İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARDA KAYMA KİLİTLENMESİ PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yurdakul AYGÖRMEZ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARDA KAYMA KİLİTLENMESİ PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yurdakul AYGÖRMEZ
(501101087)

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tülay AKSU ÖZKUL

HAZİRAN 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501101087 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Yurdakul AYGÖRMEZ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARDA KAYMA KİLİTLENMESİ PROBLEMİ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Tülay AKSU ÖZKUL** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Kutlu DARILMAZ** .....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Şevket ÖZDEN .....
Okan Üniversitesi

Teslim Tarihi : **24 Haziran 2014**

Savunma Tarihi : **27 Haziran 2014**

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında beraber çalıştığım değerli hocam Prof. Dr. Tülay AKSU ÖZKUL'a en derin teşekkürlerimi arz ederim.

Haziran 2014

Yurdakul AYGÖRMEZ
Araştırma Görevlisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xi**
SEMBOL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Konu 1
1.2 Amaç 1
1.3 Yöntem 2
1.4 Literatür 2
2. MİNDLİN PLAK TEORİSİ **7**
2.1 Yer Değiştirmeler 9
2.2 Plak Elemanda Yer Değiştirmeler 10
2.3 Şekil Değiştirmeler 11
2.4 Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları 12
2.5 Gerilme-Yer Değiştirme Bağıntıları 12
2.6 İç Kuvvetler 13
2.7 Şekil Değiştirme Enerjisi 16
3. MİNDLİN PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMLERİ VE BURKULMA ANALİZİ **19**
3.1 Giriş 19
3.2 Serbest Titreşim Formülasyonları 20
3.3 Burkulma Formülasyonları 23
4. SONLU ELEMAN YÖNTEMİ **27**
4.1 Giriş 27
4.2 Yer Değiştirme Yöntemi 28
4.3 Sonlu Eleman Karakteristiklerinin Formülasyonu 29
4.3.1 Yer değiştirme fonksiyonu 29
4.3.2 Şekil değiştirmeler 31
4.3.3 Gerilmeler 31
4.3.4 Eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri 31
4.3.5 Minimum potansiyel enerji prensibi 32
4.4 Denklem Takımlarının Kurulması Ve Çözülmesi 35
4.5 C^0 Ve C^1 Sürekliliği 36
4.6 Yakınsaklık Kriterleri 36
4.6.1 Uygunluk kriteri 36
4.6.2 Bütünlük kriteri 37
4.7 Sonlu Elemanlar Yöntemindeki Adımlar 37

5. KALIN SAYILABİLECEK PLAKLAR İÇİN İZOPARAMETRİK BİR SONLU ELEMAN MODELİ 39
5.1 Genel Bilgi 39
5.2 Dörtgen Sonlu Eleman Modelleri 40
5.2.1 4 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri 40
5.2.2 8 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri 41
5.2.3 Gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar 44
5.2.4 Yer değiştirmeler-şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar ve [B] matrisinin bulunması 46
5.2.5 Eleman rijitlik matrisi 48
5.2.6 Sayısal integrasyon 48
5.2.7 İntegrasyon adımının azaltılması 49
5.2.8 Yükleme matrisleri 50
5.2.9 İç kuvvetler 52
5.3 Üçgen Sonlu Eleman Modeli 53
5.3.1 3 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri 53
5.3.2 Ayrık kayma aralığı yöntemi 55
5.3.3 Ayrık kayma aralığı yönteminde üçgen sonlu eleman 58
6. KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARIN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMININ HAZIRLANMASI 61
6.1 Matlab Programı 61
6.2 Bilgisayar Programı Aşamaları 62
6.3 Programın Yapısı Ve Çalışma Düzeni 62
7. SAYISAL UYGULAMALAR 67
7.1 Giriş 67
7.2 Örnek 1: Düzgün Yayılı Yüklü Ankastre Mesnetli Kare Plak 68
7.3 Örnek 2: Düzgün Yayılı Yüklü Basit Mesnetli Kare Plak 77
7.4 Örnek 3: Düzgün Yayılı Yüklü İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Basit Mesnetli Kare Plak 84
7.5 Örnek 4: Düzgün Yayılı Yüklü Üç Kenarı Ankastre Bir Kenarı Serbest Kare Plak 92
7.6 Örnek 5: Ankastre Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi 99
7.7 Örnek 6: Basit Mesnetli Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi 103
7.8 Örnek 7: İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Basit Mesnetli Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi 106
7.9 Örnek 8: Üç Kenarı Ankastre Bir Kenarı Serbest Olan Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi 109
7.10 Örnek 9: Mindlin Plakların Burkulma Analizi 112
7.11 Örnek 10: Tekil Yüklü Ankastre Mesnetli Kare Plak 116
7.12 Örnek 11: Düzgün Yayılı Yüklü Ankastre Ve Basit Mesnetli Dairesel Plaklar 123
8. SONUÇLAR 131
KAYNAKLAR 133
ÖZGEÇMİŞ 137

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Gauss Nümerik İntegrasyon formülündeki bazı n değerleri için koordinatlar ve ağırlık katsayıları[58]sf.173 49
Çizelge 7.1 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 70
Çizelge 7.2 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 71
Çizelge 7.3 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 72
Çizelge 7.4 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 73
Çizelge 7.5 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi 75
Çizelge 7.6 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 77
Çizelge 7.7 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 78
Çizelge 7.8 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 79
Çizelge 7.9 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 80
Çizelge 7.10 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi 82
Çizelge 7.11 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 84
Çizelge 7.12 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 85
Çizelge 7.13 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 87
Çizelge 7.14 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 88
Çizelge 7.15 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi 90
Çizelge 7.16 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 92
Çizelge 7.17 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4) 93
Çizelge 7.18 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 94
Çizelge 7.19 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$) 95

Çizelge 7.20 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi 97
Çizelge 7.21 : h/a=0.01 için kare ankastre plakta doğal frekanslar 100
Çizelge 7.22 : h/a=0.1 için kare ankastre plakta doğal frekanslar 100
Çizelge 7.23 : Çeşitli m ve n değerleri için kare ankastre plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için) 101
Çizelge 7.24 : Çeşitli m ve n değerleri için kare ankastre plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için) 102
Çizelge 7.25 : h/a=0.01 için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar 103
Çizelge 7.26 : h/a=0.1 için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar 103
Çizelge 7.27 : Çeşitli m ve n değerleri için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için) 104
Çizelge 7.28 : Çeşitli m ve n değerleri için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için) 105
Çizelge 7.29 : h/a=0.01 için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar 106
Çizelge 7.30 : h/a=0.1 için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar 106
Çizelge 7.31 : Çeşitli m ve n değerleri için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için) 107
Çizelge 7.32 : Çeşitli m ve n değerleri için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için) 108
Çizelge 7.33 : h/a=0.01 için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar 109
Çizelge 7.34 : h/a=0.1 için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar 109
Çizelge 7.35 : Çeşitli m ve n değerleri için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için) 110
Çizelge 7.36 : Çeşitli m ve n değerleri için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için) 111
Çizelge 7.37 : Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri 112
Çizelge 7.37 (devam): Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri 113
Çizelge 7.37 (devam): Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri 114
Çizelge 7.38 : Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wEh^3/Pa^2) 118
Çizelge 7.39 : Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wEh^3/Pa^2) 119
Çizelge 7.40 : Tekil yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi (wEh^3/Pa^2) 121
Çizelge 7.41 : Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plakta plak ortası çökmesi (wD/qR^4) 125
Çizelge 7.42 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plakta plak ortası çökmesi (wD/qR^4) 127
Çizelge 7.43 : Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plakta açıklık momenti (M_x/qR^2) 129
Çizelge 7.44 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plakta açıklık momenti (M_x/qR^2) 129

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Plak eksenleri 7
Şekil 2.2: Plakta yer değiştirmeler 9
Şekil 2.3 a): 4 noktalı dörtgen elemanın yer değiştirme bileşenleri 10
Şekil 2.3 b): 8 noktalı dörtgen elemanın yer değiştirme bileşenleri 11
Şekil 2.4 : Plakta iç kuvvetler 13
Şekil 5.1 : İzoparametrik 4 noktalı dörtgen sonlu eleman 40
Şekil 5.2 : İzoparametrik 8 noktalı dörtgen sonlu eleman 41
Şekil 5.3 : Yayılı yük (sadece z doğrultusunda) 50
Şekil 5.4 : Tekil Yükler 52
Şekil 5.5 : 3 noktalı üçgen sonlu eleman 53
Şekil 5.6 : Kayma Aralığı 57
Şekil 5.7 : 3 noktalı üçgen eleman ve genel koordinatlar 59
Şekil 7.1 : 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için sonlu eleman ağları . 68
Şekil 7.2 : 3 noktalı üçgen sonlu eleman için sonlu eleman ağları 69
Şekil 7.3 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 70
Şekil 7.4 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 71
Şekil 7.5 : Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli 72
Şekil 7.6 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 73
Şekil 7.7 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 74
Şekil 7.8 : Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi 76
Şekil 7.9 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 77
Şekil 7.10 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 78
Şekil 7.11 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli 79
Şekil 7.12 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 80
Şekil 7.13 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 81
Şekil 7.14 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi 83
Şekil 7.15 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 85

Şekil 7.16 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 86
Şekil 7.17 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli 86
Şekil 7.18 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 87
Şekil 7.19 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 88
Şekil 7.20 : Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi 91
Şekil 7.21 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 92
Şekil 7.22 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4) 93
Şekil 7.23 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli 94
Şekil 7.24 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 95
Şekil 7.25 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$) 96
Şekil 7.26 : Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi 98
Şekil 7.27 : Serbest titreşim analizinde kullanılan sonlu eleman ağları 99
Şekil 7.28 : Kare ankastre plakta h/a=0.01 için titreşim modları 102
Şekil 7.29 : Basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları 105
Şekil 7.30 : İki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları 108
Şekil 7.31 : Üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları 111
Şekil 7.32 : Ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.01 için burkulma modları(1-4) .. 114
Şekil 7.32 (devam) : Ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.01 için burkulma modları(5-12) 115
Şekil 7.33 : 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için sonlu eleman ağları 116
Şekil 7.34 : 3 noktalı üçgen sonlu eleman için sonlu eleman ağları 117
Şekil 7.35 : Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wEh^3/Pa^2) 118
Şekil 7.36 : Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wEh^3/Pa^2) 119
Şekil 7.37 : Tekil yüklü ankastre kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi (wEh^3/Pa^2) 122
Şekil 7.38 : 3 noktalı üçgen sonlu eleman için 1. tip sonlu eleman ağı (111 eleman) 123
Şekil 7.39 : 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlar için 2. tip sonlu eleman ağları (63 eleman) 124
Şekil 7.40 : 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlar için 3. tip sonlu eleman ağları (33 eleman) 124
Şekil 7.41 : Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plak için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qR^4) 126
Şekil 7.42 : Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plak için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qR^4) 128

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{U , V , W}$: Plakta X, Y, Z doğrultularındaki yer değiştirmeler
$\boldsymbol{\theta_x}$: Y ekseni etrafındaki dönme
$\boldsymbol{\theta_y}$: X ekseni etrafındaki dönme
$\mathbf{w}$: Z ekseni doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni
ϕ_x , ϕ_y : x ve y doğrultusundaki ortalama kayma şekil değiştirmeleri
$\mathbf{w_x , w_y}$: İnce plaktaki dönme miktarları
$\boldsymbol{\delta}$: Yer değiştirme vektörü
$\boldsymbol{\varepsilon_x , \varepsilon_y}$: Plak orta düzlemindeki birim uzamalar
$\boldsymbol{\gamma_{xy} , \gamma_{xz} , \gamma_{yz}}$: Plak orta düzlemindeki birim kayma açıları
$\boldsymbol{\kappa}$: Eğilme şekil değiştirmesi
$\boldsymbol{\sigma_x , \sigma_y}$: Eleman yüzeyine etkiyen normal gerilmeler
$\boldsymbol{\tau_{xy} , \tau_{xz} , \tau_{yz}}$: Düzlem içi ve düzleme dik kayma gerilmeleri
$\mathbf{E}$: Elastisite modülü
$\mathbf{G}$: Kayma modülü
$\mathbf{v}$: Poisson oranı
$\mathbf{h}$: Plak kalınlığı
$\mathbf{R}$: Dairesel plak yarıçapı
$\mathbf{a}$: Plak kenar uzunluğu
$\mathbf{M_x , M_y}$: Eğilme momentleri
$\mathbf{M_{xy} , M_{yx}}$: Burulma momentleri
$\mathbf{Q_x , Q_y}$: Kesme kuvvetleri
$\mathbf{U , U_i}$: İç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{W , U_d}$: Dış kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi
$\boldsymbol{\pi}$: Toplam şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{k}$: Kayma düzeltme katsayısı
$\mathbf{M}$: Sistem yük matrisi
$\mathbf{d , \ddot{d}}$: Yer değiştirme ve ivme
$\boldsymbol{\omega}$: Doğal frekans
$\mathbf{X}$: Titreşim modu
$\mathbf{T}$: Plaktaki kinetik enerji
$\boldsymbol{\rho}$: Malzeme yoğunluğu
$\mathbf{m , n}$: x ve y yönlerindeki yarım dalga titreşimleri
$\boldsymbol{\lambda_{cr}}$: Kritik burkulma yükü
$\mathbf{a^i}$: Burkulma modu
$\mathbf{r}$: Toplam serbestlik derecesi
$\{ \}$: Vektör gösterimi
$[ ]$: Matris gösterimi
$[ ]^T$: Matris transpozesi
$[ ]^{-1}$: Matris inversi
$[\mathbf{N}]$: Eleman şekil fonksiyonu matrisi
$[\mathbf{N_p}]$: Yük şekil fonksiyonu matrisi

$[\mathbf{D}]$: Elastisite matrisi
$[\mathbf{K}]$: Rijitlik matrisi
$\mathbf{K_G}$: Geometrik rijitlik matrisi
$\{\mathbf{f}\}$: Yük vektörü
$[\mathbf{B}]$: Yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan matris
$\{\mathbf{q}\}$: Yayılı yükler
$\{\mathbf{P}\}$: Tekil yükler
e : Eleman üst indisi
b : Eğilme terimi alt indisi
s : Kayma terimi alt indisi
A : Üçgen sonlu elemanın alanı
$\mathbf{W_i}$, $\mathbf{W_j}$: Gauss ağırlık fonksiyonları
n : Her doğrultudaki Gauss integrasyon noktalarının sayısı
$\boldsymbol{\xi_i}$, $\boldsymbol{\eta_j}$: Gauss integrasyon noktaları

KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARDA KAYMA KİLİTLENMESİ PROBLEMİ

ÖZET

Plak problemleri mühendislik uygulamalarında çok sık karşılaşılan problemlerden biridir. Bu yüzden üzerinde yıllar boyu çalışmalar yapılmış ve yapılmaya devam etmektedir.

İnce plakların yanında, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin önemli olduğu kalın sayılabilecek plakların hesaplarına ilişkin çalışmalar da artmıştır. Kalın sayılabilecek plaklarda, ince plaklara göre kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden oluşan ve plak üzerinde hakim olan eğilme etkileri göz önüne alınmalıdır. Yani kalınlığın artmasıyla beraber, Kirchhoff plak teorisinde ihmal edilen kayma şekil değiştirmesi etkileri belirgin hale gelmiştir. Bu yüzden Mindlin ve Reissner tarafından kayma şekil değiştirmesi etkilerinin de hesaba katıldığı iki boyutlu plak teorileri geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkilerin göz önüne alındığı Mindlin plak teorisi kullanılarak plaklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Elde edilen bu ifade yardımıyla yer değiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparametrik üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört ve sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. Mindlin Plak Teorisinde diğer teorilerden farklı olarak Bernoulli–Navier hipotezi artık geçerli değildir ve plağın ince olma zorunluluğu yoktur. Düğüm noktası serbestlikleri düzleme dik çökme (w) ve dönmelerdir (θ_x, θ_y). Eleman rijitlik matrisini elde etmek için bu elemanların biçim fonksiyonları ve türevleri kullanılmıştır. Geliştirilen sonlu elemanların üçü de C^0 süreklidir ve uygunluk şartını sağlamamaktadır.

Söz konusu üçgen ve dörtgen sonlu eleman modelleri için mühendislik çalışmaları üzerinde yaygın bir yere sahip olan Matlab bilgisayar programlama dili kullanılarak program algoritmaları hazırlanmıştır. Böylece farklı kalınlıklara, sınır koşullarına, yüklemelere ve geometrilere sahip plaklar için hazırlanmış programlar sayesinde yer değiştirmeler, iç kuvvetler, doğal frekanslar, titreşim modları ve kritik burkulma yükleri elde edilmiştir.

Elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda denenerek kayma kilitlenmesi olayının meydana gelip gelmediği incelenmiştir. Kayma kilitlenmesinin meydana geldiği durumlarda integrasyon adımı azaltılması ve ayrık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır.

Azaltılmış integrasyon yönteminde şekil değiştirme enerjisi eğilme ve kayma terimleri olmak üzere ikiye ayrılır. İkisi için ayrı ayrı integrasyon yapılır. İntegraller Gauss nümerik integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Kayma şekil değiştirmesi azaltılmış integrasyon tekniği ile hesap edilirken eğilme şekil değiştirmesi tam integrasyonla hesaplanır. Bu sayede rijitlik matrisinin hesabında integrasyon nokta adedi azaltılarak matris daha esnek hale getirilmekte ve daha doğru sonuçlar alınmaktadır.

Ayrık kayma aralığı yönteminde [B] matrisi şekil fonksiyonlarının türevlerine bağlı olarak yazılmakta ve sadece sabitlerden oluştuğu görülmektedir. [B] matrisi yine eğilme ve kayma terimlerinden oluşmak üzere ikiye ayrılır. Bu yöntemde sadece sabitlerden oluşan eğilme ve kayma bağ matrislerine bağlı olarak eğilme ve kayma şekil değiştirmesi yeniden bulunmakta ve bu şekildeki çözümle elde edilen sonlu elemanlarda kayma kilitlenmesi problemi önlenmektedir.

Kayma kilitlenmesi olayının incelenmesi için kare plaklar, düzgün yayılı yük ve tekil yük altında sırasıyla üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört noktalı ve sekiz noktalı dörtgen sonlu elemanlar kullanılarak h/a=0.001'den h/a=0.2'ye kadar değişen kalınlıklarda çözülmüştür. Her çözüm tam integrasyon, azaltılmış integrasyon ve seçilerek azaltılmış integrasyon başlıkları altında hesaplanmıştır. Ayrıca üç noktalı üçgen sonlu elemanlarda kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesi için daha iyi sonuç veren ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. Beklenildiği gibi serbestlik derecesi daha fazla olan sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman, üç noktalı üçgen ve dört noktalı dörtgen sonlu elemanlardan daha iyi sonuç vermekte ve daha hızlı yakınsamaktadır. Ayrıca ayrık kayma aralığı yönteminin uygulandığı üç noktalı üçgen sonlu eleman sonuçlarının dört noktalı dörtgen sonlu eleman sonuçlarından daha iyi olduğu da görülmektedir. Ayrık kayma aralığı yönteminin sadece üç noktalı üçgen sonlu elemanda kullanılmasının sebebi üçgen sonlu elemana ait bağ matrislerinin sabit terimlerden oluşturulabilmesidir. Ayrıca üç noktalı üçgen ve dört noktalı dörtgen sonlu elemanlarda kayma kilitlenmesinin daha çabuk oluştuğu, sekiz noktalı dörtgen sonlu elemanda ise kayma kilitlenmesi probleminin görülme sıklığının daha az olduğu gözlenmiştir.

Beklenildiği üzere tüm elemanlarda iç kuvvetlerin yer değiştirmelere göre yakınsaması daha yavaştır. Bunun sebebi iç kuvvetlerin hesabında yer değiştirmelerin türevlerinin kullanılmasıdır.

Dairesel plaklar, ankastre mesnetli ve basit mesnetli olarak üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört noktalı ve sekiz noktalı dörtgen sonlu elemanlar için çözülmüştür. Burada üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört noktalı ve sekiz noktalı dörtgen sonlu elemanlar için üç farklı tipte sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Çözümler analitik sonuçlara yakınsamaktadır.

Kare plak için aynı zamanda dinamik ve burkulma analizi yapılmıştır. Sonuçlar sadece dört noktalı dörtgen sonlu eleman için elde edilmiştir. Analiz sonucunda farklı mesnetlenme durumları ile farklı kalınlık-açıklık oranları için kritik burkulma yükleri ve doğal frekanslar elde edilmiştir.

Sonuç olarak; bu çalışmada geliştirilen 9, 12 ve 24 serbestlik dereceli izoparametrik sonlu elemanların, gerek kalın sayılabilecek plak uygulamalarında, gerekse ince plaklarda, mühendislik analizleri bakımından yeterli yaklaşıklıkta çözümler verdiği görülmüştür.

SHEAR LOCKING PROBLEM IN MODERATELY THICK PLATES

SUMMARY

Plate problems in engineering applications are one of the most frequently encountered problems. So over the years long studies were done and continues to be done.

Besides the thin plates, the number of studies on the accounts of the moderately thick plates with shear deformations in the thickness direction has increased in recent years. In moderately thick plates, unlike the thin plates, shear deformations in the thickness direction and the prevailing bending effects on plate have to be considered. So with increasing thickness, the effects of shear deformation which are neglected in Kirchhoff plate theory have become evident. Therefore the two-dimensional plate theories in which shear deformation effects are taken into account, have been developed by Mindlin and Reissner.

The development of efficient shear deformable plate elements of the Reissner-Mindlin type has a more than fifty years old history. In this study, the strain energy expression was obtained with using the Mindlin plate theory which takes into account the effects resulting from the shear deformation in the thickness direction. Using this phrase, three noded triangular finite element, four noded quadrilateral finite element and eight noded quadrilateral finite element models have been developed. Unlike other theories, in Mindlin Plate Theory, Bernoulli–Navier hypothesis is no longer valid and there is no obligation to be thin. Nodal degrees of freedom are transverse deflection (w) and rotations (θx, θy). Triangular and quadrilateral finite elements are C^0 continuous and nonconforming.

For the mentioned finite element models program algorithms were prepared by using MATLAB programming language, which is very important in engineering. Thus different thicknesses, boundary conditions, loads and geometries for plates, displacements, internal forces, the natural frequencies, vibration modes and the critical buckling loads were obtained by using designed programs. The results obtained with discrete shear gap technique and selectively reduced integration technique and comment will be made about two techniques.

Some of the Mindlin plate elements may cause a problem, known as shear locking, when they are used to analyze thin plate structures. Locking can occur for a number of reasons and, for some element types, can even depend on the shape of an element. However, it seems that locking only happens when an element cannot interpolate a field property correctly with the nodal values and the element's shape functions. Although the term 'locking' wasn't used for this problem until mid 1970's, the problem itself was studied as far back as the 1960's. At that time the problems that arose with locking of four noded quadrilaterals and other lower order elements were combated with the development of higher order elements, such as eight noded quadrilaterals. Techniques to prevent locking for lower order elements were developed from the 70's and onwards. However, even today, when there are solutions to the problem, locking and its origins are not fully understood.

To avoid the shear locking problem, some methods have been suggested such as the reduced and selectively reduced integration techniques. The reduced integration procedure is the reduction in the order of integration in computing the stiffness matrix of the finite element. Similarly, the selective integration procedure is also a kind of reduced integration rule which is used to evaluate the stiffness matrix associated with the troublesome shear strain energy. That is to say, this has been adopted to the shear stiffness matrix only and full integration is used on the remaining terms. Therefore, the element stiffness matrix can be obtained by separating into bending terms and shear terms. In this method, the shear locking problem is alleviated by separating the shear and bending energies and by using selectively reduced integration technique on the shear term.

A concept for the construction of locking-free finite elements for bending of shear deformable plates, called Discrete Shear Gap Method, is presented. The method is based on a pure displacement formulation and utilizes only the usual displacement and rotational degrees of freedom at the nodes, without additional internal parameters, bubble modes, edge rotations or whatever. Discrete shear gap method is based on the decomposition of bending and shear deformations. The presence of shear is identified by a nodal criterion. It compares the actual nodal displacements and displacements which are related to a pure bending mode. The difference between displacements are the so called 'shear gaps'. In turn the shear strains are determined from the interpolated shear gaps using the standard element shape functions. Compared to standard displacement formulations the method results in a modification of the bending and shear related part of the B-operator matrix.

The concept could be regarded as a B-bar method, because only differential operator for the strain-displacement relation is affected. The formulation uses the standart degrees of freedom of pure displacement elements and does not introduce extra nodes or internal parameters. The only modification with respect to displacement elements is the different calculation of transverse shear strains. This, in turn, makes it most easy to implement the element into an existing code.

Three simple plate bending elements, based on Mindlin theory for analysis of both moderately thick and thin plates, are presented in this study. These elements have three nodes, four nodes and eight nodes with 9, 12 and 24 DOF, respectively. To illustrate the accuracy of these finite elements, several numerical examples of displacements and stresses for both thin and moderately thick plate bending problems with a range of finite element meshes and thickness-to plate length ratios (from h/a=0.001 to h/a=0.2). In order to test the shear locking, the results obtained from the Mindlin square plate analysis using three, four or eight-noded elements with full, reduced, and selectively reduced integration are compared with the exact classical thin plate solution for uniform loads and concentrated loads. Also discrete shear gap technique works well for shear-locking-free three noded triangular finite elements. As expected, with more degrees of freedom eight noded quadrilateral finite element gives better results than both three noded triangular finite element and four noded quadrilateral finite element and converges faster. Three noded triangular finite element with discrete shear gap technique gives better results than four noded quadrilateral finite element. Discrete shear gap technique is stable and works well for both thin and thick plates using only triangular elements. Shear locking problem occurs in three noded triangular finite element and four noded quadrilateral finite element more quickly than eight noded quadrilateral finite element.

As expected, convergence of internal forces are slower than the convergence of displacements in all elements. Because in the calculation of the internal forces, derivatives of the displacement are used.

In clamped and simple supported circular plates, three noded triangular finite element, four and eight noded quadrilateral finite elements are used for solving the problem. Three noded triangular finite element, four and eight noded quadrilateral finite elements have three different types of finite element meshes. Solutions are convergent to analytical results.

For square plates, dynamic and buckling analysis were performed at the same time. Results were obtained only for four noded quadrilateral finite element. For different thickness-to-plate length ratios and different boundary conditions, the natural frequencies and the critical buckling loads were obtained. A non-dimensional frequency parameter is often used to stand for the frequencies.

As a result; for 9, 12 and 24 degrees of freedom isoparametric finite elements developed in this study, both in moderately thick plate applications and in thin plates, engineering analysis showed that a sufficient approximation of solutions can be obtained, because the displacements, the moments, the natural frequencies and the critical buckling loads obtained with the present elements are in close agreement with the results of previous investigations.

1. GİRİŞ

1.1 Konu

Ortalama yüzeyinde bir eğilme meydana gelecek şekilde düzlemine dik doğrultuda yük taşıyan yapı elemanlarına plak denir. Plak problemleri mühendislik uygulamalarında çok sık karşılaşılan problemlerden biridir. Bu yüzden üzerinde yıllar boyu çalışmalar yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir.

Plakların davranışları h plak kalınlığı, l_x ve l_y plak boyutları olmak üzere, h/l oranına bağlıdır. İnşaat mühendisliğindeki plak problemlerinde genellikle plak kalınlığı diğer boyutlar yanında ihmal edilebilecek mertebededir. Bu özelliğe sahip plaklar ince plak olarak adlandırılır. Kirchhoff plak teorisinin kabullerinden de yararlanılarak gerçekte üç boyutlu olan ince plak problemi iki boyutlu hale indirgenir.

İnce plakların yanında, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin önemli olduğu kalın sayılabilecek plakların artması ile kalın plakların hesaplarına ilişkin çalışmalar artmıştır. Kalın sayılabilecek plaklarda, ince plaklara göre kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden oluşan ve plak üzerinde hakim olan eğilme etkileri artık ihmal edilemeyecek boyutlara ulaşmıştır. Yani kalınlığın artmasıyla beraber, Kirchhoff plak teorisinde ihmal edilen kayma şekil değiştirmesi etkileri belirgin hale gelmiştir. Bu yüzden Mindlin ve Reissner tarafından kayma şekil değiştirmesi etkilerinin de hesaba katıldığı iki boyutlu plak teorileri geliştirilmiştir.

1.2 Amaç

Kalın sayılabilecek plaklar için geliştirilen teoriler beraberlerinde hesap zorlukları oluşturmuştur. Çünkü şekli, sınır şartları ve üzerindeki yükü belli olan plak problemini çözerek w=P(x,y)/D denklemini sağlayan w=w(x,y) elastik yüzey ifadesi bulunur. Bu denklem, trigonometrik hiperbolik seriler yardımı ile yükler ve yer değiştirmeler seriye

açılarak sağlatılmaya çalışılır. Bu tarz kesin çözüm her zaman elde edilememektedir. Teoride karşılaşılan bu güçlüklerin aşılması için düzgün biçimli (dörtgen ve dairesel) kalın plakların analizi, son yıllarda kullanımı daha yaygınlaşan sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmaya başlanmıştır. Böylece yapı sistemine ait mesnet şartları, dış etkenlerin aktarılması ve sistem geometrisinin düzgün olmayışından doğan hesap zorlukları aşılabilmektedir. Bu çalışmada, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinden doğan etkilerin göz önüne alındığı Mindlin plak teorisi kullanılarak plaklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesi elde edilmiştir. Bu ifade kullanılarak üç noktalı üçgen sonlu eleman, dört noktalı ve sekiz noktalı dörtgen sonlu eleman modelleri oluşturulmuş ve çözümleme için bir sonlu eleman bilgisayar programı düzenlenmiştir.

1.3 Yöntem

Söz konusu sonlu eleman modelleri için mühendislikte büyük öneme sahip Matlab programlama dili kullanılarak program algoritmaları hazırlanmıştır. Böylece farklı kalınlıklara, sınır koşullarına, yüklemelere ve geometrilere sahip plaklar için, hazırlanmış programlar sayesinde yer değiştirmeler, iç kuvvetler, doğal frekanslar, titreşim modları ve kritik burkulma yükleri elde edilmiştir.

Elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda denenerek kayma kilitlenmesi olayının meydana gelip gelmediği incelenmiştir. Kayma kilitlenmesinin meydana geldiği durumlarda integrasyon adımı azaltılması ve ayrık kayma aralığı yöntemi kullanılmıştır.

1.4 Literatür

Literatürde çeşitli geometrilere, mesnetlenme şekillerine ve yükleme durumlarına sahip kalın sayılabilecek plaklar üzerine birçok makale, tez ve kitap bulunmaktadır. Bu çalışma sırasında yararlanılan yayınlar aşağıda özetlenmiştir.

[1-5] numaralı kaynaklar sonlu elemanlar yönteminin anlatıldığı kaynaklardır. Bu kaynaklarda teorik anlatımlarla beraber sayısal uygulamalar da vardır. [6-7] numaralı kaynaklarda yapı sistemlerinin hesabında kullanılan matris yöntemlere yer verilmiştir. [8-9] numaralı kaynaklar şekil değiştiren cisimlerin mekaniğini inceleyen kaynaklardır. [10-12] numaralı kaynaklarda plak ve kabuk teorileri anlatılmaktadır.

[13-15] numaralı kaynaklardan bilgisayar programının hazırlanması sırasında yararlanılmıştır. Bu kitaplarda Fortran programlama dili anlatılmıştır.

Aksu, genel biçimli kalın sayılabilecek kabuklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesine dayanarak sekiz düğüm noktalı 40 serbestlik dereceli izoparametrik dörtgen bir sonlu eleman geliştirmiştir [16]. Bu tez aşamasında bilgisayar programı hazırlanırken Aksu tarafından kabuklar için geliştirilen bilgisayar programı esas alınmıştır.

Özaydın, Mindlin formülasyonunu kullanarak 8 noktalı 24 serbestlik dereceli dikdörtgen sonlu eleman üzerine bir çalışma yapmış ve çeşitli mesnet şartlarına sahip dörtgen ve daire plaklara uygulamıştır [17].

Türe çalışmasında [18], minimum potansiyel enerji prensibini kullanarak kalın sayılabilecek plakların çözümü için C^0 sürekli, TÜRE12 ve TÜRE24 adını verdiği izoparametrik dörtgen eleman geliştirmiştir. Mindlin plak teorisini esas almıştır. Sayısal uygulamalara da yer verilen bu çalışmada, kullanılan elemanlarda kayma kilitlenmesi problemi oluşmuştur. Özellikle sonlu elemanlar ile kalın plak çözümleri üzerine araştırma yapan araştırmacıların incelemesi gereken bir kaynaktır. Bu çalışma Aksu ile yaptıkları yayına temel oluşturmuştur [19].

Gören, kalın plakların statik çözümü için sonlu eleman yöntemi ile üç boyutlu, sekiz ve yirmi düğüm noktalı iki farklı izoparametrik sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Kalın plak problemini üç boyutlu elastisite problemi olarak ele almıştır [20].

Reissner tarafından kalın plaklara uygulanmasından iyi sonuçlar elde edilebilen bir kesin teori ortaya konmuştur [21]. Reissner, teorisinin uygulaması olarak dikdörtgen kesitli çubukların burulma problemi ile dairesel delikli plaklarda gerilme yoğunlaşması problemini çözmüştür.

Mindlin [22], Reissner teorisindeki düşünce ile lineer elastisitenin denklemlerinden hareket ederek kalın plakların titreşimi için bir çalışma yapmıştır.

Bleounar ve Guenfoud'in çalışmasında [23] dört düğüm noktalı ve 12 serbestlik derecesine sahip dikdörtgen eleman geliştirilmiştir. Geliştirdikleri bu elemana SBRP adını vermişlerdir. Eleman serbestlikleri her düğüm noktasındaki çökme ve x ile y eksenleri etrafındaki dönmelerdir. SBRP elemanı ile yapılan çözümlerde kayma kilitlenmesi problemine rastlanılmadığı belirtilmiştir. SBRP elemanı ile yapılan çözümler dört düğüm noktalı Mindlin plak elemanı ile karşılaştırılmıştır.

Çelik, 12 serbestlik dereceli dikdörtgen sonlu elemanı Mindlin modeliyle formüle etmiş ve bunu elastik zemine oturan plaklara uygulamıştır [24].

[25] numaralı yayında yine Mindlin plak teorisi kullanılarak önerilen eleman ince plaklarda ve kalın sayılabilecek plaklarda kullanılmıştır. Sonlu eleman olarak 4 düğüm noktalı bir sonlu eleman için şekil değiştirme enerjisi ifadesi geliştirilmiş ve bunun yakınsaklığı incelenmiştir.

[26], [27] ve [28] numaralı yayınlarda, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri hesaba katılarak plaklar ve kabuklar için ifadeler elde edilmiştir. [28]'de ince ve kalın sayılabilecek plaklar için 8 noktalı hybrid sonlu eleman kullanılarak ifadeler elde edilmiş ve sayısal sonuçlar verilmiştir.

Prathap ve Viswanath'ın çalışması [29], 4 noktalı bir dikdörtgen elemanın eğilme terimlerinin 2x2 Gauss noktasıyla, kayma terimlerinin ise 1x2 ve 2x1 Gauss noktasıyla entegre edilmesi halinde 1x1 integrasyonlu modelden daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir. Elemanda kayma kilitlenmesi oluşmamaktadır ve kalın plak uygulamalarında daha iyi sonuç vermektedir.

Spilker ve Munir 12 noktalı kübik serendipity tipi şekil fonksiyonlarını kullanarak bir hybrid-gerilme elemanı geliştirmişlerdir [30]. Eleman rijitlik matrisinde rank hatası görülmemiş ve kayma kilitlenmesi oluşmamıştır. Bu elemandan elde edilen sonuçlar yine 12 noktalı ilk-deplasman temelli Mindlin plak elemanından elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Azaltılmış integrasyon adımı tekniği kullanılmıştır. Buna ek olarak; elemanın yakınsaklığı, aynı tipteki 4 ve 8 noktalı hybrid-gerilme elemanlarıyla karşılaştırılmıştır.

Bhashyam ve Gallagher'ın çalışmasında [31] kayma etkilerini de içeren toplam şekil değiştirme ve yalnız eğilme etkisiyle oluşan şekil değiştirme, eleman uç şekil değiştirmesine bağlı olarak ayrı ayrı ifade edilmişlerdir. Şekil değiştirme enerjisi; toplam yer değiştirme ve eğilme yer değiştirmesi terimlerine bağlı olarak ifade edilmiştir. Önerilen yöntem ayrık-Kirchhoff modeline ait şekil fonksiyonları kullanılarak üçgen plak sonlu elemanlara uygulanmış ve yakınsaklığı kontrol edilmiştir.

Hughes, Taylor ve Kanoknukulchai 4 düğüm noktalı, her iki doğrultuda çökme ve dönmelerin lineer değiştiği en basit elemanı almışlar ve tek integral noktası ile çok daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir [32].

Bathe ve Dvorkin bilinmeyenlerin köşe noktalarının çökme ve dönmeleri olarak seçildiği genel dörtgen plak sonlu eleman geliştirmişlerdir [33]. Bu çalışmada eğrilik ifadelerinde, Mindlin-Reissner formülasyonu kullanılırken kayma şekil değiştirmeleri köşe noktalarının çökme ve dönmelerine bağlı yaklaşık interpolasyon formülleri ile ifade edilmiştir. Bu seçimin ince plaklar hesaplanırken kayma kilitlenmesi tehlikesini ortadan kaldırdığı belirtilmektedir.

Roufaeil'in çalışması [34], 14 ve 16 serbestlik dereceli iki adet dikdörtgen plak eğilme elemanını kapsamaktadır. Elemanlar Mindlin plak teorisine göre tanımlanmış, yaklaşımı çeşitli kalınlık/açıklık oranlarıyla denenmiş ve hiçbirinde kayma kilitlenmesine rastlanılmamıştır.

Kim ve Choi, Mindlin plak teorisini esas alarak bir plak sonlu eleman geliştirmişlerdir [35]. Geliştirilen sonlu elemanın yer değiştirme fonksiyonu, uygunluk şartını sağlamayan serbestliklerin sekiz düğüm noktalı plak elemanın iki dönme bileşenine eklenmesiyle elde edilmiştir. Yaptıkları ince plak çözümlerinde elemanda kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşılmamıştır.

Crisfield çalışmasında [36], kenar köşe noktalarında üç ve kenar orta noktalarında iki serbestlik derecesine sahip toplam yirmi serbestlik dereceli bir dörtgen eleman geliştirmiştir. Elemanda, başlangıçta Serendipity tipi sekiz adet dönme serbestliği ile dokuz adet Lagrange tipi çökme serbestliği tanımlanmıştır. Daha sonra kenar ortası ve eleman ortası çökme serbestlikleri ortadan kaldırılmıştır. Geliştirilen sonlu elemanla yapılan ince plak çözümlerinde kayma kilitlenmesi oluşmadığı belirtilmiştir.

Kant, Owen ve Zienkiewicz tarafından yapılan çalışmada [37] her düğüm noktasında altı serbestlik derecesine sahip Lagrange ailesinden dokuz düğüm noktalı dörtgen eleman geliştirilmiştir. Geliştirilen C^0 sürekli eleman kullanılarak çeşitli plak problemleri, tam, azaltılmış ve seçilerek azaltılmış integrasyon teknikleri için ayrı ayrı çözülmüştür. Sayısal sonuçlar, karşılaştırmalı olarak tablolar halinde verilmiştir.

Hrabok ve Hrudey, plak eğilme probleminde kullanılan sonlu eleman modellerini bir arada toplayan bir çalışma yapmışlardır [38]. Ayrıca bu çalışmada plak sonlu elemanlardaki gelişmeye de değinilmiştir.

Çetin, Matlab programı hakkında genel bilgiler vermiştir [39]. Döngü, akış kontrol ve operatörler gibi, programlamanın temel kavramlarını açıklamıştır. Matlab hakkında bulanabilecek en detaylı ve kapsamlı kaynak ve referans olarak kabul edilmektedir.

Arifoğlu, Matlab program ile entegre edilmiş simulasyon programı Simulink'in çalışmasını detaylı olarak anlatmıştır ve bununla ilgili mühendislik alanında çeşitli örneklerin çözümünü de açıklamıştır [40].

Ferreira, Mindlin plakların statik, dinamik ve burkulma analizi için Matlab programını kullanmıştır [41]. Bu çalışmada Ferreira'nın hazırladığı program geliştirilerek kullanılmıştır. Khennane, kitabında sonlu eleman yöntemi için teorik bilgiyi vermiştir [42]. Sonlu eleman yöntemi için Matlab ve Abaqus programlarını kullanarak analizler yapmıştır.

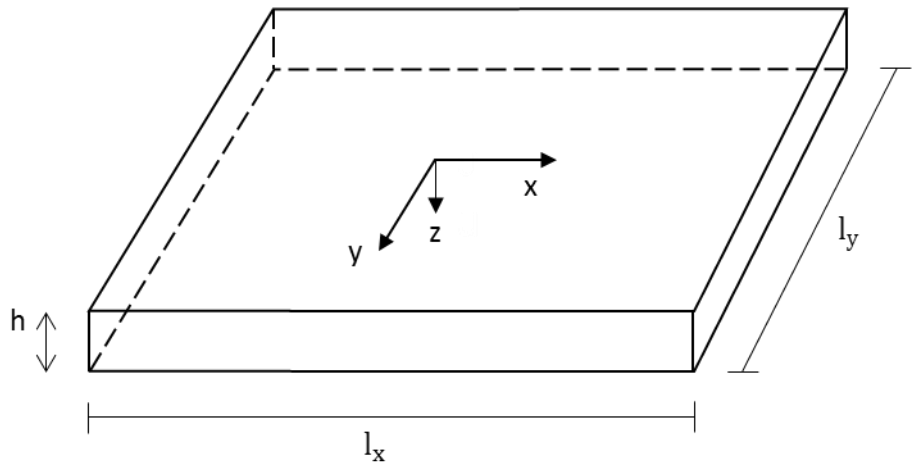
Bletzinger, Bischoff ve Ramm tarafından yapılan çalışmada ayrık kayma aralığı yönteminin teorik detayları verilmiş ve bu yöntemi kayma kilitlenmesiz üçgen kabuk elemanlarda kullanmışlardır [43].

Nguyen-Thoi, Liu, Nguyen-Xuan ve Thai-Hoang yaptıkları çalışmada kayma kilitlenmesi problemini önlemek için ayrık kayma aralığı yöntemini kullanmışlardır [44]. Bu yöntem için bağ matrisleri yeniden tanımlanmış, buna göre sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda titreşim ve burkulma analizi için çalışmalar yapmışlardır.

2. MİNDLİN PLAK TEORİSİ

Plak eğilme problemlerinin çözümünde birçok teori vardır. İnce plaklar için Kirchhoff tarafından 1850 yılında Kirchhoff plak teorisi oluşturulmuştur. 1945 yılında Reissner bu teoriyi kullanarak plak kalınlığının artması ile ortaya çıkan kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin etkisini de hesaba katmıştır. Bunun yanı sıra plak düzlemine dik doğrultudaki normal gerilmeyi de dikkate almıştır. Mindlin ise 1951 yılında kalın plaklar için Mindlin plak teorisini oluşturmuştur. Mindlin teorisi Reissner teorisinin aksine plak düzlemine dik doğrultudaki normal gerilmeyi ihmal etmiştir.

Mindlin plak teorisinde yapılan kabuller şunlardır(Şekil 2.1):



Şekil 2.1: Plak eksenleri.

1. Plak homojen, izotrop, lineer elastik davranan bir Hooke cismidir.
2. Çökmeler plak kalınlığına göre küçüktür.
3. Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında Hooke kanunu geçerlidir.
4. Plak tanımı gereği, yükler plak düzlemine diktir.

5. Orta düzleme dik olan normal gerilme (σ_z) ve şekil değiştirme (ε_z) etkisi ihmal edilir. Bu durumda z doğrultusunda plak boy değişimi ihmal edilmiş olur. Böylece şekil değiştirme esnasında plak kalınlığının değişmediği kabul edilir.
6. Plak ince olmak zorunda değildir. Kalın plakların çözümüne de olanak sağlar.
7. Kirchhoff–Love hipotezi geçerli değildir. Şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan normaller şekil değiştirmelerden sonra orta düzleme normal değildir. Yani Bernoulli Navier hipotezi geçerli değildir. Böylece düzleme dik kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilmemiş olur.

Mindlin plak teorisini diğer plak teorilerinden farklılaştıran özellik son iki maddeden kaynaklanmaktadır. İnce plak teorisinde kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ ihmal edilmesine rağmen Mindlin plak teorisinde kalınlığın artmasıyla oluşan kayma deformasyonları hesaba katılmaktadır.

Bilindiği gibi kalınlık doğrultusunda kayma gerilmesi dağılımı paraboliktir. Hesaplarda basitleştirme sağlamak için bu gerilme dağılımı üniform kabul edilmektedir. Parabolik dağılımın üniform olması için de " kayma düzeltme katsayısı (K^2) " kullanılır.

Mindlin plak teorisinde bu katsayı:

$$K^2 = \pi^2/12 \qquad \textbf{(2.1)}$$

olarak kullanılmıştır. Reissner plak teorisinde kayma düzeltme katsayısı:

$$K^2 = 5/6 \qquad \textbf{(2.2)}$$

olarak kullanılmaktadır [21].

Literatürde Mindlin ve Reissner teorileri genellikle birlikte anılır. Çünkü iki teori birbirine çok yakındır. Bu teoriler C^0 sürekliliği gerektiren elemanlarla çalışmaya uygundur. Yani sadece çökme sürekliliği şartının sağlanması yeterlidir. Eğim sürekliliği şartı aranmamaktadır. Dönmeler$(\theta_x$ ve $\theta_y)$, çökmenin türevine ihtiyaç duymadan bağımsız değişkenler olarak ele alınmaktadır. C^1 sürekliliği gerektiren Kirchhoff teorisinin aksine plak elemanlarının oluşturulması ve hesaplanması daha kolaydır.

2.1. Yer Değiştirmeler

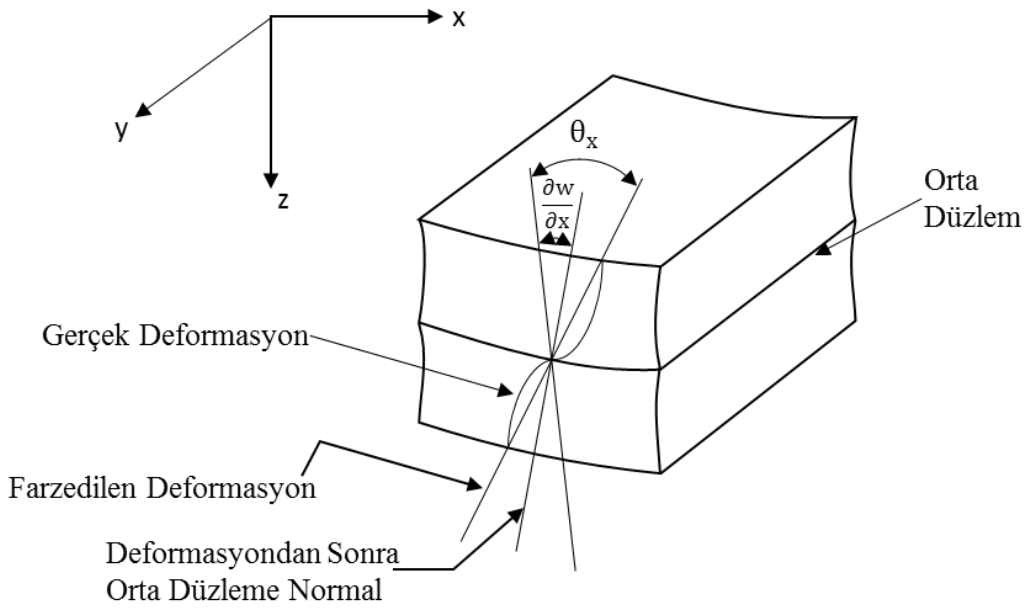
Mindlin plaklarında karakteristik bir noktada yer değiştirme bileşenleri U, V, W ile gösterilir.

$$U(x,y,z) = -z\theta_x(x,y) \quad \textbf{(2.3)}$$

$$V(x,y,z) = -z\theta_y(x,y) \quad \textbf{(2.4)}$$

$$W(x,y,z) = w(x,y) \quad \textbf{(2.5)}$$

Burada U, V ve W sırasıyla plağın X, Y ve Z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmelerini ifade etmektedir. Y ekseni etrafındaki dönmeye θ_x, X ekseni etrafındaki dönmeye θ_y denir. w ise yer değiştirme bileşenidir. Plakta yer değiştirmeler Şekil 2.2'de görülmektedir.



Şekil 2.2: Plakta yer değiştirmeler.

Ayrıca kalın sayılabilecek plaklarda toplam yer değiştirme, eğilme ve kayma yer değiştirmesinin toplamı olarak tanımlanabilir. Burada θ vektörü:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix}\theta_x\\ \theta_y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial_w}{\partial_x} + \phi_x\\ \dfrac{\partial_w}{\partial_y} + \phi_y\end{Bmatrix} \quad \textbf{(2.6)}$$

şeklinde tanımlıdır. ∂_w/∂_x ve ∂_w/∂_y terimleri ince plaktaki eğilme dönme miktarlarını; ϕ_x ve ϕ_y terimleri de x ve y doğrultusundaki ortalama kayma şekil değiştirmelerini göstermektedir.

2.2. Plak Elemanda Yer Değiştirmeler

w_x ve w_y terimleri ince plaktaki dönme miktarlarını, ϕ_x ve ϕ_y terimleri de x ve y doğrultusundaki kayma dönmelerini göstermek üzere, plağın yer değiştirme bileşenleri dörtgen elemanlar için Şekil 2.3'te gösterilmiştir. Bu durumda:

$$W = w \tag{2.7}$$

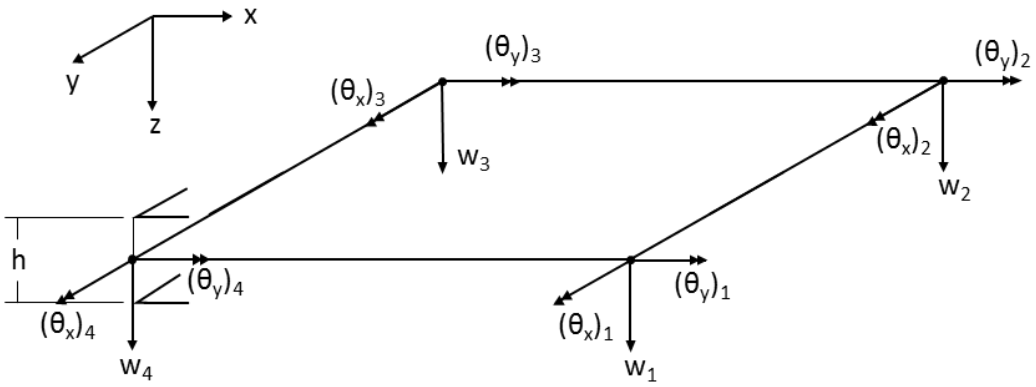
$$\theta_x = w_x + \phi_x \tag{2.8}$$

$$\theta_y = w_y + \phi_y \tag{2.9}$$

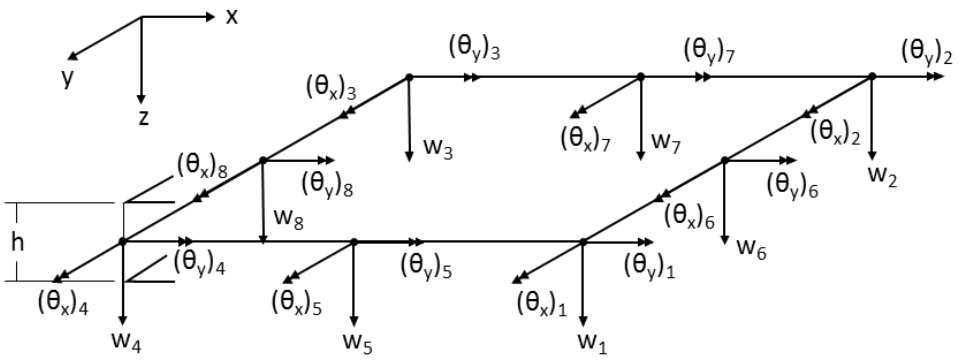
olup δ yer değiştirme vektörü ise:

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \partial_w/\partial_x + \phi_x \\ \partial_w/\partial_y + \phi_y \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

olur.



Şekil 2.3 a): 4 noktalı dörtgen elemanın yer değiştirme bileşenleri.



Şekil 2.3 b): 8 noktalı dörtgen elemanın yer değiştirme bileşenleri.

2.3. Şekil Değiştirmeler

U, V, W yer değiştirme ifadelerine göre plağın birim şekil değiştirmeleri:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -z\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{2.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = -z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \tag{2.14}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x \tag{2.15}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \tag{2.16}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada görülen terimler:

ε_x: X doğrultusundaki birim uzama

ε_y: Y doğrultusundaki birim uzama

ε_z: Z doğrultusundaki birim uzama

γ_{xy}: XY düzlemindeki birim kayma şekil değiştirmesi

γ_{xz}, γ_{yz}: Kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri

olarak tanımlanır.

2.4. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

Elastisite modülü (E), poisson oranı (ν) ve kayma modülü $[G = E/2(1+\nu)]$ kullanılarak bağıntılar elde edilebilir.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad \textbf{(2.17)}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \textbf{(2.18)}$$

$$\sigma_z = 0 \quad \textbf{(2.19)}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \textbf{(2.20)}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad \textbf{(2.21)}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \textbf{(2.22)}$$

Burada görülen terimler:

σ_x: X eksenine dik düzlemdeki normal gerilme

σ_y: Y eksenine dik düzlemdeki normal gerilme

σ_z: Z eksenine dik düzlemdeki normal gerilme

τ_{xy}: Ortalama yüzeye paralel olan kayma gerilmesi

τ_{xz}, τ_{yz}: Ortalama yüzeyin normali doğrultusundaki kayma gerilmeleri

olarak tanımlanır.

2.5. Gerilme-Yer Değiştirme Bağıntıları

Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında şekil değiştirme ifadesi yerine yer değiştirme ifadesi konulursa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) \quad \textbf{(2.23)}$$

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right) \quad \textbf{(2.24)}$$

$$\sigma_z = 0 \quad \textbf{(2.25)}$$

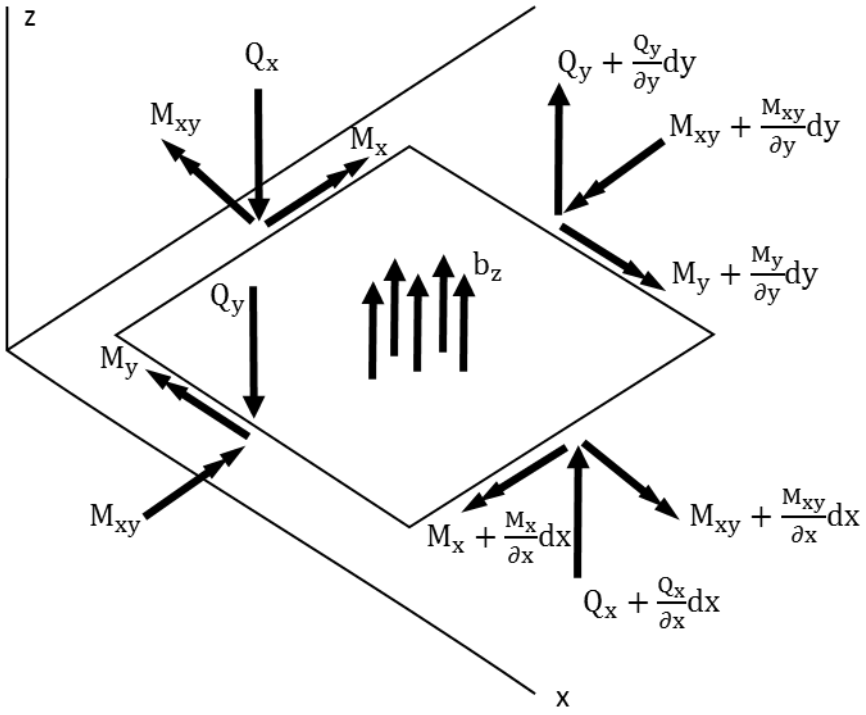
$$\tau_{xy} = -Gz\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial_x}\right) \quad \textbf{(2.26)}$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x\right) \quad \textbf{(2.27)}$$

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y\right) \quad \textbf{(2.28)}$$

2.6. İç Kuvvetler

Dış yüklerden oluşan gerilmeler aşağıdaki momentleri ve kesme kuvvetlerini oluşturur. Şekil 2.4'te plakta iç kuvvetler gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Plakta iç kuvvetler.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad \textbf{(2.29)}$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad \textbf{(2.30)}$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \tag{2.31}$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \tag{2.32}$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \tag{2.33}$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \tag{2.34}$$

Buradaki gerilmeler yerine yer değiştirme bağıntıları yazılırsa:

$$M_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) z^2 dz \tag{2.35}$$

$$M_y = \frac{-E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) z^2 dz \tag{2.36}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = G \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial_x} \right) z^2 dz \tag{2.37}$$

$$Q_x = G \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) dz \tag{2.38}$$

$$Q_y = G \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right) dz \qquad \textbf{(2.39)}$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) \qquad \textbf{(2.40)}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(2.41)}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = [-D(1-\nu)/2]\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \qquad \textbf{(2.42)}$$

$$Q_x = Gh\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right) \qquad \textbf{(2.43)}$$

$$Q_y = Gh\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right) \qquad \textbf{(2.44)}$$

oluşur. Bu bağıntılarda:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \textbf{(2.45)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \textbf{(2.46)}$$

olarak kullanılır. Burada D plak rijitliğini, G kayma modülünü, E elastisite modülünü, ν ise poisson oranını göstermektedir.

Yukarıda görülen ifadelerde:

M_x: Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen x doğrultusundaki eğilme momenti

M_y: Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen y doğrultusundaki eğilme momenti

M_{xy}: Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen x ekseni etrafındaki burulma momenti

M_{yx}: Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen y ekseni etrafındaki burulma momenti

Q_x: Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen z doğrultusundaki kesme kuvveti

Q_y: Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen z doğrultusundaki kesme kuvveti

olarak tanımlanmaktadır.

2.7. Şekil Değiştirme Enerjisi

Plak üzerindeki dış yüklerin yaptığı iş, bu yüklerden oluşan gerilmelerin plakta yaptığı işe eşittir. Şekil değiştirme enerjisini bu tanıma göre düzenlersek:

$$U_i = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) \qquad \textbf{(2.47)}$$

şeklinde olur. Bağıntıyı sadece şekil değiştirmelere bağlı yazarsak:

$$U_i = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \left[\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y\right) + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)\right] dV \qquad \textbf{(2.48)}$$

denklemi elde edilir.

Şekil değiştirme enerjisi, eğilme terimlerinden oluşan şekil değiştirme enerjisi ve kayma terimlerinden oluşan şekil değiştirme enerjisi olmak üzere iki kısımda hesaplanabilir.

$$U = U_b + U_s \qquad \textbf{(2.49)}$$

Eğilme terimlerinden oluşan şekil değiştirme enerjisi:

$$U_b = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \left[\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y\right) + \frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}^2\right] dV \qquad \textbf{(2.50)}$$

şeklindedir. Yukarıdaki integral aşağıdaki gibi bileşenlerine ayırılabilir.

$$U_b = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \qquad \textbf{(2.51)}$$

$$A_1 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \varepsilon_x^2\, dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v z^2\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dv = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dA \qquad \textbf{(2.52)}$$

$$A_2 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \varepsilon_y^2 dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v z^2\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dv = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dA \qquad \textbf{(2.53)}$$

$$A_3 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v 2\nu z^2\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)dv =$$

$$= \frac{\nu E h^3}{12(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)dA \qquad \textbf{(2.54)}$$

$$A_4 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2 dV =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \frac{1}{2}(1-\nu)z^2\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dv =$$

$$= \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)}\int_A \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA \qquad \textbf{(2.55)}$$

Kayma terimlerinden oluşan şekil değiştirme enerjisi:

$$U_s = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \left[\frac{(1-\nu)}{2}\left(\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2\right)\right]dV \qquad \textbf{(2.56)}$$

şeklindedir. Yukarıdaki integral de aşağıdaki gibi bileşenlerine ayırılabilir.

$$U_s = A_5 + A_6 \qquad \textbf{(2.57)}$$

Kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirmelerinin parabolik olduğu varsayılarak:

$$\gamma_{xz} = \frac{3}{2}\gamma_{xz}^0\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right) \qquad \textbf{(2.58)}$$

şeklinde kullanılmıştır. Buna göre:

$$A_5 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_v \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xz}^2 dV = \frac{E}{4(1+\nu)}\int_v \gamma_{xz}^2 dV =$$

$$= \frac{E}{4(1+\nu)}\int_v \frac{9}{4}\gamma_{xz}^{0^2}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2 dV = \frac{9E}{16(1+\nu)}\int_v \gamma_{xz}^{0^2}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)^2 dV =$$

$$= \frac{9E}{16(1+\nu)}\gamma_{xz}^{0^2}\int_v \left(1-\frac{8z^2}{h^2}+\frac{16z^4}{h^4}\right)dv =$$

$$= \frac{9E}{16(1+\nu)}\int_A \gamma_{xz}^{0^2}\left(\int dz - \frac{8}{h^2}\int z^2\,dz + \frac{16}{h^4}\int z^4\,dz\right)dA =$$

$$= \frac{9E}{16(1+\nu)}\int_A \gamma_{xz}^{0^2}\left(h-\frac{2h}{3}+\frac{h}{5}\right)dA = \frac{9E}{16(1+\nu)}\frac{8h}{15}\int_A \gamma_{xz}^{0^2}\,dA =$$

$$= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_A \frac{3}{5} \gamma_{xz}^{0^2} \, dA = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_A \frac{3}{5} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 dA \qquad \textbf{(2.59)}$$

şeklindedir. Burada:

$$\gamma_{yz} = \frac{3}{2} \gamma_{yz}^0 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \qquad \textbf{(2.60)}$$

şeklinde kullanılarak da aşağıdaki gibi A_6 bulunabilir:

$$A_6 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_A \frac{3}{5} \gamma_{yz}^{0^2} \, dA = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_A \frac{3}{5} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 dA \qquad \textbf{(2.61)}$$

Sonuç olarak U_i şekil değiştirme enerjisi:

$$U_i = U_b + U_s \qquad \textbf{(2.62)}$$

$$U_i = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \left[\int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial_x} \right)^2 dA + \int_A \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial_y} \right)^2 dA + 2\nu \int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial_x} \right) \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) dA + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} \int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 dA \right] +$$

$$+ \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\int_A \frac{3}{5} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 dA + \int_A \frac{3}{5} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 dA \right] \qquad \textbf{(2.63)}$$

olarak elde edilir.

3. MİNDLİN PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMLERİ VE BURKULMA ANALİZİ

3.1. Giriş

Günümüzde plakların titreşim ve burkulma analizleri için kayma şekil değiştirmelerinin, hem kalın plaklarda hem de yüksek modlardaki ince plak titreşimlerinde önemli olduğu gerçeği bilinmektedir. Klasik plak teorisinde kayma etkileri dikkate alınmamaktadır. Buna rağmen birçok teori bu durumu dikkate almıştır.

Reissner, kayma etkisini dikkate alan teoriyi geliştiren ilk kişidir. Reissner gerilme yaklaşımını kullanırken Mindlin yer değiştirme yaklaşımını kullanmıştır. Mindlin teorisinde kalınlık boyunca kayma gerilmesini sabit kabul etmiş ve kayma gerilmesi ile kayma şekil değiştirmesi arasındaki yaklaşım için kayma düzeltme katsayısını kullanmıştır.

Librescu yaklaşımında yanal deplasmanları dikkate almıştır [45]. Reissner'in formülasyonu Librescu'nun özel bir durumu olarak ortaya çıkmıştır.

Donnell'in yaklaşımı ise klasik plak deplasmanında düzeltmeler yapmaktır [46]. Kalınlık boyunca kayma kuvvetinin sabit dağıldığını kabul etmiştir. Bunun için bir sayısal faktör dikkate almıştır.

Levinson'un formülasyonunda ise yer değiştirme yaklaşımı dikkate alınmıştır [47]. Bu teoride kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç yoktur. Plağın hareket denklemi Mindlin teorisiyle aynıdır. Kayma düzeltme katsayısı da benzer şekilde 5/6 alınır.

Srinivas üç boyutlu lineer, küçük boyutlu deformasyonlardan oluşan bir teori oluşturmuştur [48]. İzotropik, homojen ve kalın plaklar için serbest titreşim çözümleri oluşturmuştur.

Liew kalın plakların titreşim problemleri için plak teorilerini araştırmıştır [49]. Benzer şekilde Vasil'ev [50], Shimpi [51] tarafından da titreşim problemi üzerine araştırmalar yapılmıştır. Shimpi izotropik plaklar için teori geliştirmiştir. Bu teori kayma deformasyonu yapabilen izotropik plaklara uygulanır. Bu teoride iki bilinmeyenli iki denklem vardır. Diğer teorilerinin aksine klasik plak teorisi ile en yakın teoridir. Serbest titreşim analizi için kullanılan bir teoridir. Düzeltilmiş plak teorisinde yer değiştirmeler iki bileşene ayrılmıştır. Bunlardan biri eğilme bileşeni diğeri ise kayma bileşenidir.

Anderson [52] ve Miklowitz [53] birinci dereceden kayma deformasyonu yapabilen kiriş teorisiyle ilgilenmişlerdir. Toplam deplasman iki bileşene ayrılmıştır. Bunlar eğilme ve kayma bileşenidir. Timoshenko kiriş teorisinin uygun dinamik çözümleri türetilmiştir.

Plantema benzer yaklaşımları sandviç plakların analizi için göstermiştir [54]. Senthilnathan ise yüksek dereceli kayma deformasyonu teorisini önermiştir [55].

Kirchhoff-Love burkulma problemi için matematiksel analiz ortaya çıkarmıştır. Bu analiz Reissner-Mindlin teorisi için geçerli değildir. Sadece sayısal deneyler ve bazı durumlarda analitik çözümler için geçerlidir [56]. Davge ve Suri üç boyutlu elastisiteye dayanan bir matematiksel spektral analiz üzerinde çalışmışlardır [57].

Reissner-Mindlin teorisi burkulma problemi için kullanılan ana teoridir. Bu teorinin plak burkulması için oluşturulan formülasyonunun dezavantajı uygun çözüm operatörünün kompakt olmamasından kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı ana spektrum sıfıra gitmemektedir. Bu durumda spektrum sıfır olmayan öz değerler içermektedir. Bu durumda ilk yapılması gereken kritik yüklere uyan öz değerleri ana spektrumdan ayırmak olmalıdır. En azından yeterince ince plaklar için yapılmalıdır.

3.2. Serbest Titreşim Formülasyonları

Reissner-Mindlin plaklarının dinamik analizi için yer değiştirme bileşenleri U, V, W şeklindedir.

$$U(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) \quad \textbf{(3.1)}$$

$$V(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) \quad \textbf{(3.2)}$$

$$W(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad \textbf{(3.3)}$$

Burada (u_0, v_0, w_0) plakta $z = 0$ noktasındaki yer değiştirmeleri göstermektedir.ϕ_x ve ϕ_y sırasıyla y ve x eksenlerindeki dönmeleri gösterir.

$$u_{,z} = \phi_x \quad , \qquad v_{,z} = \phi_y \tag{3.4}$$

Reissner-Mindlin plaklarında, eğilme ve kayma şekil değiştirmeleri vektör formunda ifade edilebilir.

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad , \qquad \{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} w_{0,y} + \phi_y \\ w_{0,x} + \phi_x \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Reissner-Mindlin plaklarının Euler-Lagrange denklemleri, virtüel yer değiştirme prensibinin dinamik versiyonu kullanılarak:

$$M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x = \frac{ph^3}{12}\phi_{x,tt} \tag{3.6}$$

$$M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y = \frac{ph^3}{12}\phi_{y,tt} \tag{3.7}$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} - \kappa w_0 + q = phw_{0,tt} \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada M_{xx}, M_{yy} ve M_{xy} eğilme momentleri ve Q_x, Q_y kesme kuvvetleridir.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D_b\{\varepsilon_b\} \quad , \qquad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = D_s\{\varepsilon_s\} \tag{3.9}$$

Euler-Lagrange denklemlerindeki κ kuvvet sabitini, q plağın alt ve üst tarafına etkiyen yayılı yükü ve h plak kalınlığını göstermektedir. Eğilme terimlerinden ve kayma terimlerinden oluşan elastisite matrisleri D_b ve D_s aşağıdaki şekilde elde edilecektir:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad , \qquad D_s = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})} \quad , \quad D_{12} = \frac{v_{12}E_2 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})} \quad , \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})}$$

$$D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12} \quad , \qquad A_{44} = G_{23}h \quad , \quad A_{55} = G_{13}h \tag{3.11}$$

Burada E_i elastisite modülü, v_{ij} poisson oranı, G_{ij} kayma modülüdür.

İzotropik plaklarda $E \equiv E_1 = E_2$ ve $\nu \equiv \nu_{12} = \nu_{21}$ şeklinde basitleştirme yapılırsa:

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad , \qquad D_s = \frac{k_s Eh}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

olur. Bu bağıntılara göre Euler-Lagrange denklemleri yeniden düzenlenirse:

$$D_b\left\{\phi_{x.xx} + \nu\phi_{y.yx} + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\phi_{x.yy} + \phi_{y.xy}\right)\right\} - D_s h^{-2}(w_{0.x} + \phi_x) = 0 \tag{3.13}$$

$$D_b\left\{\phi_{y.yy} + \nu\phi_{x.xy} + \frac{(1-\nu)}{2}\left(\phi_{x.yx} + \phi_{y.xx}\right)\right\} - D_s h^{-2}\left(w_{0.y} + \phi_y\right) = 0 \tag{3.14}$$

$$-D_s h^{-2}\left(w_{0.xx} + w_{0.yy} + \phi_{x.x} + \phi_{y.y}\right) = q \tag{3.15}$$

olur. Burada D plak rijitliği, G kayma modülü, k_s kayma düzeltme katsayısıdır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad , \qquad G = \frac{Ek_s}{2(1+\nu)} \tag{3.16}$$

Bunlara göre yer değiştirme bileşenlerini yeniden düzenlersek:

$$w(x) \approx w^{h_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(x)\psi_{i_j}(x)d_{ij}^{(1)} \tag{3.17}$$

$$\phi_x(x) \approx \phi_x^{h_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(x)\psi_{i_j}(x)d_{ij}^{(2)} \tag{3.18}$$

$$\phi_y(x) \approx \phi_y^{h_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(x)\psi_{i_j}(x)d_{ij}^{(3)} \tag{3.19}$$

elde edilir. Lagrange denklemlerini tekrar düzenlersek serbest titreşim problemi için matris formunda denklemi elde ederiz.

$$Kd + M\ddot{d} = 0 \tag{3.20}$$

Burada:

$$K = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} [M_{11}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{33}] \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \{d^{(1)}\} \\ \{d^{(2)}\} \\ \{d^{(3)}\} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. **(3.21)**

Eğer dış yük varsa:

$$M\ddot{d} + Kd = f \tag{3.22}$$

şeklinde olur. Burada f kuvvet vektörüdür. M sistem yük matrisini, d ve $\ddot{d}$ sırasıyla yer değiştirme ve ivmeyi göstermektedir. K ve M matrisleri simetriktir. Harmonik bir hareket varsayarak doğal frekanslar ve titreşim modları bulunabilir.

$$(K - \omega^2 M)X = 0 \tag{3.23}$$

Burada ω doğal frekans ve X titreşim modudur.

M kütle matrisini elde etmek için plaktaki kinetik enerji ifadesi kullanılır.

$$T^e = \frac{1}{2}\int_A \rho\left[h\dot{w}^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12}\dot{\theta}_y^2\right]dA \tag{3.24}$$

Buna göre kütle matrisi elde edilebilir:

$$M^e = \int_A \rho N^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} N dA \tag{3.25}$$

Boyutsuz doğal frekans ise:

$$\bar{\omega} = \omega_{mn} a\sqrt{\frac{\rho}{G}} \tag{3.26}$$

olarak elde edilir. Burada ρ malzeme yoğunluğu, G kayma modülü, ν poisson oranıdır. m ve n indisleri x ve y yönlerindeki yarım dalga titreşimlerini gösterir.

3.3. Burkulma Formülasyonları

Mindlin plakların şekil değiştirme enerjisi ifadesinde üçüncü ve daha yüksek dereceden terimler ihmal edilirse:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \epsilon^T Q \epsilon dV + \frac{1}{2}\int_V \gamma^T Q_c \gamma dV + \int_V (\sigma^0)^T \epsilon^L dV \tag{3.27}$$

olur. ϵ^L ise:

$$\epsilon^{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.28)}$$

şeklinde olur. Plak kalınlığı boyunca integrasyon yapılırsa U elde edilir:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \epsilon^T D_f \epsilon dA + \frac{1}{2}\int_A \gamma^T D_c \gamma dA + \frac{1}{2}\int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \hat{\sigma}^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{bmatrix} h dA +$$

$$+\frac{1}{2}\int_A \left[\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\right] \hat{\sigma}^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} dA +$$

$$+\frac{1}{2}\int_A \left[\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\right] \hat{\sigma}^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} dA \qquad \textbf{(3.29)}$$

Burada:

$$\hat{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.30)}$$

şeklindedir. Burada τ_{xy}^0, σ_x^0, σ_y^0 ön burkulma gerilmeleridir. Stabilite problemi aslında bir özdeğer problemidir.

$$[K - \lambda K_G]a^i = 0 \quad , \qquad i = 1,2,\dots,r \qquad \textbf{(3.31)}$$

K sistem rijitlik matrisi, K_G geometrik rijitlik matrisi ve λ narinlik derecesidir. Denklemdeki a^i burkulma modu ve r ise toplam serbestlik derecesi sayısıdır. Özdeğer problemi çözülerek burkulma yükleri bulunabilir. Geometrik rijitlik matrisi K_G:

$$K_G = K_{Gb} + K_{Gs} \qquad \textbf{(3.32)}$$

şeklinde iki kısımda yazılabilir. Eğilme katkısı K_{Gb}:

$$K_{Gb} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_b^T \hat{\sigma}^0 G_b h \det J d\xi d\eta \qquad \textbf{(3.33)}$$

şeklindedir. Burada verilen i düğüm noktası için:

$$G_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

şeklindedir. Kayma katkısı K_{Gs} ise:

$$K_{Gs} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{s1}^{T}\hat{\sigma}^{0}G_{s1}\det J d\xi d\eta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_{s2}^{T}\hat{\sigma}^{0}G_{s2}\frac{h^{3}}{12}\det J d\xi d\eta \tag{3.35}$$

şeklindedir.

Burada G_{s1} ve G_{s2} aşağıdaki şekildedir:

$$G_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Burkulma analizi sonucunda kritik burkulma yükleri ve burkulma modları bu formülasyonlara bağlı olarak bulunur.

4. SONLU ELEMAN YÖNTEMİ

4.1. Giriş

Sonlu eleman yöntemi gelişen bilgisayar teknolojileri ile hızla gelişen, uygulanabilirliği geniş olan bir mühendislik dalıdır. Özel bir uzmanlık alanı olmaktan çıkıp, her mühendisin kullandığı bir hesap yöntemine dönüşmüştür. İlk önceleri sadece yapı analizi problemleri için kullanılan bu yöntem daha sonra mühendisliğin birçok alanına yayılmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık bir yöntem olup, yöntemin esası sürekli bir sistemi istenen yaklaşıklık oranında sonlu sayıda alt bölgeye ayırmaktır. Bilinmeyen fonksiyonu eleman olarak adlandırılan her bir alt bölge içinde yaklaşık olarak tanımlıdır. Bu elemanlar birbirine düğüm noktası adı verilen noktalarla bağlıdır. Bu elemanlara ait fonksiyonların, sistemin içinde her noktada değil de bu düğüm noktalarında aldığı değerler toplanarak tüm bölgeye ait çözüm elde edilmiş olur. Bu yöntem sırasında kullanılacak eleman sayısının artırılması çözümü gerçeğe yakınlaştırmasına rağmen çözüm için gerekli bilinmeyen sayısını artıracaktır. Problemin türüne göre bilinmeyenler, yer değiştirmelerden ya da kuvvetlerden veya her ikisinden de seçilebilir. Burada bilinmeyenler yer değiştirmelerden seçilmiştir. Böylece yer değiştirme (deplasman) yöntemi kullanılmış olur.

Sonlu elemanlar yöntemi dışında, sonlu farklar yöntemi, ağırlıklı artıklar yöntemi, Galerkin yöntemi gibi yaklaşık yöntemlerde sayılabilir. Bu yöntemlere göre sonlu eleman yönteminde yaklaşık çözüm daha küçük elemanlarda aranır. Fonksiyonlar, tüm çözüm bölgesine ait sınır şartlarını sağlamak yerine basit geometrilere sahip elemanlar üzerinde tanımlıdır. Mesnet koşullarının, sisteme ait özelliklerin ve dış yüklerdeki değişimlerin yönteme uygulanması kolaydır. Böylece yöntem analitik çözümü karışık olan problemlerde kullanılabilir.

Sonlu eleman yönteminde çözüm için ilk önce problemin formülasyonuna karar verilmelidir. Fiziksel problemi matematik problemine dönüştürecek formülasyon, probleme bağlı olarak ampirik, tansörel, integral, diferansiyel veya deneysel olabilir. Sistem çözümünde direk veya iteratif bir yöntem kullanılabilir.

4.2. Yer Değiştirme Yöntemi

Bu çalışmada, sonlu eleman yer değiştirme yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemde sürekli ortam sonlu eleman sayısında bölgelere ayrılır. Eleman kenar uzunluklarının birbirine yakın olması istenir. Elemanların birbirlerine düğüm noktalarında bağlandığı kabul edilir. Problemin bilinmeyen parametreleri olarak düğüm noktası yer değiştirmeleri ele alınır. Daha sonra düğüm noktaları numaralandırılır. Bu numaralandırmaya kısa doğrultudan başlanır.

Sonlu elemanların her birisi için yer değiştirme durumu, düğüm noktaları yer değiştirmeleri cinsinden bir fonksiyon yardımıyla belirlenebilir. Benzer şekilde eleman içindeki şekil değiştirme durumu, yer değiştirme fonksiyonu yardımıyla düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden tanımlanır.

Eleman içindeki gerilmeler de düğüm noktası yer değiştirmelerine bağlı olarak bulunabilir. Bu ifade:

$$\{\sigma^e\} = [S]^e\{\delta\}^e + \{\sigma\}_p^e + \{\sigma\}_{\varepsilon_0}^e \qquad \textbf{(4.1)}$$

şeklindedir. Burada:

e: Elemanın ismini

$\{\delta\}^e$: Eleman düğüm noktası yer değiştirme değerlerini

$[S]^e$: Sistem gerilme matrisini

$\{\sigma\}_p^e$: Eleman yüzeyindeki yayılı yüklerden oluşan gerilmeleri

$\{\sigma\}_{\varepsilon_0}^e$: Başlangıç gerilmelerini

göstermektedir.

Eleman içinde düğüm noktalarının yer değiştirmelerinden oluşan kuvvetler bulunur. Bunlar:

$$\{F\}^e = [K]^e\{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e \qquad \textbf{(4.2)}$$

şeklindedir. Burada:

$\{F\}_p^e$: Elemana etki eden yayılı yükü dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini

$\{F\}_{\varepsilon_0}^e$: Isı değişimi gibi başlangıç şekil değiştirmelerinden oluşan etkileri dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini

$[K]^e$: Eleman rijitlik matrisini

$\{F\}^e$: Düğüm noktalarının yer değiştirmelerinden oluşan kuvvetlerini

göstermektedir.

Daha sonra eleman rijitlik matrisi hesaplanır. Düğüm noktası denge denklemleri yazılarak sistem rijitlik ve yükleme matrisleri, eleman rijitlik ve yükleme matrisleri değerlerinden bulunur. Sınır şartları kullanılarak denklem takımı çözülür. Problemin bilinmeyeni olan düğüm noktası yer değiştirmeleri bulunur. Her bir eleman için bilinmeyenlerden yararlanılarak gerilmeler hesaplanır.

4.3. Sonlu Eleman Karakteristiklerinin Formülasyonu

Bu bölümde eleman karakteristiklerinin tanımlamaları yapılıp yer değiştirme, şekil değiştirme, gerilme, eşdeğer düğüm noktası kuvveti ve minimum potansiyel enerji ifadelerine ait bilgiler verilecektir.

4.3.1. Yer değiştirme fonksiyonu

Yer değiştirme fonksiyonu, bir e elemanının içinde ve sınırlarında herhangi bir noktanın yer değiştirme bileşenlerini düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden ifade eder. Yer değiştirme fonksiyonu şekil fonksiyonu yardımıyla tanımlanabilir. Yer değiştirme fonksiyonu:

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e = \left[[N^i], [N^j], [N^k], \dots \dots\right] \begin{Bmatrix} \{\delta^i\} \\ \{\delta^j\} \\ \{\delta^k\} \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.3)}$$

şeklindedir. Burada:

$\{f\}^e$: Eleman yer değiştirme fonksiyonu

$[N]$: Biçim (şekil) fonksiyonu

$\{\delta\}^e$: Eleman düğüm noktası yer değiştirmeleridir.

{f} yer değiştirme fonksiyonunun terim sayısı elemandaki toplam düğüm noktası serbestliğine eşit olmalıdır. Böylece düğüm noktası yer değiştirme sayısının artmasına paralel olarak seçilen yer değiştirme fonksiyonu derecesi artmaktadır. Buna bağlı olarak kesme hataları azalmaktadır. Fakat bilinmeyen sayısındaki artış olumsuz durumlara yol açabilir. Bundan dolayı serbestlik derecesi denge gözetilerek seçilmelidir.

Yer değiştirmeleri göstermeyi en iyi başaran fonksiyonlar polinomlardır. Polinomlar, matematik işlemlerinde ve bilgisayar uygulamalarında sağladığı kolaylık ve avantajlardan ötürü çok geniş kullanıma sahiptir. Ayrıca polinomların dereceleri ne kadar artarsa kesin sonuca o kadar yakınsarlar.

Polinomların yapısı yerel koordinat sisteminin değişiminden bağımsız olmalıdır. Bu özelliğin sağlanabilmesi için polinom değişkenlerinin Paskal üçgeninden simetrik olarak seçilmesi lazımdır. Bu öneri iki boyutlu problemler için geçerlidir. Üç boyutlu problemlerde polinom paskal dörtlüsünden seçilmelidir. Bir boyutlu problemlerde ise polinom lineer olduğundan kurulmasında sıkıntı yaşanmayacaktır. Ayrıca fonksiyonun rijit yer değiştirme durumunu yansıtabilmesi için mutlaka bir sabit terim olmalıdır.

[N] şekil fonksiyonları, düğüm noktası koordinatları yer değiştirme fonksiyonu denkleminde yerine konduğu zaman düğüm noktası yer değiştirmelerini verecek şekilde olmalıdır. Herhangi i düğüm noktasına ait N_i şekil fonksiyonu, ilgili i düğüm noktasında 1 değerini alırken, diğer tüm şekil fonksiyonları 0 olur. Ayrıca şekil fonksiyonları ait oldukları düğüm noktası ile diğer düğüm noktaları arasında 1'den 0'a doğru azalır. Elemana ait herhangi bir noktada şekil fonksiyonlarının toplamı 1'e eşittir. Bu da rijit cisim ötelemesi koşulunun bir sonucudur. Yani:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i\,(x,y) = 1 \qquad \textbf{(4.4)}$$

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_j(x_m, y_m) = 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

koşullarının sağlanması gerekir.

Şekil fonksiyonları matrisi, düğüm noktası adedi kadar alt matristen oluşur. Bu alt matrislerin köşegenleri üzerindeki elemanları hariç diğer tüm elemanları sıfır değerindedir. Köşegen üzerindeki elemanlar ilgili düğüm noktasının şekil fonksiyonlarıdır.

4.3.2. Şekil değiştirmeler

Eleman içindeki her noktada yer değiştirmeler bilindiği takdirde herhangi bir noktadaki şekil değiştirmeler aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\{\varepsilon\}^e = [\partial][f] = [\partial][N]\{\delta\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad \textbf{(4.7)}$$

Burada $[\partial][N]$ terimi [B] ile gösterilir. [B] matrisine 'yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan matris' ya da kısaca 'bağ matrisi' denir. Boyutu probleme göre değişmektedir.

4.3.3. Gerilmeler

Hooke yasasının geçerli olduğu bir sonlu elemanda gerilme ifadesi:

$$\{\sigma\}^e = [D](\{\varepsilon\}^e - \{\varepsilon\}_0^e) + \{\sigma\}_0^e \quad \textbf{(4.8)}$$

şeklindedir. Burada:

$\{\sigma\}^e$: Elemanın şekil değiştirmeleri ile eşit sayıda ve aynı yönde gerilme bileşenlerini içeren gerilme vektörü

[D]: Homojen, izotrop malzeme halinde elastisite modülü ve poisson oranına bağlı olarak tanımlı elastisite matrisi,

$\{\varepsilon_0\}^e$: Elemanın başlangıç şekil değiştirmeleri vektörü (kristal büyümesi, büzülme, sıcaklık değişmesi gibi sebeplerden),

$\{\sigma_0\}^e$: Sistem yüklenmeden önce elemandaki mevcut başlangıç gerilmeleri vektörüdür.

4.3.4. Eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

Elemana etki eden, üzerindeki yayılı yükleri ve sınır gerilmelerini dengeleyen kuvvetlerin düğüm noktalarına yığıldığı kabul edilir. Böylece eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri oluşur. Eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri ifadesi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F\}^i \\ \{F\}^j \\ \{F\}^k \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(4.9)}$$

ile gösterilir. Burada $\{F\}^i$ alt vektörleri $\{\delta\}^i$ alt vektörleri ile aynı sayıda uç serbestliğine sahip olmalı ve onların doğrultularında bileşen ihtiva etmelidir.

4.3.5. Minimum potansiyel enerji prensibi

Elastik cisimlerin gerilme ve şekil değiştirme problemleri iki farklı yöntemle incelenebilir. Bunlardan birisi diferansiyel denklem metodudur. Diğeri ise enerji metodudur. Diferansiyel denklem metodunda sistem parçalara bölünür. Denge durumuna karşı gelen çözüm, bir diferansiyel denklem takımı çözümüne dönüşür. Enerji metodunda ise çözüm, fiziksel anlamı olan belirli bir integralin ekstrem yapılmasına dayanmaktadır. Birçok çözüm arasından asıl problemin cevabı bulunmaya çalışılır. Kesin çözümün olmadığı durumlarda kullanılan bir yaklaşım yöntemidir.

Yapı sistemlerinin hesabında enerji yöntemleri kullanılmaktadır. Bunlara örnek olarak:

1. Minimum potansiyel enerji
2. Minimum tamamlayıcı enerji
3. Virtüel yer değiştirme
4. Virtüel gerilme
5. Reissner
6. Hamilton

prensiplerini sayabiliriz.

Bu çalışmada bahsi geçen yöntemlerden minimum potansiyel enerji yöntemi kullanılmıştır. Bu prensibe göre bir integral ile ifade edilen toplam potansiyel enerji, sadece sistemin gerçek denge konumunda bir ekstremden geçer ve bu ekstrem değer bir minimumdur. Buna göre problemin çözümünü bulmak için integrali minimum yapan konum aranır. Üzerindeki yüklerle belirli bir şekil değiştirme durumu için dengede olan bir eleman konumunda, sonsuz küçük bir yer değiştirme uygulanırsa dış

yükler tarafından yapılan iş, elemanın şekil değiştirme enerjisi değişimine eşit olur. Yani {P} yayılı yükü, {R} tekil yükleri ve U'da sistemin şekil değiştirme enerjisini göstermek üzere:

$$d\{U\} = d(\{R\}^T\{\delta\}) + d\left(\int_v \{P\}^T\{f\}dV\right) \qquad \textbf{(4.10)}$$

ifadesi sistem dengede iken, $d\{\delta\}$ sonsuz küçük bir yer değiştirme uygulanırsa, yükler tarafından yapılan dış iş şekil değiştirme enerjisine eşit olur. Bu durumda:

$$d\left[U - \{R^T\}\{\delta\} - \int_v \{P\}^T\{f\}dV\right] = 0 \qquad \textbf{(4.11)}$$

olur. Parantez içindeki son iki terim dış yüklerin potansiyel enerjisi W'yü gösterir. Bu durumda toplam potansiyel enerji, iç potansiyel enerji (şekil değiştirme enerjisi) ile dış potansiyel enerjinin toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\pi = U + W \qquad \textbf{(4.12)}$$

Minimum potansiyel enerji prensibi gereğince toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonunun sıfır olması gerekir. Yani:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta_i} = 0 \qquad \textbf{(4.13)}$$

olur. Böylece gerçek denge durumuna ulaşılmış olur. Toplam potansiyel enerji, her bir elemanın π^e potansiyel enerjileri ile düğüm noktası yükleri {R}'nin potansiyel enerjisi toplamı olarak alınır. Yani:

$$\pi = \sum_{e=1}^{n} \pi^e - \{R\}^T\{\delta\} \qquad \textbf{(4.14)}$$

alınıp, bu ifade toplam potansiyel enerjinin varyasyonunda yerine konursa:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta_i} = \sum_{e=1}^{n} \frac{\partial \pi^e}{\partial \delta_i} - R_i \qquad \textbf{(4.15)}$$

elde edilir. Herhangi bir eleman içindeki şekil değiştirme enerjisi değişimi sadece şekil değiştirmelere bağlı olduğundan:

$$\frac{\partial \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}}{\partial \{\delta_i\}} = \frac{\partial \{\varepsilon\}}{\partial \{\delta_i\}}\{\sigma\} \qquad \textbf{(4.16)}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde:

$$\{\varepsilon^e\} = [B]\{\delta^e\} \quad \textbf{(4.17)}$$

$$\{\sigma^e\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \textbf{(4.18)}$$

ifadeleri yerine konursa:

$$\frac{\partial\{\delta\}^e}{\partial\{\delta_i\}}([B]^T[D][B] - [B]^T[D]\{\varepsilon_0\}) \quad \textbf{(4.19)}$$

elde edilir. Benzer şekilde elemanın birim hacminde dış yükün potansiyel enerjisi değişimi:

$$\frac{\partial(\{P\}^T\{f\})}{\partial\{\delta_i\}} = \frac{\partial\{f\}}{\partial\{\delta_i\}}\{P\} \quad \textbf{(4.20)}$$

ve {f} değerleri yerine konursa:

$$\frac{\partial\{\delta^e\}}{\partial\{\delta_i\}}[N]^T\{P\} \quad \textbf{(4.21)}$$

bulunur. Elemanın tümü için:

$$\frac{\partial(\pi^e)}{\partial\{\delta_i\}} = \frac{\partial\{\delta^e\}}{\partial\{\delta_i\}}\left[\left(\int_v [B]^T[D][B]dv\right)\{\delta\}^e - \left(\int_v [B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dv\right) - \left(\int_v [N]^T\{P\}dv\right)\right] \quad \textbf{(4.22)}$$

denklemi elde edilir. Bütün düğüm noktalarını dikkate alırsak:

$$\frac{\partial\{\pi^e\}}{\partial\{\delta^e\}} = [K]^e[\delta]^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e \quad \textbf{(4.23)}$$

elde edilir. Burada:

$$[K]^e = \int_v [B]^T[D][B]dv \quad \textbf{(4.24)}$$

$$\{F\}_p^e = -\int_v [N]^T\{P\}dV \quad \textbf{(4.25)}$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = -\int_v [B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV \quad \textbf{(4.26)}$$

ile gösterilmektedir. Burada:

$[K]^e$: Rijitlik matrisini

$\{F\}_{\varepsilon_0}^{e}$: Başlangıç şekil değiştirmelerinden oluşan düğüm noktası kuvvetlerini

$\{F\}_{p}^{e}$: Yayılı yükten oluşan düğüm noktası kuvvetlerini ifade etmektedir.

4.4. Denklem Takımlarının Kurulması Ve Çözülmesi

$[D]^{e}$, $[B]^{e}$ ve $[K]^{e}$ matrisleri bulunduktan sonra denklem takımları kurulur ve çözüme geçilir. Bütün noktalarda denge denklemleri yazılırsa, denklem takımı matris formunda:

$$[K]\{\delta\} = \{R_i\} - \{F_i\}_p - \{F_i\}_{\varepsilon_0} \quad \textbf{(4.27)}$$

şeklinde olur. Burada:

$$[K] = \sum [K_{im}]^e \quad \textbf{(4.28)}$$

$$\{R_i\} = \sum \{F_i\} \quad \textbf{(4.29)}$$

$$\{F_i\}_p = \sum \{F_i\}_p^e \quad \textbf{(4.30)}$$

$$\{F_i\}_{\varepsilon_0} = \sum \{F_i\}_{\varepsilon_0}^e \quad \textbf{(4.31)}$$

şeklindedir. Bu ifadelerden:

[K]: Sistem rijitlik matrisini

{δ}: Sistem yer değiştirmelerini gösteren problemin bilinmeyenlerini

$\{F_i\}_p$: Yayılı yüklerden oluşan düğüm noktası kuvvetini

$\{F_i\}_{\varepsilon_0}$: Başlangıç şekil değiştirmelerinden oluşan düğüm noktası kuvvetlerini

göstermektedir. Bu denklemde sisteme ait sınır şartları kullanılıp denklem çözülür ve problemin bilinmeyenleri elde edilir. Elde edilen düğüm noktası yer değiştirmeleriyle şekil değiştirmelere ve iç kuvvetlere geçilir. Herhangi bir noktada gerilme:

$$\{\sigma\}^e = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}^e + \{\sigma_0\}^e \quad \textbf{(4.32)}$$

ile bulunur. Eleman gerilme matrisi ise:

$$[S]^e = [D][B] \quad \textbf{(4.33)}$$

şeklindedir.

4.5. C^0 Ve C^1 Sürekliliği

Sonlu eleman yönteminde ele alınan problemler süreklilik durumlarına göre sınıflandırılmıştır. Süreklilik durumu C harfi ile simgelenmektedir. Üst indisteki sayılar fonksiyonun süreklilik derecesini göstermektedir. Örneğin C^0 sürekli problemlerde komşu elemanların ortak düğüm noktalarında sadece parametre fonksiyonu, C^1 sürekli problemlerde ise parametre fonksiyonunun yanında 1. türevi de süreklidir.

C^1 sürekliliğinin sağlanması zordur. Kirchhoff plaklarında C^1 sürekliliği aranmaktadır. Bu şartın sağlanmadığı durumlarla şartın sağlandığı durumlar karşılaştırıldığında en önemli fark eleman sayısıdır. C^1 sürekliliği durumunda daha az elemanla daha iyi sonuçlar elde edilebilmektedir. C^0 sürekliliğinde sadece yer değiştirme fonksiyonu sürekliliği arandığından C^1 sürekliliğine göre daha kolaydır. Mindlin plak teorisinde çözümde C^0sürekliliği aranmaktadır.

Bir elemanda hangi sürekliliğin olduğu, enerji fonksiyonelindeki en yüksek dereceli türevin derecesinin 1 eksiği ile bulunur.

4.6. Yakınsaklık Kriterleri

Bir problemin nümerik çözümü kabul edilebilir olması için analitik çözüme belirli bir hata payıyla yakınsaması lazımdır. Yakınsama için iki önemli kriter vardır; uygunluk ve bütünlük. Bu şartların sağlanması durumunda eleman boyutunun küçülmesi ile yakınsama artar.

4.6.1. Uygunluk kriteri

Yer değiştirme fonksiyonları eleman içinde ve birbirine ayrıtları boyunca komşu iki elemanın ortak düğüm noktalarında sürekli olmalıdırlar. Bu koşul uygunluk kriteri olarak adlandırılmaktadır. Bu koşul yakınsaklığın monoton ve çok kere hızlı olmasını sağlar. Uygunluk şartının sağlanması için şu koşullar geçerli olmalıdır:

1. Birbirine komşu elemanlarda aynı izotropik yer değiştirme modeli kullanılmalı,

2. Eleman ara yüzlerindeki yer değiştirmeler sadece o ara yüzün düğüm noktası yer değiştirmelerine bağlı olmalı,
3. Elemanlar arası düğüm noktası uyumu olmalıdır.

4.6.2 Bütünlük kriteri

Yer değiştirme fonksiyonlarının bütünlük kriterini sağlaması için şu koşullar sağlanmalıdır:

1. Eleman, şekil değiştirme meydana gelmeden rijit cisim hareketi yapabilmelidir.
2. Elemanın içinde sabit şekil değiştirme ve sabit iç kuvvet durumları meydana gelebilmelidir. Bu koşullar, eleman boyutları sonsuz küçüğe giderken sonuçların elastisite teorisi ile uyumlu olması için gereklidir. Bütünlük kriterinin sağlandığını söylemek için, fonksiyonun, enerji fonksiyonelindeki en yüksek dereceden türevli terimin derecesine kadar türetilebiliyor olması gerekmektedir. Eğer enerji fonksiyonelinde ikinci derece türev ifadesi varsa, fonksiyon ikinci dereceden polinom terimlerine sahip olmalıdır.

Örnek olarak C^0 sürekliliği durumlarında yer değiştirme fonksiyonun 1. türevleri sabit terimler içermelidir. C^1 sürekliliği durumlarında yer değiştirme fonksiyonun 1. ve 2. türevleri sabit terimler içermelidir.

Yapı sistemlerinde uygunluk kriterlerin sağlanması zordur. Çoğu defa sadece bütünlük kriterinin sağlanması yeterlidir. Uyumsuz elemanlar sıkça kullanılmaktadır. Bu durumlarda yakınsaklık oldukça iyidir. Ayrıca uyumlu elemanlara göre daha küçük rijitlik terimlerine sahiptirler. Bu da yer değiştirme değerlerinin kesin çözüme göre büyümesini sağlar. Ayrıca yapılan işlemler daha kolaydır.

4.7. Sonlu Elemanlar Yöntemindeki Adımlar

Sonlu elemanlar yönteminde yapılanlar aşama aşama maddelendirilebilir:

1. Problemin ve tanımlı olduğu bölgenin belirlenmesi.
2. Problemde verilen sistemin alt bölgelere ayrılması ve ağların oluşturulması.
3. Yapı sistemlerinde yer değiştirmelerin belirlenmesi.

4. Fiziksel problemin bir diferansiyel denklem takımıyla ya da bir integral denklemi ile tanımlanması.
5. Yerel bir koordinat takımının seçilmesi.
6. Şekil fonksiyonların seçimi
7. Eleman rijitlik matrisinin enerji metotlarından herhangi biri ile elde edilmesi.
8. Yerel koordinat takımında bulunan eleman rijitlik matrisi ve yük vektörünün genel koordinat takımına çevrilmesi.
9. Eleman eşitliklerinin bir araya getirilmesi. Böylece denklem sisteminin hazırlanması.
10. Sınır şartlarının uygulanarak denklem sisteminin çözümü ve bilinmeyenlerin bulunması.
11. Problemin türüne bağlı olarak bilinmeyenlere ilaveten istenen diğer çözümlerin bulunması (Gerilme ve şekil değiştirmelerin hesabı).

5. KALIN SAYILABİLECEK PLAKLAR İÇİN İZOPARAMETRİK BİR SONLU ELEMAN MODELİ

5.1. Genel Bilgi

İzoparametrik eleman ilk olarak 1966 yılında İrons B. M. tarafından ifade edilmiştir. İzoparametrik terim anlamı olarak aynı parametreler manasına gelmektedir. Bir elemanın izoparametrik olması için eleman geometrisinin ve eleman yer değiştirme alanının aynı şekil fonksiyonu ile gösterilmesi gerekir. İzoparametrik sonlu elemanlarda, eleman üzerindeki herhangi bir noktadaki bilinmeyenler ile düğüm noktalarındaki bilinmeyenler arasında doğrudan şekil fonksiyonlarına bağlı bir ilişki vardır. Bir problemin çözümünde matrisler şekil fonksiyonları ve bunların türevlerine bağlı olarak gösterilmektedir. Böylece herhangi bir elemana ait matrisler yerel koordinat sistemi kullanılarak elde edilebilir. İzoparametrik sonlu elemanlarda, eleman bilinmeyenleri ile eleman koordinatları doğal koordinat sisteminde tanımlanırlar.

$$X = N_1X_1 + N_2X_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} N_iX_i \qquad \textbf{(5.1)}$$

$$Y = N_1Y_1 + N_2Y_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} N_iY_i \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$Z = N_1Z_1 + N_2Z_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} N_iZ_i \qquad \textbf{(5.3)}$$

Burada:

X, Y, Z: Elemanın herhangi bir noktasının sırasıyla X, Y, Z doğrultusundaki koordinatları,

X_i, Y_i, Z_i: Elemanın düğüm noktalarının sırasıyla X, Y, Z doğrultusundaki koordinatları,

N_i: Şekil fonksiyonu olup yerel koordinat (ξ, η) cinsindendir.

Şekil fonksiyonların ana özelliği:

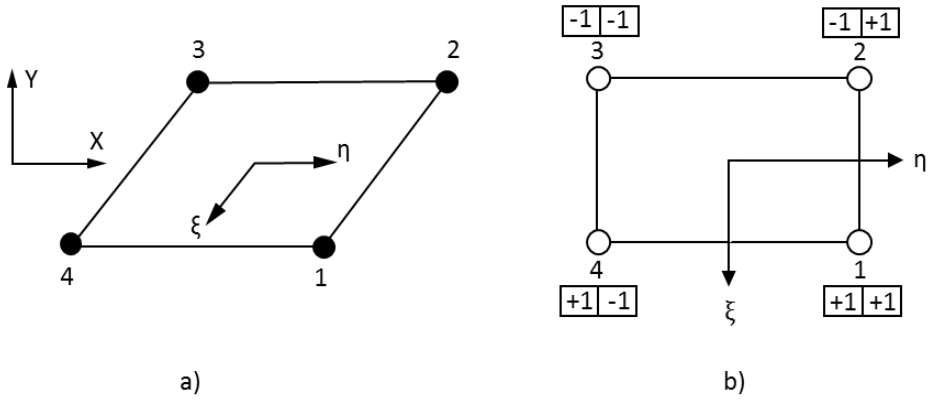
$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 \qquad \textbf{(5.4)}$$

olmasıdır. Böylece $N_i(X_i, Y_i, Z_i) = 1$ iken $N_i(X_j, Y_j, Z_j) = 0$ olmalıdır.

5.2. Dörtgen Sonlu Eleman Modelleri

Bu çalışmada, aşağıda detayları verilen 4 noktalı dörtgen ve 8 noktalı dörtgen izoparametrik elemanlar kullanılmıştır. Dörtgen elemanlar Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de gösterilmiştir.

5.2.1. 4 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri



Şekil 5.1: İzoparametrik 4 noktalı dörtgen sonlu eleman.

4 noktalı dörtgen sonlu elemanın biçim fonksiyonları:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad \textbf{(5.5)}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad \textbf{(5.6)}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad \textbf{(5.7)}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \textbf{(5.8)}$$

olarak bilinmektedir. Şekil (5.1 b)'deki kutular içindeki sayılar eleman noktalarının yerel koordinatlarıdır. Bu fonksiyonların yerel eksen takımına göre türevleri ise şu şekildedir:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \quad \textbf{(5.9)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \quad \textbf{(5.10)}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \textbf{(5.11)}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \textbf{(5.12)}$$

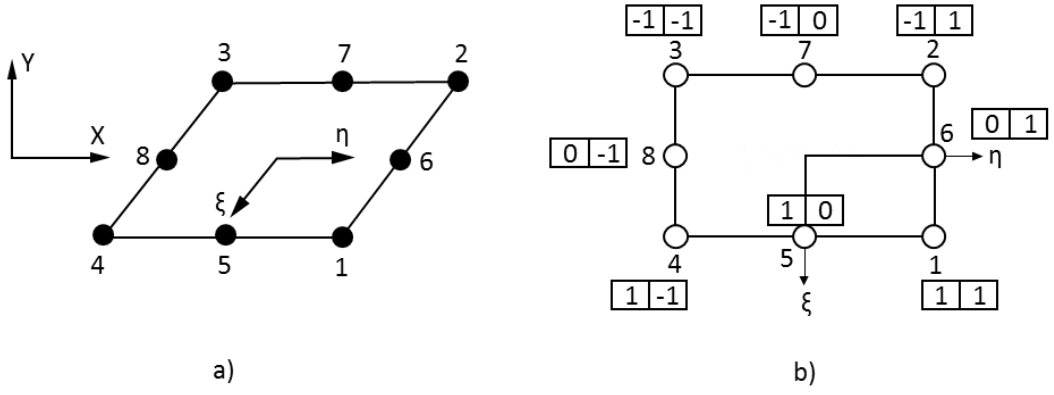
$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \textbf{(5.13)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \quad \textbf{(5.14)}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \quad \textbf{(5.15)}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \textbf{(5.16)}$$

5.2.2. 8 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri



Şekil 5.2: İzoparametrik 8 noktalı dörtgen sonlu eleman.

8 noktalı dörtgen sonlu elemanın şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad \textbf{(5.17)}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad \textbf{(5.18)}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad \textbf{(5.19)}$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad \textbf{(5.20)}$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad \textbf{(5.21)}$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad \textbf{(5.22)}$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1) \quad \textbf{(5.23)}$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad \textbf{(5.24)}$$

Biçim fonksiyonlarının türevleri ise:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = (1-\eta)\,(2\xi+\eta)/4 \quad \textbf{(5.25)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -(1-\eta)\xi \quad \textbf{(5.26)}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = (1-\eta)\,(2\xi-\eta)/4 \quad \textbf{(5.27)}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = (1-\eta^2)/2 \quad \textbf{(5.28)}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) \quad \textbf{(5.29)}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = -(1+\eta)\xi \quad \textbf{(5.30)}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) \quad \textbf{(5.31)}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\,(1-\eta^2)/2 \quad \textbf{(5.32)}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = (1-\xi)\,(\xi+2\eta)/4 \quad \textbf{(5.33)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = (1+\xi)\,(-\xi+2\eta)/4 \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -(1+\xi)\eta \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}(1-\xi^2) \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = (1-\xi)(-2\eta-\xi-2)/4 \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = -(1-\xi)\eta \tag{5.40}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonlu elemanda her bir düğüm noktasında serbestlikler w yüzeye dik doğrultuda yer değiştirme bileşeni ile θ_x, θ_y dönme bileşenleridir. Elemanın uç serbestlikleri matris formunda:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ . \\ . \\ \{\delta^n\} \end{Bmatrix} \tag{5.41}$$

olur. Burada n eleman düğüm noktası sayısını göstermektedir. $\{\delta^i\}$ vektörü, i düğüm noktasının serbestliklerinden oluşmaktadır. Ve $\{\delta^i\}$ vektörü:

$$\{\delta^i\} = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \tag{5.42}$$

şeklindedir. Her düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi olmak üzere elemanın yerdeğiştirme fonksiyonu:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N]_{(3xn)}\{\delta\}^e_{(nx1)} \tag{5.43}$$

$$\{f\} = \left[[N^1], [N^2], \dots [N^n]\right] \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ . \\ . \\ \{\delta^n\} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(5.44)}$$

şeklindedir. Burada $[N^i]$ 3x3 boyutunda bir matristir. $[N^i]$ matrisinin herhangi bir kolonunu oluşturan satırlar, o kolona ait serbestliğin birim, diğer serbestliklerin sıfır olması durumunda w, θ_x, θ_y yer değiştirmelerini veren şekil fonksiyonlarıdır.

5.2.3. Gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar

Kalın sayılabilecek plaklarda şekil değiştirme enerjisi, Bölüm (2.7)'de aşağıda verilen şekliyle elde edilmiştir.

$$U_i = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial_x}\right)^2 dA + \int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial_y}\right)^2 dA + \right.$$

$$+2\nu\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial_x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA + \frac{1-\nu}{2}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA\Bigg] +$$

$$+\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\int_A \frac{3}{5}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right)^2 dA + \int_A \frac{3}{5}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right)^2 dA\right] \quad \textbf{(5.45)}$$

Şekil değiştirme enerjisi ifadesi eğilme terimlerinden gelen katkı ve kayma terimlerinden gelen katkı olmak üzere iki farklı tipte terim içermektedir. Elastisite matrisi [D], eğilme terimlerinden gelen katkı $[D_b]$ ve kayma terimlerinden gelen katkı $[D_s]$ ile gösterilerek elde edilir:

$$[D] = [D_b] + [D_s] \quad \textbf{(5.46)}$$

$[D_b]$ matrisi:

$$U_b = \frac{1}{2}\int_v \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dV \quad \textbf{(5.47)}$$

$$U_b = \frac{1}{2}\int_v \left[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}\right]\begin{bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{bmatrix} dV = \frac{1}{2}\int_A \left[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}\right][D_b]\begin{bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} dA \quad \textbf{(5.48)}$$

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial_x}\right)^2 dA + \int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial_y}\right)^2 dA + +2\nu\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial_x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA + \right.$$

$$+\int_A \frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)^2 dA\Bigg] \quad \textbf{(5.49)}$$

ifadeleri göz önüne alınarak:

$$[D_b]=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}_{3x3} \quad \textbf{(5.50)}$$

şeklinde olur. $[D_s]$ matrisi:

$$U_s = 1/2\int_v (\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})dv \quad \textbf{(5.51)}$$

$$U_s = 1/2\int_A [\gamma_{xz}\ \gamma_{yz}]\begin{bmatrix}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{bmatrix} dV = 1/2\int_A [\gamma_{xz}\ \gamma_{yz}][D_s]\begin{bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{bmatrix} dA \quad \textbf{(5.52)}$$

$$U_s=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\int_A \frac{3}{5}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_x\right)^2 dA+\int_A \frac{3}{5}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_y\right)^2 dA\right] \quad \textbf{(5.53)}$$

göz önüne alınarak:

$$[D_s]=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1{,}2 & 0\\ 0 & 1{,}2\end{bmatrix}_{2x2} \quad \textbf{(5.54)}$$

biçiminde olur. $[D_b]$ ve $[D_s]$ ifadeleri kullanılarak [D] elastisite matrisi elde edilir. Homojen, elastik izotrop malzeme için [D] elastisite matrisi:

$$[D]=\begin{bmatrix}
\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \nu\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0\\
\nu\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1{,}2\frac{Eh}{2(1+\nu)} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2\frac{Eh}{2(1+\nu)}
\end{bmatrix}_{(5\times5)} \quad \textbf{(5.55)}$$

olur.

5.2.4. Yer değiştirmeler-şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar ve [B] matrisinin bulunması

Şekil değiştirme bağıntıları matris formunda yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i = [B]^i \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}^i \qquad \textbf{(5.56)}$$

elde edilir. Burada:

$$w = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i \qquad \textbf{(5.57)}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n} N_i \theta_{xi} \qquad \textbf{(5.58)}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^{n} N_i \theta_{yi} \qquad \textbf{(5.59)}$$

bağıntılarına göre yer değiştirmeler şekil fonksiyonlarına bağlı yazılmaktadır. [B] matrisi şekil değiştirmelerle yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı veren matristir.

Burada [B] matrisi:

$$[B] = [\partial][N_i] \qquad \textbf{(5.60)}$$

şeklindedir. [B] matrisi, eğilme terimlerinden gelen $[B]_b^i$ matrisi ve kayma terimlerinden gelen $[B]_s^i$ matrisi olmak üzere iki kısımdan oluşur. $[B]_b^i$ matrisi:

$$[B]_b^i = \begin{bmatrix} 0 & -N_{ix} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{iy} \\ 0 & -N_{iy} & -N_{ix} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad \textbf{(5.61)}$$

şeklindedir. $[B]_b^i$ 3x3 boyutundadır. Bu durumda:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{3x1} = [[B]_b^1, \quad [B]_b^2, \quad . \quad . \quad . \quad [B]_b^n]_{3xn} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ . \\ . \\ \begin{Bmatrix} w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{nx1} \tag{5.62}$$

olur. Benzer biçimde $[B]_s^i$ matrisi:

$$[B]_s^i = \begin{bmatrix} N_{ix} & -N_i & 0 \\ N_{iy} & 0 & -N_i \end{bmatrix}_{2x3} \tag{5.63}$$

şeklinde olur. Bu durumda:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_{2x1} = [[B]_s^1, \quad [B]_s^2, \quad . \quad . \quad . \quad [B]_s^n]_{2xn} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ . \\ . \\ \begin{Bmatrix} w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{nx1} \tag{5.64}$$

olur. Toplam $[B]$ matrisi hem eğilme terimlerini hem de kayma terimlerini içerecek şekilde olur.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1x} & 0 & 0 & -N_{2x} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & -N_{1y} & 0 & 0 & -N_{2y} & . & . & . \\ 0 & -N_{1y} & -N_{1x} & 0 & -N_{2y} & -N_{2x} & . & . & . \\ N_{1x} & -N_1 & 0 & N_{2x} & -N_2 & 0 & . & . & . \\ N_{1y} & 0 & -N_1 & N_{2y} & 0 & -N_2 & . & . & . \end{bmatrix}_{(5\times n)} \tag{5.65}$$

Sonuçta şekil değiştirmeler toplu halde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_{(5x1)} = [[B]^1, \quad [B]^2, \quad . \quad . \quad . \quad [B]^n]_{(5xn)} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ . \\ . \\ \begin{Bmatrix} w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{(nx1)} \quad \textbf{(5.66)}$$

olur.

5.2.5. Eleman rijitlik matrisi

Bu kısımda eğilme ve kayma terimlerinin etkileri iki ayrı kısımda incelenmiştir. b alt indisi eğilme etkilerini, s alt indisi ise kayma etkilerini sembolize etmektedir. Bu durumda $[K]^e$ eleman rijitlik matrisi:

$$[K]^e = [K]_b^e + [K]_s^e \quad \textbf{(5.67)}$$

şeklindedir. Eğilme ve kayma rijitlik matrisleri:

$$[K]_b^e = \int_A [B]_b^T [D]_b [B]_b dA \quad \textbf{(5.68)}$$

$$[K]_s^e = \int_A [B]_s^T [D]_s [B]_s \, dA \quad \textbf{(5.69)}$$

ifadeleri ile hesaplanmaktadır.

5.2.6. Sayısal integrasyon

Eleman rijitlik matrisi ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerinin elde edilmesi için bir takım integrallerin çözülmesi gerekmektedir. Bu integrallerin kesin çözümlerini bulmak uzun ve uğraştırıcıdır. Bilgisayarda programlamaya en uygun yöntem olan Gauss nümerik integrasyonu ise her boyutta elemana uygulanabilir. Gauss'un bilinen integrasyon şemaları integral ifadeye analitik olarak yaklaşırlar.

İzoparametrik elemanın rijitlik matrisi yerel eksen takımında:

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad \textbf{(5.70)}$$

şeklinde alan üzerinde bir integral alınmasına dönüşecektir. Bu ifade Gauss integrasyon yöntemiyle:

$$[K]^e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[B(\xi_i,\eta_j)\right]^T[D]\left[B(\xi_i,\eta_j)\right]W_iW_j \qquad \textbf{(5.71)}$$

şekline dönüşür. Burada Çizelge 5.1:

W_i, W_j: Gauss ağırlık fonksiyonlarını

ξ_i, η_j: Gauss integrasyon noktalarını

n: Her doğrultudaki Gauss integrasyon noktalarının sayısını göstermektedir.

Çizelge 5.1: Gauss Nümerik İntegrasyon formülündeki bazı n değerleri için koordinatlar ve ağırlık katsayıları[58]sf.173.

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_iW_j f\left(\xi_i,\eta_j\right)$$

n	i	ξ, η	W
1	1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	1	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
	2	-0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	1	0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	2	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	3	-0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
4	1	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	2	-0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	3	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	4	-0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546

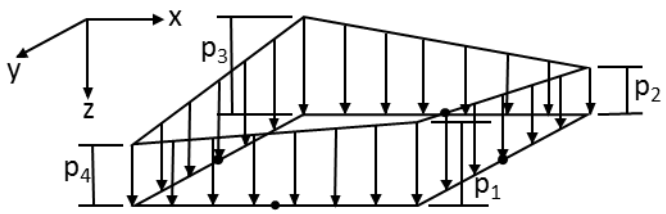
5.2.7. İntegrasyon adımının azaltılması

Kayma terimlerinden oluşan eleman rijitlik matrisinin hesabında Gauss integral nokta adetlerinin azaltılması düşüncesi ilk kez Zienkiewicz ve arkadaşları Pawsen-Clough tarafından ortaya konmuştur. Mindlin plak teorisiyle çözümlemede plaklarda kalınlık

azaldıkça, kayma kilitlenmesi problemi oluşmakta ve iyi sonuçlar oluşmamaktadır. Bunun için kayma etkilerini içeren ifadelerin hesabında integrasyon adımının azaltılması işlemi uygulanmaktadır. Böylece integrasyon adımın azaltılması ile elde edilen kayma rijitlik matrisi gerçek haline daha yakın terimler içerir. Burada ifadeler oluşturulurken eğilme ve kayma etkileri ayrı düşünülmelidir. Daha fazla integrasyon adımının azaltılması kesin çözüme daha yakın sonuç vereceği düşüncesi, kaymadan oluşan rijitlik matrislerinin hesabında fazla rijitlik oluşturduğundan sonuçların bozulmasına yol açmaktadır.

5.2.8. Yükleme matrisleri

{P} yayılı yükleri, eleman içinde birim alandaki malzeme üzerinde, yer değiştirmelerle aynı doğrultuda olan yükler ile tanımlanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemine göre eleman yüzeyinde yayılı yükün eleman üzerindeki herhangi bir noktada aldığı değer, bu yükün köşe noktalarındaki değerlerinin bilinmesi halinde, şekil fonksiyonları ile bulunabilir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3: Yayılı yük (sadece z doğrultusunda).

Yani:

$$\{P\} = \left[N_p\right]\{P\}^e \qquad \textbf{(5.72)}$$

ifadesi geçerlidir. Burada:

$\left[N_p\right]$: yük için seçilmiş şekil fonksiyonunu

$\{P\}^e$: yüklerin düğüm noktalarındaki değerlerini

{P}: yer değiştirme bileşenlerine eşit sayıda ve onların doğrultusundaki yük fonksiyonlarından oluşan vektörü göstermektedir. {P}'nin U, V, W doğrultularındaki yük bileşenleri ise P_u, P_v, P_w fonksiyonlarıdır. Bunlar:

$$P_u = \sum_{i=1}^{4} P_u^i N_{pi} \qquad \textbf{(5.73)}$$

$$P_v = \sum_{i=1}^{4} P_v^i N_{pi} \tag{5.74}$$

$$P_w = \sum_{i=1}^{4} P_w^i N_{pi} \tag{5.75}$$

olmaktadır. Burada P_u^i, P_v^i, P_w^i dış yüklerin i düğüm noktasında yer değiştirme bileşenleri doğrultusundaki değerleridir.

$$\{P^i\}^T = \{P_u^i \; P_v^i \; P_w^i\} \tag{5.76}$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} \{P^1\} \\ \{P^2\} \\ \{P^3\} \\ \{P^4\} \end{Bmatrix} \tag{5.77}$$

olmak üzere:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{p1} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & N_{p1} & 0 & . & . & N_{p4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{p1} & . & . & 0 & N_{p4} \end{bmatrix} \{P\}^e \tag{5.78}$$

olur. $[N_p]$ şekil fonksiyonları:

$$N_{pi}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{5.79}$$

şeklindedir.

Potansiyel enerjinin minimum olma koşulundan eleman üzerinde yayılı {P} yüklerine eşdeğer ve yer değiştirmeler doğrultusunda bileşen oluşturan düğüm noktası yükleri ile $\{F\}_p^e$ elde edilir. Böylece:

$$\{F\}_p^e = -\int_A [N]^T \{P\} dA \tag{5.80}$$

olur. Bu bağıntı düzenlenirse:

$$\{F\}_p^e = -\int_A [N]^T [N_p] \{P\}^e dA \tag{5.81}$$

elde edilir.

Burada w yer değiştirme doğrultusunda eşdeğer düğüm noktası kuvveti:

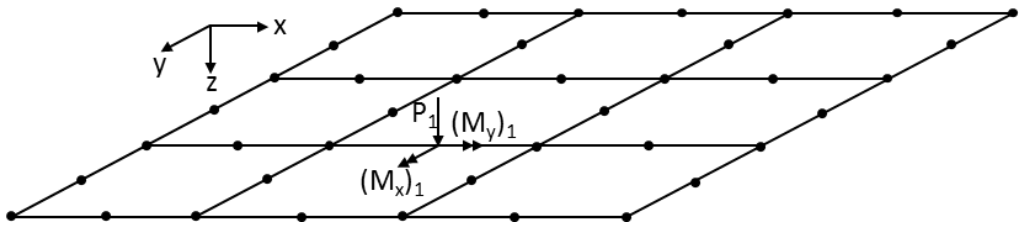
$$\{F\}_{pw}^{e} = -\int_{A} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ . \\ . \\ N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{p1} & N_{p2} & N_{p3} & N_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_w^1 \\ P_w^2 \\ P_w^3 \\ P_w^4 \end{Bmatrix} dA \qquad \textbf{(5.82)}$$

şeklinde olur. Bu ifade düzenlenirse:

$$\{F\}_{pw}^{e} = \begin{bmatrix} F_{pw}^1 \\ F_{pw}^2 \\ . \\ . \\ F_{pw}^n \end{bmatrix} = -\int_{A} \begin{bmatrix} N_1P_1 & N_1P_2 & N_1P_3 & N_1P_4 \\ N_2P_1 & N_2P_2 & N_2P_3 & N_2P_4 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ N_nP_1 & N_nP_2 & N_nP_3 & N_nP_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_w^1 \\ P_w^2 \\ P_w^3 \\ P_w^4 \end{Bmatrix} dA \qquad \textbf{(5.83)}$$

biçiminde olur. Eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerinin diğer bileşenleri benzer biçimde bulunur. İntegrasyon işleminde yapılanlar rijitlik matrisi ile benzerdir.

Tekil yükler ise eleman içinde herhangi bir noktada bulunabilir. Bu çalışmada tekil yükler eleman bazında değil sistem bazında ele alınacaktır (Şekil 5.4). Düğüm noktası yükleri direk olarak sistem yük maddesine eklenecektir.



Şekil 5.4: Tekil yükler.

5.2.9. İç kuvvetler

Denklem sistemi çözülüp düğüm noktası yer değiştirmeleri bulunduktan sonra i düğüm noktasına ait gerilme vektörü:

$$\{\sigma^i\}^T = \{\sigma_x^i \; \sigma_y^i \; \tau_{xy}^i \; \tau_{xz}^i \; \tau_{yz}^i\} \qquad \textbf{(5.84)}$$

şeklindedir. İç kuvvetleri matris formunda gösterirsek, eğilme terimlerini içeren [M] matrisi:

$$M_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_b[B]_b \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(5.85)}$$

ve kesme kuvvetlerini içeren [Q] matrisi:

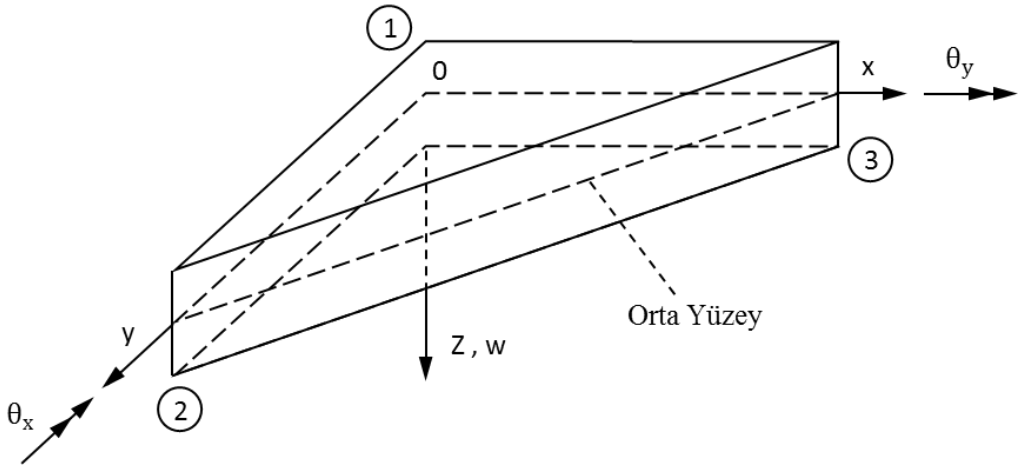
$$Q_i = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = [D]_s [B]_s \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(5.86)}$$

olur.

5.3. Üçgen Sonlu Eleman Modeli

Bu çalışmada, ayrıca 3 noktalı üçgen sonlu eleman da kullanılmıştır. 3 noktalı üçgen sonlu eleman Şekil 5.5'de gösterilmiştir.

5.3.1. 3 noktalı sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve yerel türevleri



Şekil 5.5: 3 noktalı üçgen sonlu eleman.

3 noktalı üçgen sonlu elemanın biçim fonksiyonları ve türevleri yerel koordinatlarda:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \;, \qquad N_{1,\xi} = -1 \;, \qquad N_{1,\eta} = -1 \;, \qquad (\,)_{,\xi} = \frac{\partial(\,)}{\partial \xi}$$

$$N_2 = \xi \;, \qquad N_{2,\xi} = 1 \;, \qquad N_{2,\eta} = 0$$

$$N_3 = \eta \;, \qquad N_{3,\xi} = 0 \;, \qquad N_{3,\eta} = 1 \;, \qquad (\,)_{,\eta} = \frac{\partial(\,)}{\partial \eta} \qquad \textbf{(5.87)}$$

şeklindedir. Bilindiği gibi, Mindlin plak teorisinde [B] matrisi:

$$[B] = [\partial][N_i] \qquad \textbf{(5.88)}$$

şeklindedir. [B] matrisi, eğilme terimlerinden gelen $[B]_b^i$ matrisi ve kayma terimlerinden gelen $[B]_s^i$ matrisi olmak üzere iki kısımdan oluşur. $[B]_b^i$ matrisi:

$$[B]_b^i = \begin{bmatrix} 0 & -N_{ix} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{iy} \\ 0 & -N_{iy} & -N_{ix} \end{bmatrix}_{3x3} \quad \textbf{(5.89)}$$

şeklindedir. $[B]_b^i$ 3x3 boyutundadır. Bu durumda, üçgen sonlu eleman için şekil değiştirmeler:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{3x1} = [[B]_b^1, \quad [B]_b^2, \quad [B]_b^3]_{3x3} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{3x1} \quad \textbf{(5.90)}$$

olur. Benzer biçimde $[B]_s^i$ matrisi:

$$[B]_s^i = \begin{bmatrix} N_{ix} & -N_i & 0 \\ N_{iy} & 0 & -N_i \end{bmatrix}_{2x3} \quad \textbf{(5.91)}$$

şeklinde olup, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_{2x1} = [[B]_s^1, \quad [B]_s^2, \quad [B]_s^3]_{2x3} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{3x1} \quad \textbf{(5.92)}$$

olur. Toplam [B] matrisi hem eğilme terimlerini hem de kayma terimlerini içerecek biçimde aşağıdaki gibi olacaktır.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -N_{1x} & 0 & 0 & -N_{2x} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & -N_{1y} & 0 & 0 & -N_{2y} & . & . & . \\ 0 & -N_{1y} & -N_{1x} & 0 & -N_{2y} & -N_{2x} & . & . & . \\ N_{1x} & -N_1 & 0 & N_{2x} & -N_2 & 0 & . & . & . \\ N_{1y} & 0 & -N_1 & N_{2y} & 0 & -N_2 & . & . & . \end{bmatrix}_{(5\times n)} \quad \textbf{(5.93)}$$

Sonuçta şekil değiştirmeler toplu halde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_{(5x1)} = [[B]^1, \quad [B]^2, \quad [B]^3]_{(5x3)} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{(3x1)} \tag{5.94}$$

olur.

5.3.2. Ayrık kayma aralığı yöntemi

Reissner-Mindlin plak elemanların statik analizinde sonlu eleman yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem ince plaklara uygulandığında kayma kilitlenmesi problemine yol açmaktadır. Bu çalışmanın ilk aşamasında kayma kilitlenmesi probleminin çözümü için azaltılmış integrasyon tekniği kullanılmıştır. Bunun yanında bu bölümde yeni bir yaklaşım olan ayrık kayma aralığı yöntemi de uygulanacaktır.

Azaltılmış integrasyon yönteminde şekil değiştirme enerjisi eğilme ve kayma terimleri olmak üzere ikiye ayrılır. İkisi için ayrı ayrı integrasyon yapılır. Kayma şekil değiştirmesinden kaynaklanan terimler azaltılmış integrasyon tekniği ile hesap edilirken eğilme şekil değiştirmesinden kaynaklanan terimler tam integrasyonla hesaplanır.

Farzedilen kayma şekil değiştirmesi yöntemi kayma kilitlenmesi problemini önlemek için kullanılan bir yöntemdir [59]. Bu yöntemde seçilen bir takım örnekleme noktası üzerinden elde edilen kayma şekil değiştirmelerin elemanın tümüne şekil fonksiyonu yardımıyla interpolasyonu yapılır. Ayrık kayma aralığı yöntemi, farzedilen kayma şekil değiştirmesi yönteminin geliştirilmiş bir halidir. Ayrık kayma aralığı yöntemi belli bir takım örnekleme noktası seçmeye ihtiyaç duymadan her düğüm noktasında uygulanabilir. Düğüm noktalarında ayrık kayma aralıkları hesaplanır ve elemanın tümüne interpolasyonu yapılır. Böylece büyük kayma şekil değiştirmeleri oluşmadan kayma şekil değiştirmeleri yeniden hesaplanmış olur. Ayrıca bu yöntemi uygulamak için fazladan düğüm noktasına ve serbestlik derecesine gerek yoktur. Üçgen ve dörtgen

elemanlara doğrudan uygulanabilir. Fakat üçgen elemanlar için daha doğru sonuçlar verir. Bu çalışmada ayrık kayma aralığı yöntemi üç noktalı üçgen eleman için kullanılmıştır.

Ayrık kayma aralığı yöntemini açıklamak için Timoshenko kiriş teorisi örneğinden yararlanabiliriz. Kirişte oluşan deformasyonu kiriş merkezinin deplasmanı $\nu(x)$ ve $\beta(x)$ dönmesi oluşturur. Bu durumda kirişin herhangi bir x uzaklığındaki kayma deformasyonu:

$$\gamma(x) = \nu'(x) + \beta(x) \tag{5.95}$$

olur. Burada $\nu'(x)$ deplasmanın türevini içerir. Sadece eğilme deformasyonunun olduğu Bernoulli durumunda kayma deformasyonu kaybolur:

$$0 \equiv \nu'(x) + \beta(x) \tag{5.96}$$

Kirişin toplam deplasmanı eğilme ve kayma deformasyonu olmak üzere iki kısıma ayrılabilir. 5.95 denkleminin integrasyonu ile sadece kaymaya bağlı kısım:

$$\Delta\nu_\gamma(\hat{x}) = \int_{x_0}^{\hat{x}} \gamma dx = \nu \Big|_{x_0}^{\hat{x}} + \int_{x_0}^{\hat{x}} \beta dx = \underbrace{\nu(\hat{x}) - \nu(x_o)}_{\Delta\nu} + \Delta\nu_b \tag{5.97}$$

olarak elde edilir. Bu denklem x_0 ve $\hat{x}$ arasındaki kaymaya bağlı yer değiştirme artışını gösterir. $\Delta\nu_\gamma$ kayma aralığı olarak tanımlanır. Kayma aralığı, toplam deplasman artışı ile sadece eğilmeye bağlı deplasman artışı arasındaki farka dayanır. i noktasında ayrık kayma aralığı, ayrıklaştırılmış kayma şekil değiştirmelerinin integrasyonu ile tanımlanır:

$$\Delta\nu_\gamma^i(x_i) = \nu_h \Big|_{x_0}^{x_i} + \int_{x_0}^{x_i} \beta_h dx = \int_{x_0}^{x_i} \gamma_h dx \tag{5.98}$$

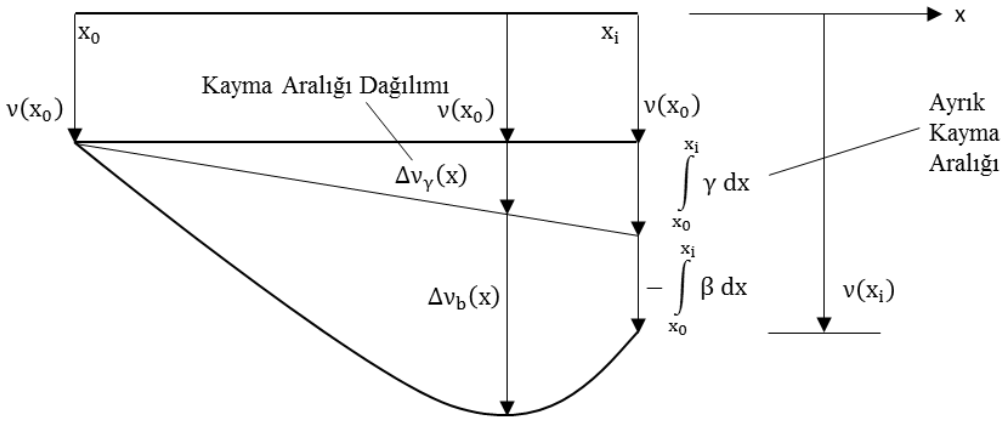
Burada x_i, i noktasının koordinatıdır. Sadece eğilme durumunda ayrık kayma aralıkları oluşmaz. Eğer yer değiştirme ve dönmeler ayrılırsa ayrıklaştırılmış kayma deformasyonu:

$$\gamma_h \neq \nu_h' + \beta_h \tag{5.99}$$

olduğundan hesaplanamaz. Bu da özellikle sadece eğilme durumunun olduğu Bernoulli durumunda açıktır:

$$0 \neq \nu_h' + \beta_h \tag{5.100}$$

Bu durumda sadece eğilme durumunun bulunduğu durumlarda dahi istenmeyen kaymaların oluşacağı yani kayma kilitlenmesi probleminin oluşacağı aşikardır. Bunun için kayma deformasyonunun yeniden formülize edilmesi gerekir. Kullanılan ana fikir, kayma deformasyonunun düğüm noktası deplasmanlarına eşit olarak yayılmasıdır. Böylece her sonlu eleman noktasında ayrık kayma aralıkları Δv_γ^i hesaplanır (Şekil 5.6).



Şekil 5.6: Kayma aralığı.

Ayrıklaştırılmış kayma aralığı düğüm noktası kayma aralıklarının interpolasyonu ile hesaplanır:

$$\Delta v_\gamma = \sum_{i=1}^{N} N^i \Delta v_\gamma^i \qquad \textbf{(5.101)}$$

Burada N eleman düğüm noktası sayısı, N^i ise şekil fonksiyonlarıdır. Kayma deformasyonu ise türev vasıtasıyla bulunur:

$$\gamma_h = \sum_{i=1}^{N} \frac{dN^i}{dx} \Delta v_\gamma^i \qquad \textbf{(5.102)}$$

Böylece kayma deformasyonu, eğilme deformasyonundan ayrılır. Bir bakıma prosedür kayma ve eğilme modlarının ayrışmasıdır. Kiriş için bulunan bu bağıntılar plaklar içinde geçerlidir. Bunun için kayma aralığı i düğüm noktasında x_i koordinatına bağlı olarak hesap edilirse $x_1 = 0\,, x_2 = \ell$:

$$\int_0^{x_i} \gamma_h(x)dx = v_h \Big|_0^{x_i} + \int_0^{x_i} \beta_h(x)dx = \Delta v_\gamma^i \qquad \textbf{(5.103)}$$

1. düğüm noktasında integrasyon sabiti sıfır kabul edilir. Böylece:

$$\Delta\gamma_{\gamma}^{1} = 0 \tag{5.104}$$

$$\Delta\nu_{\gamma}^{2} = \nu^{2} - \nu^{1} + \int_{0}^{\ell} \beta_{h} dx \tag{5.105}$$

olur. Dönmeler ise:

$$\beta_{h}(x) = \sum_{i=1}^{2} N^{i}\beta^{i} = \frac{1}{\ell}(\ell - x)\beta^{1} + \frac{1}{\ell}x\beta^{2} \tag{5.106}$$

ile elde edilir. Buna göre:

$$\Delta\nu_{\gamma}^{2} = \nu^{2} - \nu^{1} + \int_{0}^{\ell} N^{1} dx\beta^{1} + \int_{0}^{\ell} N^{2} dx\beta^{2} = \nu^{2} - \nu^{1} + \frac{\ell}{2}(\beta^{1} + \beta^{2}) \tag{5.107}$$

bağıntısı geçerlidir. Kayma aralığının elemanın tümüne şekil fonksiyonları yardımıyla interpolasyonu yapılırsa:

$$\Delta\nu_{\gamma}(x) = \sum_{i=1}^{2} N^{i}\Delta\nu_{\gamma}^{i} = \frac{1}{\ell}x\left[\nu^{2} - \nu^{1} + \frac{\ell}{2}(\beta^{1} + \beta^{2})\right] \tag{5.108}$$

bulunur. Sonuçta doğru kayma şekil değiştirmesi, $\Delta\nu_{\gamma}$'nin x'e bağlı türevi ile elde edilir:

$$\gamma(x) = \frac{d\Delta\nu_{\gamma}(x)}{dx} = \frac{1}{\ell}(\nu^{2} - \nu^{1}) + \frac{1}{2}(\beta^{1} + \beta^{2}) \tag{5.109}$$

Böyle elde edilen kayma şekil değiştirmeleri ile kayma kilitlenmesiz elemanlar elde edilir.

5.3.3. Ayrık kayma aralığı yönteminde üçgen sonlu eleman

Bu bölümde ayrık kayma aralığı yöntemini ve bu yöntemde kullanılan bir üçgen elemanı tanımlayacağız. Ayrık kayma aralığı yöntemi hem kalın hem de ince plaklarda üçgen elemanlar kullanıldığında oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Mindlin plakların üçgen sonlu elemanlar ile çözümünde yer değiştirmeleri:

$$f^{i} = \sum_{i=1}^{3} \begin{bmatrix} N_{i}(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_{i}(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_{i}(x) \end{bmatrix} \delta^{i} \tag{5.110}$$

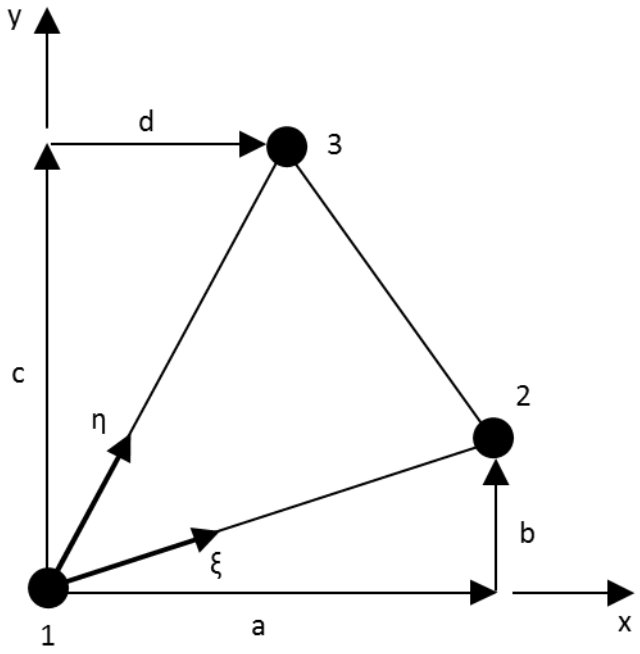
şeklindedir. Burada:

$N_i(x)$: şekil fonksiyonunu

$\delta^i = \left[w_i \theta_{xi} \theta_{yi}\right]^T$: düğüm noktası serbestliklerini göstermektedir.

Bu yöntemde [B] matrisi şekil fonksiyonlarının türevlerine bağlı olarak yazılmakta ve sadece sabitlerden oluştuğu görülmektedir. Bu durumda [B] matrisi yine eğilme ve kayma terimlerinden oluşmak üzere ikiye ayrılır.

Üç noktalı üçgen elemanın koordinatları şekilde gösterildiği gibidir (Şekil 5.7):



Şekil 5.7: 3 noktalı üçgen eleman ve genel koordinatlar.

Şekil 5.7'de $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = y_3 - y_1$ ve $d = x_3 - x_1$ şeklindedir.

Bu tez kapsamında, ayrık kayma aralığı yönteminin uygulanması için üç noktalı sonlu eleman modellerinde tanımlanan bağ matrisleri kullanılmıştır. Ayrık kayma aralığı yöntemi için tanımlanan bağ matrisleri $[B]_b$ ve $[B]_s$ Nguyen-Xuan ve diğ. (2012) yayınından alınmıştır.

Bunlara göre $[B]_b$ matrisi:

$$[B]_b = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} 0 & b-c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & d-a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & a \\ 0 & d-a & b-c & 0 & -d & c & 0 & a & -b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5.111)}$$

elde edilir. Burada A^e üçgen elemanın alanıdır. Benzer şekilde kayma şekil değiştirmeleri yeniden düzenlenebilir. $[B]_s$ matrisi:

$$[B]_s = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} b-c & A^e & 0 & c & \frac{ac}{2} & \frac{bc}{2} & -b & -\frac{bd}{2} & -\frac{bc}{2} \\ d-a & 0 & A^e & -d & -\frac{ad}{2} & -\frac{bd}{2} & a & \frac{ad}{2} & \frac{ac}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.112)}$$

olarak elde edilir. Bunlara göre elemanın eğilme ve kayma şekil değiştirmesi yeniden elde edilir:

$$\kappa = [B]_b \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(5.113)}$$

$$\gamma = [B]_s \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(5.114)}$$

İfadeler yukarıdaki gibi alınırsa ayrık kayma aralığı yöntemine göre düzenlenmiş [K] sistem rijitlik matrisi:

$$[K]^{DSG3} = \sum_{e=1}^{N_e} [K]^{eDSG3} \quad \textbf{(5.115)}$$

şeklinde olur. Eleman rijitlik matrisi ise:

$$[K]^{eDSG3} = \int_A [B]_b^T [D]_b [B]_b dA + \int_A [B]_s^T [D]_s [B]_s dA =$$

$$= [B]_b^T [D]_b [B]_b A^e + [B]_s^T [D]_s [B]_s A^e \quad \textbf{(5.116)}$$

olarak elde edilir.

Mindlin plakları hakkında yapılan çalışmalar plak kalınlığı azaldıkça kayma kilitlenmesi probleminin oluştuğunu göstermektedir. Bunun sebebi sadece eğilme durumu altında bile kayma şekil değiştirmelerinin kaybolmamasıdır. Ayrık kayma aralığı yönteminde kayma şekil değiştirmesi yeniden bulunmakta ve bu şekildeki çözümle elde edilen sonlu elemanlarda kayma kilitlenmesi problemi önlenmektedir.

6. KALIN SAYILABİLECEK PLAKLARIN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMININ HAZIRLANMASI

6.1. MATLAB Programı

Herhangi bir sistem için tasarım, analiz ve sentez işlemleri çok büyük önem taşır. Bir sistemde tasarım genelde çizim işlemlerini, analiz hesaplama işlemlerini, sentez ise hem çizim hem de hesaplamaları kapsar. İşte bir sistemde çok büyük önem taşıyan bu üç işlevi de en kolay ve en güvenilir şekilde yapabilmek için farklı dönemlerde farklı teknikler kullanılmıştır. Bir sistemi oluşturmak ve anlamak için insanlara kolaylık sağlayan yazılım programlarının son yıllarda hızlı bir şekilde gelişmekte olduğu görülmektedir. Bunlara paralel olarak özellikle mühendislik alanında bilgisayarın etkin bir biçimde kullanımı da çok geniş bir alanda yaygınlaşarak artmıştır. Yazılım alanındaki bu gelişmeler kullanışı kolay anlaşılabilen ve kullananların problemleri rahatça çözebileceği programları da beraberinde getirmiştir. Donanıma yönelik teknolojik gelişmelerin olması, bilginin hem hızlı ve rahat bir şekilde saklanabilmesi hem de doğru bir şekilde kolay işlenebilmesi için önemli bir durumdur.

Önceki bölümlerde detayları verilen sonlu eleman modellerinin yaklaşımını görmek için sayısal sonuçlar elde etmek amacıyla MATLAB programı kullanılmıştır. MATLAB; (MATrix LABoratory); ilk defa 1985'de C.B Moler tarafından matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş etkileşimli bir paket programlama dilidir. İlk sürümleri FORTRAN diliyle yazılmıştır ve daha sonrasında son sürümleri C dilinde hazırlanmıştır. MATLAB mühendislik alanında; sayısal hesaplama, veri çözümleri ve grafik işlemlerinde kullanılabilecek genel amaçlı bir program olmakla beraber özel amaçlı modüler paketlere de sahiptir. Control Toolbox, Signal Toolbox gibi paket programlar (bilgisayar destekli denetim sistemi tasarımı) olup bunlar denetim sistemlerinin tasarımında da çok etkili araçlardır.

Ayrıca WINDOWS ortamında çalışan SIMULINK, etkileşimli benzetim programlarının hazırlanması ve çalıştırılmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır. MATLAB tüm mühendislik alanında, sayısal hesaplamalar, veri çözümlenmesi ve grafik işlemlerinde kolaylıkla kullanılabilen bir program dilidir. FORTRAN ve C dili gibi yüksek seviyeli programlama dili ile yapılabilen hesaplamaların pek çoğunu MATLAB ile yapmak mümkündür. Ayrıca bunun yanında diğer programlama dillerine göre MATLAB'te daha az sayıda komutla çözüm üretmek mümkündür. Gerçekte MATLAB, M-dosyaları (M-Files) olarak bilinen pek çok sayıda fonksiyon dosyalarından, alt programlardan ibarettir. Hazırlanması düşünülen bir program içinde M-dosyalarını kullanmak suretiyle komut sayısını çok kısa tutmak mümkündür. A.J.M. Ferreira'nın programı kullanılarak kalın sayılabilecek plakların çözümü için önceki bölümlerde verilen formülasyona dayanan bir program geliştirilmiştir.

6.2. Bilgisayar Programı Aşamaları

Yer değiştirme yöntemine dayanan sonlu eleman modelleri için oluşturulan bilgisayar programları üç aşamadan oluşur:

1. Aşama: Yarı Teorik Kısımlar; Bu aşamada problemin tanımı yapılır. Sınır koşulları, yükleme matrisleri gibi büyüklükler girilir.
2. Aşama: Hesap Matrisleri; Bu aşamada sonlu eleman teorisi ile ilgili ifadeler verilmiştir. Elastisite matrisi [D], bağ matrisi [B], eleman rijitlik matrisi ve diğer hesap matrisleri oluşturulur. Daha sonra bu matrislerle formülasyon oluşturulur ve sistem bilinmeyenleri elde edilir.
3. Aşama: İç Kuvvetlerin Bulunması; Sistem bilinmeyenleri elde edildikten sonra iç kuvvetler hesaplanır. Böylece problemin herhangi bir noktasındaki iç kuvvetler elde edilebilir.

6.3. Programın Yapısı Ve Çalışma Düzeni

MATLAB paket programı ve sonlu elemanlar yöntemi ile idealleştirilmiş herhangi bir plak taşıyıcı sistemin, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin etkisi dikkate alınarak statik, serbest titreşim ve burkulma hesabı yapılmıştır. Eleman koordinatlarını içeren data dosyasının bilgisayara girilmesi ile programın çalışması başlar. Yayılı yükler, mesnet şartları ve eleman boyutları programın içinde girilir. Bu

programda, sonlu elemanlar farklı boyutlarda da oluşturulabilir ve farklı malzemelerden yapılmış plak tanımı da yapılabilir. Program hem orta kalınlıkta plaklar için hem de ince plaklar için kullanılabilmektedir. Sonuçta her elemanın iç kuvvetleri hesaplanabilmektedir.

Program statik hesapta, ana program ve bu ana programla bağlanan 10 alt programdan oluşmaktadır. Mindlin plak teorisi esaslarına göre üç noktalı üçgen eleman, dört noktalı dörtgen eleman ve sekiz noktalı dörtgen eleman için ayrı programlar oluşturulmuştur. Bu program akış sırasına uygun olarak açıklanacak, önemli görülen programların ayrıntıları verilecektir.

Programın ilk aşamasında malzeme özellikleri, elastisite modülü, poisson oranı ve plak kalınlığı girilmektedir. Daha sonrada yayılı yük değerinin tanımlandığı ikinci kısma geçilmektedir.

Programın üçüncü bölümünde sonlu eleman ağı oluşturulmaktadır. Modellemede simetri özelliğine bakılmaksızın tüm sistem dikkate alınmaktadır. Elemanın kenar boyutları burada girilmekte ve elemanın hangi boyuttaki sonlu eleman ağından oluşacağına karar verilmektedir.

Programın dördüncü bölümünde plak rijitlik matrisi hesapları yapılmaktadır. Programda eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı dikkate alınmakta ve plak rijitlik matrisi, eğilme terimlerinden oluşan rijitlik matrisi ile kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisi toplamı olarak elde edilmektedir.

Programın beşinci bölümünde sistem rijitlik matrisi ve kuvvet vektörü hesabı yapılmıştır. Sistem rijitlik matrisi içinde benzer şekilde eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı dikkate alınmıştır. Bağ matrisleri de rijitlik matrisinde olduğu gibi ayrı ayrı bulunmuştur. Kuvvet vektörü elde edildikten sonra problem denklemi oluşturulmuştur.

Program için belirlenen sınır şartları tanıtılmıştır. Bunlar dört kenarı ankastre olan plak, dört kenarı basit mesnetli olan plak, iki kenarı basit mesnetli ve diğer iki kenarı ise ankastre olan plak, üç kenarı ankastre dördüncü kenarı serbest olan plak olmak üzere dört tanedir. Bütün sınır şartları arasından yapılacak seçim, programın başında kullanıcının kararına bırakılır.

Bunlarla beraber tekil yüklü ankastre kare olan plak, dört kenarı ankastre dairesel olan plak ve dört kenarı basit mesnetli dairesel olan plak içinde program düzenlenmiştir.

Bundan sonraki aşamada sınır şartları uygulandıktan sonra sistemin bilinmeyenleri olarak yer değiştirmeler bulunmaktadır. Bulunan yer değiştirmelerden hareketle iç kuvvetlere geçilmektedir. Programın son aşamasında sonlu eleman ağının şekilleri ve plak probleminin verilen yükler altında oluşan yer değiştirme şekli çizilmektedir.

Program giriş bilgileri data dosyalarında hazırlanmıştır. Çıkış bilgileri de oluşturularak kullanıcıya sunulmaktadır. Program, çalışmaya başladığında giriş bilgilerinin yer aldığı dosyayı kullanıcıdan istemektedir.

Çıkış kısmında denklem takımının çözümü sonucunda bulunan bilinmeyenler yani herhangi bir eleman üzerindeki herhangi bir noktadaki yer değiştirmeler (w, θ_x, θ_y), iç kuvvetler yani momentler (M_x, M_y, M_{xy}) ve kesme kuvveti değerleri (Q_x, Q_y) çıktı olarak elde edilmektedir.

Mindlin plakların titreşim probleminde kullanılan programda, statik analiz programına benzer şekilde bir data dosyası kullanılmaktadır. Programda aynı şekilde malzeme özellikleri girilmekte ve farklı sınır şartları için farklı kayma düzeltme katsayıları kullanılmaktadır.

Dört kenarı ankastre olan plak ve üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan plak için kayma düzeltme katsayısı 0.8601 olarak kullanılmaktadır. İki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli olan plak için kayma düzeltme katsayısı 0.822 değerinde, dört kenarı basit mesnetli olan plak için kayma düzeltme katsayısı da 5/6 değeri olarak kullanılmaktadır.

Malzeme özelliklerinden sonra elastisite matrisi eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı girilerek elde edilmektedir. Yük değeri girildikten sonra eleman boyutları girilmekte ve sonlu eleman sayısı oluşturulmaktadır.

Programın bundan sonraki aşamasında sistem rijitlik matrisi oluşturulmakta ve kütle matrisi bulunmaktadır. Bulunan denklem için programa sınır şartları girilmektedir.

Programın son aşamasında verilen sınır şartları için doğal frekanslar ve titreşim modları bulunmakta ve bulunan titreşim modları için grafikler program tarafından çizilmektedir.

Burkulma analizi için oluşturulan programda data dosyası alındıktan sonra malzeme özellikleri girilmektedir. Kayma düzeltme katsayısı burkulma analizinde bütün sınır şartları için 5/6 olarak alınmaktadır.

Verilen eleman boyutlarına göre sonlu eleman ağı oluşturulmakta, X ve Y doğrultusundaki eleman sayısı belirlenmektedir. Elastisite matrisi, kayma ve eğilme etkileri ayrı ayrı dikkate alınarak hesaplandıktan sonra gerilme matrisi elde edilmektedir. Burkulma analizi bu bakımdan Mindlin plakların statik analizine benzer özellik göstermektedir.

Daha sonraki aşamada rijitlik matrisi ve geometrik rijitlik matrisi belirlenmektedir. Geometrik rijitlik matrisi programda eğilme ve kayma etkileri ayrı ayrı dikkate alınarak iki kısımda hesaplanmaktadır. Bulunan denklem için programda tanımlanan sınır şartına göre çözüm yapılmaktadır. Özdeğer problemi çözülüp, burkulma modları hesaplanıp, grafik olarak gösterilmektedir. Ayrıca kritik burkulma yükü de hesaplanmaktadır.

Sonuç olarak MATLAB programında Mindlin plaklarının statik, dinamik ve burkulma analizleri için düzenlemeler yapılmış ve gerekli sonuçlar elde edilip analitik sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır.

7. SAYISAL UYGULAMALAR

7.1. Giriş

Bu bölümde düzenlenen bilgisayar programları ile bazı örnekler çözülerek elemanların yaklaşıklık derecesi belirlenmeye çalışılmıştır. Bulunan sonuçlar analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmada, Mindlin plakların statik analizi yapılmış, bazı plak problemlerinin çökme ve moment bakımından sonuçları incelenmiştir. Aynı zamanda plakların dinamik analizleri yapılıp titreşim modları ve doğal frekansları bulunmuştur. Ayrıca plakların burkulma analizleri yapılıp burkulma modları da elde edilmiştir.

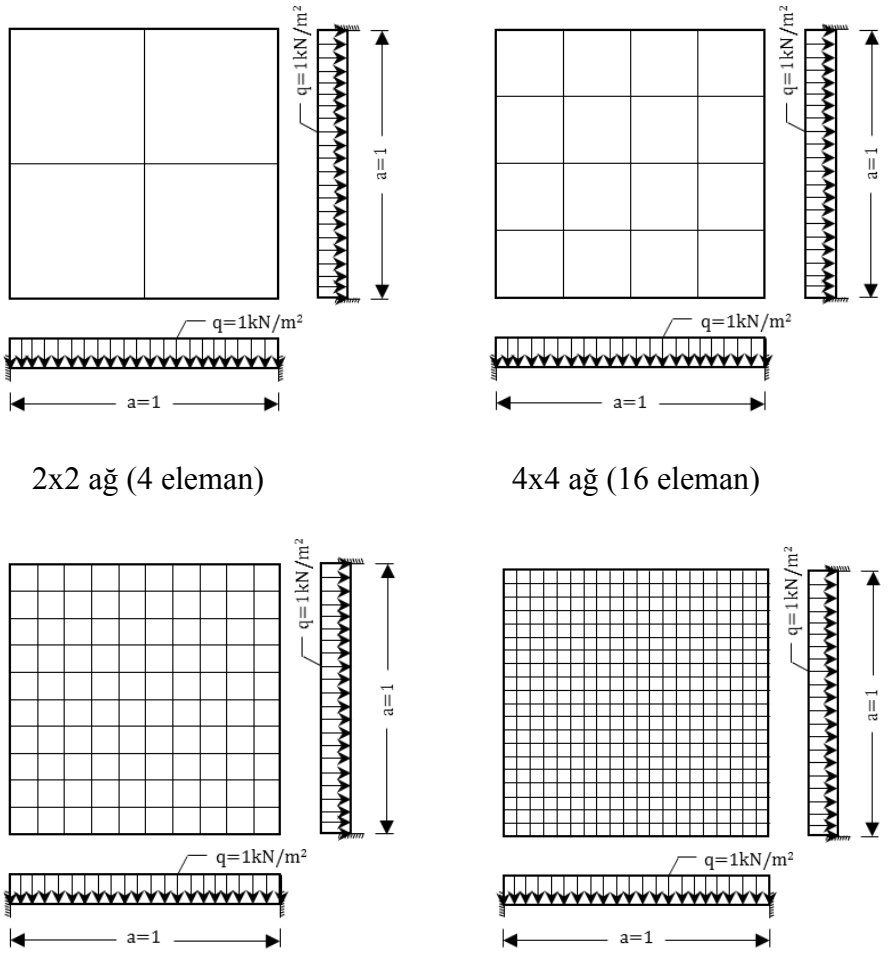
Plak sistemi için sonlu eleman ağı oluşturulurken şekillerde de görüldüğü gibi tüm sistem dikkate alınarak hesaplar yapılmıştır. Değişik kalınlık/açıklık (h/a) oranları dikkate alınarak kalın sayılabilecek plaklar için çözümler yapılmıştır. Hesaplarda, sonlu eleman sayısının sonuçlara etkisini gözlemek amacı ile (2x2), (4x4), (10x10) ve (20x20)'lik sonlu eleman ağından oluşan farklı karelajlarla çözüm yapılmıştır.

Kalın sayılabilecek plaklar için düzenlenen formülasyona dayanan söz konusu elemanlar, ince plaklara uygulandığında kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşılmaktadır. Bu problemi gidermek için 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda azaltılmış integrasyon yöntemi, seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi kullanılırken 3 noktalı üçgen sonlu elemanlarda bunlarla beraber ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. Sonuçlar karşılaştırılarak yöntemlerin yaklaşımına bakılmıştır.

Analitik sonuçlar Örnek 1 ve Örnek 4 arası, Örnek 10'la Örnek 11 için Long ve diğ. (2001) yayınından, Örnek 5 ve Örnek 9 arası içinde Wang ve diğ. (2000) yayınından alınmıştır.

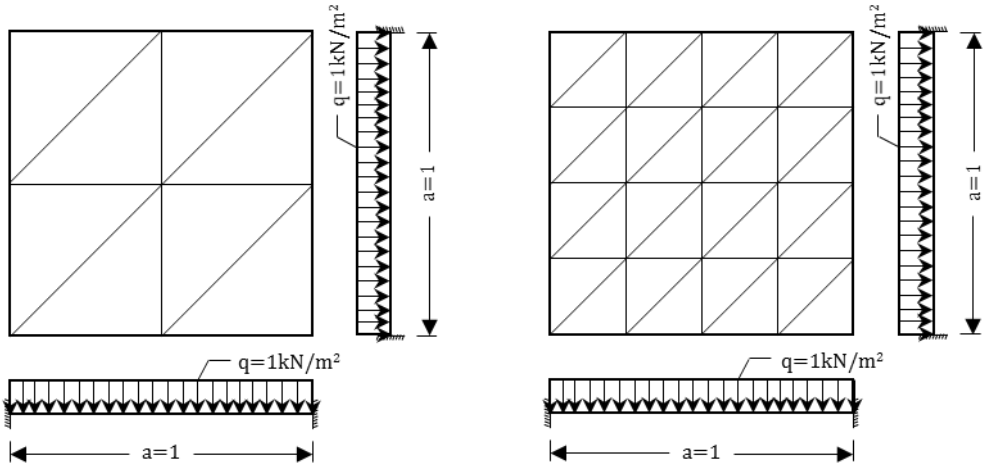
7.2. Örnek 1: Düzgün Yayılı Yüklü Ankastre Mesnetli Kare Plak

Bu örnekte E=10920 kN/m^2, ν=0.30 ve q=1 kN/m^2 olarak alınmıştır. 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla plak kalınlığı h=0.1 m ve h=0.01 m alınarak çözümler yapılmıştır. Problemde simetri dikkate alınmadan tüm sistemde sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Dörtgen elemanlar için sırasıyla 4, 16, 100 ve 400 elemanlı karelajlar bulunmaktadır. Kayma kilitlenmesi problemi için ise söz konusu üçgen ve dörtgen elemanlarla farklı kalınlık/açıklık oranlarıyla çözümler yapılmıştır. Bulunan sonuçlarda ince plak sınırından itibaren (h/a<0.05) kayma kilitlenmesi gözlenmiştir. Kayma kilitlenmesi problemini gidermek için dörtgen sonlu elemanlarda tam, azaltılmış, seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemleri kullanılırken, 3 noktalı üçgen sonlu elemanda ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda oluşturulan sonlu eleman ağları Şekil 7.1'de verilmiştir.

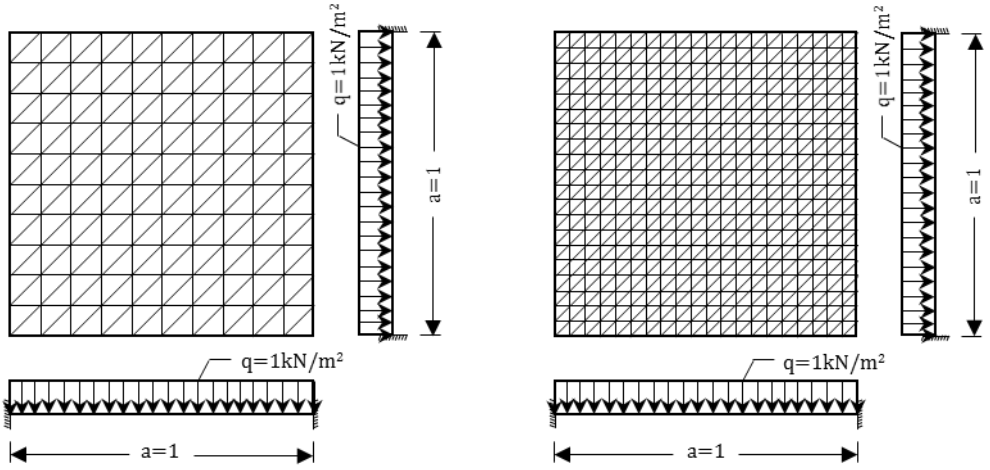


Şekil 7.1: 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için sonlu eleman ağları.

3 noktalı üçgen sonlu eleman kullanılarak oluşturulan 8, 32, 200 ve 800 elemanlı sonlu eleman ağları Şekil 7.2'de görülmektedir.



2x2 ağ (8 eleman) 4x4 ağ (32 eleman)



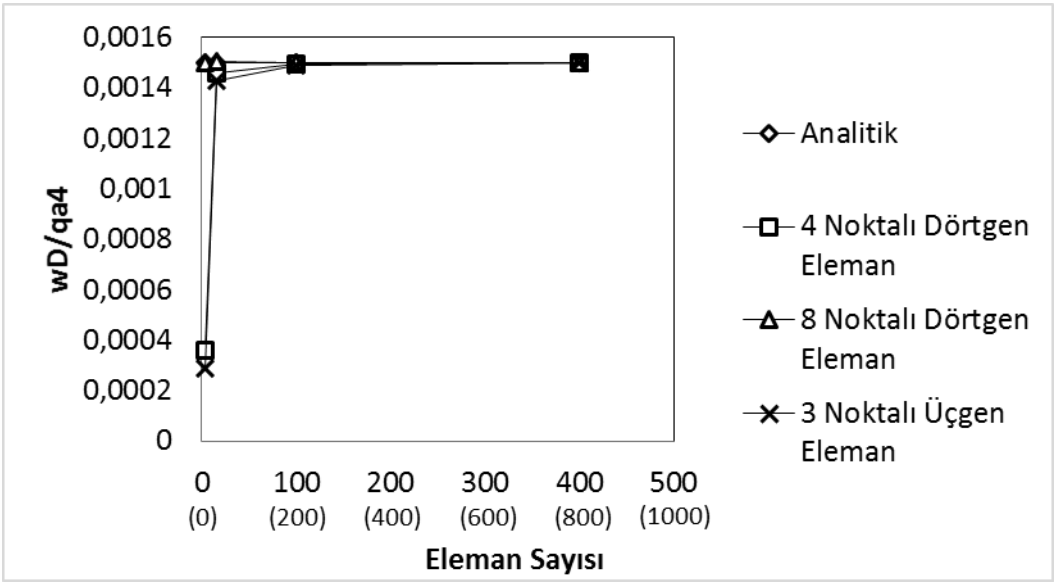
10x10 ağ (200 eleman) 20x20 ağ (800 eleman)

Şekil 7.2: 3 noktalı üçgen sonlu eleman için sonlu eleman ağları.

Plak kalınlığı h=0.1 m ve h=0.01 m için söz konusu üç sonlu eleman ile elde edilen plak ortası çökme ve moment değerleri gösterilen sonlu eleman ağları için Çizelge (7.1-7.4) arasında, söz konusu büyüklüklerin eleman sayısına göre yakınsaması Şekil 7.3, Şekil 7.4, Şekil 7.6 ve Şekil 7.7'de verilmiştir. Şekillerde, yatay eksendeki sayılar 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanların eleman sayılarını ve yine yatay eksendeki parantez içindeki sayılar da 3 noktalı üçgen sonlu elemanın eleman sayılarını göstermektedir. Çizelge ve şekillerdeki büyüklükler boyutsuz olarak verilmiştir. Bunun için çökmeler wD/qa^4 cinsinden, momentler ise $100M_x/qa^2$ cinsinden tanımlanmıştır.

Çizelge 7.1: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.001499			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$3.57x10^{-4}$	0.001459	0.001492	0.001501
Hata	-76.2%	-2.67%	-0.47%	0.13%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.001501	0.001504	0.001499	0.001499
Hata	0.13%	0.33%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$2.86x10^{-4}$	0.001429	0.001489	0.001501
Hata	-80.9%	-4.67%	-0.67%	0.13%

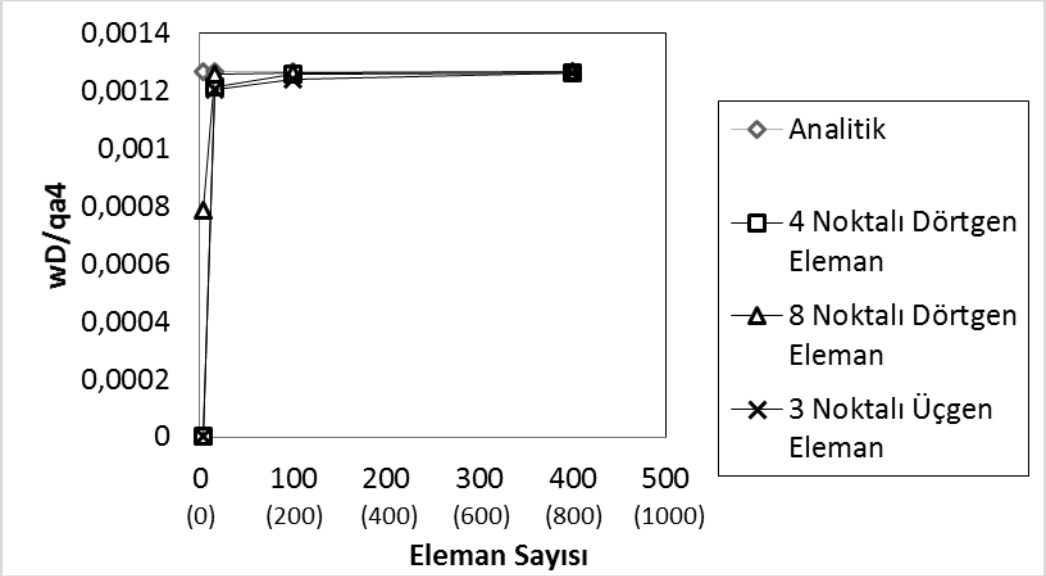


Şekil 7.3: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Yakınsama testi şekillerinde her bir sonlu eleman farklı işaret ile gösterilmiş ve işaretlerin açıklamaları grafiğin yanında belirtilmiştir.

Çizelge 7.2: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

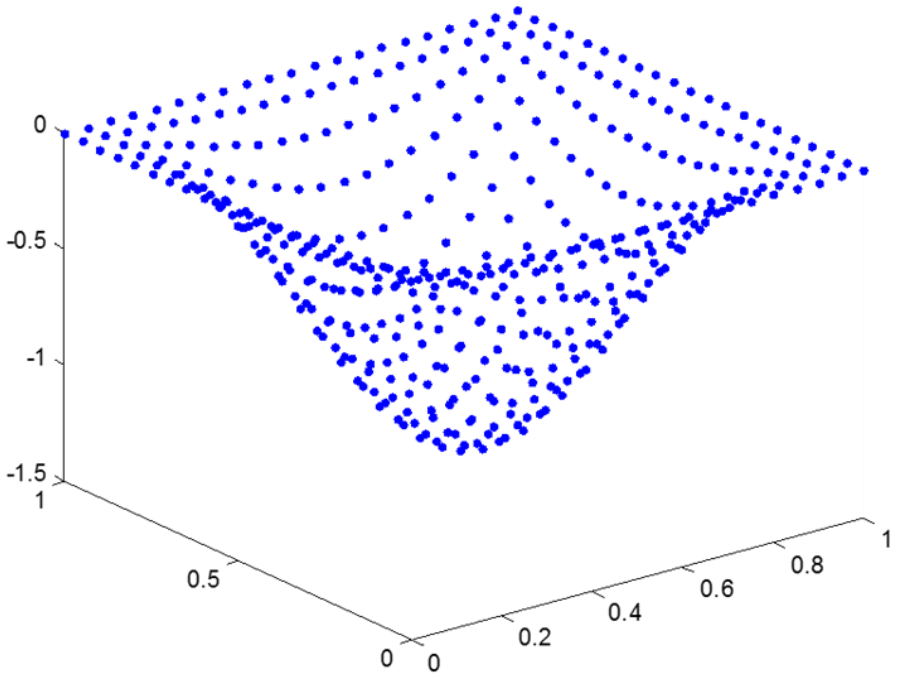
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.001265			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$3.57x10^{-6}$	0.001215	0.001259	0.001261
Hata	-99.7%	-3.95%	-0.47%	-0.32%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	$7.86x10^{-4}$	0.001258	0.001263	0.001266
Hata	-37.87%	-0.55%	-0.16%	0.08%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$2.67x10^{-6}$	0.001206	0.001238	0.001263
Hata	-99.8%	-4.66%	-2.13%	-0.16%



Şekil 7.4: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.1 ve Çizelge 7.2'ye bakıldığında 2x2 karelajlar için 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu eleman sonuçlarının analitik sonuca yakınsaması düşüktür. 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda h/a=0.1 için hata oranı %76.2 iken h/a=0.01'de hata oranı %99.7'dir. 3 noktalı üçgen sonlu elemanda ise bu hata oranları sırasıyla %80.9 ve %99.8'dir. 20x20 karelaj için analitik çözüme en yakın değer hem h/a=0.1 hem de h/a=0.01'de 8 noktalı dörtgen sonlu elemandadır.

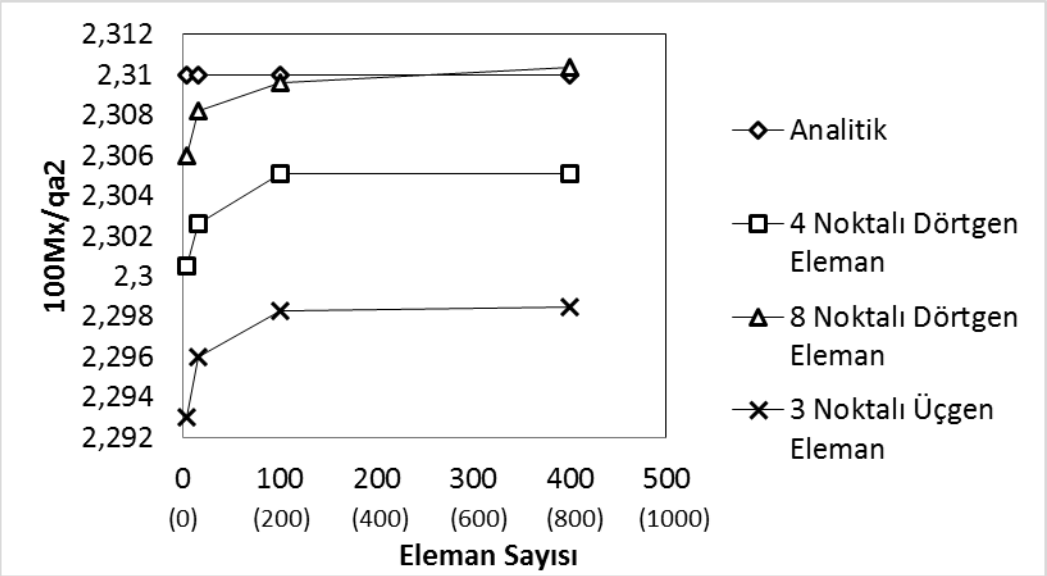
Şekil 7.5'te düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli kare plağın 4 noktalı dörtgen elemanda 20x20 karelajla h/a=0.01 için yer değiştirme şekli verilmiştir.



Şekil 7.5: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli.

Çizelge 7.3: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

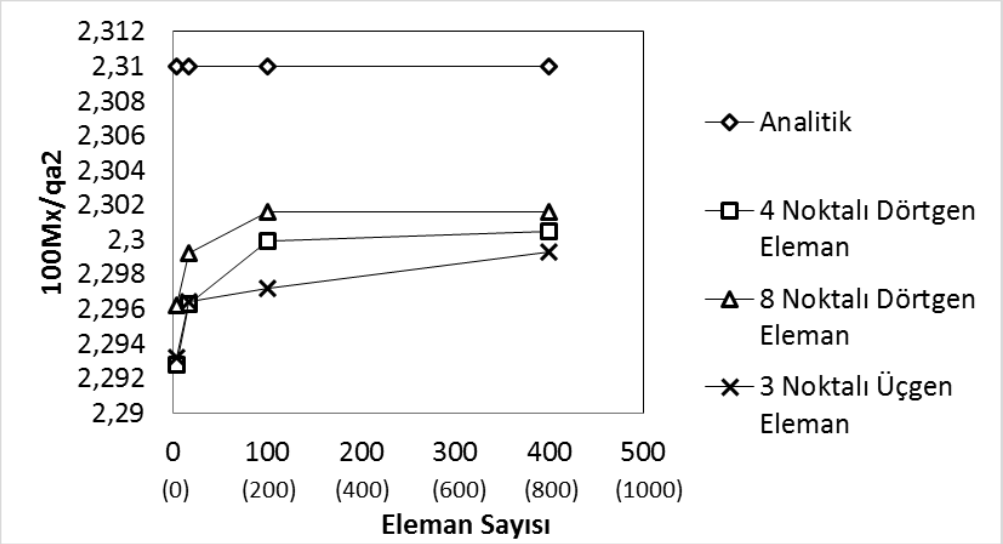
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	2.3100			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	2.3005	2.3026	2.3051	2.3051
Hata	-0.41%	-0.32%	-0.21%	-0.21%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	2.3060	2.3082	2.3096	2.3104
Hata	-0.17%	-0.08%	-0.02%	0.02%
3 Noktalı Üçgen Eleman	2.2930	2.2960	2.2983	2.2985
Hata	-0.74%	-0.61%	-0.51%	-0.50%



Şekil 7.6: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.4: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	2.3100			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	2.2928	2.2963	2.2999	2.3005
Hata	-0.74%	-0.59%	-0.44%	-0.41%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	2.2962	2.2992	2.3016	2.3016
Hata	-0.60%	-0.47%	-0.36%	-0.36%
3 Noktalı Üçgen Eleman	2.2932	2.2964	2.2972	2.2993
Hata	-0.73%	-0.59%	-0.55%	-0.46%



Şekil 7.7: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.3 ve Çizelge 7.4 incelendiğinde, 8 noktalı dörtgen sonlu elemanın plak ortası açıklık momenti yakınsamasının diğerlerine göre daha iyi olduğu görülmektedir. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda, 10x10 ve 20x20 karelajlar için h/a= 0.1'de hata oranı %0.02 iken h/a=0.01'de hata oranı %0.36'dır. Genele baktığımızda iç kuvvetlerin yakınsama hızı daha düşüktür.

Kayma kilitlenmesi probleminin çözümünde kullanılan yaklaşımların etkisini görmek amacıyla farklı kalınlık/açıklık oranları için 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar Çizelge 7.5'te verilmiştir. Dörtgen elemanlarla çözümde tam integrasyon, azaltılmış integrasyon ve seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Üçgen elemanla yapılan çözümlerde bu yöntemlerin yanı sıra üçgen elemanlarda iyi sonuç veren ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır. Çizelgede analitik çözüme en yakın değerler koyu punto ile yazılmıştır. Çizelgenin ortasından geçen çift çizgi ile ince plak sınırı belirtilmiştir.

Çizelge 7.5'e baktığımızda 3 noktalı üçgen elemanda analitik çözüme en yakın değerler ayrık kayma aralığı yönteminde verilmiştir. 4 noktalı dörtgen elemanda h/a<0.05 oranı için azaltılmış ve seçilerek azaltılmış integrasyon değerleri daha yakın sonuçlar vermiştir. 8 noktalı dörtgen elemanda ise beklenildiği gibi (h/a<0.05) durumunda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar diğer yöntemlere göre analitik sonuca daha yakın sonuçlar vermiştir. Şekil 7.8'de ise değişen kalınlık/açıklık oranına göre kayma kilitlenmesinin önlenmesine ait değişim Çizelge 7.5'te her elemanın koyu puntolu sonuçları kullanılarak grafik olarak verilmiştir.

Çizelge 7.5: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.

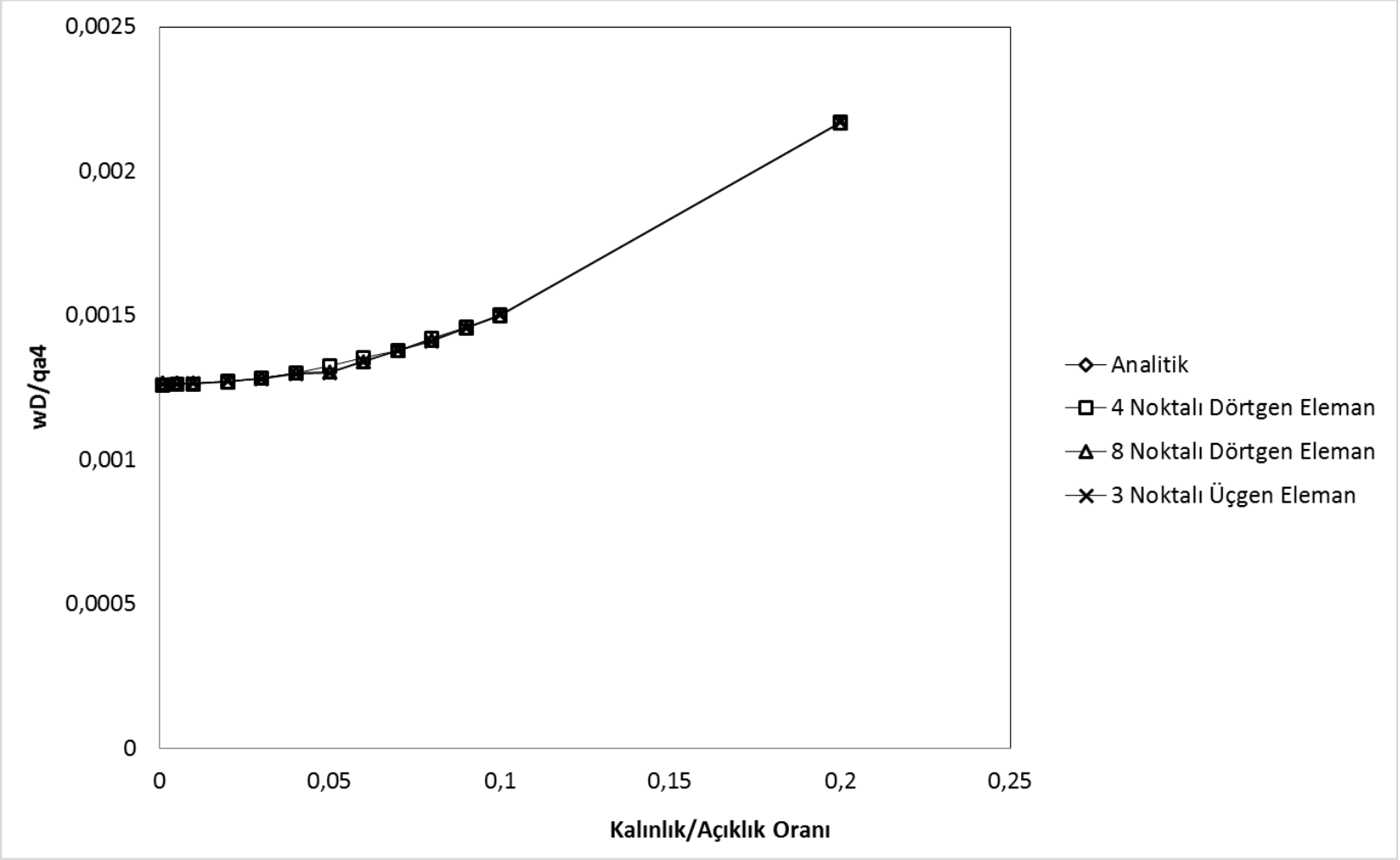
		3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
h/a	Analitik	T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.001263	0.000089	0.001250	0.001252	**0.001260**	0.000101	0.001251	**0.001259**	0.001206	0.001258	**0.001263**
0.005	0.001264	0.000106	0.001255	0.001254	**0.001261**	0.000125	0.001253	**0.001262**	0.001241	0.001260	**0.001265**
0.01	0.001265	0.000149	0.001258	0.001255	**0.001263**	0.000159	**0.001261**	0.001261	0.001246	0.001253	**0.001266**
0.02	0.001270	0.000437	0.001262	0.001261	**0.001272**	0.000545	**0.001270**	0.001273	0.001261	0.001264	**0.001269**
0.03	0.001282	0.000693	0.001268	0.001274	**0.001280**	0.000789	**0.001281**	0.001286	0.001270	0.001273	**0.001283**
0.04	0.001298	0.000998	0.001286	0.001290	**0.001295**	0.001007	**0.001298**	0.001303	0.001283	0.001291	**0.001298**
0.05	0.001304	0.001193	0.001294	0.001291	**0.001301**	0.001281	0.001328	**0.001325**	0.001297	**0.001302**	0.001310
0.06	0.001341	0.001225	0.001331	0.001328	**0.001337**	0.001304	0.001359	**0.001352**	0.001333	**0.001339**	0.001347
0.07	0.001377	0.001263	0.001369	0.001371	**0.001379**	0.001341	**0.001379**	0.001383	0.001375	**0.001377**	0.001378
0.08	0.001415	0.001302	0.001405	0.001403	**0.001410**	0.001386	0.001408	**0.001419**	0.001413	**0.001414**	0.001417
0.09	0.001456	0.001349	0.001442	0.001446	**0.001454**	0.001419	0.001462	**0.001459**	**0.001457**	0.001459	0.001459
0.1	0.001499	0.001402	0.001491	0.001490	**0.001501**	0.001449	**0.001501**	0.001503	0.001498	**0.001499**	0.001500
0.2	0.002167	0.002103	0.002158	0.002158	**0.002169**	0.002133	**0.002169**	0.002172	**0.002167**	0.002169	0.002169

T: Tam İntegrasyon

A: Azaltılmış İntegrasyon

S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı



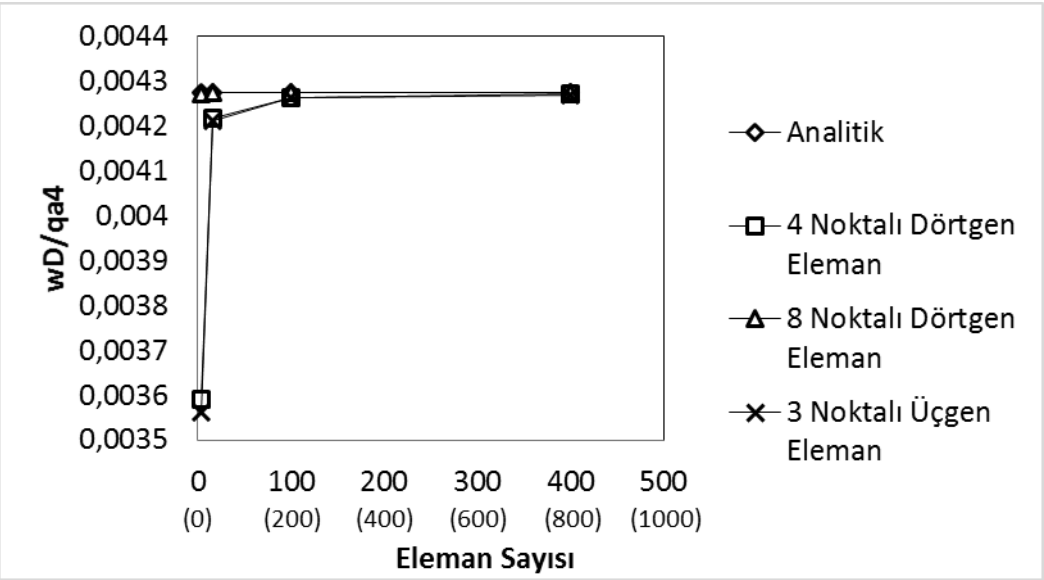
Şekil 7.8: Düzgün yayılı yüklü ankastre kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi.

7.3. Örnek 2: Düzgün Yayılı Yüklü Basit Mesnetli Kare Plak

Aynı plak düzgün yayılı yüklü 4 tarafı basit mesnetli olarak incelenmiştir. Örnek 1'de olduğu gibi aynı sonlu eleman ağları kullanılarak plağın ince ve kalın olduğu durumlarda plak ortasında çökme ve eğilme momentleri bulunmuştur ve Çizelge (7.6-7.9) arasında gösterilmiştir. Söz konusu büyüklüklerin eleman sayısına göre yakınsaması Şekil 7.9, Şekil 7.10, Şekil 7.12 ve Şekil 7.13'te verilmiştir.

Çizelge 7.6: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

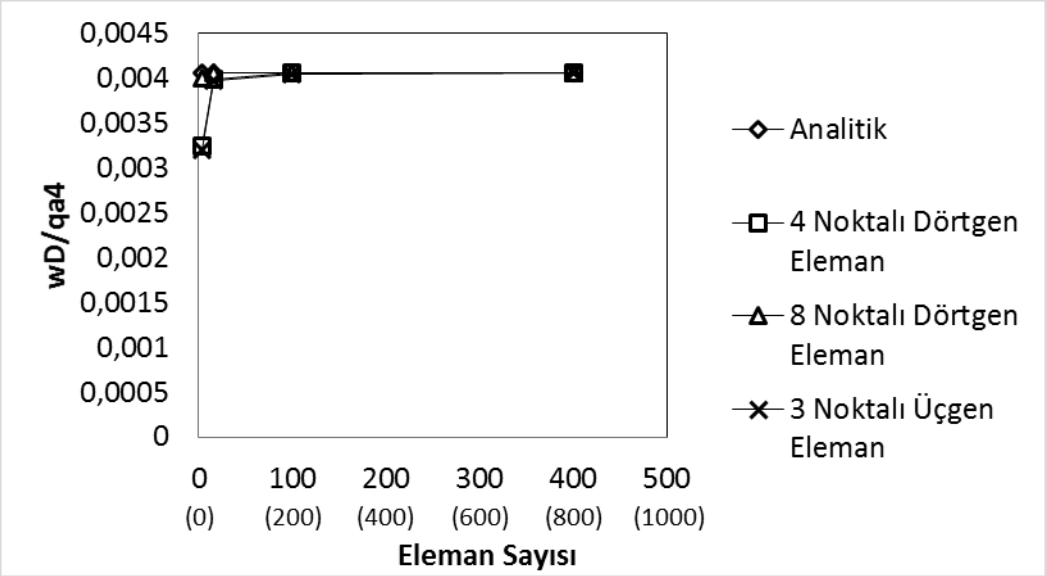
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.004273			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	0.003591	0.004218	0.004264	0.004272
Hata	-15.96%	-1.3%	-0.21%	-0.02%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.004271	0.004273	0.004273	0.004273
Hata	-0.05%	0.0%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	0.003563	0.004211	0.004262	0.004269
Hata	-16.62%	-1.45%	-0.26%	-0.09%



Şekil 7.9: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.7: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

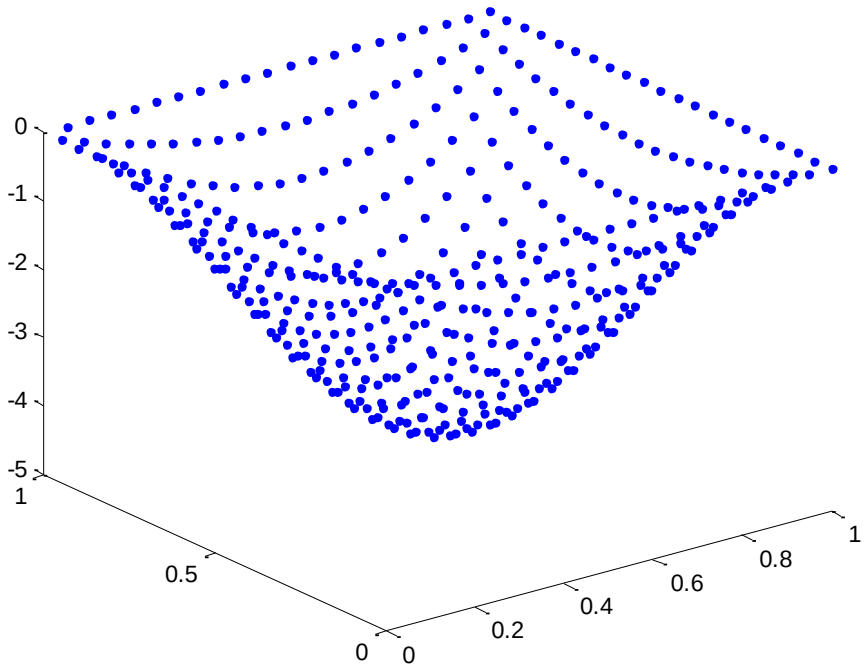
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.004062			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	0.003235	0.003981	0.004053	0.004062
Hata	-20.36%	-2%	-0.22%	0.0%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.004006	0.004060	0.004062	0.004062
Hata	-1.38%	-0.05%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	0.003203	0.003972	0.004041	0.004061
Hata	-21.15%	-2.2%	-0.52%	-0.02%



Şekil 7.10: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.6 ve Çizelge 7.7'deki sonuçlara göre analitik sonuca en yakın değerler 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda bulunmaktadır. 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda hata oranı 20x20 karelajda en azdır. 2x2 karelajda bütün sonlu eleman modelleri için hata oranı en fazladır. 2x2 karelajda h/a=0.1 için 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda hata oranı %15.96 iken 3 noktalı üçgen sonlu elemanda %16.62'dir. h/a=0.01 durumunda ise bu hata oranı sırasıyla %20.36 ve %21.15'tir.

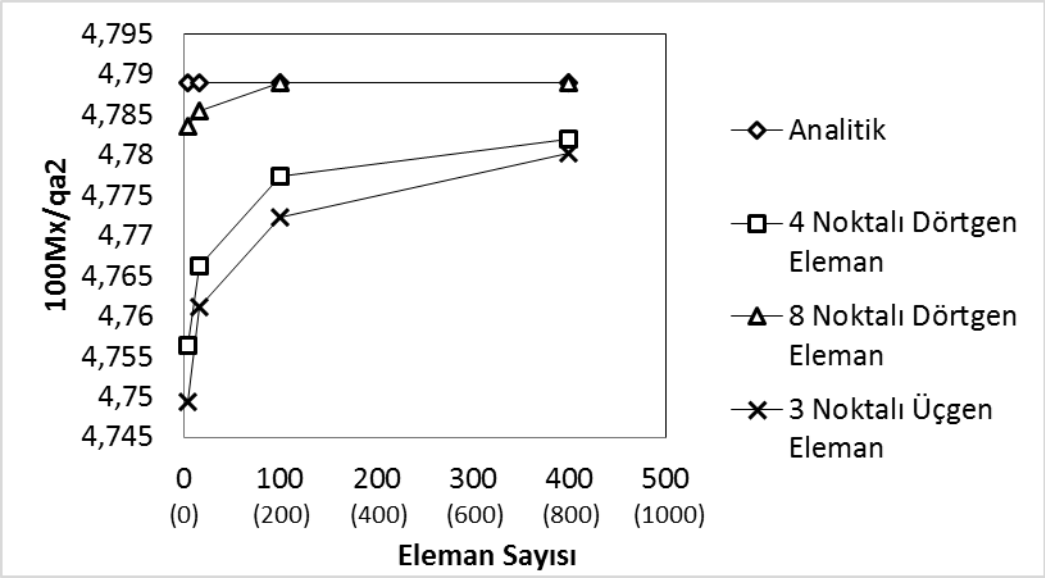
Şekil 7.11'de düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plağın 4 noktalı dörtgen elemanda 20x20 karelajla h/a=0.01 için yer değiştirme şekli gösterilmiştir.



Şekil 7.11: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli.

Çizelge 7.8: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	4.7890			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	4.7563	4.7663	4.7773	4.7820
Hata	-0.68%	-0.47%	-0.24%	-0.15%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	4.7836	4.7854	4.7890	4.7890
Hata	-0.11%	-0.08%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	4.7494	4.7612	4.7723	4.7803
Hata	-0.83%	-0.58%	-0.35%	-0.18%

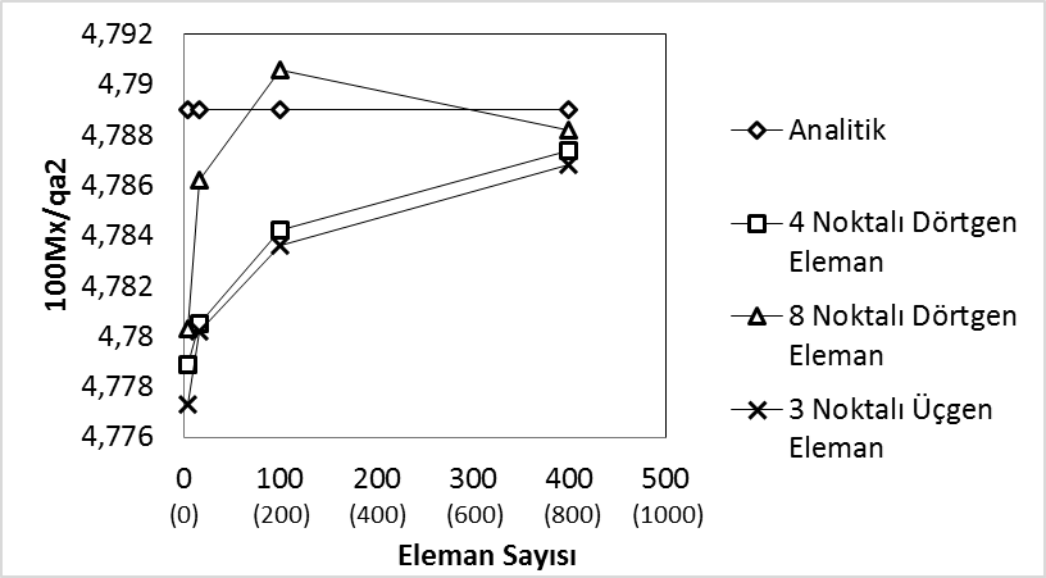


Şekil 7.12: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.9: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	4.7890			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	4.7789	4.7805	4.7842	4.7874
Hata	-0.21%	-0.18%	-0.10%	-0.03%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	4.7803	4.7862	4.7906	4.7882
Hata	-0.18%	-0.06%	0.03%	-0.02%
3 Noktalı Üçgen Eleman	4.7773	4.7802	4.7836	4.7868
Hata	-0.24%	-0.18%	-0.11%	-0.05%

Çizelgede her bir elemanın analitik sonuca göre hata oranı hesaplanmış olup yüzde cinsinden verilmiştir. Hata oranlarındaki eksi değerleri analitik sonuca alttan yakınsama olduğunu gösterirken pozitif hata oranları ise analitik sonuca üstten yakınsama olduğunu göstermektedir.



Şekil 7.13: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.8'de plak ortası açıklık momenti bakımından en yakın sonuç 10x10 ve 20x20 karelajda 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda bulunmaktadır. Çizelge 7.9'da ise analitik sonuca en çok yakınsayan sonuç 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda 20x20 karelajda olmaktadır. Basit mesnetli kare plaktaki açıklık momenti için genel sonuçlar ankastre mesnete göre analitik sonuca daha yakındır.

Çizelge 7.10'da dört kenarı basit mesnetli kare plak için kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesine ait 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 7.10'a göre 3 noktalı üçgen sonlu eleman basit mesnetli kare plak için en uygun sonuçları ayrık kayma aralığı yönteminde vermiştir. Sadece h/a=0.1 için seçilerek azaltılmış integrasyon adımında bulunan sonuç analitik sonuca daha yakınsaktır. Ama bu fark çok belirgin değildir. 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi sonuçlarının yakınsaması daha iyidir. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda tam integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar ile seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar dengeli bir dağılım göstermiştir. Şekil 7.14'te ise değişen kalınlık/açıklık oranına göre kayma kilitlenmesinin önlenmesine ait değişim Çizelge 7.10'da her elemanın koyu puntolu sonuçları kullanılarak grafik olarak verilmiştir.

Çizelge 7.10: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.

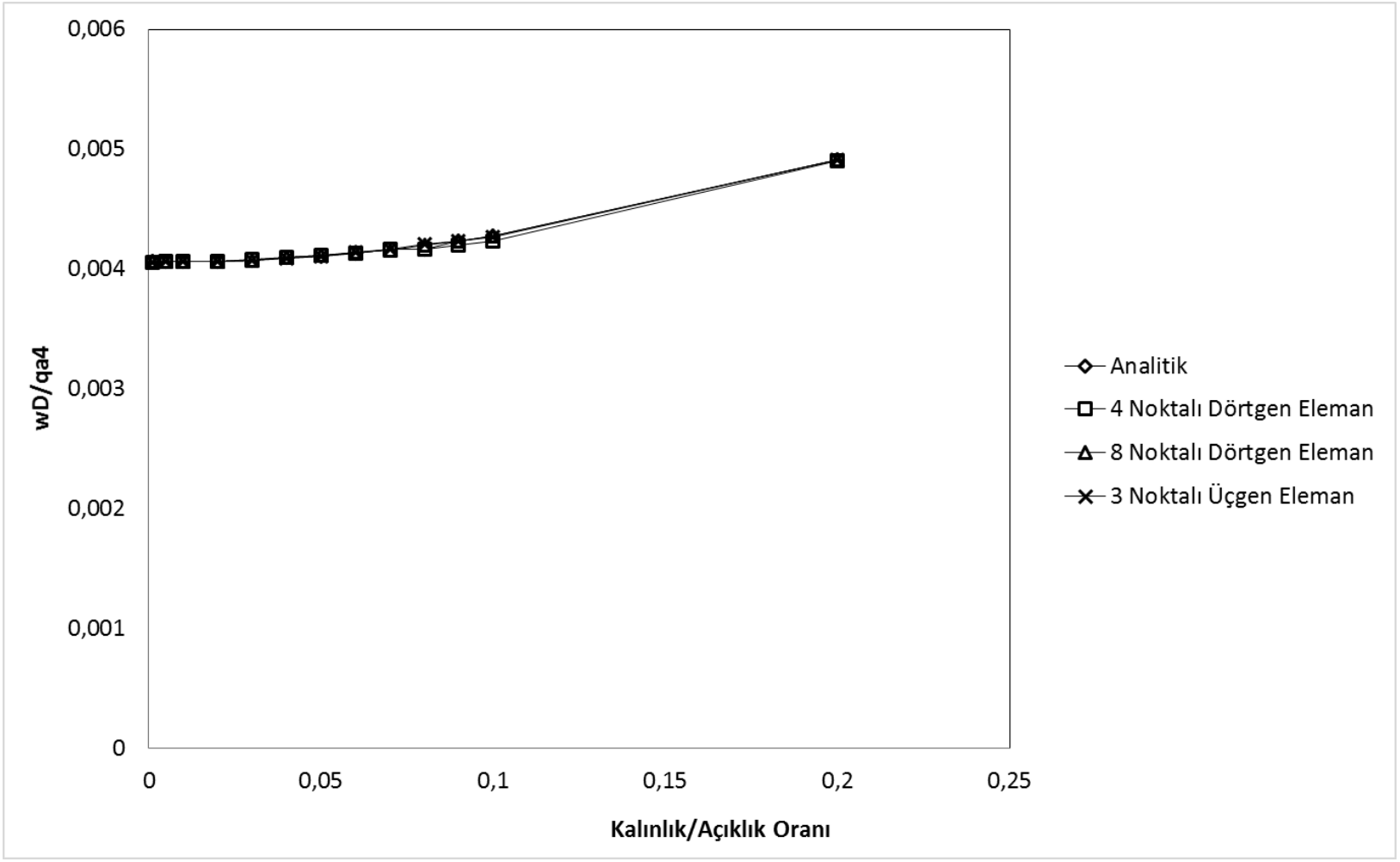
		3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
h/a	Analitik	T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.004059	0.000956	0.004048	0.004051	**0.004057**	0.001021	0.004052	**0.004056**	0.004005	0.004055	**0.004060**
0.005	0.004060	0.001556	0.004052	0.004057	**0.004059**	0.001689	0.004055	**0.004058**	0.004024	0.004056	**0.004061**
0.01	0.004062	0.002203	0.004060	0.004068	**0.004061**	0.002265	0.004054	**0.004062**	**0.004062**	0.004069	0.004073
0.02	0.004062	0.002758	0.004039	0.004058	**0.004064**	0.002804	**0.004058**	0.004068	0.004048	0.004056	**0.004060**
0.03	0.004074	0.003091	0.004015	0.004058	**0.004070**	0.003372	0.004066	**0.004078**	0.004055	0.004064	**0.004071**
0.04	0.004096	0.003392	0.004058	0.004083	**0.004089**	0.003708	0.004082	**0.004093**	0.004088	**0.004095**	0.004099
0.05	0.004107	0.004020	0.004089	0.004095	**0.004101**	0.004049	0.004101	**0.004112**	0.004083	0.004099	**0.004109**
0.06	0.004133	0.004085	0.004128	0.004139	**0.004135**	0.004087	**0.004132**	0.004135	0.004102	0.004125	**0.004134**
0.07	0.004159	0.004102	0.004148	0.004146	**0.004166**	0.004129	0.004151	**0.004163**	**0.004158**	0.004166	0.004172
0.08	0.004199	0.004185	0.004215	0.004222	**0.004205**	0.004160	0.004186	**0.004195**	**0.004198**	0.004205	0.004211
0.09	0.004232	0.004208	0.004240	0.004245	**0.004229**	0.004202	0.004238	**0.004231**	**0.004232**	0.004236	0.004238
0.1	0.004273	0.004232	0.004261	**0.004269**	0.004279	**0.004272**	0.004289	0.004271	**0.004273**	0.004279	0.004285
0.2	0.004906	0.004884	0.004913	0.004918	**0.004911**	0.004889	0.004918	**0.004905**	0.004897	0.004899	**0.004906**

T: Tam İntegrasyon

A: Azaltılmış İntegrasyon

S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı



Şekil 7.14: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi.

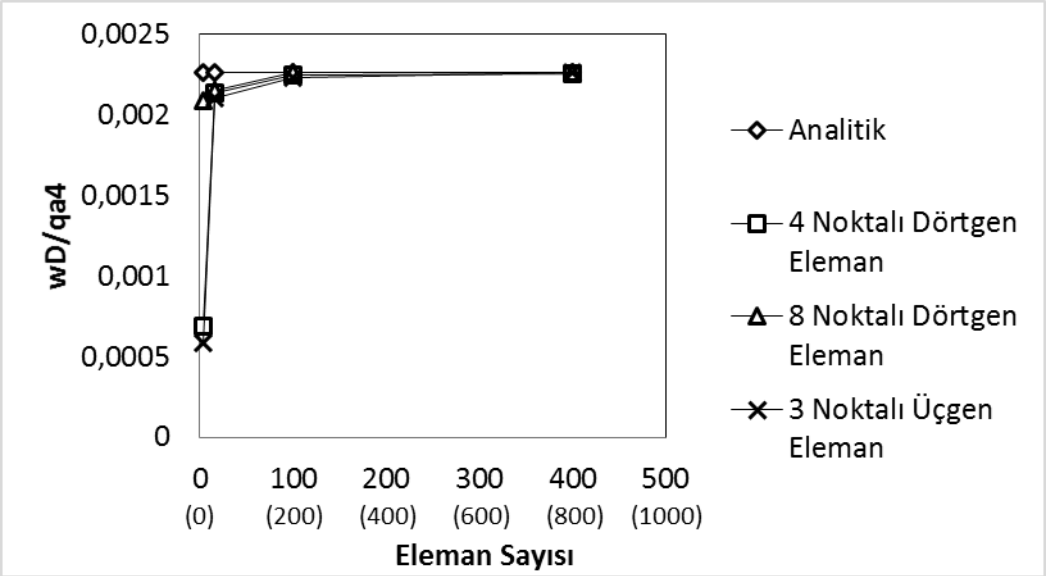
7.4. Örnek 3: Düzgün Yayılı Yüklü İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Basit Mesnetli Kare Plak

Aynı örnek düzgün yayılı yük altında iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli olarak dikkate alınmıştır. Diğer örneklere benzer biçimde aynı sonlu eleman ağları kullanılarak plağın ince ve kalın olduğu durumlarda plak ortasında çökme ve eğilme momentleri bulunmuştur ve Çizelge (7.11-7.14) arasında gösterilmiştir. Söz konusu büyüklüklerin eleman sayısına göre yakınsaması Şekil 7.15, Şekil 7.16, Şekil 7.18 ve Şekil 7.19'da verilmiştir.

Örnek 1 ve 2'de olduğu gibi çizelgelerde sonlu elemanlar için verilen büyüklükler boyutsuz cinstendir. Bunun için çökme değerleri wD/qa^4 cinsinden verilirken moment değerleri $100M_x/qa^2$ cinsinden gösterilmiştir. Çizelgede her bir elemanın analitik sonuca göre hata oranı hesaplanmış olup yüzde cinsinden verilmiştir. Hata oranlarındaki eksi değerleri analitik sonuca alttan yakınsama olduğunu gösterirken pozitif hata oranları ise analitik sonuca üstten yakınsama olduğunu göstermektedir.

Çizelge 7.11: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

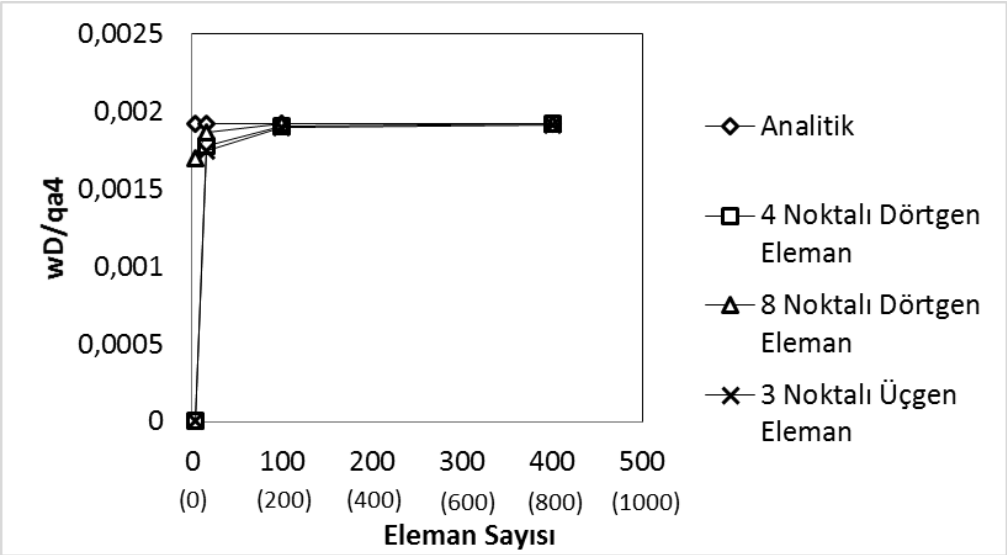
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.002259			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$6.85x10^{-4}$	0.002135	0.002244	0.002257
Hata	-69.68%	-5.49%	-0.66%	-0.09%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.002085	0.002148	0.002259	0.002259
Hata	-7.70%	-4.91%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$5.86x10^{-4}$	0.002107	0.002228	0.002259
Hata	-74.06%	-6.73%	-1.37%	0.0%



Şekil 7.15: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.12: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

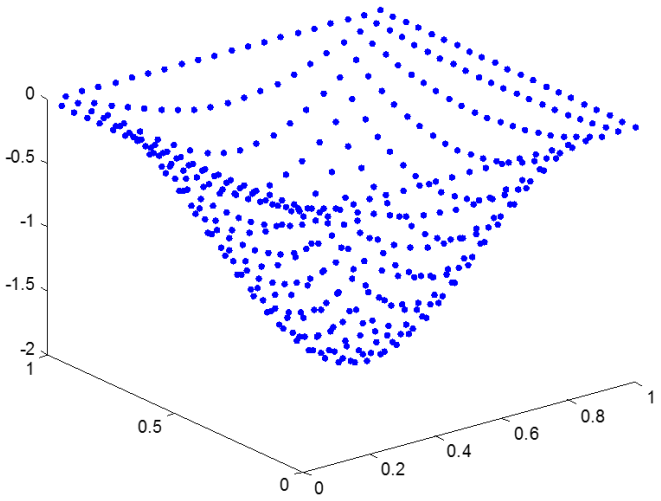
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.001920			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$7.14x10^{-6}$	0.001778	0.001902	0.001918
Hata	-99.6%	-7.40%	-0.94%	-0.1%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.001694	0.001866	0.001920	0.001920
Hata	-11.77%	-2.81%	0.0%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$5.69x10^{-6}$	0.001749	0.001896	0.001909
Hata	-99.7%	-8.91%	-1.25%	-0.57%



Şekil 7.16: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.11 ve Çizelge 7.12'ye göre analitik sonuca en yakın sonuçlar 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda görülmüştür. 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda hata oranları 2x2 karelajda h/a=0.01 için çok yüksektir. 4 noktalı dörtgen elemanın sonuçları analitik sonuca 3 noktalı üçgen elemandan genel olarak daha hızlı yakınsamaktadır.

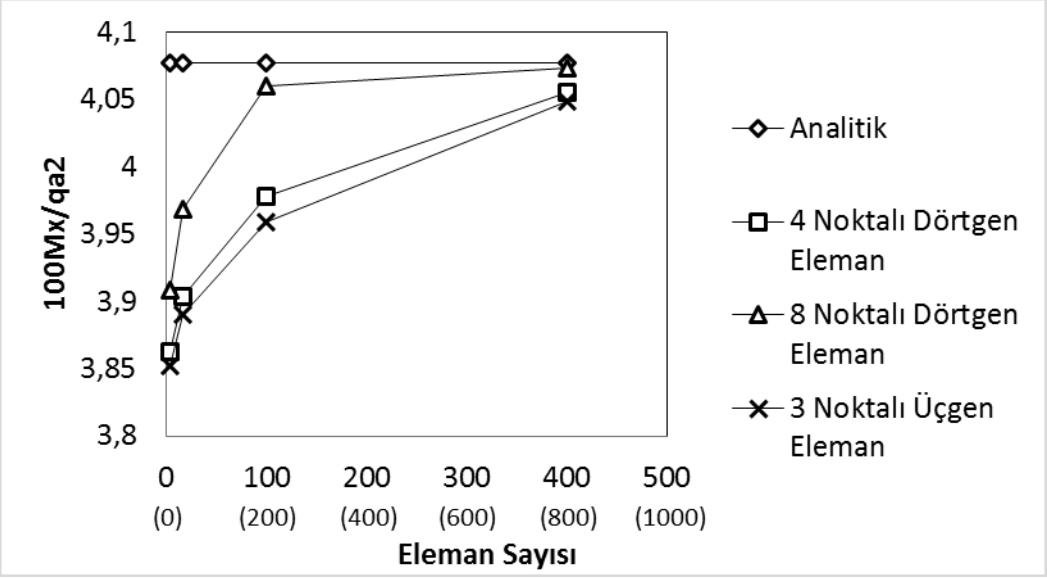
Şekil 7.17'de düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plağın 4 noktalı dörtgen elemanda 20x20 karelajla h/a=0.01 için yer değiştirme şekli gösterilmiştir.



Şekil 7.17: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli.

Çizelge 7.13: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	4.0770			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	3.8622	3.9034	3.9776	4.0553
Hata	-5.27%	-4.26%	-2.44%	-0.53%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	3.9084	3.9687	4.0602	4.0731
Hata	-4.14%	-2.66%	-0.41%	-0.10%
3 Noktalı Üçgen Eleman	3.8524	3.8898	3.9593	4.0490
Hata	-5.51%	-4.59%	-2.89%	-0.69%

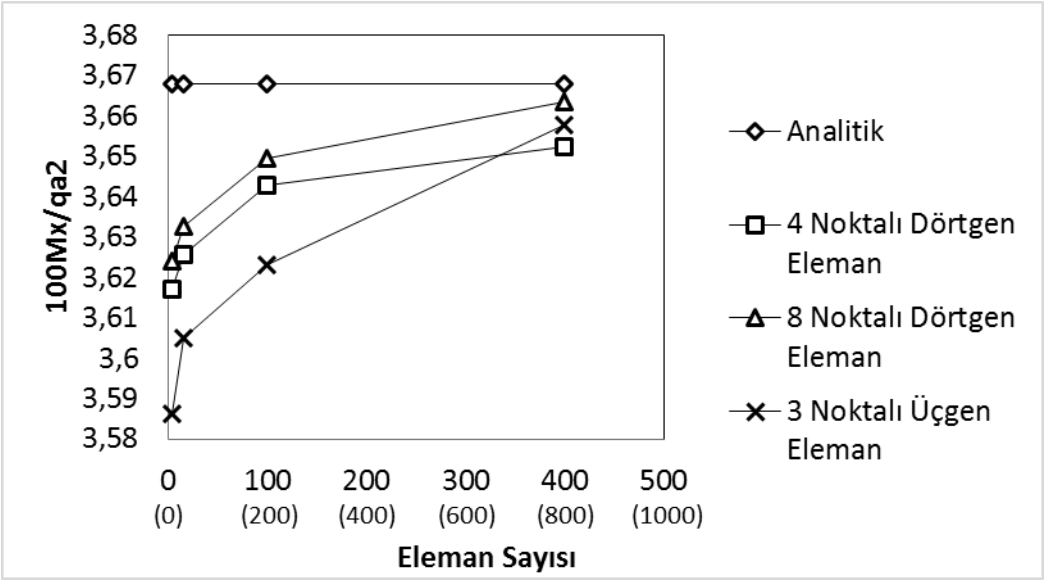


Şekil 7.18: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Yakınsama testi şekillerinde her bir sonlu eleman farklı işaret ile gösterilmiş ve işaretlerin açıklamaları grafiğin yanında belirtilmiştir.

Çizelge 7.14: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	3.6680			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	3.6172	3.6255	3.6427	3.6524
Hata	-1.38%	-1.16%	-0.69%	-0.43%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	3.6242	3.6328	3.6496	3.6636
Hata	-1.2%	-0.96%	-0.50%	-0.12%
3 Noktalı Üçgen Eleman	3.5863	3.6051	3.6230	3.6579
Hata	-2.23%	-1.71%	-1.23%	-0.28%



Şekil 7.19: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.13 ve Çizelge 7.14 incelendiğinde, en yakın sonuçlar beklenildiği gibi 8 noktalı dörtgen sonlu elemanın verdiği sonuçlardır. 20x20 karelajda h/a=0.1'de 4 noktalı dörtgen sonlu eleman 3 noktalı üçgen sonlu elemana göre daha iyi sonuç verirken h/a=0.01 için 3 noktalı üçgen sonlu eleman daha iyi sonuç vermektedir.

Çizelge 7.15'te bu plak örneği için kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesine ait 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 7.15'e bakıldığında iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli plakta ince plak sınırından itibaren (h/a<0.05) için 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi en yakın sonuçları vermektedir. h/a>0.05 için ise azaltılmış integrasyon yöntemi ve tam integrasyon yöntemi iyi sonuçlar vermektedir. 3 noktalı üçgen sonlu eleman için ise beklendiği gibi ayrık kayma aralığı yöntemi ile bulunan sonuçlar analitik sonuca daha iyi yakınsamaktadır. 3 noktalı üçgen sonlu elemanda h/a=0.02 ve h/a=0.1 için seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi ile bulunan sonuçlar analitik sonuca daha yakınsaktır. Ama bu fark çok belirgin bir şekilde değildir.

Ayrıca çizelgeye bakıldığında h/a<0.05 için kayma kilitlenmesi probleminin 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda daha belirgin olduğu görülmektedir. 8 noktalı dörtgen elemanlarda ise beklendiği gibi kayma kilitlenmesi probleminin görülme sıklığı daha azdır. Bu durum özellikle h/a=0.001 oranında çok belirgindir. h/a=0.001 oranında 3 noktalı üçgen sonlu elemanda tam integrasyonda hata oranı %72.66 iken 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda hata oranı %64.30'dur. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda ise bunların aksine tam integrasyonda hata oranı çok küçüktür, sadece %0.94'tür. Kalınlık/açıklık oranı arttıkça hata oranları azalmaktadır. Örneğin h/a=0.005'te 3 noktalı üçgen, 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda hata oranları sırasıyla %68.81, %63.32 ve %0.78'dir.

Şekil 7.20'de ise değişen kalınlık/açıklık oranına göre Çizelge 7.15'teki elemanların koyu punto ile yazılan sonuçları kullanılarak kayma kilitlenmesinin önlenmesine ait değişim grafik olarak verilmiştir.

Şekil 7.20'ye göre analitik sonuçlara yakın sonuçların bulunduğunu anlaşılmaktadır. Yani her bir elemanın sonuçlarının analitik sonuçla şekil üzerinde çakıştığı görülmektedir.

Çizelge 7.15: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.

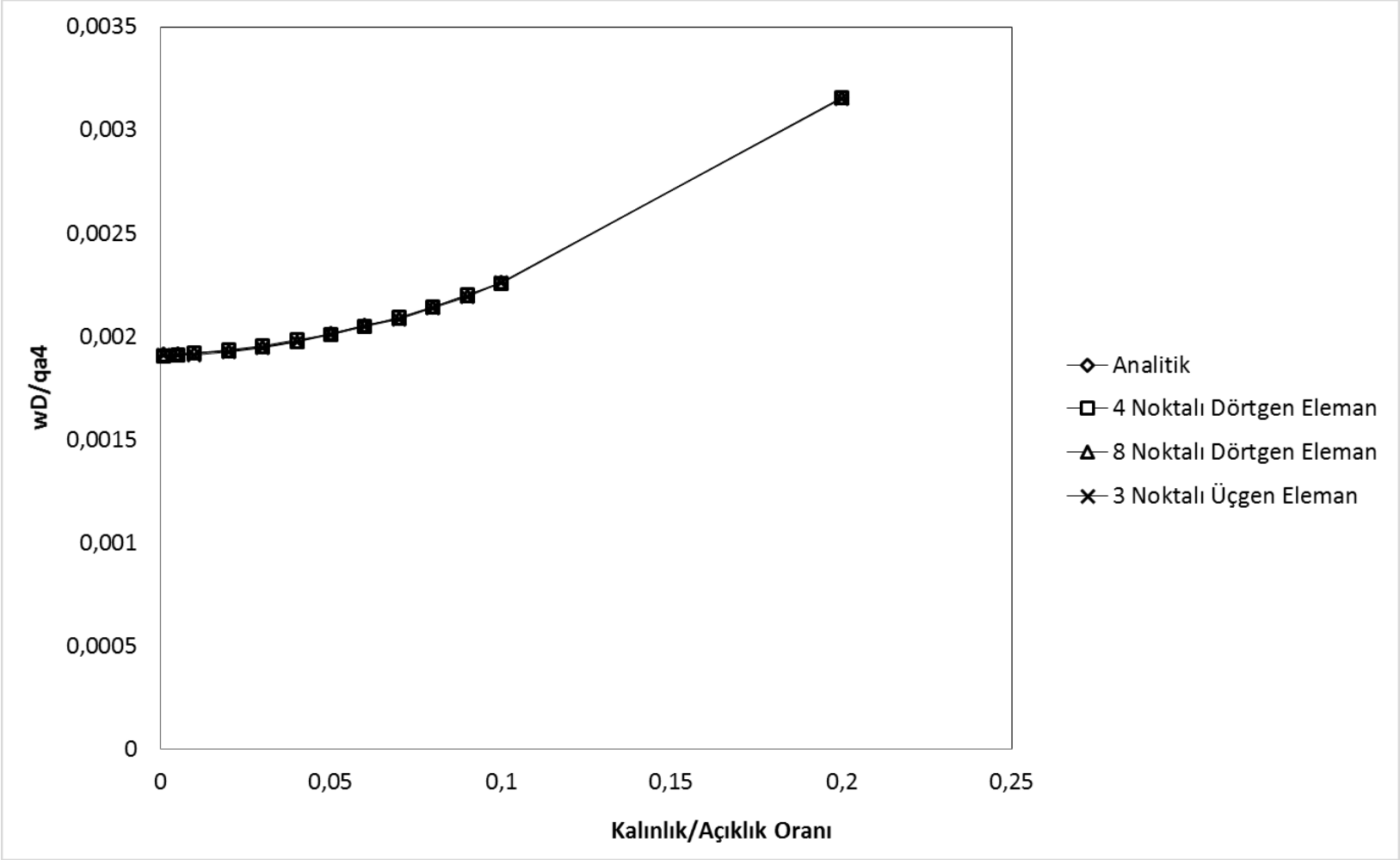
		3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
h/a	Analitik	T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.001913	0.000523	0.001867	0.001892	**0.001908**	0.000683	0.001882	**0.001906**	0.001895	0.001905	**0.001911**
0.005	0.001914	0.000597	0.001879	0.001901	**0.001910**	0.000702	0.001897	**0.001909**	0.001899	0.001908	**0.001913**
0.01	0.001920	0.000785	0.001888	0.001893	**0.001909**	0.000805	0.001905	**0.001918**	0.001902	0.001909	**0.001920**
0.02	0.001929	0.000863	0.001893	**0.001926**	0.001933	0.000893	0.001917	**0.001932**	0.001909	0.001913	**0.001930**
0.03	0.001949	0.000905	0.001929	0.001932	**0.001944**	0.000966	0.001932	**0.001952**	0.001923	0.001931	**0.001947**
0.04	0.001976	0.001288	0.001937	0.001959	**0.001973**	0.001306	0.001956	**0.001982**	0.001933	0.001935	**0.001975**
0.05	0.002012	0.001907	0.001983	0.001997	**0.002008**	0.001922	**0.002010**	0.002017	0.001973	0.001998	**0.002013**
0.06	0.002051	0.001943	0.002031	0.002036	**0.002049**	0.001952	**0.002048**	0.002047	0.002033	**0.002052**	0.002059
0.07	0.002088	0.001971	0.002064	0.002062	**0.002083**	0.001989	**0.002090**	0.002091	0.002069	**0.002088**	0.002089
0.08	0.002139	0.002082	0.002117	0.002123	**0.002137**	0.002098	0.002136	**0.002141**	**0.002139**	0.002149	0.002156
0.09	0.002199	0.002107	0.002168	0.002182	**0.002192**	**0.002201**	0.002192	0.002196	**0.002198**	0.002212	0.002228
0.1	0.002259	0.002179	0.002243	**0.002259**	0.002268	0.002223	0.002253	**0.002257**	**0.002259**	0.002265	0.002273
0.2	0.003154	0.003138	0.003132	0.003143	**0.003149**	0.003153	0.003148	**0.003154**	0.003152	0.003152	**0.003154**

T: Tam İntegrasyon

A: Azaltılmış İntegrasyon

S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı



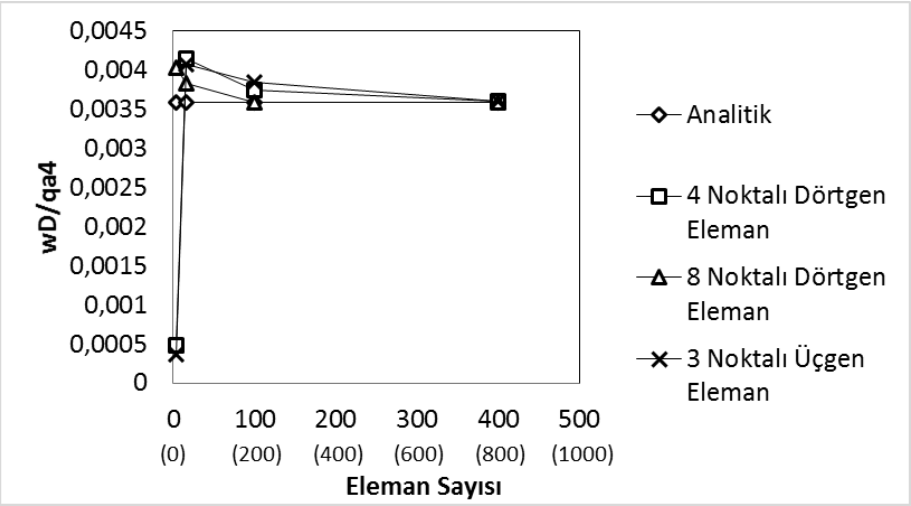
Şekil 7.20: Düzgün yayılı yüklü iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi.

7.5. Örnek 4: Düzgün Yayılı Yüklü Üç Kenarı Ankastre Bir Kenarı Serbest Kare Plak

Bu çalışmada aynı plak örneği üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olacak şekilde ele alınmıştır. Diğer örneklere benzer biçimde aynı sonlu eleman ağları kullanılarak plağın ince ve kalın olduğu durumlarda plak ortasında çökme ve eğilme momentleri bulunmuştur ve Çizelge (7.16-7.19) arasında gösterilmiştir. Söz konusu büyüklüklerin eleman sayısına göre yakınsaması Şekil 7.21, Şekil 7.22, Şekil 7.24 ve Şekil 7.25'te verilmiştir.

Çizelge 7.16: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

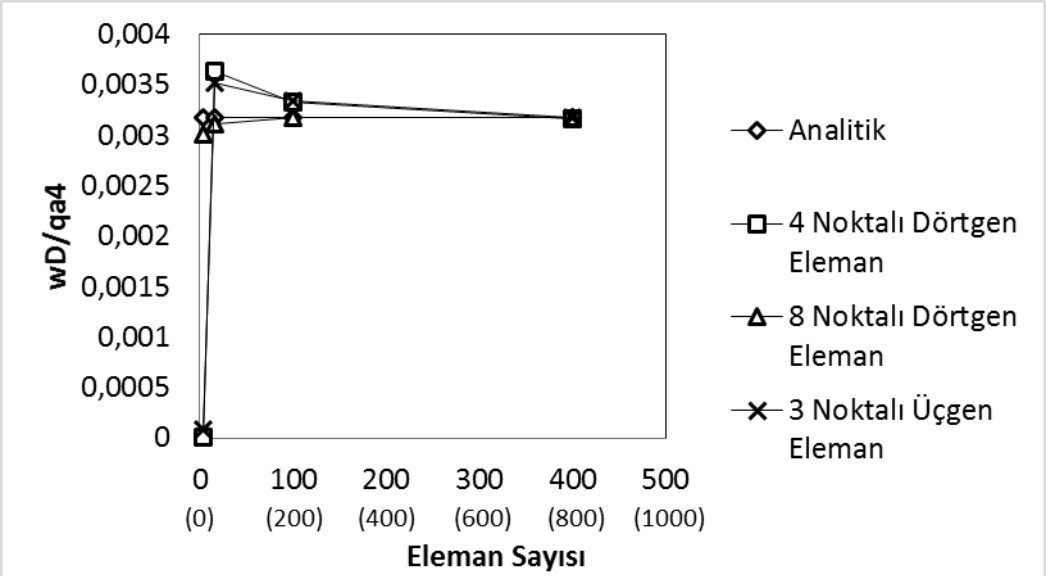
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.003592			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$4.83\text{x}10^{-4}$	0.004150	0.003738	0.003594
Hata	-86.55%	15.53%	4.06%	0.06%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.004025	0.003825	0.003582	0.003592
Hata	12.05%	6.49%	-0.28%	0.0%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$3.67\text{x}10^{-4}$	0.004075	0.003836	0.003593
Hata	-89.78%	13.45%	6.79%	0.03%



Şekil 7.21: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.17: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wD/qa^4).

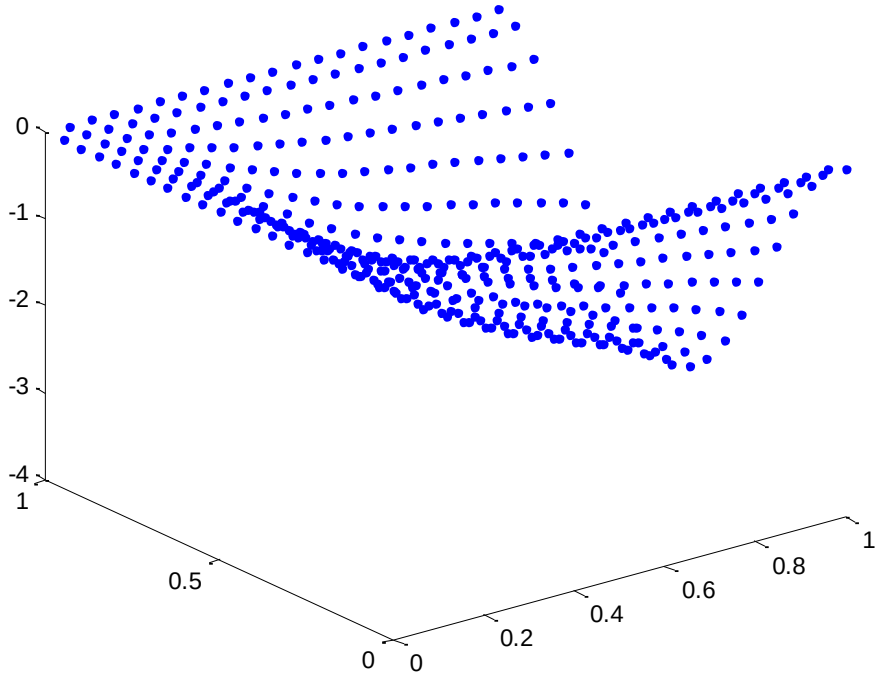
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.003173			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	$7.09x10^{-6}$	0.003631	0.003333	0.003160
Hata	-99.78%	14.43%	5.04%	-0.41%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.003009	0.003105	0.003170	0.003171
Hata	-5.17%	-2.14%	-0.09%	-0.06%
3 Noktalı Üçgen Eleman	$7.73x10^{-5}$	0.003524	0.003342	0.003170
Hata	-97.56%	11.06%	5.33%	-0.09%



Şekil 7.22: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qa^4).

Çizelge 7.16 ve Çizelge 7.17'deki bilgilere göre 4x4 ve 20x20 karelajlarda 3 noktalı üçgen sonlu elemanın sonuçları 4 noktalı dörtgen sonlu elemanın sonuçlarından daha iyidir. 10x10 karelajda ise 4 noktalı dörtgen sonlu elemanın sonuçları daha yakınsaktır. Beklendiği gibi en yakın sonuçlar 8 noktalı dörtgen sonlu elemandadır. 10x10 ve 20x20 karelajlarda 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda hata oranı çok düşüktür.

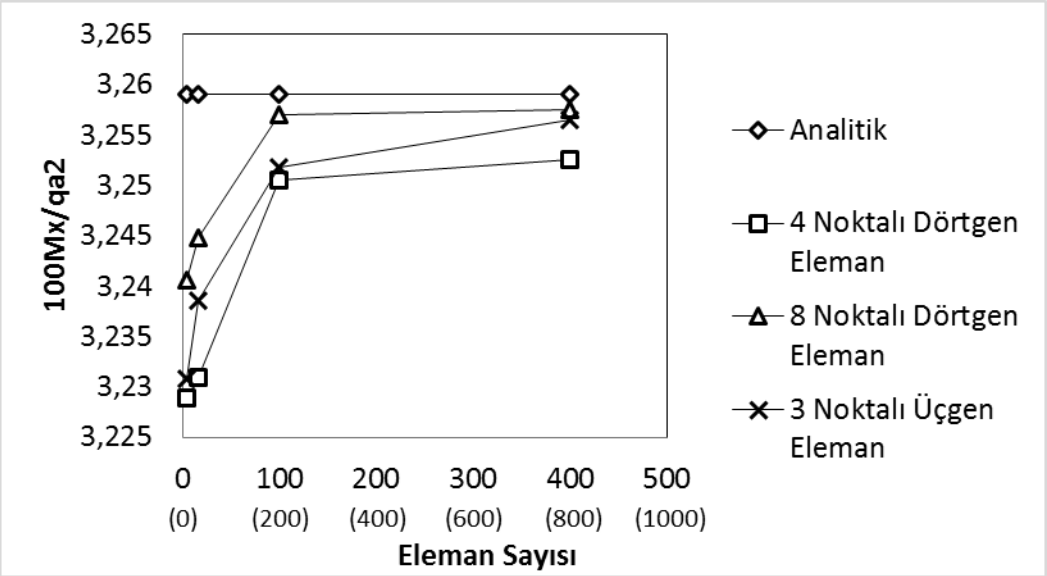
Şekil 7.23'te düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plağın 4 noktalı dörtgen elemanda 20x20 karelajla h/a=0.01 için yer değiştirme şekli gösterilmiştir.



Şekil 7.23: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plaktaki h/a=0.01 için yer değiştirme şekli.

Çizelge 7.18: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	3.2590			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	3.2289	3.2309	3.2505	3.2526
Hata	-0.92%	-0.86%	-0.26%	-0.20%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	3.2406	3.2448	3.2570	3.2575
Hata	-0.56%	-0.44%	-0.06%	-0.05%
3 Noktalı Üçgen Eleman	3.2308	3.2385	3.2518	3.2565
Hata	-0.87%	-0.63%	-0.22%	-0.08%

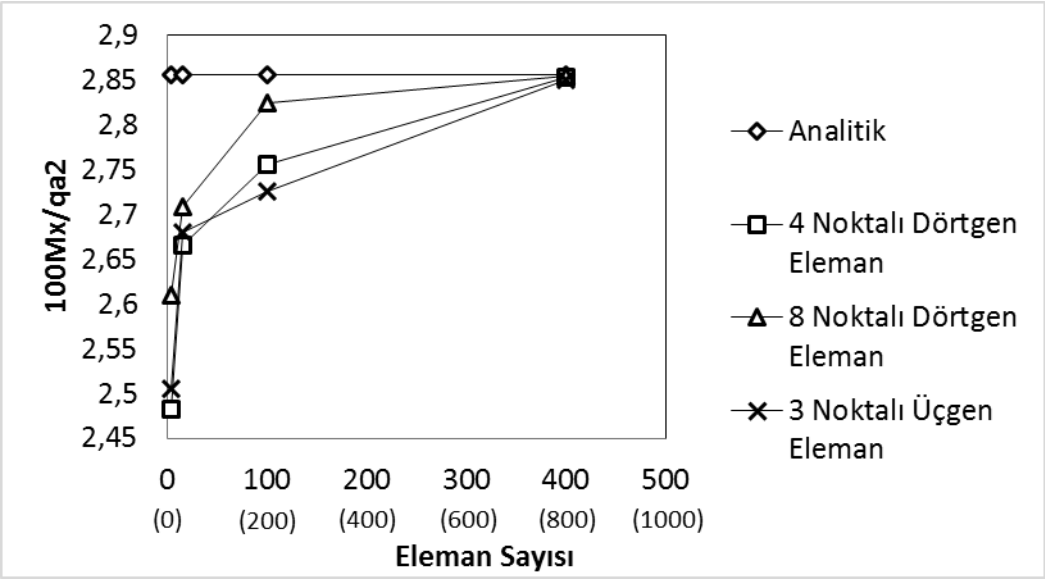


Şekil 7.24: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.19: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti ($100M_x/qa^2$).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	2.8560			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	2.4823	2.6654	2.7563	2.8524
Hata	-13.08%	-6.67%	-3.49%	-0.13%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	2.6090	2.7082	2.8242	2.8538
Hata	-8.65%	-5.18%	-1.11%	-0.08%
3 Noktalı Üçgen Eleman	2.5051	2.6794	2.7253	2.8502
Hata	-12.29%	-6.18%	-4.58%	-0.20%

Çizelgede her bir elemanın analitik sonuca göre hata oranı hesaplanmış olup yüzde cinsinden verilmiştir.



Şekil 7.25: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi ($100M_x/qa^2$).

Çizelge 7.18'de bulunan açıklık momenti sonuçlarına göre 3 noktalı üçgen sonlu eleman 4 noktalı dörtgen sonlu elemandan daha hızlı analitik sonuca yakınsamaktadır. h/a=0.01 için ise 2x2 ve 4x4 karelajda yine 3 noktalı üçgen sonlu eleman daha iyi sonuçlar gösterirken 10x10 ve 20x20 karelajlarda 4 noktalı dörtgen sonlu eleman daha iyi sonuçlar verir. 8 noktalı dörtgen sonlu eleman tüm karelajlar için en yakın sonuçları vermiştir.

Çizelge 7.20'de plağın bu mesnetlenme şeklinde kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesine ait 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 7.20'ye göre 3 noktalı üçgen sonlu elemanda genel olarak ayrık kayma aralığı yöntemi iyi sonuçlar vermiştir. 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi ince ve kalın plaklarda uygun sonuçlar vermiştir. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda ince plaklarda seçilerek azaltılmış integrasyon yöntemi yakın sonuçlar verirken kalın plaklarda tam integrasyon ve azaltılmış integrasyon olumlu sonuçlar vermiştir. Ayrıca çizelgeye bakıldığında h/a<0.05 için kayma kilitlenmesi probleminin 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda daha belirgin olduğu görülmektedir. 8 noktalı dörtgen elemanlarda ise beklendiği gibi kayma kilitlenmesi probleminin görülme sıklığı daha azdır. Şekil 7.26'da ise değişen kalınlık/açıklık oranına göre kayma kilitlenmesinin önlenmesine ait değişim Çizelge 7.20'de her elemanın koyu puntolu sonuçları kullanılarak grafik olarak verilmiştir.

Çizelge 7.20: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi.

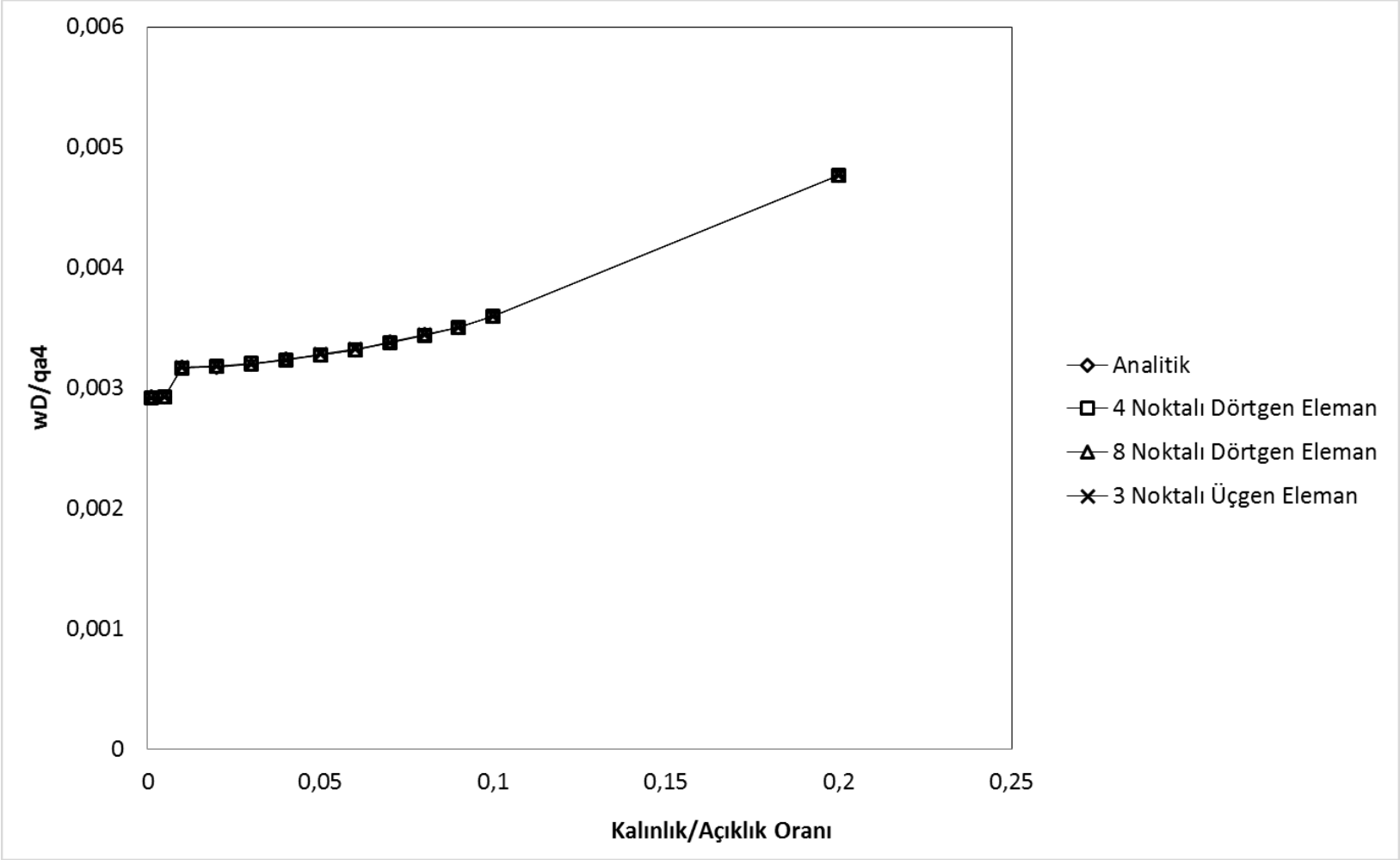
		3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
h/a	Analitik	T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.002922	0.000674	0.002901	0.002907	**0.002919**	0.000712	0.002897	**0.002916**	0.002910	0.002920	**0.002923**
0.005	0.002926	0.000957	0.002906	0.002911	**0.002923**	0.001008	0.002904	**0.002920**	0.002914	0.002922	**0.002927**
0.01	0.003173	0.001234	0.003163	0.003179	**0.003170**	0.001299	0.003152	**0.003160**	**0.003171**	0.003189	0.003205
0.02	0.003174	0.001512	0.003166	0.003180	**0.003176**	0.001673	0.003169	**0.003177**	0.003156	0.003170	**0.003175**
0.03	0.003199	0.001895	0.003185	**0.003197**	0.003203	0.001909	0.003190	**0.003201**	0.003156	0.003191	**0.003199**
0.04	0.003236	0.002118	0.003193	0.003214	**0.003230**	0.002273	0.003223	**0.003233**	0.003218	0.003233	**0.003238**
0.05	0.003276	0.003128	0.003248	0.003269	**0.003279**	0.003180	0.003265	**0.003273**	0.003248	**0.003276**	0.003285
0.06	0.003318	0.003249	0.003326	0.003334	**0.003325**	0.003255	**0.003317**	0.003320	0.003302	**0.003318**	0.003340
0.07	0.003378	0.003285	0.003394	0.003405	**0.003374**	0.003302	0.003372	**0.003375**	**0.003379**	0.003389	0.003397
0.08	0.003440	0.003386	0.003423	0.003435	**0.003443**	0.003393	0.003436	**0.003437**	**0.003440**	0.003445	0.003449
0.09	0.003501	0.003424	0.003518	0.003509	**0.003500**	**0.003499**	0.003512	0.003507	**0.003502**	0.003518	0.003524
0.1	0.003592	0.003507	0.003582	0.003587	**0.003593**	0.003518	**0.003594**	0.003584	0.003582	0.003588	**0.003592**
0.2	0.004764	0.004796	0.004734	0.004749	**0.004768**	0.004799	0.004770	**0.004763**	0.004761	0.004761	**0.004764**

T: Tam İntegrasyon

A: Azaltılmış İntegrasyon

S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

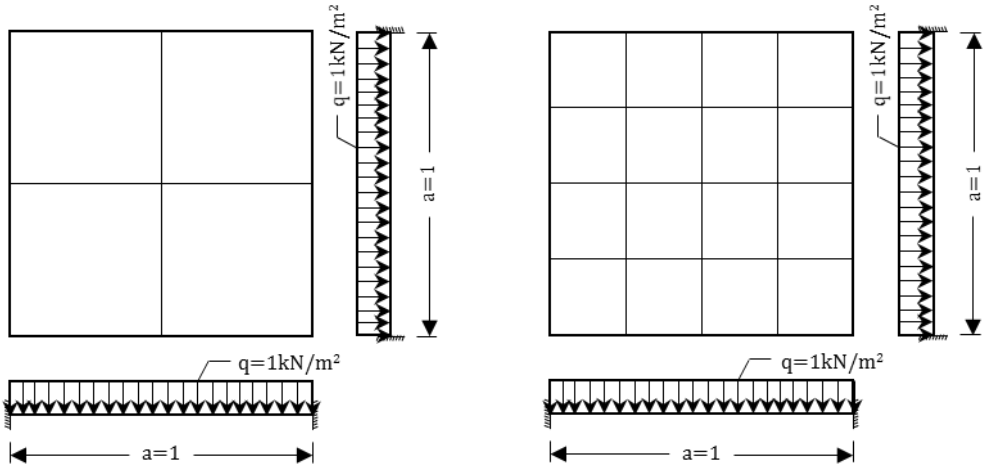
A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı



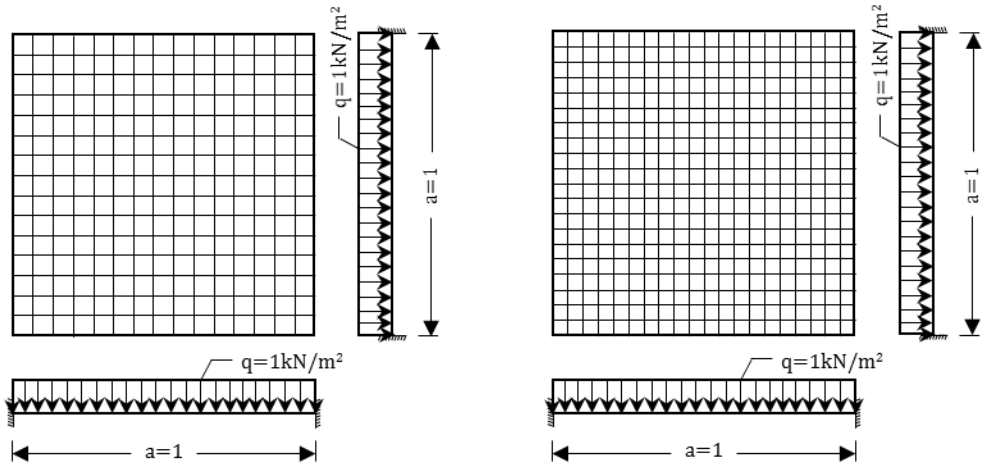
Şekil 7.26: Düzgün yayılı yüklü üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi.

7.6. Örnek 5: Ankastre Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi

Bu bölümde aynı plak için serbest titreşim analizi sadece 4 noktalı dörtgen eleman kullanılarak farklı sonlu eleman ağları (2x2, 4x4, 10x10, 15x15, 20x20, 25x25) dikkate alınarak yapılmıştır (Şekil 7.27). Ankastre kare plakta kayma düzeltme katsayısı k=0.8601, ν=0.3 ve E=10920 kN/m^2 alınarak serbest titreşim analizi yapılmış, doğal frekanslar ve titreşim modları bulunmuştur. Bu sonuçlar h/a=0.01 ve h/a=0.1 için elde edilmiştir. Sonuçlar analitik sonuçlarla uyumludur. x ve y yönündeki yarım dalga titreşimleri m ve n katsayıları kullanılarak doğal frekanslar elde edilmiştir.



2x2 ağ (4 Eleman) 4x4 ağ (16 Eleman)



15x15 ağ (225 Eleman) 20x20 ağ (400 Eleman)

Şekil 7.27: Serbest titreşim analizinde kullanılan sonlu eleman ağları.

Çizelge 7.21 ve Çizelge 7.22'de 4 noktalı dörtgen elemanla söz konusu plakta h/a=0.01 ve h/a=0.1 için elde edilen doğal frekans değerleri, farklı sonlu eleman ağları için analitik sonuçla birlikte verilmiştir.

Çizelge 7.21: h/a=0.01 için kare ankastre plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	0.1845	0.1754
4x4	0.1826	
10x10	0.1800	
15x15	0.1774	
20x20	0.1765	
25x25	0.1761	

Çizelge 7.22: h/a=0.1 için kare ankastre plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	1.6648	1.5940
4x4	1.6487	
10x10	1.6259	
15x15	1.6063	
20x20	1.5996	
25x25	1.5908	

Çizelge 7.21 ve Çizelge 7.22'ye bakıldığında analitik sonuca en yakın sonuçlar 25x25 karelajda bulunmaktadır. Sonlu eleman sayısı arttıkça sonuçlar analitik çözüme yaklaşmaktadır.

Çizelge 7.23 ve Çizelge 7.24'te 2x2, 4x4, 15x15 ve 20x20 karelajlar ve çeşitli (m,n) değerleri için doğal frekanslar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7.23: Çeşitli m ve n değerleri için kare ankastre plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	1.6648	1.6487	1.6063	1.5996	1.5940
2	2	1	3.1443	3.1173	3.0889	3.0662	3.0182
3	1	2	3.1863	3.1465	3.1254	3.0662	3.0182
4	2	2	4.3526	4.3256	4.3035	4.2924	4.1711
5	3	1	5.1863	5.1541	5.1326	5.1232	5.1218
6	1	3	5.2536	5.2235	5.1926	5.1730	5.1594
7	3	2	6.2462	6.2063	6.1823	6.1587	6.0178
8	2	3	6.2468	6.2069	6.1824	6.1587	6.0178
9	4	1	7.6953	7.6823	7.6746	7.6554	7.5169
10	1	4	7.6952	7.6821	7.6746	7.6554	7.5169
11	3	3	7.8365	7.8014	7.7946	7.7703	7.7288
12	4	2	8.6032	8.5262	8.4913	8.4555	8.3985
13	2	4	8.6232	8.5953	8.5524	8.5378	8.3985

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Çizelgede farklı m ve n katsayıları girilip doğal frekansların trigonometrik açılımı kullanılarak sonuçlar bulunmuştur. 20x20 karelaj ile elde edilen sonuçlar analitik çözüme daha hızlı yakınsamaktadır. Örnek vermek gerekirse 20x20 karelajda m=2 ve n=4 için hata oranı %1.66 iken 2x2,4x4 ve 15x15 karelajlar için hata oranları sırasıyla %2.68, %2.34 ve %1.83'tür. m=3 ve n=2 durumunu ele alırsak ise 2x2 karelajda hata oranı %3.80, 4x4 karelajda hata oranı %3.13, 15x15 karelajda %2.73 ve 20x20 karelajda hata oranı %2.34 olmaktadır.

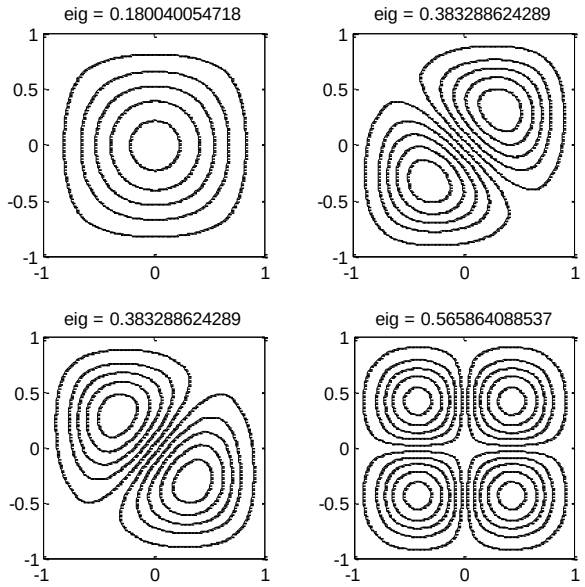
m ve n katsayılarının birbirleriyle değişimi halinde analitik sonuçların aynı olduğu gözlenmektedir. Program sonuçları da birbirine çok yakındır. Bu durumlarda aynı karelajlar için hata oranları çok yakındır.

Çizelge 7.24: Çeşitli m ve n değerleri için kare ankastre plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	0.1845	0.1826	0.1774	0.1765	0.1754
2	2	1	0.4324	0.4047	0.3826	0.3635	0.3576
3	1	2	0.4332	0.4055	0.3826	0.3635	0.3576
4	2	2	0.5826	0.5712	0.5528	0.5358	0.5240
5	3	1	0.6976	0.6888	0.6713	0.6634	0.6465
6	1	3	0.7026	0.6915	0.6774	0.6665	0.6505
7	3	2	0.8618	0.8497	0.8415	0.8266	0.8015
8	2	3	0.8687	0.8498	0.8429	0.8266	0.8015
9	4	1	1.1576	1.1408	1.1159	1.0875	1.0426
10	1	4	1.1580	1.1409	1.1187	1.0875	1.0426
11	3	3	1.2526	1.2086	1.1665	1.1049	1.0628
12	4	2	1.3872	1.3417	1.2937	1.2392	1.1823
13	2	4	1.4039	1.3526	1.2969	1.2446	1.1823

Çizelge 7.24'ü Çizelge 7.23 ile karşılaştırdığımızda kalınlık/açıklık (h/a) oranı azaldıkça bulunan doğal frekans değerleri küçülmektedir. Artan m ve n değerleri için ise doğal frekanslar artmaktadır.

Şekil 7.28'de kare ankastre plakta h/a=0.01 için titreşim modları verilmiştir.



Şekil 7.28: Kare ankastre plakta h/a=0.01 için titreşim modları.

7.7. Örnek 6: Basit Mesnetli Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi

Söz konusu kare plak dört kenarı basit mesnetli olarak aynı sonlu eleman ağları ile çözülmüştür. Basit mesnetli kare plakta kayma düzeltme katsayısı k=5/6, ν=0.3 ve E=10920 kN/m^2 alınarak serbest titreşim analizi yapılmıştır. Doğal frekanslar ve titreşim modları 4 noktalı dörtgen sonlu eleman ile bulunmuştur. Bu sonuçlar h/a=0.01 ve h/a=0.1 için Çizelge 7.25 ve Çizelge 7.26'da analitik sonuçla birlikte verilmiştir.

Çizelge 7.25: h/a=0.01 için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	0.0985	0.0963
4x4	0.0982	
10x10	0.0973	
15x15	0.0968	
20x20	0.0965	
25x25	0.0965	

Çizelge 7.26: h/a=0.1 için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	0.9485	0.9300
4x4	0.9448	
10x10	0.9399	
15x15	0.9346	
20x20	0.9327	
25x25	0.9303	

Çizelge 7.25'te h/a=0.01 için 20x20 ve 25x25 karelaj sonuçları aynıdır. Sonuçlar analitik sonuçla uyumludur.

Çizelge 7.27 ve Çizelge 7.28'de basit mesnetli kare plakta farklı karelajlar ve çeşitli (m,n) değerleri için bulunan doğal frekanslar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7.27: Çeşitli m ve n değerleri için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	0.9485	0.9448	0.9346	0.9327	0.9300
2	2	1	2.7842	2.2726	2.2545	2.2348	2.2190
3	1	2	2.7846.	2.2726	2.2545	2.2343	2.2190
4	2	2	4.7738	3.4674	3.4592	3.4228	3.4060
5	3	1	4.3326	4.3239	4.3031	4.1873	4.1490
6	1	3	4.3327	4.3239	4.3031	4.1871	4.1490
7	3	2	5.4760	5.3829	5.3535	5.2106	5.2060
8	2	3	5.4762	5.3833	5.3535	5.2106	5.2060
9	4	1	7.4728	7.1283	6.9413	6.6492	6.5200
10	1	4	7.4728	7.1284	6.9413	6.6492	6.5200
11	3	3	7.4812	7.2258	7.0318	6.9332	6.8340
12	4	2	8.1236	7.9181	7.8261	7.5483	7.4460
13	2	4	8.1236	7.9183	7.8261	7.5485	7.4460

Çizelge 7.27'de m ve n katsayılarının birbirleriyle değişimi halinde analitik sonuçların aynı olduğu gözlenmektedir. Program sonuçları da birbirine çok yakındır. 20x20 karelajda m=4 ve n=2 için hata oranı %1.38'dir. Aynı karelajda m=2 ve n=4 için hata oranı %1.4'tür.

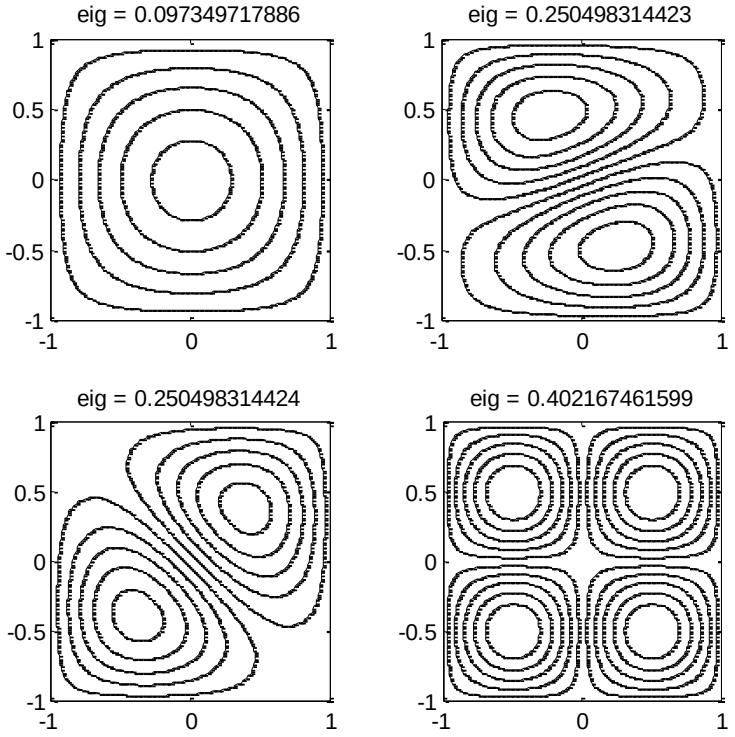
Çizelge 7.28'e göre m=2 ve n=1'de 2x2 karelajda hata oranı %4.82, 4x4 karelajda %2.99, 15x15 karelajda %1.91 ve 20x20 karelajda %1'dir. m=3 ve n=2 için ise hata oranları 2x2, 4x4, 15x15 ve 20x20 karelajlarda sırasıyla %6.23, %4.35, %3.15 ve %2.15'tir. Beklenildiği üzere eleman sayısını artırmak sonuçların daha hızlı yakınsamasını sağlamaktadır.

Çizelge 7.28'i Çizelge 7.27 ile karşılaştırdığımızda kalınlık/açıklık (h/a) oranı azaldıkça bulunan doğal frekans değerleri küçülmektedir. Artan m ve n değerleri için ise doğal frekanslar artmaktadır.

Çizelge 7.28: Çeşitli m ve n değerleri için basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	0.0985	0.0982	0.0968	0.0965	0.0963
2	2	1	0.2522	0.2478	0.2452	0.2430	0.2406
3	1	2	0.2522	0.2479	0.2452	0.2430	0.2406
4	2	2	0.3989	0.3942	0.3915	0.3890	0.3847
5	3	1	0.5163	0.5078	0.4994	0.4928	0.4807
6	1	3	0.5164	0.5080	0.4994	0.4928	0.4807
7	3	2	0.6635	0.6518	0.6443	0.6380	0.6246
8	2	3	0.6635	0.6519	0.6443	0.6380	0.6246
9	4	1	0.9126	0.8919	0.8732	0.8550	0.8156
10	1	4	0.9128	0.8920	0.8732	0.8550	0.8156
11	3	3	0.9362	0.9128	0.8913	0.8857	0.8640
12	4	2	1.1832	1.1673	1.0276	0.9991	0.9592
13	2	4	1.1835	1.1677	1.0276	0.9991	0.9592

Şekil 7.29'da basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları verilmiştir.



Şekil 7.29: Basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları.

7.8. Örnek 7: İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Basit Mesnetli Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi

İki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta kayma düzeltme katsayısı k=0.822, v=0.3 ve E=10920 kN/m^2 alınıp 4 noktalı dörtgen sonlu eleman ile serbest titreşim analizi yapılmış ve doğal frekanslar elde edilmiştir. h/a=0.01 ve h/a=0.1 için bulunan sonuçlar Çizelge 7.29 ve Çizelge 7.30'da gösterilmiştir. Sonuçlar analitik sonuçlarla uyumludur.

Çizelge 7.29: h/a=0.01 için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	0.1442	0.1411
4x4	0.1437	
10x10	0.1432	
15x15	0.1424	
20x20	0.1421	
25x25	0.1416	

Çizelge 7.30: h/a=0.1 için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	1.3209	1.3020
4x4	1.3126	
10x10	1.3083	
15x15	1.2940	
20x20	1.2903	
25x25	1.2882	

Çizelge 7.29 ve Çizelge 7.30'da 20x20 sonlu eleman ağı ile sırasıyla hata oranları %0.71 ve %0.90'dur. h/a=0.01 için karelajlar büyüdükçe analitik sonuca yakınsarken, h/a=0.1 için 10x10 karelajda en yakın sonucu vermekte fakat daha sonra karelaj büyüdükçe analitik sonuçtan uzaklaşmaktadır.

Çizelge 7.31 ve Çizelge 7.32'de 2x2, 4x4, 15x15 ve 20x20 karelajlar ve çeşitli (m,n) değerleri için bulunan frekanslar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7.31: Çeşitli m ve n değerleri için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	1.3209	1.3126	1.2940	1.2903	1.3020
2	2	1	2.4173	2.4094	2.3971	2.3912	2.3980
3	1	2	2.9513	2.9466	2.9290	2.9083	2.8880
4	2	2	3.8744	3.8676	3.8394	3.8256	3.8520
5	3	1	4.3616	4.3549	4.3475	4.3357	4.2370
6	1	3	5.2185	5.2061	5.1354	5.0672	4.9360
7	3	2	5.6873	5.6049	5.5094	5.4182	5.3600
8	2	3	6.0262	5.9623	5.8974	5.7748	5.6640
9	4	1	7.1463	6.9823	6.9384	6.9042	6.8660
10	1	4	7.4335	7.3876	7.2939	7.2069	7.1650
11	3	3	7.9884	7.8475	7.7968	7.7233	7.6620
12	4	2	7.9936	7.9264	7.8516	7.8163	7.7490
13	2	4	8.6136	8.5234	8.4308	8.3992	8.3500

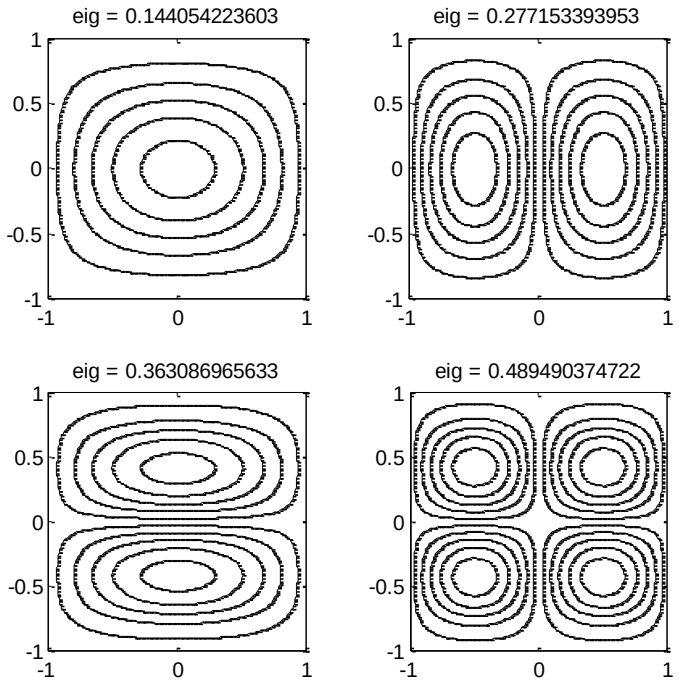
Çizelge 7.31'e bakıldığında ilk dikkat çeken m=1 ve n=2 olurken bulunan doğal frekanslar m=2 ve n=1 için bulunan frekanslarla birbirine yakın değildir. m=1 ve n=2 durumunda 20x20 karelajda bulunan sonuç 2.9083 değerindeyken m=2 ve n=1 için bulunan sonuç 2.3912'dir. Bu durum dört kenarı ankastre ve dört kenarı basit mesnetli duruma göre farklıdır.

Çizelge 7.32'de benzer durum görülmektedir. m ve n katsayıları yer değiştirdiğinde birbirinden farklı değerler almaktadır. Karelajlar büyüdükçe analitik sonuca daha hızlı yakınsamaktadır.

Çizelge 7.32: Çeşitli m ve n değerleri için iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	0.1442	0.1437	0.1424	0.1421	0.1411
2	2	1	0.2789	0.2763	0.2710	0.2694	0.2668
3	1	2	0.3599	0.3553	0.3484	0.3342	0.3377
4	2	2	0.4861	0.4783	0.4722	0.4679	0.4608
5	3	1	0.5332	0.5274	0.5191	0.5033	0.4979
6	1	3	0.7113	0.7019	0.6710	0.6423	0.6279
7	3	2	0.8248	0.7753	0.7080	0.6829	0.6534
8	2	3	0.8649	0.8353	0.7944	0.7534	0.7238
9	4	1	0.9371	0.9053	0.8988	0.8772	0.8639
10	1	4	1.1234	1.0623	1.0228	1.0154	0.9974
11	3	3	1.1109	1.0844	1.0758	1.0592	1.0352
12	4	2	1.2096	1.1874	1.1339	1.1097	1.0836
13	2	4	1.2815	1.2621	1.2570	1.2509	1.2460

Şekil 7.30'da iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları verilmiştir.



Şekil 7.30: İki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları.

7.9. Örnek 8: Üç Kenarı Ankastre Bir Kenarı Serbest Olan Kare Plakta Serbest Titreşim Analizi

Üç kenarı ankastre bir kenarı serbest mesnetli olan kare plakta kayma düzeltme katsayısı k=0.8601, ν=0.3 ve E=10920 kN/m^2 alınarak 4 noktalı dörtgen sonlu elemanla h/a=0.01 ve h/a=0.1 için serbest titreşim analizi yapılmıştır. Bulunan sonuçlar Çizelge 7.33 ve Çizelge 7.34'te gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7.33: h/a=0.01 için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	0.1203	0.1171
4x4	0.1198	
10x10	0.1188	
15x15	0.1180	
20x20	0.1175	
25x25	0.1172	

Çizelge 7.34: h/a=0.1 için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar.

Sonlu Eleman Ağı	4 Noktalı Dörtgen Eleman	Analitik Sonuç
2x2	1.0948	1.0890
4x4	1.0940	
10x10	1.0931	
15x15	1.0923	
20x20	1.0915	
25x25	1.0902	

Çizelge 7.33 ve Çizelge 7.34'e göre bulunan doğal frekanslar, karelajlar büyüdükçe her ikisinde de analitik sonuca hızlı yakınsamaktadırlar.

Çizelge 7.35 ve Çizelge 7.36'da üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plak için bulunan doğal frekanslar gösterilmiştir ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7.35: Çeşitli m ve n değerleri için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.1 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	1.0948	1.0940	1.0923	1.0915	1.0890
2	2	1	1.7579	1.7574	1.7566	1.7559	1.7580
3	1	2	2.7682	2.7496	2.7337	2.6941	2.6730
4	2	2	3.3012	3.2788	3.2591	3.2324	3.2160
5	3	1	3.4084	3.3814	3.3541	3.3255	3.3180
6	1	3	4.6784	4.6514	4.6395	4.6265	4.6150
7	3	2	4.9987	4.9912	4.9746	4.9623	4.9520
8	2	3	5.4849	5.4719	5.4620	5.4413	5.4240
9	4	1	5.5481	5.5363	5.5245	5.5027	5.4930
10	1	4	6.6211	6.6037	6.5865	6.5541	6.5260
11	3	3	6.6875	6.6417	6.6347	6.6249	6.6030
12	4	2	7.7120	7.6991	7.6904	7.6648	7.6100
13	2	4	8.2014	8.1957	8.1626	8.1266	8.0930

Çizelge 7.35'te Örnek 7'de olduğu gibi m ve n katsayıları yer değiştirdiğinde doğal frekanslar farklı olmaktadır. 20x20 karelajda m=3 ve n=2 için doğal frekans değeri 4.9623 olurken m=2 ve n=3 için bu değerin 5.4413 olduğu görülmektedir.

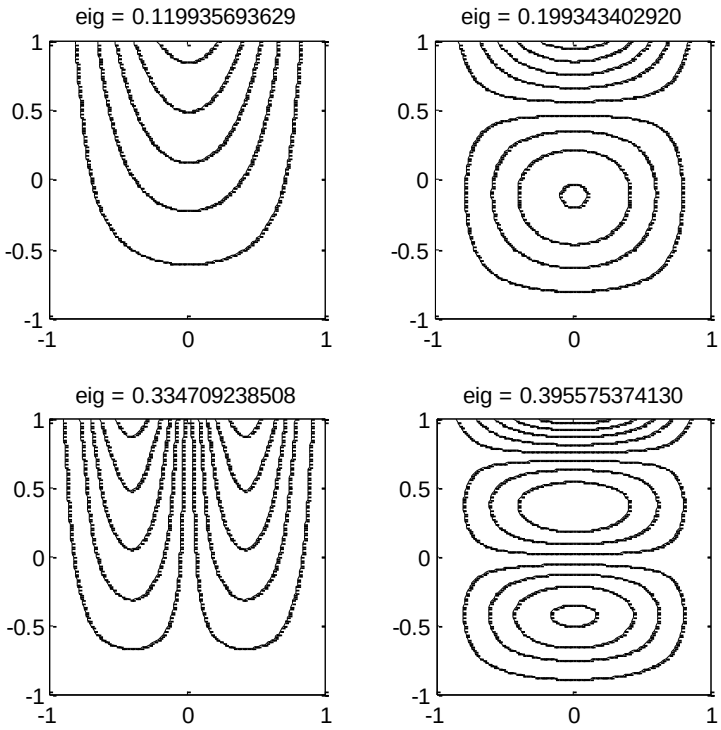
Çizelge 7.36'da benzer durum görülmektedir. m ve n katsayıları yer değiştirdiğinde birbirinden farklı değerler almaktadır. m=3 ve n=2 için doğal frekans değeri 0.6305 olurken m=2 ve n=3 için bu değerin 0.5778 olduğu görülmektedir.

Çizelge 7.36'yı Çizelge 7.35 ile karşılaştırdığımızda kalınlık/açıklık (h/a) oranı azaldıkça bulunan doğal frekans değerleri küçülmektedir. Çizelge 7.35 ve Çizelge 7.36'ya göre karelajlar büyüdükçe sonuçlar analitik sonuçlara yaklaşmaktadır. m ve n katsayıları büyüdükçe bulunan doğal frekanslar artış göstermektedir.

Çizelge 7.36: Çeşitli m ve n değerleri için üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta doğal frekanslar (h/a=0.01 için).

Mod Numaraları	m	n	2x2	4x4	15x15	20x20	Analitik Sonuçlar
1	1	1	0.1203	0.1198	0.1180	0.1175	0.1171
2	2	1	0.1994	0.1979	0.1967	0.1959	0.1951
3	1	2	0.3267	0.3243	0.3193	0.3124	0.3093
4	2	2	0.3932	0.3887	0.3830	0.3796	0.3740
5	3	1	0.4133	0.4074	0.4031	0.3992	0.3931
6	1	3	0.6012	0.5946	0.5839	0.5778	0.5695
7	3	2	0.6492	0.6428	0.6387	0.6305	0.6242
8	2	3	0.7381	0.7299	0.7243	0.7149	0.7020
9	4	1	0.8987	0.8911	0.8817	0.8724	0.8625
10	1	4	0.9175	0.9115	0.9046	0.8940	0.8812
11	3	3	1.1799	1.1326	1.0994	1.0126	0.9812
12	4	2	1.1963	1.1788	1.1407	1.1264	1.0980
13	2	4	1.2255	1.2189	1.1853	1.1681	1.1264

Şekil 7.31'de üç kenarı ankastre bir kenarı serbest kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları verilmiştir.



Şekil 7.31: Üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta h/a=0.01 için titreşim modları.

7.10. Örnek 9: Mindlin Plakların Burkulma Analizi

Kare plakta dört kenarı ankastre, dört kenarı basit, iki kenarı ankastre iki kenarı basit ve üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan plakta yayılı yük altında kritik burkulma yükleri bulunmuştur. Sonuçlar dört noktalı sonlu elemanla h/a=0.01'den başlayarak h/a=0.2'ye kadar farklı oranlar için elde edilmiştir.

Burkulma yükü faktörü:

$$K = \lambda_{cr} a^2 / \pi^2 D \qquad \textbf{(7.2)}$$

olarak tanımlanır. Burada λ_{cr} kritik burkulma yükü, a ise kenar uzunluğudur. Malzeme özellikleri E=10920 kN/m^2 ve poisson oranı ν=0.3'tür. Çeşitli h/a oranları için bulunan burkulma yükleri faktörleri Çizelge 7.37'de gösterilmiştir. Dört kenarı ankastre mesnet (CCCC), dört kenarı basit mesnet (SSSS), iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnet (SCSC) ve üç kenarı ankastre bir kenarı serbest (CCCF) olan sınır koşulları aynı çizelgede gösterilmiştir. Sonuçlar, analitik sonuçlarla karşılaştırılmış ve yeterli yakınsamanın sağlandığı gözlenmiştir.

Çizelge 7.37: Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri.

h/a	Plak Türleri	Sonuçlar	Analitik Sonuçlar
0.01	SSSS	4.0873	4.0006
	CCCC	10.8135	10.0871
	CCCF	4.0657	3.9866
	SCSC	6.9987	7.0235
0.02	SSSS	4.0802	3.9982
	CCCC	10.7396	10.0349
	CCCF	4.0052	3.9763
	SCSC	6.9953	6.9818
0.03	SSSS	4.0685	3.9862
	CCCC	10.6195	10.0123
	CCCF	3.9347	3.9162
	SCSC	6.9911	6.9229
0.04	SSSS	4.0521	3.9724
	CCCC	10.4567	9.9862
	CCCF	3.8539	3.8029
	SCSC	6.9058	6.8262

Çizelge 7.37 (devam): Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri.

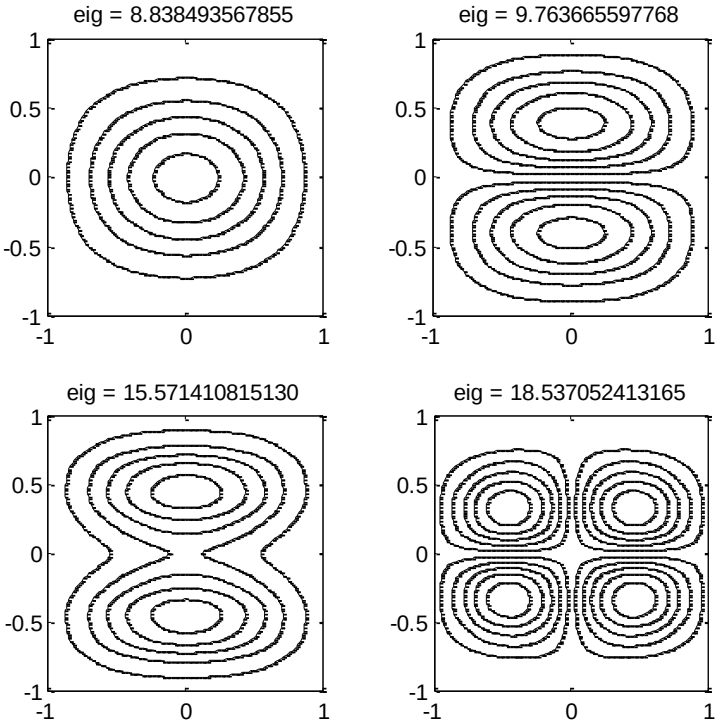
h/a	Plak Türleri	Sonuçlar	Analitik Sonuçlar
0.05	SSSS	4.0313	3.9464
	CCCC	10.2553	9.5819
	CCCF	3.7984	3.6962
	SCSC	6.8032	6.7429
0.06	SSSS	4.0061	3.9239
	CCCC	10.0200	9.5269
	CCCF	3.6678	3.6064
	SCSC	6.6858	6.6172
0.07	SSSS	3.9767	3.9088
	CCCC	9.7558	9.4237
	CCCF	3.5664	3.4064
	SCSC	6.5555	6.4979
0.08	SSSS	3.9434	3.9468
	CCCC	9.4676	9.4693
	CCCF	3.4618	3.3873
	SCSC	6.4142	6.3678

Çizelge 7.37'ye bakıldığında 4 noktalı dörtgen sonlu elemanın burkulma analizi bakımından kararlı bir davranış gösterdiği görülmektedir. Hata oranları kabul edilebilir seviyededir. h/a=0.1 oranı için dört kenarı basit mesnetli plakta hata oranı %2.12, dört kenarı ankastre kare plakta %6.58, iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli plakta %0.81 ve üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta %1.96'dır. h/a=0.01 oranı için ise hata oranları sırasıyla dört kenarı basit mesnetli plakta %2.17, dört kenarı ankastre kare plakta %7.20, üç kenarı ankastre bir kenarı serbest olan kare plakta %1.98 ve iki kenarı ankastre iki kenarı basit mesnetli plakta %0.35'tir. Şekil 7.32'ye bakıldığında sıfır olan enerji modlarının oluşmadığı anlaşılmaktadır.

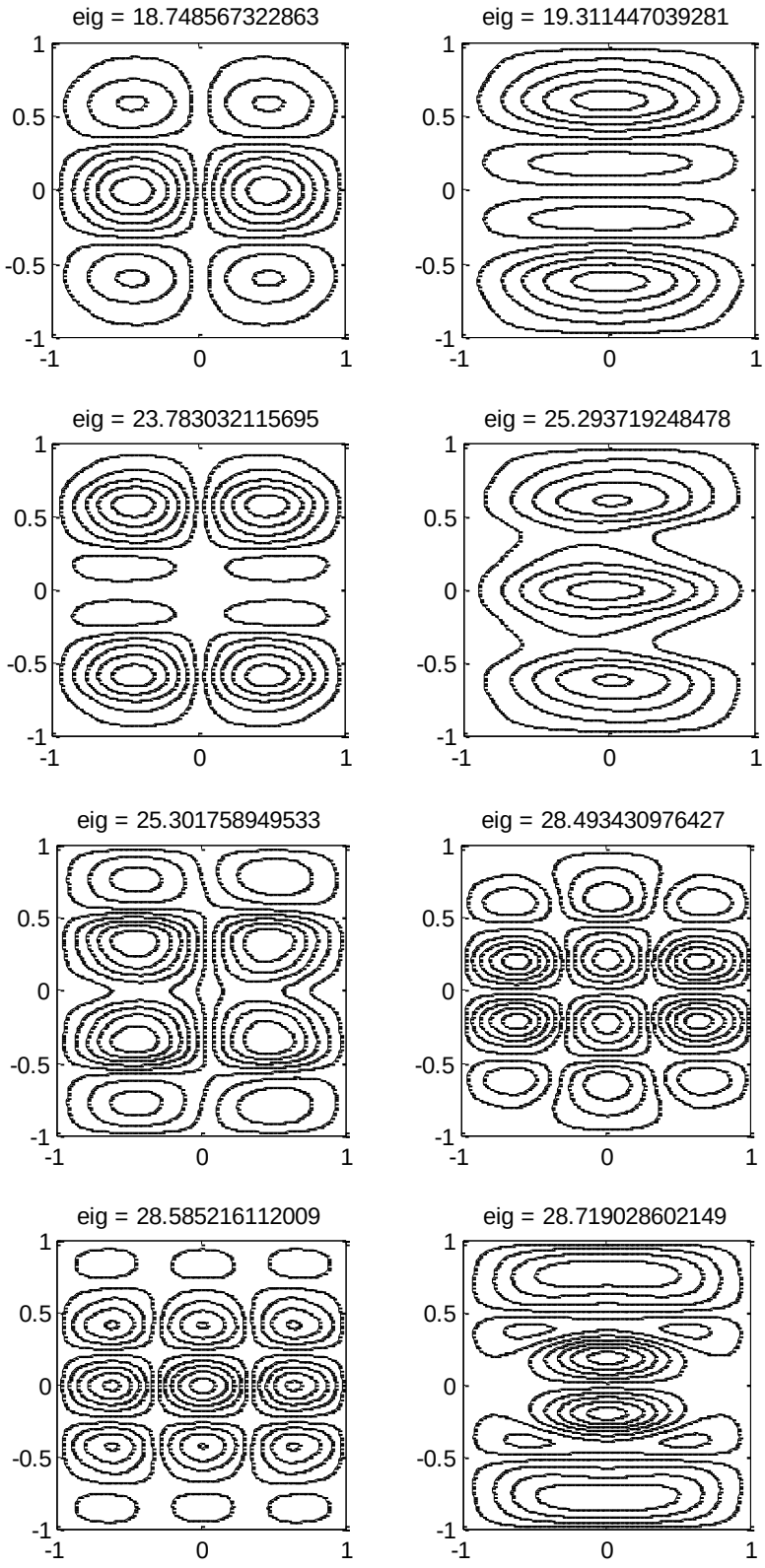
Çizelge 7.37 (devam): Mindlin plakların çeşitli sınır şartları ve h/a oranları için burkulma yükü faktörleri.

h/a	Plak Türleri	Sonuçlar	Analitik Sonuçlar
0.09	SSSS	3.9063	3.8042
	CCCC	9.1603	9.1123
	CCCF	3.3552	3.3067
	SCSC	6.2637	6.2084
0.1	SSSS	3.8656	3.7853
	CCCC	8.8385	8.2931
	CCCF	3.2479	3.1856
	SCSC	6.1059	6.0567
0.2	SSSS	3.3202	3.2448
	CCCC	5.5633	5.4967
	CCCF	2.2821	2.2295
	SCSC	4.4264	4.3984

Şekil 7.32'de ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.01 için burkulma modları gösterilmiştir.



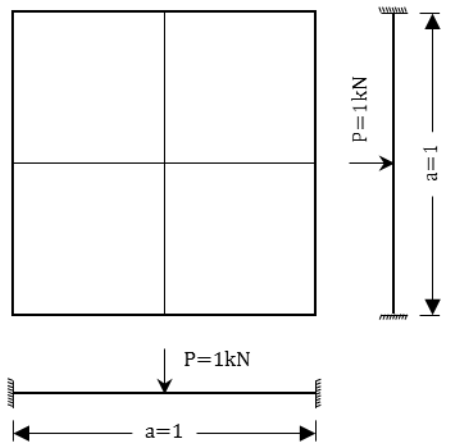
Şekil 7.32: Ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.01 için burkulma modları(1-4).



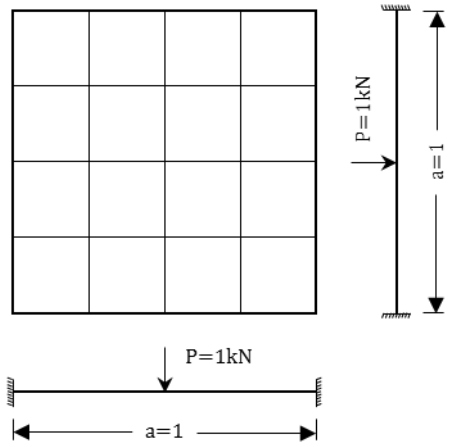
Şekil 7.32 (devam): Ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.01 için burkulma modları(5-12).

7.11. Örnek 10: Tekil Yüklü Ankastre Mesnetli Kare Plak

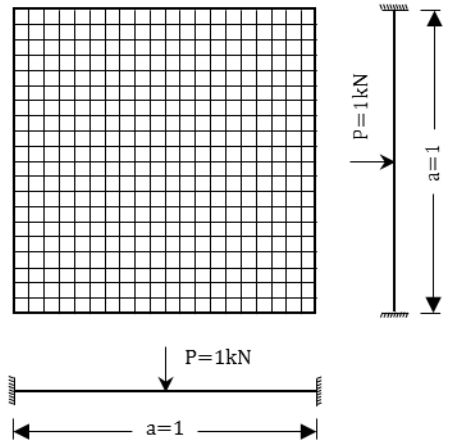
Bu çalışmada, tekil yüklü, ankastre mesnetli bir kare plak incelenmiştir. 2x2, 4x4, 10x10 ve 20x20 karelajlar kullanılmıştır (Şekil 7.33-Şekil 7.34). Kalın sayılabilecek ve ince kare plaklar, plağın orta noktasındaki çökmesinin yakınsaması bakımından incelenmiştir. Tekil yük, P=1 kN alınmıştır. Kullanılan diğer veriler Örnek 1'deki verilerle aynıdır. Örnek 1-4 arasında olduğu gibi çizelgelerde sonlu elemanlar için verilen büyüklükler boyutsuz cinstendir. Bunun için çökme değerleri wEh^3/Pa^2 cinsinden gösterilmiştir.



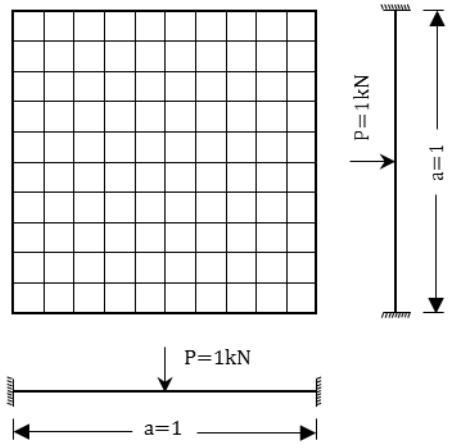
2x2 ağ (4 eleman)



4x4 ağ (16 eleman)

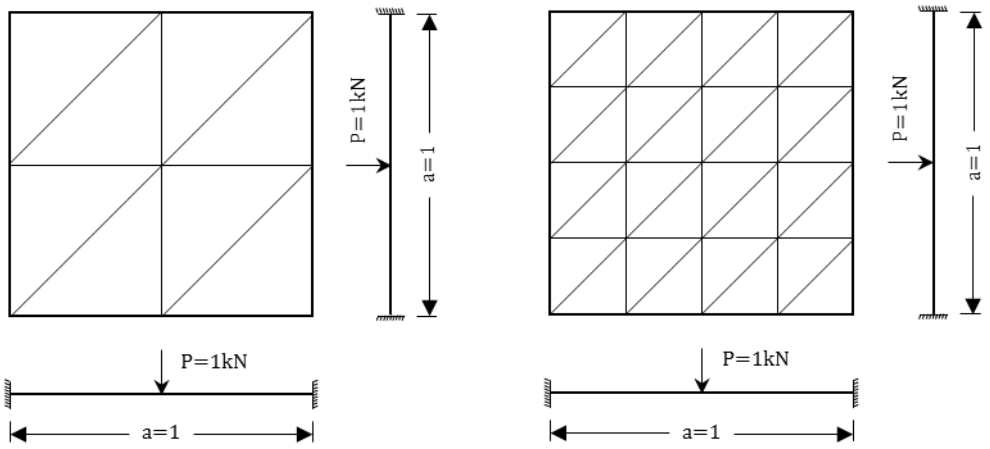


10x10 ağ (100 eleman)

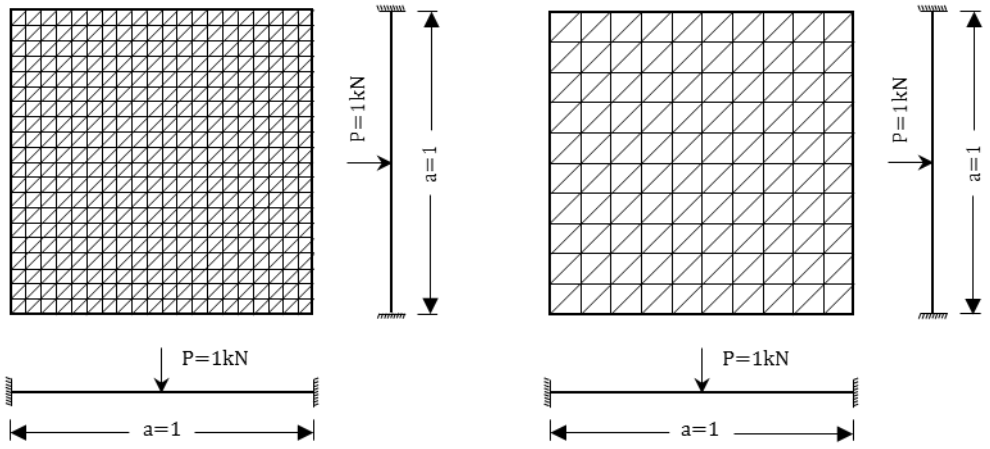


20x20 ağ (400 eleman)

Şekil 7.33: 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için sonlu eleman ağları.



2x2 ağ (8 eleman) 4x4 ağ (32 eleman)



10x10 ağ (200 eleman) 20x20 ağ (800 eleman)

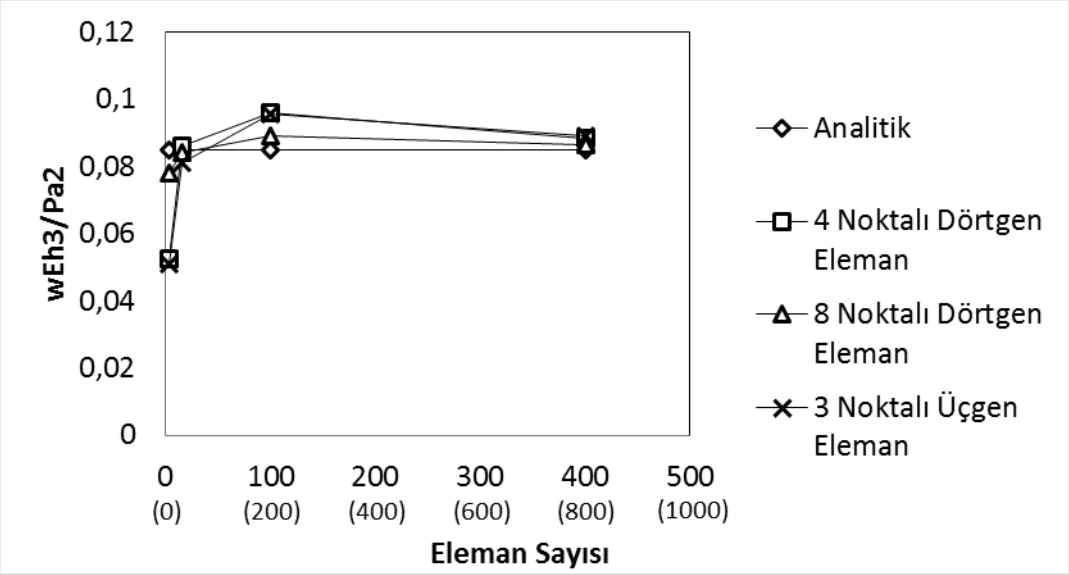
Şekil 7.34: 3 noktalı üçgen sonlu eleman için sonlu eleman ağları.

Plak kalınlığı h=0.1 m ve h=0.01 m için söz konusu üç sonlu eleman ile elde edilen plak ortası çökme değerleri gösterilen sonlu eleman ağları için Çizelge 7.38 ve Çizelge 7.39'da, söz konusu büyüklüklerin eleman sayısına göre yakınsaması Şekil 7.35 ve Şekil 7.36'da verilmiştir.

Çizelgelerde her bir elemanın analitik sonuca göre hata oranı hesaplanmış olup yüzde cinsinden verilmiştir. Hata oranlarındaki eksi değerleri analitik sonuca alttan yakınsama olduğunu gösterirken pozitif hata oranları ise analitik sonuca üstten yakınsama olduğunu göstermektedir.

Çizelge 7.38: Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi (wEh^3/Pa^2).

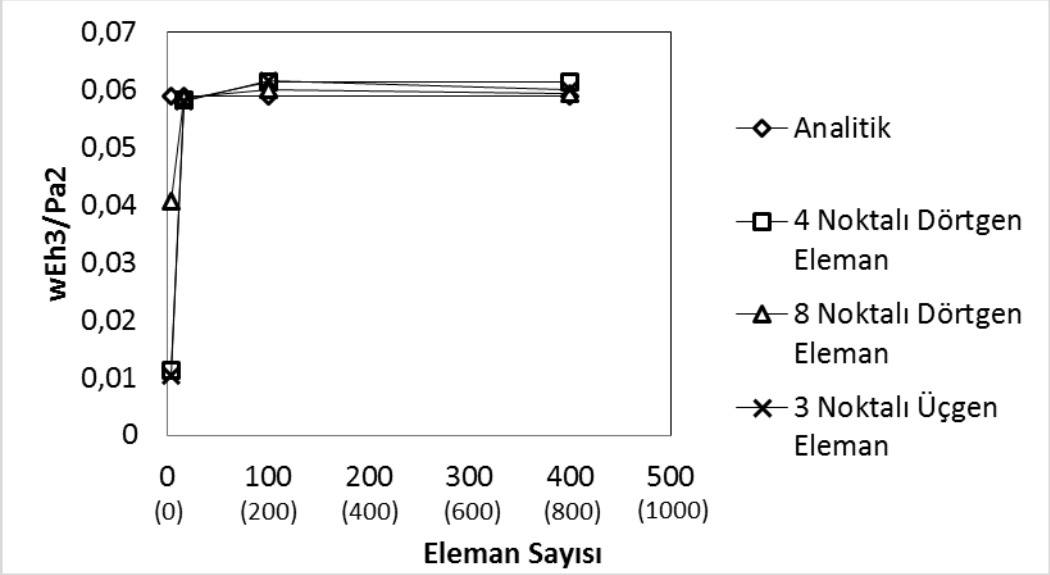
Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.08493			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	0.05232	0.08592	0.09607	0.08827
Hata	-38.4%	1.16%	13.12%	3.93%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.07821	0.08407	0.08903	0.08637
Hata	-7.91%	-1.01%	4.83%	1.70%
3 Noktalı Üçgen Eleman	0.05078	0.08113	0.09552	0.08922
Hata	-40.2%	-4.47%	12.47%	5.05%



Şekil 7.35: Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wEh^3/Pa^2).

Çizelge 7.39: Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi (wEh^3/Pa^2).

Eleman ağı	2x2	4x4	10x10	20x20
Analitik	0.05882			
4 Noktalı Dörtgen Eleman	0.01118	0.05819	0.06128	0.06129
Hata	-80.99%	-1.07%	4.18%	4.20%
8 Noktalı Dörtgen Eleman	0.04074	0.05863	0.06007	0.05926
Hata	-30.74%	-0.32%	2.13%	0.75%
3 Noktalı Üçgen Eleman	0.01046	0.05808	0.06164	0.06009
Hata	-82.22%	-1.26%	4.79%	2.16%



Şekil 7.36: Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wEh^3/Pa^2).

Çizelge 7.38 ve Çizelge 7.39'a bakıldığında düzgün yayılı yüklü durumun tersine hata oranları değişiklik göstermektedir. En az hata oranı 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için 4x4 karelajda görülmektedir. En fazla hata oranı ise 2x2 karelajda bulunmaktadır. 4x4 karelajdan sonra gelen 10x10 karelajda ise hata oranları artmaktadır.

Çizelge 7.40'ta plağın tekil yüklü ankastre mesnetlenme şeklinde kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesine ait 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla 20x20 karelajda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 7.40 incelendiğinde 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda ince plak sınırından itibaren (h/a<0.05) seçilerek azaltılmış integrasyon yönteminin iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. İnce plak sınırının üstünde ise azaltılmış integrasyon yöntemi ve tam integrasyon yönteminin yaklaşıklık derecesi iyidir. 3 noktalı üçgen sonlu elemanda ayrık kayma aralığı yöntemiyle bulunan sonuçlar analitik sonuca yakındır. 4 noktalı dörtgen sonlu eleman 8 noktalı dörtgen sonlu elemana ince plak sınırının altında ve üstünde benzer yaklaşım göstermiştir.

Çizelge 7.40'a bakıldığında h/a<0.05 için kayma kilitlenmesi probleminin 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda daha belirgin olduğu görülmektedir. 8 noktalı dörtgen elemanlarda ise beklendiği gibi kayma kilitlenmesi probleminin görülme sıklığı diğerlerine göre daha azdır. Bu durum özellikle h/a=0.001 oranında çok belirgindir. h/a=0.001 oranında 3 noktalı üçgen sonlu elemanda tam integrasyonda hata oranı %81.60 iken 4 noktalı dörtgen sonlu elemanda hata oranı %79.56'dır. 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda ise bunların aksine tam integrasyonda hata oranı daha küçüktür, %21.57'dir. Kalınlık/açıklık oranı arttıkça hata oranları azalmaktadır. Örneğin h/a=0.005'te 3 noktalı üçgen, 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda hata oranları sırasıyla %78.13, %77.45 ve %21.08'dir.

Şekil 7.37'de ise değişen kalınlık/açıklık oranına göre kayma kilitlenmesinin önlenmesine ait değişim Çizelge 7.40'ta her elemanın koyu puntolu sonuçları kullanılarak grafik olarak verilmiştir.

Şekil 7.37'ye göre analitik sonuçlara yakın sonuçların bulunduğunu anlaşılmaktadır. Yani her bir elemanın sonuçlarının analitik sonuçla şekil üzerinde çakıştığı görülmektedir.

Çizelge 7.40: Tekil yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kayma kilitlenmesi testi (wEh^3/Pa^2).

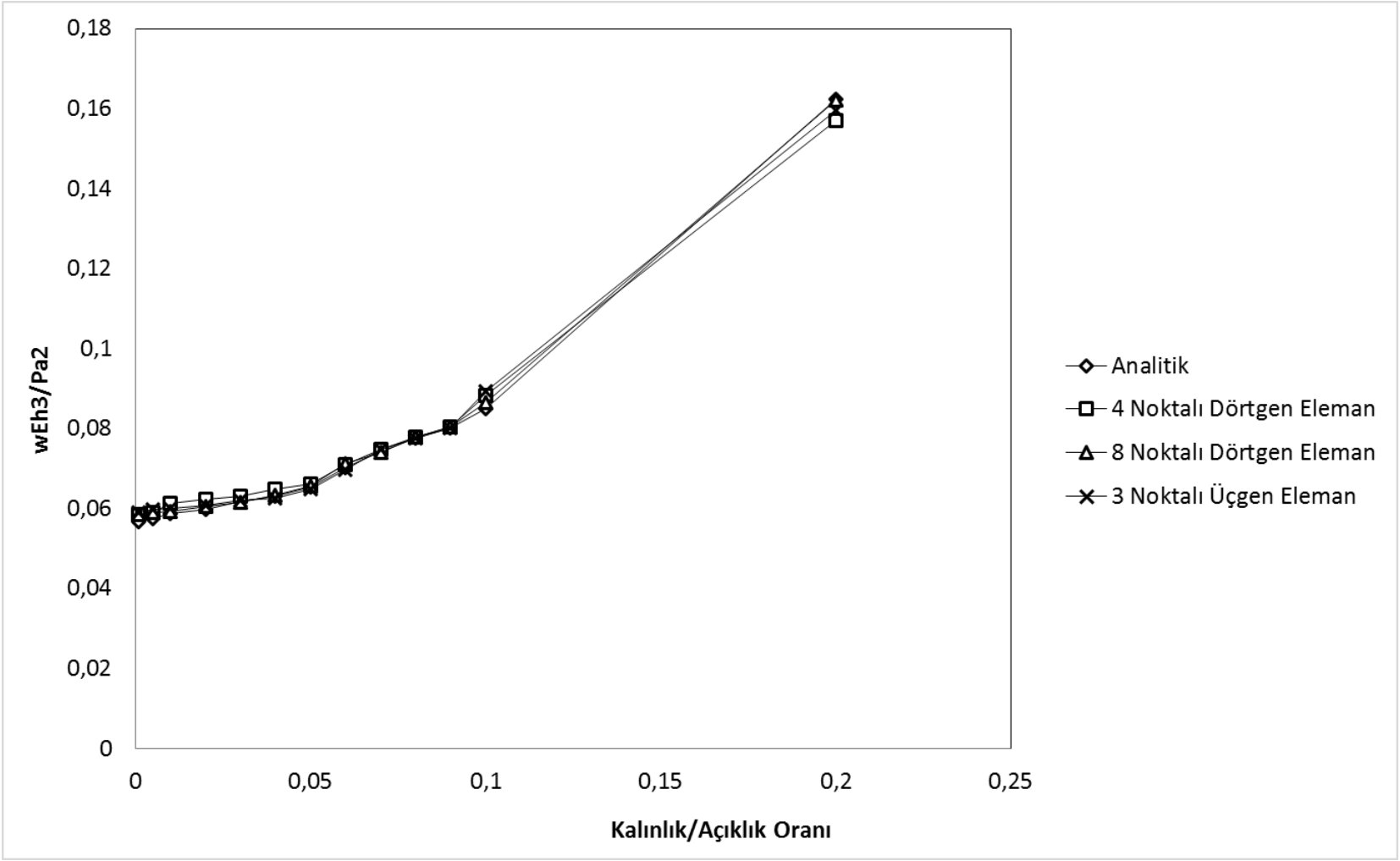
		3 Noktalı Üçgen Eleman				4 Noktalı Dörtgen Eleman			8 Noktalı Dörtgen Eleman		
h/a	Analitik	T	A	S	A.K.A.	T	A	S	T	A	S
0.001	0.05679	0.01045	0.06392	0.06305	**0.05908**	0.01161	0.06408	**0.05834**	0.06904	0.06689	**0.05853**
0.005	0.05744	0.01256	0.06401	0.06319	**0.05976**	0.01295	0.06419	**0.05891**	0.06955	0.06734	**0.05894**
0.01	0.05882	0.01527	0.06432	0.06353	**0.06009**	0.01578	0.06426	**0.06129**	0.07084	0.06913	**0.05926**
0.02	0.05963	0.01998	0.06486	0.06392	**0.06078**	0.02086	0.06449	**0.06237**	0.07141	0.06948	**0.06059**
0.03	0.06178	0.02675	0.06548	0.06463	**0.06199**	0.02741	0.06464	**0.06294**	0.07198	0.07043	**0.06163**
0.04	0.06305	0.03758	0.06619	0.06538	**0.06265**	0.03897	0.06482	**0.06471**	0.07234	0.07119	**0.06332**
0.05	0.06522	0.06793	0.06708	0.06629	**0.06487**	0.06727	**0.06599**	0.06697	0.07277	**0.06565**	0.06414
0.06	0.07024	0.07317	0.07214	0.07153	**0.06956**	0.07192	**0.07091**	0.07148	0.07318	**0.07123**	0.06915
0.07	0.07436	0.07714	0.07602	0.07564	**0.07483**	0.07607	**0.07482**	0.07519	0.07629	**0.07395**	0.07538
0.08	0.07749	0.07895	0.07817	**0.07763**	0.07685	0.07834	**0.07784**	0.07812	0.07942	**0.07782**	0.07863
0.09	0.08011	0.08532	0.08441	0.08234	**0.07997**	**0.08039**	0.08118	0.08209	**0.08028**	0.08376	0.08519
0.1	0.08493	0.10954	0.10663	0.10182	**0.08922**	**0.08827**	0.09104	0.10109	**0.08637**	0.08905	0.09074
0.2	0.16230	0.18667	0.18052	0.17553	**0.15964**	**0.15698**	0.17562	0.18342	**0.16196**	0.17214	0.18669

T: Tam İntegrasyon

A: Azaltılmış İntegrasyon

S: Seçilerek Azaltılmış İntegrasyon

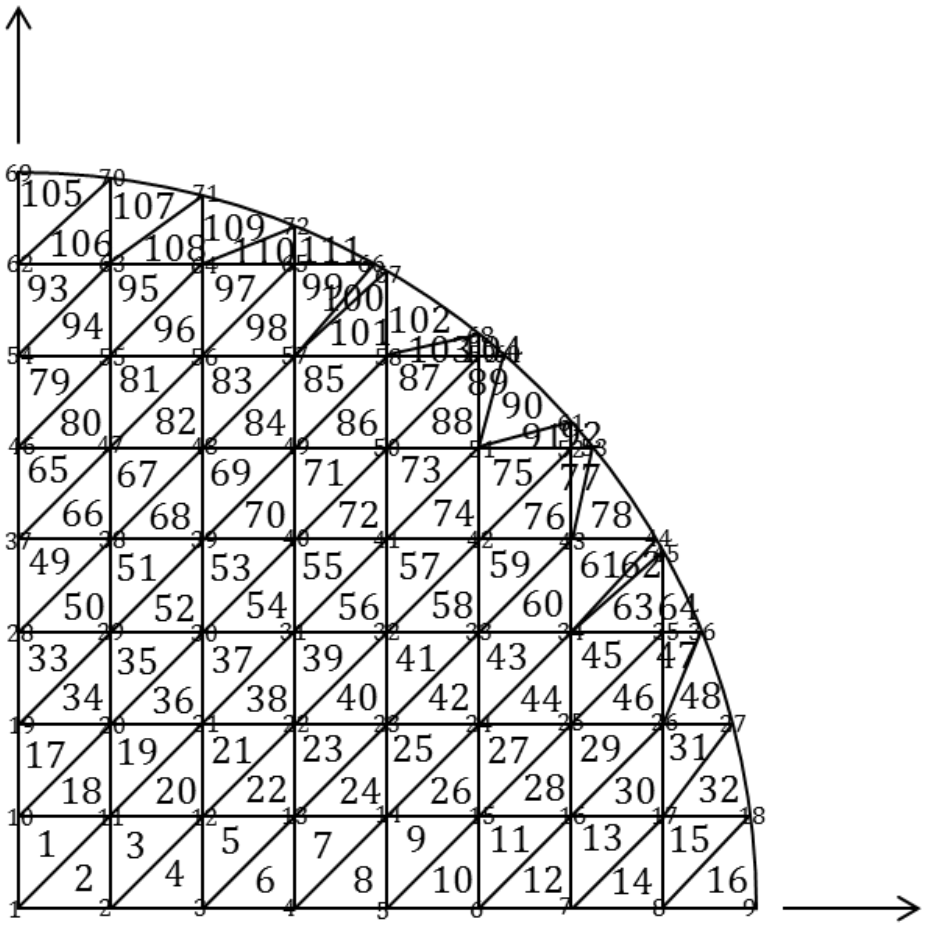
A.K.A.: Ayrık Kayma Aralığı



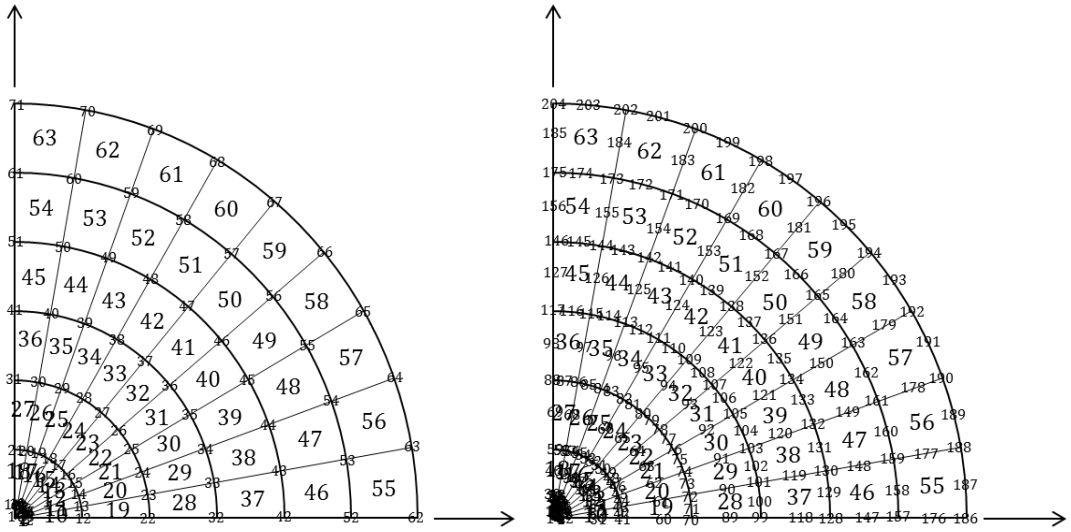
Şekil 7.37: Tekil yüklü ankastre kare plakta kayma kilitlenmesinin önlenmesi (wEh^3/Pa^2).

7.12. Örnek 11: Düzgün Yayılı Yüklü Ankastre Ve Basit Mesnetli Dairesel Plaklar

Bu çalışmada düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli ve basit mesnetli dairesel plak incelenmiştir. Dairesel plak için kullanılan veriler Örnek 1'deki verilerle aynıdır, yani E=10920 kN/m^2, ν=0.30, R=4 m (yarıçap) ve q=1kN/m^2 olarak alınmıştır. 3 noktalı üçgen sonlu eleman için kullanılan 111 elemandan oluşan sonlu eleman ağı Şekil 7.38'de gösterilmiştir. 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için oluşturulan sonlu eleman ağları farklıdır (Şekil 7.39 - Şekil 7.40). Dörtgen elemanlar için sırasıyla 63 ve 33 eleman kullanılmıştır. Şekil 7.38'de gösterilen sonlu eleman ağı dörtgen elemanlar için uygun sonuç vermemiştir. Bu sonlu eleman ağında kullanılan izoparametrik eleman plak kenarlarında iyi tanımlanamadığı için analitik çözümden uzaklaşmıştır [17]. Problem çözümünde simetri özelliği kullanılmıştır. Plağın ince ve kalın olduğu durumlarda plak ortasında çökme ve eğilme momentleri bulunmuştur.

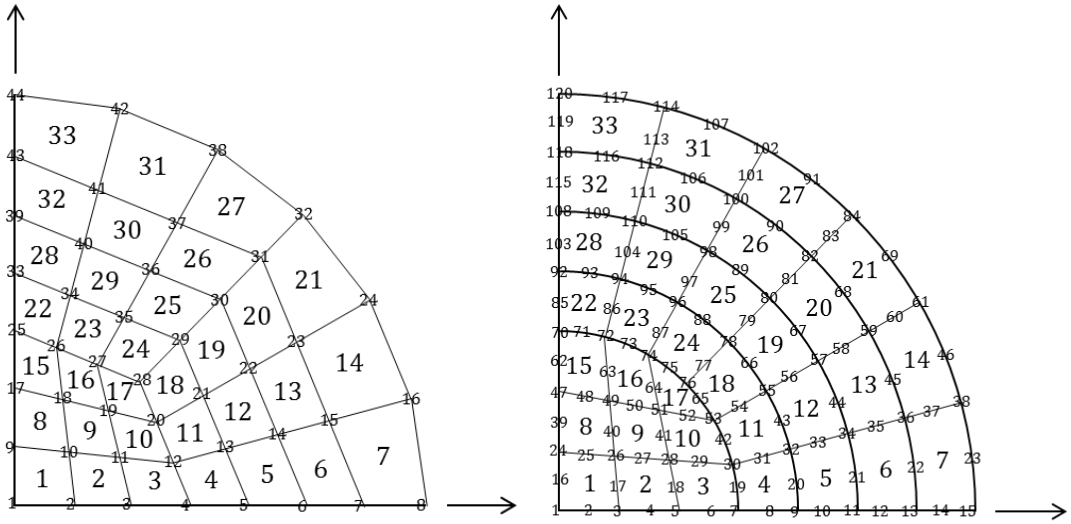


Şekil 7.38: 3 noktalı üçgen sonlu eleman için 1. tip sonlu eleman ağı (111 eleman).



a) 4 noktalı dörtgen eleman b) 8 noktalı dörtgen eleman

Şekil 7.39: 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlar için 2. tip sonlu eleman ağları (63 eleman).



a) 4 noktalı dörtgen eleman b) 8 noktalı dörtgen eleman

Şekil 7.40: 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlar için 3. tip sonlu eleman ağları (33 eleman).

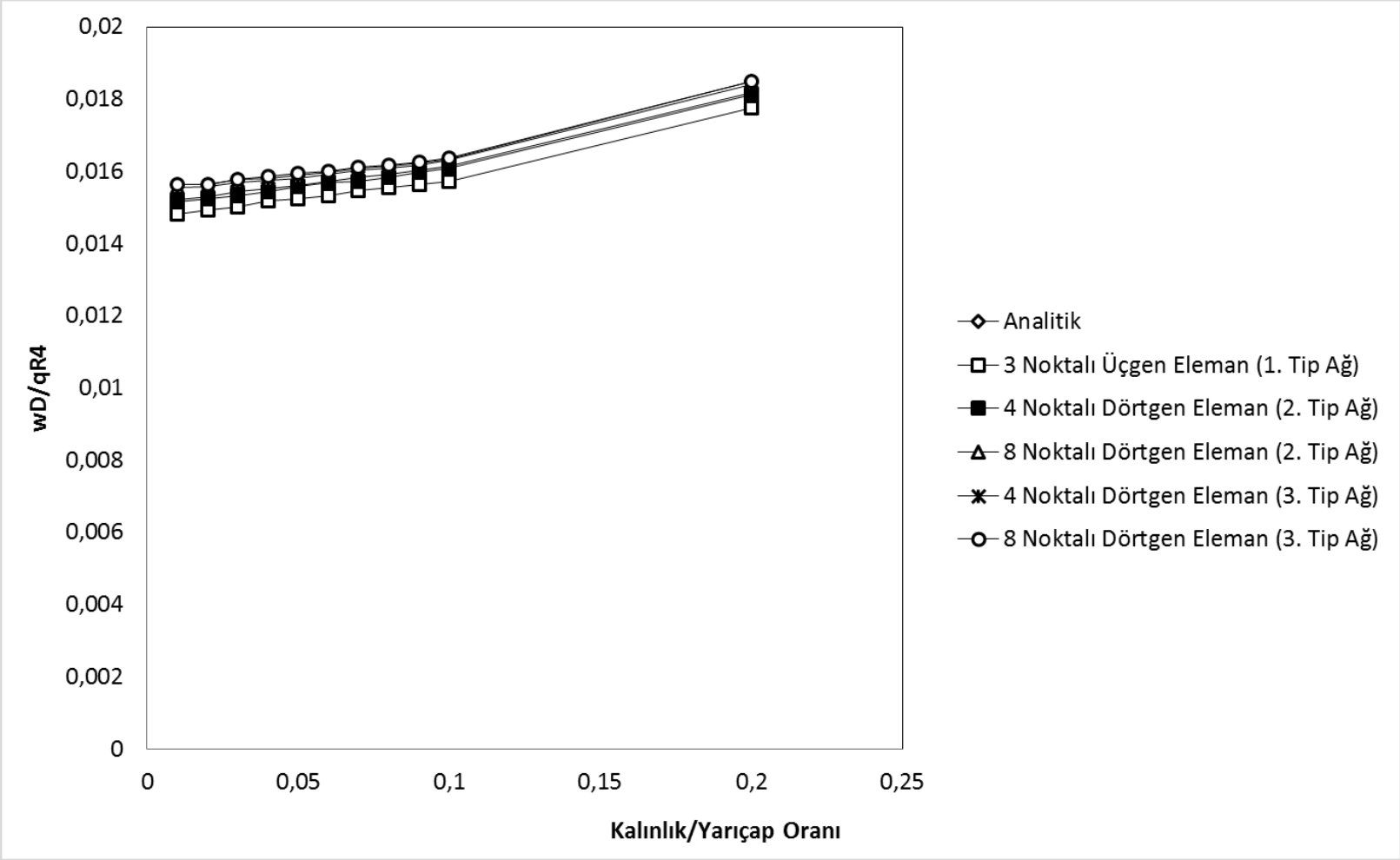
Çizelge 7.41 ve Çizelge 7.42'de düzgün yayılı yük altında farklı kalınlık/yarıçap oranları için 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanları ile elde edilen plak ortası çökmesi değerleri söz konusu mesnetlenme durumları için gösterilmiştir.

Çizelge 7.41: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plakta plak ortası çökmesi (wD/qR^4).

h/R	3 Noktalı Üçgen Eleman (1. Tip Ağ)	4 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	8 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	4 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	8 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	Analitik Sonuçlar
0.01	0.01480	0.01516	0.01555	0.01522	0.01564	0.01563
0.02	0.01492	0.01524	0.01557	0.01530	0.01564	0.01563
0.03	0.01501	0.01531	0.01570	0.01542	0.01578	0.01576
0.04	0.01517	0.01543	0.01575	0.01551	0.01586	0.01581
0.05	0.01523	0.01557	0.01581	0.01560	0.01594	0.01589
0.06	0.01532	0.01568	0.01592	0.01571	0.01601	0.01597
0.07	0.01546	0.01573	0.01602	0.01582	0.01610	0.01607
0.08	0.01555	0.01584	0.01608	0.01590	0.01617	0.01613
0.09	0.01564	0.01598	0.01617	0.01603	0.01624	0.01622
0.1	0.01571	0.01609	0.01630	0.01615	0.01636	0.01634
0.2	0.01774	0.01811	0.01841	0.01819	0.01848	0.01848

Şekil 7.41'de ankastre mesnetli dairesel plak için 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarıyla elde edilen plak ortası çökme değerlerinin farklı h/R oranları için değişimi verilmektedir. Burada yatay sütun kalınlık/yarıçap oranını gösterirken düşey sütun çökme değerlerini göstermektedir. Şekilde her bir sonlu eleman farklı işaret ile gösterilmiştir. İşaretlerin açıklamaları grafiğin yanında açıklanmıştır.

Örnek 1-4 ve Örnek 10'da olduğu gibi çizelgelerde sonlu elemanlar için verilen büyüklükler boyutsuz cinstendir. Bunun için çökme değerleri wD/qR^4 cinsinden verilirken moment değerleri M_x/qR^2 cinsinden gösterilmiştir. Ayrıca çizelgedeki her sonlu eleman tipi için kullanılan sonlu eleman ağı modeli parantez içerisinde yazılmıştır. 3 noktalı üçgen sonlu eleman için tek model yazılırken, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar için iki farklı model yazılmıştır.



Şekil 7.41: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plak için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qR^4).

Çizelge 7.42: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plakta plak ortası çökmesi (wD/qR^4).

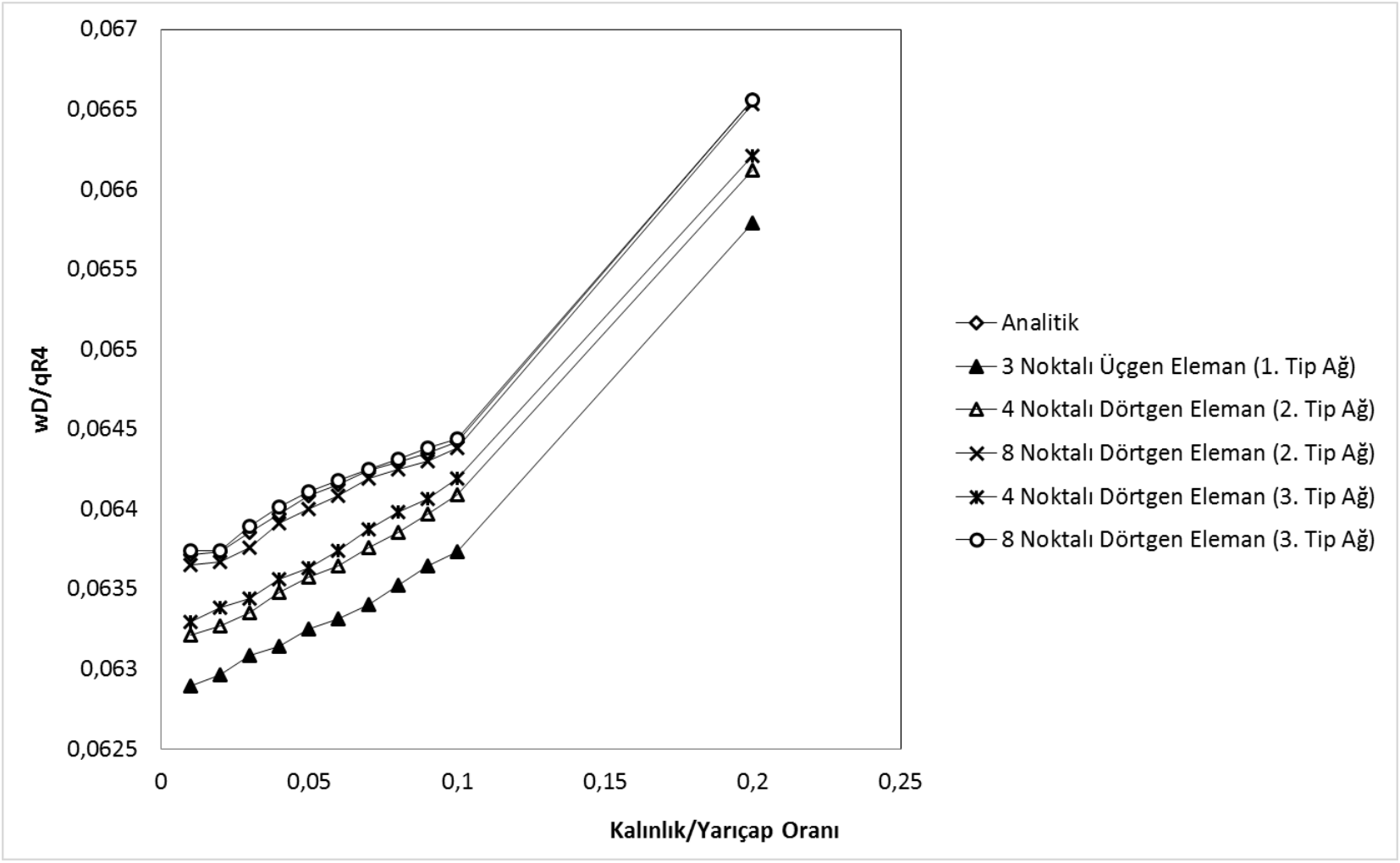
h/R	3 Noktalı Üçgen Eleman (1. Tip Ağ)	4 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	8 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	4 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	8 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	Analitik Sonuçlar
0.01	0.06289	0.06321	0.06365	0.06329	0.06374	0.06371
0.02	0.06296	0.06327	0.06367	0.06338	0.06374	0.06373
0.03	0.06308	0.06335	0.06376	0.06344	0.06389	0.06385
0.04	0.06314	0.06348	0.06391	0.06356	0.06401	0.06397
0.05	0.06325	0.06357	0.06400	0.06363	0.06411	0.06408
0.06	0.06331	0.06364	0.06408	0.06374	0.06418	0.06415
0.07	0.06340	0.06376	0.06419	0.06387	0.06425	0.06424
0.08	0.06352	0.06385	0.06425	0.06398	0.06431	0.06429
0.09	0.06364	0.06397	0.06430	0.06406	0.06438	0.06435
0.1	0.06373	0.06409	0.06438	0.06419	0.06444	0.06442
0.2	0.06579	0.06612	0.06653	0.06621	0.06656	0.06656

Çizelge 7.41 ve Çizelge 7.42 incelendiğinde, plak ortası çökme değerleri için analitik çözüme en yakın değerlerin 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda olduğu görülmektedir. 8 noktalı dörtgen sonlu eleman, 3. tip sonlu eleman ağında üstten 2. tip sonlu eleman ağında ise alttan analitik sonuçlara yakınsamaktadır. 4 noktalı dörtgen sonlu eleman 3 noktalı üçgen elemana göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

Açıklık momenti bakımından, h/R=0.01 ve h/R=0.1 için çözümler bulunmuştur (Çizelge 7.43 ve Çizelge 7.44). Burada da benzer sonuçlar elde edilmiştir. Hem ankastre hem de basit mesnetli dairesel plaklarda sonlu eleman ağları için analitik çözüme yakın açıklık momenti değerleri bulunmuştur. Fakat kare plakta olduğu gibi iç kuvvetlerin yakınsaması daha yavaştır.

Dörtgen elemanlar için verilen 3. tip sonlu eleman ağının hem çökme değerleri bakımından hem de iç kuvvetler bakımından analitik sonuçlara en yakın sonuçları verdiği gözlenmiştir.

Şekil 7.42'de basit mesnetli dairesel plak için 3 noktalı üçgen, 4 ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlarla elde edilen plak ortası çökme değerlerinin farklı h/R oranları için değişimi verilmektedir.



Şekil 7.42: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plak için plak ortası çökmesi yakınsama testi (wD/qR^4).

Çizelge 7.43: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli dairesel plakta açıklık momenti (M_x/qR^2).

Eleman Tipi	h/R=0.01	h/R=0.1
3 Noktalı Üçgen Eleman (1. Tip Ağ)	0.0906	0.0911
4 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	0.0884	0.0887
8 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	0.0820	0.0825
4 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	0.0874	0.0880
8 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	0.0814	0.0818
Analitik Sonuç	0.0812	0.0812

Çizelge 7.44: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli dairesel plakta açıklık momenti (M_x/qR^2).

Eleman Tipi	h/R=0.01	h/R=0.1
3 Noktalı Üçgen Eleman (1. Tip Ağ)	0.1982	0.1994
4 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	0.2027	0.2031
8 Noktalı Dörtgen Eleman (2. Tip Ağ)	0.2047	0.2055
4 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	0.2035	0.2037
8 Noktalı Dörtgen Eleman (3. Tip Ağ)	0.2066	0.2073
Analitik Sonuç	0.2064	0.2064

8. SONUÇLAR

Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanların sayısal uygulamalarından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1) Kayma kilitlenmesi olayının incelenmesi için kare plaklar, düzgün yayılı yük ve tekil yük altında 3 noktalı üçgen, 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar kullanılarak h/a=0.001'den h/a=0.2'ye kadar değişen kalınlıklarda çözülmüştür. Her çözüm tam integrasyon, azaltılmış integrasyon ve seçilerek azaltılmış integrasyon başlıkları altında hesaplanmıştır. Ayrıca 3 noktalı üçgen sonlu elemanda kayma kilitlenmesi probleminin giderilmesi için üçgen sonlu elemanlarda daha iyi sonuç veren ayrık kayma aralığı yöntemi de kullanılmıştır.

2) Beklenildiği gibi serbestlik derecesi daha fazla olan 8 noktalı dörtgen sonlu eleman, 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlardan daha iyi sonuç vermekte ve daha hızlı yakınsamaktadır.

3) Ayrık kayma aralığı yönteminin uygulandığı 3 noktalı üçgen sonlu eleman sonuçlarının 4 noktalı dörtgen sonlu eleman sonuçlarından daha iyi olduğu da görülmektedir. Ayrık kayma aralığı yönteminin sadece 3 noktalı üçgen sonlu elemanda kullanılmasının sebebi üçgen elemana ait bağ matrislerinin sabit terimlerden oluşturulabilmesidir.

4) 3 noktalı üçgen ve 4 noktalı dörtgen sonlu elemanlarda kayma kilitlenmesinin daha çabuk oluştuğu, 8 noktalı dörtgen sonlu elemanda kayma kilitlenmesi görülme sıklığının daha az olduğu da görülmüştür.

5) Beklenildiği üzere tüm elemanlarda iç kuvvetlerin yer değiştirmelere göre yakınsaması daha yavaştır. Bunun sebebi iç kuvvetlerin hesabında yer değiştirmelerin türevlerinin kullanılmasıdır.

6) Dairesel plaklar, ankastre mesnetli ve basit mesnetli olarak 3 noktalı üçgen, 4 noktalı ve 8 noktalı dörtgen sonlu elemanlar ile çözülmüştür. Burada 3 noktalı üçgen eleman, 4 ve 8 noktalı dörtgen elemanlar için üç farklı tipte sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Çözümler analitik sonuçlara yakınsamaktadır.

7) Kare plak için aynı zamanda dinamik ve burkulma analizi yapılmıştır. Sonuçlar sadece 4 noktalı dörtgen sonlu eleman için elde edilmiştir. Analiz sonucunda farklı mesnetlenme durumları ile farklı kalınlık-açıklık oranları için kritik burkulma yükleri ve doğal frekanslar elde edilmiştir.

8) Sonuç olarak; bu çalışmada geliştirilen 9, 12 ve 24 serbestlik dereceli izoparametrik sonlu elemanların, gerek kalın sayılabilecek plak uygulamalarında, gerekse ince plaklarda, mühendislik analizleri bakımından yeterli yaklaşıklıkta çözümler verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] **Desai, C. S. and Abel, J. F.,** 1972. Introduction to the finite element method; a numerical method for engineering analysis, Van Notrand Reinhold Company, New York.

[2] **Kardestuncer, H.,** 1987. Finite element handbook, McGraw-Hill, New York.

[3] **Aydoğan, M., Omurtag, M. H.,** 2005. The finite element method : lecture notes, İ.T.Ü., İstanbul.

[4] **Zienkiewicz, O. C.,** 1971. The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, London.

[5] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.,** 2000. The finite element method-Volume 2, McGraw-Hill, London.

[6] **Orakdöğen, E.,** 2005. Yapı sistemlerinin hesabında matris yöntemleri: ders notu, İ.T.Ü., İstanbul.

[7] **Çakıroğlu, A., Özden, E., Özmen, G.,** 1974. Yapı sistemlerinin hesabı için matris metodları ve elektronik hesap makinası programları-Cilt 2, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.

[8] **İnan, M.,** 1996. Cisimlerin mukavemeti, İ.T.Ü. Vakfı Yayınları, İstanbul.

[9] **Tameroğlu S.,** 1991. Elastisite teorisi: çözüm yöntemleri ve bazı matematiksel teknikler, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

[10] **Timoshenko, S.,** 1964. Plak ve kabuklar teorisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

[11] **Berktay İ.,** 1992. Plak teorisi ve uygulamaları : küçük sehimli ince plaklar, Yıldız Üniversitesi, İstanbul.

[12] **Ventsel, E., Krauthammer, T.,** 2001. Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications, Marcel Dekker, INC., New York.

[13] **Kumbasar, N., Pala, S., Aydoğan, M., Altan, M., Yardımcı, N., Yıldırım, H..** Bilgisayar programları ile sayısal hesap, TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi, İstanbul.

[14] **Keskinel, F., Karadoğan, H. F.,** 1992. Açıklamalı örneklerle FORTRAN IV ve FORTRAN 77 algoritma kurma ve program geliştirme, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[15] **Sarıaslan, H.,** 1988. İşletmecilikte FORTRAN IV ile programlama, A.Ü. S.B.F. ve Basın - Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara.

[16] **Aksu, T.,** 1993. Genel biçimli kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[17] **Özaydın, T.,** 2001. Kalın sayılabilecek plaklar için bir sonlu eleman formülasyonu, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[18] **Türe, Ü.,** 2002. Mindlin plakların sonlu eleman metodu ile çözümlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[19] **Özkul, T. A., Türe, Ü.,** 2004. The transition from thin plates to moderately thick plates by using finite element analysis and the shear locking problem, Thin-Walled Structures, **42,** 1405-1430.

[20] **Gören, F.,** 2006. Kalın plaklar için üç boyutlu sonlu eleman modelleri, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[21] **Reissner, E.,** 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics, **12,** 69-77.

[22] **Mindlin, R. D.,** 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of ısotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics, **18,** 31-38.

[23] **Bleounar, L., Guenfoud, M.,** 2005. A new rectangular finite elemant based on the strain approach for plate bending, Thin-Walled Structures, **43,** 47-63.

[24] **Çelik, M.,** 1996. Plak sonlu elemanlarda kayma şekil değiştirmelerinin gözönüne alınması ve iki parametreli zemine oturan plakların hesabı için bir yöntem, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[25] **Briassoulis, D.,** 1991. The performance of a reformulated four-node Plate Bending Element in Moderately Thick to very thin Plate Applications, Computers and Structures, **vol. 47,** pp. 125-141, 1993.

[26] **Lin, C., Kerh, T., Liu, I.,** 1994, A conforming quadrilareral Plate Bending Element with shear deformations, Computer and Structures, **vol. 56,** pp. 93-100, 1995.

[27] **Morlay, L. S. D.,** 1983, Hellinger-Reissner principles for Plate and Shell Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **vol. 20,** pp. 773-779, 1984.

[28] **Spilker, R. L.,** 1981, Invariant 8- Node Hybrid-Stress Elements for Thin and Moderately Thick Plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering **vol. 18,** pp. 1153-1178, 1982.

[29] **Prathap, G. and Viswanath, S.,** 1983. An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **19,** 831-840.

[30] **Spilker, R. L., Munir, N. I.,** 1980. A serendipity cubic-displacement hybrid-stress element for thin and moderately thick plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **15,** 1261-1278.

[31] **Bhashyam, G. R. and Gallagher, R. H.,** 1984. An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis, Computers and Structures, **19,** 35-40.

[32] **Hughes, T., Taylor, R. I., and Kanoknukulchai, W.,** 1977. A simple and efficient finite element for plate bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **11,** 1529-1543.

[33] **Bathe, K. and Dvorkin, E. N.,** 1985. Short Communication: A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **21,** 367-383.

[34] **Roufaeil, O. L.,** 1992. New rectangular plate bending elements and their perfomance, Computers and Structures, **50,** 59-65.

[35] **Kim, S. and Choi, C.,** 1992. Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **34,** 197-208.

[36] **Crisfield, M. A.,** 1984. A quadratic Mindlin element using shear constraints, Computers and Structures, **18,** 833-852.

[37] **Kant, T. and Owen, D. R. J. and Zienkiewicz, O. C.,** 1982. A refined higherorder C^0 plate bending element, Computers and Structures, **15, No.2,** 177-183.

[38] **Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M.,** 1984. A review and catalogue of plate ending finite elements, Computers and Structures, **19, No.3,** 479-495.

[39] **Çetin, E.,** 2006. MATLAB 7, Alfa Yayıncılık, İstanbul.

[40] **Arifoğlu, U.,** 2012. MATLAB 7.14-Simulink&Mühendislik Uygulamaları, Alfa Yayıncılık, İstanbul.

[41] **Ferreira, A. J. M.,** 2009. MATLAB Codes for Finite Element Analysis-Solids and Structures, Springer, Porto.

[42] **Khennane, A.,** 2013. Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and ABAQUS, CRC Press, London.

[43] **Bletzinger, K.-U., Bischoff, M. and Ramm, E.,** 1998. A Unified Approach For Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements, Computational Mechanics, Barcelona, Spain.

[44] **Nguyen-Xuan, H., Liu, G. R., Thai-Hoang, C. and Nguyen-Thoi, T.,** 2010. An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **199,** 471–489.

[45] **Librescu, L.,** 1975. Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures, Noordhoff International, Leyden, The Netherlands.

[46] **Donnell, L. H.,** 1976. Beams, Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, New York.

[47] **Levinson, M.,** 1980. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, Mechanics Research Communications, **7,** 343–350.

[48] **Srinivas, S., Jago Rao, C. V. and Rao, A. K.,** 1970. An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, **12,** 187-199.

[49] **Liew, K. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.,** 1995. Research on thick plate vibration: a literature survey, Journal of Sound and Vibration, **180,** 163–176.

[50] **Vasil'ev, V. V.,** 1992. The theory of thin plates, Mechanics of Solids (Mekhanika Tverdogo Tela), **27,** 22–42.

[51] **Ghugal, M. and Shimpi, R. P.,** 2002. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates, Journal of Reinforced Plastics and Composites, **21,** 775–813.

[52] **Anderson, R. A.,** 1953. Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory, ASME Journal of Applied Mechanics, **20,** 504–510.

[53] **Miklowitz, J.,** 1953. Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending, ASME Journal of Applied Mechanics, **20,** 511–514.

[54] **Plantema, F. J.,** 1966. Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells, Wiley, New York, US.

[55] **Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., Lee, K. H. and Chow, S. T.,** 1987. Buckling of shear-deformable plates, AIAA Journal, **25,** 1268–1271.

[56] **Canuto, C.,** 1978. Eigenvalue approximations by mixed methods, RAIRO Anal. Num´er., **12,** 27–50.

[57] **Dauge, M. And Suri, M.,** 2002. Numerical approximation of the spectra of non-compact operators arising in buckling problems, J. Numer. Math., **10,** 193–219.

[58] **Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L.,** 1989. The finite element method - Volume 1. Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill, London.

[59] **Huang, H.-C.,** 1989. Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells, Springer, Berlin.

[60] **Soh, A., Cen, S., Long, Y. and Long, Z.,** 2001. A new 12 dof quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, European Journal of Mechanics, **20,** 299–326.

[61] **Wang, C. M., Reddy, J. N. and Lee, K. H.,** 2000. Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions, Elsevier Science Ltd., Oxford, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Yurdakul AYGÖRMEZ

Doğum Yeri ve Tarihi: DARENDE / 01.07.1985

E-Posta: yurdakulaygormez@gmail.com

Lisans: 2008-2011 Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik (Çift Anadal)

2006-2010 Karadeniz Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği

Mesleki Deneyimi: ARAŞTIRMA GÖREVLİSİ

2011-2014 İstanbul Teknik Üniversitesi

İnşaat Mühendisliği Yapı Statiği Anabilim Dalı