İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDA VE RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gürkan KARAGÖZ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDA VE RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gürkan KARAGÖZ
(509991075)

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali ERCENGİZ

Teslim Tarihi: 5 Mayıs 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509991075 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Gürkan KARAGÖZ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDA VE RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIM "** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Ali ERCENGİZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Ulviye ILGAZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN İstanbul Teknik Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : 5 Mayıs 2014
Savunma Tarihi : 27 Mayıs 2014

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, çalışmaktan onur duyduğum ; göstermiş olduğu cömertlik, hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam, Doç.Dr.Ali ERCENGİZ'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Mayıs 2014

Gürkan KARAGÖZ
(Matematik Öğretmeni)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xi**
SEMBOL LİSTESİ ..... **xvii**
ÖZET ..... **xix**
SUMMARY ..... **xxi**
1. GİRİŞ **1**
2. AKIŞKAN DENKLEMLERİ **5**
2.1 Akışkanın Bünye Denklemi 5
2.2 Kartezyen Koordinatlarda Gerilme Bileşenleri ve Hareket Denklemleri 9
2.3 Silindirik Koordinatlarda Gerilme Bileşenleri ve Hareket Denklemleri 10
3. PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDA AKIM **13**
3.1 $\mu(p)=\alpha p$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu 14
3.2 $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu 17
3.3 $\mu=\mu_0\exp(\alpha p)$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu 21
4. RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE AKIM **27**
4.1 $\mu(p)=\alpha p$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu 28
4.2 $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu 30
4.3 $\mu=\mu_0\exp(\alpha p)$ Biçiminde Bağlı Olma Durumu 33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **41**
KAYNAKLAR **47**
EKLER **49**
ÖZGEÇMİŞ **137**

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : μ_0 ve α parametreleri bilinen bazı akışkan türleri…….....23

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Paralel İki Sabit Plak Arasında Akım…….....13

Şekil 4.1 : Rijid Silindirik Tüpte Akım……...…….....27

Şekil A.1 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için hızın y değişimi…….....49

Şekil A.2 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için hızın y ile değişimi…….....50

Şekil A.3 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için hızın y ile değişimi…….....51

Şekil A.4 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....52

Şekil A.5 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....53

Şekil A.6 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....54

Şekil A.7 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....55

Şekil A.8 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....56

Şekil A.9 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....57

Şekil A.10 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....58

Şekil A.11 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....59

Şekil A.12 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....60

Şekil A.13 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = -1 de y ile değişimi…….....61

Şekil A.14 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = -1 de y ile değişimi…….....62

Şekil A.15 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = -1 de y ile değişimi…….....…...63

Şekil A.16 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın y = 0 da x ile eğişimi…….....64

Şekil A.17 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....65

Şekil A.18 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....66

Şekil A.19 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....67

Şekil A.20 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....68

Şekil A.21 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....69

Şekil A.22 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....70

Şekil A.23 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....71

Şekil A.24 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....72

Şekil A.25 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi …….....73

Şekil A.26 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi …….....74

Şekil A.27 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi …….....75

Şekil A.28 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için hızın y ile değişimi…….....76

Şekil A.29 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için hızın y ile değişimi…….....77

Şekil A.30 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için hızın y ile değişimi…….....78

Şekil A.31 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.01$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....79

Şekil A.32 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....80

Şekil A.33 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi…….....81

Şekil A.34 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi……..…….....82

Şekil A.35 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.01$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….…….....83

Şekil A.36 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....84

Şekil A.37 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....85

Şekil A.38 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi…….....86

Şekil A.39 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.01$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi……..….....87

Şekil A.40 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....88

Şekil A.41 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….…….....89

Şekil A.42 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi…….....90

Şekil A.43 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.01$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi…….....91

Şekil A.44 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi…….....92

Şekil A.45 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi…….....93

Şekil A.46 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi…….....94

Şekil A.47 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0{,}5$ için hızın r ile değişimi…….....95

Şekil A.48 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için hızın r ile değişimi…….....96

Şekil A.49 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1{,}5$ için hızın r ile değişimi…….....97

Şekil A.50 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için hızın r =0 da z ile değişim…….....98

Şekil A.51 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için hızın r =0 da z ile değişimi…….....99

Şekil A.52 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için hızın r =0 da z ile değişimi…….....100

Şekil A.53 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....…….....101

Şekil A.54 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....…….....102

Şekil A.55 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....103

Şekil A.56 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....104

Şekil A.57: $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....105

Şekil A.58 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....……..106

Şekil A.59 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....107

Şekil A.60 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....108

Şekil A.61 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi……..…….....109

Şekil A.62 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi…….....110

Şekil A.63 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi…….....111

Şekil A.64 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi…….....112

Şekil A.65 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....113

Şekil A.66 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....114

Şekil A.67 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi…….....115

Şekil A.68 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi…… …….....116

Şekil A.69 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi .....…….....117

Şekil A.70 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi …….....118

Şekil A.71 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....119

Şekil A.72 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....120

Şekil A.73 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....121

Şekil A.74 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için hızın r ile değişimi…….....122

Şekil A.75 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için hızın r ile değişimi…….....123

Şekil A.76 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için hızın r ile değişimi…….....124

Şekil A.77 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın r =0 da z ile değişimi…….....125

Şekil A.78 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın r =0 da z ile değişimi…….....126

Şekil A.79 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın r =0 da z ile değişimi…….....127

Şekil A.80 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın z =0 da r ile değişimi…….....128

Şekil A.81 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın z =0 da r ile değişimi…….....129

Şekil A.82 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın z =0 da r ile değişimi…….....130

Şekil A.83 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....…..131

Şekil A.84 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....132

Şekil A.85 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın z =1 de r ile değişimi…….....133

Şekil A.86 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....134

Şekil A.87 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....135

Şekil A.88 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi…….....136

SEMBOL LİSTESİ

μ : Viskozite sabiti
p : Hidrostatik basınç
d : Şekil değiştirme tansörü
ρ : Yoğunluk
g : Yerçekimi ivmesi
t : Cauchy gerilme tansörü
v : Hız vektörü
I : Birim matris
w : Çeviri tansörü
I_d , II_d , III_d : İnvaryantlar
λ, μ : Viskozite katsayıları
t_{kl} : Gerilme tansörü
f : Kütle kuvveti
a : İvme vektörü
(x_1, x_2, x_3) : Dik kartezyen koordinatlar
v_1 : x_1 doğrultusunda hız bileşeni
v_2 : x_2 doğrultusunda hız bileşeni
v_3 : x_3 doğrultusunda hız bileşeni
(r, θ, z) : Silindirik koordinatlar
v_r : Radyal hız bileşeni
v_θ : Teğetsel hız bileşeni
v_z : Eksenel hız bileşeni

PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDA VE RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE VİSKOZİTENİN BASINCA BAĞLI OLDUĞU AKIM

ÖZET

Bu tez çalışmasında paralel iki sabit plak arasında ve rijid dairesel silindirik tüpte viskozitenin basınca bağlı olduğu tek yönlü akım problemi incelenmiştir. Viskozitenin basınca bağlılığı $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0(1+\alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ şeklinde üç farklı durum olarak alınmış, her bir durum için hız profileri ve basınç dağılımları elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir.

Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi üzerinde durulmuş, bu alanda yapılan çalışmalardan ve elde edilen sonuçlardan söz edilmiştir.

İkinci bölümünde Sıkışmaz –Newtonian akışkan için genel bünye denklemleri elde edilmiştir.Bu denklemler momentumun korunumu denkleminde kullanılarak hareket denklemleri dik kartezyen ve silindirik koordinatlarda açık olarak yazılmıştır.

Üçüncü bölümde kartezyen koordinatlarda paralel ve sabit iki plak arasında tek yönlü akım için viskozitenin basınca bağlılığının $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0(1+\alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ şeklinde olduğu üç viskozite basınç ilişkisi gözönüne alınarak hareket denklemleri elde edilmiş ve çözülerek basınç dağılımları ve hız fonksiyonları belirlenmiştir. Her bir durum için bu fonksiyonların değişimleri grafik olarak gösterilmiş ve tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde silindirik koordinatlarda, rijid tüp içinde tek yönlü akım için viskozitenin basınca bağlılığının $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0(1+\alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ şeklinde olduğu üç viskozite basınç ilişkisi gözönüne alınarak hareket denklemleri elde edilmiş ve çözülerek basınç, hız fonksiyonları belirlenmiştir. Her bir durum için bu fonksiyonların değişimleri grafik olarak gösterilmiş ve tartışılmıştır.

Beşinci bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuç ve grafiklerin genel değerlendirmesi ve yorumu yapılmıştır.

THE FLOW OF FLUID WITH A PRESSURE DEPEDENT VISCOSITY BETWEEN TWO PARALLEL PLATES AND IN A RIGID TUBE

SUMMARY

In this thesis, the flow of an incompressible Newtonian fluid whose viscosity can depend on the pressure is studied between two parallel plates and in a rigid tube.

In general, the viscosity ca be a function of the pressure p, however in many practiced situations the flow conditions are such that it is essentially a constant leading to the classical incompressible Navier-Stokes model.

In a simple shear flow, the constituve equation is given by

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}$$

Where $\mathbf{t}$ is the stress tensor, p is the pressure, μ is the viscosity and $\mathbf{d}$ is the deformation rate tensor.It follows from this equation that the shear stress is proportional to the shear rate, the constant of proportionally being the viscosity. Put another way, the viscosity is the ratio of the shear stress (resistance) to the shear rate (velocity gradient). The resistance to the motion is due to the friction between the adjacent layers of the fluids.

As the normal stress increases, the resistance to the sliding motion increases. Extending this idea of the resistance due to the relative motion of adjacent layers prompts us to suppose that the viscosity in a fluid should increase with normal stress or in a three dimension setting, the mean normal stress. That the viscosity in a fluid could depend on the presure was considered by Stokes[1].

Barus[4] suggested the following exponential relationship between viscosity μ and p.

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p)$$

Where β has unit Pa^{-1}. Barus' formula can be used to get a rough estimate of the variations of the viscosity with respect to pressure for some common organic liquids. For Naphthenic mineral oil β has been determined experimentally to be 23.4 GPa^{-1} at $40^0 C$. Based on the Barus' formula for Naphthenic mineral oil we then have

$$\frac{\mu(p = 100MPa) - \mu(p = 0.1MPa)}{\mu(p = 0.1MPa)}.100 = \%935.7$$

On the other hand, using the Dawson-Higginson[5] empirical formula, the density varies with respect to pressure as

$$\rho(p)=\rho_0\left[1+\frac{0.6p}{1+1.7p}\right]$$

Where p is in GPa . Using the Dawson-Higginson formula we have

$$\frac{\rho(p=100MPa)-\rho(p=0.1MPa)}{\rho(p=0.1MPa)}.100=\%5.1$$

Many other experiments have also indicated that change in density due to changes in pressure at high pressure is indeed negligible.

In the flows that are usually encounters in pipes and channels, due to pressure gradient, the variations in pressure are not sufficiently great to cause significant changes in viscosity. However, if the fluid is forced through very narrour regions from a domain of much greater thickness, such as the geometry relevant to elastohydrodynamics, the increase in the pressure is so dramatic that it can influence the viscosity significantly.

The importance of including the effect of the viscosity on the pressure cannot be overemphasized. For instance, in theory of elasthohydrodynamic lubrication(i.e., hydrodynamic lubrication applied to solid surfaces capable of eleastic deformation), the existence of continuous films under severe loading cannot be explained unless the dependence of the fluid viscosity on the pressure and elastic deformation of the solid are taken into account. Also, pressures which are large enough for pressure dependence of viscosity to become a serious concerns are sometimes reached in polymer melt processing.

In this thesis, we consider the following form for the pressure viscosity function $\mu(p)$.

a) $\mu=\alpha p$

b) $\mu=\mu_0(1+\alpha p)$

c) $\mu=\mu_0\exp(\alpha p)$

Where α and μ_0 are constant. Experimental studies show that μ increases with increasing pressure, and thus we assume that α is positive.

For each cases, we have studied the flow between parallel plates (Plane Poiseuille Flow) and in a rigid tube (Axisymmetric Poiseuille Flow).

In the flow between two parallel plates, for cases (a), (b), (c), we obtain velocity and pressure as a function of x,y and λ. The constant λ that appear in the solutions is related pressure gradient along x-direction. We also observe in two cases that as the parameter λ approaches that corresponding to the profile for constant viscosity. For larger values of λ, we obtain profiles that are "V" shaped and we see that we need a very large pressure difference to maintain such a flow. In case (c), we show that the flow is a trivial (no motion). But, defining a parameter $\varepsilon\langle 1$, we expend pressure and velocity to the asymptotic series, and we could obtain only first three terms of the series.

In the flow in a rigid tube, for cases (a) and (b), we obtain similar result to the flow between plates. In the case (c), we use asymtotic series, became the series are convergent we are able to obtain the analytical solutions for velocity and pressure.

In the determining analytical solution, the relations between constants λ_i that appear in terms of the series play important role, each different relation gives a different analytical solutions for velocity and pressure.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada viskozitenin basınca bağlı olması durumunda paralel iki sabit plak arasında ve rijid silindirik tüp içerisinde Viskoz, Sıkışmaz ve Newtonian bir akışkanın akım problemi incelenmiştir.

Basit kayma gerilmelerinin

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \tag{1.1}$$

biçiminde olduğu durumda, kayma gerilmeleri ile kayma hızları orantılı olmaktadır. Bu orantı sabiti viskozite olarak tanımlanmaktadır. Buna göre yukarıdaki ifadede μ viskozite sabiti olmaktadır. Ayrıca p basınç fonksiyonunu, $\mathbf{d}$ şekil değiştirme hızı tansörünü göstermektedir. Viskoziteyi direncin (gerilme) hız gradyanına oranı olarak tanımlayabiliriz. Bu direnç, komşu akışkan tabakalarının harekete karşı göstermiş olduğu dirençtir. Normal gerilmeler büyüdükçe direnç büyüyecektir. Buradan hareketle viskozitenin normal gerilmeye dik olacağını ilk olarak Stokes [1] ortaya atmıştır.

Katıların ve akışkanların yüksek basınç altında davranışlarını sistematik biçimde inceleyen araştırmalar 1930'dan sonra yapılmıştır. Bu konu üzereindeki ilk çalışmaların ayrıntıları Bridman'ın [2] çalışmasında bulunabilir.

Bridman'ın [3] çalışmasında 43 farklı akışkan üzerinde deneyler yaparak

$$\mu = A\rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(\left(\rho + \rho^2 r\right)\frac{S}{\theta}\right) \tag{1.2}$$

biçiminde bir bağlılık elde etmiştir. Burada A, r ve S sabitler, ρ yoğunluk ve θ sıcaklığı göstermektedir. Barus [4] ise

$$\mu(p) = \mu_0 \exp(\beta p) \tag{1.3}$$

ilişkisini önermiştir. Sonraki süreçte birçok kimyasal çözeltide ve yatakların yağlanmasında kullanılan yağlarda bu ilişki gözlenmiştir.

Burada β, $\frac{1}{Pa}$ boyutunda bir sabittir. Örneğin naftenik mineral yağ için $\beta = 23.4GPa^{-1}$ olarak ölçülmüştür.

Bu değer kullanılarak **(1.3)'**den viskozitedeki değişim bulunur. Bu sonuç büyük basınç farklarında viskozitedeki değişimin çok büyük olduğunu göstermektedir. Eğer yoğunluk ve basınç ilişkisini

$$\rho(p)=\rho_0\left[1+\frac{0.6p}{1+1.7p}\right] \tag{1.4}$$

şeklinde veren Dowson-Higginson [5] ampirik formülü kullanılırsa

$$\frac{\rho(p=100MPa)-\rho(p=0.1MPa)}{\rho(p=0.1MPa)}.100=\%5.1$$

bulunur. Bu ise basınç değişimlerinin yoğunluk üzerindeki etkisinin, viskozite üzerine etkisi yanında ihmal edilebileceğini göstermektedir.

Geçen son 40-50 yıl içinde viskozitenin basınca bağlılığını inceleyen deneysel çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların başlıcaları [6-8] olarak verilebilir.
Viskozitenin basınca bağlılığı üstel alınarak, akışkanın büyük basınçlara maruz kaldığı hidrolik taşıyacıların yataklarında akım Bair [9], Szeri [10] ve Schaeffer [11] tarafından incelenmiştir.

Sıkışmaz ve Newtonian akışkanlar için viskozitenin basınca bağlı olma durumunun matematiksel analizi Renardy [12] ve Gazzola [13] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda Sıkışmaz ve Newtonian akışkan varsayımı ile oluşturulan modelin çözümlerinin varlığı ve tekliği tartışılmıştır.

Blair [14] ve arkadaşları Sıkışmaz ve Newtonian akışkanın tek yönlü akımında viskozitenin üstel olması durumunda çözümün olmadığını göstermişler. Ancak viskozitenin basınca lineer bağlı olduğu durumda çözüm elde edebilmişlerdir.

Harun [15], Vasudevaiah [16] paralel plaklar arasında ve silindirik tüp içinde viskozitenin basınca bağlı olduğu çeşitli durumlar için akımı incelemişler ve üstel bağlılık durumunda paralel levhalarda çözümün olmadığını göstermişlerdir. Ayrıca hız profillerinin Navier-Stokes modelinden (viskozite sabit) oldukça farklı olduğunu, parabolik yapıdan bir yatık "V" harfine dönüştüğünü göstermişlerdir. Silindirik tüp içinde akım için lineer ve üstel viskozite basınç bağlılığı için çözümleri elde etmişlerdir.

Üç boyutlu periyodik akımlarda viskozite-basınç ilişkisi Malek [17] tarafından göz önünde tutularak periyodik çözümler elde etmişlerdir.

Son yıllarda Rajagopal ve arkadaşları [18-24] viskozite basınç bağlılığını gözönüne alarak birçok problemi ayrıntılı olarak çözmüşlerdir.

Poiseulle akımı, değişik viskozite-basınç bağlılıkları için Kalogiran [25] ve arkadaşları tarafından incelenmiş, hız profilleri ve basınç dağılımındaki farklılıklar gösterilmiştir.

Renardy [26], viskozitenin basınca bağlılığının lineer olması durumunda herhangi kesitli bir tüpte paralel akımın oluşabileceğini göstermişlerdir. Ayrıca basınca bağlılığın üstel olması durumunda dairesel kesitli tüpte hızın yarıçapa bağlılığının kuadratik yapıda olması gerektiği sonucunu elde etmişlerdir.

Viskozitenin basınca bağlılığının ölçülmesinde, akışkan içinde düşen bir silindir içeren viskometre oldukça sık kullanılır. Bu konuda Prusă [27] ve arkadaşlarının çalışması örnek verilebilir. Bu çalışmada viskozitenin basınca bağlılığını için $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0 (1 + \alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ şeklinde üç farklı fonksiyon göz önüne alınmıştır. Her bir durum için, sabit iki paralel plak arasında ve rijid dairesel silindirik tüp içinde tek yönlü akım incelenmiştir. Hız profilleri ve basınç dağılımları elde edilmiştir. $\mu = \alpha p$ ve $\mu = \mu_0 (1 + \alpha p)$ durumlarında elde edilen sonuçlar, bu konuda daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile uyuşmaktadır. Bu sonuçlar viskozitenin sabit olduğu durum ile karşılaştırılmış ve basınca bağlılığın oldukça önemli farklılıklar oluşturduğu gözlenmiştir. Basınca bağlılığın $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ olması durumunda ise paralel plaklar arasında akımın olmadığı gösterilmiş ancak α parametresinin gerçekte çok küçük olduğu göz önünde tutulmuş, hız ve basınç fonksiyonlarının asimtotik seri açılımları yapılmıştır. Bu serinin ilk üç terimi belirlenebilmiştir. Silindirik tüp içinde akım incelendiğinde yine seri açılımı yapılmış ve serinin terimlerini belirlemede ortaya çıkan sabitlerin belli ilişkiye sahip olması durumunda basınç ve hız için analitik çözümler ilk kez bu çalışmada elde edilmiştir. Sözü edilen sabitler arasındaki ilişki değiştikçe farklı analitik çözümler elde edilmektedir. Bu çözümlerden hangisinin daha gerçekçi olduğunu belirlemek için deneysel sonuçlara gereksinim olduğu açıktır. Ancak deneysel sonuçlar elde edemediğimiz için sadece tek bir çözümle yetinilmiştir. İkinci bölümünde Sıkışmaz–Newtonian akışkan için genel bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler momentumun korunumu denkleminde kullanılarak hareket denklemleri dik kartezyen ve silindirik koordinatlarda açık olarak yazılmıştır.

Üçüncü bölümde kartezyen koordinatlarda paralel ve sabit iki plak arasında tek yönlü akım için üç viskozite basınç ilişkisi gözönüne alınarak hareket denklemleri elde edilmiş ve çözülerek basınç, hız fonksiyonları belirlenmiştir. Her bir durum için bu fonksiyonların değişimleri grafik olarak gösterilmiş ve tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde silindirik koordinatlarda, rijid tüp içinde tek yönlü akım, üç viskozite basınç ilişkisi için ayrı ayrı incelenmiş ve hız, basınç fonksiyonları elde edilmiştir. Sonuçlar grafik olarak gösterilmiş ve tartışılmıştır.

Beşinci bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılarak ileriye yönelik çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

2. AKIŞKAN DENKLEMLERİ

Bu bölümde sıkışmaz viskoz akışkanlar için bünye denklemleri ve hareket denklemleri elde edilecektir. Elde edilen denklemlerin kartezyen ve silindirik koordinatlarda açık ifadeleri verilecektir.

2.1 Akışkanın Bünye Denklemleri

Akışkanın davranışı ile ilgili yapılan deneyler, akışkan hareketsiz ya da üniform hızla hareket ederken sadece skaler değerli bir $\mathbf{p}$ hidrostatik basıncı taşıdığını göstermiştir. Buna dayanarak, hidrostatik basınç dışında akışkanda oluşacak gerilmelerin hız gradyanına bağlı olduğu kabul edilmiştir. Buna göre $\mathbf{t}$ Cauchy gerilme tansörünü, $\mathbf{I}$ birim matrisi, $\mathbf{v}$ hız vektörünü göstermek üzere bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \mathbf{f}(\nabla \mathbf{v}) \tag{2.1}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{f}$ matris değerli bir fonksiyondur. **(2.1)** denklemi bileşenler cinsinden

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij}(v_{k,l}) \tag{2.2}$$

biçiminde yazılabilir. Hız olmadığından sadece basınç olacağından $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulu sağlanmalıdır.

x_i sabit koordinat takımı ve x_i' ise bu takıma göre rijid hareket eden koordinat takımını göz önüne alalım. Bu iki koordinat takımı arasında

$$x_i' = \mathrm{Q}_{ij}(t)x_j + b_i(t) \tag{2.3}$$

ilişkisi yazılabilir. Burada $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ olup $\mathbf{Q}$ ortogonal bir matris ve $\mathbf{b}$ zamana bağlı bir vektördür. Akışkanın bünye denklemleri bu dönüşüm altında değişmez (invaryant) kalırlar.

Hız gradyanı matrisini $L_{kl} = v_{l,k}$ olarak tanımlanırsa,

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \qquad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^T - \mathbf{L}) \tag{2.4}$$

olmak üzere ; $\mathbf{L}$ matrisi

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \tag{2.5}$$

şeklinde simetrik $\mathbf{d}$ şekil değiştirme hızı tansörü ve antisimetrik $\mathbf{w}$ çeviri tansörünün toplamı olarak ifade edilebilir. $\mathbf{d}$ ve $\mathbf{w}$ bileşenleri

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) \qquad w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) \tag{2.6}$$

olarak yazılabilir.

Eğer $\mathbf{d}$ ve $\mathbf{w}$ nin $\mathbf{x}'$ koordinat takımında ki ifadeleri **(2.3)** yardımı ile elde edilirse,

$$\begin{aligned} d'_{kl} &= \mathrm{Q}_{km}\mathrm{Q}_{\ln} d_{mn} \\ w'_{kl} &= \mathrm{Q}_{km}\mathrm{Q}_{\ln} w_{mn} - \mathrm{Q}^{0}{}_{kn}\mathrm{Q}_{\ln} \end{aligned} \tag{2.7}$$

bulunur. Bu ifadeler $\mathbf{d}$'nin objektif bir tansör, $\mathbf{w}$'nin ise objektif olmayan bir tansör olduğunu söyler. O halde bünye denklemleri objektif olan $\mathbf{d}$ ye bağlı olmak zorundadır. Bu durumda **(2.2)** bünye denklemi $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}'$ takımlarından aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij}(d_{kl}) \tag{2.8}$$

ve

$$t'_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij}(d'_{kl}) \tag{2.9}$$

$\mathbf{t}$ gerilme tansörünün objektif olması gerektiğinden

$$t'_{ij} = \mathrm{Q}_{ik}\mathrm{Q}_{jl}t_{kl} \tag{2.10}$$

eşitliği de sağlanmalıdır. **(2.10)** da **(2.8**) ve **(2.9)** kullanılırsa

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{QdQ}^{\mathbf{T}}\right) = \mathbf{Qf(d)Q}^{\mathbf{T}} \tag{2.11}$$

ifadesinin her ortogonal Q dönüşümü için sağlanması gerektiği ortaya çıkar.

$\mathbf{f}(\mathbf{d})$ fonksiyonu $\mathbf{d}$ nin analitik bir fonksiyonu ise

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\mathbf{d})\mathbf{d}^n \tag{2.12}$$

şeklinde seriye açılabilir. Burada $\beta_n(\mathbf{d})$ katsayıları

$$\beta_n(\mathbf{d}) = \beta_n\left(\mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right) \tag{2.13}$$

invaryant kalma koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda **(2.12)** ile verilen serinin **(2.11)** koşulunu sağladığı görülmektedir.

Hamilton-Cayley teoremine göre $\mathbf{d}$ kendi karakteristik denklemini sağlamalıdır.

O halde

$$\mathbf{d}^3 - I_d\mathbf{d}^2 + II_d\mathbf{d} - III_d\mathbf{I} = 0 \tag{2.14}$$

yazılabilir. Burada I_d , II_d , III_d büyüklükleri $\mathbf{d}$ şekil değiştirme hızı tansörünün invaryantları olup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} I_d &= tr\mathbf{d} = d_{ii} \\ II_d &= \frac{1}{2}\left[(tr\mathbf{d})^2 - tr\mathbf{d}^2\right] \\ III_d &= \det\left(\mathbf{d}\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

β_n fonksiyonlarının invaryant olabilmesi için

$$\beta_n(\mathbf{d}) = \beta_n\left(I_d, II_d, III_d\right) \tag{2.16}$$

olması gerekmektedir.

(2.13) seri açılımında $\mathbf{d}^3$ ve $\mathbf{d}$ nin daha yüksek kuvvetleri **(2.14)** yardımı ile sadece $\mathbf{I}$, $\mathbf{d}$ ve $\mathbf{d}^2$ cinsinden yazılabilir. Bu ise

$$f\left(\mathbf{d}\right) = \alpha_0(I_d, II_d, III_d)\mathbf{I} + \alpha_1(I_d, II_d, III_d)\mathbf{d} + \alpha_2(I_d, II_d, III_d)\mathbf{d}^2 \tag{2.17}$$

biçiminde yazılabileceğini ifade eder. **(2.8)** gerilme ifadesi,

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \alpha_0(I_d, II_d, III_d)\mathbf{I} + \alpha_1\left(I_d, II_d, III_d\right)\mathbf{d} + \alpha_2\left(I_d, II_d, III_d\right)\mathbf{d}^2 \tag{2.18}$$

olarak elde edilir. $\mathbf{d} = 0$ olduğunda $\mathbf{t} = -p\mathbf{I}$ olabilmesi için $\alpha_0(0,0,0) = 0$ olmalıdır.

Viskoz akışkanlarda genel bünye denkleminin $\mathbf{d}$ ye bağlılığının lineer olduğu kabul edilir.

Bu durumda viskoz akışkanlar için bünye denklemi, $\alpha_0 = \lambda I_d$, $\alpha_1 = \mu$ ve $\alpha_2 = 0$ olacağından

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \lambda(tr\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \tag{2.19}$$

olarak yazılabilir. Burada λ ve μ akışkanın özelliklerini yansıtan yoğunluk, sıcaklık ve basıncın fonksiyonu olabilen viskozite katsayılarıdır. Akışkan sıkışmaz ise

$$I_d = tr\mathbf{d} = v_{k,k} = 0 \tag{2.20}$$

olacaktır. **(2.19)** denkleminden sıkışmaz viskoz akışkanlar için bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} \tag{2.21}$$

bulunur. $\mathbf{d} = 0$ olduğunda $\mathbf{t} = -p\mathbf{I}$ olacaktır. Bu ifadeden

$$\begin{aligned} tr\mathbf{t} &= -ptr\mathbf{I} \\ t_{11} + t_{22} + t_{33} &= -3p \\ p &= -\frac{1}{3}(t_{11} + t_{22} + t_{33}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

yazılabilir. Bu ise basıncın normal gerilmelere bağlı olduğunu ifade etmektedir. **(2.21)** denkleminden, kayma gerilmelerinin kayma hızları ile orantılı olduğu söylenebilir. Açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} &t_{12} = 2\mu d_{12} && t_{13} = 2\mu d_{13} && t_{23} = 2\mu d_{23} \\ &t_{12} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) && t_{13} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) && t_{23} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

ilişkisi mevcuttur. Görüldüğü gibi orantı katsayısı akışkanın viskozitesidir.Akışkanın tabakaları arasındaki sürtünme, harekete karşı bir direnç oluşturmaktadır. **(2.23)**'e göre viskozite kayma gerilmesinin (direnç) kayma hızına (hız gradyanı) olarak tanımlanabilir.

Akışkan tabaklarının birbirine göre hareketinde direnç büyük ise viskozite daha büyük olacaktır. Sezgisel olarak tabakalar üzerine etkiyen normal gerilmelerin büyük olması durumunda bu direnç artacaktır. Yani viskozite normal gerilmelere bağlı olacaktır. **(2.22)** ifadesine göre basınç ortalama normal gerilmelere bağlı olduğuna göre viskozite basıncın bir fonksiyonu olacaktır.

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi viskozitenin basınca bağlılığı yoğunluğa bağlılığa göre daha büyüktür. Bu nedenle bu çalışmada sıkışmaz akışkan için bünye denklemi

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu(p)\mathbf{d} \tag{2.24}$$

olarak alınacaktır. Sıkışmazlık koşulu ise

$$\nabla.\mathbf{v} = 0 \tag{2.25}$$

olarak alınacaktır. **(2.24)** bünye denklemi ile verilen gerilme bileşenleri

$$t_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l \tag{2.26}$$

hareket denklemini sağlamalıdır. Bu ifadede ρ akışkanın yoğunluğunu, f kütle kuvvetini ve a ivme vektörünü göstermektedir. Bu çalışmada, kütle kuvvetleri ihmal edilecek ve akımın daimi olduğu varsayılacaktır.

Ayrıca paralel iki levha arasında akım ve rijid silindirik tüp içerisindeki akım inceleneceği için **(2.24)** gerilme ifadeleri ve **(2.26)** hareket denklemleri açık olarak elde edilmiştir.

2.2 Kartezyen Koordinatlarda Gerilme Bileşenleri ve Hareket Denklemleri

Şekil değiştirme hızı tansörü **d** 'nin bileşenleri:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & d_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & d_{33} &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ d_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & d_{13} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & d_{23} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Gerilme tansörü **t** 'nin bileşenleri:

$$\begin{aligned} t_{11} &= -p + 2\mu(p)\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & t_{22} &= -p + 2\mu(p)\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & t_{33} &= -p + 2\mu(p)\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ t_{12} &= \mu(p)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & t_{13} &= \mu(p)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & t_{23} &= \mu(p)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} t_{11,1} + t_{21,2} + t_{31,3} &= \rho\left(v_{1,1}v_1 + v_{1,2}v_2 + v_{1,3}v_3\right) \\ t_{12,1} + t_{22,2} + t_{32,3} &= \rho\left(v_{2,1}v_1 + v_{2,2}v_2 + v_{2,3}v_3\right) \\ t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} &= \rho\left(v_{3,1}v_1 + v_{3,2}v_2 + v_{3,3}v_3\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sıkışmazlık Koşulu:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0 \tag{2.30}$$

Bu denklemlerde (x_1,x_2,x_3) dik kartezyen koordinatları, v_1, x_1 doğrultusunda; v_2, x_2 doğrultusunda; v_3, x_3 doğrultusundaki hız bileşenlerini göstermektedir.

2.3 Silindirik Koordinatlarda Gerilme Bileşenleri ve Hareket Denklemleri

Şekil değiştirme hızı tansörü **d** 'nin bileşenleri:

$$\begin{aligned}
&d_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r} && d_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r} && d_{zz}=\frac{\partial v_z}{\partial z}\\
&d_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right) && d_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) && d_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Gerilme tansörü **t** 'nin bileşenleri:

$$\begin{aligned}
&t_{rr}=-p+2\mu(p)\frac{\partial v_r}{\partial r} && t_{zz}=-p+2\mu(p)\frac{\partial v_z}{\partial z}\\
&t_{\theta\theta}=-p+2\mu(p)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right) && t_{r\theta}=\mu(p)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)\\
&t_{\theta z}=\mu(p)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right) && t_{rz}=\mu(p)\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Hareket denklemleri:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial t_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(t_{rr}-t_{\theta\theta})=\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{{v_\theta}^2}{r}\right)\\
&\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}(t_{r\theta})=\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)\\
&\frac{\partial t_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(t_{rz})=\rho\left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

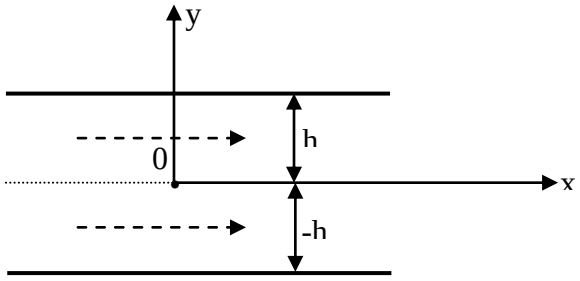
Sıkışmazlık koşulu:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{2.34}$$

Bu denklemlerde (r,θ,z) silindirik koordinatlarda sırasıyla radyal, teğetsel ve eksensel koordinatları göstermektedir. v_r radyal, v_θ teğetsel, v_z ise eksensel hız bileşenlerini göstermektedir.

3. PARALEL İKİ SABİT PLAK ARASINDAKİ AKIM

Şekil 3.1' de gösterildiği gibi x ve z doğrultularında sonsuz iki paralel plak arasında viskozitenin basıncın fonksiyonu olduğu akım incelenecektir.



Şekil 3.1 : Paralel sabit plaklar

Viskozitenin basınca bağlılığının

$$\mu(p)=\alpha p \qquad \mu(p)=\mu_0(1+\alpha p) \qquad \mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p} \tag{3.1}$$

biçiminde olduğu üç durum ayrı ayrı incelenecektir. Her üç durumda sadece x ekseni doğrultusundadır. $v_1 = v$ hız bileşeninin sıfırdan farklı olduğu ve $v = v(y)$ olduğu kabul edilecektir. $v_2 = v_3 = 0$ olacaktır. Bu varsayım altında gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{22} = t_{33} = -p \\ t_{13} &= t_{23} = 0 \\ t_{12} &= \mu(p)\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak elde edilir. Bu gerilme bileşenleri **(2.29)** hareket denklemlerinde kullanılırsa

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{d^2 v}{dy^2}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{dv}{dy}-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{3.5}$$

lineer olmayan diferansiyel denklemlerine ulaşılır.

Ayrıca $v_1 = v(y)$ ve $v_2 = v_3 = 0$ olduğu için sıkışmazlık koşulunun sağlandığı görülmektedir. Burada x_1 koordinatı x' e, x_2 koordinatı y' ye ve x_3 koordinatını da z'ye karşı gelmektedir.

Viskozitenin boyutu $[\mu] = \frac{M}{LT}$, basıncın boyutu $[p] = \frac{M}{T^2 L}$ ve hızın boyutu $[v] = \frac{L}{T}$ dir. Burada M kütle, T zaman ve L uzunluk temel boyutlarına karşı gelmektedir. MKS sisteminde basıncın birimi Pascal ile ölçülür ve $1Pa = \frac{1N}{m^2}$ dir. Viskozitenin birimi ise $Pa.sn$ dir. Sonraki bölümlerde üç farklı durum ayrı ayrı incelenecektir.

3.1 $\mu(p) = \alpha p$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu

Yukarıda verilen boyut bilgilerine göre α sabitinin T zaman boyutunda olduğu söylenebilir. (**3.3)-(3.5)** denklemlerinin boyutsuz büyüklükler ile ifade etmek uygun olacaktır. Bunun için aşağıdaki gibi x^*, y^*, v^* ve p^* boyutsuz değişkenlerini tanımlanırsa

$$x = hx^* \qquad y = hy^* \qquad v = uv^* \qquad p = \alpha_0 p^* \tag{3.6}$$

Burada $u = \sqrt{gh}$ ve $\alpha_0 = hg\rho$ olarak tanımlanmış olup, g yerçekimi ivmesi, ρ akışkanın yoğunluğudur. (**3.5)** denklemi basıncın z ye bağlı olmadığını ifade eder. O halde $p = p(x, y)$ olacaktır.

Boyutsuz değişkenler cinsinden (**3.3)** ve **(3.4)** denklemleri,

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\alpha u}{h}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\alpha u}{h} p^* \frac{d^2 v}{dy^{*2}} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\alpha u}{h}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{dv^*}{dy} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir. Plak ve akışkanın değme noktalarında hızları eşit olacağından yukarıdaki denklemin çözümleri $v^*(h) = 0$ ve $v^*(-h) = 0$ sınır koşullarını sağlamalıdır. Bundan böyle yazım kolaylığı için denklemlerden (*) atılacaktır. Bu durumda

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha u}{h} = \sqrt{\frac{g}{h}}\alpha \tag{3.9}$$

olarak alınırsa, diferansiyel denklemler ve sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\overline{\alpha}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dv}{dy}+\overline{\alpha}p\frac{d^2v}{dy^2}=0 \tag{3.10}$$

$$\overline{\alpha}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dv}{dy}-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{3.11}$$

Sınır koşulları ise

$$v(1)=0\ ,\ \ v(-1)=0\ ,\ \ -1\le y\le 1 \tag{3.12}$$

olacaktır. Basınç fonksiyonu için çözüm,

$$p(x,y)=F(x)G(y) \tag{3.13}$$

biçiminde aranacaktır. Bu ifade **(3.10)** ve **(3.11)** denklemlerinde kullanılırsa ve $v=v(y)$ olduğu hatırlanırsa

$$-F'G+\overline{\alpha}FG'v'+\overline{\alpha}FGv''=0 \tag{3.14}$$

$$\overline{\alpha}F'Gv'-FG'=0 \tag{3.15}$$

eşitliklerine ulaşılır ve düzenlenirse,

$$\frac{F'}{\overline{\alpha}F}=\frac{G'v'+Gv''}{G} \tag{3.16}$$

$$\frac{G'}{\overline{\alpha}Gv'}=\frac{F'}{F} \tag{3.17}$$

yazılabilir.

$F=F(x)$, $G=G(y)$ ve $v=v(y)$ olduğu için yukarıdaki denklemler değişkenlerine ayrılmış biçimdedirler. O halde her ikisin de bir sabite eşit olması gerekir. λ ve λ_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$\frac{F'}{\overline{\alpha}F}=\frac{G'v'+Gv''}{G}=-\lambda \tag{3.18}$$

$$\frac{G'}{\overline{\alpha}Gv'}=\frac{F'}{F}=-\lambda_1 \tag{3.19}$$

yazılabilir. **(3.18)**'den

$$\frac{F'}{\overline{\alpha}F}=-\lambda \tag{3.20}$$

$$\frac{G'}{G}v'+v''=-\lambda \tag{3.21}$$

denklemleri elde edilir. **(3.20)** denkleminin çözümü

$$F(x) = c_1 e^{-\lambda \bar{\alpha} x} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi bir sabittir. **(3.19)**'dan ise

$$\frac{F'}{F} = -\lambda_1 \tag{3.23}$$

$$\frac{G'}{\bar{\alpha} G v'} = -\lambda_1 \tag{3.24}$$

yazılabilir. **(3.19)** ve **(3.20)** denklemlerinden $\lambda_1 = \bar{\alpha}\lambda$ olduğu görülmektedir. **(3.21)** ve **(3.24)** denklemleri arasında G yok edilirse

$$-\lambda \bar{\alpha}^2 (v')^2 + v'' = -\lambda \tag{3.25}$$

bulunur. $v' = u$ dönüşümü ile bu denklemden

$$\frac{du}{dy} = -\lambda\left(1 - \bar{\alpha}^2 u^2\right) \tag{3.26}$$

veya

$$\frac{du}{\lambda\left(\bar{\alpha}^2 u^2 - 1\right)} = dy \tag{3.27}$$

bulunur. Bu ifadenin integrasyonu ile

$$u = -\frac{1}{\bar{\alpha}} Tanh\left[\bar{\alpha}(\lambda y + c_2)\right] \tag{3.28}$$

elde edilir. En büyük hız $y = 0$ da oluşacağı için $v'(0) = u(0) = 0$ koşulu da sağlanmalıdır. Bu koşul yardımı ile **(3.28)'**den $c_2 = 0$ bulunur. **(3.28)'**in integrasyonu ile hız

$$v(y) = -\frac{1}{\lambda \bar{\alpha}^2} \ln\left(\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)\right) + c_3 \tag{3.29}$$

olarak bulunur. c_3 integrasyon sabiti olmak üzere **(3.12)** sınır koşullarından

$$c_3 = \frac{1}{\lambda \bar{\alpha}^2} \ln\left(\cosh(\bar{\alpha}\lambda)\right) \tag{3.30}$$

olarak belirlenir ve **(3.29)**'da yerine yazılırsa v hızı için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$v(y)=\frac{1}{\lambda\bar{\alpha}^2}\ln\left(\frac{\cosh(\bar{\alpha}\lambda)}{\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)}\right) \tag{3.31}$$

(3.28) ifadesi **(3.24)'**de kullanılırsa c_4 keyfi bir sabit olmak üzere

$$G(y)=c_4\cosh(\bar{\alpha}\lambda y) \tag{3.32}$$

ve bu sonuç **(3.22)** ile birlikte **(3.13)**'te yerine yazılırsa basınç fonksiyonu

$$p(x,y)=C\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)e^{-\lambda\bar{\alpha}x} \tag{3.33}$$

olarak bulunur. C sabitini belirlemek için akışkanın belli bir noktasındaki basıncın değerinin bilindiğini varsayılacaktır. Buna göre $(0,0)$ noktasında $p = p_0$ olduğunu kabul edilirse, **(3.33)'**den $c = p_0$ olarak bulunur.

Sonuç olarak basınç fonksiyonu;

$$p(x,y)= p_0\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)e^{-\lambda\bar{\alpha}x} \tag{3.34}$$

Benzer problem Hron ve arkadaşları tarafından incelenmiştir. Ancak bu incelemede **(3.10)** ve **(3.11)** denklemleri doğrudan çözülmüş ve $c_0=\lambda\bar{\alpha}$ olmak üzere aynı sonuçlar elde edilmiştir.

3.2 $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ Biçiminde Basınca Bağlılık Durumu

Burada μ_0 viskozite boyutunda bir büyüklük olup, α ise $\frac{1}{Pa}$ boyutundadır. $u=\sqrt{gh}$ ve $\alpha_0 = hg\rho$ olmak üzere, **(3.3)-(3.5)** denklemlerinin boyutsuz büyüklükler ile ifade etmek için aşağıdaki gibi x^*, y^*, v^* ve p^* boyutsuz değişkenleri tanımlanırsa

$$x = hx^* \qquad y = hy^* \qquad v = uv^* \qquad p = \alpha_0 p^* \tag{3.35}$$

yeni boyutsuz değişkenler cinsinden **(3.3)-(3.5)** denklemleri;

$$\begin{gathered}-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\mu_0{}^*\bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\frac{dv^*}{dy^*}+\mu_0{}^*(1+\bar{\alpha}p^*)\frac{d^2v^*}{dy^{*2}}=0\\ \frac{\partial p^*}{\partial y^*}-\mu_0{}^*\bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\frac{dv^*}{dy^*}=0\end{gathered} \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = 0$$

olarak yazılabilir. Burada $\overline{\alpha} = \alpha_0 \alpha$ ve $\mu_0{}^* = \dfrac{\mu_0 u}{h\alpha_0}$ olarak tanımlanmış boyutsuz büyüklüklerdir. Son denklem basıncın z koordinatına bağlı olmadığını göstermektedir. $(*)$'lar atılırsa çözülecek denklem sistemi,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \overline{\alpha}\mu_0 \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dv}{dy} + \mu_0(1+\overline{\alpha}p)\frac{d^2v}{dy^2} = 0 \tag{3.37}$$

$$\overline{\alpha}\mu_0 \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dv}{dy} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3.38}$$

denklemleri elde edilir. **(3.38)'**den

$$\overline{\alpha}\mu_0 \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dv}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.39}$$

yazılabilir. Bu ifade **(3.37)'**de yerine yazılırsa

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \overline{\alpha}^2\mu_0{}^2 \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \mu_0(1+\overline{\alpha}p)\frac{d^2v}{dy^2} = 0 \tag{3.40}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\dfrac{\partial p}{\partial x}}{(1+\overline{\alpha}p)} = \frac{\mu_0 \dfrac{d^2v}{dy^2}}{1-\mu_0{}^2\overline{\alpha}^2\left(\dfrac{dv}{dy}\right)^2} \tag{3.41}$$

$p = p(x,y)$ ve $v = v(y)$ olduğundan bu ifade $\overline{\lambda}(y)$ fonksiyonuna eşit olmalıdır. Ancak bu çalışmada bu fonksiyonu sabit kabul edeceğiz ve $\overline{\lambda}(y) = -\lambda = sabit$ alacağız. Buna göre

$$\frac{\dfrac{\partial p}{\partial x}}{(1+\overline{\alpha}p)} = -\lambda \tag{3.42}$$

ve

$$\frac{\mu_0 \dfrac{d^2v}{dy^2}}{1-\mu_0{}^2\overline{\alpha}^2\left(\dfrac{dv}{dy}\right)^2} = -\lambda \tag{3.43}$$

denklemleri yazılabilir. **(3.42)** denkleminden

$$p(x,y) = C(y)e^{-\lambda\bar{\alpha}x} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \tag{3.44}$$

elde edilir. Burada $C(y)$ keyfi bir fonksiyon olup $v(y)$ hız alanı belirlendikten sonra bulunacaktır. $v' = u$ dönüşümü yapılırsa **(3.43)** denklemi,

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\lambda}{\mu_0}\left(1 - \mu_0{}^2\bar{\alpha}^2 v'^2\right) \tag{3.45}$$

veya

$$\frac{du}{1 - \mu_0{}^2\bar{\alpha}^2 u^2} = -\frac{\lambda}{\mu_0}dy \tag{3.46}$$

elde edilir. **(3.46)**'nın integrasyonu ile

$$u(y) = -\frac{1}{\bar{\alpha}\mu_0}\tanh\left[\bar{\alpha}\lambda y + \bar{\alpha}\mu_0 c_2\right] \tag{3.47}$$

bulunur . $u(0) = 0$ olma koşulundan $c_2 = 0$ olarak belirlenir. **(3.47)**'nin integrasyonu ile hız alanı,

$$v(y) = -\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)\right] + c_3 \tag{3.48}$$

olarak belirlenir. c_3 integrasyon sabiti $v(-1) = v(+1) = 0$ sınır koşullarından

$$c_3 = \frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[\cosh(\bar{\alpha}\lambda)\right] \tag{3.49}$$

olarak bulunur. O halde hız fonksiyonu,

$$v(y) = \frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[\frac{\cosh(\bar{\alpha}\lambda)}{\cosh(\bar{\alpha}\lambda y)}\right] \tag{3.50}$$

olarak elde edilir.

Basınç fonksiyonunu bulmak için **(3.32)**'de ki $C(y)$ keyfi fonksiyonunu belirlenmesi gerekir. Eğer **(3.44)** ve **(3.50)** ifadeleri **(3.39)**'da kullanılırsa $C(y)$ için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{c'(y)}{c(y)} = [\ln(\cosh(\bar{\alpha}\lambda y))]' \tag{3.51}$$

Bu ifadeden c_4 keyfi integrasyon sabiti olmak üzere

$$C(y) = c_4 \cosh(\bar{\alpha}\lambda y) \tag{3.52}$$

olarak elde edilir. Bu ifade **(3.44)**'de yerine yazılırsa basınç fonksiyonu

$$p(x,y) = c_4 \cosh(\bar{\alpha}\lambda y) e^{-\lambda\bar{\alpha}x} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \tag{3.53}$$

yazılabilir. Bu ifadede c_4 sabitini belirlemek için $(0,0)$ noktasında basıncın p_0 olduğunu varsayılacaktır. Buna göre

$$c_4 = p_0 + \frac{1}{\bar{\alpha}} \tag{3.54}$$

olacaktır. O halde basınç fonksiyonu,

$$p(x,y) = \left(p_0 + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) \cosh(\bar{\alpha}\lambda y) e^{-\lambda\bar{\alpha}x} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \tag{3.55}$$

olarak elde edilir. Bu çalışmada λ sabitini belirlemek için ikinci bir noktada, $(1,0)$ noktasında basıncın p_1 olduğunu kabul edilmiştir. Bu kabul altında

$$\lambda = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \ln\left(\frac{\bar{\alpha}p_1 + 1}{\bar{\alpha}p_0 + 1} \right) \tag{3.56}$$

olacaktır. Bu çalışmada belli λ, $\bar{\alpha}$ değerleri için basınç ve hız fonksiyonlarının değişimleri incelenecektir. **(3.44)** denklemi ile **(3.50)** denklemi karşılaştırılırsa ikinci durumda hız μ_0 değerine bağlıdır. $\mu_0 = 1$ için aynı hız değişimleri ortaya çıkacaktır. $\mu^* = \frac{\mu_0 u}{h\alpha_0} = 1$ eşitliğinden $\mu_0 = \rho h\sqrt{gh}$ elde edilir. μ_0'ın bu özel değeri için, iki durum arasındaki farklılık ortadan kalkacaktır**.** **(3.50)** ve **(3.55)** denklemlerinde $\bar{\alpha} \to 0$ durumunda viskozitenin sabit olduğu duruma karşı gelen çözümler elde edilecektir. Kolayca görülebilir ki, **(3.50)'**den

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} v^*(y) = \frac{\lambda}{2\mu_0^*}\left(y^2 - 1\right) \tag{3.57}$$

(3.57) ve **(3.55)** denklemlerinden

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} p^*(x,y) = -\lambda x^* \tag{3.58}$$

sonuçları elde edilir. Başlangıçta yapılan boyutsuzlaştırmaların

$$v^* = \frac{v}{u} \qquad y^* = \frac{y}{h} \qquad p^* = \frac{p}{\alpha_0} \qquad x^* = \frac{x}{h} \qquad \mu_0{}^* = \frac{\mu_0 u}{h\alpha_0} \tag{3.59}$$

olduğu hatırlanırsa **(3.57)** ve **(3.58)'**den $\bar{\lambda} = \lambda g\rho$ olmak üzere;

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} v(y) = \frac{\bar{\lambda}}{2\mu_0}\left(y^2 - h^2\right) \tag{3.60}$$

ve

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} p(x,y) = -\lambda x \tag{3.61}$$

elde edilir. Bu sonuçlar viskozitenin sabit olduğu durumdaki çözümlerdir.

3.3 $\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p}$ Biçiminde Bağlılık Durumu

Burada μ_0 viskozite , α ise 1/Pa boyutunda sabitlerdir. $u = \sqrt{gh}$, $\alpha_0 = hg\rho$ ve $\beta = \frac{\alpha_0 h}{u}$ olmak üzere ;

$$x = hx^* \qquad y = hy^* \qquad v = uv^* \qquad p = \alpha_0 p^* \qquad \mu_0 = \beta\mu_0{}^* \tag{3.62}$$

boyutsuz büyüklükler tanımlandığında, yeni boyutsuz değişkenler cinsinden **(3.3)** ve **(3.5)** denklemleri,

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu_0{}^* \frac{\partial}{\partial y^*}(e^{\varepsilon p^*})\frac{dv^*}{dy^*} + \mu_0{}^* e^{\varepsilon p^*}\frac{d^2 v^*}{dy^{*2}} = 0 \tag{3.63}$$

$$\mu_0{}^* \frac{\partial}{\partial x^*}(e^{\varepsilon p^*})\frac{dv^*}{dy^*} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \tag{3.64}$$

olarak elde edilir.(*)'lar atılırsa

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial y}(e^{\varepsilon p})\frac{dv}{dy} + \mu_0 e^{\varepsilon p}\frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \tag{3.65}$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial x}(e^{\varepsilon p})\frac{dv}{dy} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3.66}$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon = \alpha_0\alpha$ olarak tanımlanmıştır. **(3.65)'**ten $\frac{\partial p}{\partial x}$ çekilir ve **(3.66)'**da yerine yazılırsa

$$\mu_0{}^2\varepsilon e^{2\varepsilon p}v'\left(\varepsilon\frac{\partial p}{\partial y}v'+v''\right)=\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.67}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2\varepsilon p}v'^2\right)=2e^{2\varepsilon p}\left(\varepsilon\frac{\partial p}{\partial y}v'^2+v'v''\right) \tag{3.68}$$

eşitliği **(3.67)'**de kullanılırsa

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{2}\mu_0{}^2\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2\varepsilon p}v'^2\right) \tag{3.69}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin integrasyonu ile

$$p-\frac{1}{2}\mu_0{}^2\varepsilon e^{2\varepsilon p}v'^2=\Phi(x) \tag{3.70}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Phi(x)$ keyfi bir fonksiyondur. **(3.70)** denklemi x'e göre türetilirse ve **(3.66)'**dan $\frac{\partial p}{\partial y}$ çekilip **(3.65)'**de kullanılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$\frac{\partial p}{\partial x}\left[1-\mu_0{}^2\varepsilon^2e^{2\varepsilon p}v'^2\right]=\Phi'(x) \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\left[-1+\mu_0{}^2\varepsilon^2e^{2\varepsilon p}v'^2\right]+\mu_0e^{\varepsilon p}v''=0 \tag{3.72}$$

Bu denklemlerden

$$\mu_0e^{\varepsilon p}v''=\Phi'(x) \tag{3.73}$$

yazılabilir. Bu denklemlere göre $v=v(y)$ olduğu göz önüne alındığında basınç fonksiyonunun,

$$p(x,y)=R(x)+S(y) \tag{3.74}$$

biçiminde olması gerektiği ortaya çıkar. **(3.73)** denklemine göre $e^{\varepsilon R(x)}=sabit$ olmalıdır. O halde $R(x)=sabit$ ve $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ elde edilir. $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ olması x doğrultusunda akımın oluşmayacağı anlamına gelir. Yani $v=0$ olmalıdır.

Bu çalışmada elde edilen genel sonuca karşın ε parametresi pertürbasyon parametresi olarak seçilerek $e^{\varepsilon p}$, p ve v büyüklükleri pertürbasyon serisine açılarak çözüm aranacaktır.

Bazı alışkanlar için $\mu = \mu_0 e^{\alpha p}$ ifadesindeki μ_0 ve α parametrelerinin değerleri **Çizelge 3.1**'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : μ_0 ve α parametreleri bilinen bazı akışkan türleri

AKIŞKAN	$\mu_0(Pas)$	$\alpha(1/GPa)$
Octamethyltrisiloxane	$0.12\text{x}10^{-3}$	13
Vegetable Biodiesel	$7.5\text{x}10^{-3}$	12
Diisodecly Phthalate	$123\text{x}10^{-3}$	26
Paraffinic Oils	$810\text{x}10^{-3}$	34
PαMSAN	$1.08\text{x}10^{-3}$	35

Tablodaki α değerler pertürbasyon seri açılımının uygun olacağını doğrulamaktadır. α yaklaşık 10^{-8} mertebesinde olmaktadır. Bu çalışmada $\mu_0 = 1$ alınacaktır. $e^{\varepsilon p}$, p, v büyüklükleri pertürbasyon serisine açılırsa

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon p} &= 1 + \varepsilon p + \frac{1}{2}\varepsilon^2 p^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 p^3 + \ldots. \\ p &= p_0(x,y) + p_1(x,y)\varepsilon + p_2(x,y)\varepsilon^2 + \ldots. \\ v &= v_0(y) + v_1(y)\varepsilon + v_2(y)\varepsilon^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Bu ifadeler **(3.65)** ve **(3.66)** denklemlerinde kullanılırsa ve elde edilen denklemler ε nun kuvvetlerine göre gruplandırılırsa her bir grup ayrı ayrı sıfır olmalıdır. Bu durumda

ε^0 'ın katsayısı olan denklemler;

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \tag{3.76}$$

$$\mu_0 \frac{d^2 v_0}{dy^2} - \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \tag{3.77}$$

olarak elde edilir. **(3.76)**'dan $p_0 = p_0(x)$ ve **(3.77)'**den

$$\mu_0 \frac{d^2 v_0}{dy^2} = \frac{\partial p_0}{\partial x} = -\lambda \tag{3.78}$$

yazılabilir. Burada $\lambda \rangle 0$ bir sabittir. Bu denklemlerin integrasyonu C_1 , D_1 , D_2 integrasyon sabitleri olmak üzere

$$p_0 = -\lambda x + C_1 \tag{3.79}$$

$$v_0 = -\frac{\lambda}{2\mu_0} y^2 + D_1 y + D_2 \tag{3.80}$$

olacaktır. Sınır koşulları $v(+1) = v(-1) = 0$ ve $p(0,0) = 0$ olarak alınacaktır. Buna göre $p_0(0,0) = 0$, $v_0(1) = 0$, $v_0(-1) = 0$ olacaktır. Bu koşullar yardımı ile $C_1 = 0$, $D_1 = \frac{\lambda}{2\mu_0}$ ve $D_2 = 0$ bulunur. O halde sıfırıncı mertebe için çözüm,

$$p_0 = -\lambda x \tag{3.81}$$

$$v_0 = \frac{\lambda}{2\mu_0}\left(1 - y^2\right) \tag{3.82}$$

olacaktır. Bu sonuçlar viskozitenin sabit olduğu durumda bilinen hız ve basınç ifadeleridir.

ε^1' in katsayısı olan denklemler;

$$p_0 v_0'' + v_1'' + v_0' \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \tag{3.83}$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} + v_0' \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \tag{3.84}$$

şeklindedir. **(3.81)** ve **(3.82)** göz önüne alınarak bu denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\lambda p_0 + v_1'' - \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \tag{3.85}$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} + \lambda^2 y = 0 \tag{3.86}$$

(3.86)' nın integrasyonundan $\Phi_1(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$p_1(x,y) = \frac{\lambda^2}{2} y^2 + \Phi_1(x) \tag{3.87}$$

bulunur. Bu ifade **(3.85)**'te kullanılırsa λ_1 bir sabit olmak üzere

$$v_1'' = \frac{d\Phi_1(x)}{dx} - \lambda^2 x = -\lambda_1 \tag{3.88}$$

ve integrasyon ile

$$v_1 = -\frac{\lambda_1}{2} y^2 + D_3 y + D_4 \tag{3.89}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{\lambda^2}{2} x^2 - \lambda_1 x + C_2 \tag{3.90}$$

elde edilir. $v(+1) = v(-1) = 0$ ve $p(0,0) = 0$ koşullarından $D_3 = C_2 = 0$ ve $D_4 = \lambda_1 / 2$ olarak belirlenir. O halde birinci mertebe yaklaşım için

$$p_1 = \frac{\lambda^2}{2}\left(y^2 + x^2\right) - \lambda_1 x \tag{3.91}$$

$$v_1 = \frac{\lambda_1}{2}\left(1 - y^2\right) \tag{3.92}$$

sonuçları elde edilir.

ε^2 'nin katsayısı olan denklemler;

$$2\lambda\lambda_1 x - \lambda^3 x^2 - \frac{3}{2}\lambda^3 y^2 + v_2'' - \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 \tag{3.93}$$

$$2\lambda\lambda_1 y - 2\lambda^3 xy - \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \tag{3.94}$$

şeklinde elde edilir. **(3.94)** denkleminin integrasyonu ile

$$p_2 = \lambda\lambda_1 y^2 - \lambda^3 xy + \Phi_2(x) \tag{3.95}$$

bulunur. $\Phi_2(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere bu ifade **(3.93)**' te kullanılırsa v_2 ve Φ_2 için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$v_2'' - \frac{3}{2}\lambda^3 y^2 = \frac{d\Phi_2}{dx} - 2\lambda\lambda_1 x + \lambda^3 x^2 = -\lambda_2 \tag{3.96}$$

denklem değişkenlerine ayrılmış olduğu için bir $-\lambda_2$ sabitine eşitlenmiştir. Bu ifadeden $v(+1) = v(-1) = 0$ ve $p(0,0) = 0$ koşullarını sağlayan çözümler,

$$v_2(y) = \frac{1}{24}\left[12\lambda_2\left(1 - y^2\right) + \lambda^3\left(y^4 - 1\right)\right] \tag{3.97}$$

$$p_2(x,y) = \lambda\lambda_1\left(x^2 + y^2\right) - \lambda^3 x\left(y^2 + \frac{x^2}{3}\right) \tag{3.98}$$

olacaktır.

ε^3 'ün katsayısı olan denklemler;

$$\left(\lambda_1{}^2+\lambda\lambda_2\right)x+\left(\lambda\lambda_2-3\lambda^2\lambda_1\right)x^2+\lambda^4x^3-\frac{9}{2}\lambda^2\lambda_1y^2+4\lambda^4xy^2+v_3{}''-\frac{\partial p_3}{\partial x}=0 \qquad (3.99)$$

$$\left(\lambda_1{}^2+\lambda\lambda_2\right)y+xy\left(2\lambda\lambda_2-6\lambda^2\lambda_1\right)+3\lambda^4x^2y+\frac{4}{3}\lambda^4y^3-\frac{\partial p_3}{\partial y}=0 \qquad (3.100)$$

olarak yazılabilir. Son denklemin integrasyonu ile

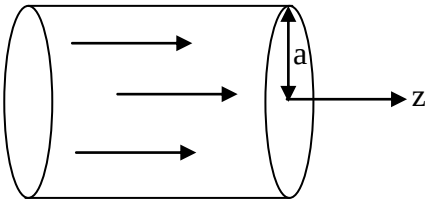
$$p_3(x,y)=\frac{1}{2}\left(\lambda_1{}^2+\lambda\lambda_2\right)y^2+\frac{1}{2}\left(\lambda\lambda_2-3\lambda^2\lambda_1\right)xy^2+\frac{3}{2}\lambda^4x^2y^2+\frac{1}{3}\lambda^4y^4+\Phi_3(x) \qquad (3.101)$$

elde edilir. Bu ifade **(3.99)'** da kullanılırsa $v_3(y)$ ve $\Phi_3(x)$ keyfi fonksiyonu için

$$\left(\lambda_1{}^2+\lambda\lambda_2\right)x+\left(\lambda\lambda_2-3\lambda^2\lambda_1\right)x^2+\lambda^4x^3-\frac{3}{2}\lambda^2\lambda_1y^2-\lambda\lambda_2y^2+\lambda^4xy^2-\Phi_3{}'+v_3{}''=0 \qquad (3.102)$$

elde edilir. λ^4xy^2 terimin varlığı bu denklemlerin değişkenlerine ayrılabilir olarak yazılmasını engellemektedir. Bu durumda $v_3(y)$ ve $p_3(x,y)$ fonksiyonları belirlenememektedir.

4. RİJİD SİLİNDİRİK TÜPTE AKIM



Şekil 4.1 : Rijid silindirik tüp

Bu bölümde şekilde gösterildiği gibi a yarıçaplı silindirik tüp içerisinde akımın, viskozitesinin basınca bağlılığının $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0(1+\alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 e^{\alpha p}$ biçiminde olması durumları incelenecektir. Hızın sadece eksenel bileşeninin olduğu varsayılacaktır. Buna göre $v_r = v_\theta = 0$, $v_z = w(r)$ olacaktır. Bu varsayımlar altında şekil değiştirme hızı tansörü bileşenleri ve gerilme tansörü bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} &d_{rr} = d_{\theta\theta} = d_{zz} = d_{r\theta} = d_{\theta z} = 0 \\ &d_{rz} = \frac{1}{2}\frac{dw}{dr} \\ &t_{rr} = t_{\theta\theta} = t_{zz} = -p \\ &t_{r\theta} = t_{\theta z} = 0,\ t_{rz} = \mu(p)\frac{dw}{dr} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Gerilme bileşenleri **(2.33)** hareket denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler;

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.4}$$

şeklini alır. Sıkışmazlık koşulunun sağlandığı hemen görülebilir. **(4.3)** denklemi basıncın θ koordinatına bağlı olmayacağını göstermektedir.

4.1 $\mu(p)=\alpha p$ Biçiminde Basınca Bağlı Olma Durumu

$$r = ar^* \qquad w(r) = uw^* \qquad z = az^* \qquad p = \alpha_0 p^* \tag{4.5}$$

biçiminde r^*, z^*, w^* ve p^* boyutsuz değişkenler tanımlanırsa **(4.2)** ve **(4.4)** denklemleri,

$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial z^*}\frac{dw^*}{dr^*} = 0 \tag{4.6}$$

$$\bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial r^*}\frac{dw^*}{dr^*} + \bar{\alpha}p^*\frac{d^2w^*}{dr^{*2}} - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \bar{\alpha}p^*\frac{dw^*}{dr^*} = 0 \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir. Burada $u=\sqrt{ga}$, $\alpha_0=\sqrt{ag\rho}$ ve $\bar{\alpha}=\frac{\alpha u}{a}=\sqrt{\frac{g}{a}}\alpha$ tanımları yapılmıştır. Sınır koşulları $w^*(1)=0$ ve $\left.\frac{dw^*}{dr^*}\right|_{r^*=0}=0$ olacaktır. (*)' lar atılırsa bu bölümde çözülecek denklemler ve hız üzerine konulan koşullar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.8}$$

$$\bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dw}{dr} + \bar{\alpha}p\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \bar{\alpha}p\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.9}$$

$$w(1)=0\ ,\ w'(0)=0 \tag{4.10}$$

(4.8) denkleminden $\frac{\partial p}{\partial r}$ çekilir ve **(4.9)'**da yerine konursa

$$\frac{\partial p}{\partial z}\left(\bar{\alpha}^2 w'^2 - 1\right) + \bar{\alpha}p\left(w'' + \frac{w'}{r}\right) = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. $w=w(r)$ ve $p=p(r,z)$ olduğundan son denklem

$$\frac{w'' + \dfrac{w'}{r}}{1-\bar{\alpha}^2(w')^2} = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial z}}{\bar{\alpha}p} = -\bar{\lambda}(r) \tag{4.12}$$

burada $\bar{\lambda}(r)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

Paralel plaklar arasındaki akımın incelenmesinde olduğu gibi $\bar{\lambda}(r)=-\lambda$ sabit ve $\lambda\rangle 0$ olarak kabul edilecektir. **(4.12)**'den w ve p için

$$w''+\frac{w'}{r}+\lambda\left(1-\bar{\alpha}^2(w')^2\right)=0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\bar{\alpha}\lambda p=0 \tag{4.14}$$

diferansiyel denklemleri yazılabilir. **(4.13)** denkleminde $w'=u$ dönüşümü yapılırsa

$$u'+\frac{u}{r}+\lambda\left(1-\bar{\alpha}^2u^2\right)=0 \tag{4.15}$$

bulunur. Bu denklemin çözümü K keyfi bir sabit olmak üzere

$$u(r)=\frac{i\left[J_1(i\bar{\alpha}\lambda r)-KY_1(-i\bar{\alpha}\lambda r)\right]}{\bar{\alpha}\left[J_0(i\bar{\alpha}\lambda r)+KY_0(-i\bar{\alpha}\lambda r\right]} \tag{4.16}$$

olarak yazılabilir. Burada J_0, J_1 birinci; Y_0, Y_1 ikinci cins Bessel fonksiyonlarıdır. $r=0$ için $Y_1(0)=\infty$ olduğundan $K=0$ olacaktır. Bu durumda $u(0)=0$ koşulunun sağlandığı da görülmektedir. **(4.16)**'nın integrasyonu ile

$$w(r)=-\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda}\ln\left[J_0(i\bar{\alpha}\lambda r)\right]+c_1 \tag{4.17}$$

elde edilir. $w(1)=0$ sınır koşullarından

$$c_1=\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda}\ln\left[J_0(i\bar{\alpha}\lambda)\right] \tag{4.18}$$

olarak belirlenir ve c_1 yerine yazılırsa hız alanı

$$w(r)=\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda}\ln\left[\frac{J_0(i\bar{\alpha}\lambda)}{J_0(i\bar{\alpha}\lambda r)}\right] \tag{4.19}$$

veya $J_0(i\beta)=I_0(\beta)$ bağıntısı yardımı ile

$$w(r)=\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda}\ln\left[\frac{I_0(\bar{\alpha}\lambda)}{I_0(\bar{\alpha}\lambda r)}\right] \tag{4.20}$$

olarak elde edilir. I_0, 0.mertebe Modifiye Bessel Fonksiyonudur. **(4.14)**denkleminin integrasyonundan basınç fonksiyonu;

$$p(r,z)=C(r)e^{-\lambda\bar{\alpha}z} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. Burada $C(r)$ keyfi bir fonksiyondur. **(4.20)** ve **(4.21)** ifadeleri **(4.8)**' de yerine konursa $C(r)$ fonksiyonu için

$$\frac{C'(r)}{C(r)} = \lambda\bar{\alpha}\frac{I_1(\lambda\bar{\alpha}r)}{I_0(\lambda\bar{\alpha})} \tag{4.22}$$

denklemi elde edilir. İntegrasyon ile

$$C(r) = c_2 I_0(\lambda\bar{\alpha}r) \tag{4.23}$$

bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa

$$p(r,z) = c_2 I_0(\lambda\bar{\alpha}r)e^{-\lambda\bar{\alpha}z} \tag{4.24}$$

elde edilir. c_2 sabitini belirlemek için $(0,0)$ noktasında basıncın, p_0 olduğu kabul edilmesi durumunda $c_2 = p_0$ olarak belirlenir. Sonuç olarak basınç fonksiyonu;

$$p(r,z) = p_0 I_0(\lambda\bar{\alpha}r)e^{-\lambda\bar{\alpha}z} \tag{4.25}$$

olarak bulunur.

4.2 $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ Biçiminde Basınca Bağlılık Durumu

$$r = ar^* \qquad z = az^* \qquad w = uw^* \qquad p = \alpha_0 p^* \tag{4.26}$$

biçiminde r^*, z^*, w^* ve p^* boyutsuz değişkenleri tanımlanırsa **(4.2)** ve **(4.4)** denklemleri,

$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \mu_0{}^*\bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial z^*}\frac{dw^*}{dr^*} = 0 \tag{4.27}$$

$$\mu_0{}^*\bar{\alpha}\frac{\partial p^*}{\partial r^*}\frac{dw^*}{dr^*} + \mu_0{}^*(1+\bar{\alpha}p^*)\frac{d^2w^*}{dr^{*2}} - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \mu_0{}^*\left(\frac{1+\bar{\alpha}p^*}{r^*}\right)\frac{dw^*}{dr^*} = 0 \tag{4.28}$$

olarak yazılabilir. Burada $\bar{\alpha} = \alpha_0\alpha$ ve $\mu_0{}^* = \frac{\mu_0 u}{a\alpha_0}$ şeklinde tanımlanmış büyüklüklerdir. (*)'lar atılırsa çözülmesi gereken denklem takımı;

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_0\bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.29}$$

$$\mu_0\bar{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{dw}{dr} + \mu_0(1+\bar{\alpha}p)\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_0\left(\frac{1+\bar{\alpha}p}{r}\right)\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.30}$$

(4.29)'dan $\frac{\partial p}{\partial r}$ çekilip **(4.30)'**da yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial p}{\partial r}\left[\mu_0{}^2\bar{\alpha}^2(w')^2-1\right]+\mu_0(1+\bar{\alpha}p)\left(w''+\frac{w'}{r}\right)=0 \tag{4.31}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem $\lambda\rangle 0$ bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi değişkenlerine ayrılabilir bir denkleme dönüşür.

$$\frac{\mu_0\left(w''+\frac{w'}{r}\right)}{1-\bar{\alpha}^2\mu_0{}^2(w')^2}=\frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{1+\bar{\alpha}p}=-\lambda \tag{4.32}$$

Bu ifadeden w ve p için aşağıdaki diferansiyel denklemler yazılabilir.

$$w''+\frac{w'}{r}+\frac{\lambda}{\mu_0}\left(1-\bar{\alpha}^2\mu_0{}^2(w')^2\right)=0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\lambda(1+\bar{\alpha}p)=0 \tag{4.34}$$

$w'=u$ dönüşümü yapılırsa **(4.33)** denklemi

$$u'+\frac{u}{r}+\frac{\lambda}{\mu_0}(1-\bar{\alpha}^2\mu_0{}^2u^2)=0 \tag{4.35}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümü K keyfi bir sabit olmak üzere;

$$u(r)=\frac{i\left[KY_1(-i\bar{\alpha}\lambda r+J_1(i\bar{\alpha}\lambda r))\right]}{\bar{\alpha}\mu_0\left[KY_0(-i\bar{\alpha}\lambda r)+J_0(i\bar{\alpha}r)\right]} \tag{4.36}$$

olarak elde edilir. $r\to 0$ için Y_0 ve Y_1 Bessel fonksiyonları $-\infty$ olduğundan $K=0$ olmalıdır. Buradan integrasyon ile hız,

$$w(r)=-\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[J_0(i\bar{\alpha}\lambda r)\right]+c_1 \tag{4.37}$$

olarak elde edilir. $w(1)=0$ koşulundan c_1 bulunur ve yerine yazılırsa hız alanı için aşağıdaki ifade elde edilir. **(4.37)** denklemi

$$w(r)=\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[\frac{J_0(i\bar{\alpha}\lambda)}{J_0(i\bar{\alpha}\lambda r)}\right] \tag{4.38}$$

olarak ya da

$$w(r)=\frac{1}{\bar{\alpha}^2\lambda\mu_0}\ln\left[\frac{I_0(\bar{\alpha}\lambda)}{I_0(\bar{\alpha}\lambda r)}\right] \tag{4.39}$$

biçiminde yazılabilir. **(4.34)** denkleminden $C(r)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere basınç fonksiyonu,

$$p(r,z)=\frac{1}{\bar{\alpha}}\left[C(r)e^{-\bar{\alpha}\lambda z}-1\right] \tag{4.40}$$

olarak bulunur. **(4.39)** ve **(4.40)** ifadeleri **(4.29)**'da yerlerine yazılırsa $C(r)$ fonksiyonu için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{C'(r)}{C(r)}=\bar{\alpha}\lambda\frac{I_1(\bar{\alpha}\lambda r)}{I_0(\bar{\alpha}\lambda r)} \tag{4.41}$$

denkleminin integrasyonu ile

$$C(r)=C_2I_0(\lambda\bar{\alpha}r) \tag{4.42}$$

bulunur ve **(4.40)**'da yerine yazılırsa

$$p(r,z)=\frac{1}{\bar{\alpha}}\left[C_2I_0(\lambda\bar{\alpha}r)e^{-\bar{\alpha}\lambda z}-1\right] \tag{4.43}$$

elde edilir. $(0,0)$'da $p=0$ olarak kabul edildiğinde $C_2=1$ olacaktır. Sonuç olarak basınç alanı aşağıdaki fonsiyon olarak elde edilir.

$$p(r,z)=\frac{1}{\bar{\alpha}}\left[I_0(\lambda\bar{\alpha}r)e^{-\bar{\alpha}\lambda z}-1\right] \tag{4.44}$$

(4.39) ve **(4.44)** ifadelerinde $\bar{\alpha}\to 0$ için sabit viskozite durumuna karşı gelen çözümler elde edilmelidir. Gerçekten

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} w(r)=\frac{\lambda}{4\mu_0}\left(r^2-1\right) \tag{4.45}$$

ve

$$\lim_{\bar{\alpha}\to 0} p(r,z)=-\lambda z \tag{4.46}$$

sonuçları elde edilmektedir.

4.3 $\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ Biçiminde Bağlılık Durumu

Bu bölümde $u=\sqrt{ga}$, $\alpha_0=ag\rho$ ve $\beta=\frac{\alpha_0 a}{u}$ olmak üzere **(4.2)** ve **(4.4)** denklemlerini boyutsuz yazabilmek için

$$r=ar^* \qquad z=az^* \qquad w=uw^* \qquad p=\alpha_0 p^* \qquad \mu_0=\beta\mu_0^* \tag{4.47}$$

r^*, z^*, w^*, p^* boyutsuz değişkenleri ve μ_0^* boyutsuz viskozite tanımlanmıştır. Yeni değişkenler cinsinden yönetici diferansiyel denklemler ;

$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*}+\mu_0^*\frac{\partial}{\partial z^*}\left(e^{\varepsilon p^*}\right)\frac{dw^*}{dr^*}=0 \tag{4.48}$$

$$\mu_0^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\varepsilon p^*\right)\frac{dw^*}{dr^*}+\mu_0^* e^{\varepsilon p^*}\frac{d^2w^*}{dr^{*2}}-\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\mu_0^*\frac{e^{\varepsilon p^*}}{r^*}\frac{dw^*}{dr^*}=0 \tag{4.49}$$

olacaktır. Sınır koşulları ise

$$w^*(1)=(w^*)'(0)=0 \tag{4.50}$$

olacaktır. Yazım kolaylığı için $(*)$'lar atılırsa denklemler ve sınır koşulları

$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu_0\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{\varepsilon p}\right)\frac{dw}{dr}=0 \tag{4.51}$$

$$\mu_0\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon p)\frac{dw}{dr}+\mu_0 e^{\varepsilon p}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu_0\frac{e^{\varepsilon p}}{r}\frac{dw}{dr}=0 \tag{4.52}$$

$$w(1)=(w)'(0)=0 \tag{4.53}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklemlerin çözümü, paralel plaklar arasındaki akımın incelenmesinde olduğu gibi pertürbasyon serileri kullanılarak elde edilmiştir. Bunun için aşağıdaki seri açılımları yapılmıştır.

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon p} &= 1+\varepsilon p(r,z)+\frac{\varepsilon^2}{2}p^2(r,z)+\frac{\varepsilon^3}{6}p^3(r,z)+\ldots \\ p &= p_0(r,z)+p_1(r,z)\varepsilon+p_2(r,z)\varepsilon^2+\ldots. \\ w &= w_0(r,z)+w_1(r,z)\varepsilon+w_2(r,z)\varepsilon^2+\ldots \end{aligned} \tag{4.54}$$

Seri ifadeleri **(4.51)** ve **(4.52)** denklemlerinden kullanılırsa ve her iki denklemde ε' nun kuvvetlerine göre düzenlenirse, denklemlerin sağ tarafları sıfır olduğundan ε' nun kuvvetlerinin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşit olmak zorundadır. Bundan sonra her katsayının sıfıra eşit olması sonucu ortaya çıkan diferansiyel denklemler elde edilip çözülecektir.

ε^0'nın katsayısı olan denklemler;

$$-\frac{\partial p_0}{\partial r} = 0 \tag{4.55}$$

$$\mu_0 w_0'' + \frac{\mu_0}{r} w' - \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \tag{4.56}$$

olacaktır. Birinci denklemden $p_0 = p_0(z)$ elde edilir. İkinci denklem ise $\lambda \rangle 0$ bir sabit olmak üzere değişkenlere ayrılabilir bir denklemdir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mu_0\left(w_0'' + \frac{1}{r} w_0'\right) = \frac{dp_0}{dz} = -\lambda \tag{4.57}$$

Bu denklemden

$$w_0(r) = -\frac{\lambda}{4\mu_0} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \tag{4.58}$$

$$p_0 = -\lambda z + c_3 \tag{4.59}$$

çözümleri kolayca bulunabilir. Burada hızın sonlu olabilmesi için $c_1 = 0$ olmalıdır. $w_0(1) = 0$ ve $p_0(0,0) = 0$ koşullarından c_2 ve c_3 belirlenirse,

ε^0'ın katsayısı için

$$w_0(r) = \frac{\lambda}{4\mu_0}\left(1 - r^2\right) \tag{4.60}$$

$$p_0(z) = -\lambda z \tag{4.61}$$

elde edilir. Bu sonuçlar viskozitenin sabit olması durumunda elde edilen sonuçlardır. Bundan sonraki denklemler elde edilirken $\mu_0 = 1$ olduğu kabul edilmiştir.

ε^1'in katsayısı olan denklemler;

$$-\frac{\lambda^2 r}{2} + \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \tag{4.62}$$

$$\mu_0\left(w_1'' + \frac{w'}{r}\right) + \lambda^2 z - \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \tag{4.63}$$

olacaktır. Birinci denklemden $\varphi_1(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$p_1(r,z)=\frac{\lambda r^2}{4}+\varphi_1(z) \tag{4.64}$$

olarak bulunur ve bunun yardımı ile **(4.63)**'den

$$\mu_0\left(w_1''+\frac{w_1'}{r}\right)=\frac{\partial p_1}{\partial z}-\lambda^2 z=-\lambda_1 \tag{4.65}$$

yazılabilir. $\lambda_1 \rangle \mathbf{O}$ bir sabittir. Bu denklem değişkenlere ayrıldığında,

$$w_1''+\frac{w_1'}{r}=-\frac{\lambda_1}{\mu_0} \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}=\lambda^2 z-\lambda_1 \tag{4.67}$$

denklemlerine ulaşılır. **(4.66)**'dan $w_1(1)=(w_1)'(0)=0$ koşullarını sağlayan çözüm;

$$w_1(r)=\frac{\lambda_1}{4\mu_0}\left(1-r^2\right) \tag{4.68}$$

olarak bulunur. **(4.67)**'den

$$\varphi_1(z)=\frac{\lambda^2 z^2}{2}-\lambda_1 z+D_1 \tag{4.69}$$

elde edilir. $p_1(0,0)=0$ koşulu, $D_1=0$ verecektir. Buna göre

$$p_1(r,z)=\frac{\lambda r^2}{4}+\frac{\lambda^2 z^2}{2}-\lambda_1 z \tag{4.70}$$

elde edilir.

ε^2 'nin katsayısı olan denklemler;

$$\lambda\lambda_1 r-\lambda^3 z r-\frac{\partial p_2}{\partial r}=\mathbf{O} \tag{4.71}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^3 r^2+2\lambda\lambda_1 z-\lambda^3 z^2+\mu_0\left(w_2''+\frac{w_2'}{r}\right)-\frac{\partial p_2}{\partial z}=0 \tag{4.72}$$

olacaktır. **(4.71)**'den,

$$p_2(r,z)=\frac{\lambda\lambda_1}{2}r^2-\frac{\lambda^3}{2}zr^2+\varphi_2(z) \tag{4.73}$$

ve bunun **(4.72)'**de kullanılması ile

$$\mu_0\left(w_2'' + \frac{w_2'}{r}\right) = \varphi_2'(z) - 2\lambda\lambda_1 z + \lambda^3 z^2 = -\lambda_2 \tag{4.74}$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$w_2(r) = \frac{\lambda_2}{4\mu_0}\left(1 - r^2\right) \tag{4.75}$$

ve

$$\varphi_2(z) = -\lambda_2 z + \lambda\lambda_1 z^2 - \frac{\lambda^3 z^3}{3} \tag{4.76}$$

bulunur. Bu durumda p_2 fonksiyonu;

$$p_2(r,z) = \lambda\lambda_1\left(\frac{r^2}{2} + z^2\right) - \lambda_2 z - \lambda^3\left(\frac{r^2 z}{2} + \frac{z^3}{3}\right) \tag{4.77}$$

olarak elde edilir.

ε^3 'ün katsayısı olan denklemler;

$$\frac{{\lambda_1}^2 r}{2} + \lambda\lambda_2 r - 3\lambda^2\lambda_1 r^2 z + \frac{3}{8}\lambda^4 r z^2 - \frac{\partial p_3}{\partial r} = 0 \tag{4.78}$$

$$-\frac{3}{2}\lambda^2\lambda_1 r^2 + {\lambda_1}^2 z + 2\lambda\lambda_2 z + \frac{3}{2}\lambda^4 r^2 z - 3\lambda^2\lambda_1 z^2 + \lambda^4 z^3 + \mu_0\left(\frac{w_3'}{r} + w_3''\right) - \frac{\partial p_3}{\partial z} = 0 \tag{4.79}$$

olacaktır. Bu denklemlerden;

$$w_3(r) = \frac{\lambda_3}{4\mu_0}\left(1 - r^2\right) \tag{4.80}$$

$$p_3 = \frac{1}{32}\left[\begin{array}{l} -32\lambda_3 z + 8{\lambda_1}^2\left(r^2 + 2z^2\right) + 16\lambda\lambda_2\left(r^2 + 2z^2\right) - 16\lambda^2{\lambda_1}^2 z.\left(3r^2 + 2z^2\right) \\ + \lambda^4\left(3r^4 + 24r^2 z^2 + 8z^4\right) \end{array}\right] \tag{4.81}$$

elde edilir. ε 'nun daha yüksek mertebeden katsayıları olan diferansiyel denklemler elde edildiğine göre $w_i(r)$ fonksiyonlarının,

$$\frac{w_i'}{r} + w_i'' = -\frac{\lambda_i}{\mu_0} \quad \text{(i=0,1,2,...)} \tag{4.82}$$

yapısında diferansiyel denklemleri sağladığı görülecektir.

Bu durumda;

$$w_i(r) = \frac{\lambda_i}{4\mu_0}\left(1 - r^2\right) \tag{4.83}$$

olacağı açıktır. Bu ifade yardımıyla **(4.54)**'ten

$$w(r) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(r)\varepsilon^i = \frac{\left(1 - r^2\right)}{4\mu_0}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i\varepsilon^i \tag{4.84}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen serinin yakınsaklığı için;

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{w_{i+1}}{w_i}\right| < 1 \tag{4.85}$$

olmalıdır. Buradan

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\lambda_{i+1}\varepsilon^{i+1}}{\lambda_i\varepsilon^i}\right| = \varepsilon\left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right| < 1 \tag{4.86}$$

elde edilir. $\varepsilon < 1$ olduğundan $\left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right| = 1$ seçildiğinde seri yakınsak olacaktır. ε parametresi büyüdükçe viskozite büyüdüğünden hızın azalması gerekir.

$$w(r) = w_0(r) + w_1(r)\varepsilon + w_2(r)\varepsilon^2 + \ldots \tag{4.87}$$

açılımında $w_0(r)$ dışındaki $w_i(i = 1,2,\ldots)$ fonksiyonları negatif olmalıdır. Bu nedenle $\lambda_0 = \lambda > 0$ olmak üzere $\lambda_i = -\lambda(i = 1,2,..)$ alınacaktır. **(4.84)**'den

$$w(r) = \frac{\left(1 - r^2\right)}{4\mu_0}\left[\lambda - \lambda\left[\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\right]\right] \tag{4.88}$$

$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ eşitliği kullanılarak

$$w(r) = \frac{\lambda\left(1 - r^2\right)}{4\mu_0}\frac{(1 - 2\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \tag{4.89}$$

yazılabilir. Bu ise hız için analitik çözüme karşı gelmektedir. **(4.89)** denkleminden $w(r)$ nin pozitif olabilmesi için $0 \le \varepsilon \le \frac{1}{2}$ olması gerektiği çıkmaktadır. Bu kısıtlama ilk olarak bu çalışmada verilmiştir.

M.Renardy [26] viskozitenin basınca bağlılığının üstel olduğu durumda hızın,

$$w(r)=\frac{\alpha_3}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1 r^2}{4} \tag{4.90}$$

yapısında olacağını göstermiştir. Ancak α_1, α_3 sabitlerinin yapısı üzerinde herhangi bir kısıtlama verememiştir. **(4.89)** denklemi ;

$$\begin{aligned} w(r) &= \frac{\lambda(1-2\varepsilon)}{4\mu_0(1-\varepsilon)}+\frac{\lambda(2\varepsilon-1)}{4\mu_0(1-\varepsilon)}r^2 \\ &= \frac{\lambda(1-2\varepsilon)}{4\mu_0(1-\varepsilon)}\left(1-r^2\right) \end{aligned} \tag{4.91}$$

olarak yazılırsa

$$\alpha_1=\frac{\lambda(2\varepsilon-1)}{4\mu_0(1-\varepsilon)} \;,\; \alpha_3=-\frac{\lambda^2(1-2\varepsilon)^2}{16{\mu_0}^2(1-\varepsilon)^2} \tag{4.92}$$

olduğu görülebilir. Bu ifadeler ise $\alpha_1\rangle 0$ ve $\alpha_3\langle 0$ olması gerektiğini göstermektedir. Basınç için analitik çözümü elde edebilmek için $p_0, p_1, p_2, \ldots$ fonksiyonlarından yararlanmak mümkün olmamıştır. **(4.89)** ifadesi **(4.51)** ve **(4.52)** denklemlerinde kullanılırsa basınç için aşağıdaki iki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\gamma\varepsilon r e^{\varepsilon p}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{4.93}$$

$$\varepsilon\gamma r e^{\varepsilon p}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial z}+2\gamma e^{\varepsilon p}=0 \tag{4.94}$$

Burada

$$\gamma=\frac{\lambda(1-2\varepsilon)}{2(1-\varepsilon)} \tag{4.95}$$

olarak tanımlanmıştır. $e^{\varepsilon p}$ terimini elimine edebilmek için çözümü;

$$p(r,z)=\ln\frac{\varphi(r,z)}{\varepsilon} \tag{4.96}$$

biçiminde aranacaktır. Buna göre **(4.93)** ve **(4.94)**'ten bilinmeyen $\varphi(r,z)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\varepsilon\gamma r\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{4.97}$$

$$\gamma r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{\varepsilon\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+2\gamma\varphi=0 \tag{4.98}$$

denklemleri bulunur. **(4.97)**'den $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ çekilip **(4.98)**'de yerine yazılırsa ;

$$\left(1-\gamma^2 r^2 \varepsilon^2 \varphi^2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}+2\varepsilon\gamma\varphi^2=0 \tag{4.99}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü;

$$\varphi=\frac{1}{2\varepsilon^2\gamma^2 r^2}\left[2\varepsilon\gamma z+C(r)-\sqrt{\left(2\varepsilon\gamma z+C(r)\right)^2-4\varepsilon^2\gamma^2 r^2}\right] \tag{4.100}$$

olarak elde edilir. Burada $C(r)$ keyfi bir fonksiyondur. **(4.100)** fonksiyonu **(4.97)** ve **(4.98)** de kullanılırsa $C(r)$ nin sağlayacağı denklem her ikisinden de

$$\frac{\left[-2\varepsilon\gamma z-C(r)+\sqrt{B(r,z)}\right]C'(r)}{2\varepsilon^2\gamma r\sqrt{B(r,z)}}=0 \tag{4.101}$$

bulunur.

$$B(r,z)=-4\varepsilon^2\gamma^2 r^2+\left(2\varepsilon\gamma z+C(r)\right)^2 \tag{4.102}$$

olarak tanımlanmıştır. **(4.101)** denkleminin sağlanması için

$$-2\varepsilon\gamma z-C(r)+\sqrt{B(r,z)}=0 \tag{4.103}$$

veya $C'(r)=0$ olmalıdır. İlk ifade $C(r)$ ye bağlı bir denklem üretmez. Buna göre $C'(r)=0$ veya $C(r)=sabit=K$ olmak zorundadır. Basınç fonksiyonunun $p(r,z)=\frac{\ln\varphi}{\varepsilon}$ olduğu hatırlanırsa, K sabitini belirlemek için $p(0,0)=0$ koşulu $\varphi(0,0)=1$ koşuluna dönüşecektir. Bu koşul kullanıldığında K=1 değerine ulaşılmaktadır. O halde basınç fonksiyonunun analitik ifadesi;

$$p(r,z)=\frac{1}{\varepsilon}\ln\left\{\frac{1+2\varepsilon\gamma z-\sqrt{\left(2\varepsilon\gamma z+1\right)^2-4\varepsilon^2\gamma^2 r^2}}{2\varepsilon^2\gamma^2 r^2}\right\} \tag{4.104}$$

olacaktır. Bu fonksiyon $\varepsilon=0$ civarında kuvvet serisine açılırsa,

$$\begin{aligned}p(r,z)=&-\lambda z+\frac{1}{4}\left(\lambda^2 r^2+4\lambda z+2\lambda^2 z^2\right)\varepsilon+\frac{1}{6}\left(-3\lambda^2 r^2+6\lambda z-3\lambda^3 r^2 z-6\lambda^2 z^2-2\lambda^3 z^3\right)\varepsilon^2\\&+\frac{1}{32}\left[-8\lambda^2 r^2+3\lambda^4 r^4+32\lambda z+48\lambda^3 r^2 z-16\lambda^2 z^2+24\lambda^4 r^2 z^2+32\lambda^3 z^3+8\lambda^4 z^4\right]\varepsilon^3+O\left(\varepsilon^4\right)\end{aligned} \tag{4.105}$$

elde edilir. Bu ifade de $\lambda_1=\lambda_2=-\lambda$ için ε^0'ın katsayısının **(4.61)**'e ε'nun katsayısının **(4.70)**'e , ε^2'nin katsayısının **(4.77)**'e, ε^3'ün katsayısının **(4.81)**'e eşit olduğu görülebilir. **(4.89)** ve **(4.104)** fonksiyonları lineer olmayan **(4.51)** ve

(4.52) denklemlerinin analitik çözümleri olup, bu çözümler mevcut literatürde bulunmamaktadır ve ilk olarak bu çalışmada elde edilmişlerdir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında paralel iki sabit plak arasında ve rijid dairesel silindirik tüpte viskozitenin basınca bağlı olduğu tek yönlü akım problemi incelenmiştir. Viskozitenin basınca bağlılığı $\mu = \alpha p$, $\mu = \mu_0(1+\alpha p)$ ve $\mu = \mu_0 \exp(\alpha p)$ şeklinde üç farklı durum olarak alınmış, her bir durum için hız profileri ve basınç dağılımları elde edilmiş ve grafikleri çizilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde;

Şekil A.1-A.3'de $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ değerlerinde farklı λ değerleri gözönüne alınarak kesit boyunca hız profilleri gösterilmiştir. Her üç durumda da hız λ'nın artan değerleri ile artmaktadır. λ'nın büyük değerlerinde, sabit viskozite durumunda parabolik olan hız profili bir 'V'harfine dönüşmektedir. Ayrıca aynı λ değerinde α' nın değerleri büyürken hız azalmaktadır. Bu ise beklenen sonuçtur.

Şekil A.4-A.6'da $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ değerlerinde farklı λ değerleri ile için basınç fonksiyonunun $y = 0$ da yatay x ekseni ile değişimleri çizilmiştir. Grafiklerde düşey eksende logaritmik ölçekleme yapılmış olup P_0, $(0,0)$ noktasındaki basıncı göstermektedir. Üç durumda da aynı α değerinde λ'nın büyük değerlerinde basıncın mutlak değerce çok büyük olduğu görülmektedir. Bu sonuç [16] da verilen sonuçlar ile uyuşmaktadır.

Şekil A.7-A.9'da $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ değerlerinde farklı λ değerleri için basınç fonksiyonunun $x = 0$ kesitinde y ekseni ile değişimleri ayrı ayrı çizilmiştir. Grafiklerde yatay eksende logaritmik ölçekleme yapılmıştır. λ'nın küçük değerlerinde basıncın kesit boyunca değişimi oldukça küçük kalırken, λ büyüdükçe basınç değerleri $y = 0$ dan uzaklaştıkça hızla büyümektedir. Ayrıca α'nın büyük değerlerinde basınç beklendiği gibi daha büyük olmaktadır.

Şekil A.10-A.12'de basıncın $x = 1$ kesitlerinde $\alpha = 0.5, 1, 1.5$ değerlerinde λ'nın farklı değerleri için basıncın değişimleri gösterilmiştir. $x = 1$ kesitinde basınç λ'nın büyük değerlerinde azalırken bu değerlerde basıncın y ile değişimi y nin büyük

değerlerinde büyük olmaktadır. λ küçüldükçe basıncın y ile değişimi de küçük olmaktadır.

Şekil A.13-A.15'de $x=-1$ kesitinde değişimlerin $x=1$ kesitinde değişimlerin tam tersi olduğu gözlenmektedir. Ayrıca $x=1$ kesitinde α'nın büyük değerlerinde basınç azalırken, $x=-1$ kesitinde artmaktadır.

(3.34) hız ifadesinde **(3.22)**'den farklı olarak paydada μ_0 görülmektedir. Bu durumda viskozite büyüdükçe hızın azalacağı doğal sonucu çıkmaktadır. $\mu_0=1$ alındığında **(3.34)** ve **(3.22)** ifadeleri aynı olacağından burada hızın λ ve α'nın değerleri ile değişimleri ayrıca incelenmeyecektir.

Basıncın λ ve α değerlerine bağlı olarak değişik kesitlerde ki değişimleri **Şekil A.16-A.27'**de verilmiştir.

Şekil A.16-A.18'de basıncın $y=0$ da x ile değişimi çizilmiştir. Şekilden x'in negatif değerlerinde basıncın çok büyük değerler aldığı ve x'in sıfıra yakın ve pozitif değerlerinde hızla küçüldüğü görülmektedir. Basınç değerleri λ ve α nın büyük değerlerinde daha büyük olmaktadır.

Şekil A.19-A.21'de basıncın $x=0$ da farklı λ değerleri için değişimleri gösterilmiştir. Şekilden λ'nın küçük değerlerinde basıncın y ile değişimi küçük , λ'nın büyük değerlerinde y büyüdükçe değişim çok büyük olmaktadır.

Şekil A.22-A.24'de basıncın $x=-1$ ve $x=1$ kesitlerinde y ile değişimi görülmektedir. Şekillerden $\mu=\alpha p$ durumu ile tam bir benzerlik olduğu görülmekte olup, farklılık basınç değerlerinin büyüklüklerinde ortaya çıkmaktadır. Ayrıca belli bir y değeri için x büyüdükçe basıncın azaldığı da görülmektedir.

$\mu(p)=\mu_0 e^{\alpha p}$ şeklinde basınca bağlılığın olduğu durumda sadece $v=0$ çözümünün var olduğunu göstermemize rağmen, ε cinsinden yapılan seri açılımında P_0, v_0, P_1, v_1 *ve* P_2, v_2 fonksiyonları belirlenebilmektedir. Diğer $P_i, v_i\ (i=3,4...)$ fonksiyonlarının belirlenememesi denklemlerin seri çözümünü kabul etmediği anlamına gelse de, bu çalışmada **(3.75)**'ten elde edilecek

$$v(y) = v_0(y) + v_1(y)\varepsilon + v_2(y)\varepsilon^2$$
$$P(y) = P_0(y) + P_1(y)\varepsilon + P_2(y)\varepsilon^2 \qquad (5.1)$$

ifadelerini kullanarak hız ve basıncın λ'nın ve ε'nun belli değerleri için farklı kesitlerdeki değişimleri incelenmiştir.

Şekil A.28-A.30'dan $\varepsilon = 0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ değerlerinde hızın y ile değişimin sabit viskozite ve $\mu = \alpha p$ durumuna benzer bir yapıda olduğu görülmektedir. Bu yapı (benzerlik) $\varepsilon = 0.25$ ve $\varepsilon = 0.4$ değerlerinde sadece λ'nın küçük değerleri için gözlenmektedir. $\varepsilon = 0.4$ de ve λ'nın büyük değerlerinde hız profili oldukça farklı bir davranış göstermekte olup $\lambda = 8{,}10$ için ters yönde bir akımın oluştuğu görülmektedir. Bu sonuçlara dayanarak basınca bağlılığının üstel olması durumunda λ ve ε parametrelerinin belli aralıklardaki değerleri için akımın oluşacağını söylenebilir.

Şekil A.31-A.38'den basınç değişimlerinin ε'nun küçük değerlerinde $\mu = \alpha p$ durumuna, ε'nun büyük değerlerinde $\mu(p) = \mu_0(1 + \alpha p)$ durumuna benzer bir yapıda olduğu ortaya çıkmaktadır. $x = 1$ kesitinde basıncın y ile değişimi **Şekil A.39-A.42'**de gösterilmiştir. Daha önceki durumların tersine, y arttıkça basınç azalmaktadır. Bu ise ters akımın oluşmasına neden olmaktadır. **Şekil A.43-A.46'**da $x = -1$ kesitindeki değişimin diğer durumlar ile benzer olduğu görülmektedir.

Yukarıda elde edilen sonuçları, bu durum için yapılmış bir çalışma olmadığı için karşılaştırmak mümkün olmamıştır.

Şekil A.47-A.49'da hızın farklı λ değerleri ve farklı α değerlerinde r ile değişimi gösterilmiştir. Problemin geometrisi tamamen farklı olmasına rağmen, α'nin üç değeri için elde edilen sonuçlar, **Şekil A.1-A.3'**de paralel plaklar için elde edilen sonuçlarla tamamen aynıdır. Hızların büyüklükleri silindirik tüp durumunda daha küçük olmaktadır. **Şekil A.50-A.52'**de basıncın $r = 0$ da z ile değişiminin, **Şekil A.4-A.6'**da paralel plaklar için elde edilen sonuçlar ile benzer olduğu hemen görülmektedir. Burada λ nın ve α' nın büyük değerlerinde basınçların daha büyük olduğu gözlenmektedir.

Şekil A.53-A.61'de sırasıyla $z = 0$, $z = 1$ ve $z = -1$ kesitlerinde basınçların r ile değişimleri gösterilmiştir. Şekillerin incelenmesinden basınç değerlerinin büyüklüğü dışında paralel plak durumu ile bir benzerlik vardır. Sadece plaklarda $x = 1$ deki

basınç değerlerinin tüpte $z=1$ deki değerlerden sınırlara yakın bölgelerde daha büyük olduğu görülmektedir.

Paralel plaklar durumunda olduğu gibi hızın r ye bağlılığı $\mu(p)=\alpha p$ durumu ile aynı olduğu için sadece belli kesitlerde basıncın değişimi incelenecektir. **Şekil A.62-A.64'**de basıncın $r=0$ da z ile değişimi gösterilmiştir. Plaklar için $y=0$ da basıncın x ile değişimini gösteren **Şekil A.16-A.18** gözönüne alınırsa grafikler arasında hiçbir farkın olmadığı görülmektedir. Bu durum $y=0$ ve $r=0$ değerleri için **(3.55)** ve **(4.44)** denklemlerinin aynı olmasından kaynaklanmaktadır.

Şekil A.65-A.67'de basıncın $z=0$ da r ile değişimi gösterilmiştir. Basınç değerleri paralel plak durumundan küçük olmakla birlikte λ ve α 'ye bağlılıklar tam bir benzerlik göstermektedir.

Şekil A.68-A.70 incelenirse $z=1$ deki basınç değişimi $\mu(p)=\alpha p$ durumunda çizilen **Şekil A.56-A.58** ile aynı yapıda olup her iki durumda da basınç, λ ve α değerleri büyüdükçe azalmaktadır. Sadece incelenen durumda basınç değerleri negatif olmaktadır.

Şekil A.71-A.73'de $z=-1$ deki basınç değişimi $\mu(p)=\alpha p$ durumunda çizilen **Şekil A.59-A.61** ile aynı yapıda olup her iki durumda da λ ve α büyüdükçe basınç değerleri de büyümekte ve büyük λ değerlerinde basıncın y 'ye bağımlılığı daha belirgin olmaktadır.

(4.89) ve **(4.91)'**de verilen ifadeleri kullanarak λ ve ε parametrelerinin farklı değerleri için hız ve basıncın farklı kesitlerde değişimleri **Şekil A.74-A.88'**de gösterilmiştir.

Denklem **(4.89)**'dan de görüldüğü gibi hız profilleri düzgün paraboller olarak ortaya çıkmaktadır. Hızların ε ve λ değerlerine bağlılığı **Şekil A.74-A.76'**da gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi sabit bir ε değerinde hızlar λ ile artmaktadır. Tersine sabit λ değerinde ε küçüldükçe hızlar büyümektedir. Silindirik tüp durumunda analitik çözümler elde edildiğinden, paralel plak durumundaki gibi ters yönde hızlar oluşmaktadır. Ayrıca ε büyüdükçe hız profillerinin bir 'V' harfine dönüşmesi söz konusu olmamaktadır.

Şekil A.77-A.79'da $r=0$ için basıncın z ile değişimi çizilmiştir. $\varepsilon=0.1$ durumu dışında $\varepsilon=0.25$ ve $\varepsilon=0.4$ için $z=-1$'e yaklaştıkça sonlu basınç değerleri bulunamamaktadır. Bunun nedeni **(4.104)** ifadesinde gözüken logaritma ifadesinin argumanının negatif olmasıdır. Örneğin **Şekil A.87'**den $z=-1$, $\lambda=10$, $\varepsilon=0.25$, $r=0$ değerleri için basınç yoktur. Bu değerler kullanılacak olursa logaritmanın argumanı $-\frac{3}{5}$ olmaktadır. Bu ise belli (r,z) noktasında sonlu basıncın elde edilebilmesi için ε ve λ parametrelerinin rastgele seçilemeyeceğini göstermektedir.

(4.104) denkleminden reel basınç değerlerinin elde edilebilmesi için $1+2\varepsilon\gamma z\rangle 0$ ve $1+2\varepsilon\gamma z\rangle 2\varepsilon\gamma r$ koşularının aynı zamanda sağlanması gerektiği görülebilir. Bir önceki değerler için $\gamma=\frac{10}{3}$, $1+2\varepsilon\gamma z=-\frac{2}{3}\langle 0$ olarak elde edilmekte olup birinci eşitsizlik sağlanmamaktadır. Eğer $z=-1$, $\lambda=4$, $\varepsilon=0.25$, $r=0$ değerleri gözönüne alınırsa $\gamma=\frac{4}{3}$, $1+2\varepsilon\gamma z=\frac{1}{3}\rangle 0$ ve $\frac{1}{3}\rangle 0$ olacağından her iki koşul da sağlandığından sonlu basınç değerleri elde edilmektedir.

Şekil A.80-A.82'de $z=0$'da basıncın r ile değişimi gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi $\mu(p)=\alpha p$ ve $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumlarından farklı olarak parabolik bir yapıya sahip olup basınç değerleri çok daha küçük olmaktadır. Burada da r'nin belli değerlerine karşı gelen bölgelerde basınç değerleri elde edilememektedir. Bu belirsizlik $\varepsilon=0.25$ ve $\varepsilon=0.4$ değerlerinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin $z=0$, $\lambda=10$, $\varepsilon=0.25$, $r=0.8$ değerleri için $\gamma=\frac{10}{3}$, $1+2\varepsilon\gamma z=1\rangle 2\varepsilon\gamma r=\frac{8}{6}$ bulunmakta olup ikinci koşul sağlanmamaktadır.

Şekil A.83-A.85'de $z=1$ için basıncın r ile değişimi gösterilmiştir. Şekilden basıncın her değeri için elde edilebileceği gözükmektedir. Ayrıca $z=1$ olduğu için verilen koşulların ikiside sağlanmakatadır. Basınç büyük λ değerinde az da olsa r ile değişirken λ küçüldükçe değişim gözlenmemektedir.

Şekil A.86-A.88'de $z=-1$ için basıncın r ile değişimi gösterilmiştir. Şekilden hemen λ'nın büyük değerlerinde basınçta belisizliklerin olduğu görülmektedir. basıncın belirlenemediği noktalarda yukarıda verilen eşitsizliklerden en az birinin sağlanmadığı gösterilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Stokes, G.G.,** 1845. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium motion of solids, Trans. Cambridge Phil. Soc., 8**,** 287-305.

[2] **Bridgman, P.W.,** 1931. The physics of high pressure, New York : Mac Millan

[3] **Bridgman, P.W.,** 1926. The effect of pressure on the viscosity of forty-three pure liquids, Proc. Am. Acad., 61, 57-99.

[4] **Barus, C.,** 1893. Isotherms, isopiestics and isometrics relative to viscosity, American Journal of Science., 45, 87-96.

[5] **Dowson, D., Higginson,G.R.,** 1966. Elastohydrodynamic Labrication : The Fundemantals of Roller and Gear Labrication, Pergamon Press, Oxford.

[6] **Cutler, W.G., Mc Miclde, R.H., Webb,W., Schiessler, R.,W.,** 1958. Study of compressions of several high molecular weight hydrocarbons, J.Chem.Phys., 29, 727-740.

[7] **Griest, E.M., Webb,W., Schiessler, R.,W.,** 1958. Effect of pressure on viscosity of higher hydrocarbons and their mixture, J.Chem. Phys., 29, 711-720.

[8] **Jhonson, K.L., Cameron, R.,** 1967. Shear behavior of elastohydrodynamic oil film at high rolling contact pressure, Proc. Intst. Mech. Engrs., 182, 307-319.

[9] **Bair, S., Winer, W.O.,** 1992. The high pressure high shear stress rheology of liquid lubricants, J. Tribal., 114, 1-13.

[10] **Szeri, A.Z.,** 1998. Fluid film lubrication: theory and design. Cambridge University Press.

[11] **Schaeffer, D.G.,** 1987. Instability in the evalutions describing incompressible granular flow, J. Diff. Eqns., 66, 19-50.

[12] **Renardy, M.,** 1986. Some remarks on the Navier-Stokes equations with a pressure –dependent viscosity, Commun. PDEs., 11, 779-793.

[13] **Gazzola, F.,** 1997. A note on the evalution of Navier-Stokes equations with a pressure –dependent viscosity, Z. Angew. Math.Phys., 48, 760-773.

[14] **Bair, S., Khosari, M., Winer, W.O.,** 1998. High pressure rheology of lubricants and limitations of the Reynold equation, Tribal. Int., 31, 573-586.

[15] **Haron, J., Malek, J., Rajagopal, K.R.,** 2001. Simple Flows of fluids with pressure-dependent viscosities, Proceedings of the Royal Society London A: Mathematical Physical and Engineering Science., 457, 1603-1622.

[16] **Vasudevaiah, M, Rajagopal, K. R.,** 2005. On fully developed flours of fluids with a pressure dependents viscosity in a pipe, Application of Mathematics., 4, 341-353.

[17] **Malek, J., Necas, J., Rajagopal, K. R.,** 2002. Global analysis of flours of fluids with pressure-dependent viscosities, Arch. Rat. Mech. Anal., 165, 243-249.

[18] **Prasad, S.C., Rajagopal, K. R.,** 2008. Flow of fluid with pressure dependent viscosity due to a boundry that is being stretched. Appl. Math. Comp., 173, 50-68.

[19] **Rajagopal, K. R.,** 2008. On implicit constitutive theories for fluids, J. Fluid Mech., 550, 243-249.

[20] **Rajagopal, K. R.,** 2008. A semiinverse problem of flows of fluids with pressure dependent viscosities, Inverse Probl. Sci. Eng., 16(3), 269-280.

[21] **Rajagopal, K. R., Saccomandi, G.,** 2005. Unsteady exact solutions for flows of fluids with pressure-dependent viscosities, Math. Proc. R.Irish. Acad., 106A(2), 115-130.

[22] **Rajagopal, K. R., Saccomandi, G., Vergari, L.,** 2009. On the Oberbech-Boussinesq approximation in fluids with pressure-dependent viscosities, Nonlinear Anal. Real Word Appl., 10(2), 1139-1150

[23] **Subramanian, S.,C., Rajagopal, K. R.,** 2007. A note on the flows through porous solids at high pressure, Comp.Appl.

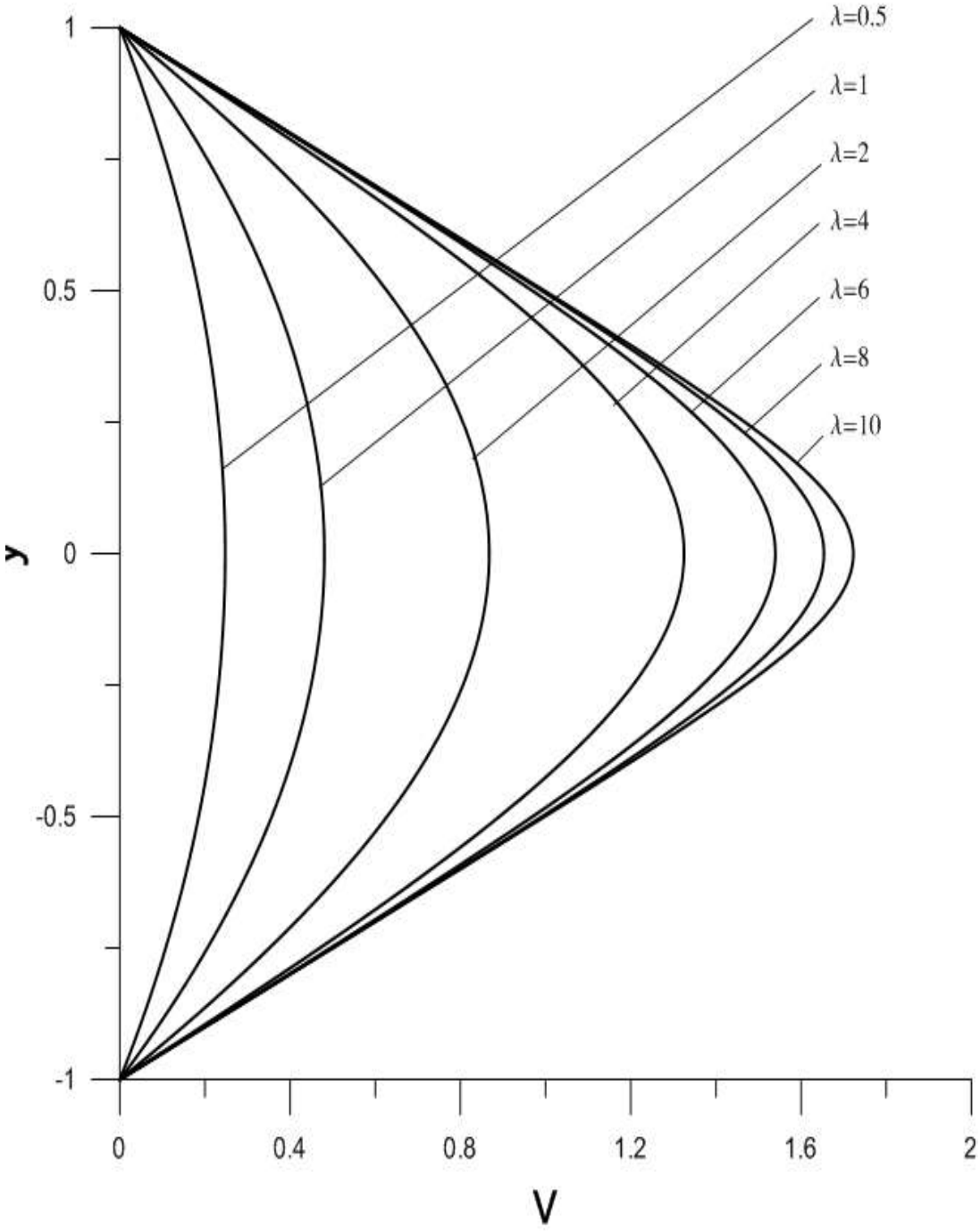
[24] **Srinivasan, S., Rajagopal, K. R.,** 2010. A note on the flows of fluid with pressure-dependent viscosities in the annulus of two infinitely long coaxial cylinders, App. Math. Modl., 34, 3255-3263.

[25] **Kalogirou, A., Poyiadji, S., Georgiou, G.C.,** 2011. Incompressible Poiseulle flows of Newtonian liquids with a pressure-dependent viscosity , Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics., 166, 413-419.

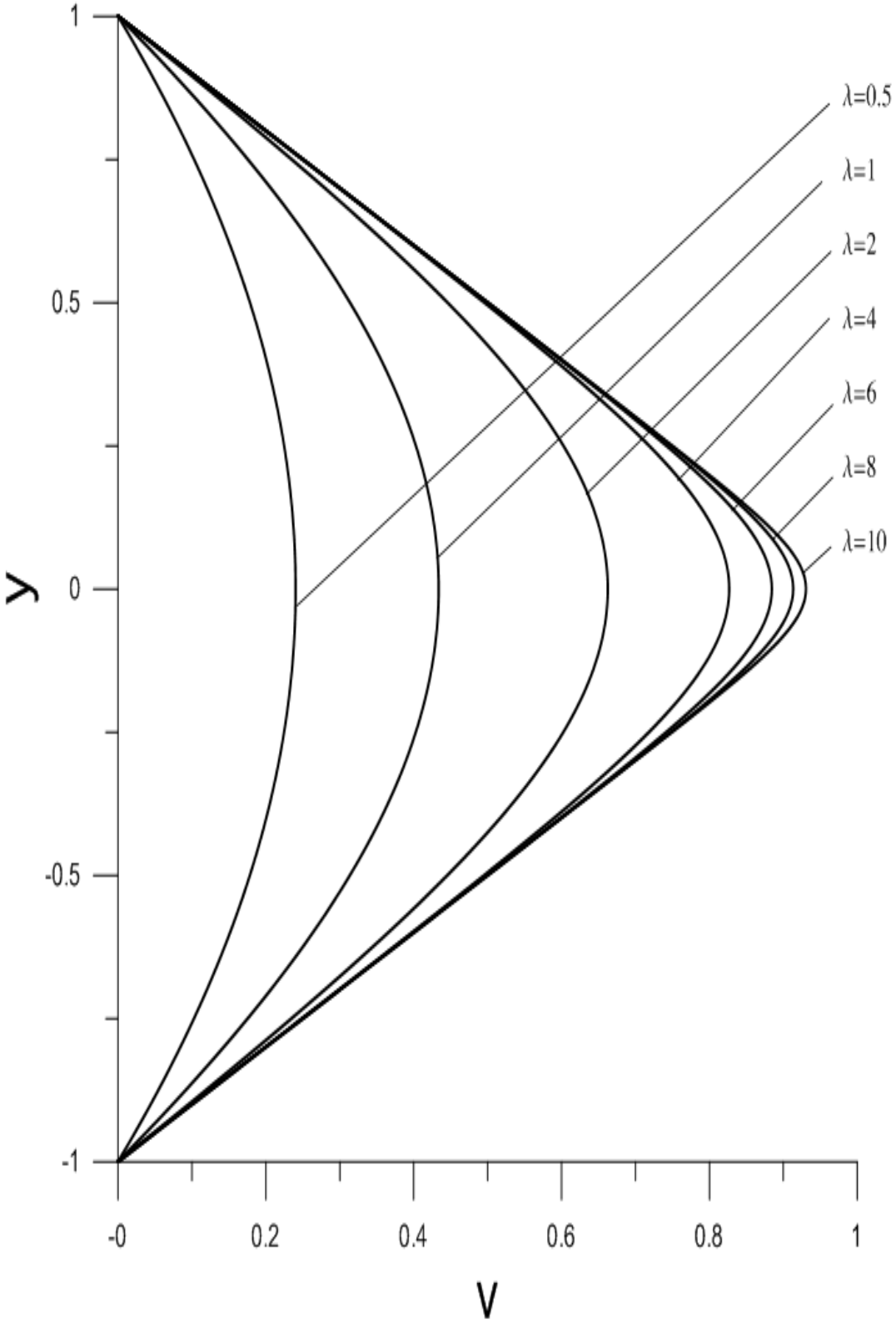
[26] **Renardy, M.,** 2003. Parallel shear flows of fluids with a pressure-dependent viscosity, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics., 114, 279-286.

[27] **Prusă, V., Srinivasan, S., Rajagopal, K. R.,** 2012. Role of pressure dependent viscosity in measurements with rolling cylinder viscometer, Int. J. Non-Linear Mech., 47, 743-750.

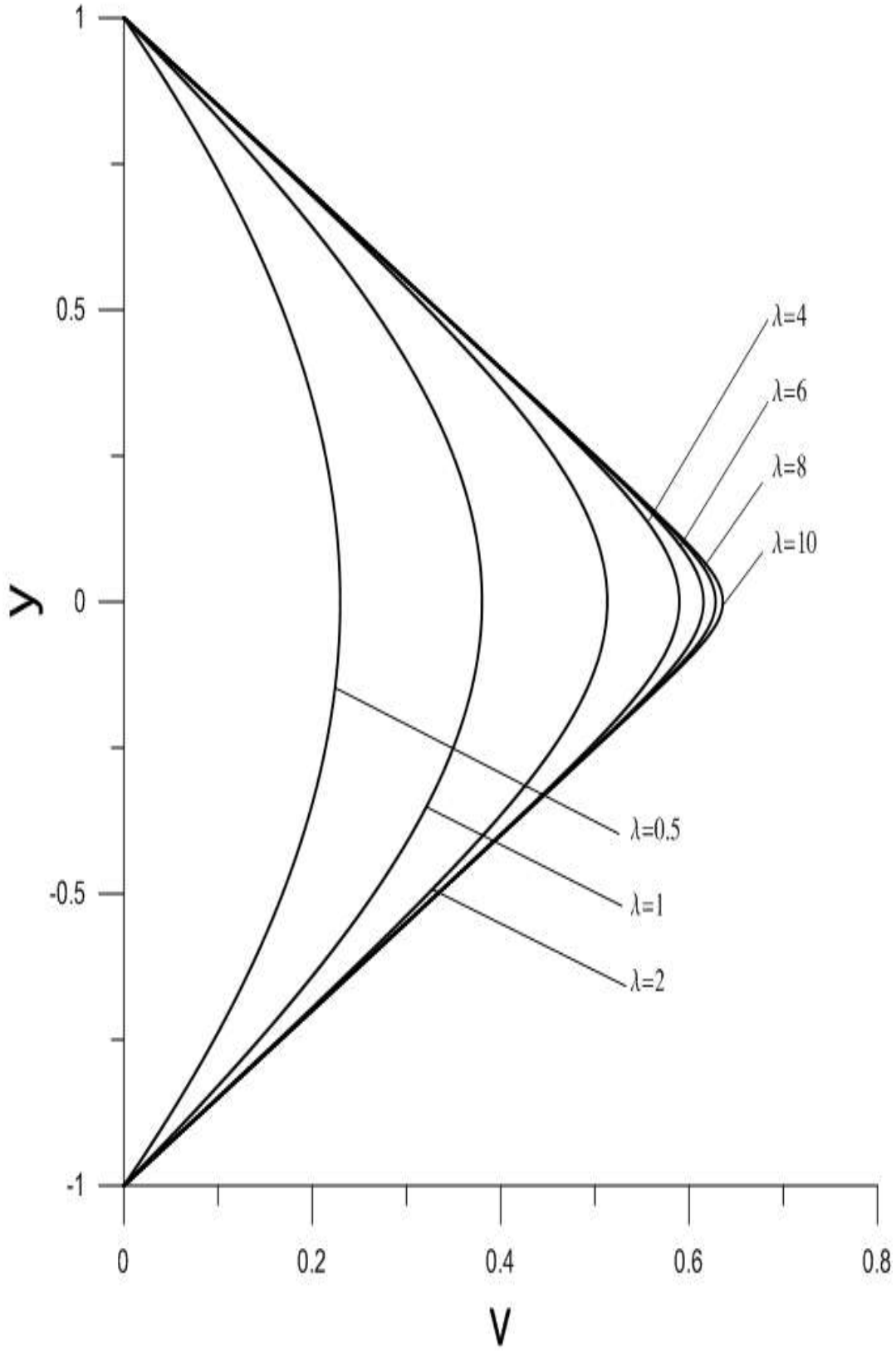
EKLER



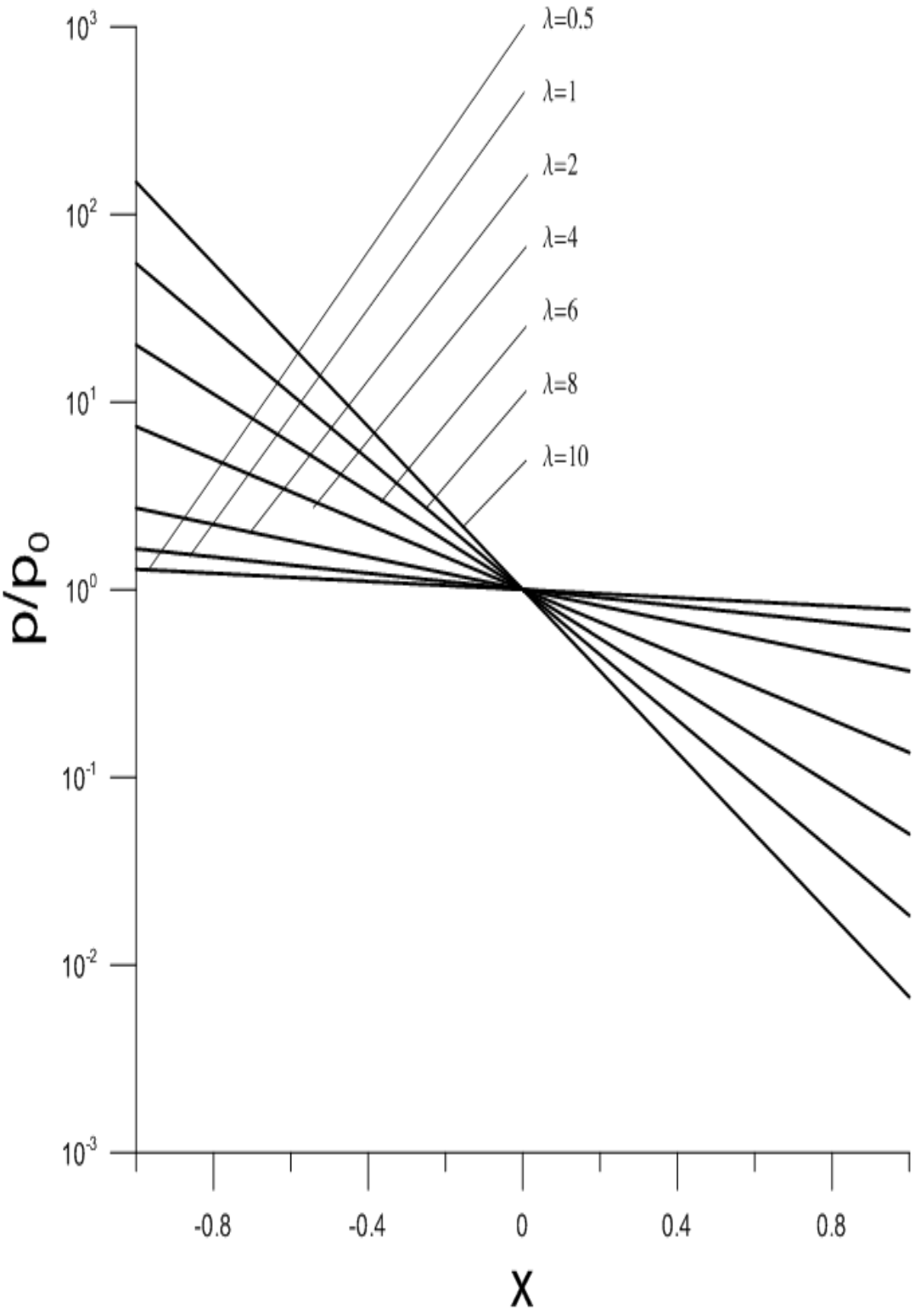
Şekil A.1 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ değeri için hızın y ile değişimi.



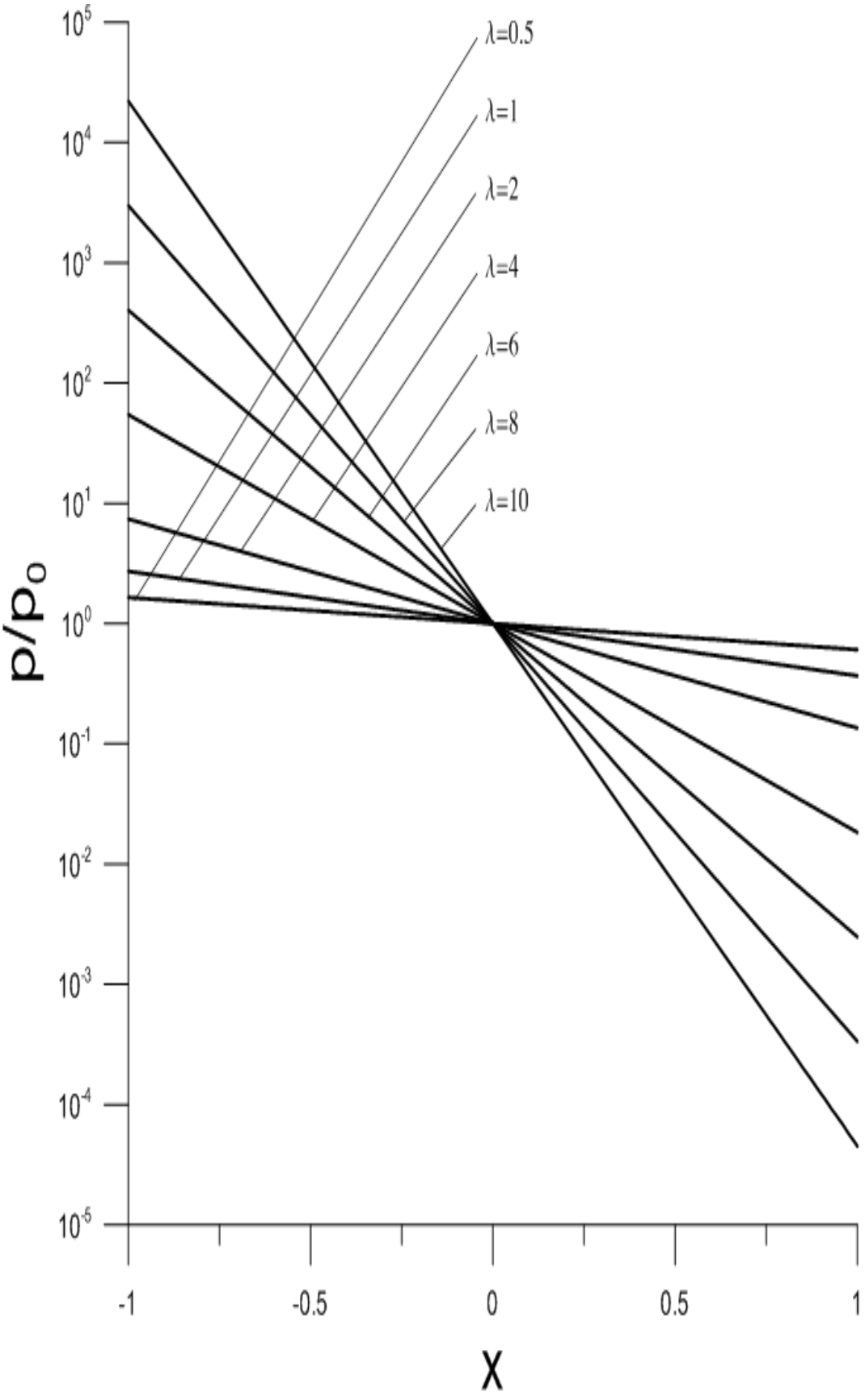
Şekil A.2 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ değeri için hızın y ile değişimi.



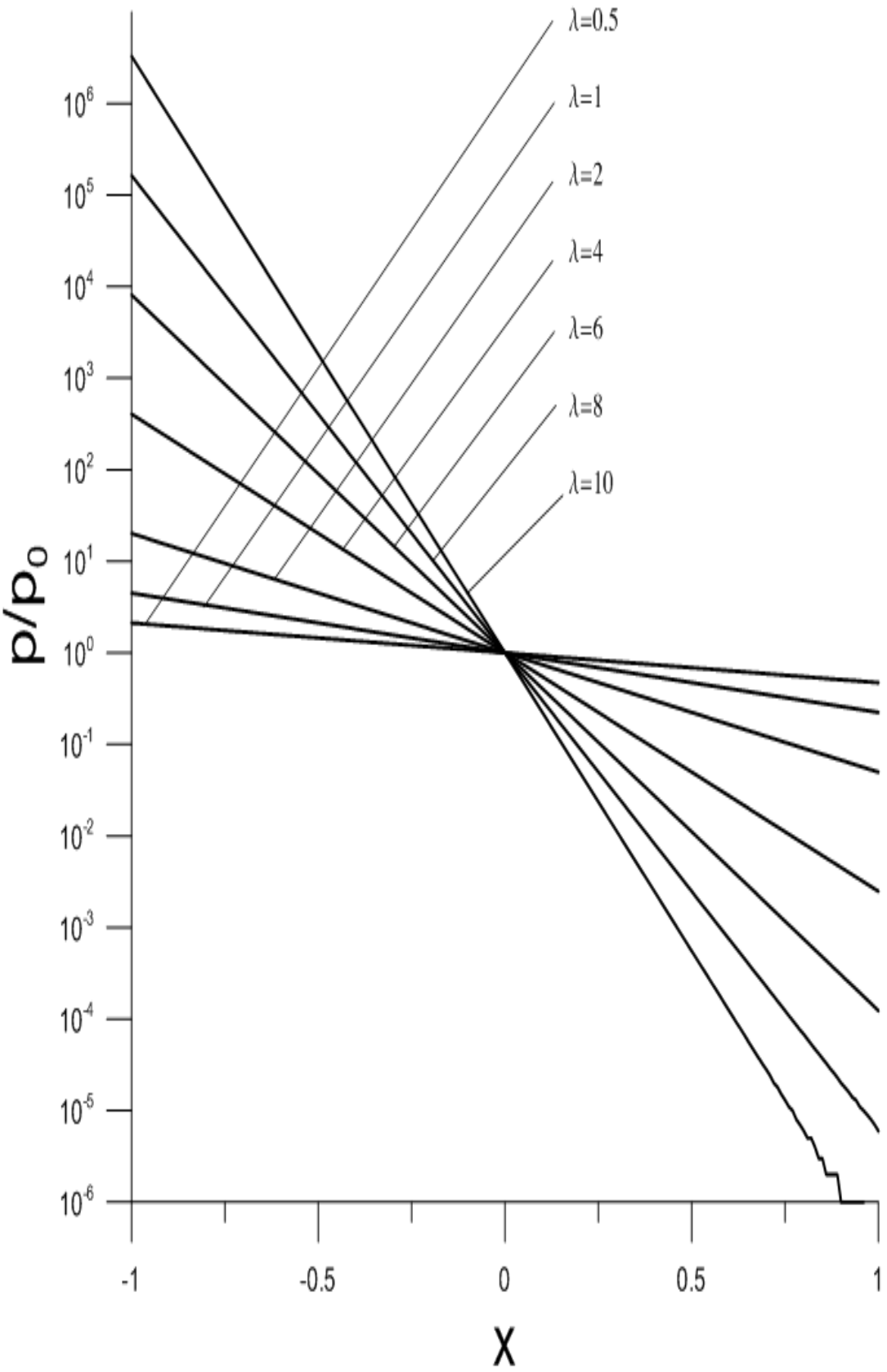
Şekil A.3 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ değeri için hızın y ile değişimi.



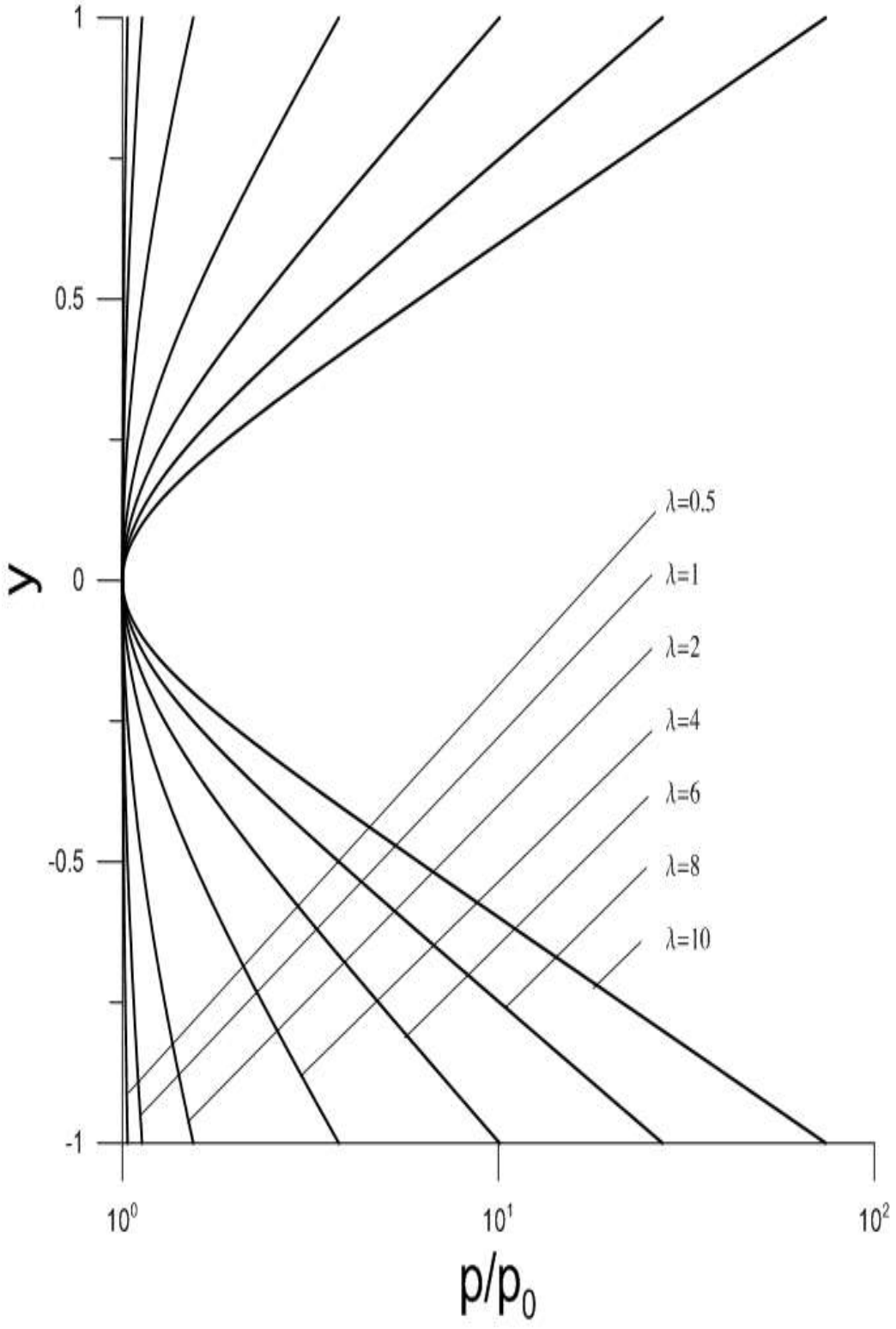
Şekil A.4 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ değeri için basıncın y=0 da x ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



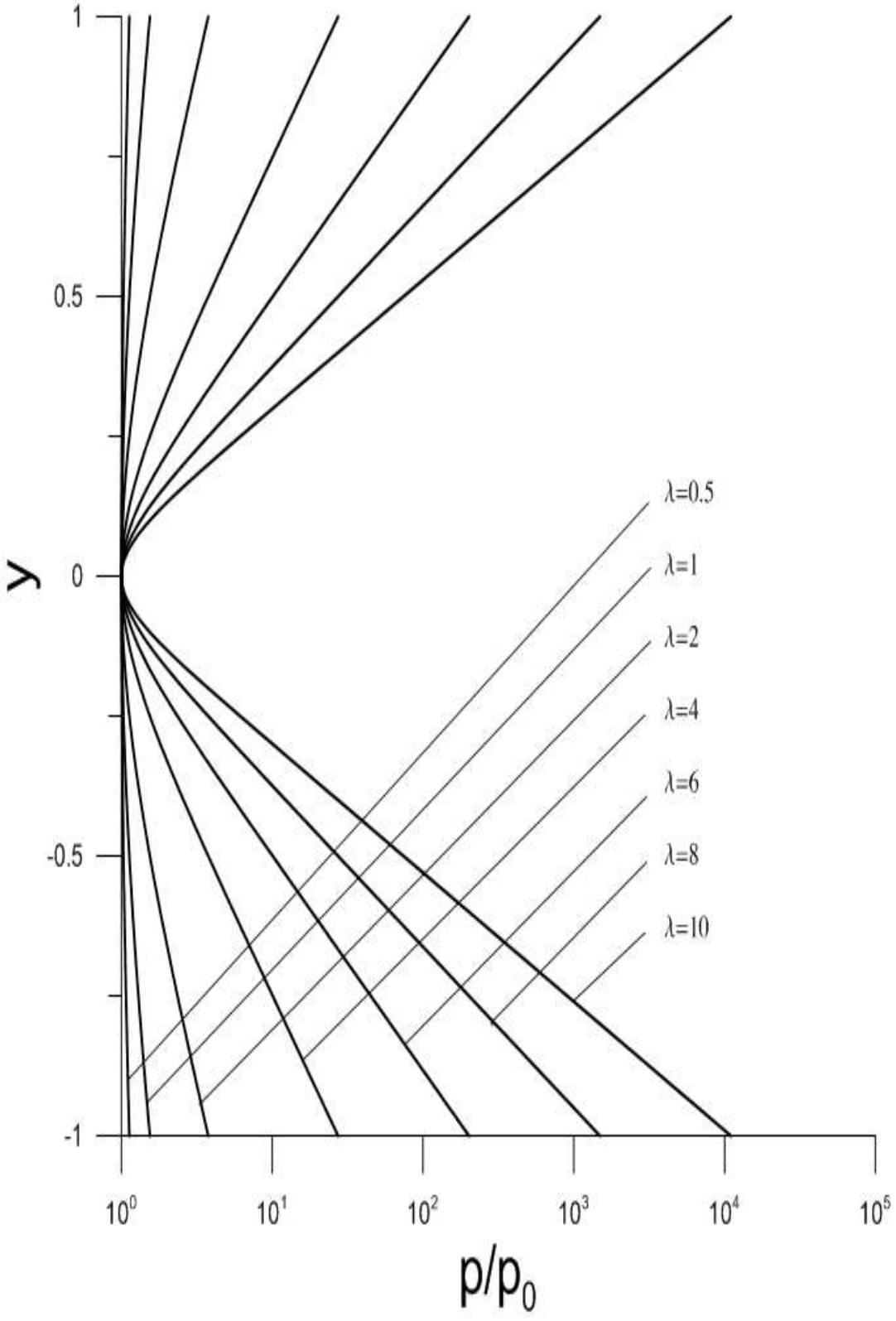
Şekil A.5 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ değeri için basıncın y =0 da x ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



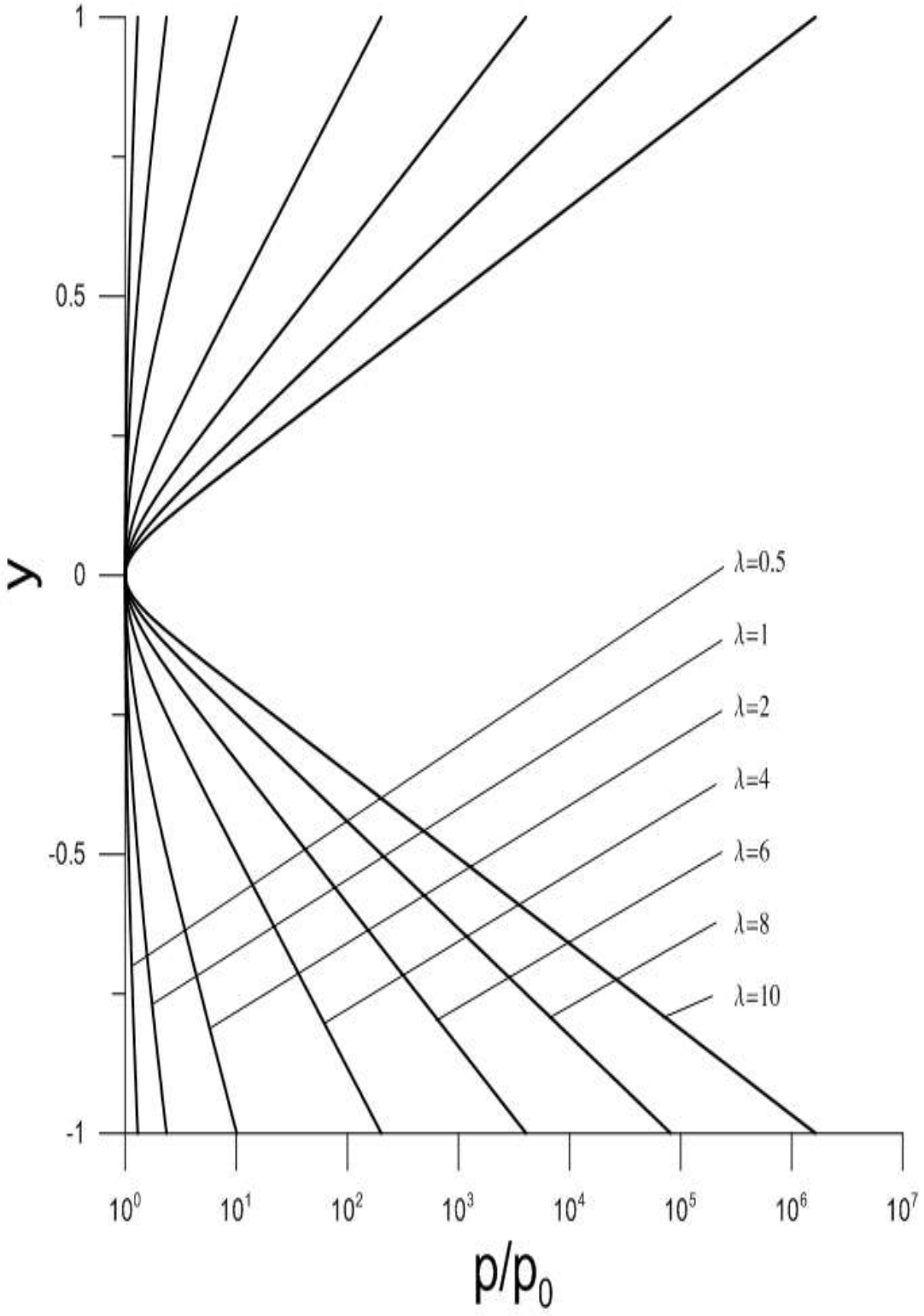
Şekil A.6 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ değeri için basıncın y=0 da x ile değişimi. (p_0 ,(0.0) noktasındaki basınç değeridir.)



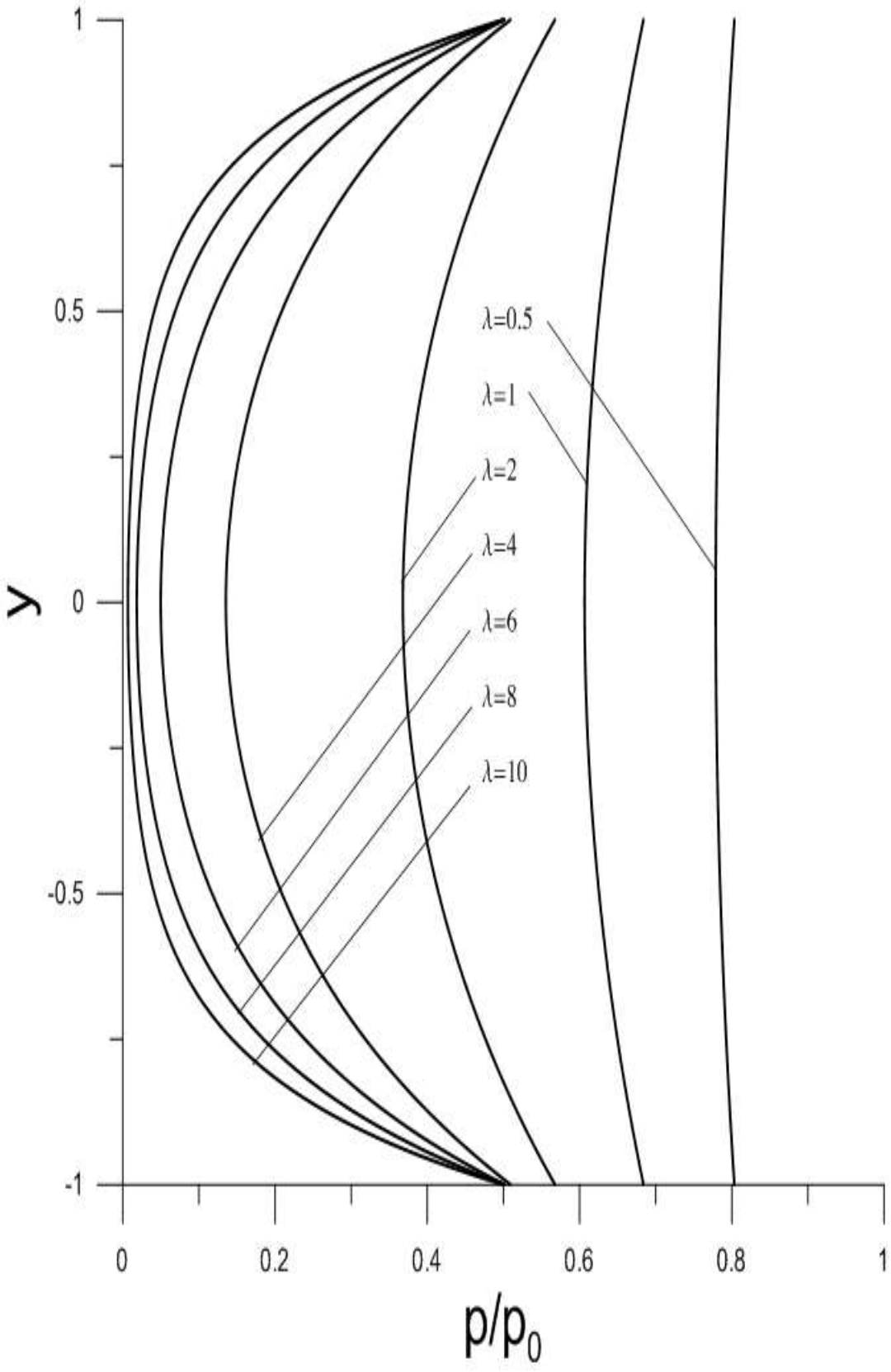
Şekil A.7 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ değeri için basıncın x = 0 da y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



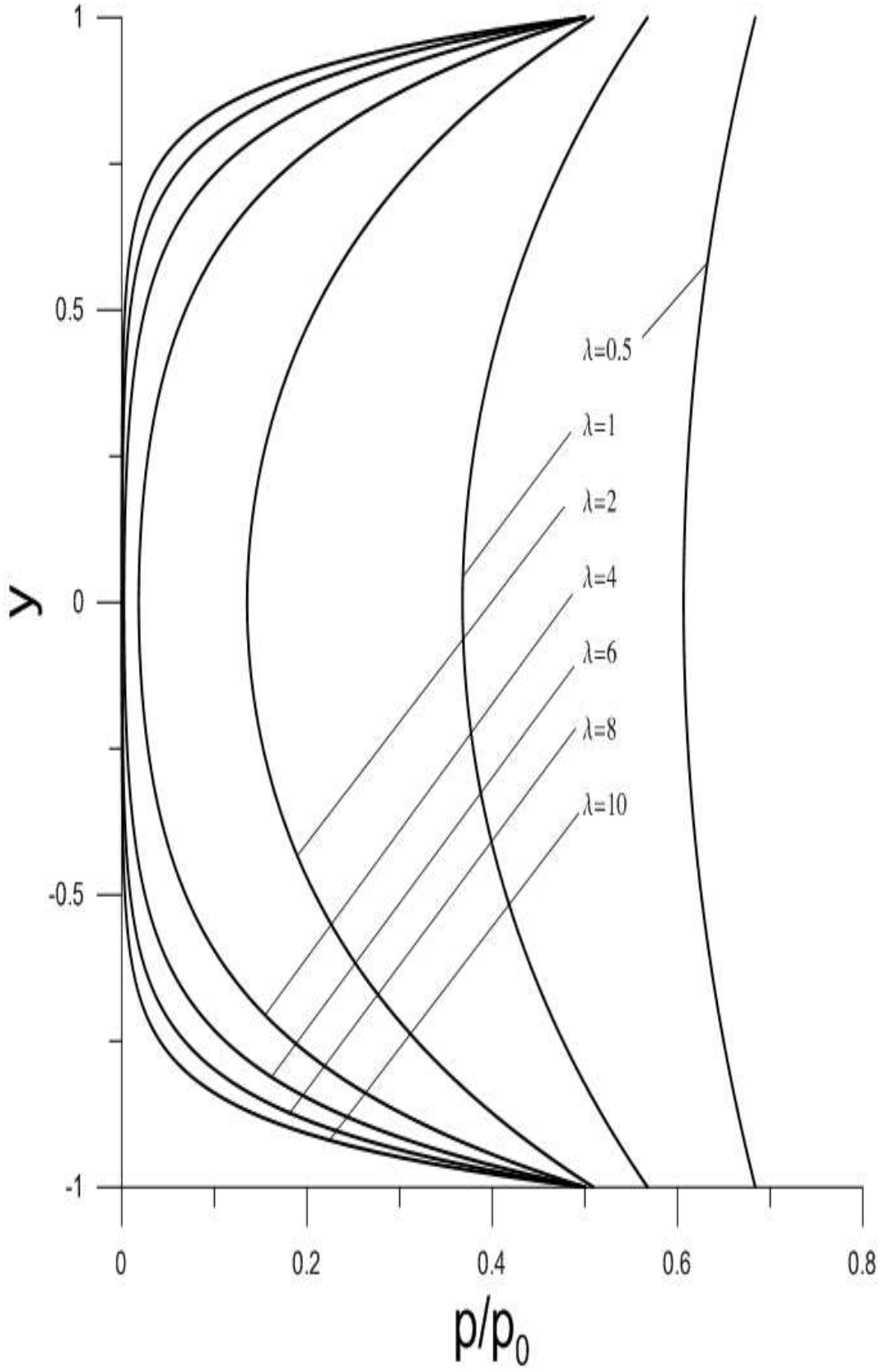
Şekil A.8 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ değeri için basıncın x = 0 da y ile değişimi. (p_0 ,(0.0) noktasındaki basınç değeridir.)



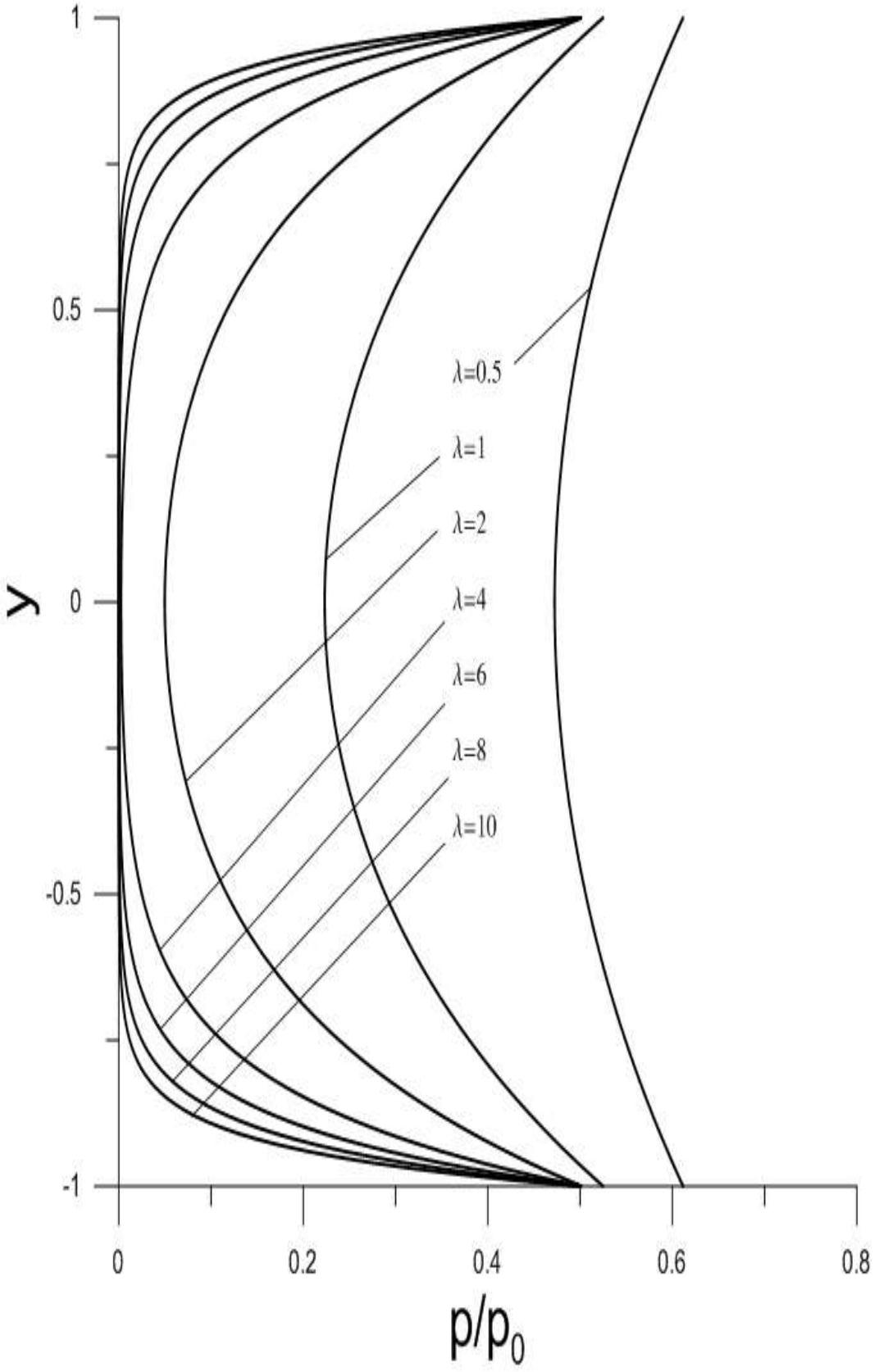
Şekil A.9 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ değeri için basıncın x = 0 da y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



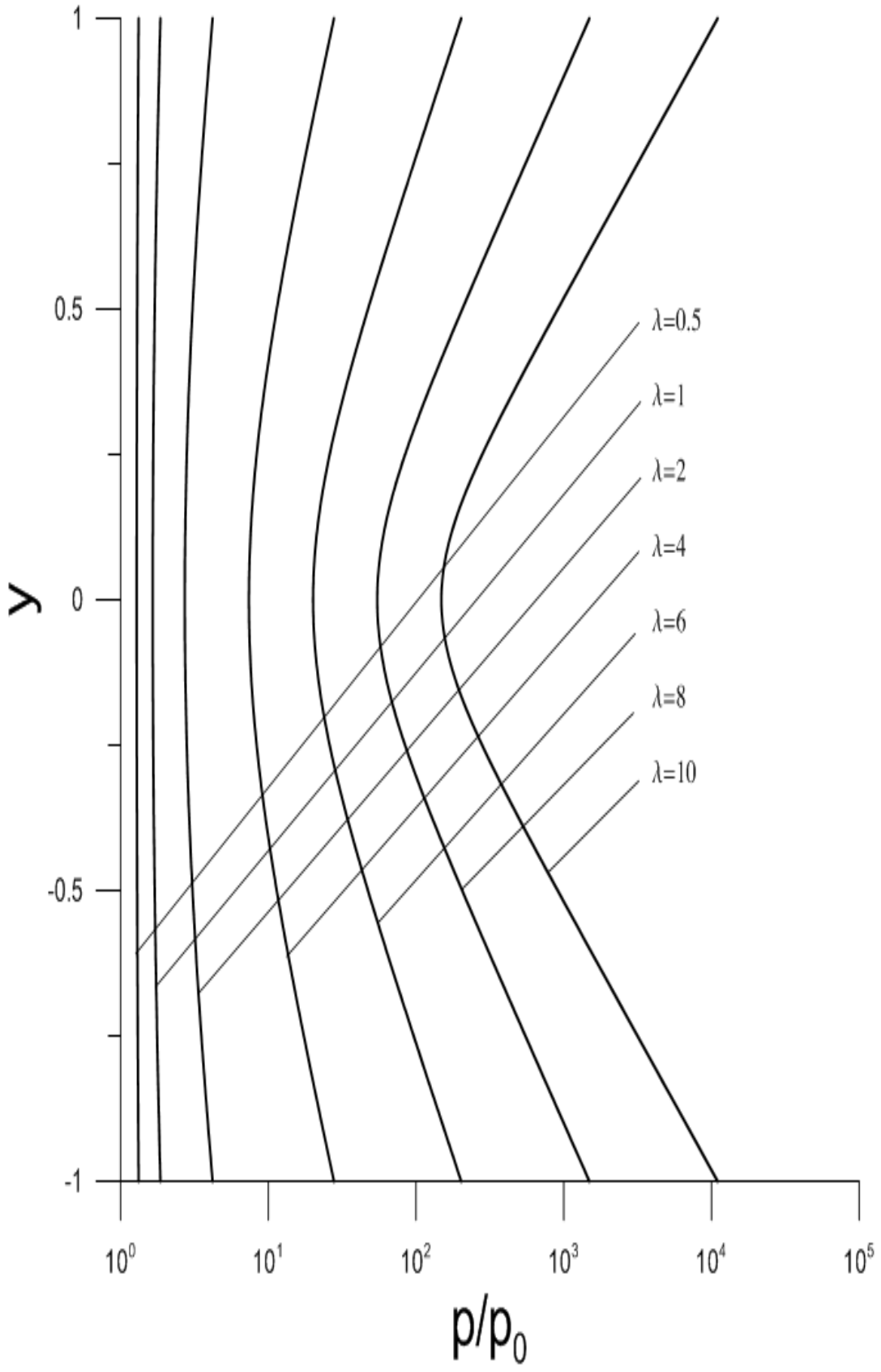
Şekil A.10 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ değeri için basıncın x=1 de y ile değişimi (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



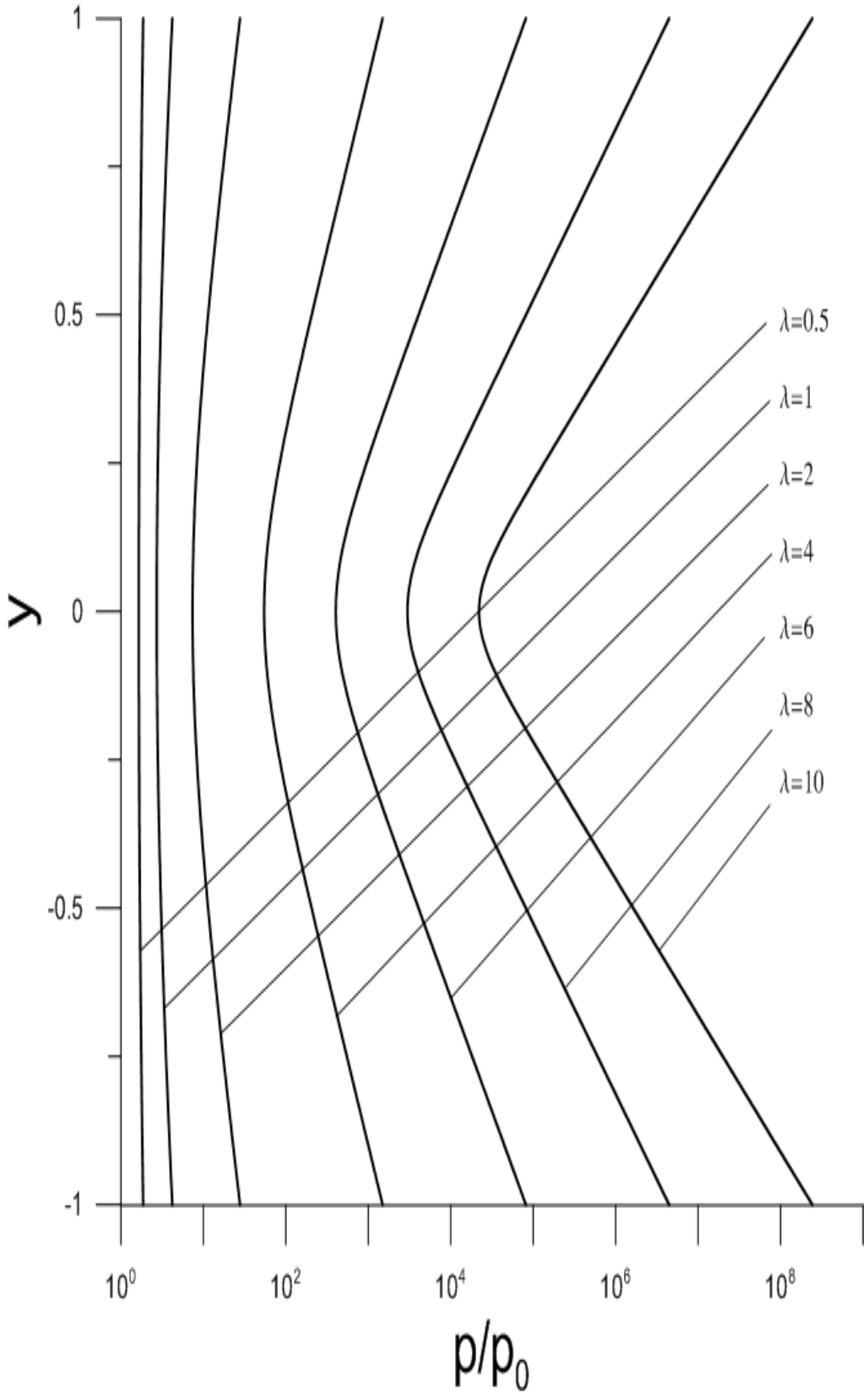
Şekil A.11 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ değeri için basıncın x=1 de y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



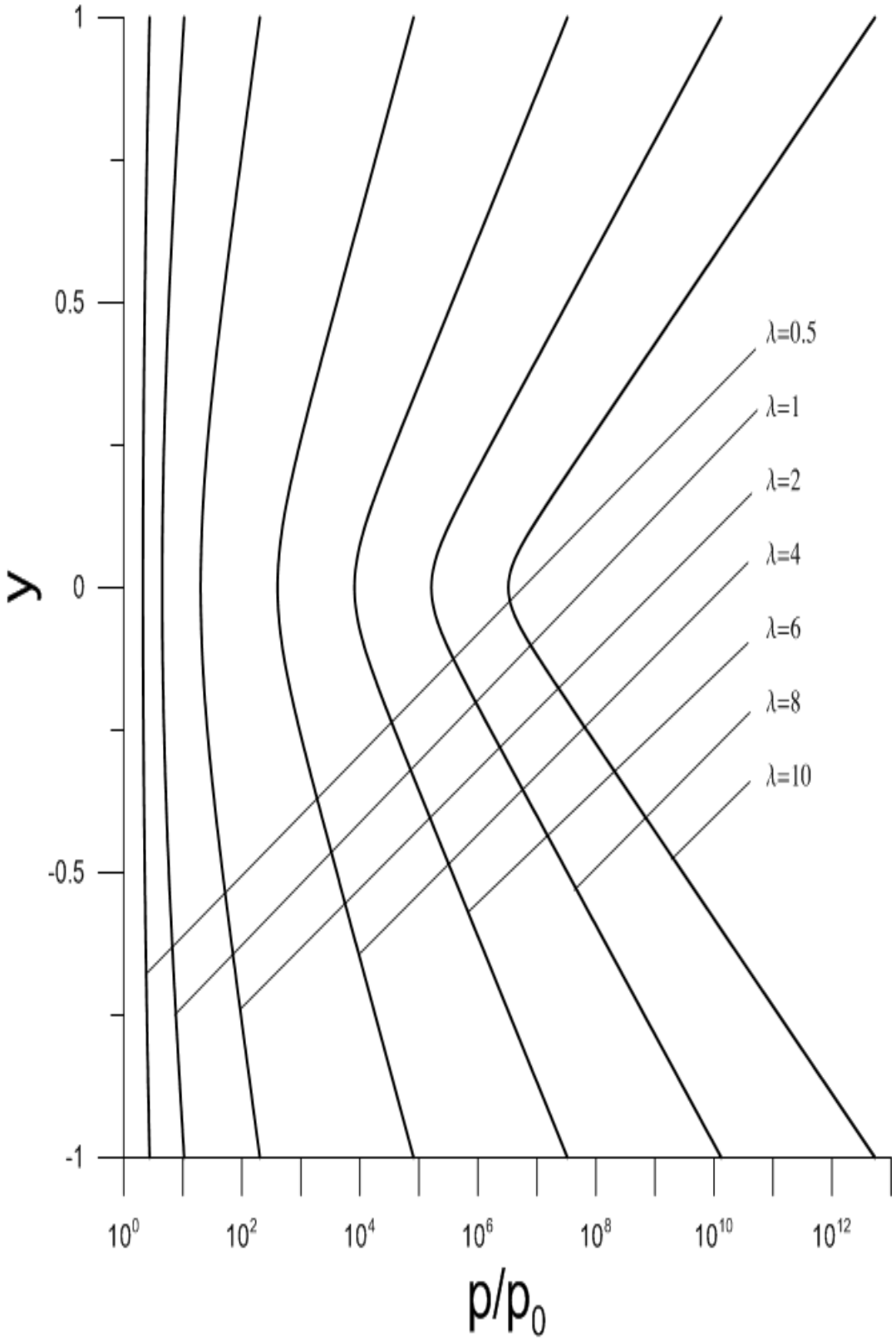
Şekil A.12 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ değeri için basıncın x=1 de y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



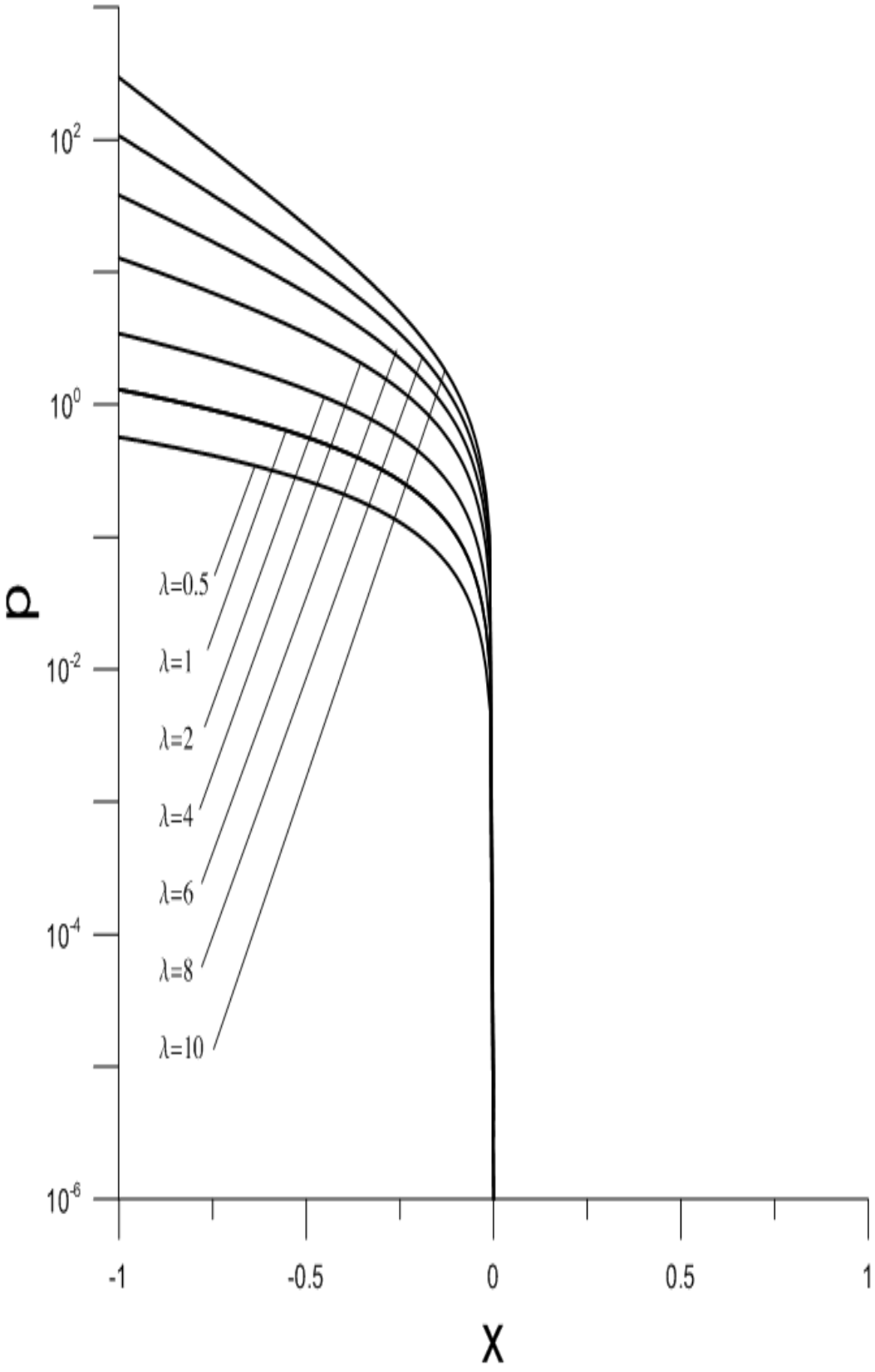
Şekil A.13 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ değeri için basıncın x = -1 de y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



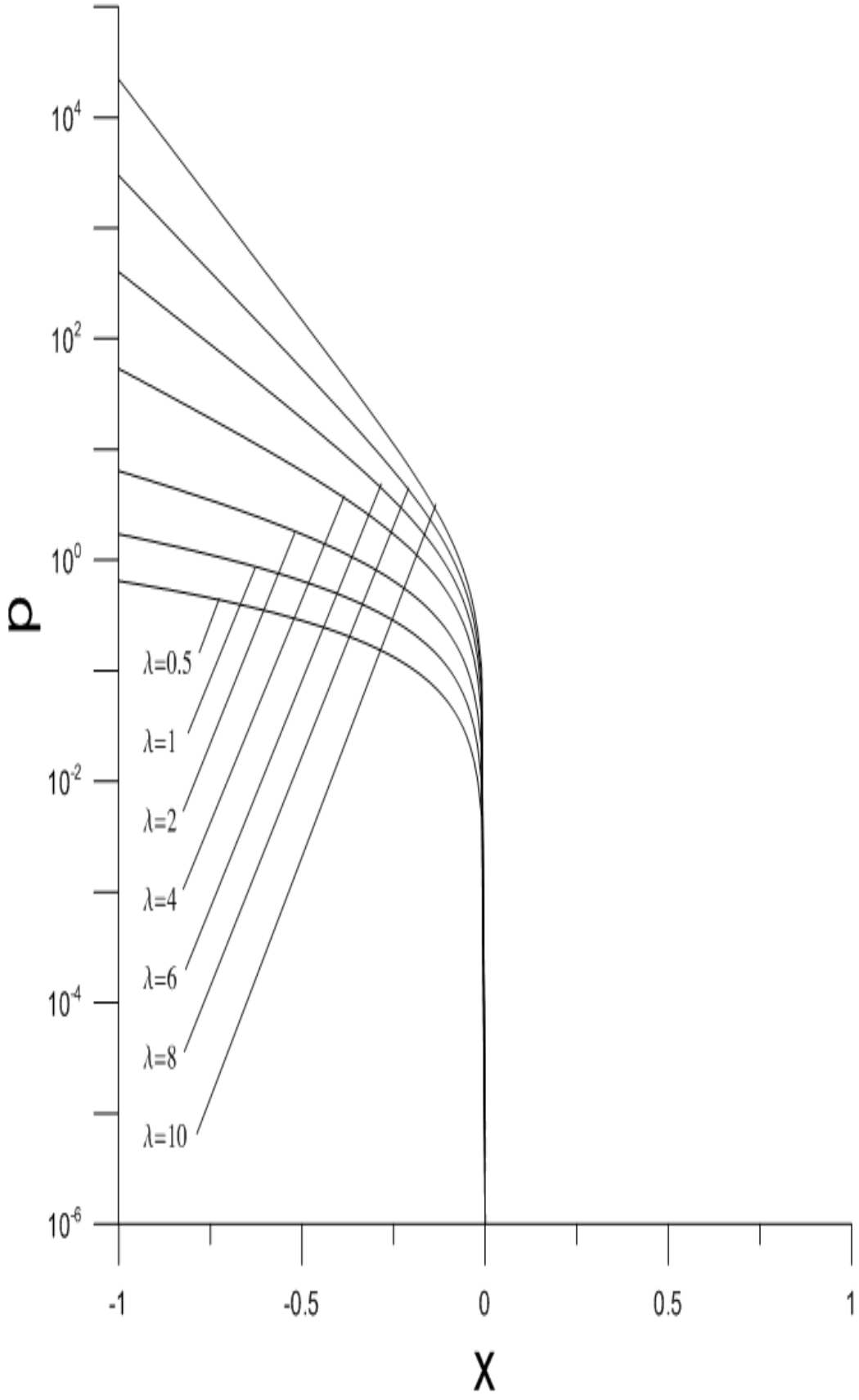
Şekil A.14 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ değeri için basıncın x = -1 de y ile değişimi. (p_0 ,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



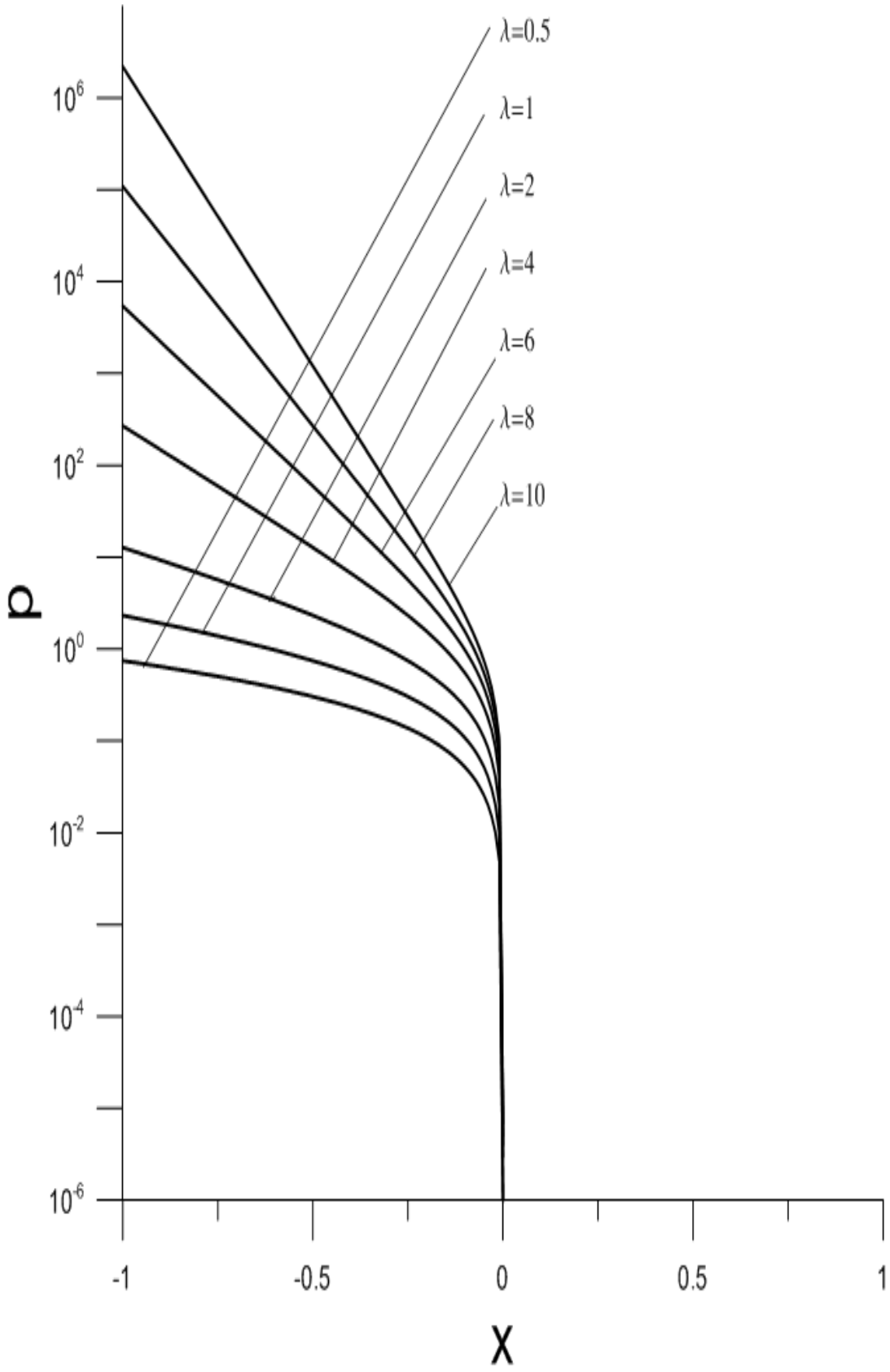
Şekil A.15 : $\mu(p)=\alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ değeri için basıncın x = -1 de y ile değişimi. (p_0,(0,0) noktasındaki basınç değeridir.)



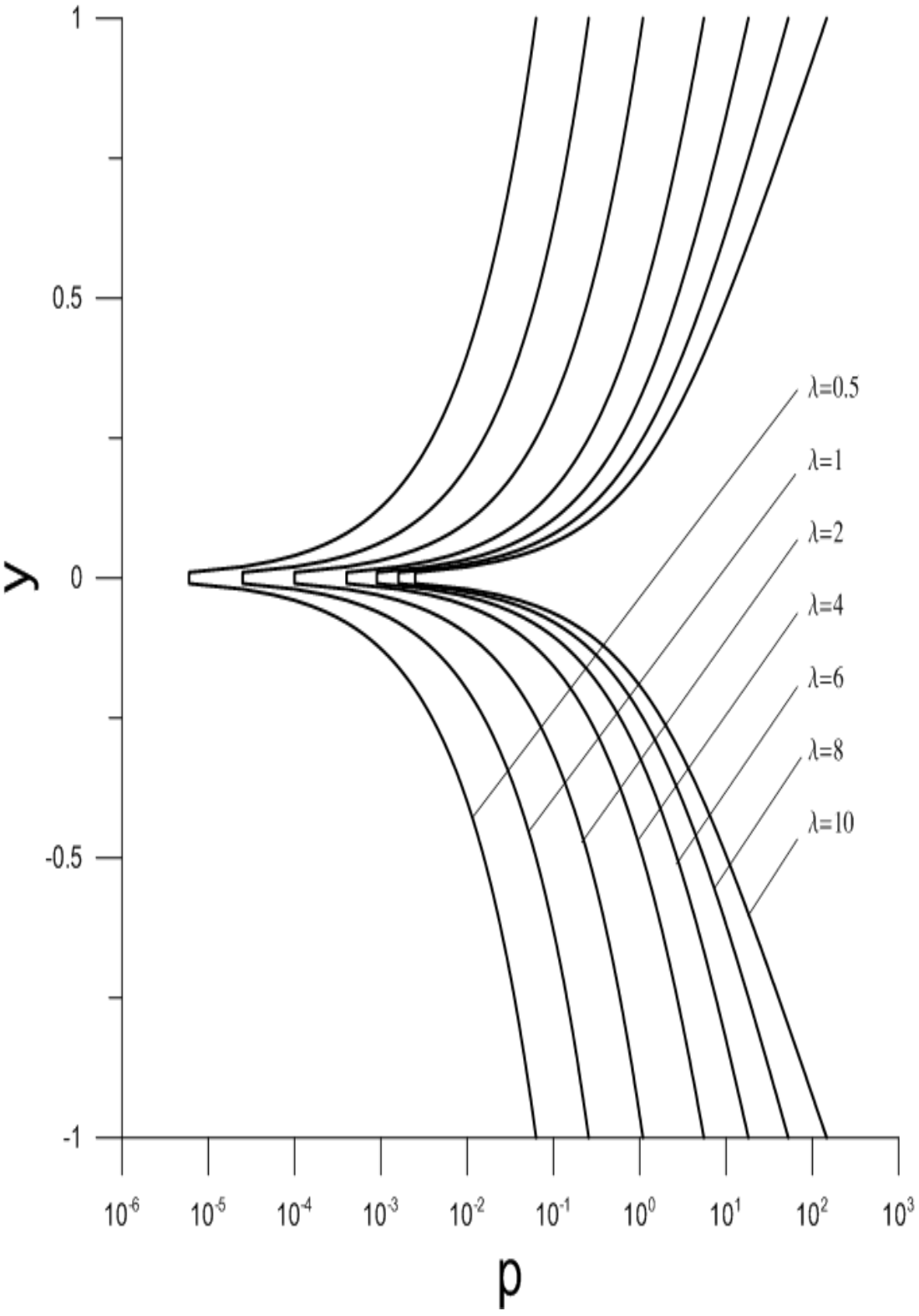
Şekil A.16 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=0.5$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi. **(** $p_0=0$ alınmıştır.**)**



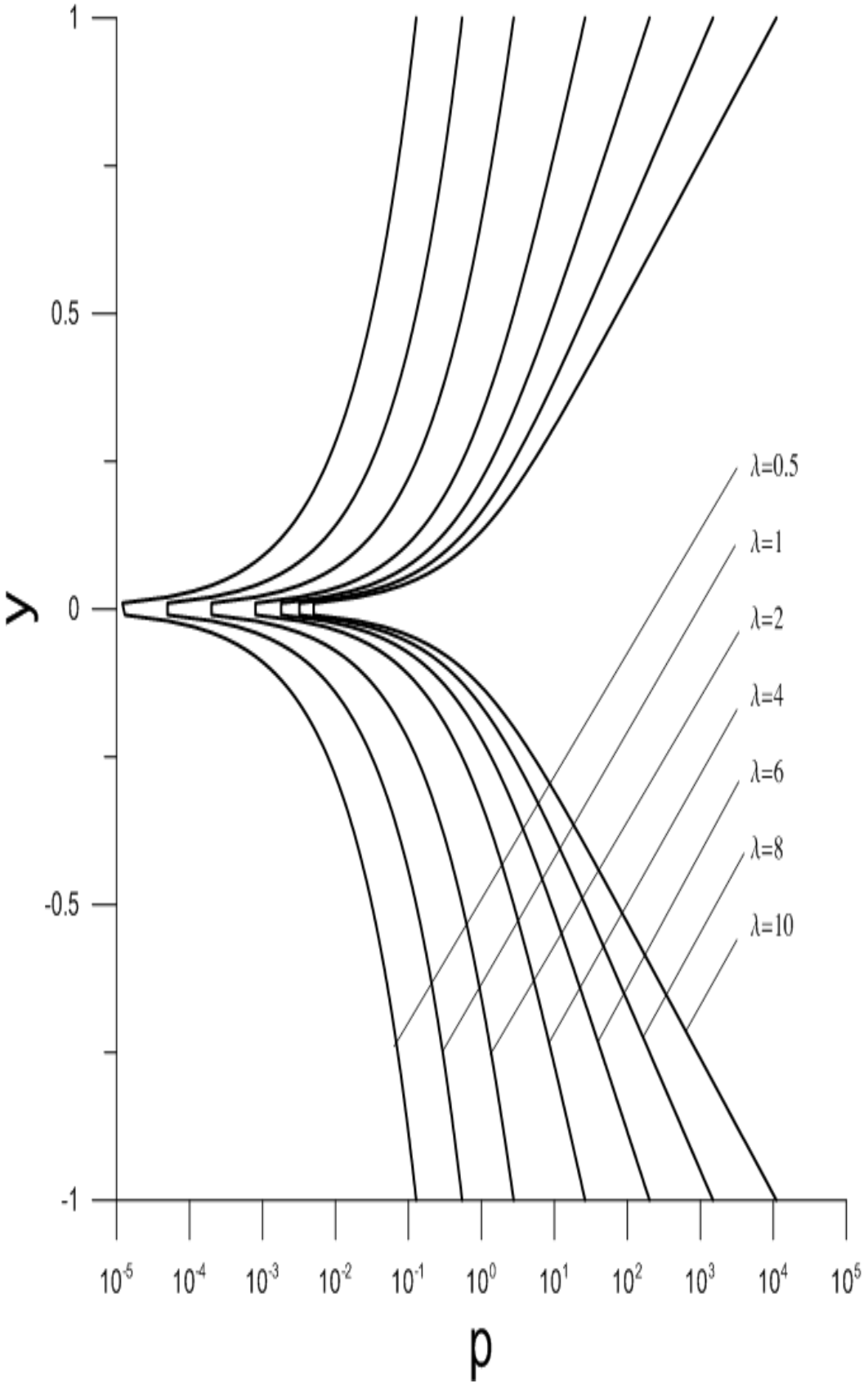
Şekil A.17 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi. ($p_0=0$ alınmıştır.**)**



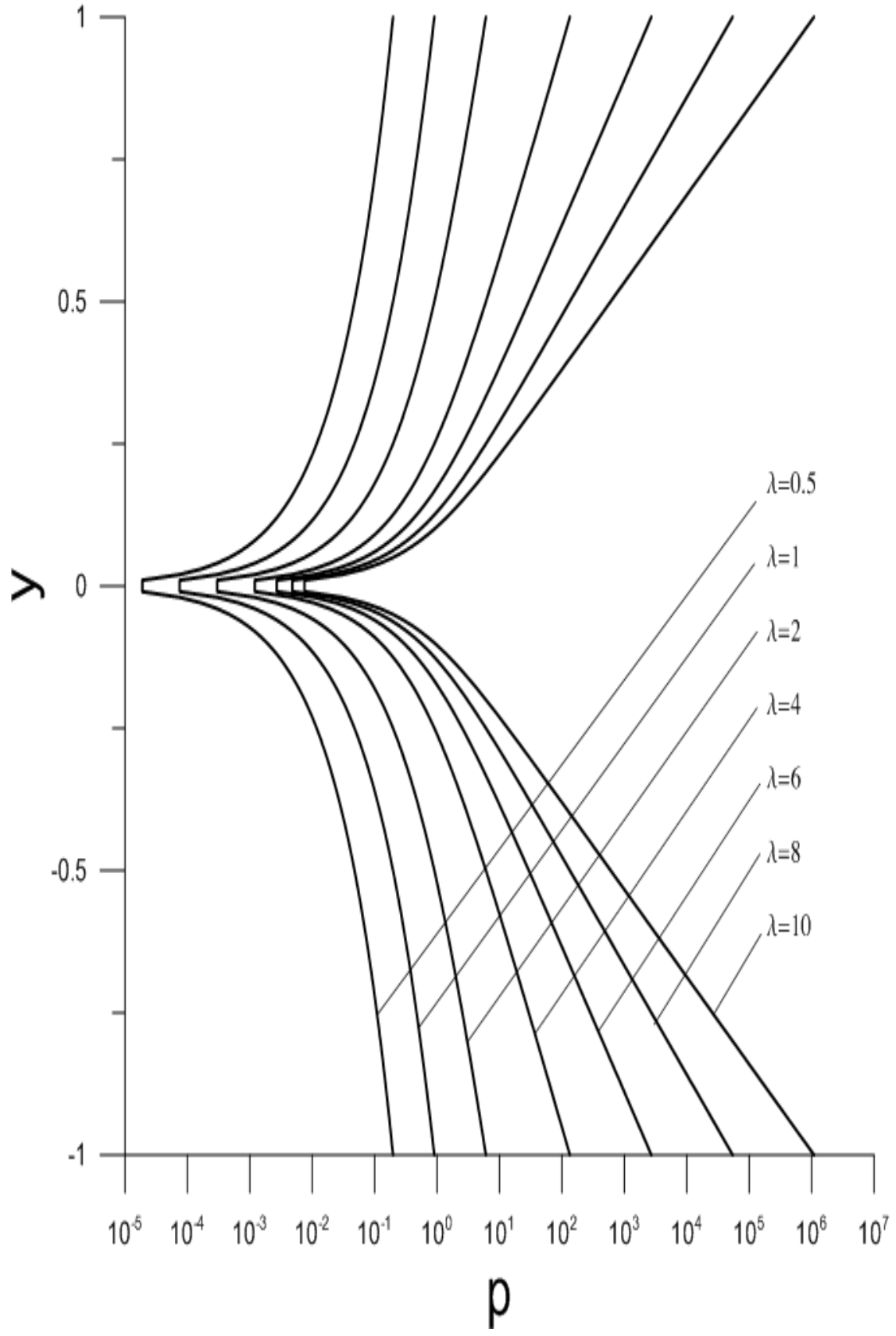
Şekil A.18 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi. ($p_0=0$ alınmıştır.**)**



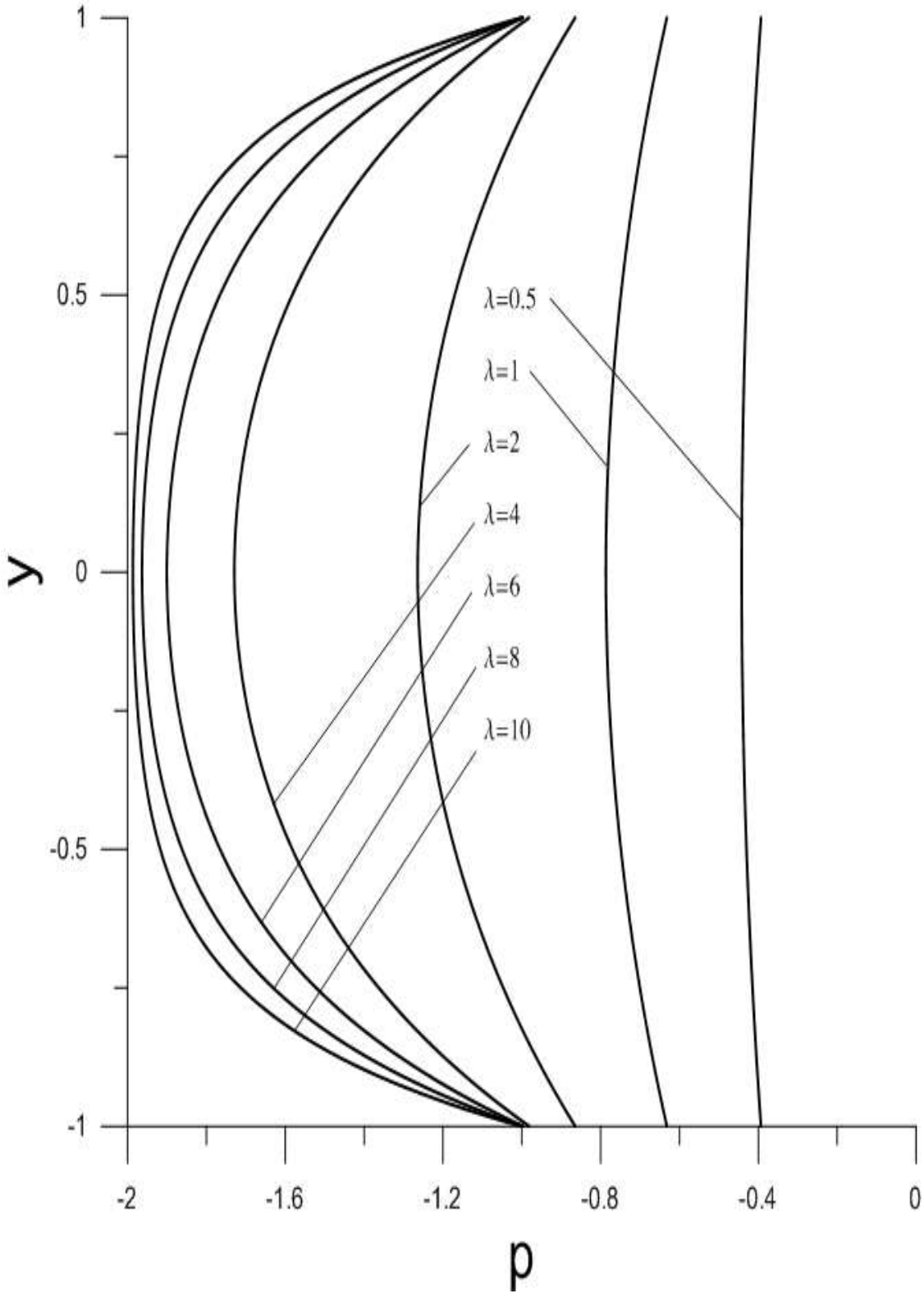
Şekil A.19 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi ($p_0 = 0$ alınmıştır.)



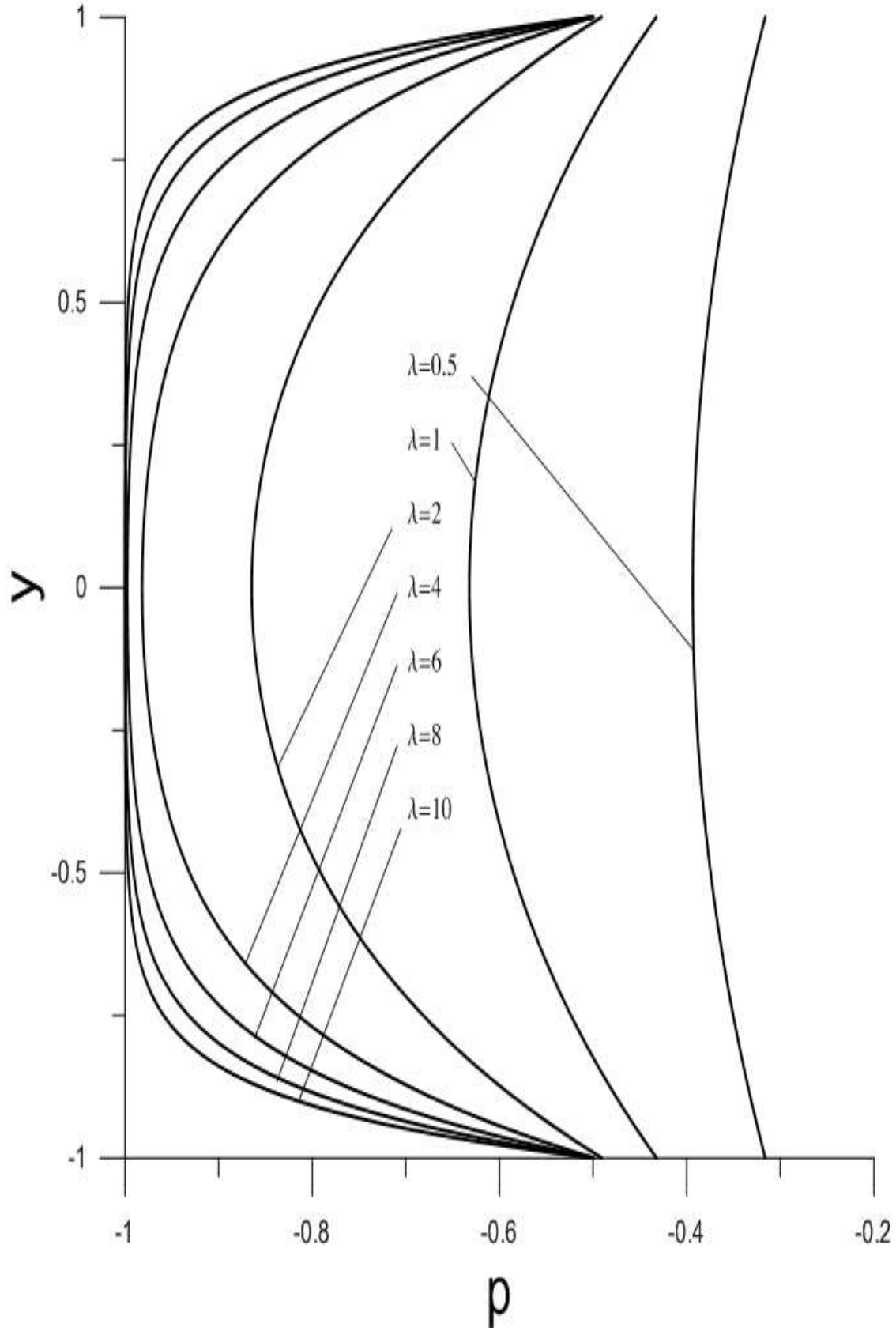
Şekil A.20 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi ($p_0=0$ alınmıştır.)



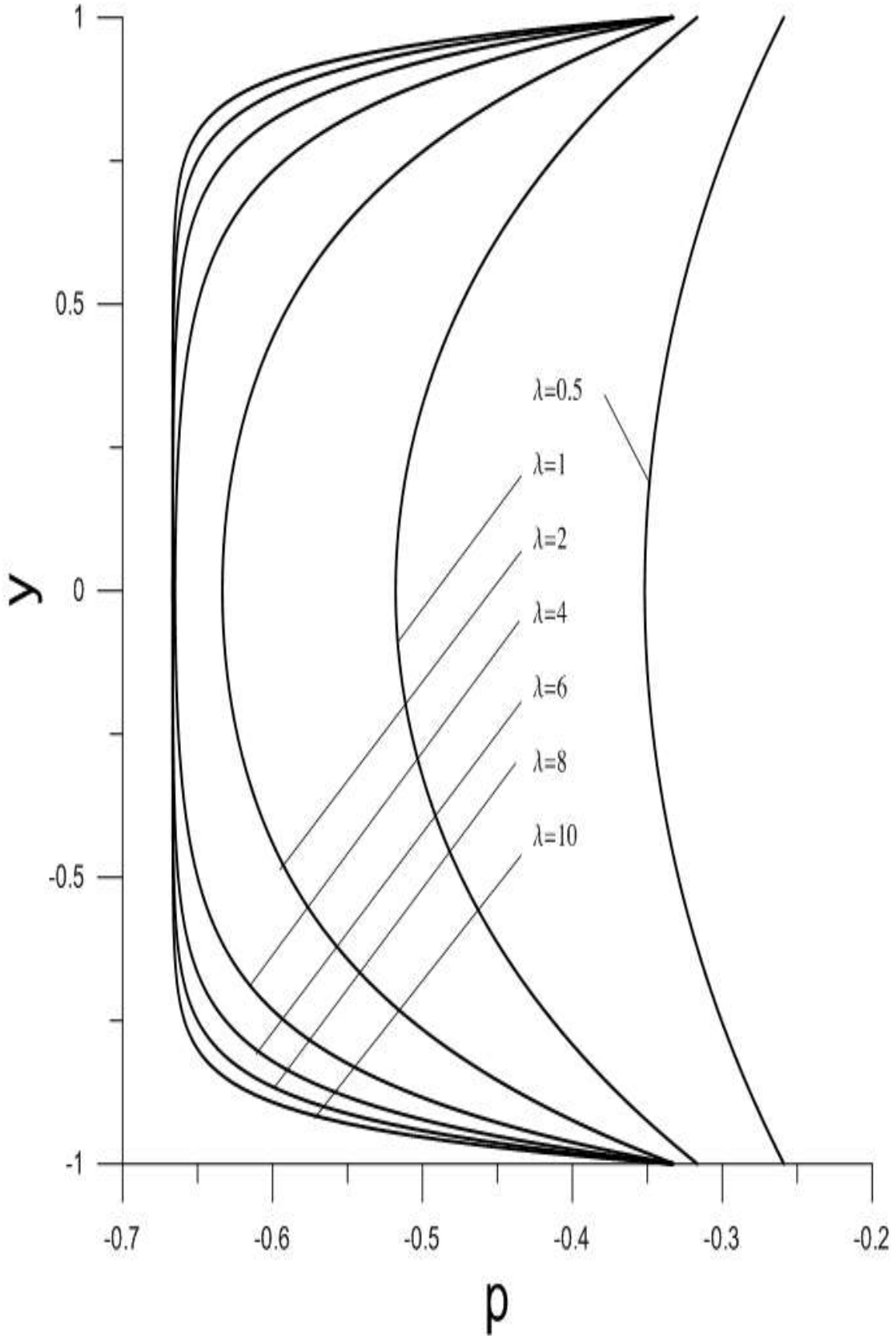
Şekil A.21 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi. ($p_0=0$ alınmıştır.)



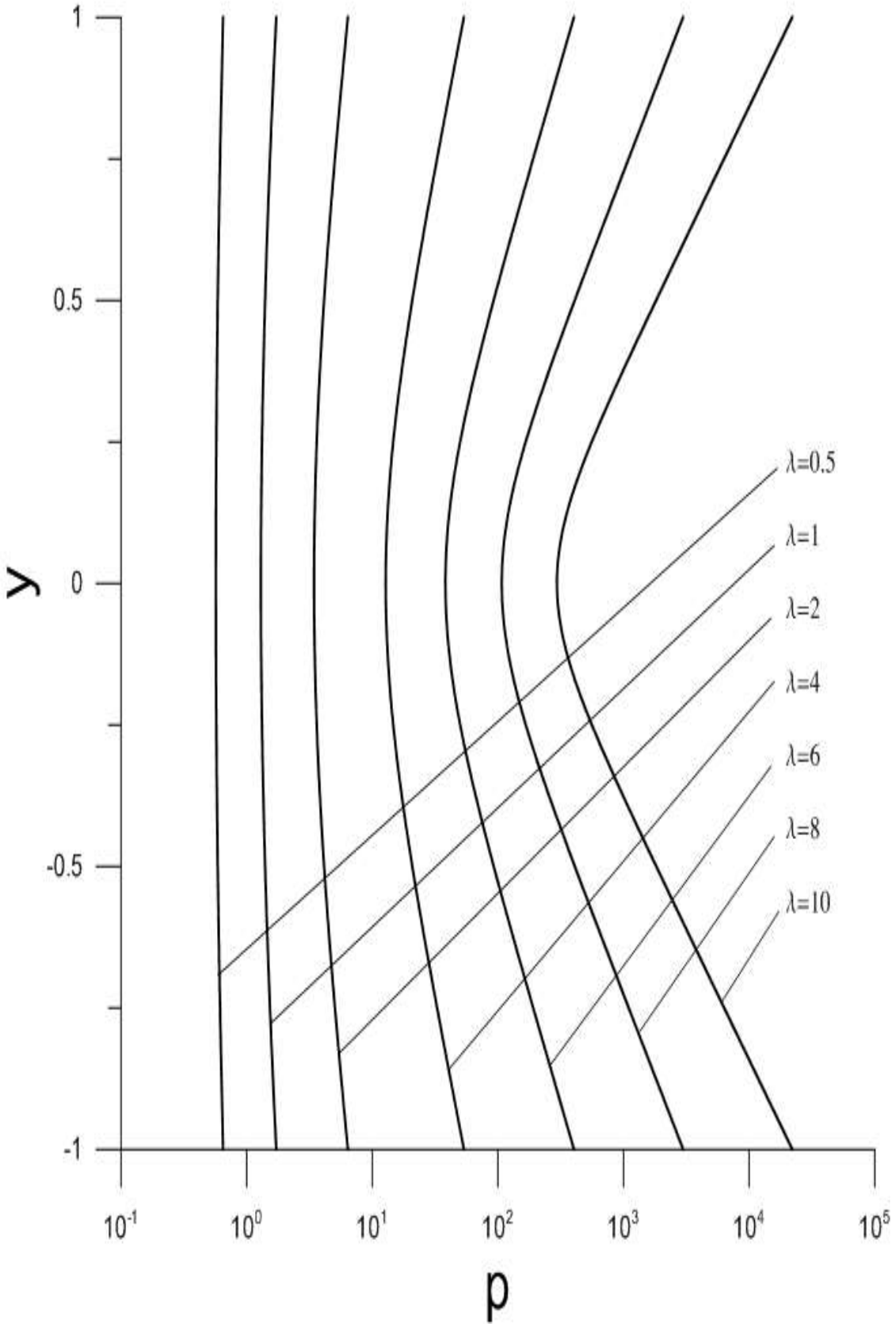
Şekil A.22 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi. ($p_0 = 0$ alınmıştır.)



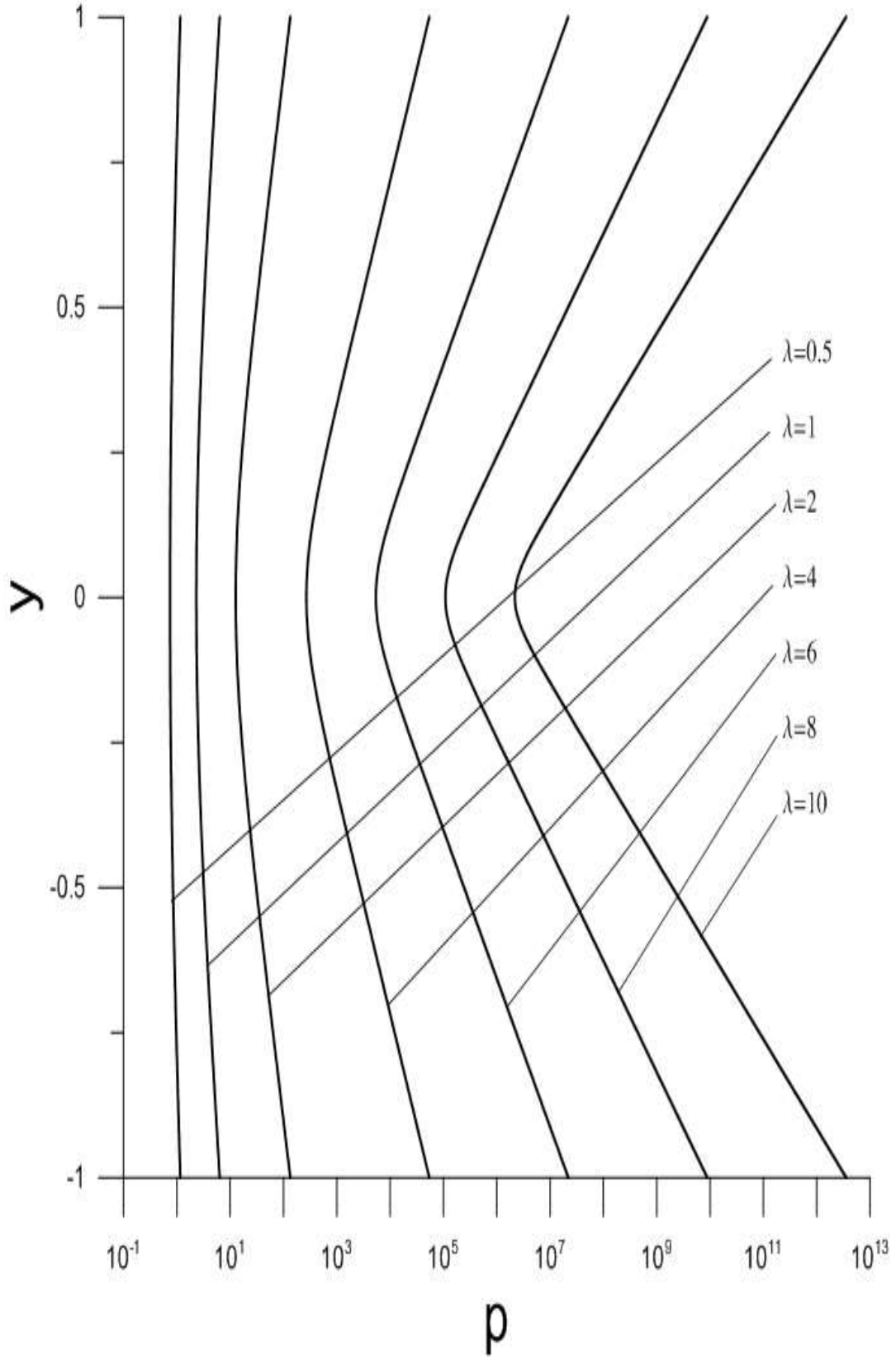
Şekil A.23 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi. ($p_0 = 0$ alınmıştır.)



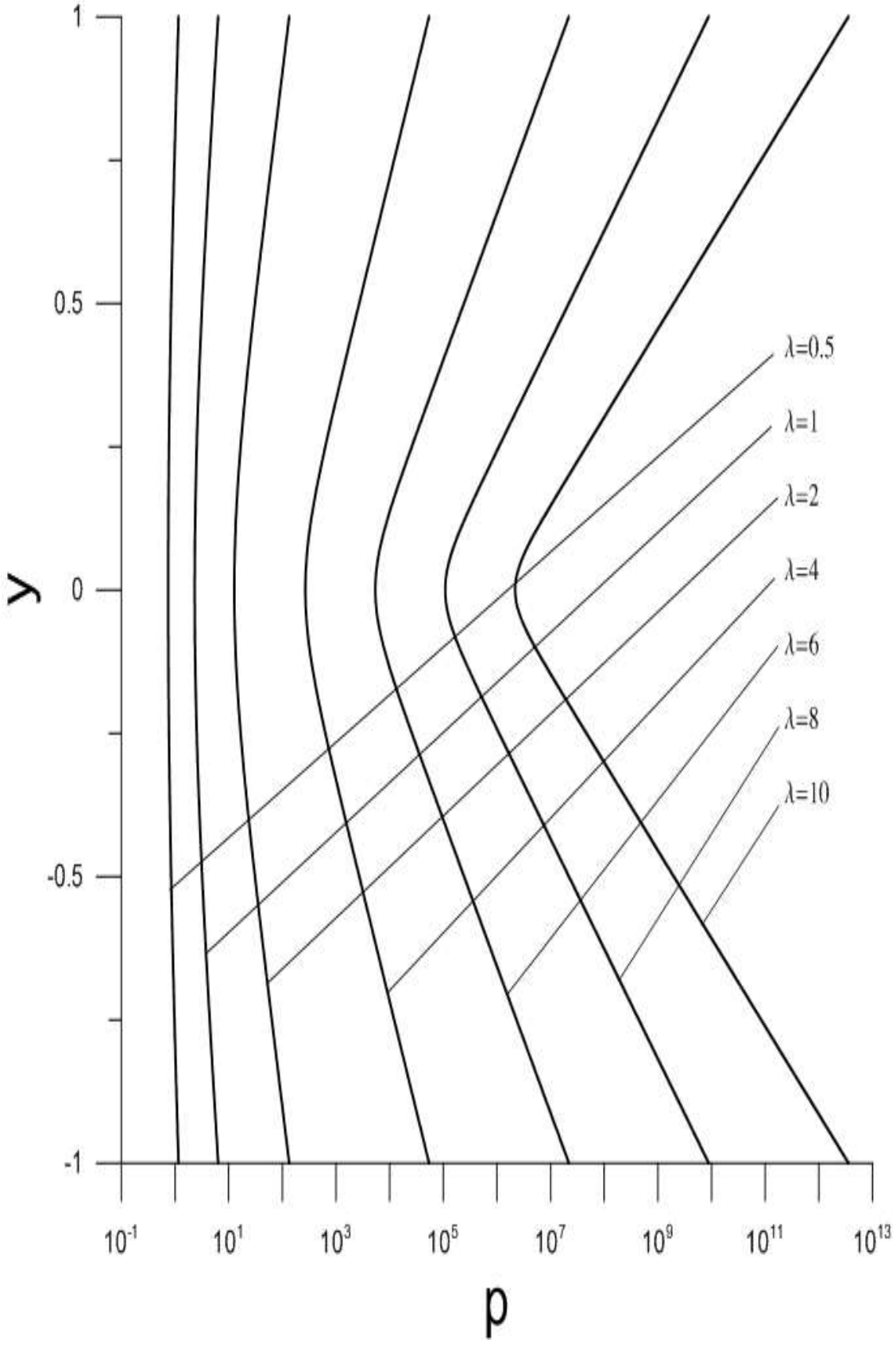
Şekil A.24 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi. (p_0 = 0 alınmıştır.)



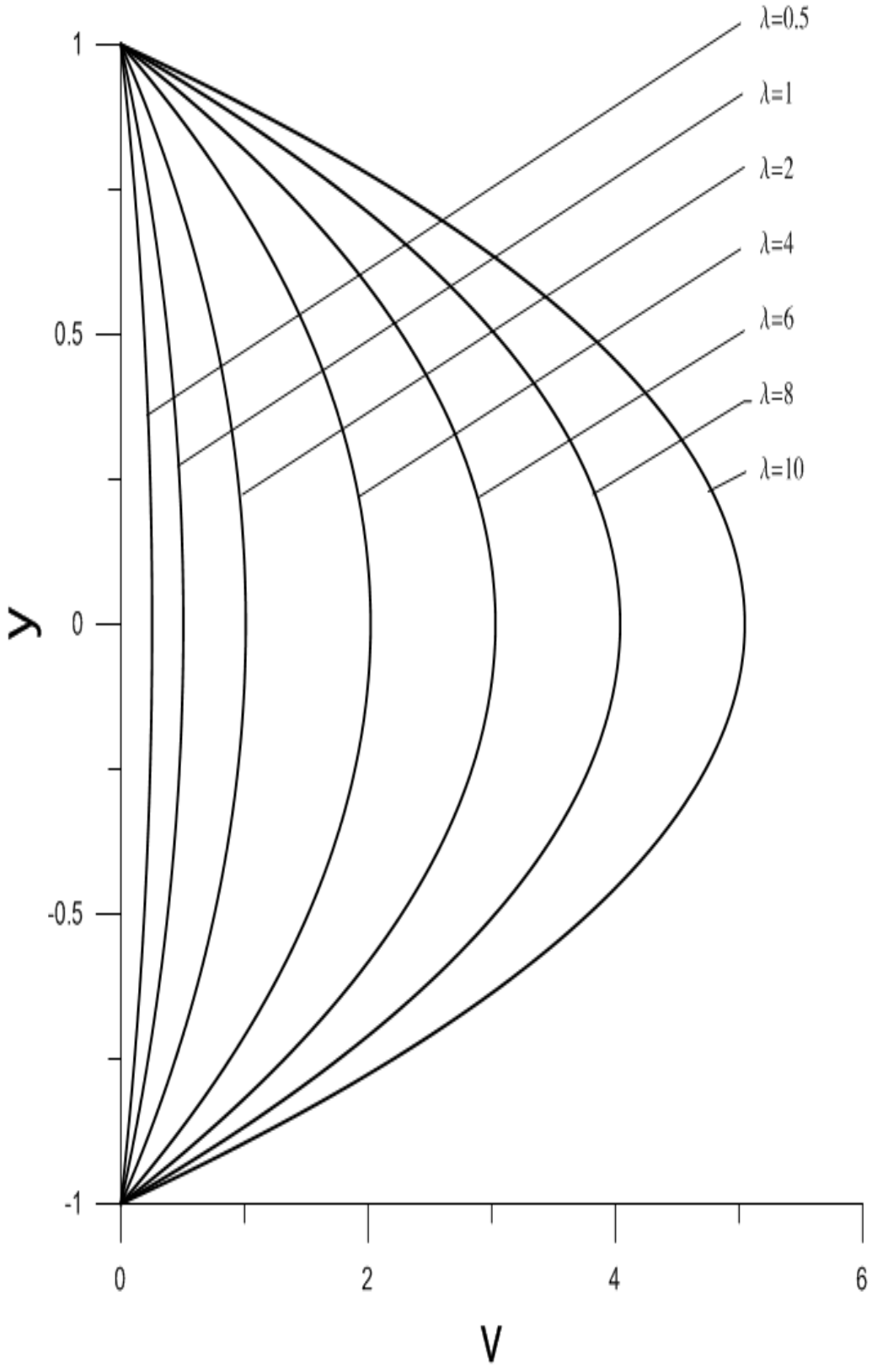
Şekil A.25 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi. ($p_0 = 0$ alınmıştır.)



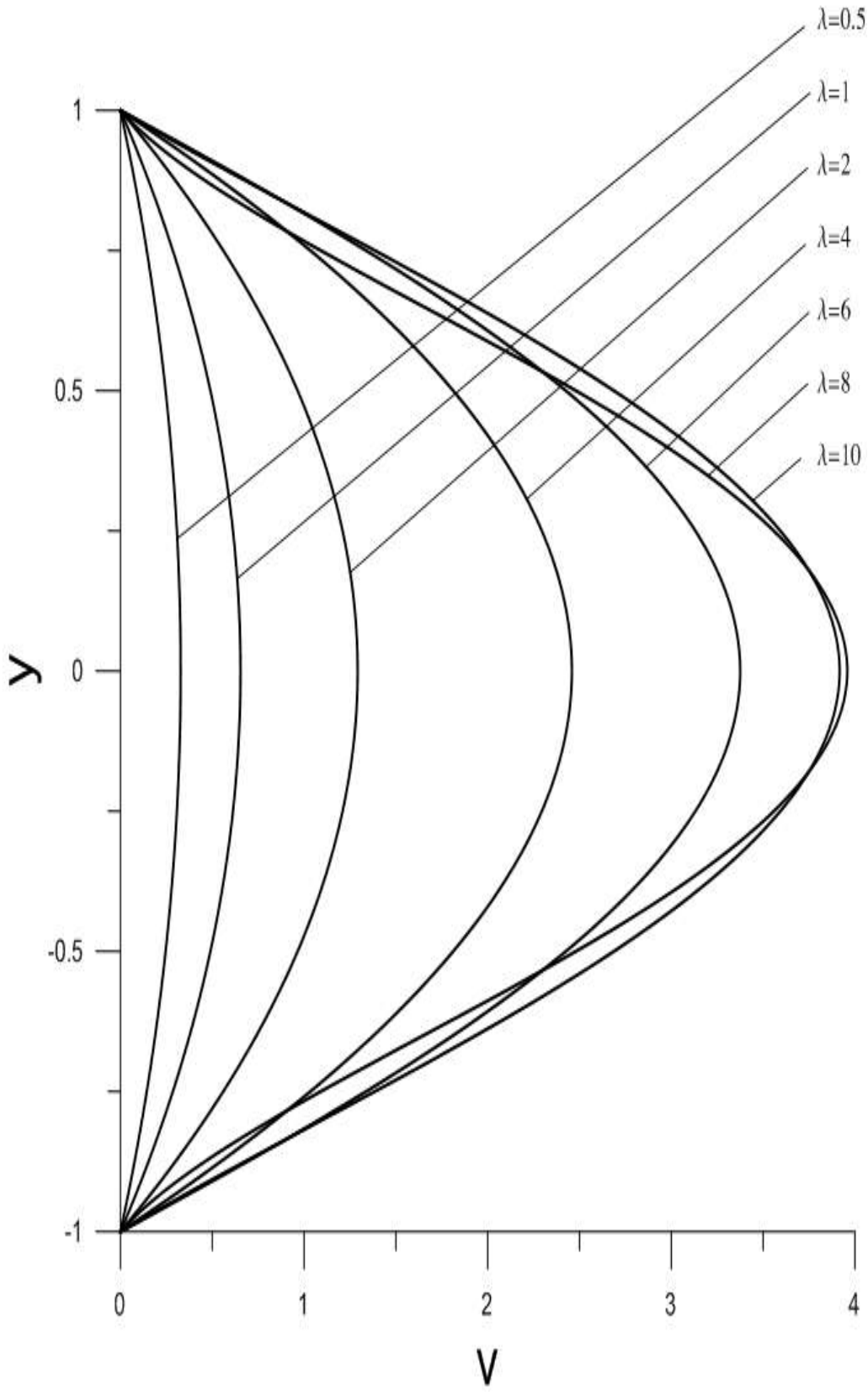
Şekil A.26 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi. (p_0 = 0 alınmıştır.)



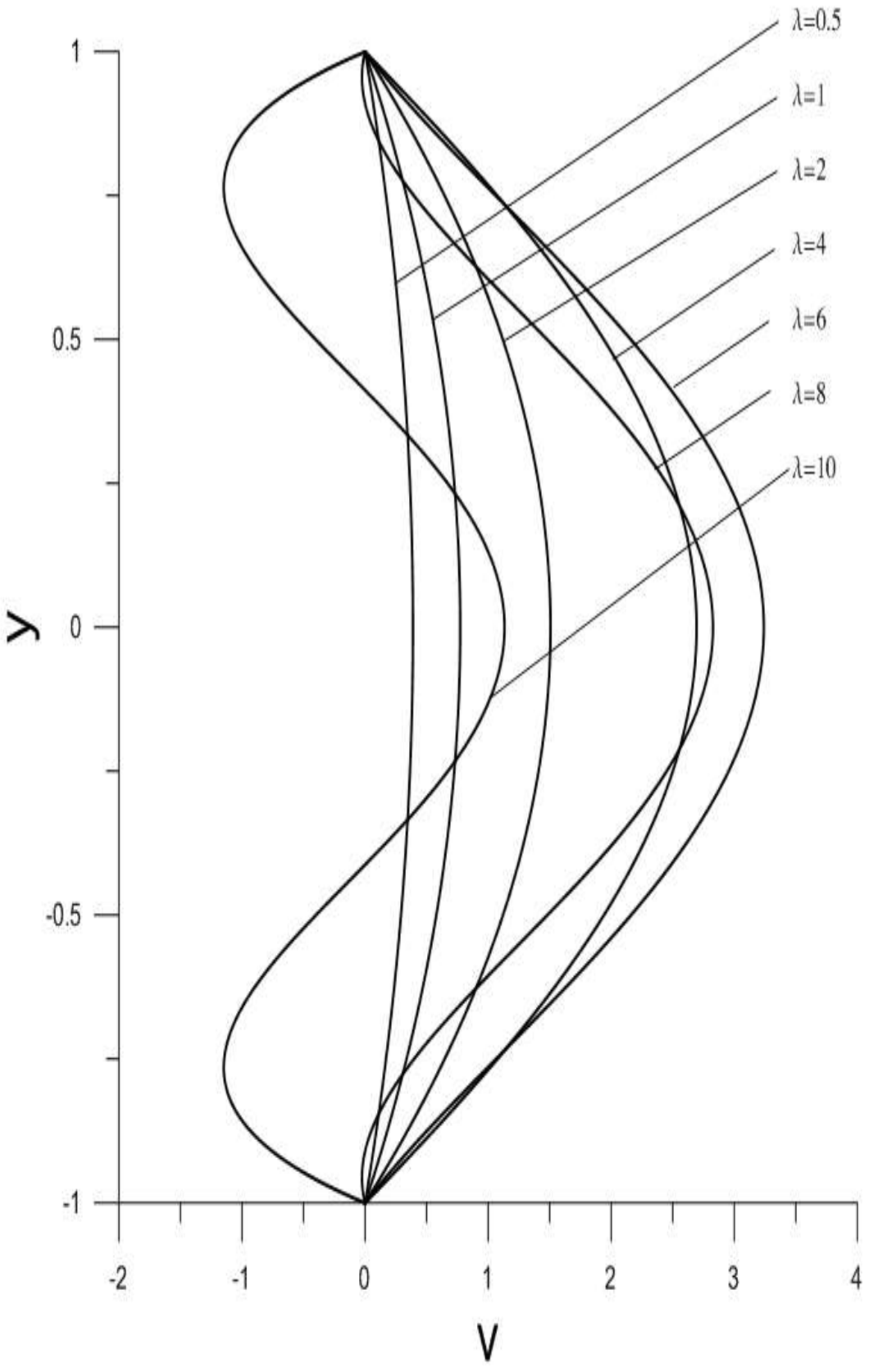
Şekil A.27 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi. ($p_0 = 0$ alınmıştır.)



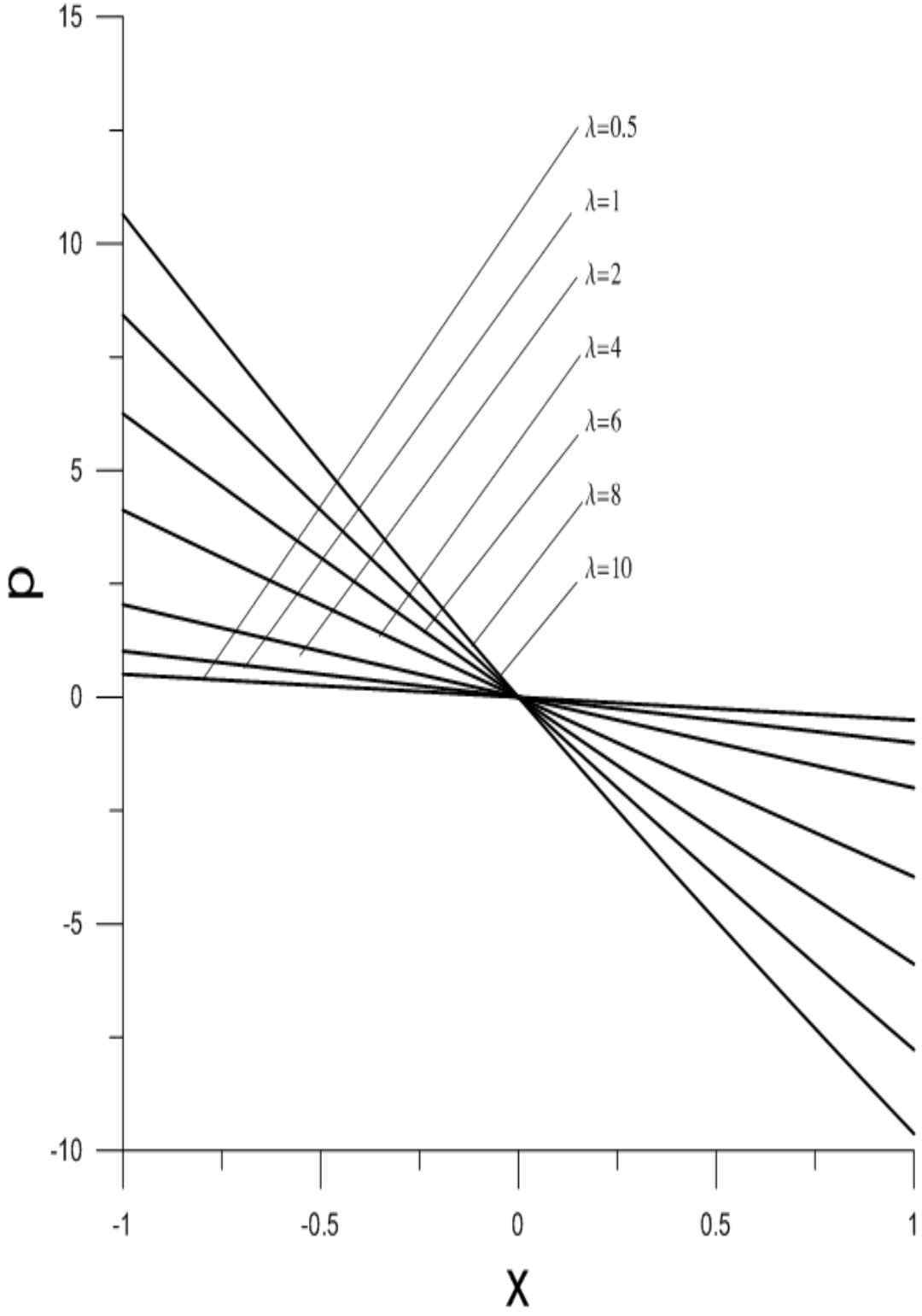
Şekil A.28 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için hızın y ile değişimi.



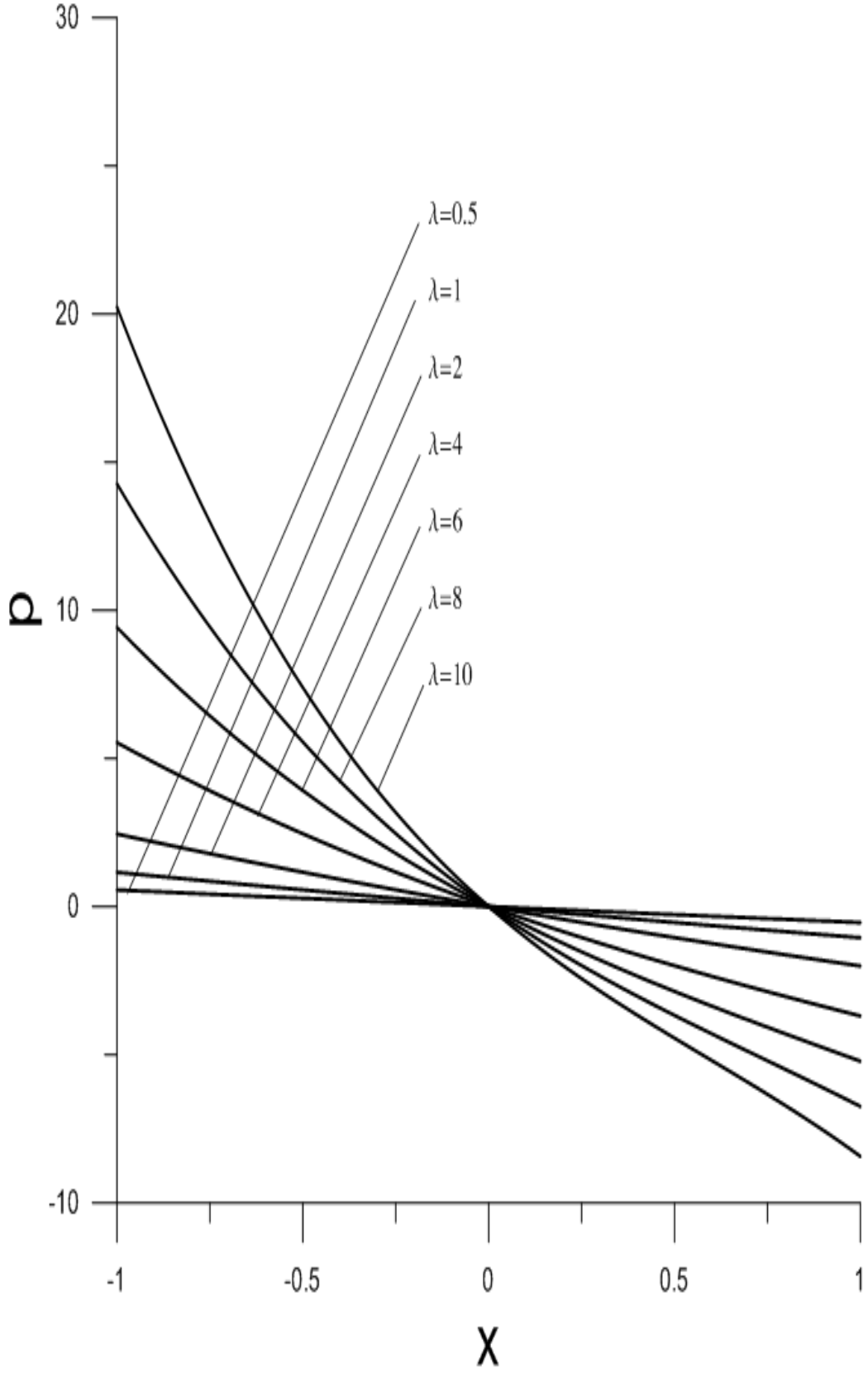
Şekil A.29 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için hızın y ile değişimi.



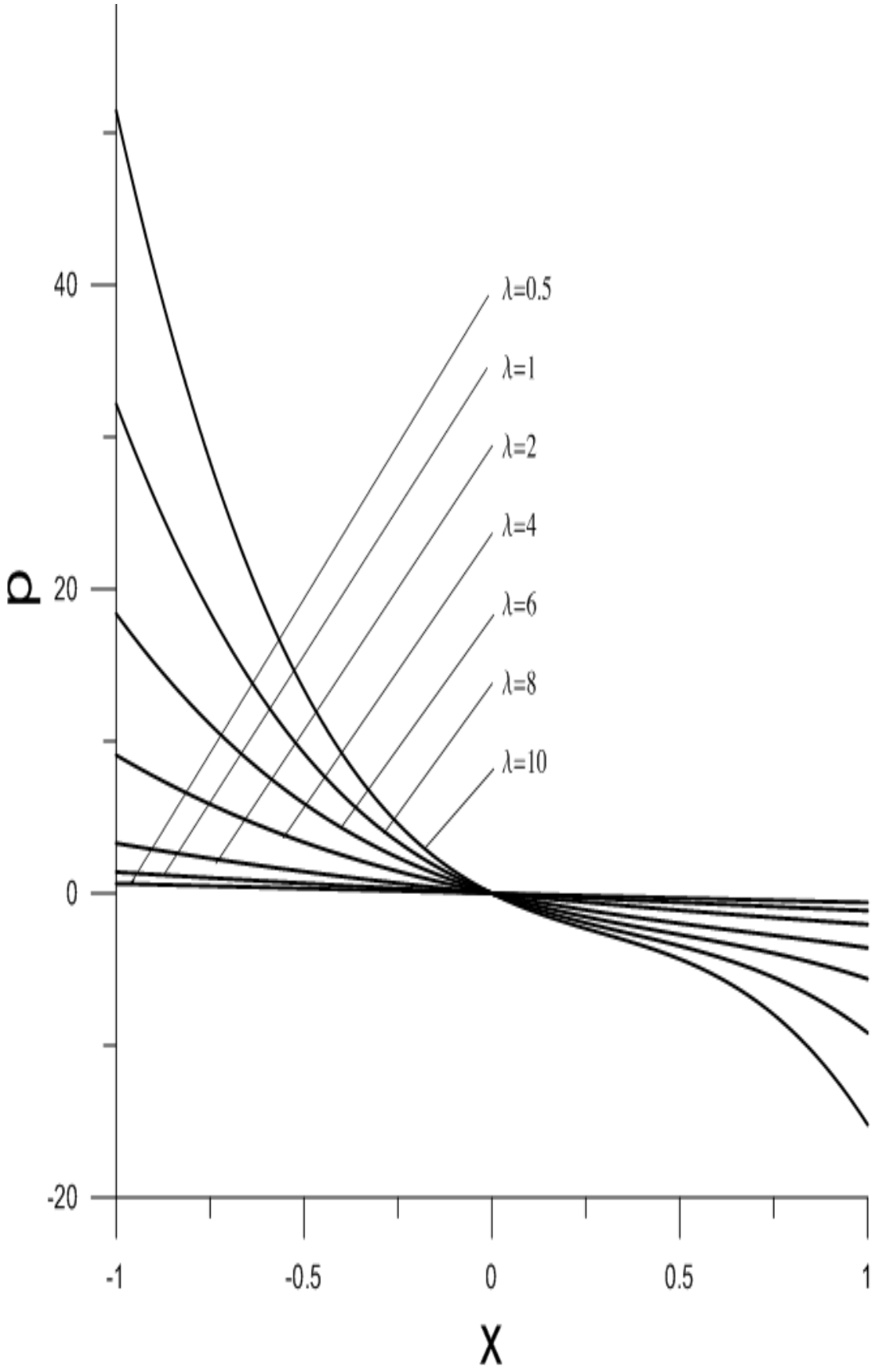
Şekil A.30 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için hızın y ile değişimi.



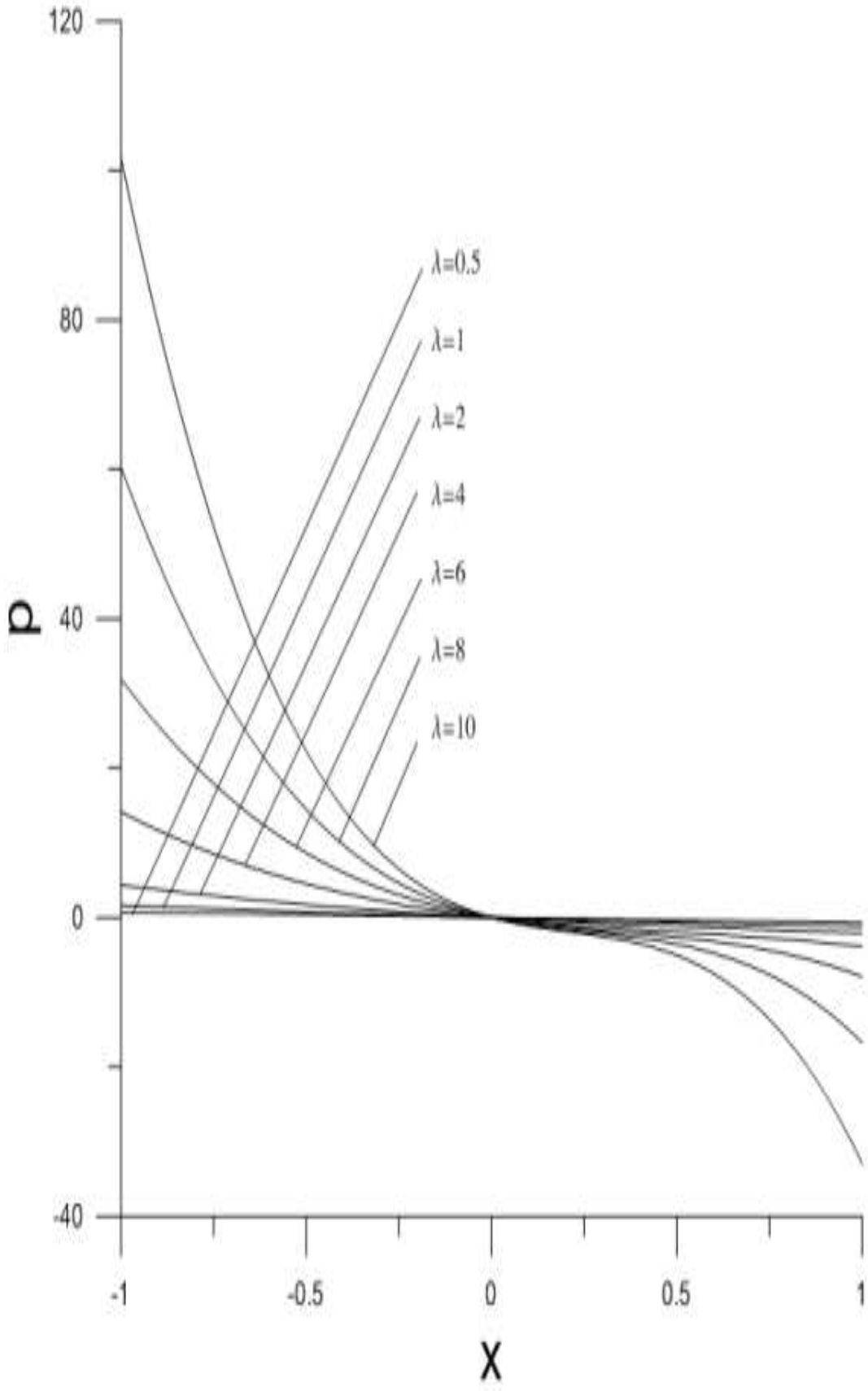
Şekil A.31 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.01$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi.



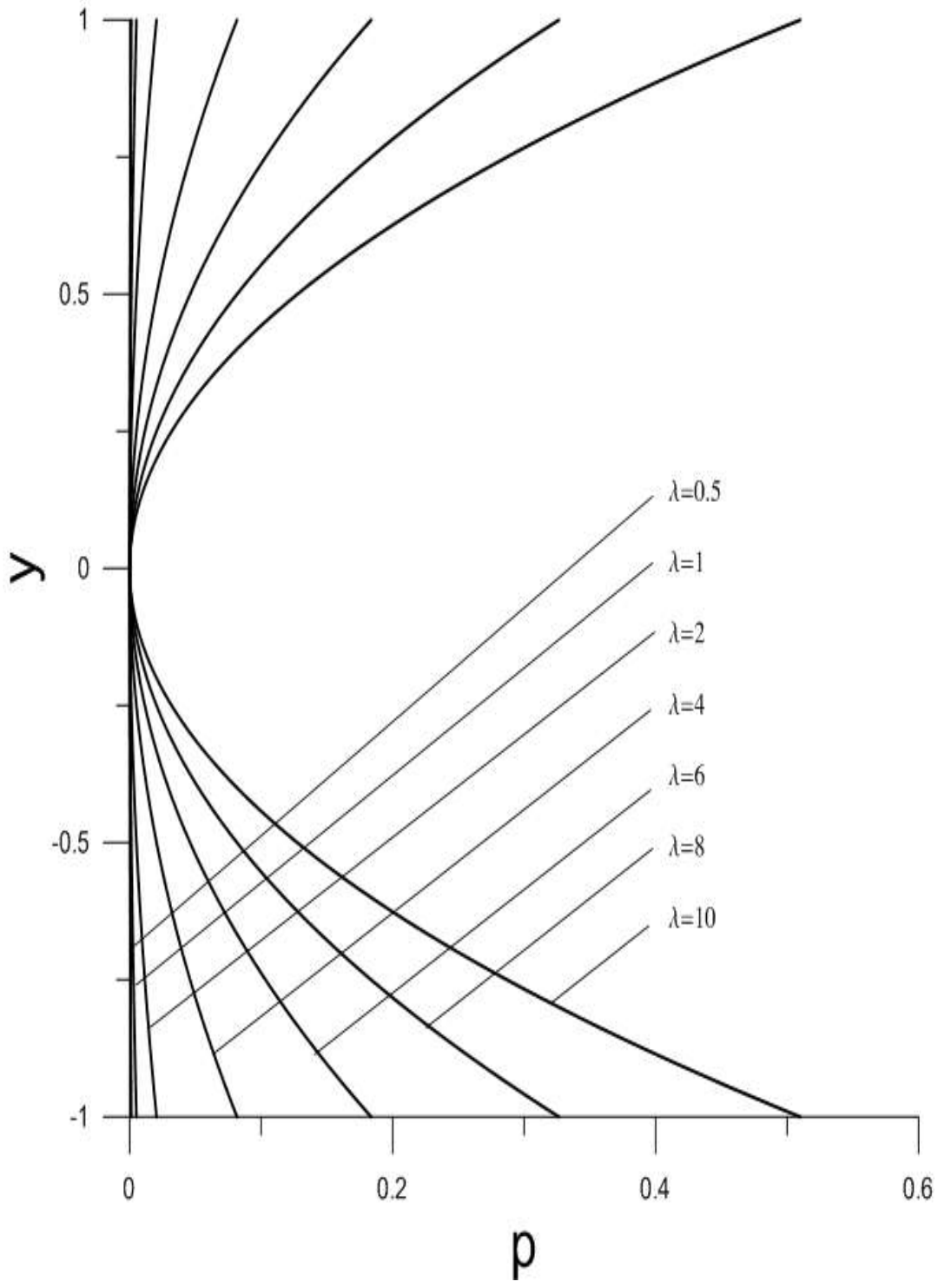
Şekil A.32 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi.



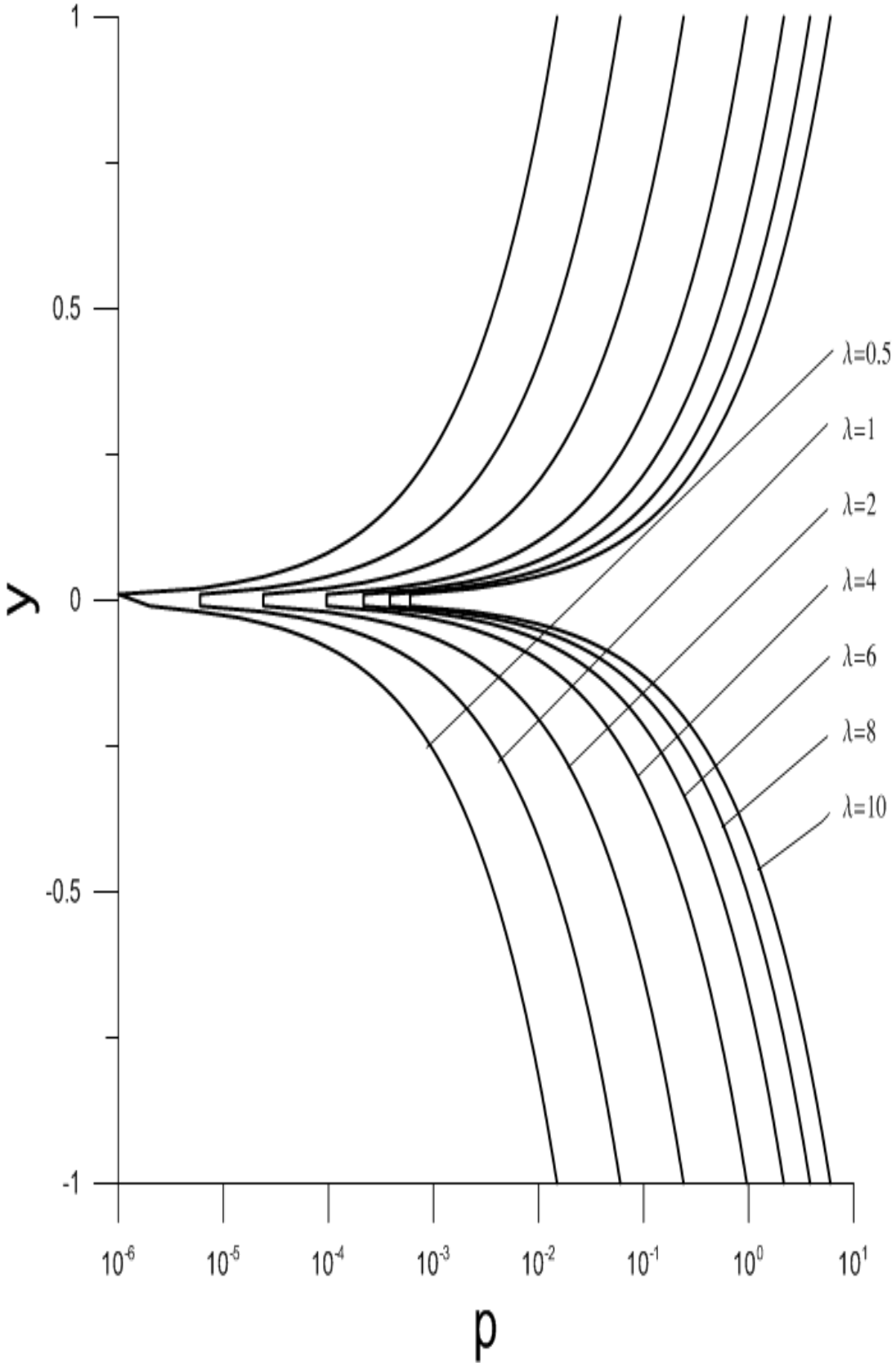
Şekil A.33 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi.



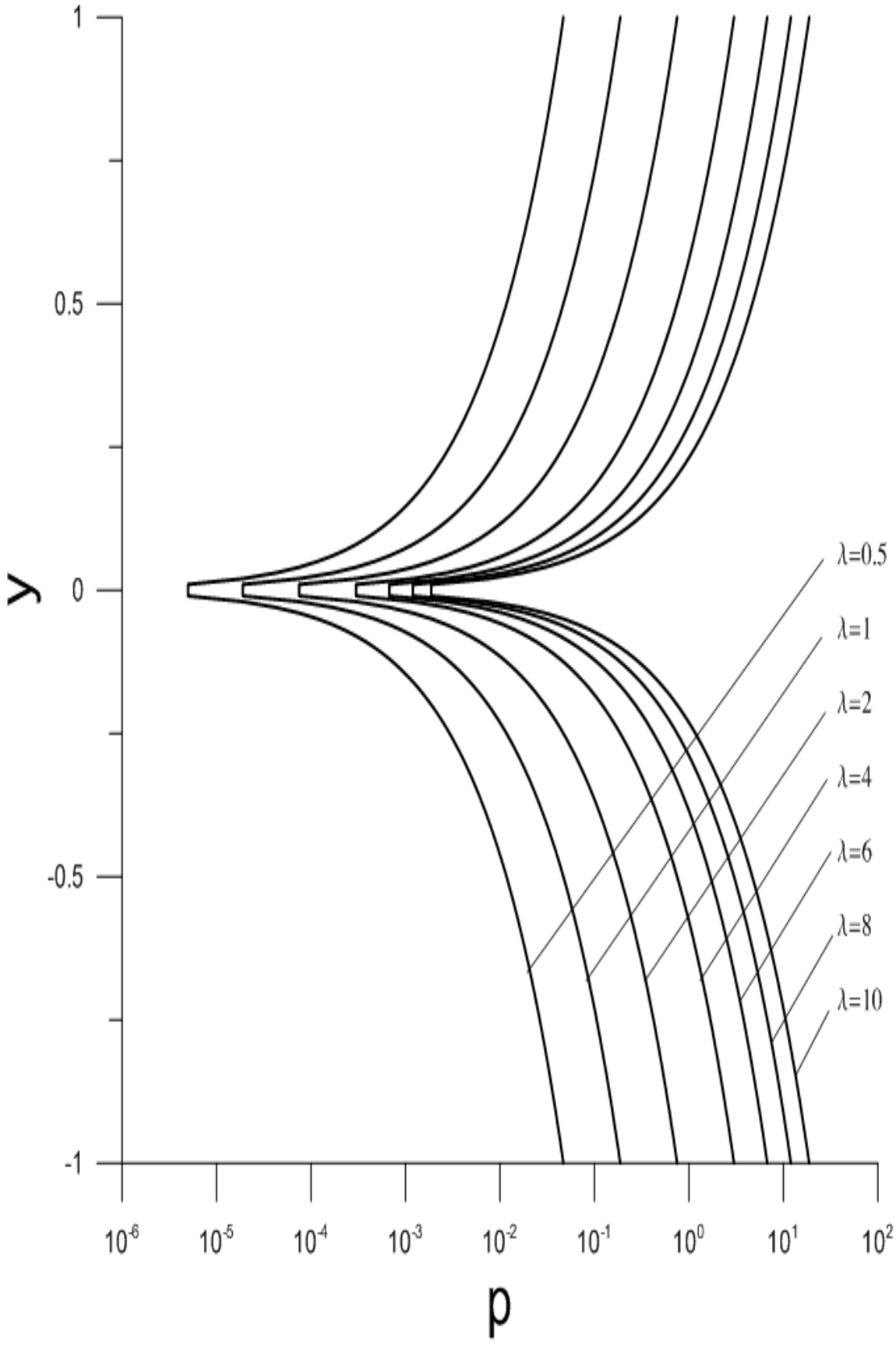
Şekil A.34 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın y = 0 da x ile değişimi.



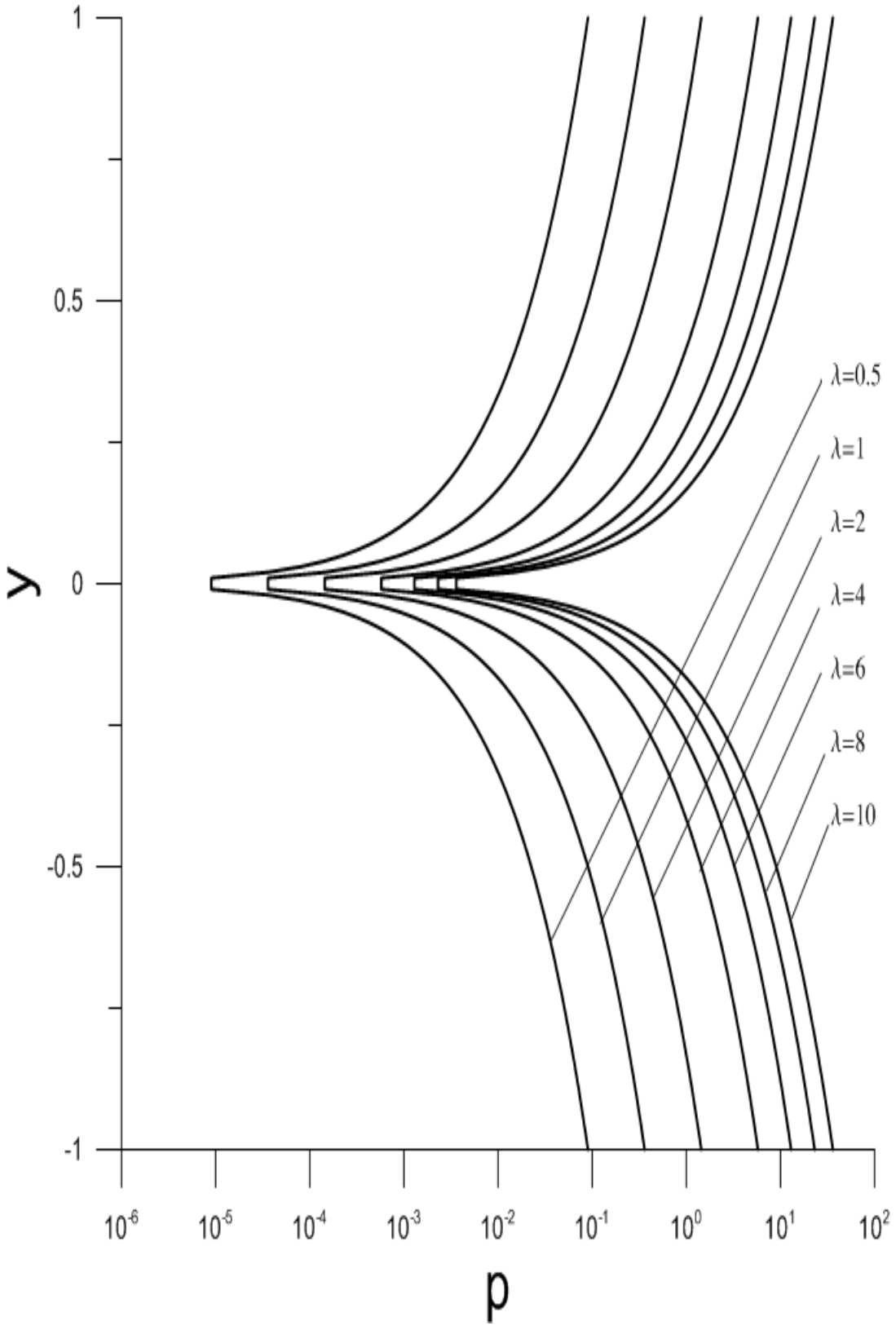
Şekil A.35 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.01$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi.



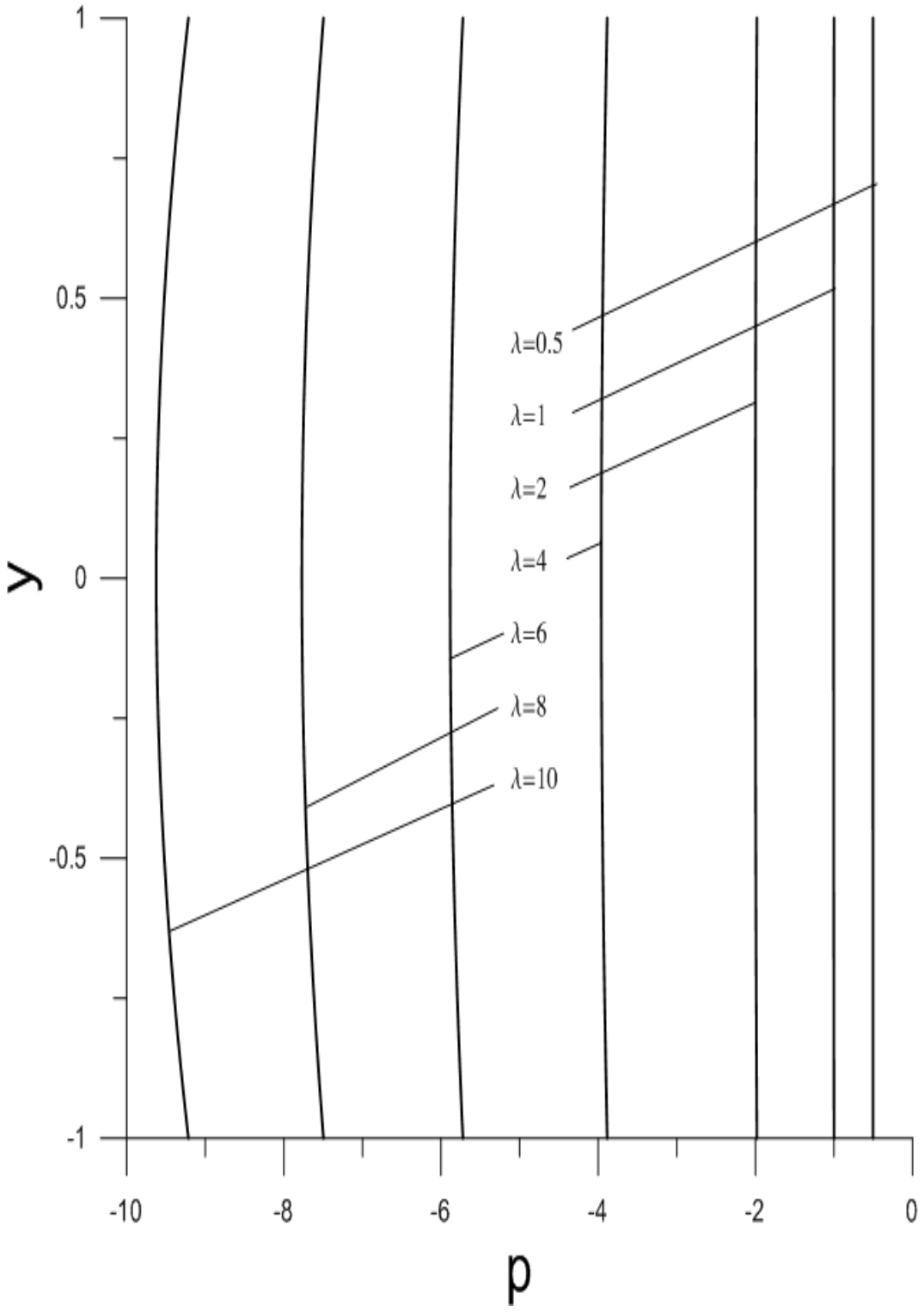
Şekil A.36 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi.



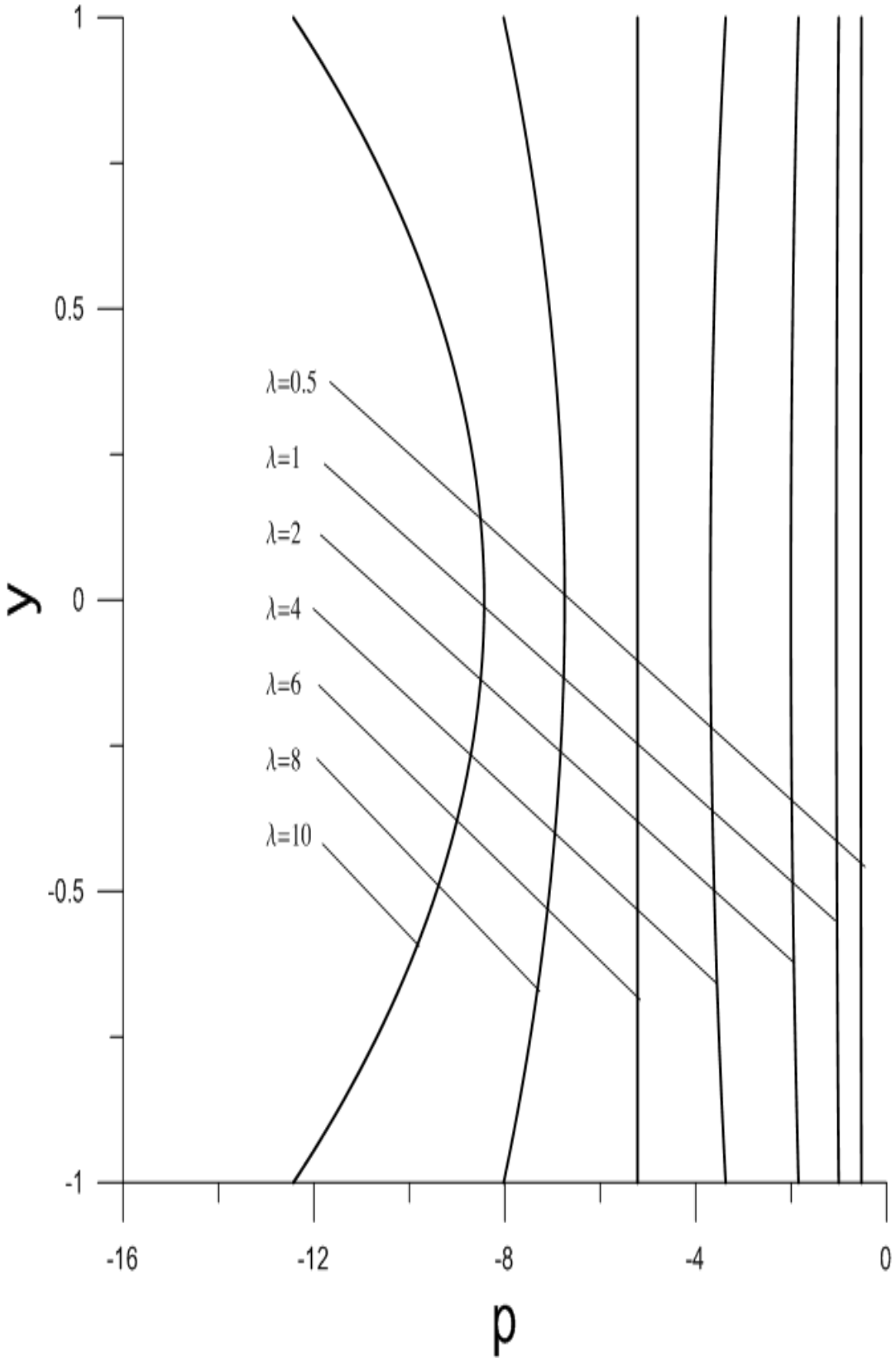
Şekil A.37 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.25$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi.



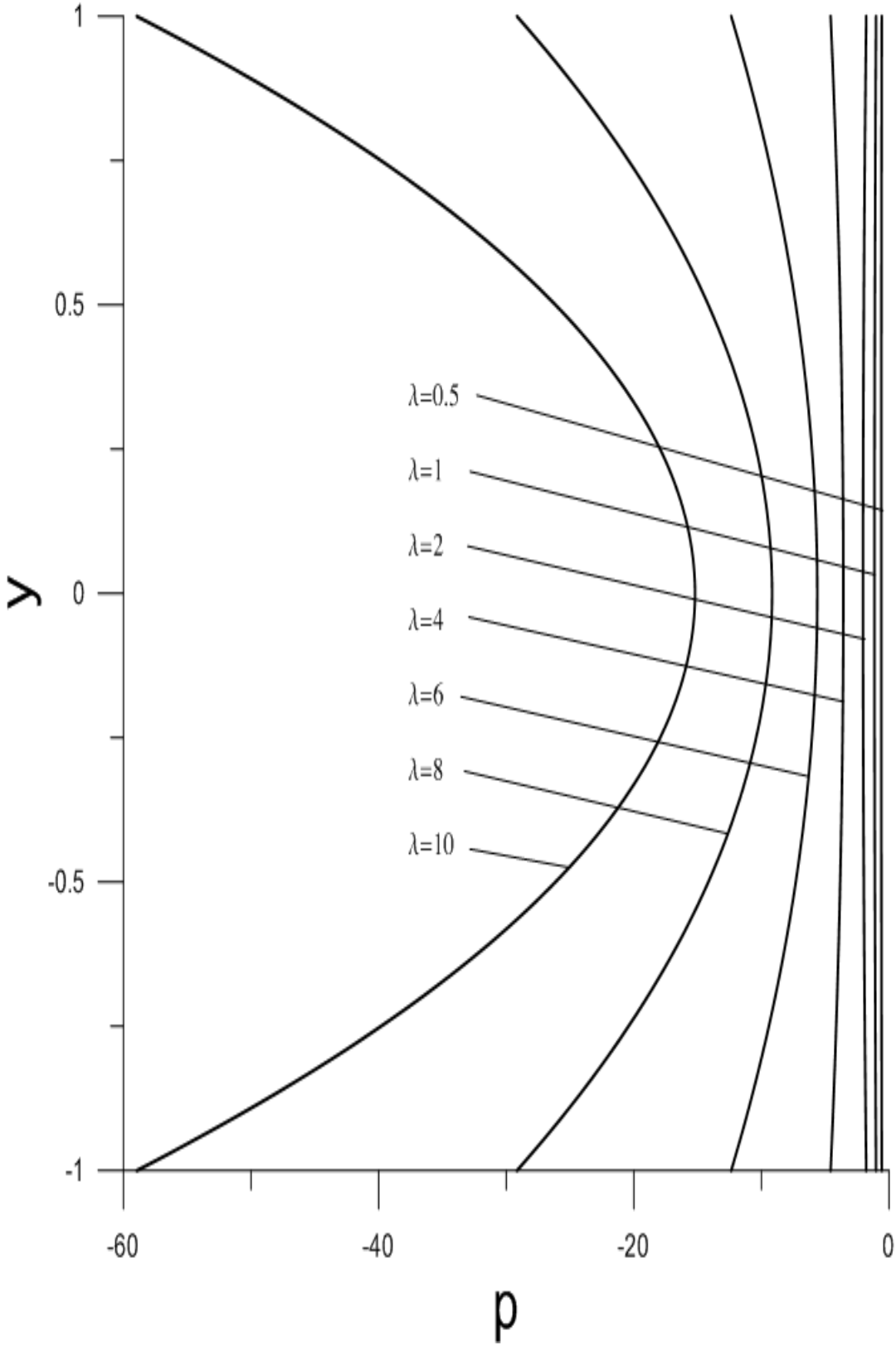
Şekil A.38 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın x = 0 da y ile değişimi.



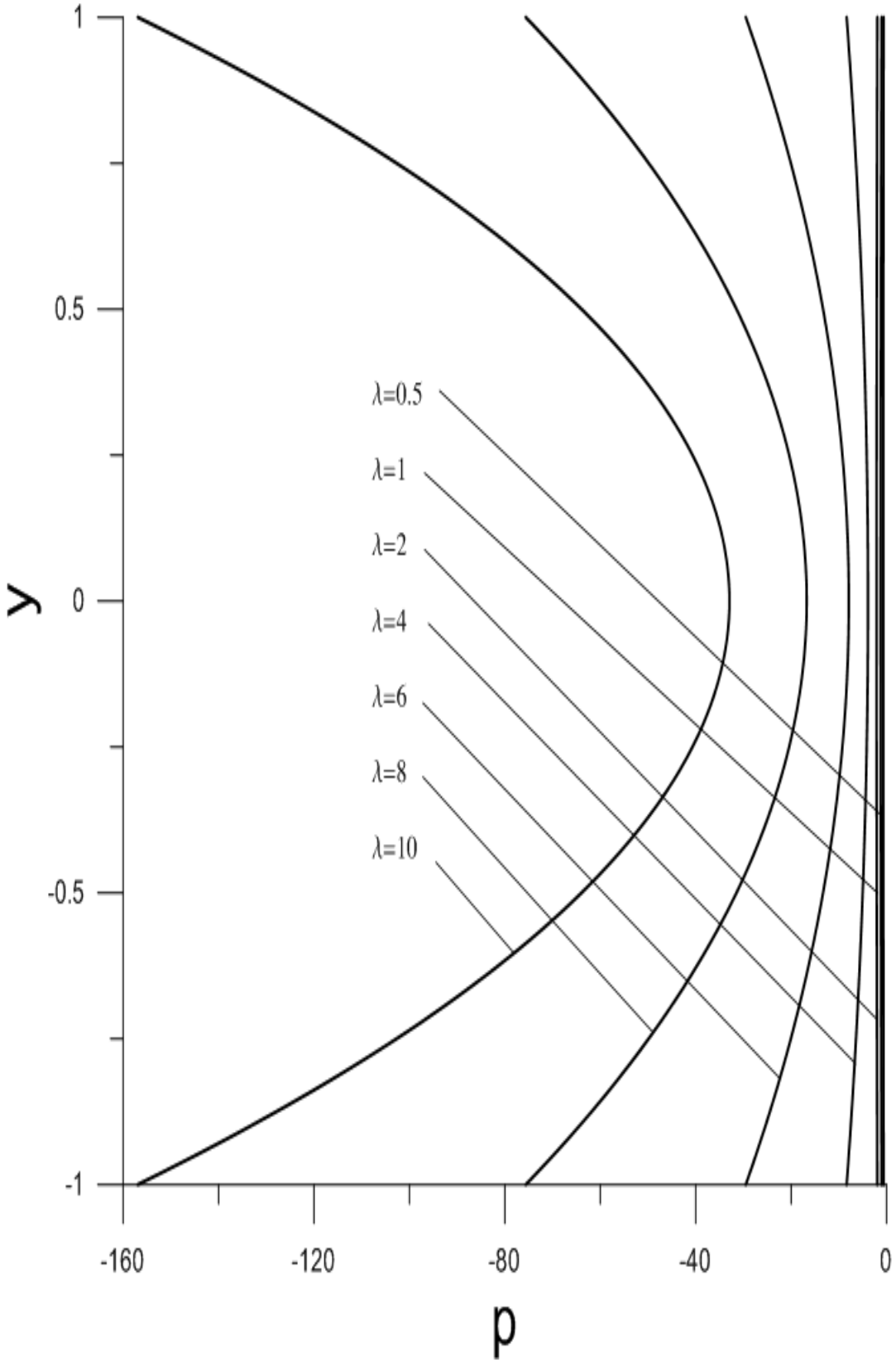
Şekil A.39 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.01$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi.



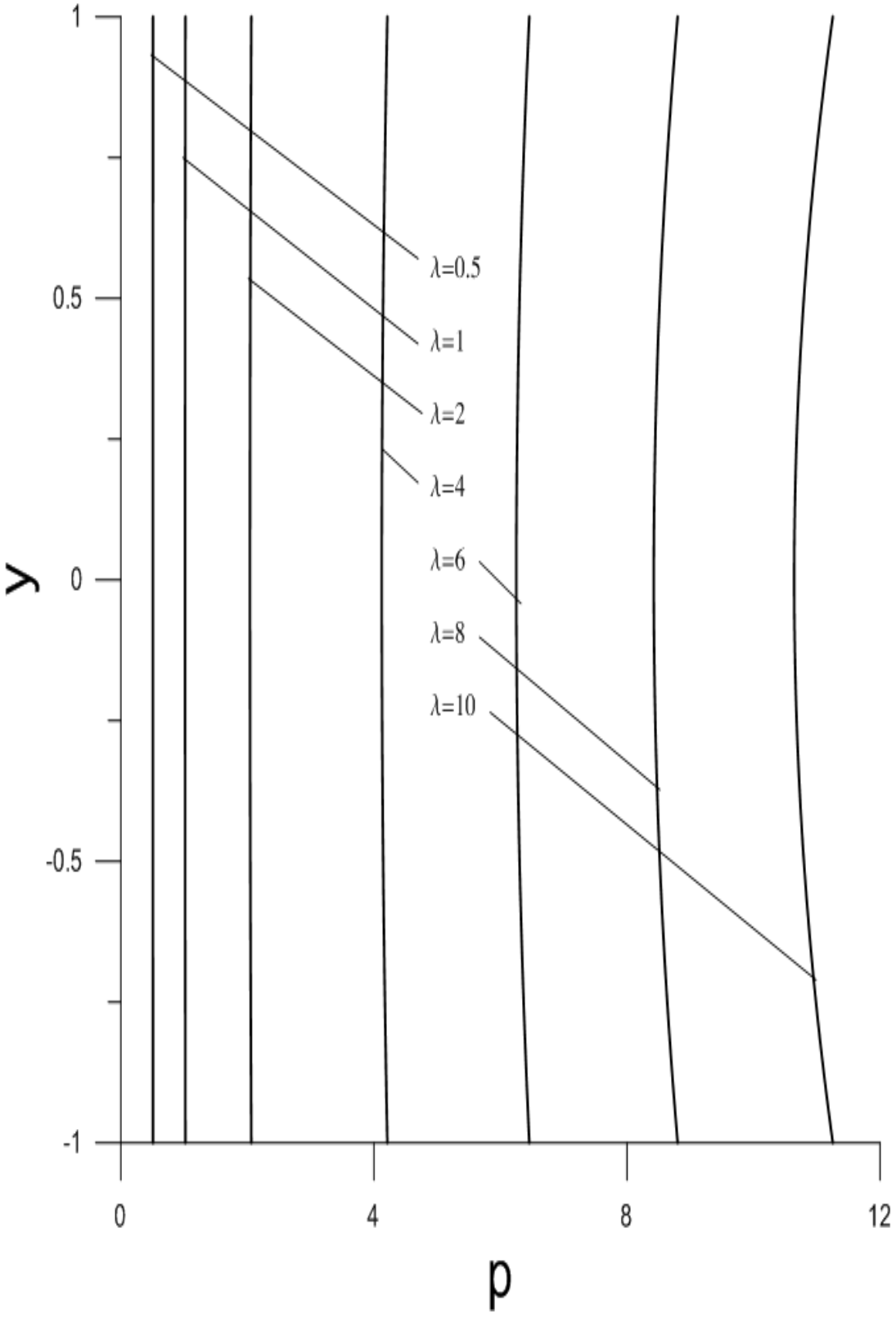
Şekil A.40 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi.



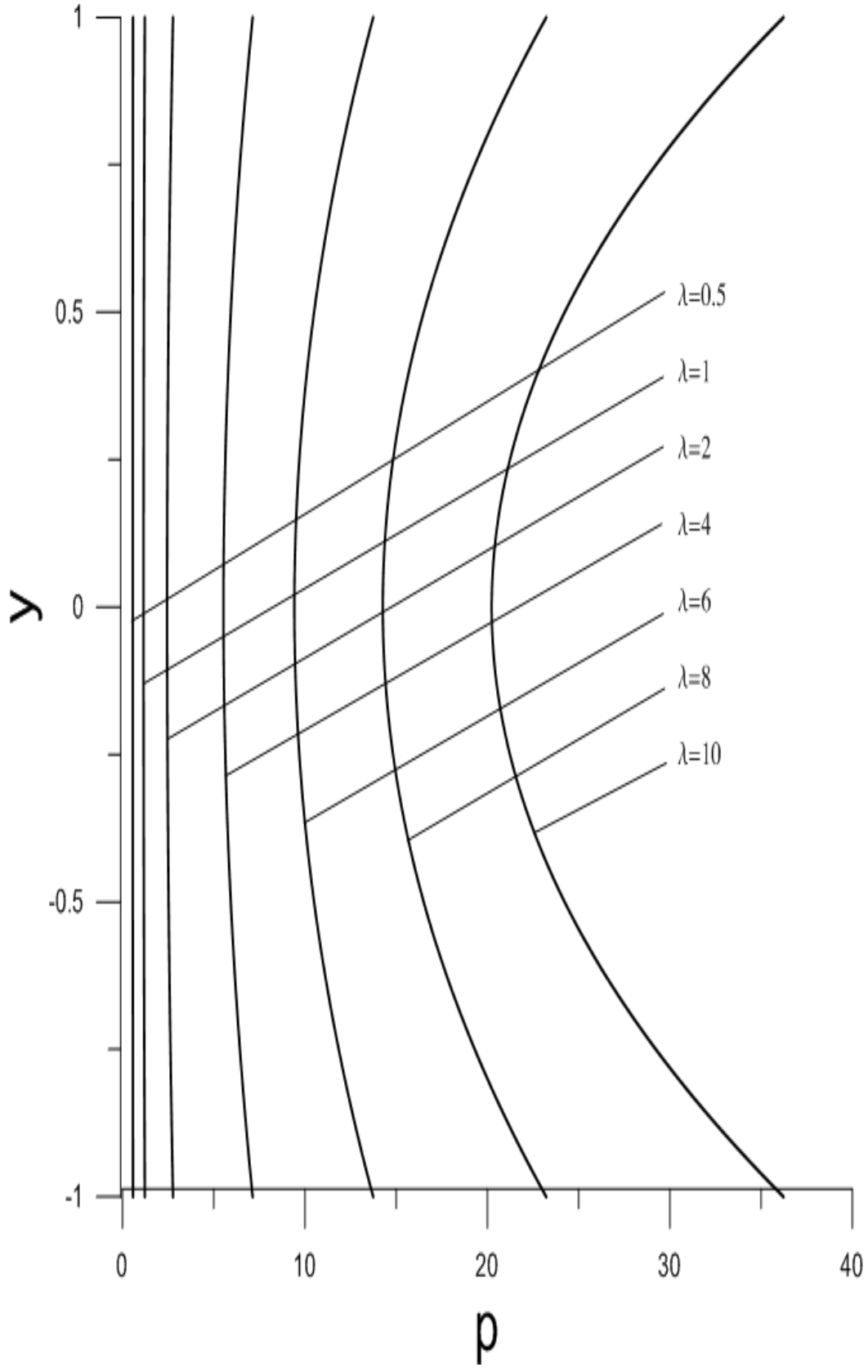
Şekil A.41 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi.



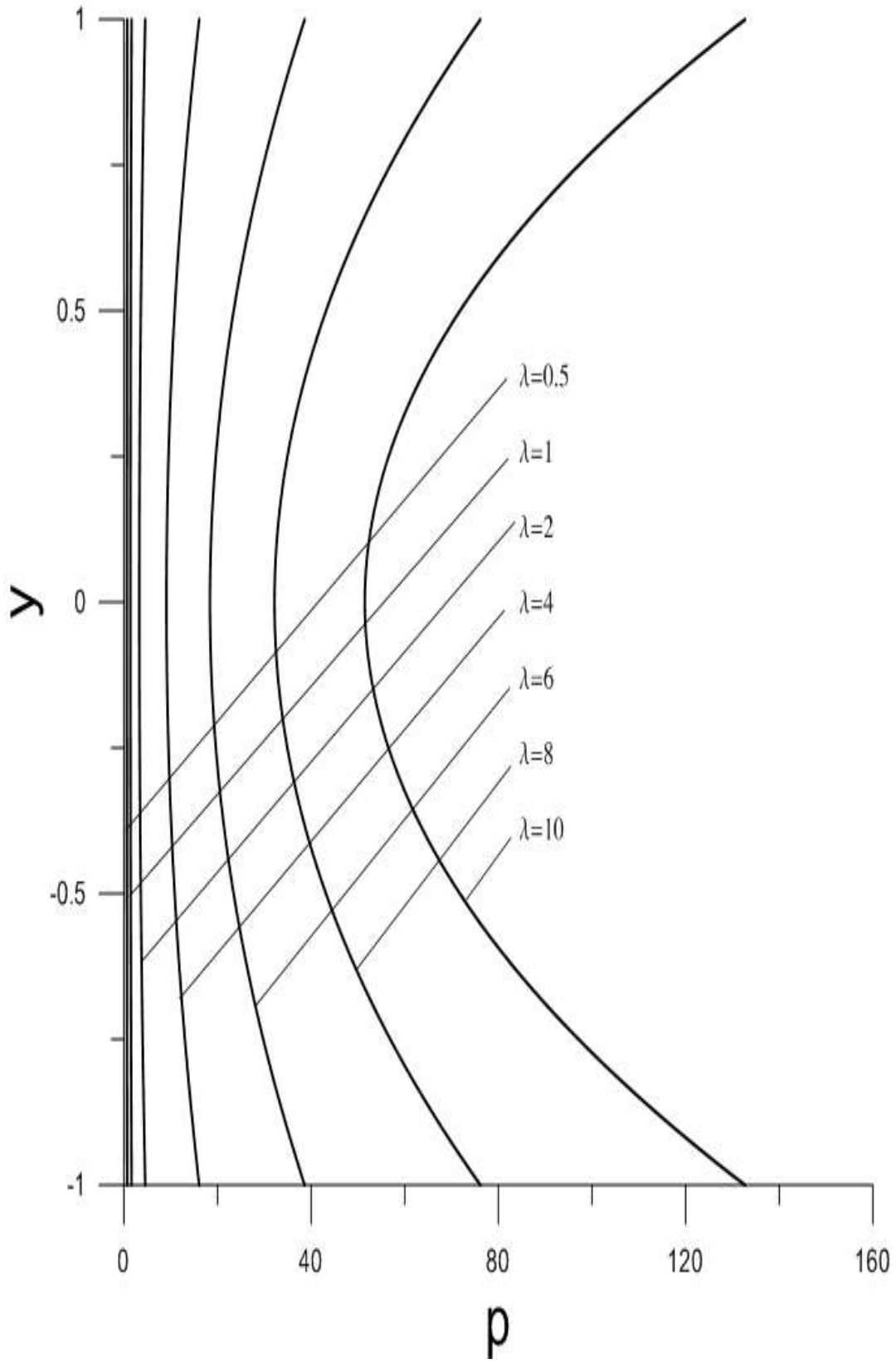
Şekil A.42 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın x = 1 de y ile değişimi.



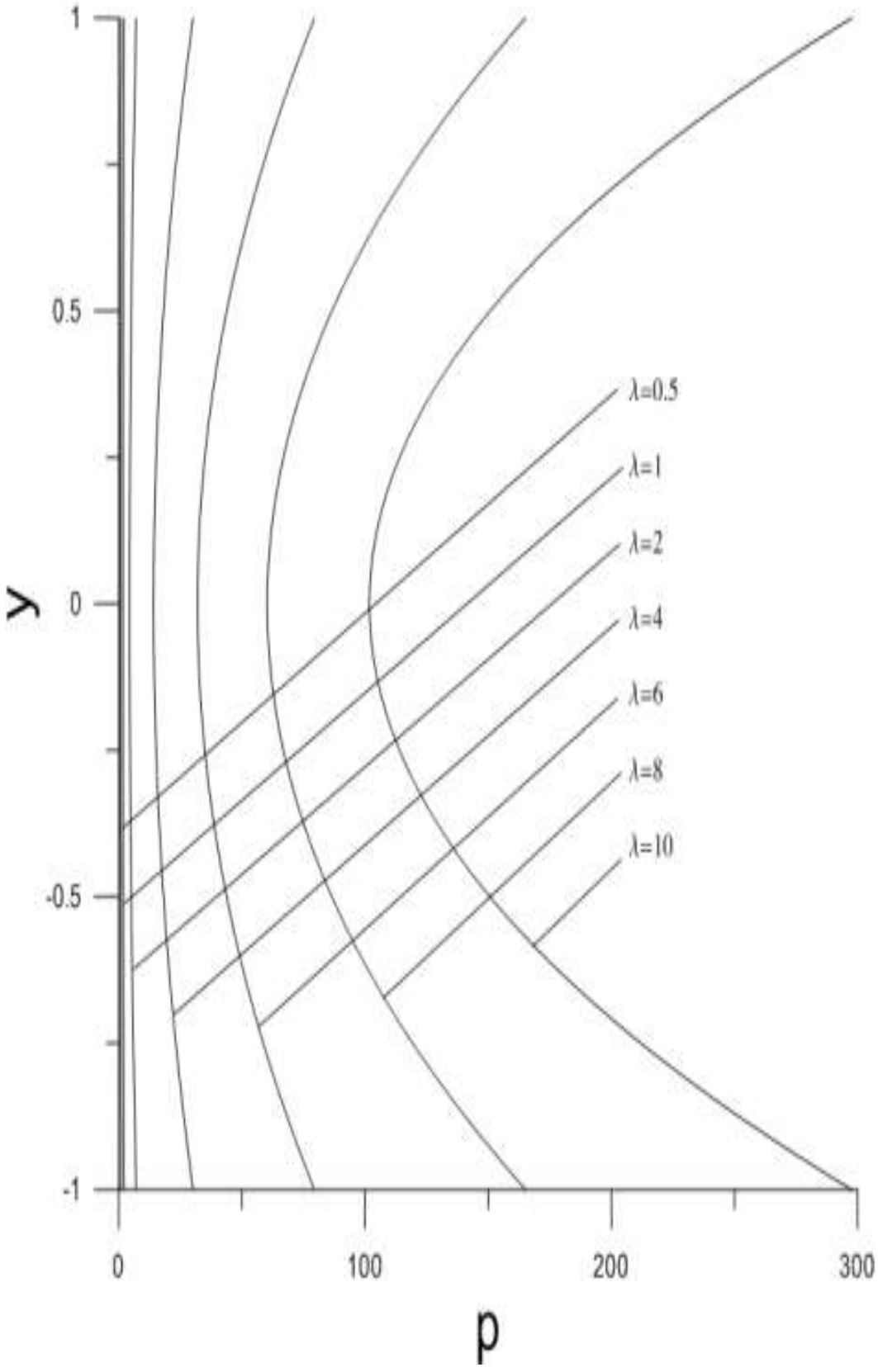
Şekil A.43 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.01$ için basıncın x =- 1 de y ile değişimi.



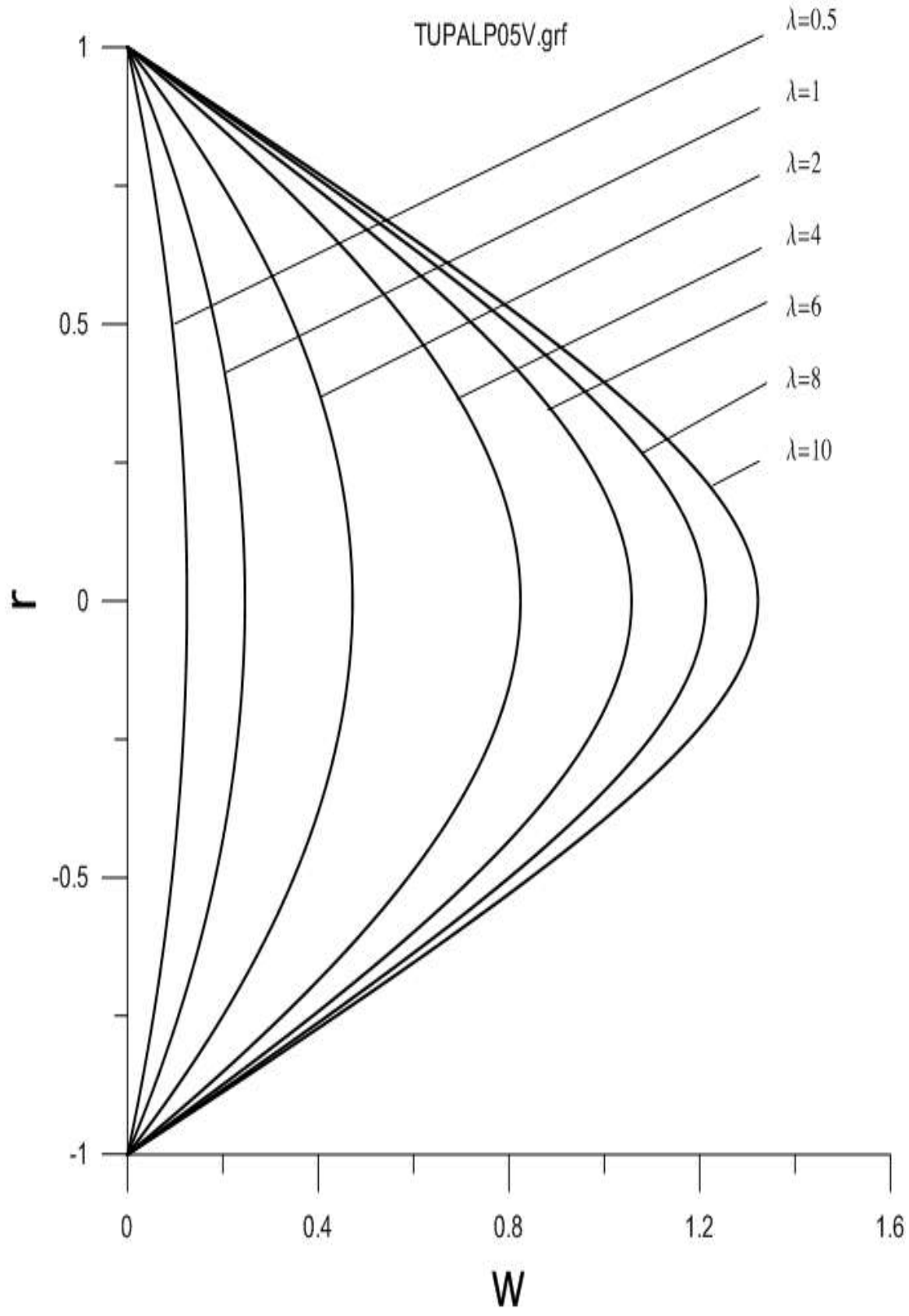
Şekil A.44 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.1$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi.



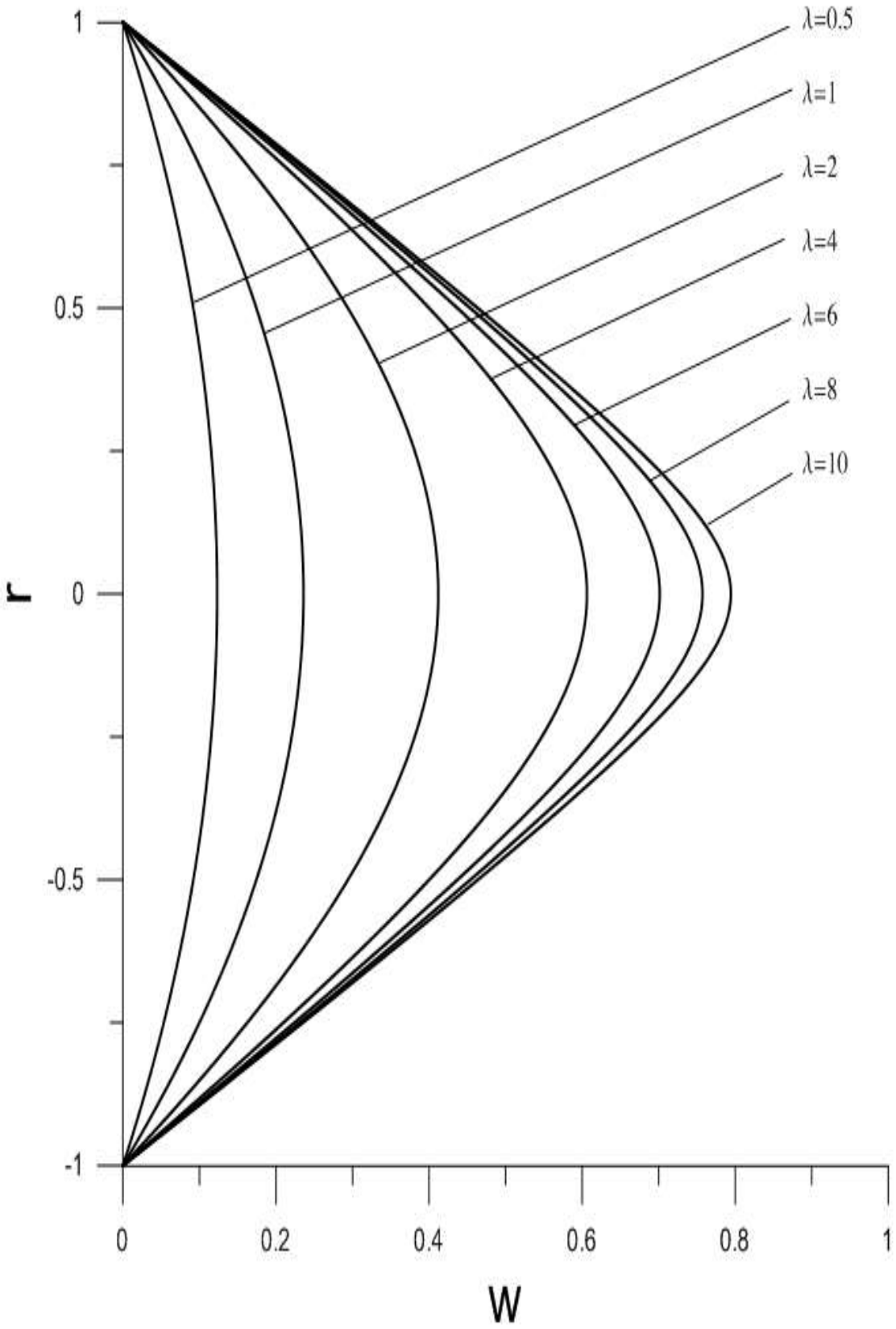
Şekil A.45 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi.



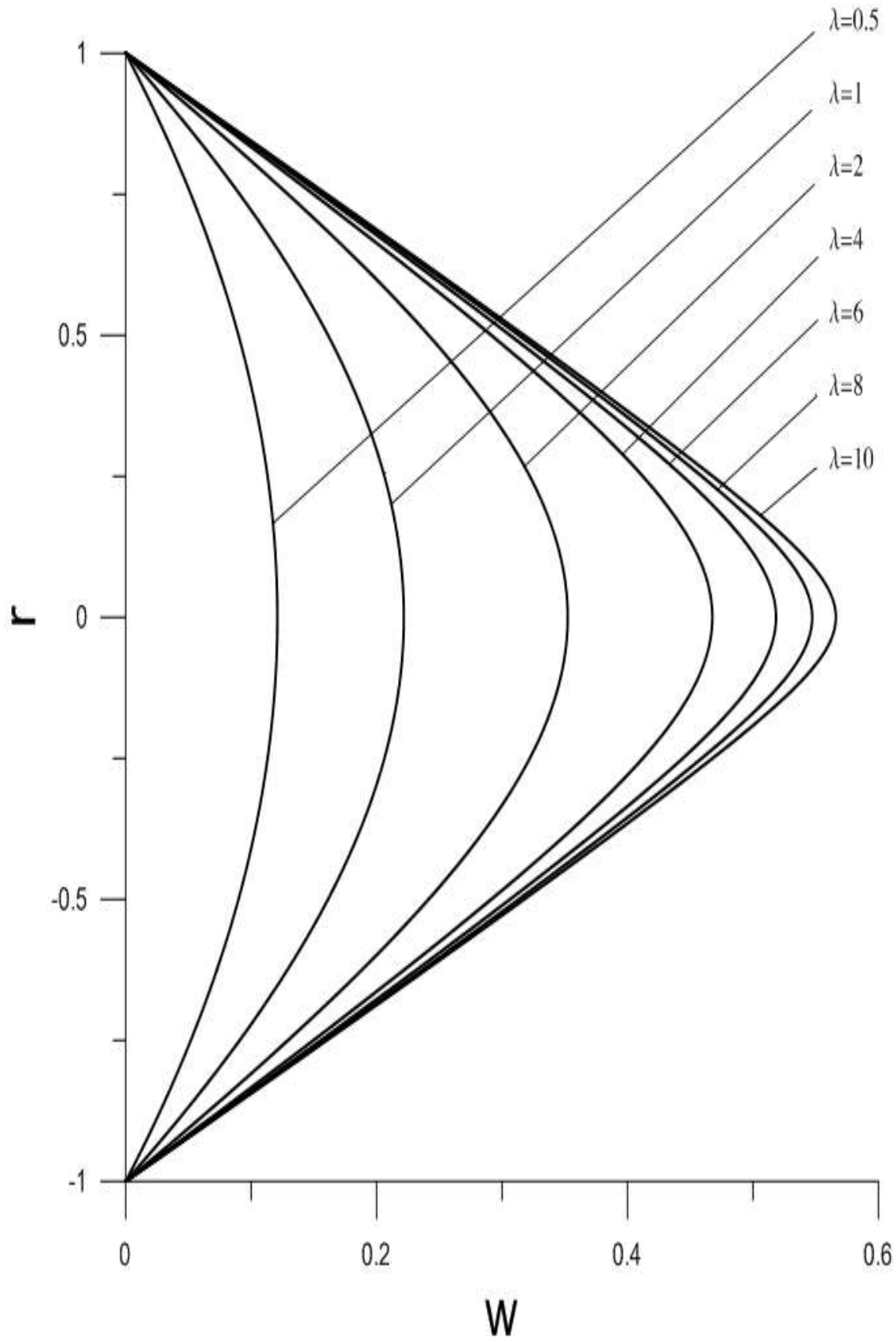
Şekil A.46 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon=0.4$ için basıncın x = - 1 de y ile değişimi.



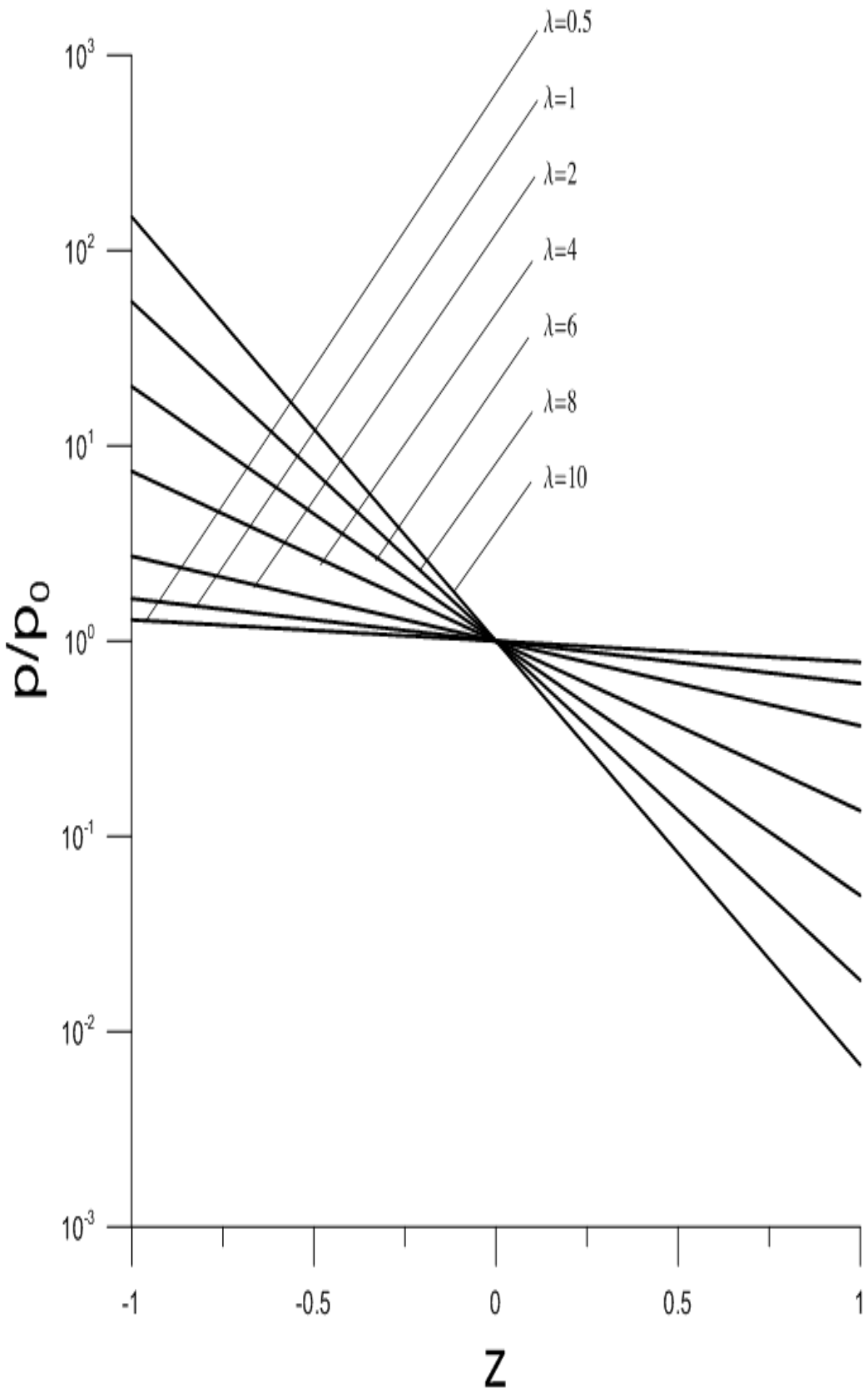
Şekil A.47 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0{,}5$ için hızın r ile değişimi.



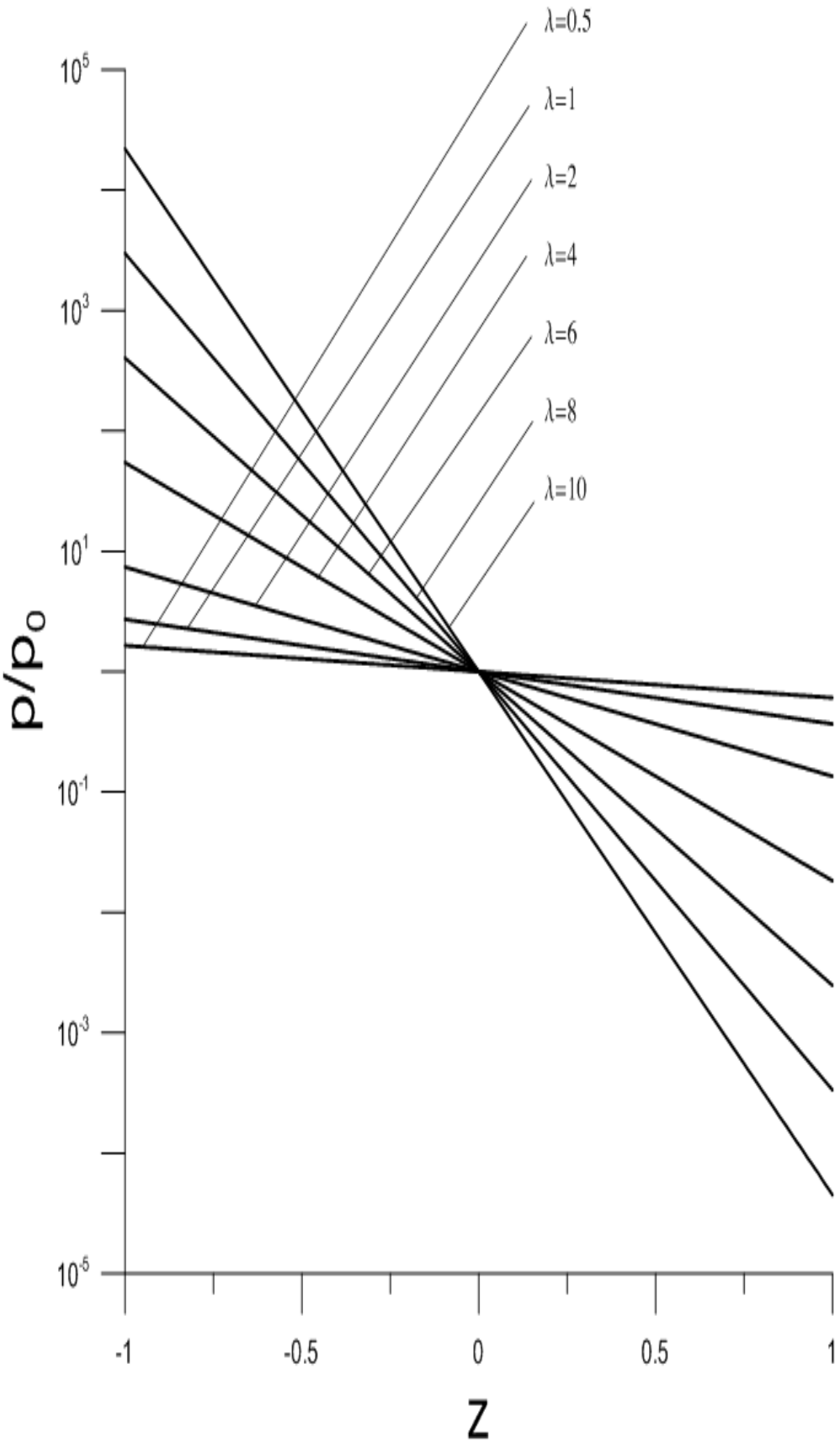
Şekil A.48 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için hızın r ile değişimi.



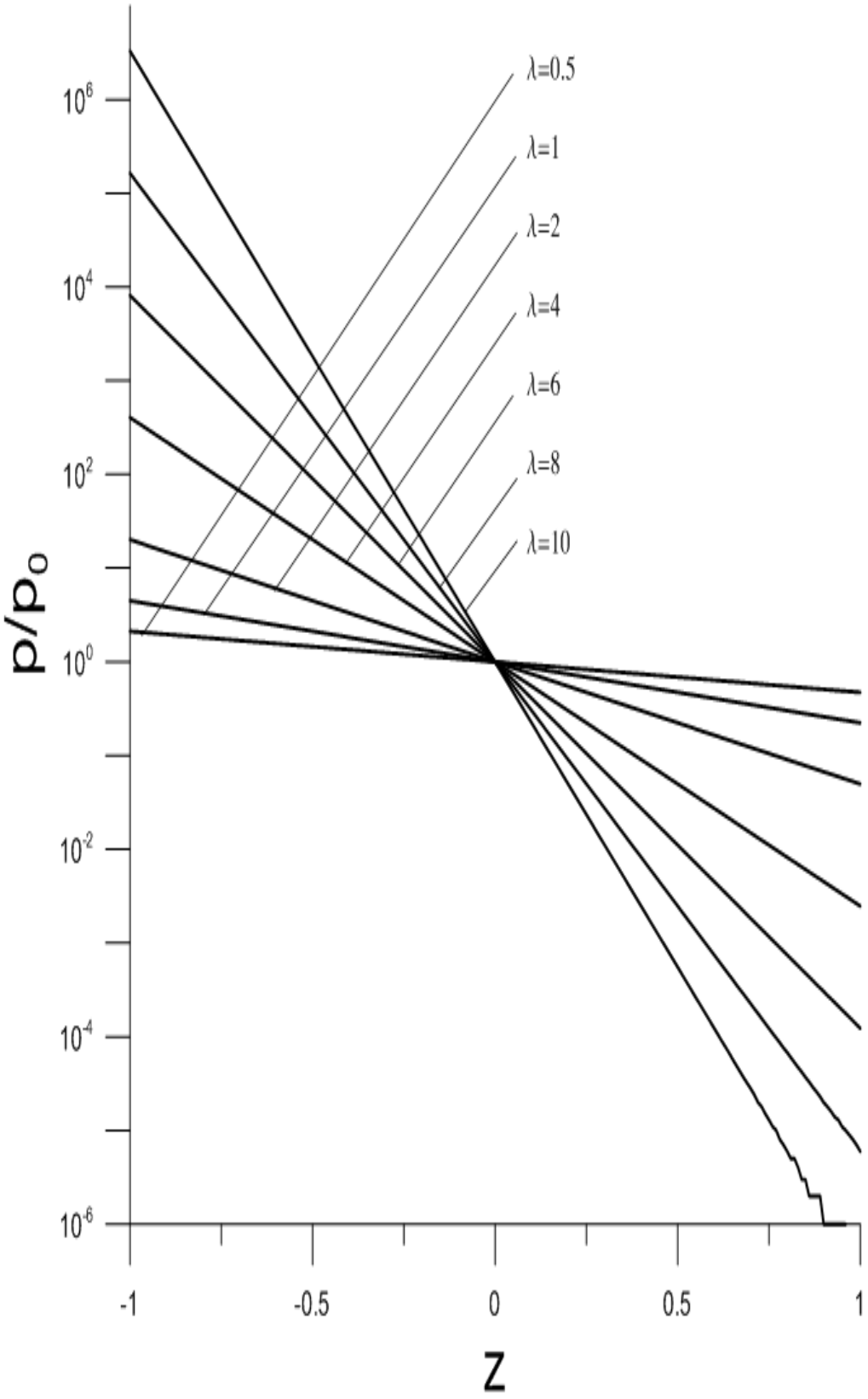
Şekil A.49 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için hızın r ile değişimi.



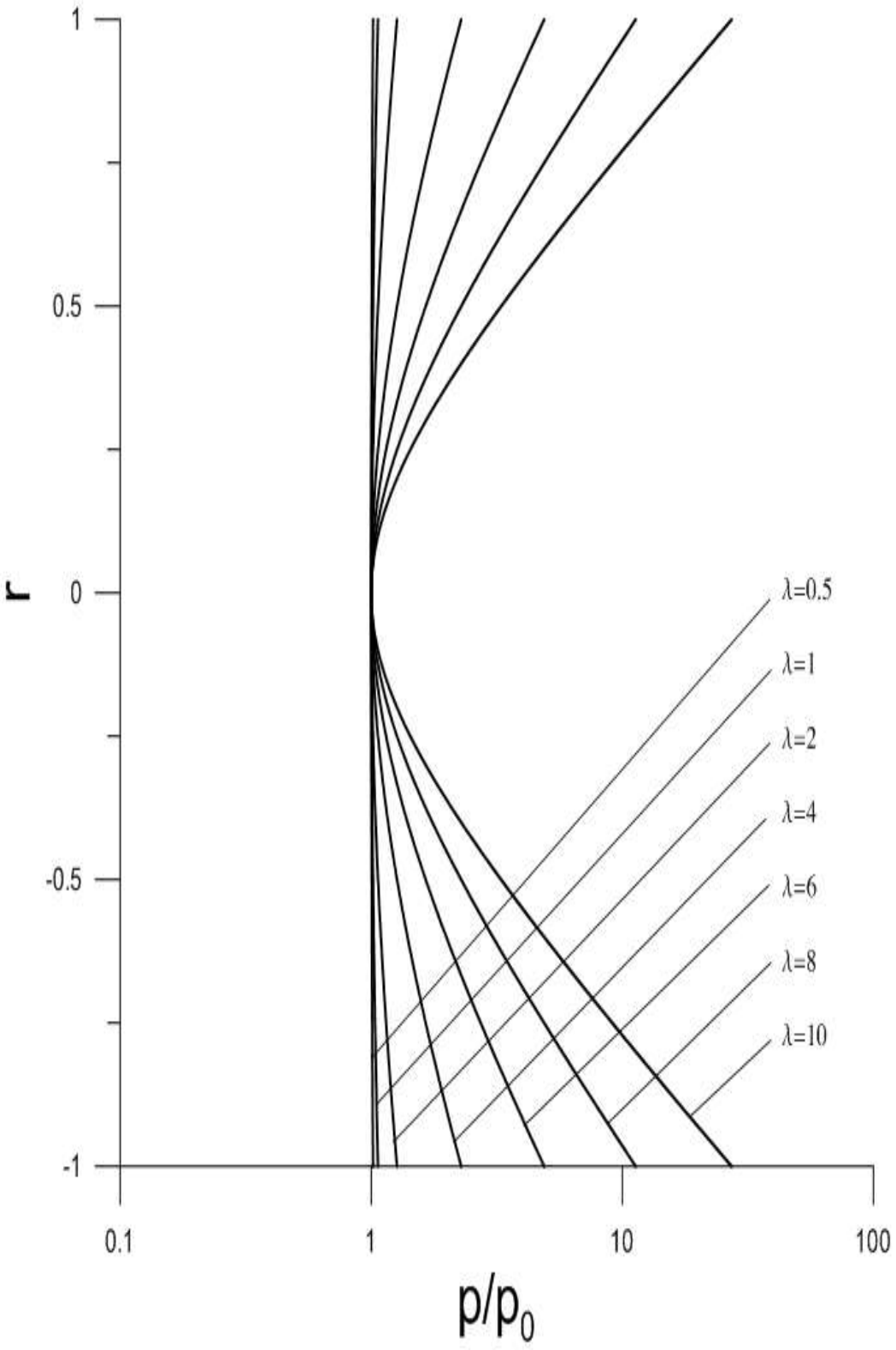
Şekil A.50 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi.



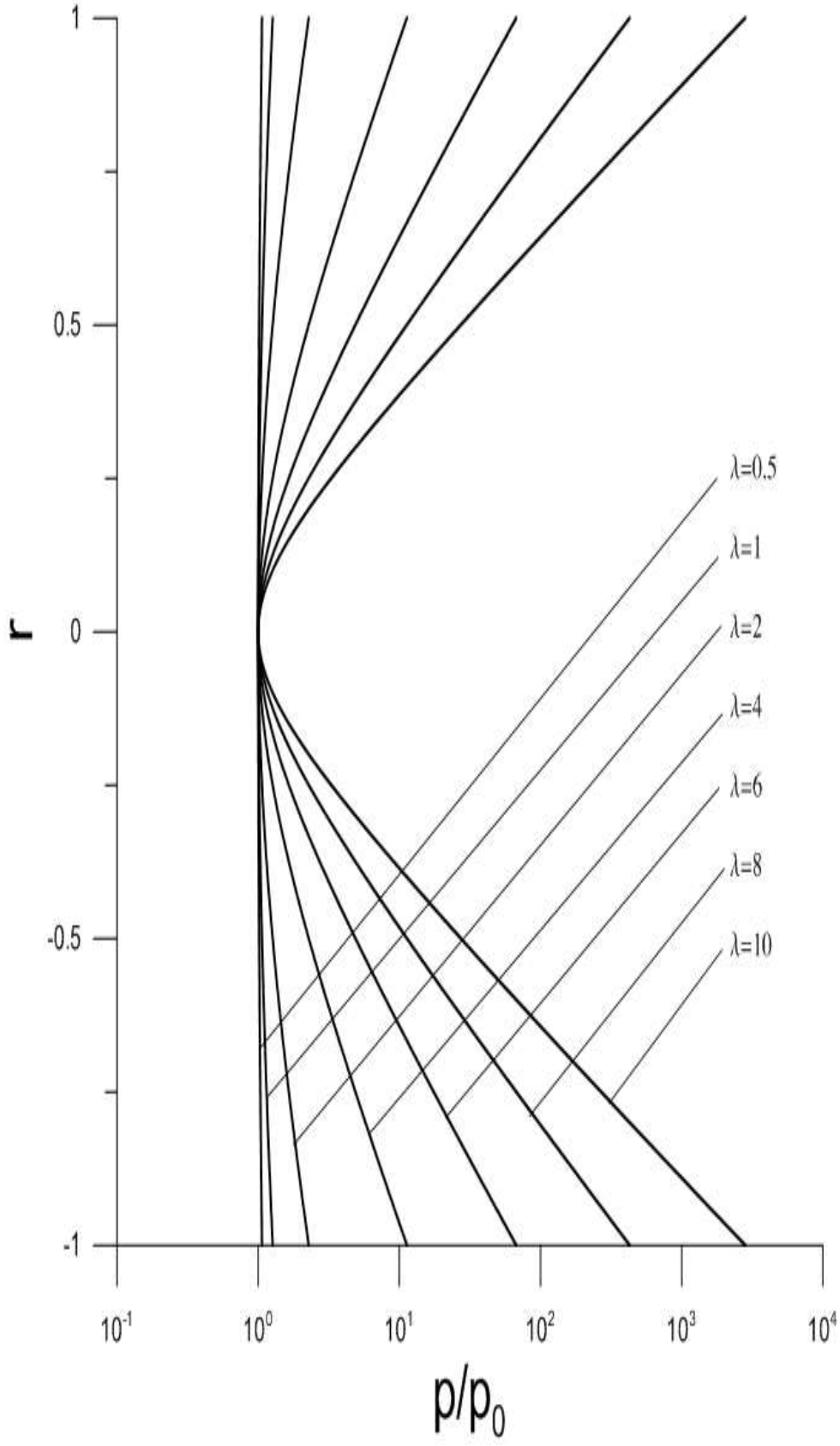
Şekil A.51 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın r =0 da z ile değişimi.



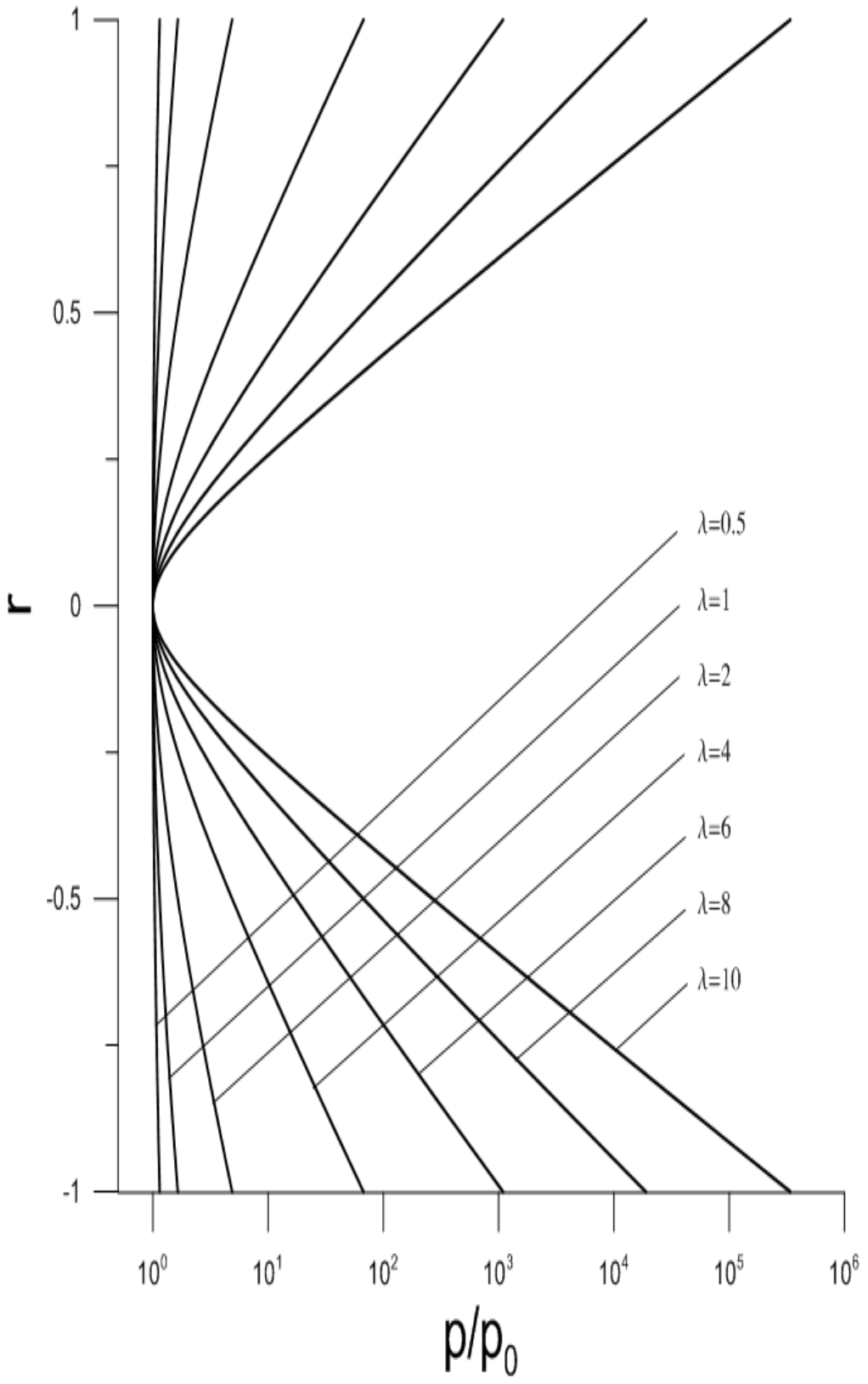
Şekil A.52 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın r =0 da z ile değişimi.



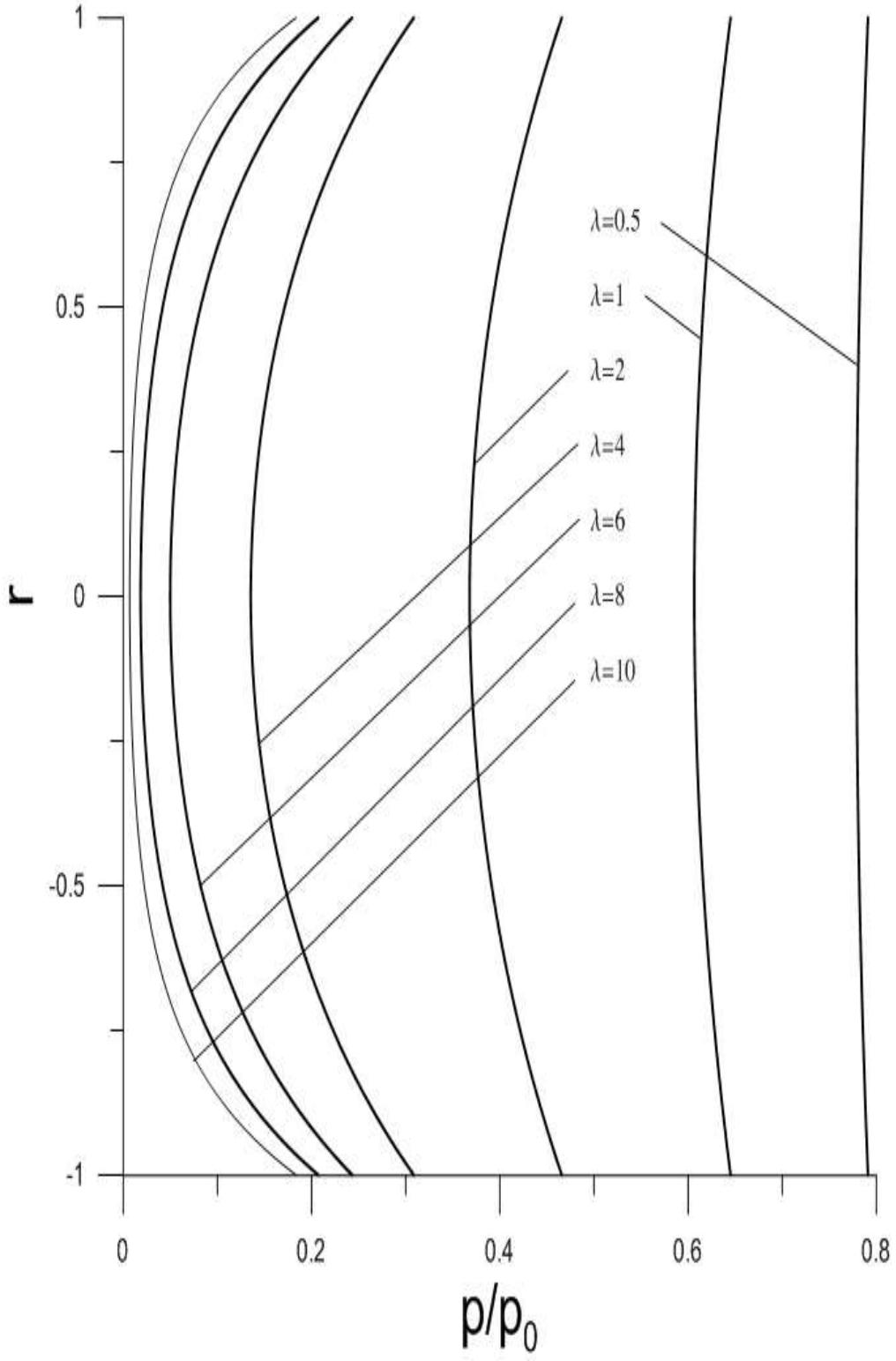
Şekil A.53 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z=0 da r ile değişimi.



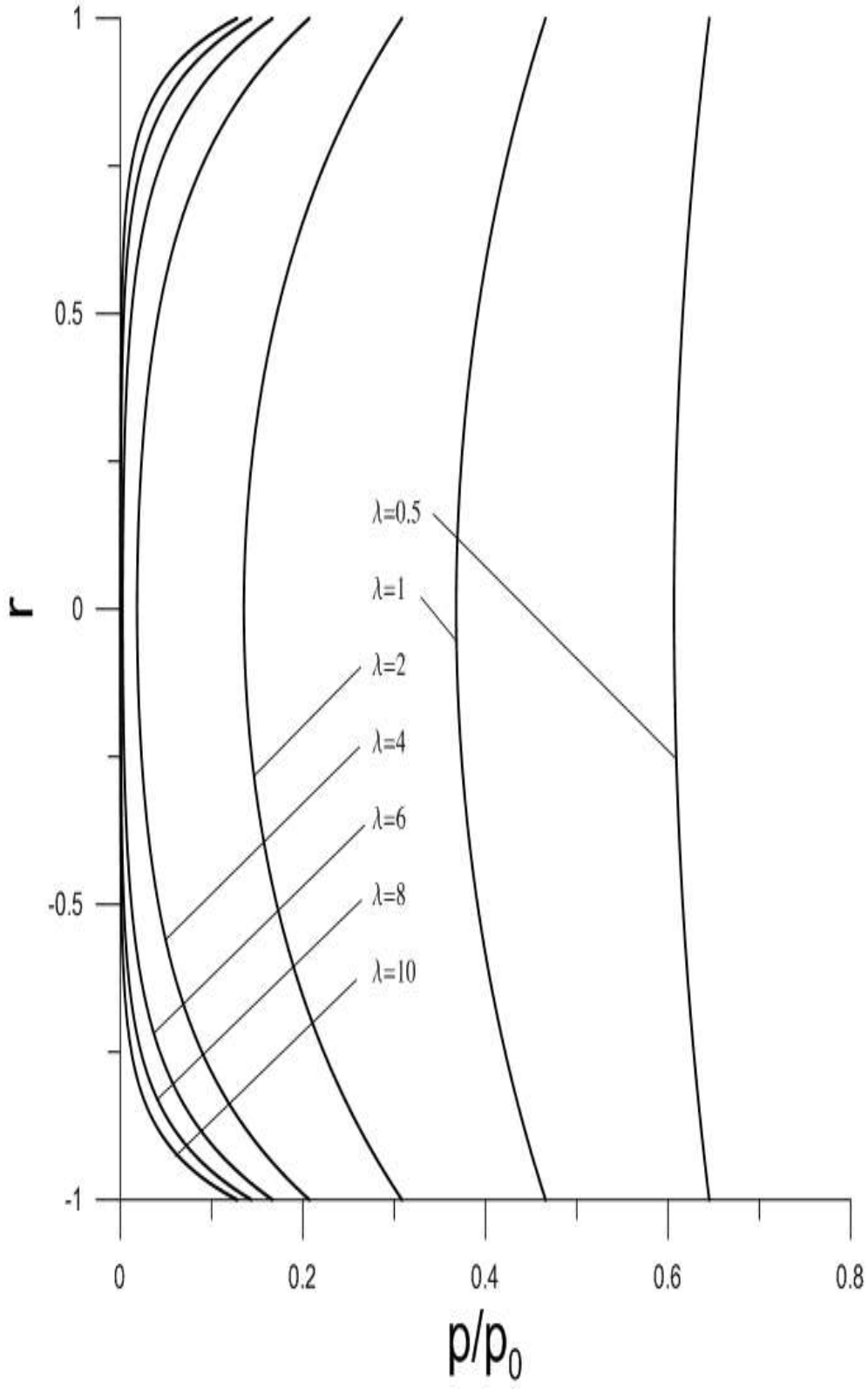
Şekil A.54 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



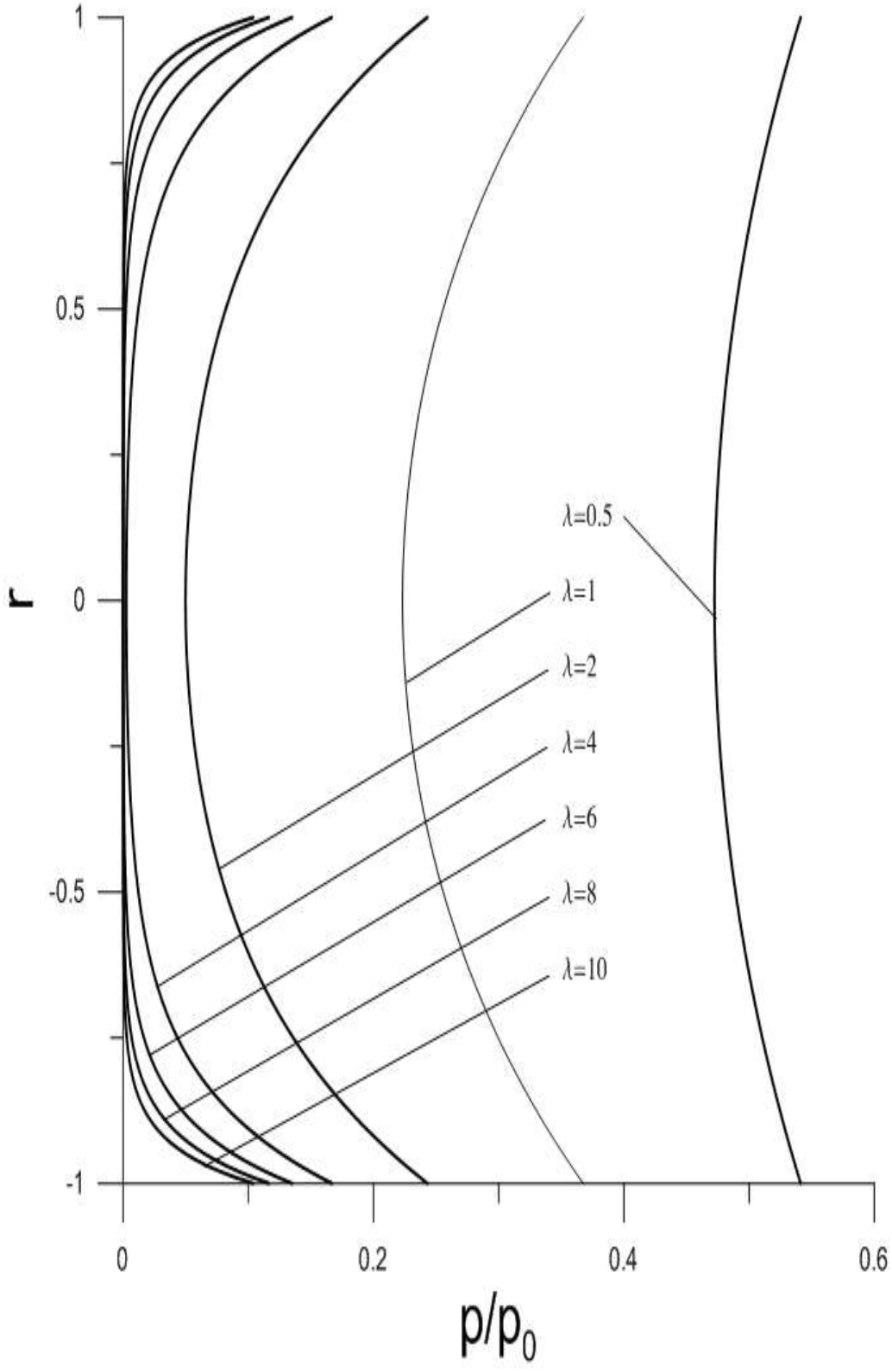
Şekil A.55 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z=0 da r ile değişimi.



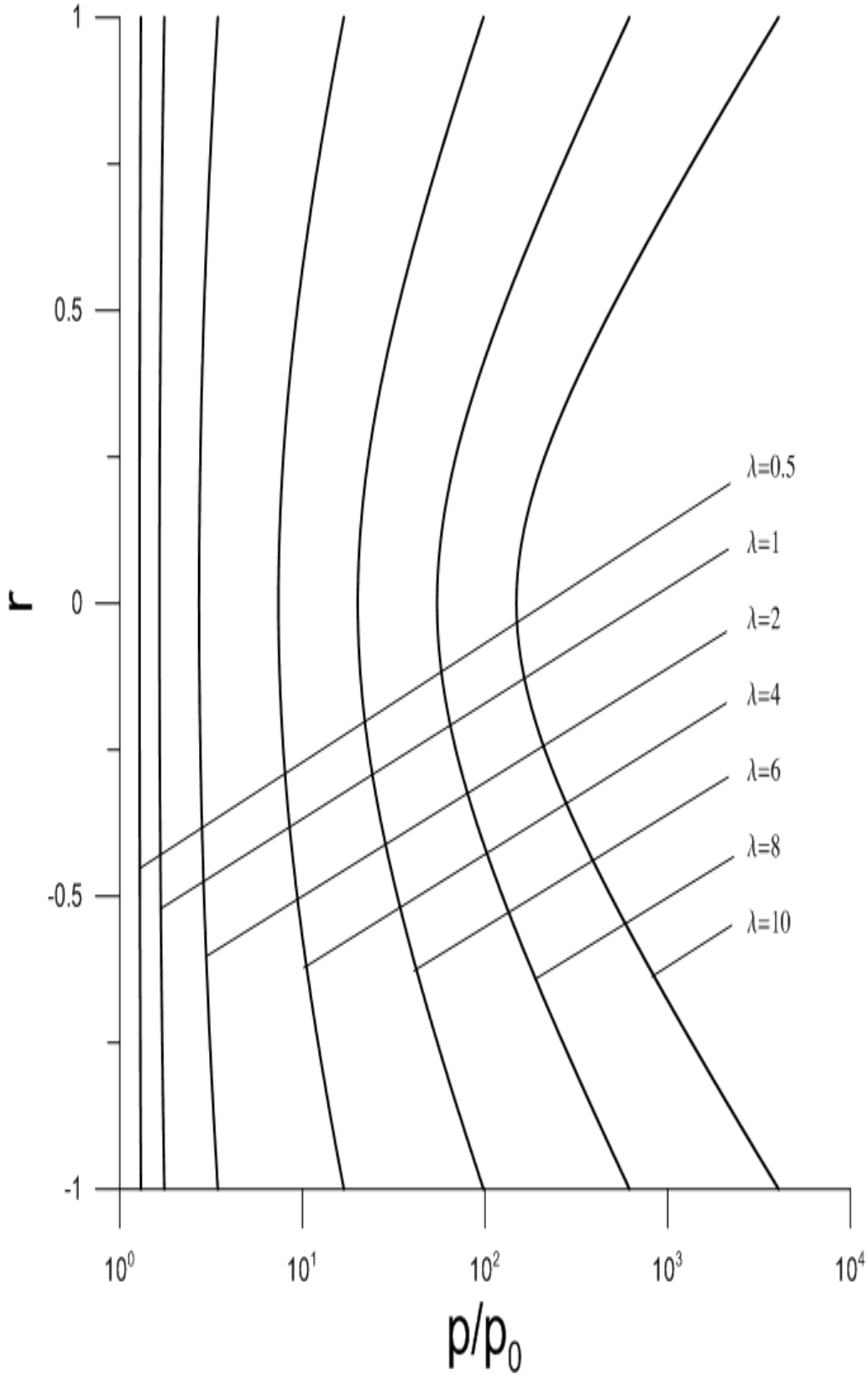
Şekil A.56 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



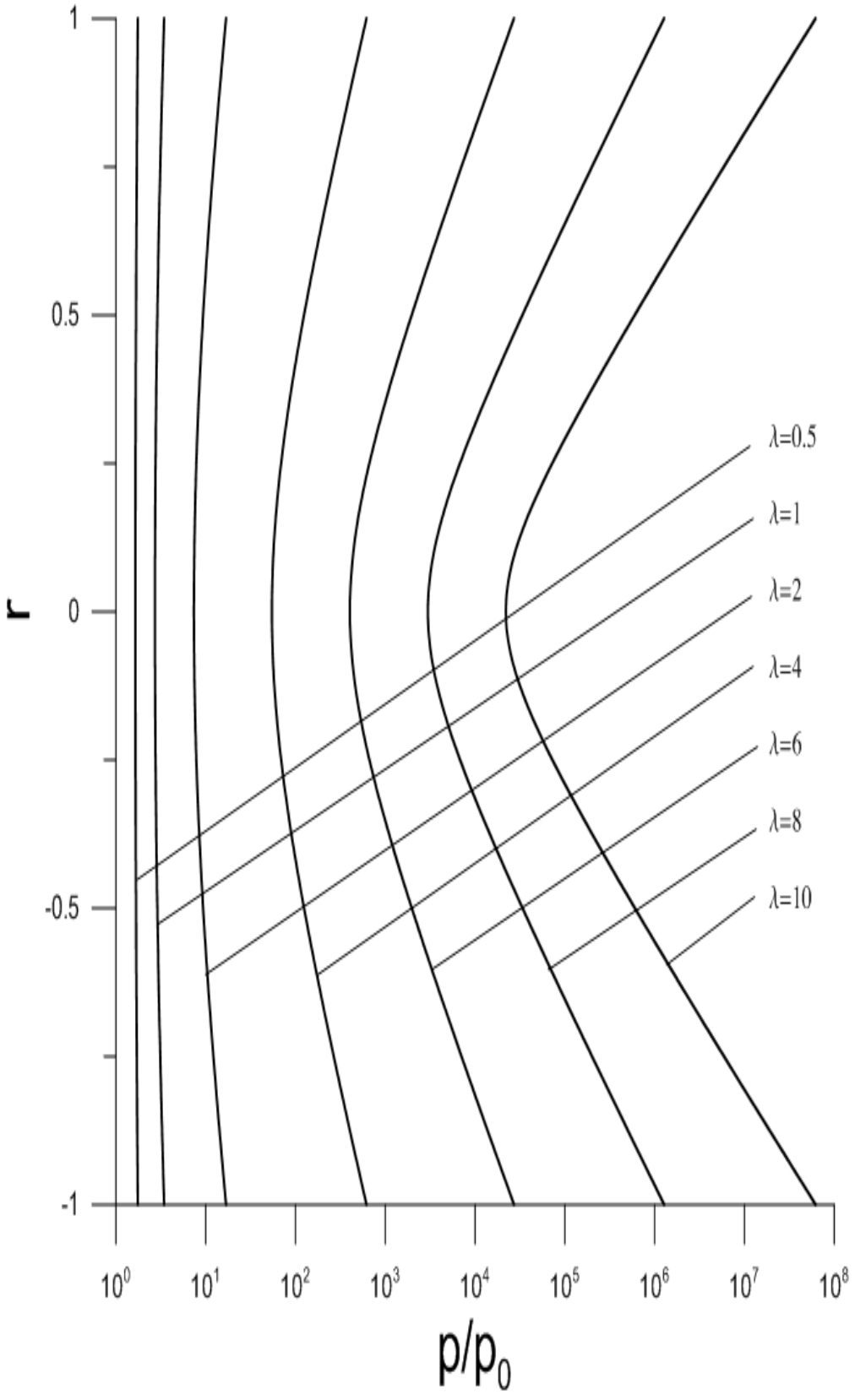
Şekil A.57 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



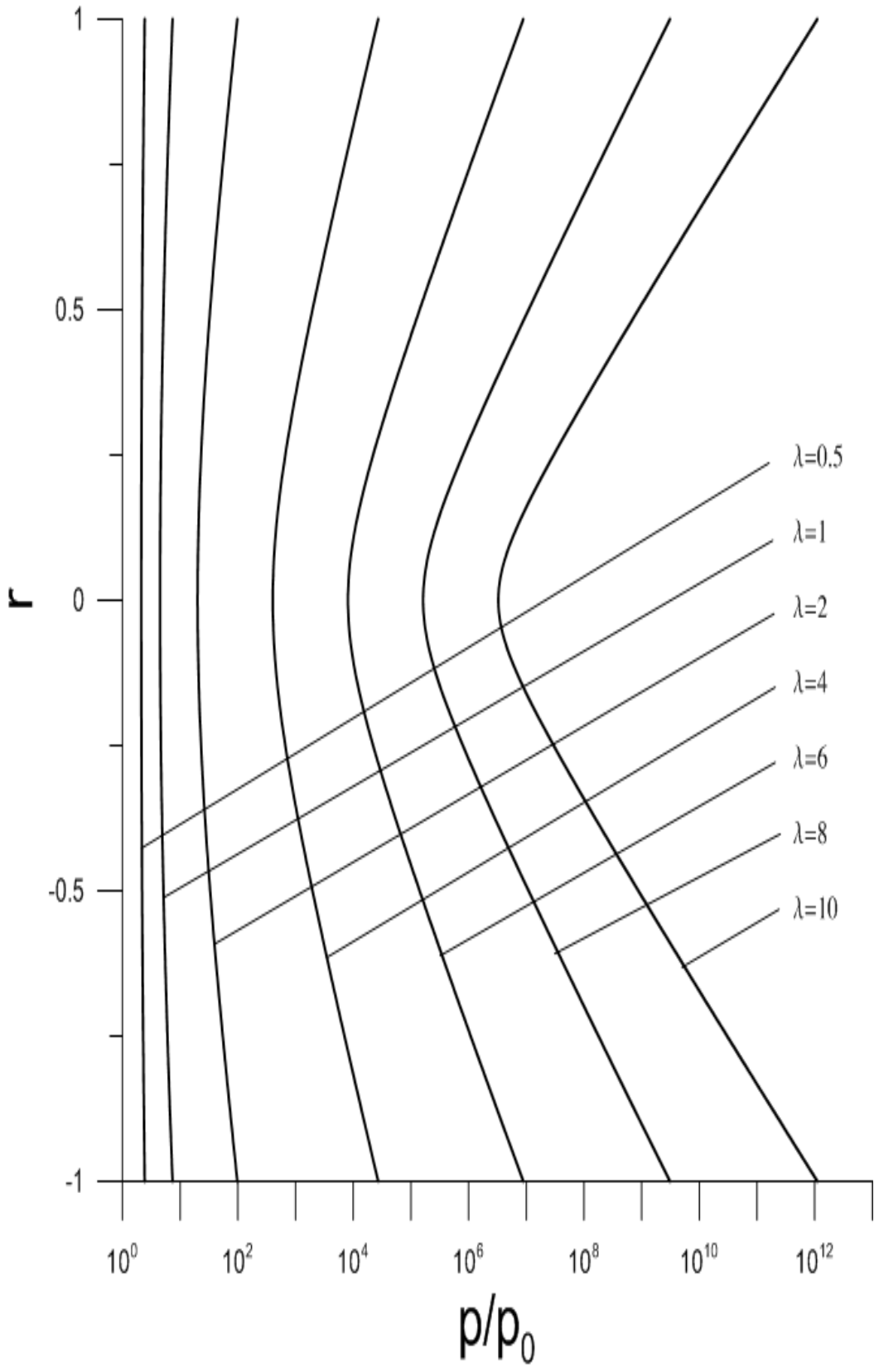
Şekil A.58 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



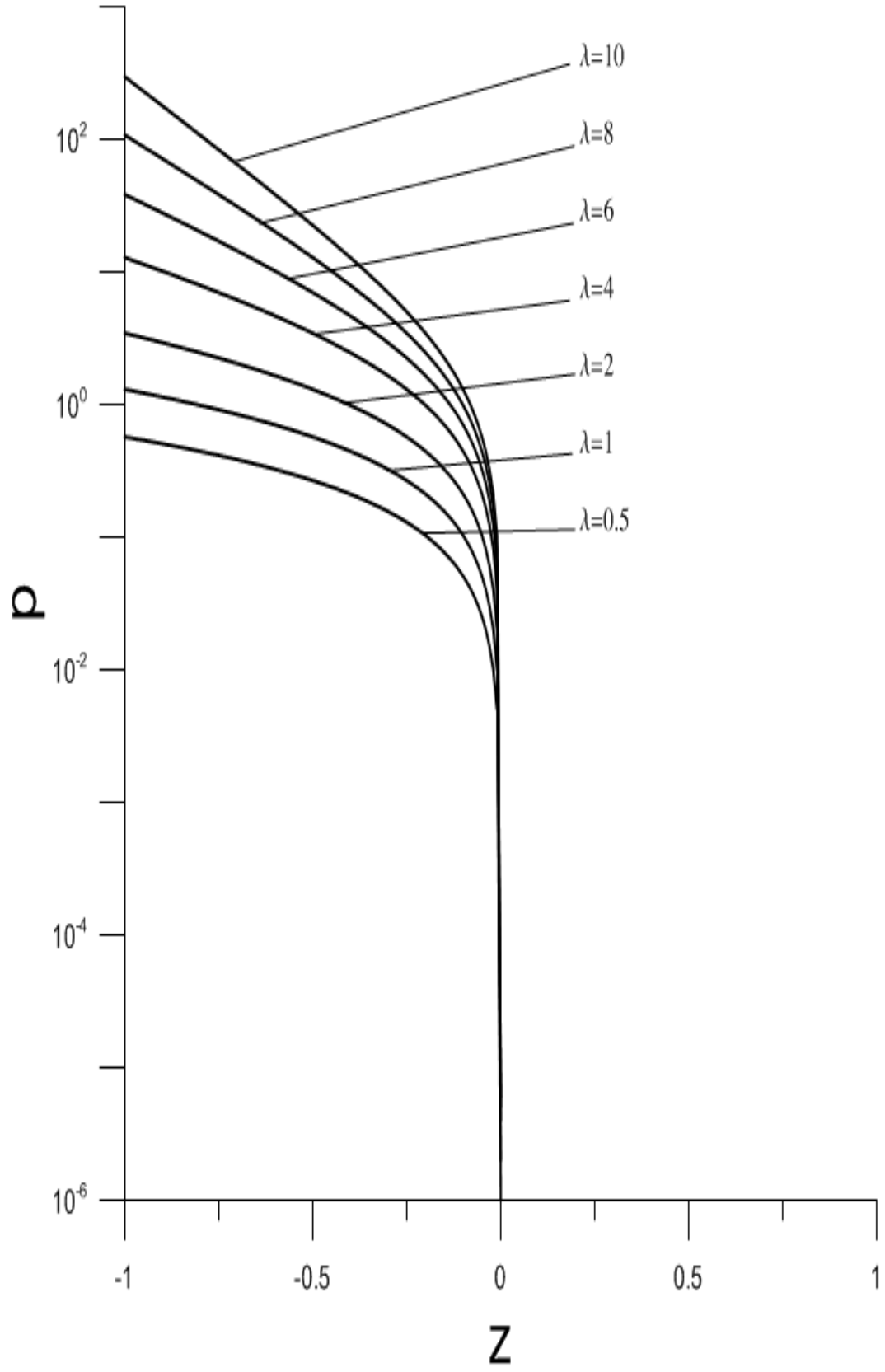
Şekil A.59 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



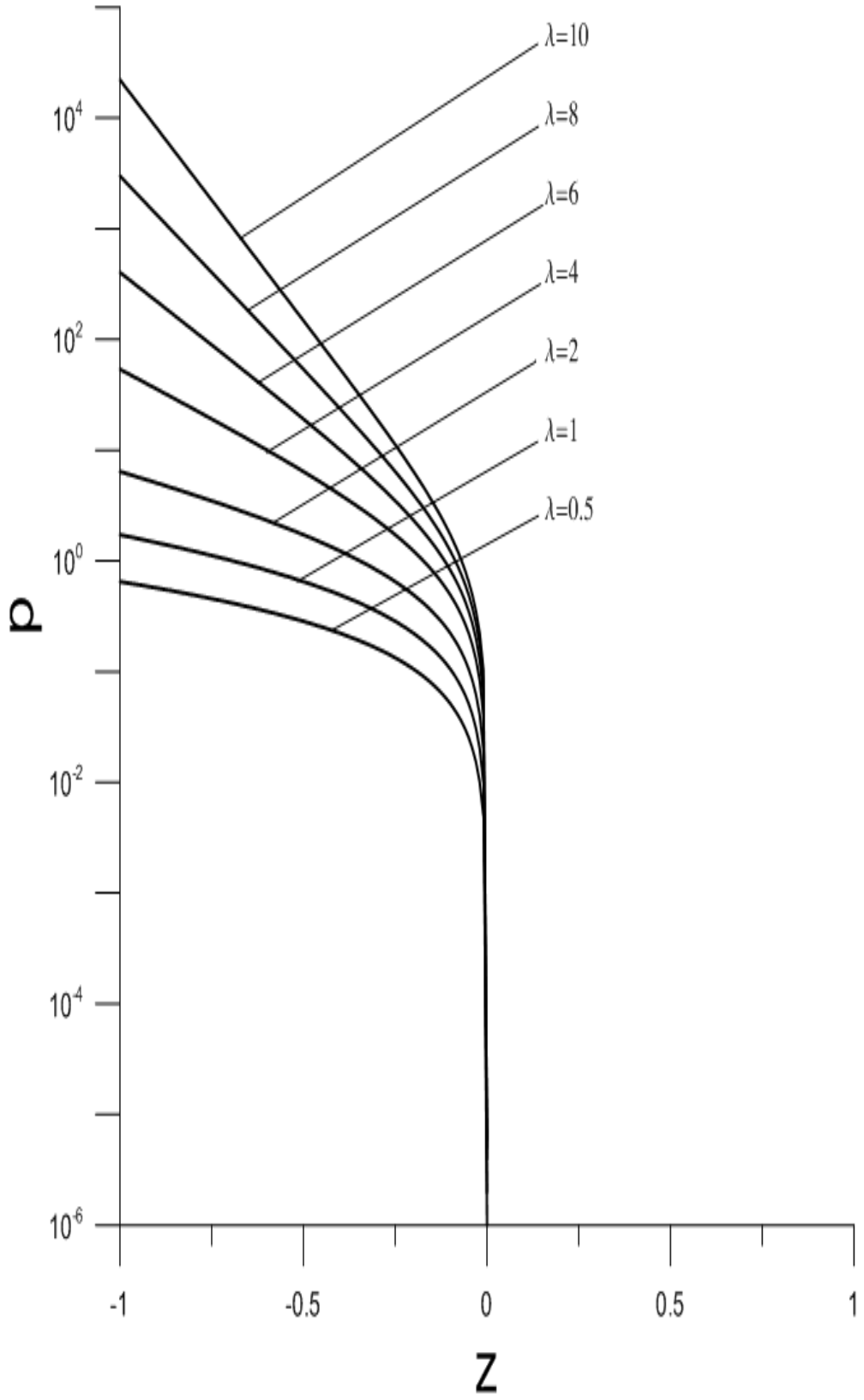
Şekil A.60 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



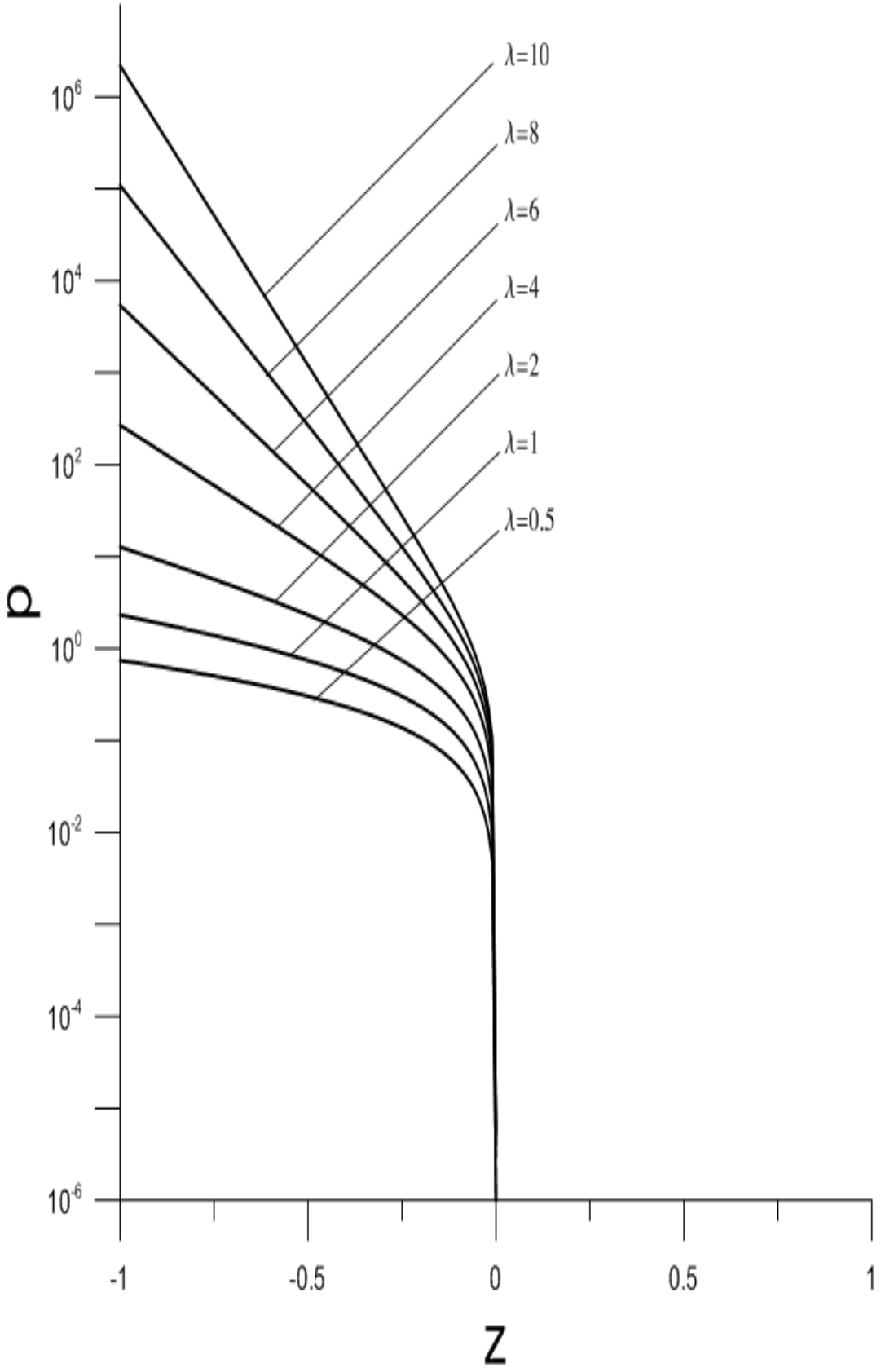
Şekil A.61 : $\mu(p) = \alpha p$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



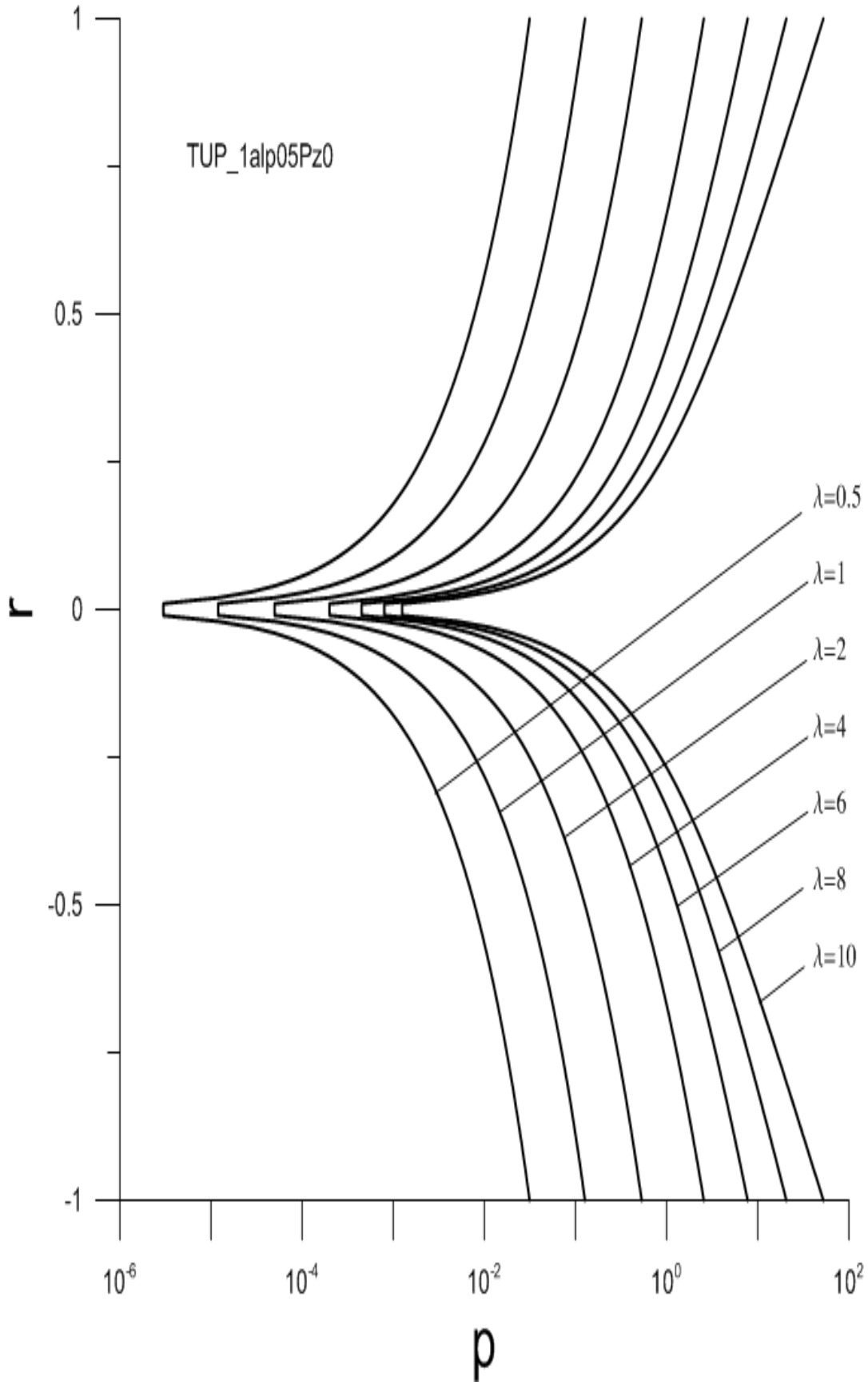
Şekil A.62 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi.



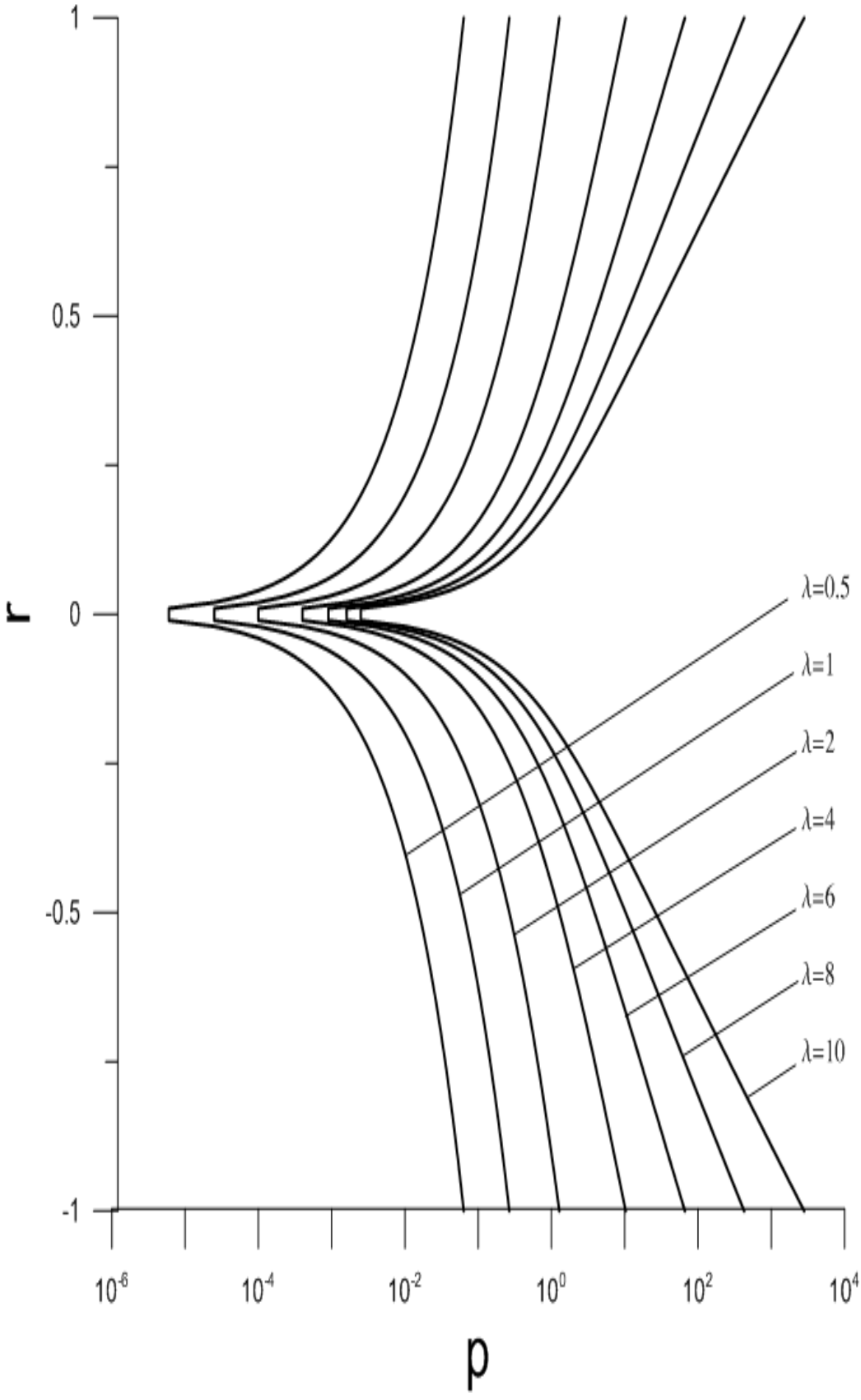
Şekil A.63 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi.



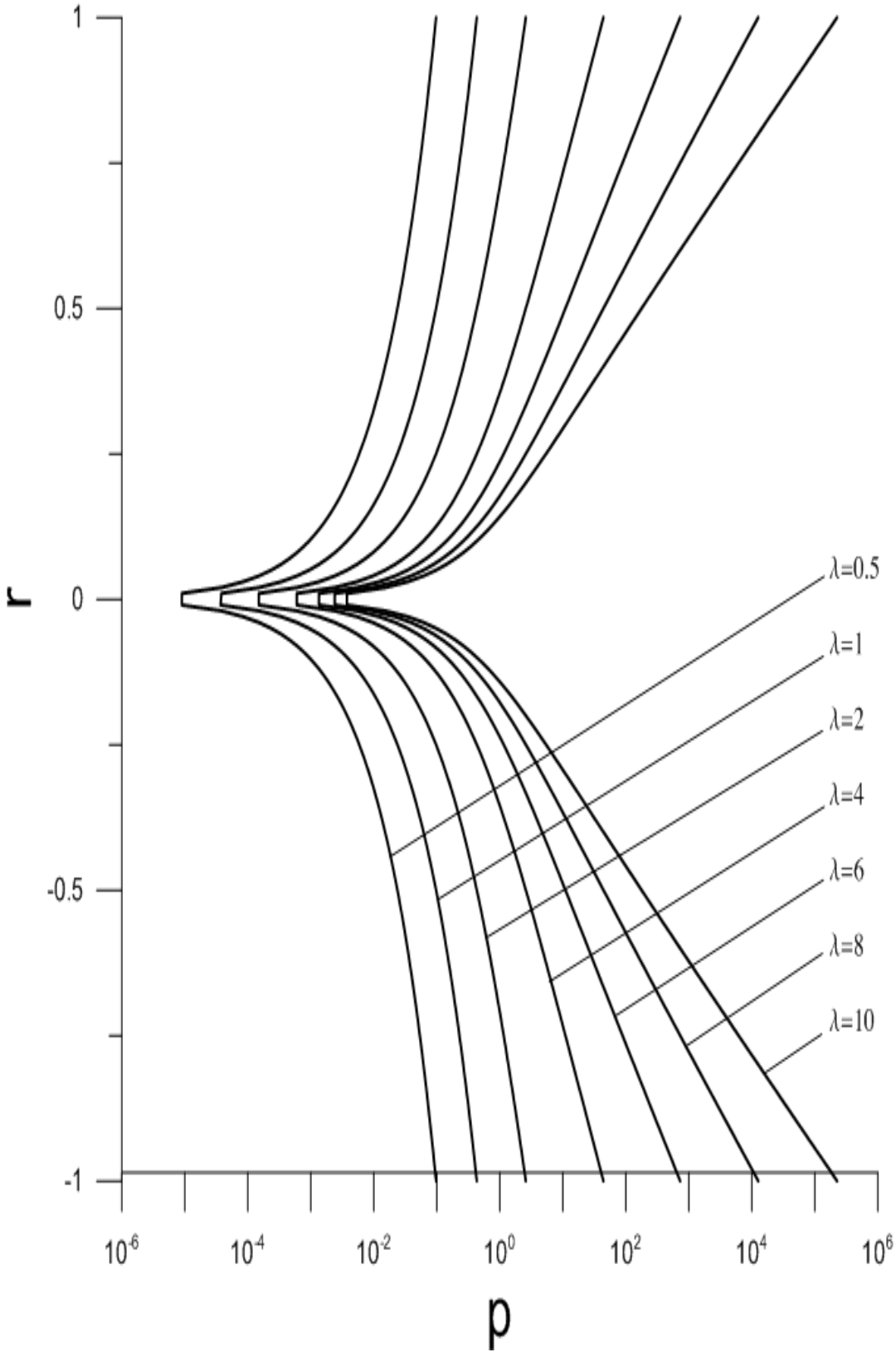
Şekil A.64 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1.5$ için basıncın r = 0 da z ile değişimi.



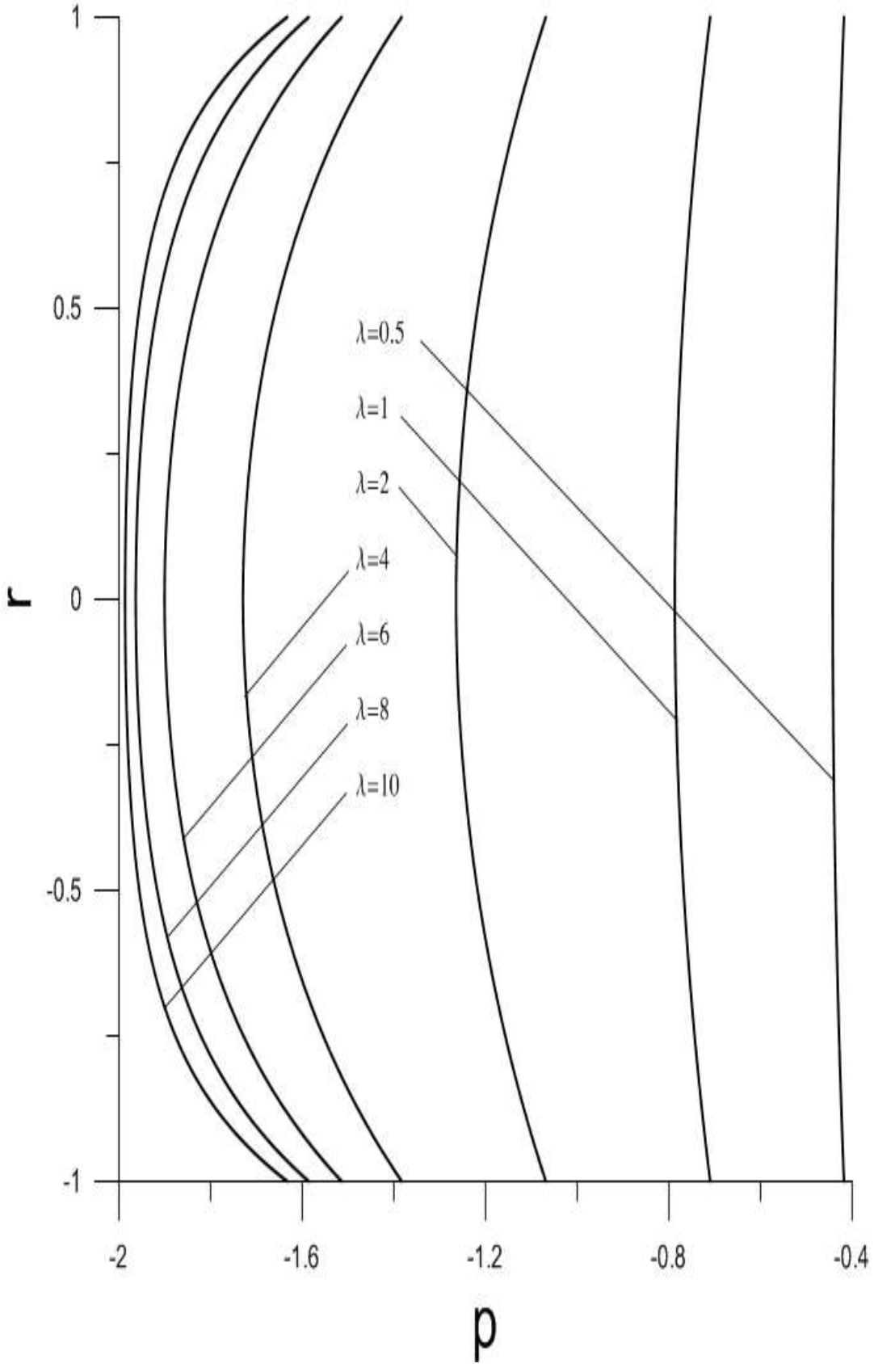
Şekil A.65 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi.



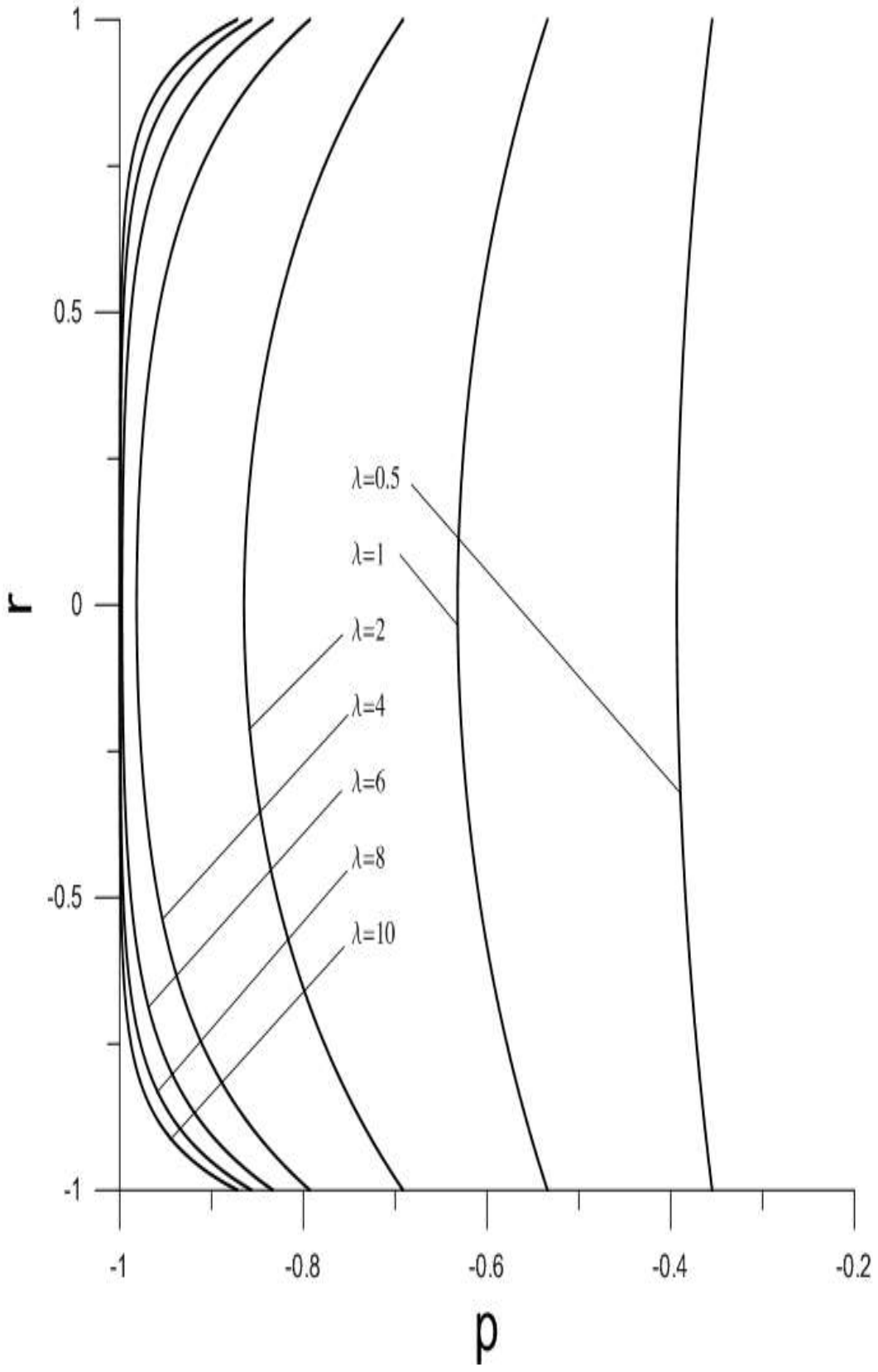
Şekil A.66 : $\mu(p)=\mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha=1$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi.



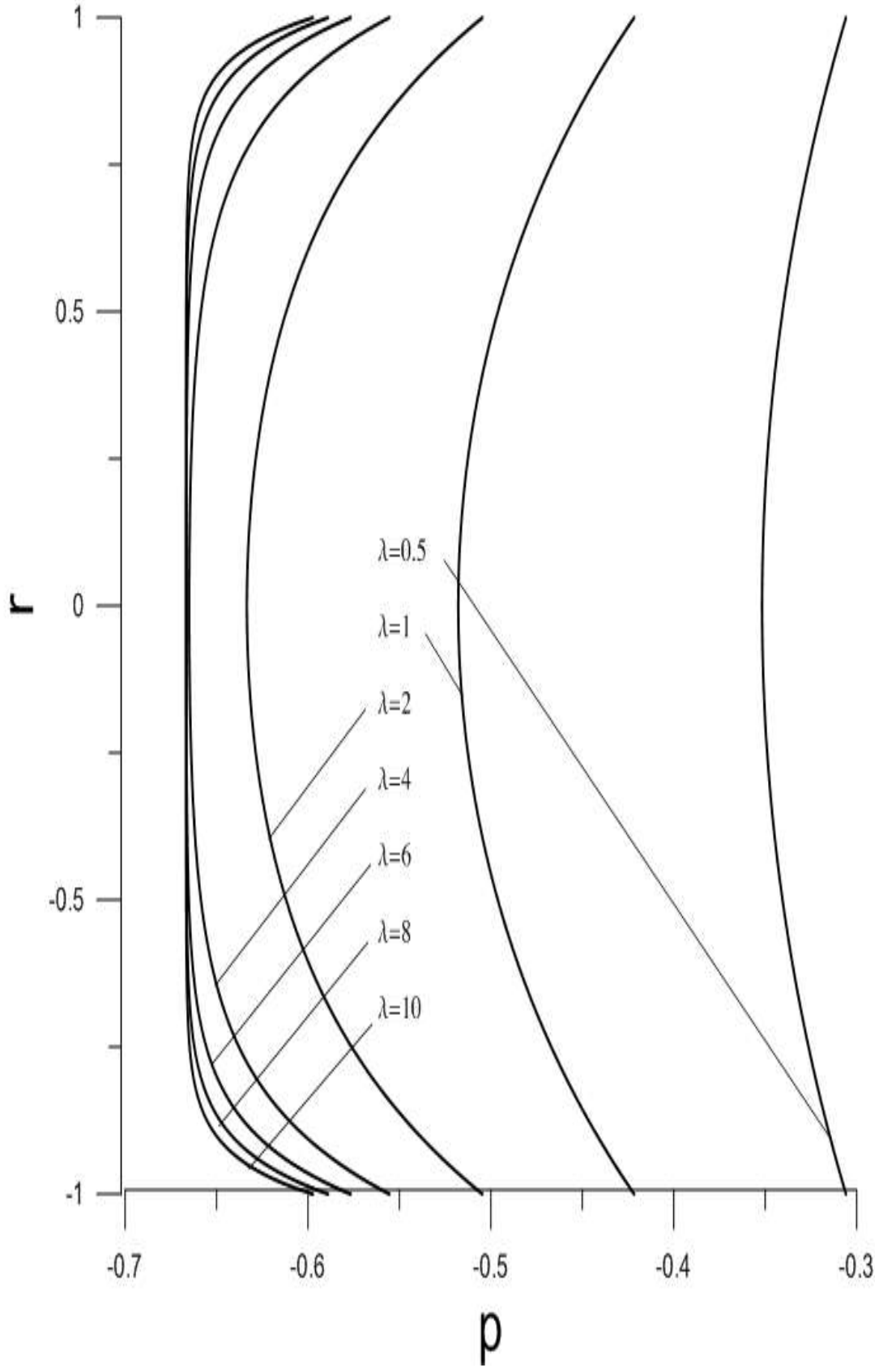
Şekil A.67 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z = 0 da r ile değişimi.



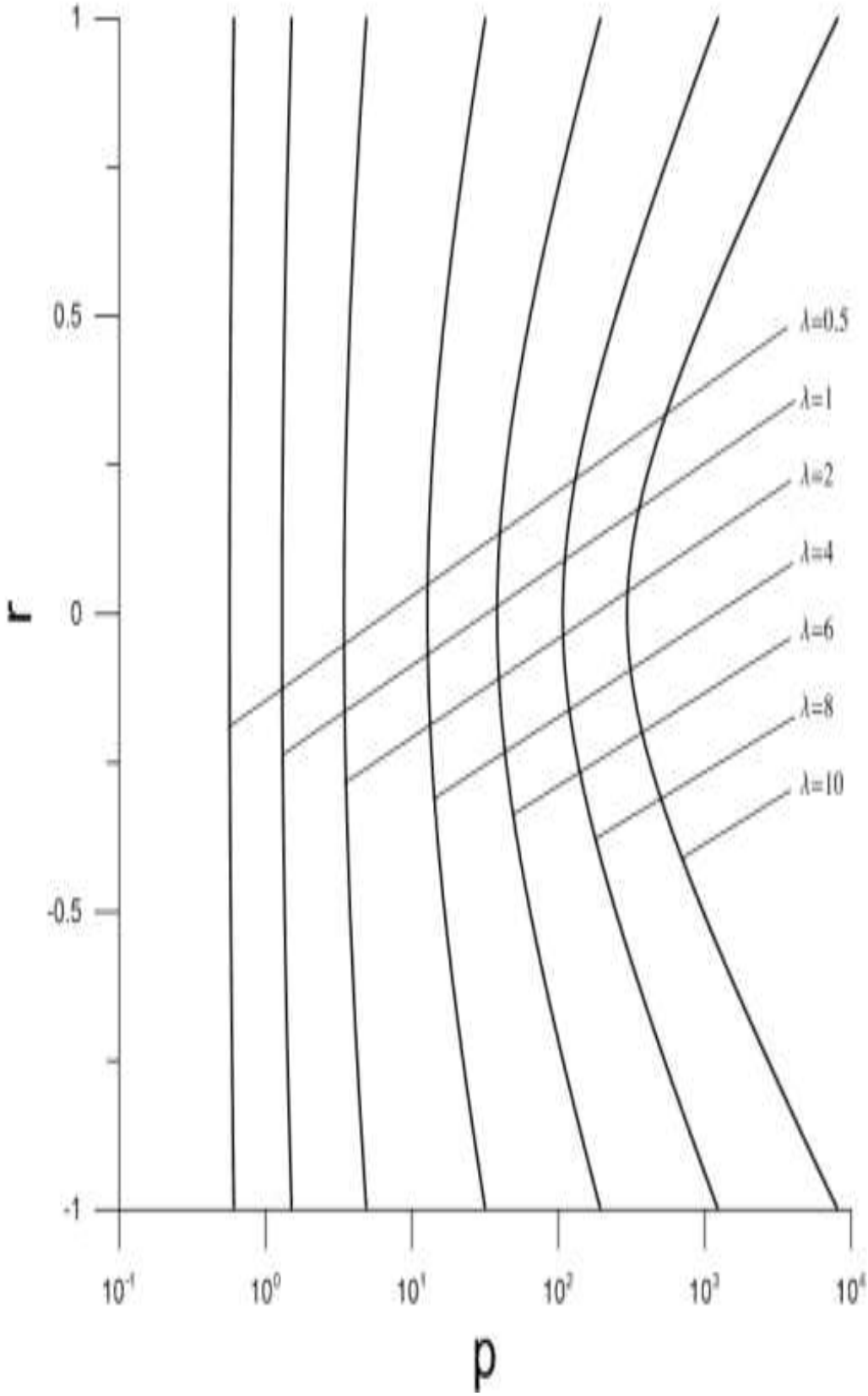
Şekil A.68 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi.



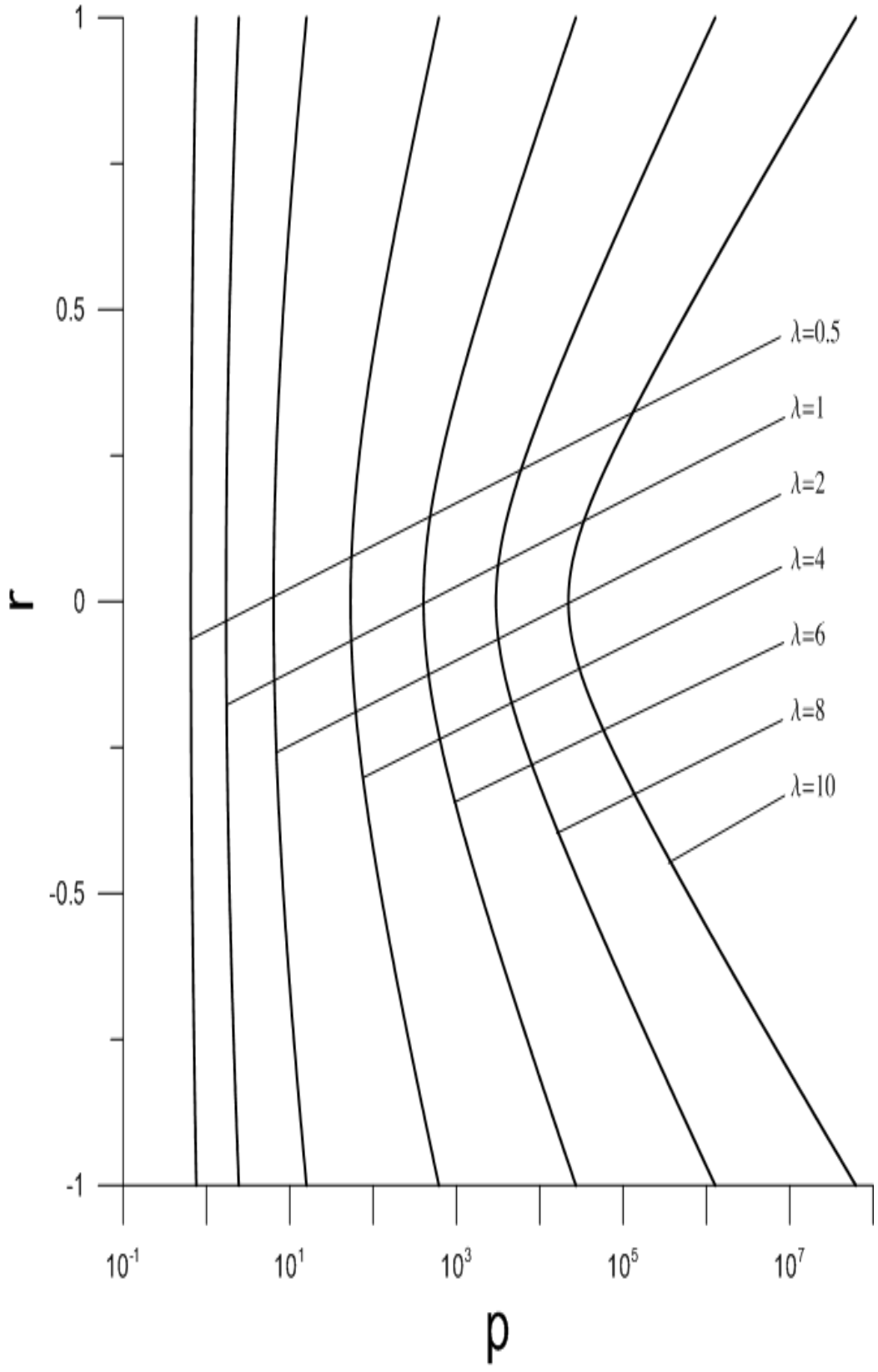
Şekil A.69 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi.



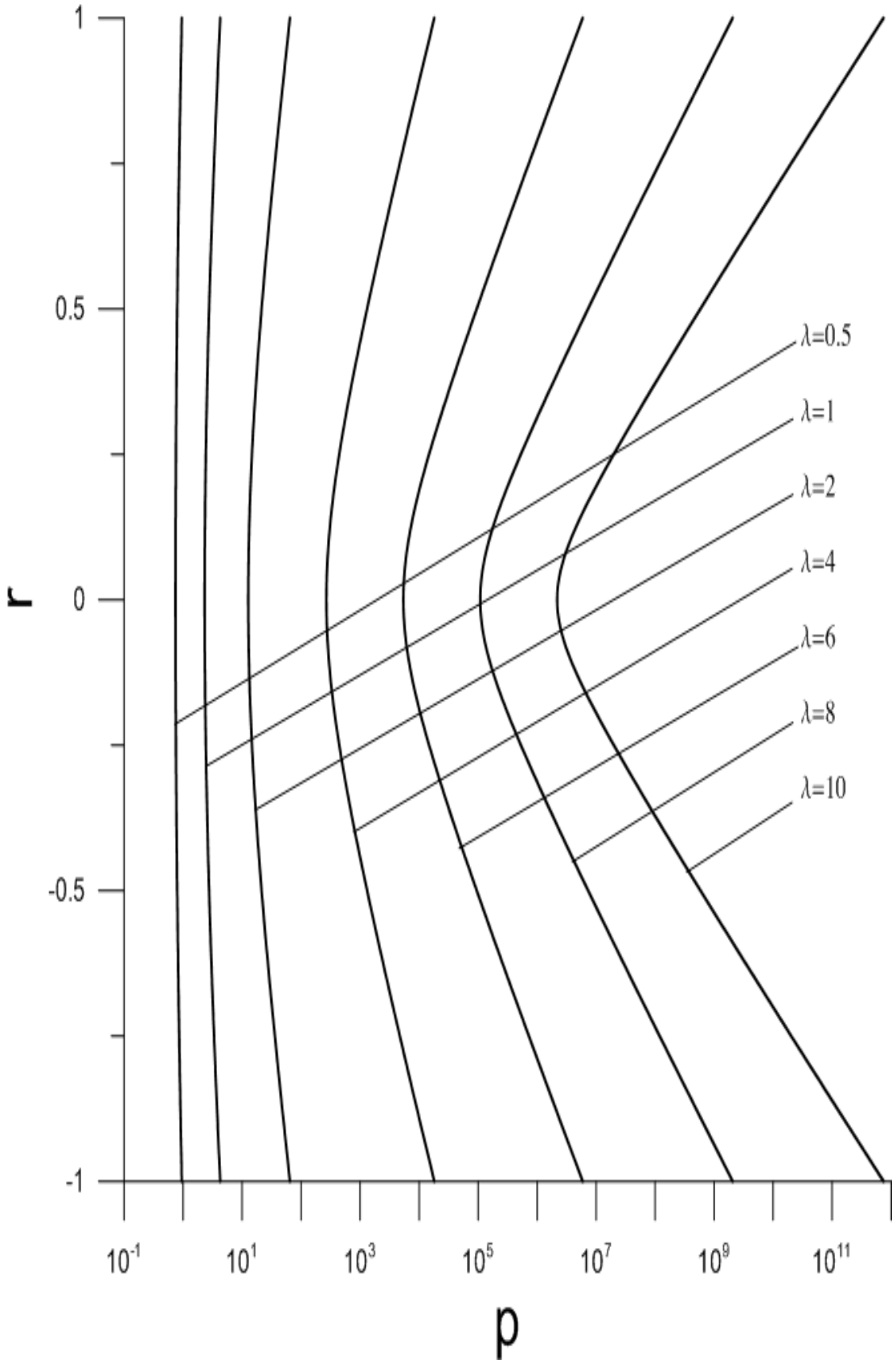
Şekil A.70 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z = 1 de r ile değişimi.



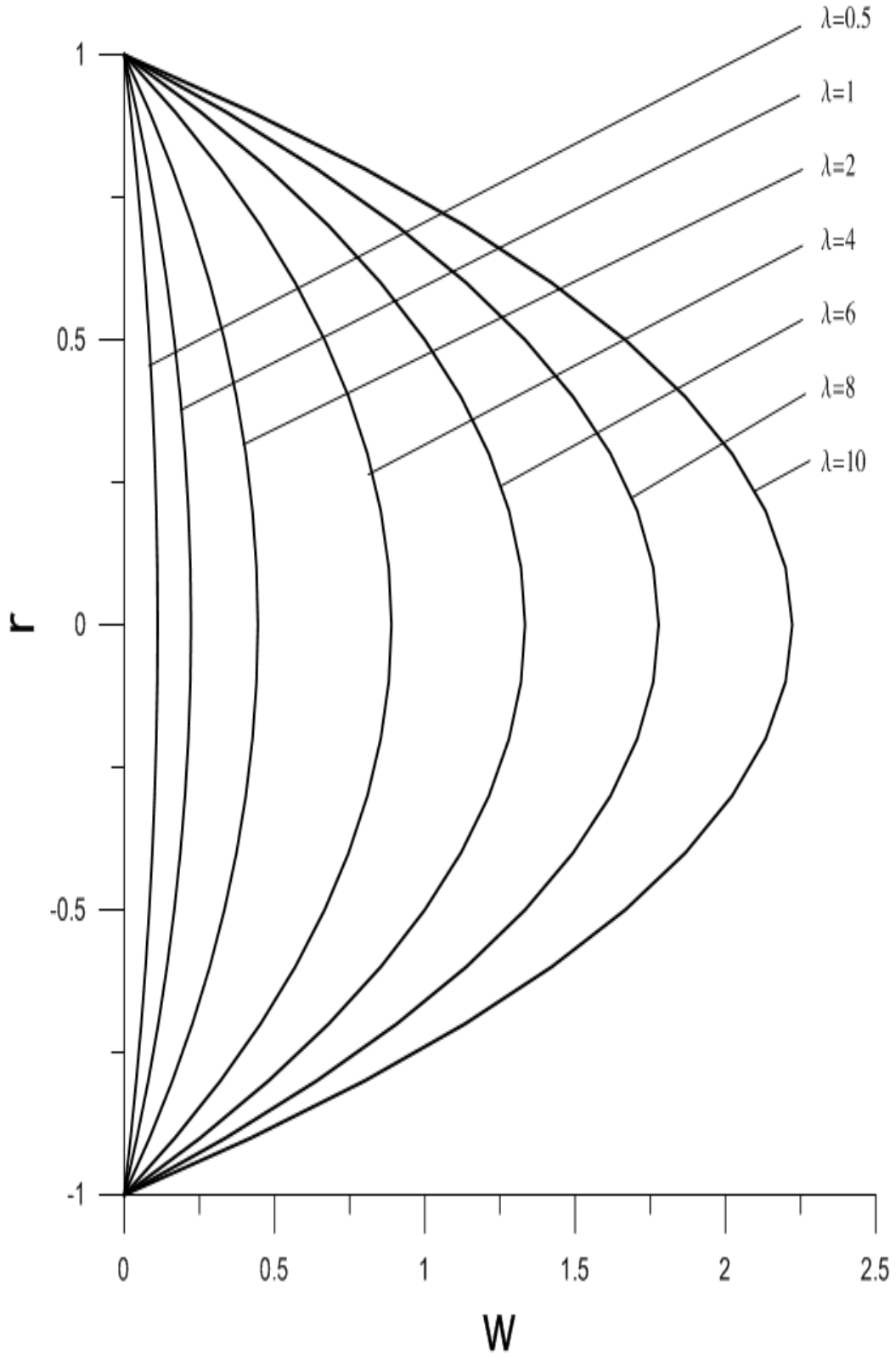
Şekil A.71 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 0.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



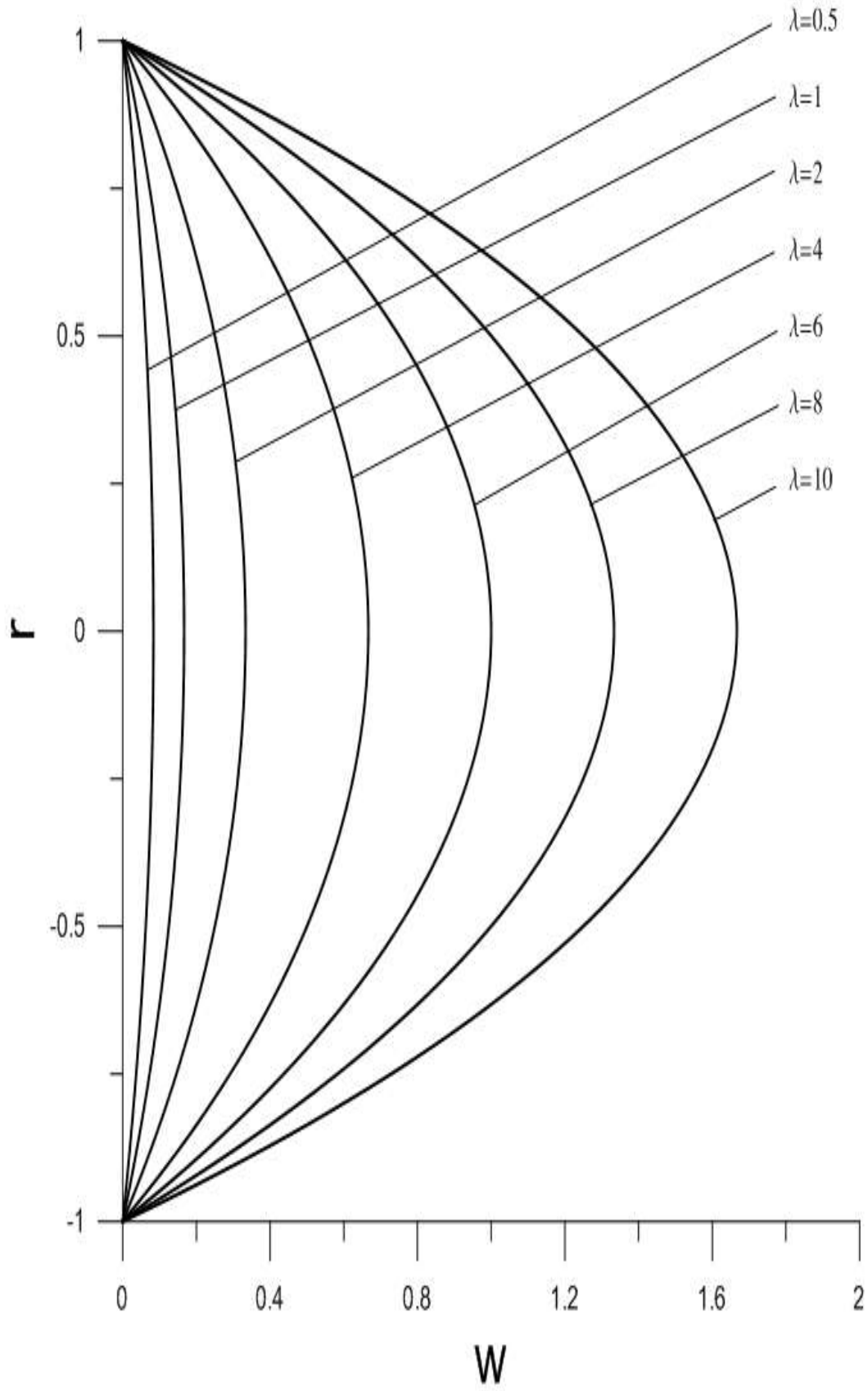
Şekil A.72 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



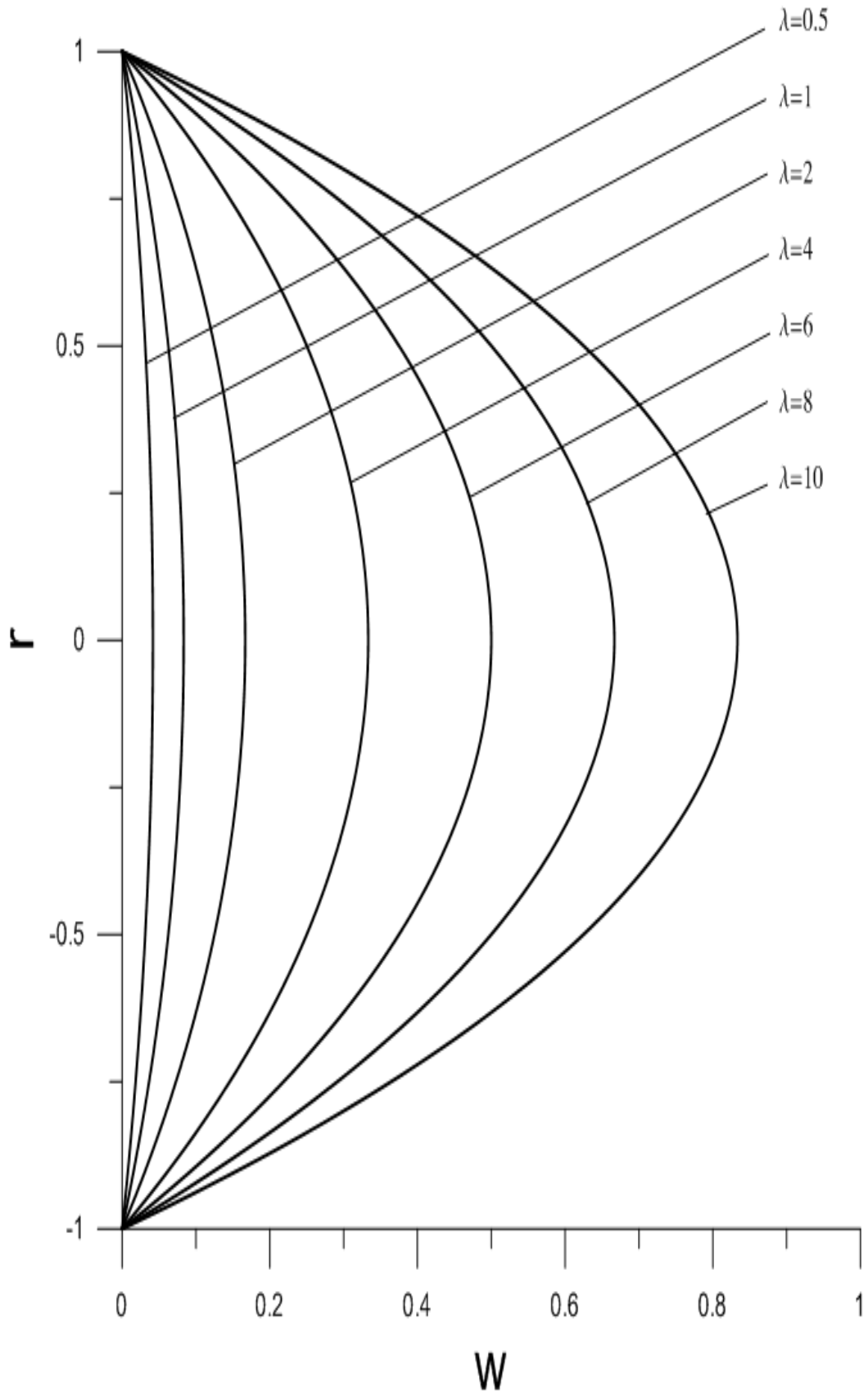
Şekil A.73 : $\mu(p) = \mu_0(1+\alpha p)$ durumunda farklı λ değerleri ve $\alpha = 1.5$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



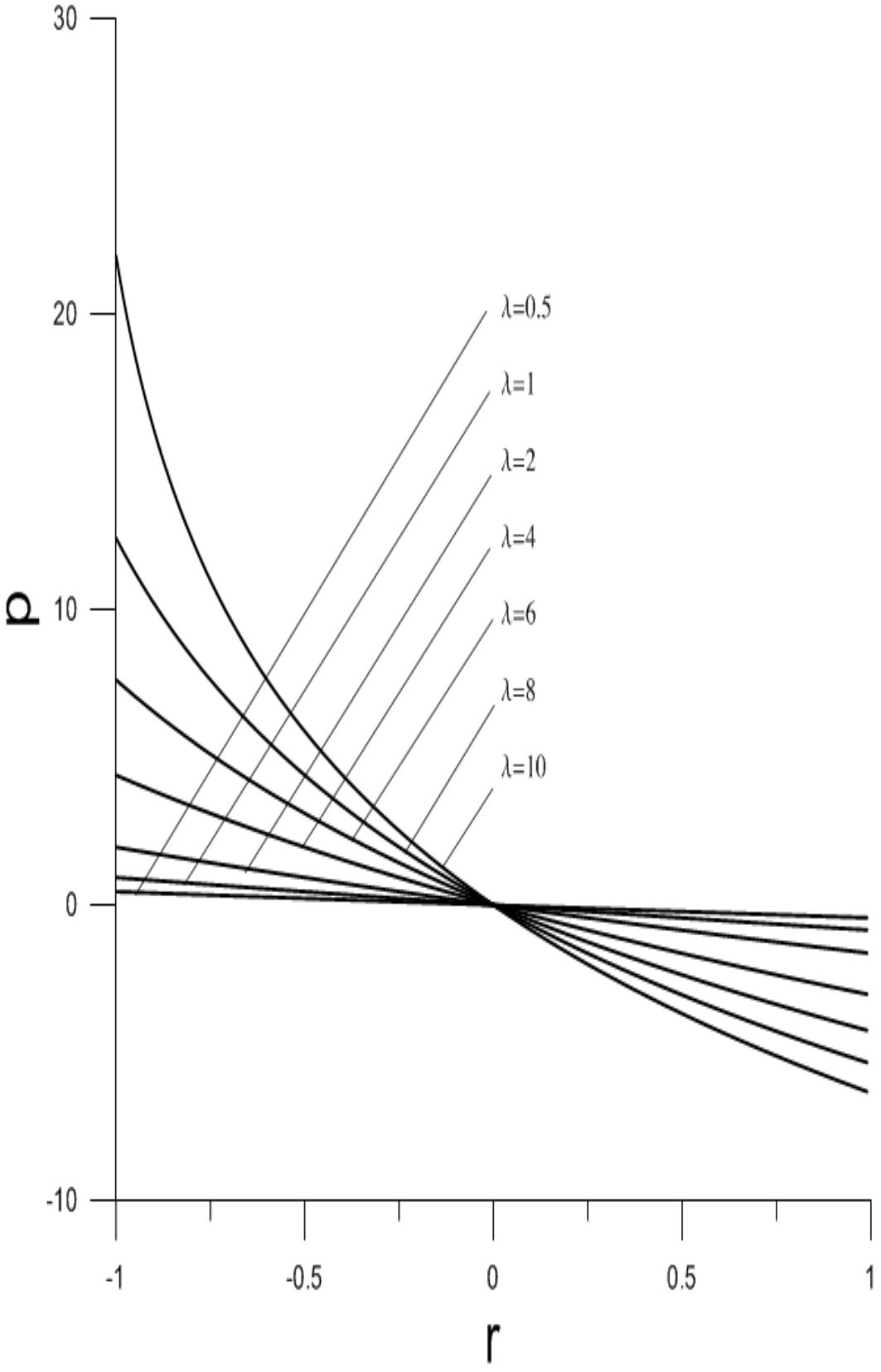
Şekil A.74 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için hızın r ile değişimi.



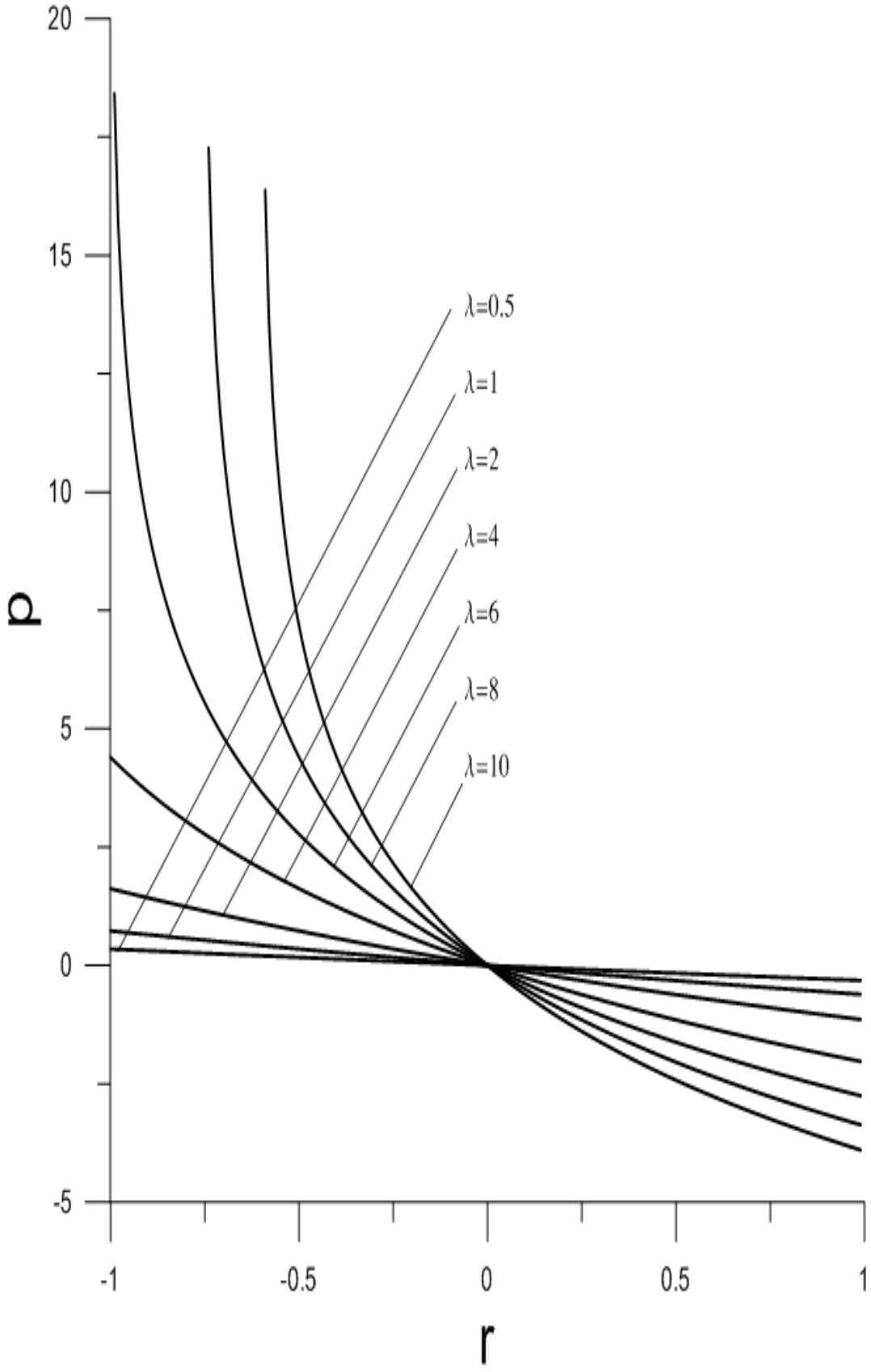
Şekil A.75 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için hızın r ile değişimi.



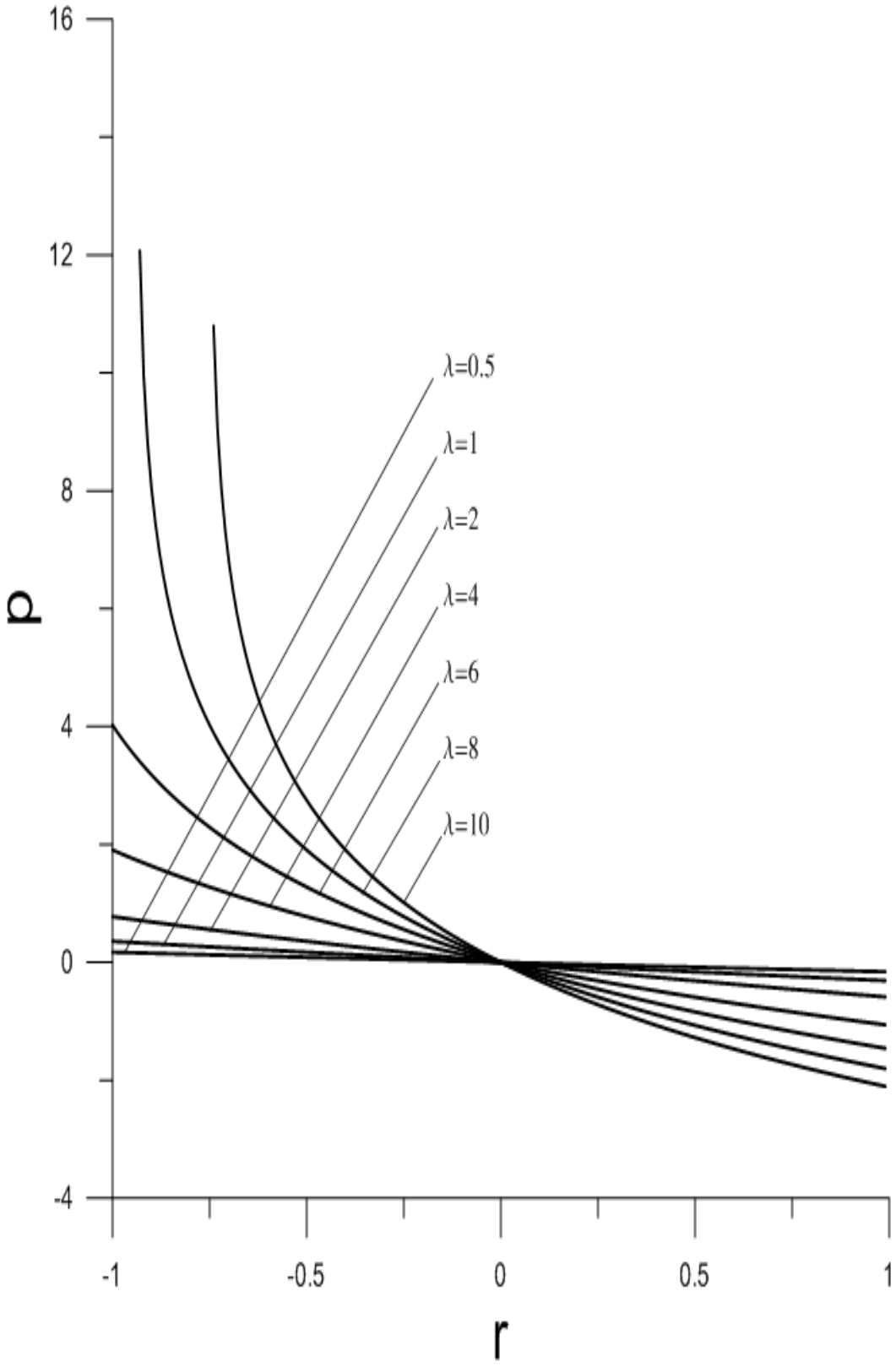
Şekil A.76 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için hızın r ile değişimi.



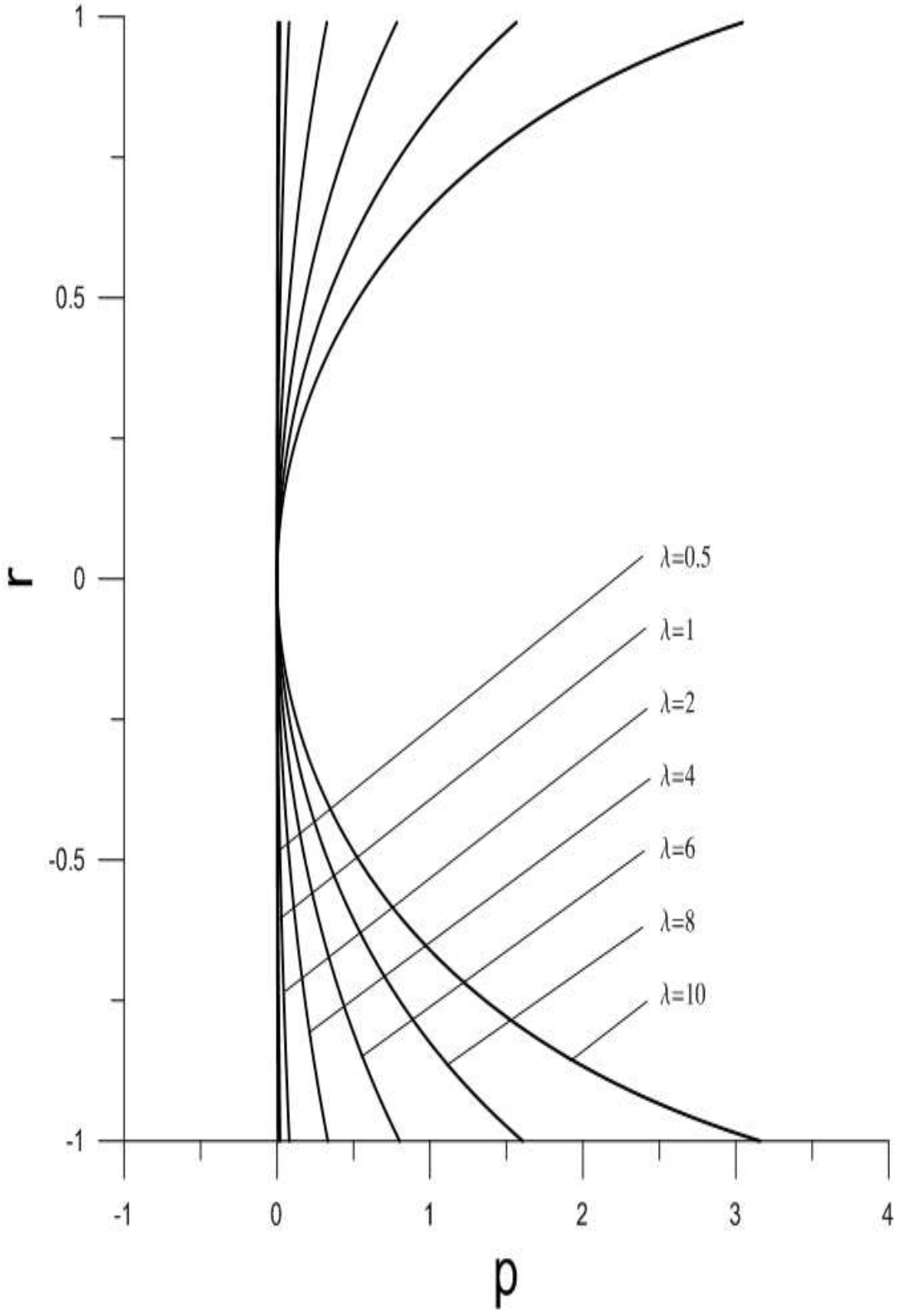
Şekil A.77 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



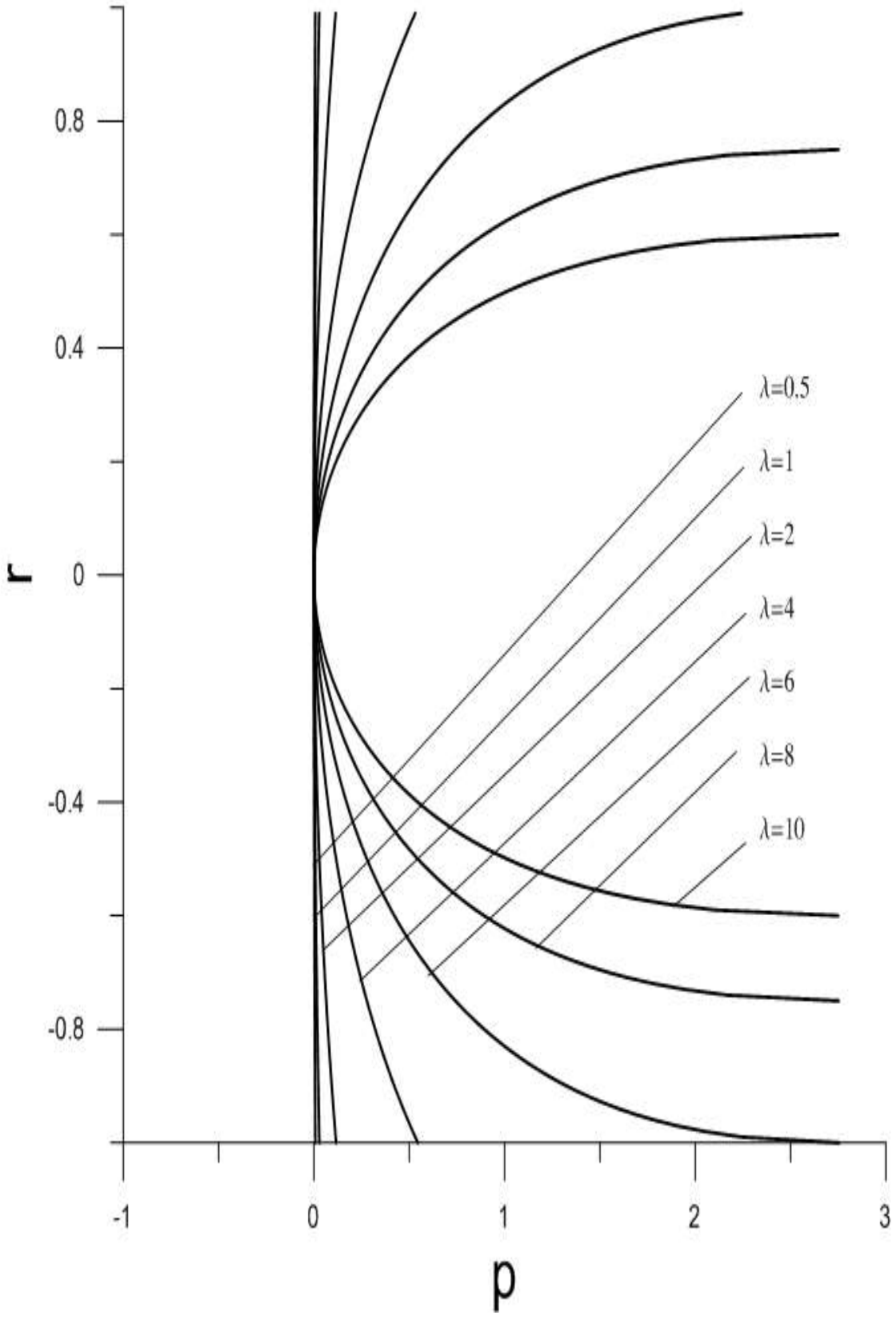
Şekil A.78 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



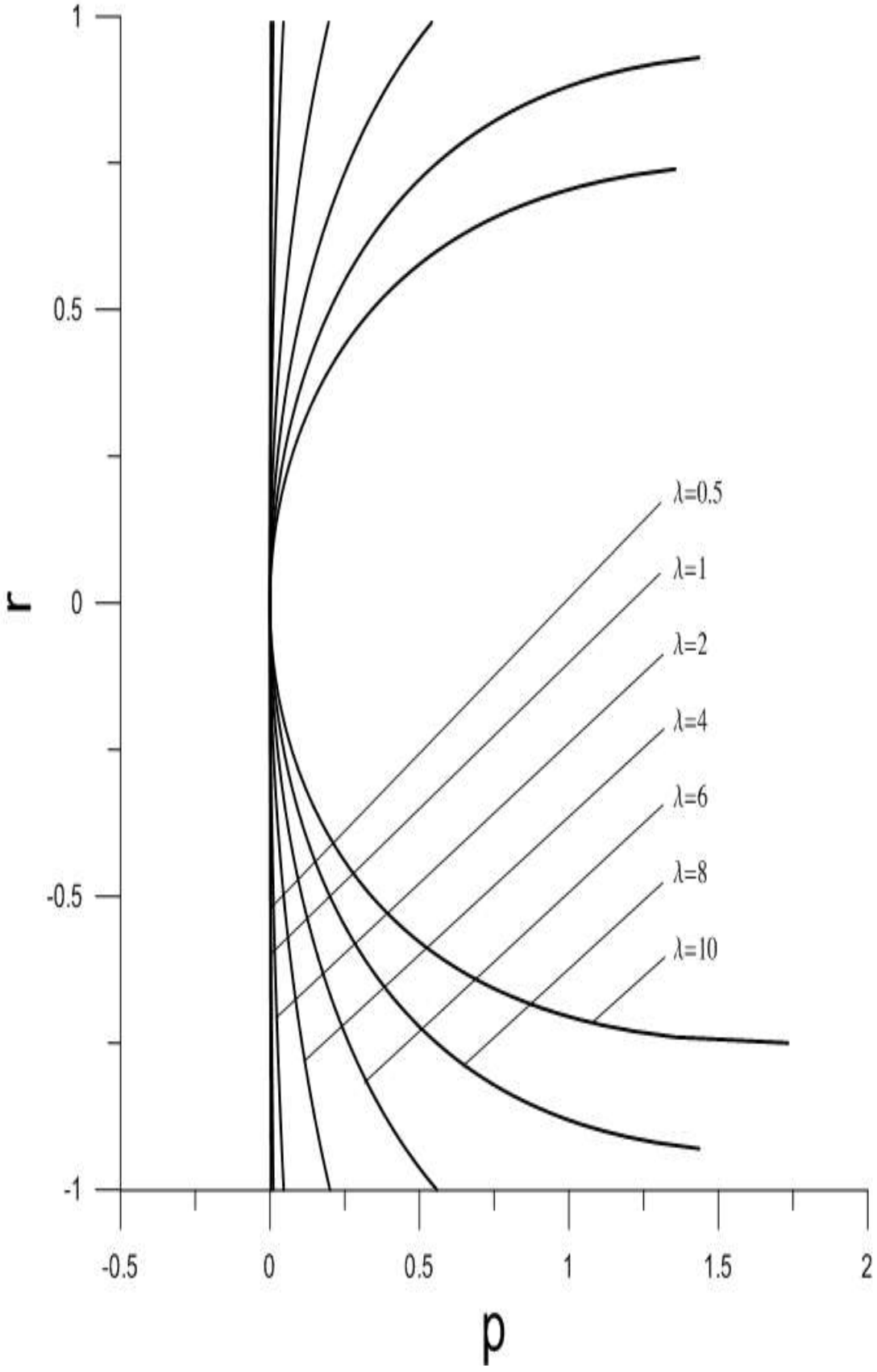
Şekil A.79 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



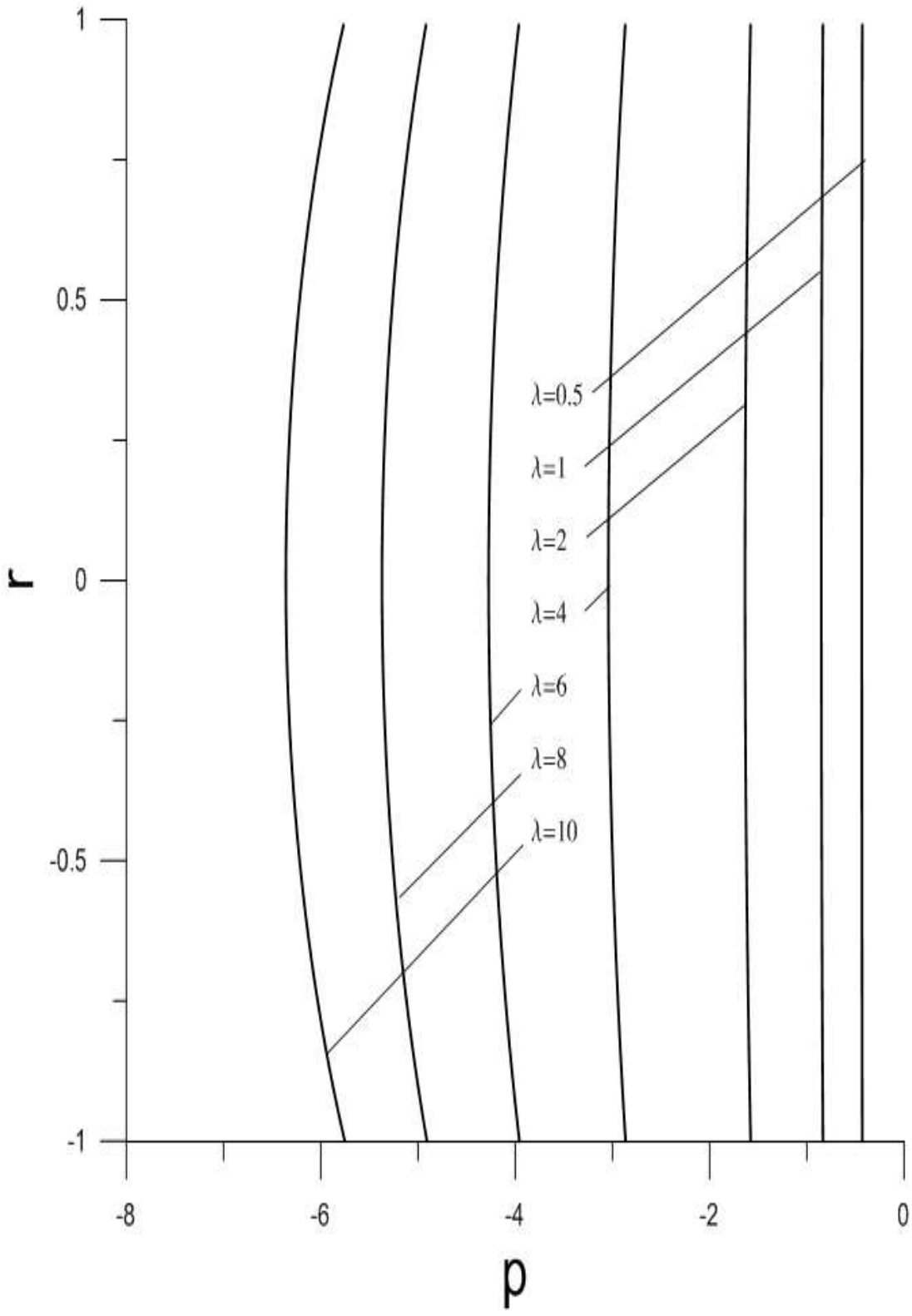
Şekil A.80 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



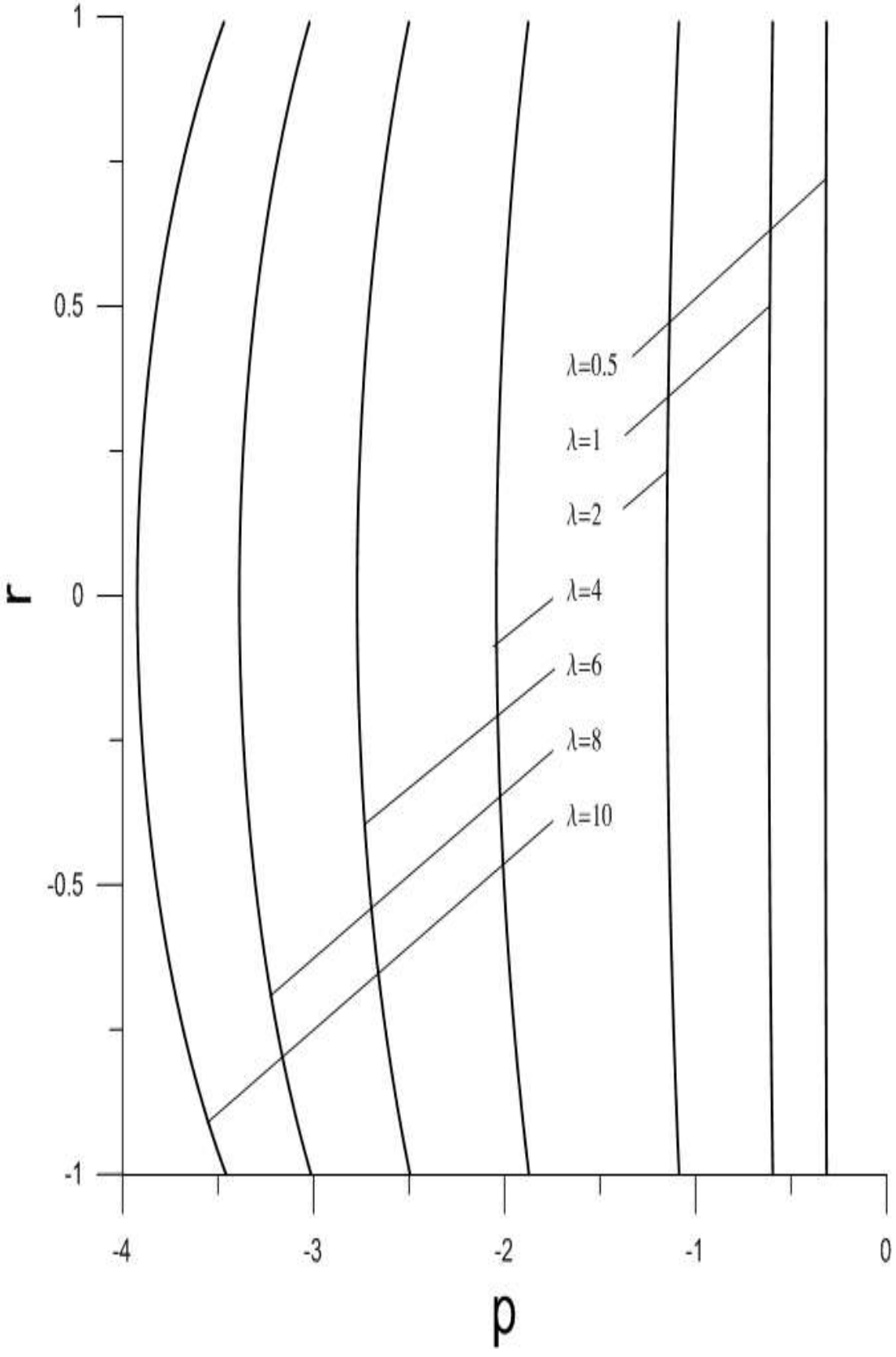
Şekil A.81 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



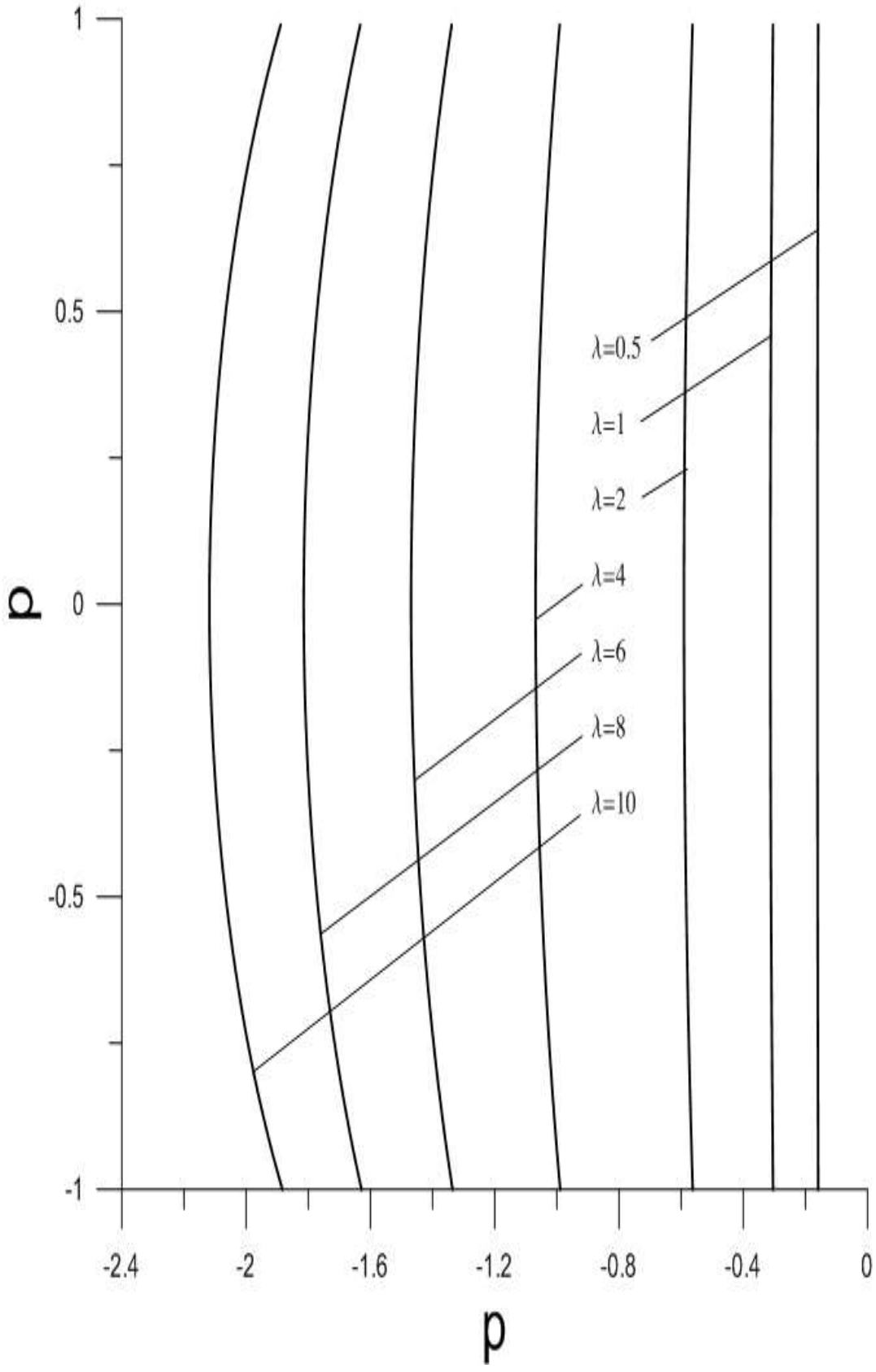
Şekil A.82 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın z =0 da r ile değişimi.



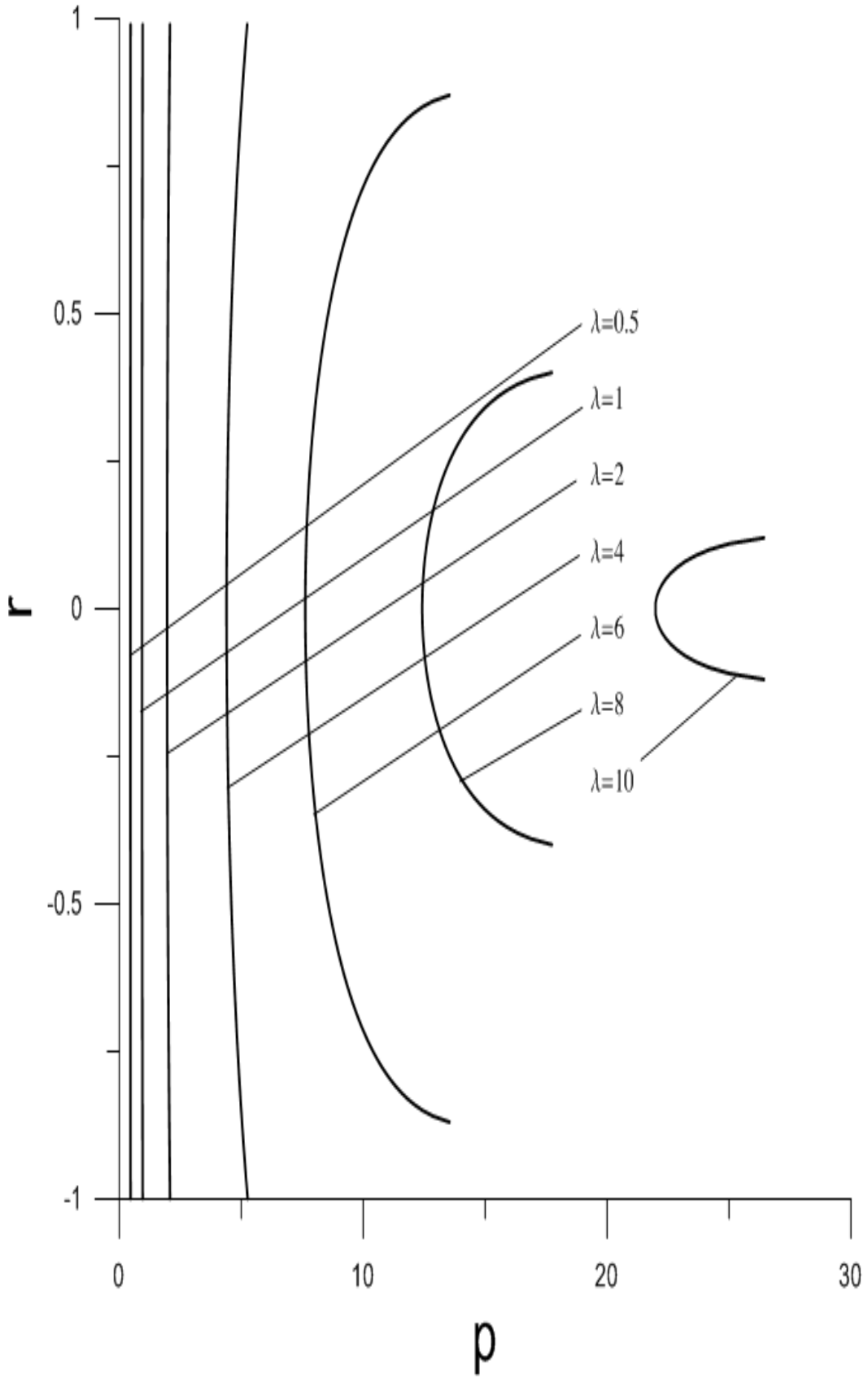
Şekil A.83 : $\mu(p) = \mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



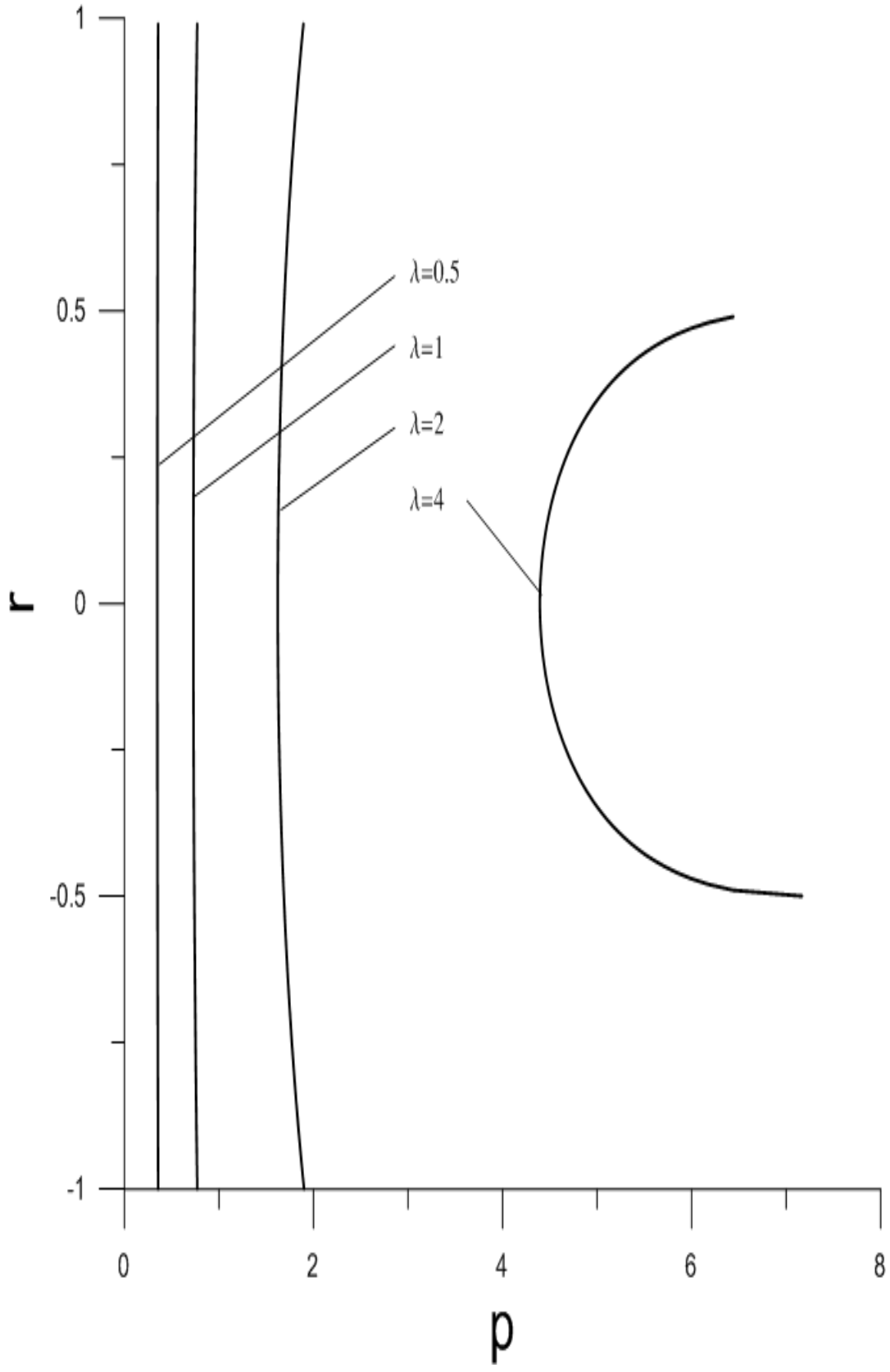
Şekil A.84 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.25$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



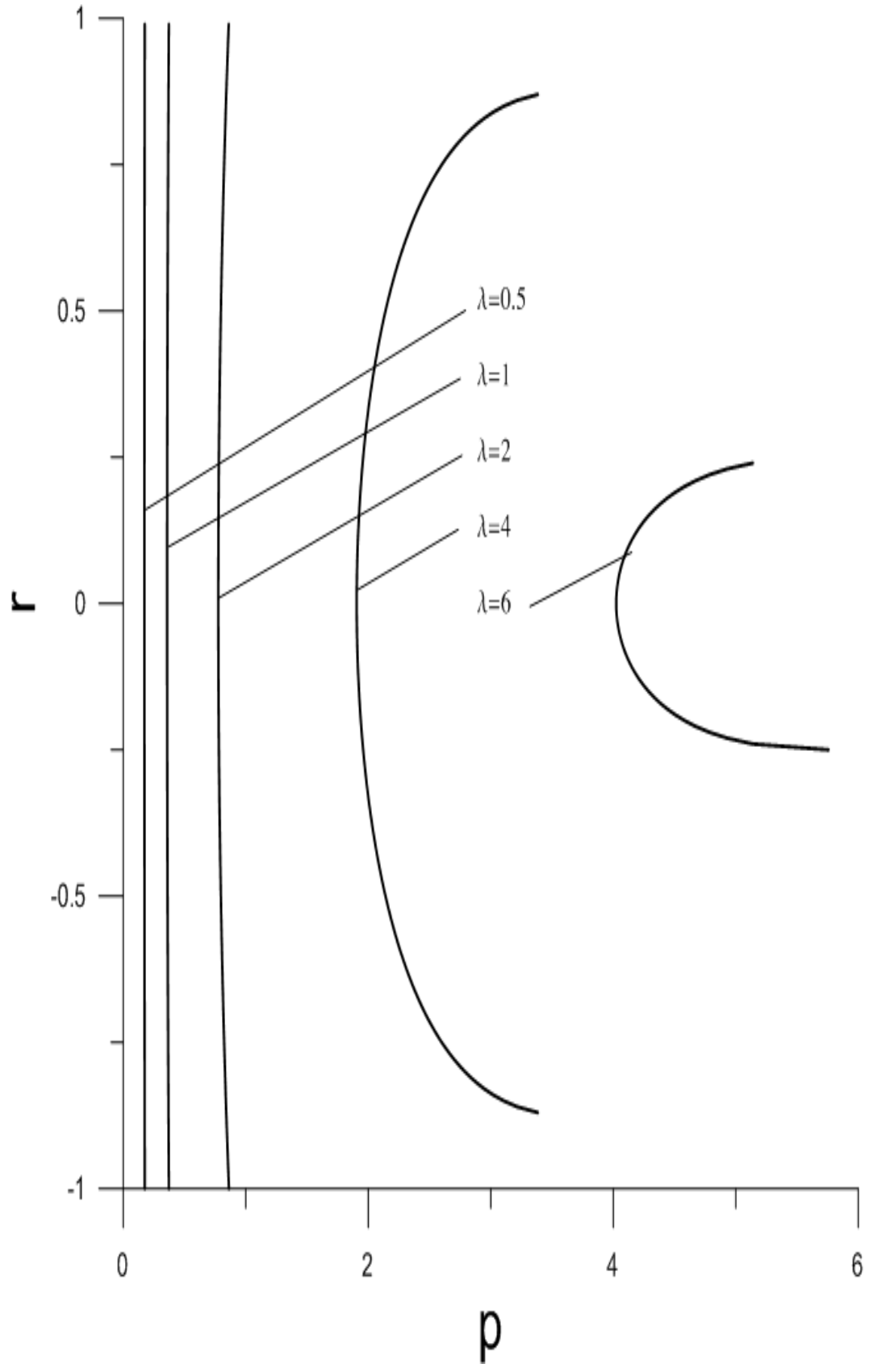
Şekil A.85 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın z =1 de r ile değişimi.



Şekil A.86 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



Şekil A.87 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.1$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.



Şekil A.88 : $\mu(p)=\mu_0 e^{\varepsilon p}$ durumunda farklı λ değerleri ve $\varepsilon = 0.4$ için basıncın z = -1 de r ile değişimi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyadı: Gürkan KARAGÖZ

Doğum Yeri ve Tarihi: 14.08.1976

Adres: 3.Kolordu Lojmanları Çalışlar Apt. Daire:2 4.Levent / İSTANBUL

E-Posta: gurkankaragoz@ymail.com

Lisans: Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Mesleki Deneyim: 2003–2011 Maltepe Askerî Lisesi-Matematik Öğretmeni

2011–2014 Kuleli Askerî Lisesi-Matematik Öğretmeni