begin{pmatrix} J_1 & J_1 \\ J_1 & sJ_1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} J_2 & J_2 \\ J_2 & sJ_2 \end{pmatrix} \trianglelefteq K_s(R)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_1 \\ J_1 & sJ_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J_2 \\ J_2 & sJ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1J_2 + sJ_1J_2 & J_1J_2 + sJ_1J_2 \\ J_1J_2 + sJ_1J_2 & sJ_1J_2 + s^2J_1J_2 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} I_1 & I_1 \\ I_1 & sI_1 \end{pmatrix} \subseteq K$$

olup K asal olduğundan $\begin{pmatrix} J_1 & J_1 \\ J_1 & sJ_1 \end{pmatrix} \subseteq K$ veya $\begin{pmatrix} J_2 & J_2 \\ J_2 & sJ_2 \end{pmatrix} \subseteq K$ olur. Dolayısıyla $J_1 \subseteq I_1$ veya $J_2 \subseteq I_1$ dir. Böylece $I_1 \in Spec(R)$ dir. Burada $s \notin I_2$ olduğunu dikkate almak gerekir. Aksi takdirde yani eğer $s \in I_2$ olsaydı $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq K$ olup $s^2R \subseteq I_1$ olurdu. $s \in C(R)$ ve I_1 asal olduğundan $s^2R = sRs$ olup $s \in I_1$ olur. Benzer şekilde $s \notin I_3$ tür. Aksi durumda eğer $s \in I_3$ olsaydı $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s^2R \end{pmatrix} \subseteq K$ olup $s^2R \subseteq I_4$ olduğundan $s \in I_4$ olurdu. Fakat $\begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & RI_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq K$ olduğundan $RI_4 \subseteq I_2$ olup $I_4 \subseteq I_2$ olduğundan $s \in I_4$ olamaz. Böylece $s \notin I_1, I_2, I_3, I_4$ tür. Benzer şekilde $I_4 \in Spec(R)$ dir. Diğer taraftan $s(I_2 + I_3) \subseteq I_1$ olduğundan $sR(I_2 + I_3) \subseteq I_1$ yazılabilir. $s \notin I_1$ ve I_1 asal olduğundan $I_2 + I_3 \subseteq I_1$ olur. Ayrıca $I_1 \subseteq I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3 \subseteq I_2$ ve $I_2 \subseteq I_2 + I_3 \subseteq I_1$ olduğundan $I_1 = I_2$ dir ve $I_1 \subseteq I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3 \subseteq I_3$ $I_3 \subseteq I_2 + I_3 \subseteq I_1$ olduğundan $I_1 = I_3$ olup $I_1 = I_2 = I_3$ elde edilir. Diğer yandan $s(I_2+I_3) \subseteq I_1 \cap I_4 \subseteq I_4$ olduğundan $sI_1 \subseteq I_4$ olup $sRI_1 \subseteq I_4$ olarak yazılabilir. I_4 asal olduğundan $I_1 \subseteq I_4$ olur. $I_4 \subseteq I_1 + I_4 \subseteq I_2 \cap I_3 = I_1$ olduğu için $I_4 \subseteq I_1$ dir. Buradan $I_1 = I_4$ elde edilir. Böylece $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$ dir. Dolayısıyla $K = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_3 & I_4 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $I_1, I_2, I_3, I_4 \in Spec(R)$ ve $s \notin I_i$, (i=1,2,3,4) bulunur.

Lemma 3.3.9 R bir halka ve $s \in C(R)$ olsun. Bu durumda:

$$C(K_s(R)) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} : s \in C(R) \right\}$$

dir (Krylov 2008).

Lemma 3.3.10 R ve T iki halka olsun. Eğer R bir Abel halka ise o zaman her $0 \neq t \in C(T)$ için $K_0(R) \ncong K_t(T)$ dir (Tang vd. 2014).

İspat: R nin genelleştirilmiş bir matris halkası olmadığı kabul edilsin. Ayrıca $0 \neq t \in C(T)$ olmak üzere $K_0(R) \cong K_t(T)$ olsun. O zaman bir $f : K_0(R) \to K_t(T)$ izomorfizması vardır. $I = \begin{pmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{pmatrix} \trianglelefteq K_0(R)$ olsun. Buradan $f(I) = J = \begin{pmatrix} X & A \\ B & Y \end{pmatrix} \trianglelefteq K_t(T)$ olacak şekilde $X, A, B, Y \trianglelefteq T$, $t(A+B) \subseteq X \cap Y$ ve $X + Y \subseteq A \cap B$ vardır. A ve B ideallerinin T nin öz ideali oldukları iddia edilsin. Buradan aksine $A = T$ olduğu kabul edilsin. O zaman $tT \subseteq X, tT \subseteq Y, t \in X, t \in Y$ ve $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in J$ dir. Lemma 3.3.9 gereğince $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in Z(K_t(T))$ dir. Fakat $f^{-1} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in I \cap Z(K_0(R)) = 0$ olduğundan $t = 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $A \neq T$ dir. Benzer şekilde $B \neq T$ dir. f izomorfizmasından yani $K_0(R) \cong K_t(T)$ olduğundan dolayı $K_0(R)/I \cong K_t(T)/f(I) = K_t(T)/J$ dir. Fakat buradan $K_0(R)/I \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong R \oplus R$ ve $K_t(T) \cong \begin{pmatrix} T/X & T/A \\ T/B & T/Y \end{pmatrix}$ olup $R \oplus R \cong \begin{pmatrix} T/X & T/A \\ T/B & T/Y \end{pmatrix}$ dir. Buradan $R \oplus R$ genelleştirilmiş bir matris halkası olup böylece R de genelleştirilmiş bir matris halkasıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Teorem 3.3.11 R bir halka ve $s, t \in C(R)$ öyle ki $K_s(R) \cong K_t(R)$ olsun. Ayrıca R/sR ve R/tR birer Abel halka olmak üzere;

(1) Eğer $s^{\perp} \subseteq J(R)$ ise o zaman $t = u\alpha(s)$ olacak şekilde $u \in U(R)$ ve $\alpha \in Aut(C(R))$ vardır.

(2) Eğer $s^{\perp} = 0$ ise o zaman $t = u\alpha(s)$ olacak şekilde $u \in C(R)$, $u \in U(R)$ ve $\alpha \in Aut(C(R))$ vardır (Tang vd. 2014).

İspat: Bir $\phi : K_s(R) \to K_t(R)$ izomorfizması tanımlı olsun. Her $a \in C(R)$ için $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in C(K_s(R))$ olup ϕ izomorfizma olduğundan $\phi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in C(K_t(R))$ dir. Böylece Lemma 3.3.9 gereğince $\phi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in C(K_t(R))$ olacak şekilde $b \in C(R)$ vardır. Dolayısıyla $\alpha : C(R) \to C(R)$ dönüşümü $\alpha(a) = b$ şeklinde tanımlı bir otomorfizma bulunabilir. Bu durumda

$$\phi \begin{pmatrix} sR & sR \\ sR & sR \end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} K_s(R) \right) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & 0 \\ 0 & \alpha(s) \end{pmatrix} K_t(R) = \begin{pmatrix} \alpha(s)R & \alpha(s)R \\ \alpha(s)R & \alpha(s)R \end{pmatrix}$$

olup ϕ izomorfizma olduğundan $K_{\bar{0}}(R/sR) \cong K_{\bar{t}}(R/\alpha(s)R)$ dir. Burada R/sR Abel olduğundan Lemma 3.3.10 gereğince $\bar{t} = \bar{0}$ olur yani $t = \alpha(s)x$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. $\phi^{-1} : K_t(R) \to K_s(R)$ de izomorfizma olduğundan $s = \alpha^{-1}(t)y$ olacak şekilde $y \in R$ vardır. $\phi^{-1} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_s(R)$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(t) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \left[\phi^{-1} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \phi^{-1}\left(\left[\phi \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} say & sby \\ scy & sdy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $s \in C(R)$ ve $\alpha^{-1}(t) \in C(R)$ olduğundan her $r \in R$ için $sr = (\alpha^{-1}(t)y)r = r(\alpha^{-1}(t)y) = \alpha^{-1}(t)(ry)$ dir. Buradan $\alpha^{-1}(t)(yr) = \alpha^{-1}(t)(ry)$ olup $yr = ry$ olur. Dolayısıyla $y \in C(R)$ dir ve $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sya & syb \\ syc & syd \end{pmatrix}$ yazılabilir.

(1) $s^{\perp} \subseteq J(R)$ olsun. Bu durumda $1-ay, 1-ya, 1-dy, 1-yd$, ve yb, cy elemanları $J(R)$ ye aittir. Buradan ay, ya, dy ve yd elemanları $U(R)$ ye ait olur. Dolayısıyla $y, a, d \in U(R)$ olup böylece $b, c \in J(R)$ dir. Buradan

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in U(K_s(R))$ ve $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in J(K_s(R))$ olduğundan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(K_s(R))$ olur. Yani $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in U(K_t(R))$ dir. Dolayısıyla $x \in U(R)$ bulunur.

(2) $s^{\perp} = 0$ olsun. $\begin{pmatrix} \alpha(s) & 0 \\ 0 & \alpha(s) \end{pmatrix}$ nin sıfır bölen olmadığı gösterilsin. $r \in R$ olmak üzere $\alpha(s)r = 0$ olsun. $0 = \begin{pmatrix} \alpha(s) & 0 \\ 0 & \alpha(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\phi^{-1}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right)$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\phi^{-1}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = 0$ olup $\phi^{-1}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = 0$ olur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = 0$ dir ve $r = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha(s)$ de R de sıfır bölen değildir. Şimdi her $r \in R$ için $\alpha(s)xr = tr = rt = r\alpha(s)x = \alpha(s)rx$ olup $xr = rx$ yani $x \in C(R)$ dir. Ayrıca $y \in C(R)$ ve $\alpha^{-1}(x) \in C(R)$ olduğundan $s = \alpha^{-1}(t)y = \alpha^{-1}(\alpha(s)x)y = s\alpha^{-1}(x)y$ olup $\alpha^{-1}(x)y = 1$ olur. Böylece $y \in U(R)$ dir.

Sonuç 3.3.12 R bir yerel halka ve $s, t \in C(R)$ olsun. Eğer $K_s(R) \cong K_t(R)$ ise o zaman $t = \alpha(s)y$ olacak şekilde $\alpha \in Aut(C(R))$ ve $y \in U(R)$ vardır.

İspat: Her yerel halka bir Abel halka olduğundan Lemma 3.3.10 gereğince $t = 0$ veya $s = 0$ dir. $s \neq 0$ ve $t \neq 0$ olsun. $J(R)$ ideali R deki bütün maksimal ideallerinin kesişimidir. R yerel halka olduğundan $J(R)$ ideali R nin tek maksimal ideali olur. Her ideal bir maksimal ideali tarafından kapsandığından $s^{\perp} \subseteq J(R)$ dir. Ayrıca R Abel halkasının bölüm halkası da Abel olduğundan Teorem 3.3.9(1) gereğince $t = \alpha(s)y$ olacak şekilde $\alpha \in Aut(C(R))$ ve $y \in U(R)$ bulunur.

Sonuç 3.3.13 R değişmeli bir halka ve sıfırdan farklı her $r \in R$ için $r^{\perp} \subseteq J(R)$ olsun. Bu durumda $s, t \in R$ olmak üzere $K_s(R) \cong K_t(R)$ olması için gerek ve yeter şart $t = \alpha(s)y$ olacak şekilde $y \in U(R)$ ve $\alpha \in Aut(R)$ nin var olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) R bir değişmeli halka olduğundan Abeldir. Lemma 3.3.10 u kullanarak Sonuç 3.3.11(1) in ispatına benzer şekilde yapılır.
($\Leftarrow$) R değişmeli olduğundan aynı zamanda $y \in C(R) = R$ olup Lemma 3.3.6 gereğince $K_s(R) \cong K_t(R)$ dir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

$(A, B, M, N, \phi, \varphi)$ Morita yapısının A halkasının özelliklerini B halkasına taşımak için oldukça yararlı olduğu gösterildi. Bu çalışmada Morita yapılarının genel durumunda Morita halkası hangi şartlar altında Artinian, Noetherian, sol mükemmel, yarı yerel, yarı mükemmel, yarı asalımsı, yarı düzenli, düzenli, tersinir düzenli, değişim ve yarı güçlü olduğu incelendi. Bununla birlikte Morita yapısının özel durumlarında yani $MN \subseteq J(A)$, $NM \subseteq J(B)$ ve $MN = 0$, $NM = 0$ iken Morita halkasının sol mükemmel, kuvvetli π-düzenli, güçlü, temiz, Dedekind sonlu ve 2-iyi halka olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Ayrıca bu özellikler genelleştirilmiş matris halkaları üzerinde, yani $A = B = M = N = R$ iken incelenip bazı önemli sonuçlar elde edildi.

Böylece bazı halka sınıflarının özelliklerinin Morita halkalara aktarılması incelenerek daha genel sonuçlar elde edilip bu özelliklerin daha genel halka sınıflarına taşınması mümkün oldu.

KAYNAKLAR

Amitsur, S.A. 1971. Embbedings in matrix rings J. Pacific J. Math., (36); 21-39.

Amitsur, S.A. 1997. Rings of quotients and Morita contexts. J. Algebra, (17); 273-298.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer-Verlag, Berlin.

Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. 1969. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Company.

Azumaya, G. 1954. Strongly π-regular rings. J. Fac. Sci. Hokkiado U., Vol. (13); 34-39.

Bass, H. 1968. Algebraic K-theory. W. A. Benjamin. INC. New York.

Bass, H. 1962. Torsion free and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc., (102); 319-327.

Brown, B. and McCoy, N.H. 1950. The maximal regular ideal of a ring. Proc. AMS. 1(2); 165-171.

Chen, H. 2002. Morita contexts with many units. Comm. Algebra, (20); 2589-2596.

Chen, H. 2011. Rings related to stable range conditions. World Scientific, Vol. 11.

Dauns, J. 1994. Modules and rings. Cambridge Univ. Press.

Goodearl, K.R. and Wehrung, F. 2005. The complete dimension theory of partially ordered systems with equivalence and orthogonality. Amer. Math. Soc., Vol. (176); 831.

Haghany, A. 1999. Hop_city and co-hopficity for Morita contexts. Comm. Algebra, 27:477-492.

Haghany, A. and Varadarajan, K. 1999. Study of formal triangular matrix rings, Comm. Algebra, 27(11); 5507-5525.

Haghany, A. and Varadarajan, K. 2000. Study of modules over triangular matrix rings, J. Pure Appl. Algebra, 147(1); 41-58.

Hungerford, T.W. 1974. Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Huynh, D.V. Jain, S.K. López-Permouth, S.R. Tariq Rizvi, S. Roman, C.S. 2012. Ring theory and its applications. Amer. Math. Soc. Contemporary mathematics. Vol. 609.

Krylov, P.A. 2008. Isomorphism of generalized matrix rings. Algebra Logic, Vol. (47)4; 258-262.

Krylov, P.A. and Tuganbaev, A.A. 2010. Formal matrices. Algebra and Applications, Springer-Verlag.

Krylov, P.A. and Tuganbaev, A.A. 2010. Modules over formal matrix rings. J. Math. Sci., Vol. (171)2; 248-295.

Lam, T.Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings. Springer-Verlag, Berlin.

Lam, T.Y. 2007. Exercises in modules and rings. Springer-Verlag, GTM, Vol. 189, Berlin.

Marianne, M. 1987. Rings of quotients of generalized matrix rings. Comm. Algebra, 15:1991-2015.

McConnell, J. C. and Robson, J. C. 1987. Noncommutative Noetherian rings, Graduate studies in mathematics, (30), Rhod Island, AMS providence.

Morita, K. 1958. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Diagaku Sect, A6, 83-142.

Nicholson, W.K. 1975. I-rings, Trans. Amer. Math. Soc. (207), 361-373.

Nicholson, W.K. 1977. Lifting idempotents and exchange rings. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. (229); pp. 269-278.

Nicholson, W.K. and Yousif, M.F. 2003. Quasi-Frobenius rings, Cambridge Univ. Press.

Sands, A.D. 1973. Radicals and Morita contexts, J. Algebra, (24); 335-345.

Tang, G. Li, C. and Zhou, Y. 2014. Study of Morita contexts Comm. Algebra, Vol.(42); 1668-1681.

Tuganbaev, A.A. 2002. Rings and modules with exchange properties, J. Math. Sci., (110)(1); 2348-2421.

Varadarajan, K. 2008. Formal triangular matrix rings and modules over them, A survey, Math. Student 2007, Special Centenary Volume, 81-99.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Farzin JAHEDPOUR AZAR

Doğum Yeri : İRAN

Doğum Tarihi : 23/10/1987

Medeni Hali : Bekar

Yabanci Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Noor e Danesh (2005)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2015)