



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞER EŞİTSİZLİKLERİ

Esma BARAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATRİSLERİN SİNGÜLER DEĞER EŞİTSİZLİKLERİ

Esma BARAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ramazan Türkmen

2012, 77 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Hakan Kasım AKMAZ

Bu tez matris teorinin temel tanım ve teoremleri ile başlamıştır ve singüler değer eşitsizlikleri ile sonlanmıştır. Ön bilgiler bölümü hermityen ve pozitif yarı tanımlı matrisler, matris normu ve matris ayrışımlarını içermektedir. Ayrıca hermityen matrislerin öz değerlerinin karakterizasyonları, majorizasyon tanımı ve blok matrislerin özellikleri ile ilgilenilmiştir.

Klasik analitik – geometri ortalama eşitsizliğinin matris versiyonları verilmiştir. Bu eşitsizlikler arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak A, B matrisleri hermityen ve A, B matrislerinden biri veya ikisinin pozitif yarı tanımlı olduğunda $A+B$ ve $A+iB$ matrislerinin singüler değerleri ile ilgili bir takım eşitsizlikler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Blok Matrisler, Hermityen matrisler, Majorizasyon, Matris Eşitsizlikleri, Öz değerler, Pozitif Yarı tanımlı Matrisler, Singüler Değerler.

ABSTRACT

MS THESIS
SINGULAR VALUE INEQUALITIES OF MATRICES

Esma BARAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2012, 77 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Hakan Kasım AKMAZ

The thesis starts with the fundamental theorems and definitions of matrix theory and ends with singular values inequalities of matrices.The background chapter includes hermitian and positive semidefinite matrices, matrix decomposition and matrix norms.. Moreover, we interested in variational characterizations of hermitian matrices, majorization definition and properties of block matrices

We give some matrix versions of the classical arithmetic – geometric mean inequality. The relationships between these inequalities is investigated. Finally we present several inequalities relating the singular values of $A+B$ and those $A+iB$ when A and B are hermitian, and when one or both of them are positive semidefinite.

Keywords: Block matices, Eigenvalues, Hermitian Matrices, Majorization, Matrix Inequalities, Positive Semidefinite Matrices, Singular Values.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada yol gösteren ve destek olan değerli hocam Doç. Dr. Ramazan Türkmen'e ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve uğradığım her hayal kırıklığında beni hoşgörü ve sabırla dinleyen, cesaretlendiren, tekrar amacıma yönelten canım yol arkadaşım Fadime ÖZKAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Esma Baran
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI **1**

2. ÖN BİLGİLER **4**

2.1. Genel Kavramlar 4
2.2. Matris Ayrışımları 8
2.3. Hermityen Matrisler 10
2.4. Pozitif Tanımlı Matrisler 13
2.5. Löwner Kısmi Sıralama Bağıntısı 18
2.6. Matris Normu 19

3. ÖZ DEĞER VE SİNGÜLER DEĞER EŞİTSİZLİKLERİ **24**

3.1 Hermityen Matrislerin Öz Değerlerinin Karakterizasyonu 24
3.2. Blok Matrislerin Singüler Değer Eşitsizlikleri 36
3.3. Majorizasyon Eşitsizlikleri 41

4.ANALİTİK ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİN MATRİSLERE UYGULANMASI **45**

4.1. Aritmetik Geometrik Ortalama Eşitsizliği 46
4.2. Heinz Ortalaması 60

5. $A + iB$ VE $A+B$ MATRİSLERİNİN SİNGÜLER DEĞERLERİ **66**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER **74**

KAYNAKLAR **75**

ÖZGEÇMİŞ **77**

1. GİRİŞ

Kompleks sayıların bir çok özelliği matrislere de genişletilmiştir. Kompleks sayılarda reel sayıların yeri ile kompleks matrisler cümlesinde hermityen matrislerin yeri aynıdır. Hermityen matrislere spesifik bir pozitiflik özelliği eklenerek pozitif tanımlı matrisler elde edilmiştir. Böylece pozitiflik özelliği matrislere de genişletilmiştir. Bir matrisin kökü, kuvveti, mutlak değeri, eşleniği ve buna benzer reel sayılar üzerinde tanımlanan bir çok fonksiyon matrisler için de tanımlanmıştır.

Kompleks sayılar üzerinde tanımlanan bir çok eşitsizlik matrislere uygulanmaya çalışılmıştır. Eşitsizliğin matris versiyonu doğru değilse eşitsizliğin matrislerin singüler değer veya üniter invaryant norm versiyonları incelenmiştir.

Reel sayılar üzerinde tanımlanan ortalamalar matrisler üzerinde de tanımlanması bir çok problemin çözümünde önemli bir araç olmuştur. Bundan dolayı operatörler ve matrisler üzerinde yeni ortalamalar tanımlanmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmada temel olarak reel sayılar üzerinde tanımlanan bir eşitsizliğin matrislere nasıl uygulandığı verilmiştir. Çalışmanın birinci bölümü Giriş ve Kaynak Araştırması'na ayrılmış, ikinci bölümde ise hermityen ve pozitif yarı tanımlı matrisler, matris ayrışımları, matris normları ve Löwner Kısmi Sıralama Bağıntısı hakkında bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde majorizasyon tanımı, 2×2 blok matrislerin bazı özellikleri, hermityen matrisin öz değerlerini ve herhangi bir matrisin singüler değerlerini karakterize eden Courant – Fischer, Rayleigh – Ritz teoremi ve bunların sonuçları ele alınmıştır. Dördüncü bölümde aritmetik - geometrik ortalama eşitsizliğinin matris versiyonları ve Heinz ortalaması yer almıştır. Beşinci bölümde ise $|a+b|\le\sqrt{2}\,|a+ib|$ eşitsizliği aracılığıyla elde edilmiş, $A+B$ ve $A+\mathrm{i}B$ matrislerinin singüler değerleri için majorizasyon eşitsizlikleri verilmiştir.

1.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde, matrislerin singüler değerleri ve normları hakkında yapılan çalışmalar hakkında bilgi vereceğiz.

Bhatia ve Kittaneh (1990), herhangi $A,B\in M_n$ matrisleri için

$$s_j(AB^*) \le \frac{1}{2} s_j(AA^* + BB^*),\ 1 \le j \le n$$

singüler değer eşitsizliği verilmiştir. Bu eşitsizliğin sonucu olarak $A, B \in M_n$ olmak üzere her üniter invaryant norm için

$$|||\ AB\ ||| \le \frac{1}{2} |||\ AA^* + BB^*\ |||$$

dir.

Bhatia ve Davis (1993), Bhatia ve Kittaneh (1990) tarafından verilen norm eşitsizliğini genelleştirmiştir. $A, B, X \in M_n$ olmak üzere

$$|||\ A^*XB\ ||| \le \frac{1}{2} |||\ AA^*X + XBB^*\ |||$$

üniter invaryant norm eşitsizliği verilmiştir.

Bhatia R., Kittaneh F. (2000) Bu çalışmada, matrisler için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizlikleri incelenmiş ve matrislerin iz ve üniter invaryant normları için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bhatia ve Kittaneh (2009), A, B matrisleri hermityen veya en az birinin pozitif yarı tanımlı olması durumunda $A + B$ ve $A + iB$ matrisleri için singüler değer eşitsizliği sunulmuştur

Audenaert (2007), $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere $0 \le v \le 1$ için

$$s_j(A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v) \le s_j(A + B),\ 1 \le j \le n$$

olduğunu göstermiştir.

Tao (2006), Bhatia ve Kittaneh tarafından $2s_j(AB^*) \le s_j(A^*A + B^*B)$ matrislerin singüler değerleri için aritmetik geometrik eşitsizliği bulunmuştur. Bu çalışmada bu eşitsizliğe denk bir eşitsizlik ve daha genel bir eşitsizlik sunulmuştur.

Bhatia ve Kittaneh (2008), aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin matris versiyonları incelenmiştir.

Zhang F. (2001) Bu çalışmada ilk olarak birçok yazar tarafından elde edilen sonuçları da içeren pozitif yarı tanımlı blok matrislerin singüler değerlerini içeren zayıf bir logaritmik majorizasyon eşitsizliği sunulmuştur. Daha sonra pozitif yarı tanımlı blok matrisler için daha önceki sonuçları da içeren matrislerin toplam, çarpım ve Hadamard çarpımları için birçok matris eşitsizliği elde edilmiştir.

Zhan X. (2004) Bhatia ve Kittaneh tarafından matrislerin singüler değerleri için $2s_j(AB^*) \le s_j(A^*A + B^*B)$ aritmetik geometrik eşitsizliği bulunmuştur. Bu çalışmada bu eşitsizliğin farklı bir ispatı ve bu eşitsizliğe denk bir eşitsizlik verilmiştir. Ayrıca bulunan bu eşitsizlik kullanılarak yeni bir iz eşitsizliği ispatlanmıştır.

Zhan X. (2000) Bu çalışmada matrislerin pozitif yarı tanımlı matrislerin toplamı, direkt toplamı ve farkı için için zayıf log majorizasyon, üniter invaryant norm ve öz değer üzerine bazı eşitsizlikler sunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

n – kare kompleks matrislerin kümesi M_n ile gösterilmiştir. Benzer şekilde $n \times m$ mertebeli kompleks matrislerin kümeside $M_{n,m}$ ile gösterilmiştir.

Bu bölümde matris teori ile ilgili bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. V, $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzay olmak üzere

$$L : V \to V$$

lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde herhangi bir $v \in V$ için

$$L(v) = \lambda v \tag{2.1}$$

şartını sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ varsa v vektörüne *L lineer dönüşümün öz vektörü* denir. Eğer $v \neq 0$ ise (2.1) şartını sağlayan sadece bir tane $\lambda \in \mathbb{C}$ vardır. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine $v \in V$ öz vektörüne ait *L lineer dönüşümün öz değeri* denir.

Her matris lineer dönüşümle ifade edilebileceğinden matrisin öz değer ve öz vektörlerinden bahsedebiliriz. $A \in M_n$ matrisinin temsil ettiği lineer dönüşüm L olsun. Bu takdirde L dönüşümü

$$L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$
$$x \to Ax$$

şeklindedir. Şimdi L lineer dönüşümünün öz değer ve öz vektörlerini bulalım: $x \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$L(x) = Ax = \lambda x \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0 \tag{2.2}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. $(\lambda I - A)$ matrisinin determinantından elde edilen polinoma A matrisinin *Karakteristik polinomu* denir. $\det(\lambda I - A) = 0$ deklemine A matrisinin *Karakteristik denklemi* ve bu denklemin köklerine A matrisinin *öz değerleri* denir. $\lambda_i \quad (1 \le i \le n)$ için $(\lambda I - A)x = 0$ denklem sisteminin $x_i \neq 0$ çözüm vektörüne A matrisinin *öz vektörü* denir.

Tanım 2.1.2. A matrisinin öz değerlerinin kümesine A matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. (Spektral Dönüşüm Teoremi) $A \in M_n$ ve f herhangi bir polinom olmak üzere

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \tag{2.3}$$

dir. Ayrıca A tersinir bir matris ise

$$\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\} \tag{2.4}$$

olur. (Horn ve Johnson, 1985)

Sonuç 2.1.1. A matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart $0 \in \sigma(A)$ olmasıdır. (Horn ve Johnson, 1985)

Sonuç 2.1.2. $A \in M_n$ olsun. Bu takdirde $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$\sigma(A^k) = (\sigma(A))^k = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(A)\} \tag{2.5}$$

dir. (2.5) eşitliğinden

$$\sigma^{\frac{1}{k}}(A^k) = \sigma(A) \tag{2.6}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2. $A, B \in M_n$ olmak üzere AB ve BA matrislerinin karakteristik polinomu aynıdır, dolayısıyla

$$\sigma(AB) = \sigma(BA) \tag{2.7}$$

dir. Fakat A ve B matrisleri kare matris değilse durum farklıdır. $A \in M_{m,n}$ ve $B \in M_{n,m}(m < n)$ olmak üzere $\sigma(AB) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m\}$ ise

$$\sigma(BA) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m, \overbrace{0, 0, ..., 0}^{n-m}\} \tag{2.8}$$

olur. Sonuç olarak AB ve BA matrislerinin karakterisitik polinomu farklıdır ve sıfır olmayan öz değerleri aynıdır. (Murad, 2003)

Determinant ve iz fonksiyonu matrisler üzerinde tanımlıdır. Aşağıda bu fonksiyonlarla ile ilgili temel özellikler verilmiştir.

Teorem 2.1.3. $A, B \in M_n$ olsun. Bu takdirde

(i) $\det(AB) = \det(BA)$

(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(iii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

(iv) $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ olmak üzere $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

eşitlikleri geçerlidir. Eğer $A \in M_{m,n}$ ve $B \in M_{n,m}(m < n)$ ise

$$\det(BA) = 0 \text{ ve } \det(BA) \neq \det(AB)$$

dır. (Murad, 2003)

Tanım 2.1.3. $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n$ olmak üzere A matrisinin iz fonksiyonu

$$izA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.4. $A, B \in M_n$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

(i) $iz(\alpha A) = \alpha iz(A)$

(ii) $iz(A + B) = iz(A) + iz(B)$

(iii) $iz(AB) = iz(BA)$ ($A \in M_{m,n}$ ve $B \in M_{n,m}$ matrisleri için de ifade geçerlidir.)

(iv) P tersinir bir matris olmak üzere $iz(P^{-1}AP) = iz(A)$ dır.

(v) $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ olmak üzere $izA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ dır. (Murad, 2003)

Tanım 2.1.4. $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n$ olmak üzere $A^t = \left[a_{ji} \right]$ matrisine A matrisinin *transpozesi* $A^* = \left[\overline{a}_{ji} \right]$ matrisine de A matrisinin *adjointi* (*eşlenik transpozesi*) denir.

Teorem 2.1.5. $A, B \in M_n$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

(i) $(A^*)^* = A$

(ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iv) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

(v) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$

(vi) $iz(A^*) = \overline{iz(A)}$

(vii) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$

(viii) A matrisi tersinir olması için gerek ve yeter şart A^* matrisi de tersinir olmasıdır, yani

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dir. (Murad, 2003)

Tanım 2.1.5. $A \in M_{m,n}$ olmak üzere $A^* A$ matrisinin öz değerlerinin mutlak değerlerinin kareköklerine A matrisinin *singüler değeri* denir ve $s_i(A) (i = 1, 2, ..., n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.6. $A \in M_{m,n}$ olmak üzere $rank(A) = r \leq \min\{m, n\}$ ise A matrisi, r tane sıfır olmayan singüler değere sahiptir. (Zhang, 1999)

Tanım 2.1.6. $A \in M_n$ olmak üzere

(i) $A^* A = I$ ise A matrisine *üniter* matris denir.

(ii) $A^* A = A A^*$ ise A matrisine *normal* matris denir.

Matrisler Tanım 2.1.6' da verilenlere göre sınıflandırılır. Bu sınıflandırma her çeşit matrisin sağladığı özellikler açısından önemlidir.

Sonuç 2.1.3. Her üniter matris normal matristir.

Teorem 2.1.7. $A \in M_n$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler eş değerdir.

(i) A üniter matristir.

(ii) A regüler bir matristir ve $A^{-1} = A^*$ dir.

(iii) $A^*A = I$ dir.

(iv) A matrisinin sütunlar kümesi ortonormaldir.

(v) A matrisinin satırlarının kümesi ortonormaldir.

(vi) $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $y = Ux$ olmak üzere $y^*y = x^*x$ dir. (Horn ve Johnson, 1985)

Teorem 2.1.8. $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler eş değerdir.

(i) A normal matristir

(ii) A matrisin öz vektörleri ortonormal küme oluşturur.

(iii) $\sum_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i \right|^2$ dir. (Horn ve Johnson, 1985)

Tanım 2.1.7. $A, B \in M_n$ olsun. Eğer $P^{-1}AP = B$ şartını sağlayan P tersinir matrisi varsa A ve B matrislerine *benzer matrisler* denir. $A \sim B$ ile gösterilir. Eğer P matrisi üniter ise A ve B matrislerine *üniter benzer matrisler* denir.

Teorem 2.1.9. $A, B \in M_n$ benzer matrisler olsun. Bu takdirde A ve B matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır. O halde öz değerleri de aynıdır.

Teorem 2.1.10. $A, B \in M_n$ olsun. Bu takdirde

(i) A ve A^T matrisleri benzerdir

(ii) A^*A ve AA^* matrisleri benzerdir.

(iii) $\overline{A}A$ ve $A\overline{A}$ matrisleri benzerdir. (Zhang, 1999)

2.2. Matris Ayrışımları

Benzerlik yardımıyla matrislerin bazı özel tipteki matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilmesi matris teoride önemlidir. Matrislerin çarpanlarına ayrılması matris ayrışımları ile yapılmaktadır. Bu bölümde bazı matris ayrışımları ve bu ayrışımların öneminden bahsedilmiştir.

Tanım 2.2.1. $A \in M_n$ matrisi köşegen bir matrise benzerse A matrisine *köşegenleştirilebilir* denir.

Teorem 2.2.1. $A \in M_n$ matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart *n* tane lineer bağımsız öz vektörü olmalıdır. (Horn ve Johnson, 1985)

Not 2.2.1. $A \in M_n$ matrisinin *n* tane farklı öz değeri varsa *n* tane lineer bağımsız öz vektörü vardır. Fakat tersi doğru değildir, yani $A \in M_n$ matrisinin *n* tane lineer bağımsız öz vektörü olması *n* tane farklı öz değeri olmasını gerektirmez.

Teorem 2.2.2. $A \in M_n$ matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ öz değerlerine $x_1, x_2, ..., x_n$ gibi *n* tane lineer bağımsız öz vektör karşılık gelsin. Bu takdirde,

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

olacak şekilde *A*'nın öz vektörlerinden oluşan terslenebilir *P* matrisi ve *A*'nın öz değerlerinden oluşan $\Lambda = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ köşegen matrisi vardır.(Bozkurt, Türen ve Solak, 2005)

Teorem 2.2.3. (Schur Ayrışımı) $A \in M_n$ matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. Bu durumda

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir *U* üniter matrisi vardır. (Zhang, 1999)

Teorem 2.2.4. (Spektral Ayrışım) $A \in M_n$ matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. Bu durumda *A* matrisinin normal olması için gerek ve yeter şart *A* matrisi üniter köşegenleştirilebilir olmasıdır, yani

$$U^* A U = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

olacak şekilde bir U üniter matrisinin vardır. (Zhang, 1999)

Not 2.2.2. $A \in M_n$ matrisi normal ise n tane lineer bağımsız öz vektörü vardır.

Teorem 2.2.5. (Singüler Değer Ayrışımı) $A \in M_{m,n}$ matrisinin rankı r ve singüler değerleri $s_1, s_2, ..., s_r$ olsun. Bu durumda $D = köş(s_1, s_2, ..., s_r)$ olmak üzere

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

olacak şekilde bir U ve V üniter matrisi vardır. (Zhang, 1999)

Singüler değer ayrışımının önemi kare olmayan matrisler için de geçerli olmasıdır.

Teorem 2.2.6. (Polar Ayrışımı) $A \in M_n$ olmak üzere

$$A = PU$$

şartını sağlayan bir $P \geq 0$ matrisi ve U üniter matrisi vardır. (Zhang, 1999)

Her $A \in M_n$ matrisi Schur Ayrışımı ile üçgenleştirilebilir. A matrisinin n tane birbirinden farklı öz değeri varsa köşegenleştirilebilir. A matrisi normal ise Spektral Ayrışım ile üniter köşegenleştirilebilir.

2.3. Hermityen Matrisler

Tanım 2.3.1. $A \in M_n$ olmak üzere $A^* = A$ ise A matrisine *hermityen* matris denir

Eğer $A^* = -A$ ise A matrisine *ters hermityen* matris denir.

Hermityen matris tanımından aşağıdaki sonuçlar açıktır.

(i) $A = \left[a_{ij} \right] \in M_n$ matrisinin hermityen olması için gerek ve yeter şart her $i, j = 1, 2, ..., n$ için $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ olmasıdır. Bu takdirde A hermityen matris ise köşegen elemanları reeldir.

(ii) $A \in M_n$ hermityen matris ise normal matristir.

Teorem 2.3.1. $A, B \in M_n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

(i) A, B hermityen matrisler ise $\alpha A+\beta B$ matrisi de hermityendir

(ii) A, B hermityen matrisler olsun. O halde AB hermityen olması için gerek ve yeter şart $AB = BA$ olmasıdır.

(iii) Her $A \in M_n$ için $A + A^*$, AA^* ve A^*A hermityendir.

(iv) A hermityen matris ise A^k matrisi de $k = 1,2,...,n$ için hermityendir.

(v) A hermityen matris ise öz değerleri reeldir.

(vi) A hermityen matris olmak üzere öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler diktir. Öz vektörlerinin bir ortonormal kümesi vardır. (Horn ve Johnson, 1985)

Not 2.3.1. Bir n-kare hermityen matrisin öz değerlerini

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

şeklinde sıralayabiliriz.

Benzer şekilde $A \in M_{m,n}$ matrisinin singüler değerlerini de

$$s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A) \geq 0$$

şeklinde sıralayabiliriz.

Teorem 2.3.2. $A \in M_n$ matrisi $S,T \in M_n$ hermityen olmak üzere $A = S + iT$ şeklinde tek türlü yazılır:

$$S = \frac{1}{2}(A^* + A) \text{ ve } T = \frac{i}{2}(A^* - A)$$

dir. (Horn ve Johnson, 1985)

Tanım 2.3.2. $A \in M_n$ olsun.

$$A=\frac{1}{2}(A^*+A)+i\left(\frac{i}{2}(A^*-A)\right)$$

yazılımına A matrisinin *Cartesian ayrışımı* denir. $\frac{1}{2}(A^*+A)$ matrisine A matrisinin *reel kısmı* denir ve Re(A) ile gösterilir. $\frac{i}{2}(A^*-A)$ matrisine de A matrisinin *sanal kısmı* denir ve Im(A) ile gösterilir.

Teorem 2.3.3. $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n$ matrisinin hermityen olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan en az birini sağlamalıdır.

(i) $\forall x\in\mathbb{C}^n$ için $x^*Ax\in\mathbb{R}$ dir.

(ii) A normal matris ve öz değerleri reeldir.

(iii) $\forall S\in M_n$ için S^*AS hermityendir.(Horn ve Johnson, 1985)

Not 2.3.3. $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n$ matrisi hermityen olsun. Bu takdirde A matrisinin öz vektörlerinin ortonormal kümesi olduğundan ve Teorem 2.2.2'den $A=U\Lambda U^T$ olacak şekilde köşegen elemanları A matrisinin öz değerleri olan Λ köşegen matrisi ve sütunları A matrisinin öz vektörlerinden oluşan U ortogonal matrisi vardır. A matrisinin öz değerleri $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ve bu öz değerlere sırasıyla karşılık gelen öz vektörler $x_1,x_2,...,x_n$ olmak üzere bu ayrışımı

$$A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

2.4. Pozitif Tanımlı Matrisler

Bu bölümde pozitif yarı tanımlı matrislerle ilgili genel bilgi vereceğiz. Hermityen matrislerin kümesini pozitif yarı tanımlı matrislerin kümesini kapsar.

Tanım 2.4.1. $A \in M_n$ verilsin. $\langle .,. \rangle$, $\mathbb{C}^n$ vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpım fonksiyonunu göstermek üzere her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\langle Ax, x \rangle = x^* Ax \geq 0$ oluyorsa A matrisi *pozitif yarı tanımlı* olarak adlandırılır ve $A \geq 0$ ile gösterilir

Benzer şekilde sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\langle Ax, x \rangle = x^* Ax > 0$ oluyorsa A matrisine *pozitif tanımlı matris* denir ve $A > 0$ ile gösterilir.

Aşağıdakiler tanımdan aşikardır.

(i) $A \in M_n$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart $X \in M_{n,m}$ matrisi için $X^* AX \geq 0$ olmalıdır.

(ii) Her pozitif yarı tanımlı matris hermityendir.

(iii) $A \in M_n$ pozitif tanımlı ise $\overline{A}, A^*, A^T, A^{-1}$ matrisleri de pozitif tanımlıdır.

Teorem 2.4.1.

(i) Pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) matrisin öz değerleri ve köşegen elemanları negatif olmayan reel sayılardır (pozitif reel sayı).

(ii) Pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) matrisin her esas alt matrisi pozitif yarı tanımlıdır (pozitif tanımlıdır).

(iii) Pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) matrisin determinantı ve izi negatif değildir (pozitifdir). (Horn ve Johnson, 1985)

Sonuç 2.4.1. Pozitif yarı tanımlı (pozitif tanımlı) matrisin öz değerleri ile singüler değerleri aynıdır.

Teorem 2.4.2. $A, B \in M_n$ verilsin. $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere A,B matrisleri pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) ise $\alpha A + \beta B$ matrisi de pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) dır. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. A, B aynı mertebeden pozitif tanımlı matris olsun. Bu takdirde her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^* Ax \geq 0 \text{ ve } x^* Bx \geq 0$$

olduğundan her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^*(\alpha A + \beta B)x = \alpha x^* Ax + \beta x^* Bx \geq 0$$

olur.

Her pozitif yarı tanımlı matrisin hermityen matris olduğunu biliyoruz. Aşağıda hermityen matrisin pozitif yarı tanımlı olması için gerekli kriter verilmiştir.

Teorem 2.4.3. $A \in M_n$ hermityen matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bütün öz değerlerinin negatif olmamasıdır. (Horn ve Johnson, 1985)

Benzer şekilde $A \in M_n$ hermityen matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart bütün öz değerlerinin pozitif olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$: $A \geq 0$ ve λ , A matrisinin $x \neq 0$ vektörüne ait öz değeri olsun. Bu takdirde

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x^* Ax}{x^* x \neq 0} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq 0$$

olur.

$\Leftarrow$: A hermityen matrisinin öz değerleri negatif olmasın.($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$) Bu takdirde spektral ayrışımından

$$A = UDU^*$$

olacak şekilde U üniter ve $D = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ matrisi vardır. $y = \left[y_1, ..., y_n \right]^T = U^* x$ olmak üzere her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\left\langle Ax, x \right\rangle = \left\langle UDU^* x, x \right\rangle = \left\langle DU^* x, U^* x \right\rangle = \left\langle Dy, y \right\rangle$$

sağlanır ve

$$\left\langle Dy, y \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| y_i^{\,2} \right| \geq 0$$

olduğundan A matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

Sonuç 2.4.2. $A \in M_n$ regüler matrisi pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A^{-1} matrisi pozitif tanımlı olmasıdır.

Sonuç 2.4.3. $A \in M_n$ olsun.

(i) A pozitif yarı tanımlı ise A^k ($k = 1, 2, ...$) matrisi de pozitif yarı tanımlıdır.

(ii) A matrisi hermityen ise A^{2k} ($k = 1,2,...$) matrisi pozitif tanımlıdır.

Teorem 2.4.4. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris ve $k = 1,2,...$ olsun Bu takdirde $B^k = A$ olacak şekilde bir tek $B \geq 0$ matrisi vardır. (Horn ve Johnson, 1985)

Tanım 2.4.2. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisi için $B^k = A$ olacak şekilde $B \geq 0$ matrisine A matrisinin *k. kökü* denir ve $B = A^{\frac{1}{k}}$ ile gösterilir.

Sonuç 2.4.4. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı ise $k = 1,2,...$ olmak üzere $(A^{\frac{1}{k}})^{-1} = (A^{-1})^{\frac{1}{k}}$ dir.

Sonuç 2.4.5. $A, B \in M_n$ ve $A \geq 0$ olsun. A, B matrisleri değişmeli ise $A^{1/2}$, B matrisleri de değişmelidir.

Teorem 2.4.5. $A \in M_n$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart herhangi bir B matrisi için $A = B^* B$ olarak yazılabilmesidir. (Zhang, 1999)

İspat.

$\Rightarrow$: $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olsun. Bu takdirde

$$A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = (A^{\frac{1}{2}})^* A^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir.

$\Leftarrow$: Herhangi bir B matrisi için $A = B^* B$ olsun. Bu takdirde her $x \in \mathbb{C}^n$ için iç çarpım fonksiyonunun özelliklerinden

$$\langle Ax, x \rangle = \langle B^* Bx, x \rangle = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0$$

elde edilir. O halde A matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

Sonuç 2.4.6. Her $A \in M_n$ matrisi için A^*A matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

Tanım 2.4.3. Bir A matrisinin mutlak değeri

$$|A| = \left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.4.1. $A \in M_{m,n}$ olsun. Bu takdirde $|A| = (A^*A)^{1/2}$ matrisinin öz değerlerine A matrisinin *singüler değerleri* denir.

Teorem 2.4.6. $A, B \in M_n$ olsun. Bu takdirde $A \geq 0$ ise $B^*AB \geq 0$ dır. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. $A \geq 0$ olduğundan $A^{1/2}$ matrisi vardır. Bu takdirde

$$B^*AB = B^*A^{1/2}A^{1/2}B = B^*\left(A^{1/2}\right)^* A^{1/2}B = \left(A^{1/2}B\right)^*\left(A^{1/2}B\right)$$

olduğundan Sonuç 2.4.6 'dan $B^*AB \geq 0$ dır.

Teorem 2.4.7. $A, B \in M_n$ pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olsun. AB matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart A, B matrisleri değişmeli olmalıdır. (Zhang, 1999)

İspat. $A, B \in M_n$ pozitif tanımlı olmak üzere Teorem 2.1.2 den

$$\lambda_j(AB) = \lambda_j(A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B)) = \lambda_j(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}),\ j = 1,...,n$$

dir ve $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geq 0$ olduğundan $\lambda_j(AB) \geq 0$ elde edilir.

A,B matrisleri değişmeli ve hermityen olduğundan AB matrisi de hermityendir. Ayrıca $\lambda_j(AB) \geq 0$ olduğundan AB matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

2.5. Löwner Kısmi Sıralama Bağıntısı

$A, B \in M_n$ hermityen matrisler olmak üzere $A-B$ matrisi pozitif yarı tanımlı ise $A \geq B$ yazılır. Benzer şekilde $A-B>0$ ise $A>B$ yazılır.

Teorem 2.5.1. Hermityen matrisler cümlesinde "$\geq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu bağıntıya *Löwner Kısmi Sıralama bağıntısı* denir.

Teorem 2.5.2. $A, B \in M_n$ hermityen matrisler olmak üzere $A \geq B$ olması için gerek ve yeter şart her $C \in M_n$ için $C^* AC \geq C^* BC$ sağlanmalıdır. (Zhang, 1999)

Teorem 2.5.3. $A, B \in M_n$ hermityen matrisler, A pozitif tanımlı ve B pozitif yarı tanımlı olsun. Bu takdirde $A \geq B$ için gerek ve yeter şart $\sigma(BA^{-1}) \leq 1$ ve $A > B$ için gerek ve yeter şart $\sigma(BA^{-1}) < 1$ olmasıdır. (Horn ve Johnson, 1985)

Sonuç 2.5.1. $A, B \in M_n$ pozitif tanımlı olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $A \geq B$ olması için gerek ve yeter şart $B^{-1} \leq A^{-1}$ olmalıdır.

(ii) $A \geq B$ ise $izA \geq izB$ ve $\det A \geq \det B$ dir.

(iii) $j = 1,2,...,n$ için $\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B)$ dir.(Horn ve Johnson, 1985)

Karekök fonksiyonunun pozitif yarı tanımlı matrisler için Löwner sıralamasını koruduğu aşağıda teoremle verilmiştir.

Teorem 2.5.3. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. Bu takdirde $A \geq B$ ise $A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}$ dir. (Zhang, 1999)

İspat. $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}$ matrisi hermityendir. O halde $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu göstermek için öz değerlerinin negatif olmadığını göstermeliyiz. Öz değer tanımından

$$(A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}})x = \lambda x \Rightarrow B^{\frac{1}{2}}x = A^{\frac{1}{2}}x - \lambda x$$

elde edilir. Cauchy – Schwarz eşitsizliği, her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

olduğunu ifade eder. Buna göre

$$\begin{aligned} xA^*x &= (x^*Ax)^{\frac{1}{2}}(x^*Ax)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (x^*Ax)^{\frac{1}{2}}(x^*Bx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(A^{1/2}x)^*(A^{1/2}x)\right]^{1/2}\left[(B^{1/2}x)^*(B^{1/2}x)\right]^{1/2} \\ &\geq (A^{1/2}x)^*(B^{1/2}x) \\ &= x^*A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}x \\ &= x^*A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}x - \lambda x) \\ &= x^*Ax - \lambda x^*A^{\frac{1}{2}}x \end{aligned}$$

olur. Böylece her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\lambda x^*A^{\frac{1}{2}}x \geq 0$ olduğundan $\lambda \geq 0$ dır.

2.6. Matris Normu

Tanım 2.6.1. M_n kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde n^2 boyutlu vektör uzayıdır. $|||.|||: M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa buna *Matris Normu* denir. $A \in M_n$ olmak üzere

(1) $|||A||| \geq 0$

(2) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(3) $\forall c \in \mathbb{R}$ için $|||cA||| = |c| \, |||A|||$

(4) $||AB||| \leq |||A||| . |||B|||$

(5) $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$

(1) - (4) şartlarını sağlayan fonksiyona da *Genelleştirilmiş Matris Normu* denir.

Sonuç 2.6.1. $A \in M_n$ ve $|||.|||$ matris normu olmak üzere

(i) $|||A^2||| \leq |||A|||^2$

(ii) $|||I||| \leq 1$

(iii) A regüler matris olmak üzere $|||A^{-1}||| \geq \dfrac{|||I|||}{|||A|||}$

dir. (Horn ve Johnson, 1985)

Örnek 2.6.1.

$A \in M_n$ olsun.

(1) $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ifadesine *Euclidian* veya ℓ_2 *normu* denir. Ayrıca

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{iz(A^* A)} = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A^* A) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} s_i (A) \right]^{\frac{1}{2}}$$

olur.

(2) $\|A\|_1 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right)$ ifadesine ℓ_1 *normu* denir.

(3) A matrisinin singüler değerleri $s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A)$ olmak üzere

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i{}^p(A) \right)^{\frac{1}{p}} , \; 1 \le p \le \infty$$

ifadesine *Schatten p - normu* denir. p =2 için *Schatten p – normu Euclidian* normuna eşittir.

(4) A matrisinin singüler değerleri $s_1(A) \ge s_2(A) \ge ... \ge s_n(A)$ olmak üzere

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A)$$

ifadesine *Ky Fan k – normu* denir. $p = \infty$ *Schatten p – normu* $k = 1$ için *Ky Fan – k* normuna eşittir. $p = 1$ için Schatten p – normu $k = n$ için için *Ky Fan – k* normuna eşittir.

Herhangi bir vektör normundan matris normu nasıl elde edileceği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.6.1. $\|.\|, \mathbb{C}^n$ üzerinde vektör normu olsun. Bu takdirde, $A \in M_n$ olmak üzere

$$|||\, A \,||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tanımlanan fonksiyon matris normudur. Bu norma $\|.\|$ *vektör normunun ürettiği norm* veya *operatör norm* denir. Operatör norm

(i) $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall A \in M_n$ için $\|Ax\| \le |||\, A \,||| \, \|x\|$

(ii) $|||\, I \,||| = 1$

özelliklerini sağlar. (Horn ve Johnson, 1985)

Örnek 2.6.2.

(1) $\ell_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ vektör normundan

$$|||A|||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

matris normu elde edilir. Bu norma *sütun normu* denir

(2) $\ell_\infty : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \max_{1 \le j \le n} \{|x_i|\}$ vektör normundan

$$|||A|||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

matris normu elde edilir. Bu norma *satır normu* denir.

(3) $\ell_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}}$ Öklid vektör normundan

$$|||A|||_2 = \max_{1 \le i \le n} \{\sqrt{\lambda_i (A^* A)}\}$$

matris normu elde edilir. Bu norma *Spektral norm* denir.

Tanım 2.6.2. $|||.|||$ matris normu ve $A \in M_n$ olmak üzere her U ve V üniter matrisleri için

$$|||A||| = |||UAV|||$$

sağlanıyorsa $|||.|||$ matris normuna *Üniter invaryant matris normu* denir.

Örnek 2.6.3. Euclidian normu, Schatten p- normu, Spektral norm, Ky Fan k – normu, satır ve sütun normu üniter invaryant normdur.

3. ÖZ DEĞER VE SİNGÜLER DEĞER EŞİTSİZLİKLERİ

3.1 Hermityen Matrislerin Öz Değerlerinin Karakterizasyonu

Herhangi bir matrisin öz değerleri sadece karakteristik denklemin kökleri ile karakterize edilirken hermityen matrislerin öz değerleri Courant – Fischer teoremiyle de karakterize edilebilir. Rayleigh – Ritz teoremi bir hermityen matrisin en küçük ve en büyük elemanlarını, Courant – Fischer teoremi ise bütün öz değerlerini karakterize eder.

Teorem 3.1.1(Rayleigh - Ritz) $A \in M_n$ hermityen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ olmak üzere her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_n x^* x \leq x^* Ax \leq \lambda_1 x^* x \tag{3.1}$$

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* Ax \tag{3.2}$$

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* Ax \tag{3.3}$$

dir. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. $A \in M_n$ hermityen matris olduğu için spektral ayrışımdan $\Lambda = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ olmak üzere $A = U \Lambda U^*$ eşitliğini sağlayan U üniter matrisi vardır. Bu takdirde her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^* Ax = (Ux^*)^* \Lambda (Ux^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| (Ux^*)_i \right|^2 \tag{3.4}$$

elde edilir. $\left| (Ux^*)_i \right|^2$ negatif olmadığından

$$\lambda_n \sum_{i=1}^{n} \left|(Ux^*)_i\right|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|(Ux^*)_i\right|^2 = x^* Ax \le \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \left|(Ux^*)_i\right|^2 \tag{3.5}$$

dır. Ayrıca U üniter matris olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} \left|(Ux^*)_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = x^* x$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik (3.5) eşitsizliğinde uygulanırsa (3.1) eşitsizliği elde edilir.

(3.2) eşitliğini ispatlayalım. (3.3) eşitliği de benzer şekilde ispatlanır. (3.1) eşitsizliğinden her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\frac{x^* Ax}{x^* x} \le \lambda_1 \tag{3.6}$$

dir. Eğer x vektörü λ_1 öz değerine ait öz vektör ise eşitlik sağlanır, yani

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow x_1^* Ax_1 = \lambda_1 x_1^* x_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{x_1^* Ax_1}{x_1^* x_1} \tag{3.7}$$

olur. (3.6) ve (3.7) ifadelerinin sonucu olarak (3.2) eşitliği elde edilir.

Not 3.1.1. Rayleigh – Ritz teoremi ile hermityen matrislerin sadece en büyük ve en küçük öz değerleri karakterize edilebilir. Geri kalan öz değerler hakkında yorum yapamayız. Şimdi Rayleigh – Ritz teoremini esas alarak hermityen matrislerin diğer öz değerlerini karakterize edelim:

$A \in M_n$ hermityen matrisinin λ_i öz değerine ait öz vektör u_i olmak üzere $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ kümesi A matrisinin ortonormal öz vektörleri kümesi olsun. Bu takdirde $\Lambda = köş(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ve $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}$ olmak üzere $A = U\Lambda U^*$ dır. u_1 öz vektörüne dik her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$x^* Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| \left(u_i{}^* x \right) \right|^2 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left| \left(u_i{}^* x \right)_i \right|^2 \tag{3.8}$$

dir. $\left| \left(u_i{}^* x \right)_i \right|^2$ negatif olmadığından

$$x^* Ax = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left| \left(u_i{}^* x \right) \right|^2 \le \sum_{i=2}^{n} \lambda_2 \left| \left(u_i{}^* x \right) \right|^2 = \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} \left| \left(U^* x \right)_i \right|^2 = \lambda_2 x^* x \;\Rightarrow \lambda_2 \ge \frac{x^* Ax}{x^* x} \tag{3.9}$$

elde edilir. Eğer x, u_2 vektörü alınırsa öz değer tanımından (3.9) eşitsizliğinde eşitlik sağlanır.

$$Au_2 = \lambda_2 u_2 \Rightarrow u_2{}^* Au_2 = \lambda_2 u_2{}^* u_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{u_2{}^* Au_2}{u_2{}^* u_2} \tag{3.10}$$

(3.9) ve (3.10) ifadelerinden

$$\lambda_2 = \max_{\substack{x \ne 0 \\ x \perp u_1}} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \max_{\substack{x^* x = 1 \\ x \perp u_1}} x^* Ax \tag{3.11}$$

karakterize edilir. Bu eşitliği her öz değer için genelleştirirsek

$$\lambda_k = \max_{\substack{x\neq 0 \\ x\perp u_1,u_2,\ldots,u_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{x^*x=1 \\ x\perp u_1,u_2,\ldots,u_{k-1}}} x^*Ax \ , \ k=2,3,\ldots,n \tag{3.12}$$

$$\lambda_{n-k} = \min_{\substack{x\neq 0 \\ x\perp u_n,u_{n-1},\ldots,u_{n-k+1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\substack{x^*x=1 \\ x\perp u_n,u_{n-1},\ldots,u_{n-k+1}}} x^*Ax \ , \ k=1,2,\ldots,n-1 \tag{3.13}$$

elde edilir.

(3.12) ve (3.13) eşitliklerinin kullanılması için öz vektörleri bilinmesi gerektiğinden kullanımı azdır. Fakat bu eşitlikler önemli bir karakterizasyonun gelişmesini sağlamıştır.

Teorem 3.1.2(Courant – Fischer). $A\in M_n$ hermityen matrisinin öz değerleri $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n \\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k \tag{3.14}$$

$$\min_{w_1,w_2,\ldots,w_{k-1}\in\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n \\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{k-1}}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k \tag{3.15}$$

dir. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. $A\in M_n$ hermityen matris olduğu için spektral ayrışımdan $\Lambda = köş(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ olmak üzere $A=U\Lambda U^*$ eşitliğini sağlayan U üniter matrisi vardır. Herhangi bir $\{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\}\subset\mathbb{C}^n$ cümlesi verilsin. $w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}$ vektörlerinin her birine dik her $0\neq x\in\mathbb{C}^n$ için $\{U^*x : x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0\} = \{y\in\mathbb{C}^n : y\neq 0\}$ olmak üzere

$$\frac{x^*Ax}{x^*x}=\frac{(U^*x)^*\Lambda(U^*x)}{x^*x}=\frac{(U^*x)^*\Lambda(U^*x)}{(U^*x)^*(U^*x)}=\frac{y^*\Lambda y}{y^*y} \tag{3.16}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{x\neq 0,x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}}\frac{x^*Ax}{x^*x} &= \min_{\substack{y\neq 0,y\in\mathbb{C}^n\\ y\perp U^*w_1,U^*w_2,\ldots,U^*w_{n-k}}}\frac{y^*\Lambda y}{y^*y}\\
&= \min_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,U^*w_2,\ldots,U^*w_{n-k}}} y^*\Lambda y\\
&= \min_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,U^*w_2,\ldots,U^*w_{n-k}}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|y_i^{\,2}\right|\\
&\leq \min_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,U^*w_2,\ldots,U^*w_{n-k}\\ y_1=y_2\ldots=y_{k-1}=0}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|y_i^{\,2}\right|\\
&= \min_{\substack{y^*y=1\\ y\perp U^*w_1,U^*w_2,\ldots,U^*w_{n-k}\\ |y_k|^2+|y_{k+1}|^2+\ldots+|y_n|^2=1}}\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\left|y_i^{\,2}\right|\\
&\leq \lambda_k\sum_{i=k}^{n}\left|y_i^{\,2}\right|=\lambda_k
\end{aligned}$$

olur. O halde herhangi bir $\{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\}\subset\mathbb{C}^n$ cümlesi

$$\min_{\substack{x\neq 0,x\in\mathbb{C}^n\\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}}\frac{x^*Ax}{x^*x}\leq\lambda_k \tag{3.17}$$

eşitsizliği vardır. (3.13) eşitliğinde $k=n-k$ alınırsa

$$\lambda_k = \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \perp u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{k+1}}} \frac{x^* A x}{x^* x} \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu taktirde (3.17) eşitsizliğinde $w_i = u_{n-i+1} (1 \leq i \leq k-1)$ alınırsa eşitlik sağlanır. Sonuç olarak

$$\max_{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \min_{\substack{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

eşitliği sağlanır.

Not 3.1.2. Courant – Fischer teoremi

$$\max_{boyS=k, S \subseteq \mathbb{C}^n} \min_{\substack{x \in S \\ x^* x = 1}} x^* A x = \lambda_k \tag{3.19}$$

$$\min_{boyS=n-k+1, S \subseteq \mathbb{C}^n} \max_{\substack{x \in S \\ x^* x = 1}} x^* A x = \lambda_k \tag{3.20}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Sonuç 3.1.1. $A \in M_n$ hermityen matrisinin $\lambda_j(A)$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü e_j olmak üzere ortonormal öz vektörleri $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $e_1, e_2, \ldots, e_k$ vektörlerinin ürettiği uzay *M* olmak üzere

$$\lambda_k(A) = \min_{\|x\|=1, x \in M} x^* A x = \min_{\|x\|=1, x \in M} \langle x, Ax \rangle \tag{3.21}$$

dir. $boy\, M = k$ olmak üzere, $M \subseteq \mathbb{C}^n$ herhangi alt uzay ise

$$\lambda_k(A) \le \min_{\|x\|=1, x\in M} \langle x, Ax \rangle$$

dir.

Teorem 3.1.3 (Singüler değerler için Courant – Fischer) $A \in M_n$ olmak üzere

$$\max_{boyS=k, S\subseteq\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\in S \\ x^* x=1}} \|Ax\| = s_k \tag{3.22}$$

$$\min_{boyS=n-k+1, S\subseteq\mathbb{C}^n} \max_{\substack{x\in S \\ x^* x=1}} \|Ax\| = s_k \tag{3.23}$$

dir. (Bhatia,1997)

Teorem 3.1.4 (Weyl) $A, B \in M_n$ hermityen matris olsun. Bu takdirde $k = 1,2,...,n$ için

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \le \lambda_k(A+B) \le \lambda_k(A) + \lambda_1(B) \tag{3.24}$$

eşitsizliği vardır. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. (1) eşitsizliğinden her $0 \ne x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_n(B) \le \frac{x^* Bx}{x^* x} \le \lambda_1(B) \tag{3.25}$$

dir. Bu takdirde

$$\lambda_k(A+B) = \max_{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n \\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}} \frac{x^*(A+B)x}{x^*x}$$

$$= \max_{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n \\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}} \left(\frac{x^*Ax}{x^*x} + \frac{x^*Bx}{x^*x} \right)$$

$$\geq \max_{w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}\in\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n \\ x\perp w_1,w_2,\ldots,w_{n-k}}} \left(\frac{x^*Ax}{x^*x} + \lambda_n(B) \right) = \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

eşitsizliği, yani (3.24) eşitsizliğinin birinci kısmı elde edilir. Eşitsizliğin ikinci kısmı da benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.1.2.(Weyl Monotonluk Teoremi) $A, B \in M_n$ hermityen matris olsun. B pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere $k = 1,2,\ldots,n$ için

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A+B) \tag{3.26}$$

dir. (Horn ve Johnson, 1985)

İspat. Weyl eşitsizliğinin birinci kısmından

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A+B),\ k = 1,2,\ldots,n \tag{3.27}$$

olduğunu biliyoruz. B pozitif yarı tanımlı olduğundan $\lambda_k(B) \geq 0$ dır. Bu takdirde (3.27) eşitsizliğinden

$$\lambda_k(A) \le \lambda_k(A+B)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3. $A, B \in M_n$ hermityen matris olsun. Bu takdirde $k = 1, 2, ..., n$ için $A \le B$ ise $\lambda_k(A) \le \lambda_k(B)$ dir.

Teorem 3.1.5(Yer Değiştirme Teoremi) H, $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $n \times n$ hermityen matris ve $1 \le m \le n$ olmak üzere *A, m* – kare matrisi *H*'ın bir esas alt matrisi olsun. Bu durumda $k = 1, 2, ...m$ için

$$\lambda_{k+n-m}(H) \le \lambda_k(A) \le \lambda_k(H) \tag{3.28}$$

dir. (Zhang, 1999)

İspat. Courant – Fischer teoreminden $1 \le m \le n$ olmak üzere *A* m – kare matrisi için

$$\lambda_k(A) = \max_{S_m^k \subseteq \mathbb{C}^m} \min_{x \in S_m^k, x^*x=1} x^* Ax \ \left(boy S_m^k = k \right) \tag{3.29}$$

$$\lambda_k(H) = \max_{S_n^k \subseteq \mathbb{C}^n} \min_{x \in S_n^k, x^*x=1} x^* Hx \ \left(boy S_n^k = k \right) \tag{3.30}$$

elde edilir. $boy S_0^k = k$ olmak üzere

$$S_0^k = \{ y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in S_m^k \} \subseteq \mathbb{C}^n \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $y^*Hy = x^*Ax$ olduğundan

$$\lambda_k(H) = \max_{S_n^k \subseteq \mathbb{C}^n} \min_{x \in S_n^k, x^*x=1} x^*Hx \geq \max_{S_0^k \subseteq \mathbb{C}^n} \min_{y \in S_0^k, y^*y=1} y^*Hy = \max_{S_m^k} \min_{x \in S_m^k, x^*x=1} x^*Hx = \lambda_k(A)$$

(3.28) eşitsizliğinin ikinci kısmı elde edilir. Eşitsizliğin birinci kısmının ispatı H yerine $-H$ alınarak benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.1.4. $A \in M_m$ hermityen matris olsun. $V^*V = I_n$ şartıyla herhangi bir $V \in M_{m,n}$ matrisi için

$$\lambda_{i+m-n}(A) \leq \lambda_i(V^*AV) \leq \lambda_i(A),\ 1 \leq i \leq m \tag{3.32}$$

dır. (Zhang,1999)

Sonuç 3.1.5.(Ky Fan Maksimum İlkesi) $A \in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) = \max_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_k \in \mathbb{C}^n, \\ x_1,x_2,\ldots,x_k \text{ ortonormal}}} \sum_{i=1}^{k} x_i^* A x_i,\ 1 \leq k \leq n \tag{3.33}$$

dır. (Zhang, 1999)

İspat. $x_2,\ldots,x_k \in \mathbb{C}^n$ herhangi ortonormal vektörler olmak üzere $V = [x_1\, x_2 \ldots x_k]$ olsun. $V^*V = I_n$ olduğundan (3.32) eşitsizliğinden

$$\lambda_1(V^*AV) \le \lambda_1(A), \lambda_2(V^*AV) \le \lambda_2(A), ..., \lambda_k(V^*AV) \le \lambda_k(A) \tag{3.34}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(V^*AV) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \tag{3.35}$$

dir, ayrıca $V^*AV \in M_k$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(V^*AV) = iz(V^*AV) = \sum_{i=1}^{k} x_i^* A x_i \tag{3.36}$$

dir. O halde (3.35) ve (3.36) ifadelerinden

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* A x_i \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \tag{3.37}$$

elde edilir. Eğer $x_1, x_2, ..., x_k$ vektörlerini A matrisinin birim öz vektörleri olarak seçersek

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* A x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \tag{3.38}$$

olur. Bu takdirde (3.37) ve (3.38) ifadelerinden

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A)=\max_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{C}^n,\\ x_1,x_2,\ldots,x_k\ ortonormal}}\sum_{i=1}^{k}x_i^*Ax_i$$

istenilen elde edilir.

Not 3.1.3. Ky Fan Maksimum İlkesi $A\in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(A)=\max_{\substack{UU^*=I\\ U\in M_{n,k}}} iz(UAU^*),\ 1\le k\le n \tag{3.39}$$

şeklinde de ifade edilebilir. (Horn ve Johnson, 1985)

Sonuç 3.1.6. $A\in M_n$ herhangi bir matris olsun. $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{C}^n$ ve $y_1,y_2,\ldots y_k\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k}s_j(A)=\max_{\substack{x_1,\ldots,x_k\ ortonormal\\ y_1,\ldots,y_k\ ortonormal}}\left|\sum_{j=1}^{k}\left\langle y_j,Ax_j\right\rangle\right|,\ 1\le k\le n \tag{3.40}$$

dir. Bu eşitlik $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k}s_j(A)=\max_{\substack{x_1,\ldots,x_k\ ortonormal\\ U\ üniter}}\left|\sum_{j=1}^{k}\left\langle x_j,UAx_j\right\rangle\right|,\ 1\le k\le n \tag{3.41}$$

şeklinde de ifade edilebilir. (Bhatia, 1997)

Sonuç 3.1.7. $A \in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(A) = \max_{\substack{UU^*=I \\ U \in M_{n,k}}} \det(U^* A U), \; 1 \le k \le n \tag{3.42}$$

dir. (Bhatia, 1997)

Sonuç 3.1.8. $A \in M_n$ olmak üzere

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(A) = \max_{\substack{UU^*=I \\ U \in M_{n,k}}} \det(U^* A U), \; 1 \le k \le n \tag{3.43}$$

dir. (Bhatia, 1997)

3.2. Blok Matrislerin Singüler Değer Eşitsizlikleri

Blok matisler, çeşitli matris eşitsizliklerinin elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Bu bölümde bazı özel tipteki blok matrislerin spektrumu karakterize edilmiştir. Son olarak da blok matrislerin singüler değer eşitsizliklerine yer verilmiştir.

Lemma 3.2.1. $A, B \in M_n$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blok matrisi tanımlansın. Bu takdirde

$$\sigma(M) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), ..., \lambda_n(A), \lambda_1(B), ..., \lambda_n(B)\} \tag{3.44}$$

dir.

Sonuç 3.2.1. $A \in M_n$ hermityen olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$ blok matrisi tanımlansın.

Bu takdirde

$$\sigma(M) = \{s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A), -s_n(A), ..., -s_1(A)\} \tag{3.45}$$

dir. Yani $j = 1, 2, ..., n$ için

$$s_j(A) = \lambda_j(A \oplus -A) \tag{3.46}$$

olur. (Zhang, 1999)

Lemma 3.2.2. $A \in M_{m,n}$ ve $rank\, A = r$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ blok matrisi tanımlansın.

(i) M matrisi hermityendir.

(ii) $\sigma(M) = \{-s_1(A), -s_2(A), ..., -s_r(A), \overbrace{0, 0, ..., 0}^{m+n-r}, s_r(A), ..., s_1(A)\}$ dır. Dolayısıyla $j = 1, 2, ..., r$ için $s_j(A) = \lambda_j(M)$ dir (Zhang, 1999).

Lemma 3.2.3. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı ise $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blok matrisi de pozitif yarı tanımlıdır. (Horn ve Johnson, 1985)

Lemma 3.2.4. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı ve $A \le B$ olsun. Bu takdirde $M = \begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix}$ blok matrisi de pozitif yarı tanımlıdır. (Zhang, 1999)

Teorem 3.2 .1 $H, K \in M_n$ hermityen matris olsun. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} H & K \\ K & H \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq \pm K \tag{3.47}$$

olur. (Zhang, 2001)

Teorem 3.2.2 $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı ve $B \in M_{n,m}$ olsun. $X \in M_n$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & X \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow X \geq B^* A^{-1} B \tag{3.48}$$

dir. (Zhang, 2001)

Teorem 3.2.3. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$s_j(A-B) \leq s_j(A \oplus B)\,,\ 1 \leq j \leq n \tag{3.49}$$

dir. (Zhan,2004)

İspat. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olduğundan Lemma 3.2.3' den $A \oplus B \geq 0$ ve $B \oplus A \geq 0$ dır. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A-B & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow (A-B) \oplus (B-A) \leq A \oplus B \tag{3.50}$$

dir.(3.50) ve Sonuç 3.1.3'den

$$\lambda_j((A-B)\oplus(B-A)) \le \lambda_j(A\oplus B) = s_j(A\oplus B),\ 1\le j\le 2n \tag{3.51}$$

olur. Son olarak (3.46) ve (3.51) ifadelerinden

$$s_j(A-B)) \le s_j(A\oplus B),\ 1\le j\le n$$

istenilen elde edilir.

(3.49) eşitsizliği Kittaneh (2008), çalışmasında (3.49) eşitsizliğinin genel hali ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.4. $A, B, X \in M_n$ ve A, B pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$s_j(AX-XB) \le \|X\| s_j(A\oplus B),\ j=1,2,...,n$$

dir. (Kittaneh, 2008)

Sonuç 3.2.2. $A, B, X \in M_n$ ve A, B pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere her üniter invaryant norm için

$$|||\, AX-XB\,||| \le |||\, X\,|||\,.|||\, A\oplus B\,||| \tag{3.53}$$

dir. $X = I$ alınırsa

$$|||\, A-B\,||| \le |||\, A\oplus B\,||| \tag{3.54}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5 $M, N \in M_n$ ve $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \geq 0$ olsun. Bu takdirde $r = \min\{m, n\}$ olmak üzere

$$2s_j(K) \leq s_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}, \; j = 1, 2..., r \tag{3.55}$$

dir. (Tao, 2006)

İspat. $M, N \in M_n$ olmak üzere $Q = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \geq 0$ olduğundan Teorem 2.4.6'dan

$$0 \leq \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & -K \\ -K^* & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} - 2Q \Rightarrow 2Q \leq \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

elde edilir. Sonuç 3.1.3 ve (3.56) ifadelerinden

$$2\lambda_j(Q) \leq \lambda_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} = s_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}, j = 1, 2..., m+n \tag{3.57}$$

dir. Lemma 3.2.2' den Q blok matrisinin öz değerleri

$$\sigma(M)=\{-s_1(K),-s_2(K),....,-s_r(K),\overbrace{0,0,....,0}^{m+n-r},s_r(K),...,s_1(K)\}$$

olduğundan (3.57)' den

$$2s_j(K)\le s_j\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix},\ j=1,2...,r$$

istenilen elde edilir.

(3.55) ve (3.49) eşitsizliklerinin, Tao (2006) çalışmasında eş değer oldukları gösterilmiştir.

Teorem 3.2.6. Aşağıdaki ifadeler eş değerdir.

(i) $A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere $1\le j\le n$ için $s_j(A-B)\le s_j(A\oplus B)$ dır.

(ii) $A,B\in M_n$ olmak üzere $1\le j\le n$ için $2s_j(XY^*)\le s_j(X^*X+Y^*Y)$ dir.

(iii) $M,N\in M_n$ ve $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}\ge 0$ olsun. Bu takdirde $r=\min\{m,n\}$ olmak üzere $j=1,2...,r$ için $2s_j(K)\le s_j\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ dir. (Tao, 2006)

3.3. Majorizasyon Eşitsizlikleri

Majorizasyon kavramı eşitsizlik türetmek için son derece güçlü ve kullanışlı bir teori olarak ortaya çıkmıştır. Issai Schur (1923)' un öncü çalışması ' pozitif yarı tanımlı bir matrisin öz değerleri, köşegen elemanlarını majorize eder' keşfiyle matris teoriye girmiştir. Böylece majorizasyon kavramının matris eşitsizliklerinde de önemli artmıştır.

Bu bölümde çalışmamızda yardımcı olacak bazı majorizasyon tanımları ve eşitsizlikleri verilecektir.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenlerini büyükten küçüğe doğru sıraladığımızda elde edilen vektörü $x^{\downarrow} = (x_1{}^{\downarrow}, x_2{}^{\downarrow}, ..., x_n{}^{\downarrow})$ şeklinde gösterelim.

$$x_1{}^{\downarrow} \geq x_2{}^{\downarrow} \geq ... \geq x_n{}^{\downarrow}$$

Benzer şekilde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenlerini küçükten büyüğe doğru sıraladığımızda elde edilen vektörü $x^{\uparrow} = (x_1{}^{\uparrow}, x_2{}^{\uparrow}, ..., x_n{}^{\uparrow})$ şeklinde gösterelim.

$$x_1{}^{\uparrow} \leq x_2{}^{\uparrow} \leq ... \leq x_n{}^{\uparrow}$$

Örneğin $x = (-2, 0, 8, 2)$ ise $x^{\downarrow} = (8, 2, 0, -2)$ ve $x^{\uparrow} = (-2, 0, 2, 8)$ şeklindedir.

Tanım 3.3.1 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k} x_i{}^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i{}^{\downarrow} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ise x, y tarafından *zayıf majorize* edilir denir ve $x \prec_w y$ ile gösterilir. $x \prec_w y$ ' ye ek olarak $\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i{}^{\downarrow}$ ise x, y tarafından *majorize e*dilir denir ve $x \prec y$ ile gösterilir. (Zhang, 2011)

Tanım 3.3.2 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin bileşenleri negatif olmasın. Bu takdirde

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \le \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

ise x, y tarafından *zayıf log- majorize* edilir denir ve $\log x \prec_w \log y$ ile gösterilir. $\log x \prec_w \log y$ ' ye ek olarak $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}$ ise x, y tarafından *log- majorize* edilir denir ve $\log x \prec \log y$ ile gösterilir. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.1 Log- majorizasyon majorizasyonu sağlar. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.2(Schur) $H \in M_n$ hermityen matrisinin köşegen elemanları $1 \le i \le n$ olmak üzere $d_i(H)$ ile gösterilsin. Bu takdirde $d(H) \prec \lambda(H)$ dir. (Zhang, 2011)

İspat. $H_k \ (1 \le k \le n)$ köşegen elemanları $d_1(H), d_2(H), ..., d_k(H)$ olan H matrisinin esas alt matrisi olsun. Bu takdirde Teorem 3.1.5' den

$$\sum_{i=1}^{k} d_i(H) = iz\, H_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_k) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H) \Rightarrow d(H) \prec_w \lambda(H) \tag{3.58}$$

olur. Ayrıca $k = n$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(H) = iz\, H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(H) \tag{3.59}$$

olur. Sonuç olarak (3.58) ve (3.59) ifadelerinden $d(H) \prec \lambda(H)$ elde edilir.

Teorem 3.3.3.(Weyl) $H \in M_n$ olmak üzere $|\lambda(A)| \prec \log s(A)$ dir. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.4. $A, B \in M_n$ hermityen matris olmak üzere

(i) $\lambda(A+B) \prec \lambda(A)+\lambda(B)$

(ii) $\lambda(A)-\lambda(B) \prec \lambda(A-B)$

dir. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.5. $A, B \in M_n$ olmak üzere

(i) $s(A+B) \prec_w s(A)+s(B)$

(ii) $|s(A)-s(B)| \prec_w s(A-B)$

dir. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.6. (Fan) $A \in M_n$ olmak üzere $\mathrm{Re}\,\lambda(A) \prec \lambda(\mathrm{Re}\,A)$ dir. (Zhang, 2011)

Teorem 3.3.7.(Fan Dominance Teoremi) $A, B \in M_n$ olsun. Bu takdirde $\|A\|_{(k)} \le \|B\|_{(k)}$, $1 \le k \le n$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart her üniter invaryant norm için $|||A||| \le |||B|||$ eşitsizliği sağlanmasıdır. (Zhang, 2011)

4.ANALİTİK ORTALAMA EŞİTSİZLİKLERİN MATRİSLERE UYGULANMASI

Bu bölümde literatürde bilinen analitik ortalama eşitsizliklerinin matris versiyonlarını inceleyeceğiz. Eşitsizlik matrislere uygulanırken aşağıdaki sıra takip edilir.

$X, Y \in M_n$ olsun.

$$|X| \leq |Y| \tag{4.1}$$

$$s_j(X) \leq s_j(Y),\ 1 \leq j \leq n \tag{4.2}$$

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(X) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(Y),\ 1 \leq k \leq n \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(X) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(Y),\ 1 \leq k \leq n \tag{4.4}$$

(4.1) - (4.4) eşitsizliklerinin her biri kendisinden sonraki eşitsizlikten kuvvetlidir. Sonuç 3.1.3'den dolayı (4.1) eşitsizliği (4.2) eşitsizliğinden kuvvetlidir. Log – majorizasyon majorizasyonu sağladığı için (4.3), (4.4) eşitsizliğinden kuvvetlidir. Yani (4.1) eşitsizliği en güçlü (4.4) eşitsizliği en zayıf eşitsizliktir. Fan Dominance teoreminden (4.4) eşitsizliği

$$|||X||| \leq |||Y||| \tag{4.5}$$

üniter invaryant norm eşitsizliğine denktir.

4.1. Aritmetik Geometrik Ortalama Eşitsizliği

Tanım 4.1.1. $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \tag{4.6}$$

eşitsizliğine *aritmetik geometrik ortalama eşitsizliği* denir.

(4.6) eşitliğinde x, y yerine sırasıyla x^2, y^2 alınırsa ve (4.6) eşitsizliğinin her iki tarafının karesini alırsak aritmetik geometrik eşitsizliğinin farklı iki formunu elde ederiz:

$$|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \tag{4.7}$$

$$xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \tag{4.8}$$

(4.6) - (4.8) eşitsizliklerinin her biri diğerinden elde edilebilir. Fakat bu eşitsizliklerin her birinin matris versiyonu farklıdır. İlk olarak literatürde (4.7) eşitsizliğinin matris formu üzerinde çalışılmıştır

(4.7) eşitsizliğinin matris versiyonları, $A, B \ge 0$ olmak üzere

$$|AB| \le \frac{A^2+B^2}{2} \tag{4.9}$$

$$s_j(AB) \le \frac{1}{2} s_j\left(A^2+B^2\right) \tag{4.10}$$

$$||| AB |||\leq \frac{1}{2} ||| A^2 + B^2 ||| \tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir. Fakat $A, B \geq 0$ olmak üzere (4.9) eşitsizliği doğru değildir. Gerçekten

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa eşitsizliğin sağlanmadığını gösterelim:

$$\left|AB\right| = ((AB)^* AB)^{\frac{1}{2}} = (B^* A^* AB)^{\frac{1}{2}} = (BA^2 B)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A^2 + B^2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2 + B^2}{2} - \left|AB\right| = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \frac{A^2 + B^2}{2} - \left|AB\right| \not\geq 0 \Rightarrow \frac{A^2 + B^2}{2} \not\geq \left|AB\right|$$

Not 4.1.1. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri değişmeli olsun. Bu takdirde (4.9) eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri değişmeli olduğundan Teorem 2.4.7'den AB matrisi de pozitiftir. Bu takdirde

$$(A - B)^2 \geq 0 \Rightarrow A^2 + B^2 - AB - BA = A^2 + B^2 - 2AB \geq 0 \Rightarrow A^2 + B^2 \geq 2AB = 2\left|AB\right|$$

Teorem 4.1.1. $A, B \in M_n$ olmak üzere

$$s_j(AB^*) \le \frac{1}{2} s_j(AA^* + BB^*),\ 1 \le j \le n \tag{4.12}$$

dir. (Bhatia ve Kittaneh, 2008)

İspat. $X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$$XX^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X^*X = \begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{bmatrix}$$

olur. X^*X matrisinin esas köşegen elemanlarını 0 matrisi alarak Y matrisini oluşturalım:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ B^*A & 0 \end{bmatrix} = \frac{X^*X - U(X^*X)U^*}{2} \tag{4.13}$$

Teorem 2.4.6'dan $U(X^*X)U \ge 0$ olduğundan (4.13) eşitliğinden $\frac{X^*X}{2} - Y$ matrisi de pozitif yarı tanımlıdır. Bu takdirde Sonuç 3.1.3' den

$$\frac{X^*X}{2} - Y \ge 0 \Rightarrow \frac{X^*X}{2} \ge Y \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_j\left(X^*X\right) \ge \lambda_j(Y),\ 1 \le j \le 2n \tag{4.14}$$

elde edilir. $X^*X \approx XX^*$ olduğundan öz değerleri aynıdır. $XX^*, AA^* + BB^*$ matrisleri pozitif yarı tanımlı olduğundan öz değerleri ile singüler değerleri aynıdır. Bu takdirde Lemma 3.2.1' den XX^* blok matrisinin öz değerleri

$$\lambda(XX^*)=(s_1(AA^*+BB^*), s_2(AA^*+BB^*), \ldots s_n(AA^*+BB^*), 0, \ldots, 0) \quad 1 \le j \le n \tag{4.15}$$

dir. Y hermityen blok matrisinin öz değerleri Lemma 3.2.2'den $s_j(A^*B)$ ve $-s_j(A^*B)(1 \le j \le n)$ dir:

$$\lambda(Y) = (s_1(A^*B), s_2(A^*B), \ldots s_n(A^*B), -s_n(A^*B), \ldots, -s_1(A^*B)) \tag{4.16}$$

Sonuç olarak (4.14), (4.15) ve (4.16) ifadelerinden

$$\frac{1}{2} s_j\left(AA^* + BB^*\right) \ge s_j(A^*B) \tag{4.17}$$

elde edilir ki istenendir.

(4.12) eşitsizliği (4.10) eşitsizliğinden güçlüdür. (4.12) eşitsizliğinde $A, B \in M_n$ matrisleri pozitif yarı tanımlı alınırsa (4.10) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.1. $A, B \in M_n$ olmak üzere her üniter invaryant norm için

$$|||\, AB \,||| \le \frac{1}{2} |||\, AA^* + BB^* \,||| \tag{4.18}$$

dır. Özel olarak $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı alınırsa

$$||| AB ||| \leq \frac{1}{2} ||| A^2 + B^2 |||$$

elde edilir.

İspat. Teorem 4.1.1' den $A, B \in M_n$ için

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A^* B) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} s_j(AA^* + BB^*), \; 1 \leq k \leq n \tag{4.19}$$

dir. Bu takdirde Fan Dominance teoreminden (4.19) eşitsizliği (4.18) eşitsizliğine denktir.

Bhatia ve Davis (1993) tarafından (4.18) eşitsizliği genelleştirilmiştir. Eşitsizliğe geçmeden önce ispatında kullanılan yardımcı teoremi verelim.

Lemma 4.1.1. AB matrisi hermityen olacak şekilde A, B herhangi matris olsun. Bu takdirde her üniter invaryant norm için

$$||| AB ||| \leq ||| \mathrm{Re}(BA) |||$$

dir. (Bhatia, 1997)

Teorem 4.1.2. $A, B, X \in M_n$ olsun. Bu takdirde

$$||| A^*XB ||| \le \frac{1}{2} ||| AA^*X + XBB^* ||| \tag{4.20}$$

dir. (Bhatia ve Davis ,1993)

İspat. $A, B, X \in M_n$ hermityen matris ve $A = B$ olsun. Öncelikle bu özel durum için (4.20) eşitsizliğini ispatlayalım:

A, X matrisleri hermityen olduğundan AXA matrisi de hermityendir. Gerçekten

$$(AXA)^* = A^*X^*A^* = AXA \tag{4.21}$$

dir. Bu takdirde A, XA matrislerinin çarpımı AXA matrisi hermityen olduğundan Lemma 4.1.1' den

$$||| AXA ||| \le ||| \mathrm{Re}(XA^2) ||| = \frac{1}{2} ||| (XA^2) + (XA^2)^* ||| = \frac{1}{2} ||| XA^2 + A^2X ||| \tag{4.22}$$

olur. Sonuç olarak $A, B, X \in M_n$ hermityen matris ve $A = B$ şartı için (4.20) eşitsizliği ispatlanmıştır. Şimdi daha genel bir durum için (4.20) eşitsizliğini ispatlayalım:

A, B hermityen matrisler ve X herhangi bir matris olsun. T ve Y blok matrisleri

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. T, Y blok matrisleri hermityen olduğundan (4.22) eşitsizliğinden

$$|||\, TYT \,||| \le |||\, T^2Y + YT^2 \,||| \tag{4.23}$$

elde edilir.(4.23) eşitsizliğindeki blok matrislerin çarpımı

$$TYT = \begin{bmatrix} 0 & AXB \\ BX^*A & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } T^2Y + YT^2 = \begin{bmatrix} 0 & AX^2 + X^2B \\ B^2X^* + X^*A^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. O halde (4.23) eşitsizliğinden istenen sonuç

$$|||\, AXB \,||| \le \frac{1}{2} |||\, A^2X + XB^2 \,||| \tag{4.24}$$

olarak elde edilir.

Son olarak $A, B, X \in M_n$ matrisleri için (4.20) eşitsizliği ispatlayalım: A, B matrislerinin polar ayrışımı U ,V pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere $A = A_1U$ ve $B = B_1V$ olsun. Bu takdirde

$$AA^*X + XBB^* = A_1^{\,2}X + XB_1^{\,2}$$

$$|||\, A^*XB \,||| = |||\, UA_1XB_1V \,||| = |||\, A_1XB_1 \,|||$$

eşitliklerinden ve (4.24) den

$$|||A^*XB|||\leq\frac{1}{2}|||AA^*X+XBB^*|||$$

elde edilir ki, istenendir.

İki pozitif yarı tanımlı matrisin çarpımlarının pozitif olması için iki matris değişmeli olmalıdır. Bu takdirde (4.6) eşitsizliği karekök fonksiyonu içerdiğinden eşitsizliğin matris versiyonlarını matrislerin değişmeli olup olmadıklarına göre iki durum altında inceleyeceğiz.

$A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı olsun. Bu takdirde (4.6) eşitsizliğinin matris versiyonları

$$\left|AB\right|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}(A+B) \tag{4.25}$$

$$s_j(\left|AB\right|^{\frac{1}{2}})\leq\frac{1}{2}s_j(A+B) \tag{4.26}$$

$$|||\left|AB\right|^{\frac{1}{2}}|||\leq\frac{1}{2}|||A+B||| \tag{4.27}$$

şeklindedir. $A,B\in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri değişmeli ise

$$\left|AB\right|^{\frac{1}{2}}=(AB)^{\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan (4.6) eşitsizliğinin matris versiyonları

$$A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}(A+B) \tag{4.28}$$

$$s(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \le \frac{1}{2}s_j(A+B) \tag{4.29}$$

$$|||\, A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \,||| \le \frac{1}{2}|||A+B||| \tag{4.30}$$

şeklinde yazılabilir.

Not 4.1.1' de A, B matrisleri yerine sırasıyla $A^{\frac{1}{2}}, B^{\frac{1}{2}}$ alınırsa (4.28) eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.1 de A, B matrisleri yerine sırasıyla $A^{\frac{1}{2}}, B^{\frac{1}{2}}$ alınırsa (4.29) ve (4.30) eşitsizlikleri sağlanır.

$A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olsun. Bu takdirde (4.6) eşitsizliğinin en zayıf matris versiyonu (4.27) eşitsizliği her üniter invaryant norm için ispatlanmamıştır. Bhatia ve Kittaneh (2000) tarafından iz normu için ispatlanmıştır. (4.26) eşitsizliği

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \le \frac{1}{2}s_j(A+B) \tag{4.31}$$

eşitsizliğine eş değerdir: (2.6) eşitliğinden X herhangi pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$s_j^{\,2}(X) = s_j(X^2) \Rightarrow s_j(X) = s_j^{\frac{1}{2}}(X^2) \tag{4.32}$$

dir. Bu takdirde

$$s_j(|AB|^{\frac{1}{2}}) = s_j^{\frac{1}{2}}(|AB|) = s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \tag{4.33}$$

eşitsizliğinden sonuç açıktır. (4.31) eşitsizliği 2×2 matrisler için ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.4. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olsun. Bu takdirde

$$s_n^{\frac{1}{2}}(AB) \le \frac{1}{2} s_n(A+B) \tag{4.34}$$

$$s_1^{\frac{1}{2}}(AB) \le \frac{1}{2} s_1(A+B) \tag{4.35}$$

dir. (Bhatia ve Kittaneh, 2000)

İspat. (4.34) eşitsizliğini gösterelim. (4.35) eşitsizliği de benzer şekilde gösterilir.

$A, B \in M_n$ matrisleri tersinir olsun. Bu takdirde

$$s_n(AB) = \lambda_n^{\frac{1}{2}}(BA^2B) = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}((BA^2B)^{-1})} = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}((B^{-1}A^{-2}B^{-1}))} = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}((B^{-1}A^{-2}B^{-1})) \tag{4.36}$$

$$\lambda_1(A^{-1}B^{-1}) \le s_1(A^{-1}B^{-1}) = \lambda_1(B^{-1}A^{-2}B^{-1}) \Rightarrow \lambda_1^{-\frac{1}{2}}(B^{-1}A^{-2}B^{-1}) \le \lambda_1^{-1}(A^{-1}B^{-1}) \tag{4.37}$$

dir. (4.36), (4.37) ifadelerinden ve $A^{-1}B^{-1} = B^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}A^{-1}B^{-\frac{1}{2}})B^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan

$$s_n(AB) \le \lambda_1^{-1}(A^{-1}B^{-1}) = \lambda_1^{-1}(B^{-\frac{1}{2}}A^{-1}B^{-\frac{1}{2}}) = \lambda_n(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}) = s_n(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.38) ve (4.29) ifadelerinden

$$s_n(AB) \le s_n(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \le \frac{1}{2}s_n(A+B) \tag{4.39}$$

istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.2. 2×2 boyutlu $A,B \ge 0$ matrisleri için (4.31) eşitsizliği

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \le \frac{1}{2}s_j(A+B),\ j=1,2$$

sağlanır.

Sonuç 4.1.3. 2×2 $A,B \ge 0$ matrisleri için (4.26) eşitsizliği

$$s_j(|AB|^{\frac{1}{2}}) \le \frac{1}{2}s_j(A+B),\ j=1,2$$

sağlanır.

$A,B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisleri için (4.8) eşitsizliğinin en zayıf matris versiyonu

$$|||\ AB\ ||| \le \frac{1}{4}|||\ A^2+B^2\ ||| \tag{4.40}$$

ve 2×2 matrisler için singüler değer formu

$$s_j(AB) \le \frac{1}{4} s_j(A+B)^2 \tag{4.41}$$

ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.5. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere (4.40) eşitsizliği doğrudur.(Bhatia ve Kittaneh, 2000)

İspat. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere (4.24) eşitsizliğinden

$$|||\, AB \,||| = |||\, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}} \,||| \le |||\, A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \,||| \tag{4.42}$$

elde edilir. Şimdi

$$s_j(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}) \le s_j(A+B)^2 \tag{4.43}$$

eşitsizliğini ispatlayalım.

$X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ olmak üzere T matrisi

$$T = XX^* = \begin{bmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$T^2 = \begin{bmatrix} * & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & * \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$$\frac{1}{2}(T^2 - UT^2U^*) = \begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

dir. (4.46) ve Sonuç 3.1.3'den

$$UT^2U^* \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}T^2 \geq \begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_j(T^2) = \frac{1}{2}s_j(T^2) \geq \lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{4.47}$$

elde edilir.

$$T \approx X^*X = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } s(T^2) = (s_1(A+B), s_2(A+B), ..., s_n(A+B), 0, ..., 0)) \tag{4.48}$$

dir. Ayrıca

$$\lambda\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{3}{2}}+B^{\frac{3}{2}}A^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}\right)=(s_1(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}),...,s_n(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}),-s_n(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}),...,-s_1(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}))$$

olduğundan ve (4.47) eşitsizliğinden

$$s_j(A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}})\le\frac{1}{2}s_j(A+B)^2,\ \ j=1,2,...,n \tag{4.49}$$

istenilen elde edilir. Paralel olarak

$$|||\ A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\ |||\le|||\ (A+B)^2\ ||| \tag{4.50}$$

eşitsizliği de doğrudur. (4.42) ve (4.49) eşitsizliklerinden

$$|||\ AB\ |||\le\frac{1}{2}|||\ A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}+A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}}\ |||\le\frac{1}{4}|||\ (A+B)^2\ ||| \tag{4.51}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.1.4. 2×2 $A,B\ge 0$ matrisleri için

$$s_j(AB) \le \frac{1}{4} s_j^2(A+B) \tag{4.52}$$

dir.

İspat. (4.31) eşitsizliğinin her iki tarafının karesi alınırsa (4.52) eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak iki eşitsizlik birbirine denktir.

Sonuç 4.1.5. 2×2 $A,B \ge 0$ matrisleri için (4.41) eşitsizliği sağlanır.

İspat.(4.52) eşitsizliği (4.41) eşitsizliğinden eş değer olduğunu gösterelim.X herhangi bir pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$s_j^2(X) = s_j(X^2) \tag{4.53}$$

dir. Bu takdirde (2.5) eşitliğinden

$$s_j^2(A+B) = s_j(A+B)^2 \tag{4.54}$$

olduğundan sonuç açıktır.

4.2. Heinz Ortalaması

Tanım 4.2.1. $a,b \in \mathbb{R}^+$ olsun. $0 \le v \le 1$ olmak üzere

$$\frac{a^v b^{1-v} + a^{1-v} b^v}{2} \tag{4.55}$$

ifadesine *a* ile *b* nin *Heinz Ortalaması* denir. *a* ile *b* nin *Heinz Ortalaması* $H_v(a,b)$ ile gösterilir ve

(1) $H_v(a,b) = H_{1-v}(a,b)$

(2) $H_{\frac{1}{2}}(a,b) = \sqrt{ab}$

(3) $H_0(a,b) = H_1(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$

eşitlikleri sağlanır.

Bu özelliklerden

$$\sqrt{ab} \le H_v(a,b) \le \frac{1}{2}(a+b) \tag{4.56}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Yani iki pozitif reel sayının Heinz ortalaması, aritmetik ortalaması ile geomerik ortalamasının ortasındadır.

(4.56) eşitsizliğinin üniter invaryant norm versiyonu

$$2|||A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}||| \le |||A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v||| \le |||A+B||| \tag{4.57}$$

şeklindedir. *X* herhangi bir matris olmak üzere (4.57) eşitsizliğinden kuvvetli olan

$$2|||A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}||| \le |||A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v||| \le |||AX+XB||| \tag{4.58}$$

eşitsizliği Bhatia ve Davis (1993) çalışmasında ispatlanmıştır.

(4.56) eşitsizliğinin singüler değer formu

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \le s_j(A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v) \le s_j(A+B) \tag{4.58}$$

dır. eşitsizliğin birinci kısmının doğru olmadığını Audenaert (2007) çalışmasında aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 4.2.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere $0 < v < 0.13$ için

$$s_2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) > s_2(H_v(A,B)) \tag{4.59}$$

dir.

Audenaert (2007) çalışmasında (4.58) eşitsizliğinin birinci kısmını ispatlamıştır. İspatta aşağıdaki teorem kullanılmıştır.

Teorem 4.2.7. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında monoton olsun. Bu takdirde $A, B \ge 0$ matrisleri için

$$Af(A) + Bf(B) \ge \left(\frac{A+B}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (f(A) + f(B)) \left(\frac{A+B}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.60}$$

eşitsizliği vardır. (Audenaert, 2007)

Teorem 4.1.8. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere $0 \le v \le 1$ için

$$s_j(A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v) \le s_j(A+B),\ 1 \le j \le n \tag{4.61}$$

dir. (Audenaert, 2007)

İspat. $f(t)=t^r (0\le t\le 1)$ fonksiyonu matris monotondur.($A\le B\to f(A)\le f(B)$) Bu takdirde (4.60) eşitsizliğinden

$$AA^r+BB^r\ge\frac{1}{2}\left(A+B\right)^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)\left(A+B\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.62}$$

elde edilir. Paralel olarak

$$\lambda_j(A^{r+1}+B^{r+1})\ge\frac{1}{2}\lambda_j((\left(A+B\right)^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)\left(A+B\right)^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}\lambda_j((\left(A+B\right)(A^r+B^r)) \tag{4.63}$$

dır.

$(A+B)(A^r+B^r)\oplus 0$ blok matrisinin sıfır olmayan öz değerleri $(A+B)(A^r+B^r)$ matrisinin öz değerleri ile aynıdır. Ayrıca

$$\begin{pmatrix}(A+B)(A^r+B^r) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{\frac{1}{2}} & 0\\ B^{\frac{1}{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^r+B^r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}>0 \tag{4.64}$$

eşitliğinden $(A+B)(A^r+B^r)\oplus 0$ blok matrisinin öz değerleri

$$\begin{pmatrix} (A+B)(A^r+B^r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^r+B^r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} > 0$$

matrisinin öz değerleri ile aynıdır. Bu takdirde Teorem 2.3.5' den

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}}) \le s_j \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \lambda_j((A+B)(A^r+B^r)) \qquad (4.65)$$

elde edilir. (4.63) ve (4.65) eşitsizliklerinden

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}}) \le \lambda_j(A^{r+1}+B^{r+1}) \qquad (4.66)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte A, B matrisleri yerine sırasıyla $A^{\frac{1}{1+r}} B^{\frac{1}{1+r}}$ matrisleri alınırsa

$$2s_j(A^{\frac{2r+1}{2r+2}} B^{\frac{1}{2r+1}} + A^{\frac{1}{2r+2}} B^{\frac{2r+1}{2r+2}}) \le \lambda_j(A+B) = s_j(A+B),\ 0 \le r \le 1 \qquad (4.67)$$

olur. $1-v = \dfrac{1}{2r+2}$ şeklinde tanımlanırsa (4.67) eşitsizliği

$$2s_j(A+B) \le s_j(A^v B^{1-v} + A^{1-v} B^v),\ \frac{1}{2} \le v \le \frac{3}{4} \text{ ve } 0 \le v \le \frac{1}{4} \qquad (4.68)$$

eşitsizliğine eş değerdir.

Sonuç olarak (4.61) eşitsizliğini $\frac{1}{2} \le v \le \frac{3}{4}$ $\left(0 \le v \le \frac{1}{4}\right)$ için gösterildi. Şimdi $\frac{3}{4} \le v \le 1$ $\left(\frac{1}{4} \le v \le \frac{1}{2}\right)$ aralığı için gösterelim:

$(A+B)(A^r+B^r)\oplus 0$ blok matrisinin sıfır olmayan öz değerleri $(A+B)(A^r+B^r)$ matrisinin öz değerleri ile aynıdır. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} (A+B)(A^r+B^r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\frac{r}{2}} & 0 \\ B^{\frac{r}{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \tag{4.69}$$

eşitliğinden $(A+B)(A^r+B^r)\oplus 0$ blok matrisinin öz değerleri

$$\begin{pmatrix} (A+B)(A^r+B^r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\frac{r}{2}} & 0 \\ B^{\frac{r}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\frac{r}{2}}(A+B)A^{\frac{r}{2}} & A^{\frac{r}{2}}(A+B)B^{\frac{r}{2}} \\ B^{\frac{r}{2}}(A+B)A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}}(A+B)B^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix} > 0$$

blok matrisinin öz değerleri ile aynıdır. İspatın devamında (4.68) eşitsizliği elde edilirken uygulanan işlemler sırasıyla uygulanarak (4.61) eşitsizliğinin $\frac{3}{4} \le v \le 1$ $\left(\frac{1}{4} \le v \le \frac{1}{2}\right)$ değerleri için doğru olduğu görülür.

5. $A + iB$ VE $A+B$ MATRİSLERİNİN SİNGÜLER DEĞERLERİ

Bu bölümde $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|a+b| \le \sqrt{2}\,|a+ib| \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin matris versiyonları verilmiştir.

$A, B \in M_n$ pozitif tanımlı olmak üzere

$$|A+B| \le \sqrt{2}\,|A+iB| \tag{5.2}$$

eşitsizliğinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 5.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{2}\,|A+iB| = \frac{1}{(4+\sqrt{2})^{1/2}} \begin{pmatrix} 6+\sqrt{2} & 3-i \\ 3+i & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

olup $\sqrt{2}\,|A+iB| - (A+B)$ negatiftir. (Bhatia ve Kittaneh, 2009)

(5.1) eşitsizliğinin en güçlü matris versiyonu, (5.2) eşitsizliğinin doğru olmadığı gösterilmiştir. Fakat (5.2) eşitsizliğinden zayıf, (5.1) eşitsizliğinin singüler değer versiyonun doğruluğu kanıtlanmıştır.

Teorem 5.1. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere

$$s_j(A+B) \le \sqrt{2}\, s_j(A+iB) \tag{5.3}$$

dir . (Bhatia ve Kittaneh, 2009)

İspat. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olsun. $A+B$ pozitif yarı tanımlı matrisinin $\lambda_j(A+B)$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü e_j olmak üzere ortonormal öz vektörleri $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. M, $e_1, e_2, ..., e_j$ vektörlerinin ürettiği uzay olmak üzere Sonuç 3.1.1'den

$$s_j(A+B) = \min_{\|x\|=1, x\in M} \langle x, (A+B)x \rangle \tag{5.5}$$

olur. Bu takdirde (5.5) ve (5.1) ifadelerinden

$$\begin{aligned} s_j(A+B) &= \min_{\|x\|=1, x\in M} \langle x, (A+B)x \rangle \\ &= \min_{\|x\|=1, x\in M} \left(\langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \right) \\ &\le \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \left| \langle x, Ax \rangle + i \langle x, Bx \rangle \right| \\ &= \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \left| \langle x, (A+iB)x \rangle \right| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$s_j(A+B) \le \min_{\|x\|=1, x\in M} \left| \langle x, (A+iB)x \rangle \right| \tag{5.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Cauchy – Schwarz eşitsizliği, her $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \le \|x\|\|y\| \tag{5.8}$$

olduğunu ifade eder. (5.7) eşitsizliğine Cauchy – Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} s_j(A+B) &\le \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \left|\langle x, (A+iB)x\rangle\right| \\ &\le \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \|(A+iB)x\|\|x\| \\ &= \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \|(A+iB)x\| \end{aligned} \tag{5.8}$$

olur. Teorem 3.1.3 (Singüler değerler için Courant – Fischer) ve (5.8) ifadesinden

$$s_j(A+B) \le \sqrt{2} \min_{\|x\|=1, x\in M} \|(A+iB)x\| \le \sqrt{2} \max_{boyS=j, S\subseteq\mathbb{C}^n} \min_{\substack{x\in S \\ x^* x=1}} \|Ax\| = \sqrt{2} s_j(A+iB) \tag{5.9}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1. $A, B \in M_n$ pozitif yarı tanımlı olmak üzere

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \prod_{j=1}^{k} s_j(A+iB), k = 1, 2, ..., n \tag{5.10}$$

yani

$$s(A+B) \prec_w \log s(A+iB) \tag{5.11}$$

dir.

(5.11) eşitsizliği Sonuç 5.1' de pozitif yarı tanımlı matrisler için gösterilmiştir. (5.11) eşitsizliği $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı, $B \in M_n$ hermityen matris olmak üzere Bhatia ve Kittaneh (2009) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 5.2. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı, $B \in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \prod_{j=1}^{k} s_j(A+iB), k = 1,2,...,n \tag{5.12}$$

dir . (Bhatia ve Kittaneh, 2009)

İspat. $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı, $B \in M_n$ hermityen matris olsun. Teorem 2.1.3 (i),(ii) ve (iv) ifadelerinden ve (5.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left|\det(A+B)\right| &= \left|\det A^{1/2}(I + A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}\right| \\
&= \left|\det A^{1/2} \det(I + A^{-1/2}BA^{-1/2}) \det A^{1/2}\right| \\
&= \left|\det A \det(I + A^{-1/2}BA^{-1/2})\right| \\
&= \left|\det A\right| \prod_{j=1}^{n} \left|1 + \lambda_j(A^{-1/2}BA^{-1/2})\right| \\
&\le \left|\det A\right| \prod_{j=1}^{n} \sqrt{2} \left|1 + i\lambda_j(A^{-1/2}BA^{-1/2})\right| \\
&= \sqrt{2^n} \left|\det A\right| \left|\det(I + iA^{-1/2}BA^{-1/2})\right| \\
&= \sqrt{2^n} \left|\det(A+iB)\right|
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı, $B \in M_n$ için

$$\left|\det(A+B)\right| \le \sqrt{2^n}\left|\det(A+iB)\right| \tag{5.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.8'den

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) = \max_{\substack{UU^*=I \\ U\in M_{n,k}}} \det(U^*(A+B)U),\ 1 \le k \le n \tag{5.14}$$

dir. O halde

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) = \det(U^*(A+B)U)\ ,\ 1 \le k \le n \tag{5.15}$$

eşitliğini sağlayan en az bir $U^*U = I$ olmak üzere $U \in M_{n,k}$ matrisi vardır.

$A \ge 0$ olduğundan $U^*AU \ge 0$ dır. Bu takdirde (5.15) eşitliğine (5.13) eşitsizliği uygulanabilir:

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) &= \left|\det(U^*(A+B)U)\right| \\ &= \left|\det(U^*AU + U^*BU)\right| \\ &\le \sqrt{2^n}\left|\det(U^*AU + iU^*BU)\right|\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2^n}\,\det\left|U^*(A+iB)U\right| \tag{5.16}$$

Sonuç 3.1.8' den

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+iB) = \max_{\substack{VV^*=I \\ V\in M_{n,k}}} \det(V^*(A+iB)V)\,,\ 1\le k\le n \tag{5.17}$$

dir. Bu takdirde (5.16) ve (5.17) ifadelerinden $1\le k\le n$ için

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \sqrt{2^n}\,\det\left|U^*(A+iB)U\right| \le \max_{\substack{VV^*=I \\ V\in M_{n,k}}} \det(V^*(A+iB)V) = \prod_{j=1}^{k} s_j(A+iB) \tag{5.18}$$

istenilen elde edilir.

Sonuç 5.2. Log – majorizasyon majorizasyonu sağladığı için Teorem 5.2' den $A\in M_n$ pozitif yarı tanımlı, $B\in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \sum_{j=1}^{k} s_j(A+iB)\,,\ k=1,2,...,n \tag{5.19}$$

yani,

$$s(A+B) \prec_w s(A+iB) \tag{5.20}$$

dir.

(5.19) eşitsizliğinin doğru olması için A matrisinin pozitif yarı tanımlı olması gerekmez. Çünkü $A, B \in M_n$ hermityen matrisleri için de ispatlanmıştır.

Teorem 5.3. $A, B \in M_n$ hermityen matris olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(A+iB), k = 1,2,...,n \tag{5.21}$$

dır. (Bhatia ve Kittaneh, 2009)

İspat. $A, B \in M_n$ hermityen matris olmak üzere $A+B$ hermityen matrisinin $\lambda_j(A+B)$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü e_j olmak üzere ortonormal öz vektörleri $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. (5.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} s_j(A+B) &= \left|\left\langle e_j, (A+B)e_j \right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle e_j, Ae_j \right\rangle + \left\langle e_j, Be_j \right\rangle\right| \\ &\leq \sqrt{2}\left|\left\langle e_j, Ae_j \right\rangle + i\left\langle e_j, Be_j \right\rangle\right| \\ &= \sqrt{2}\left|\left\langle e_j, (A+iBe_j \right\rangle\right| \end{aligned} \tag{5.22}$$

elde edilir.(5.22) eşitsizliğinden

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A+B) \leq \sqrt{2}\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle e_j, (A+iBe_j \right\rangle\right| \tag{5.23}$$

dir. Sonuç 3.1.6 ‘ dan $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{C}^n$ ve $y_1, y_2, ...y_k \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(A+iB) = \max_{\substack{y_1,y_2,...,y_k \, ortonormal \\ x_1,x_2,...,x_k \, ortonormal}} \sum_{i=1}^{k} \left\langle y_i, (A+iB)x_i \right\rangle \tag{5.24}$$

dir.(5.24) ve (5.25) ifadelerinden

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \sqrt{2} \sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle e_j, (A+iBe_j \right\rangle \right| \le \max_{\substack{x_1,...,x_k \, ortonormal \\ y_1,...,y_k \, ortonormal}} \left| \sum_{j=1}^{k} \left\langle y_j, Ax_j \right\rangle \right| = \sum_{j=1}^{k} s_j(A+iB)$$

istenilen elde edilir.

Sonuç 5.3. $A, B \in M_n$ hermityen matris ve $|||.|||$ üniter invaryant norm olmak üzere

$$|||A+B||| \le |||A+iB||| \tag{5.25}$$

dir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada literatürde, reel sayılarda tanmlanan bazı eşitsiliklerin ve ortalamaların matrislere nasıl uygulandığı incelenmiştir. Matrisler üzerinde yeni ortalamalar tanımlanarak farklı eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Audenaert K., 2007, A singular value inequality for Heinz means, *Linear Algebra Appl.* 422 , 279-283.

Bhatia R., , 2007, Positive Definite Matrices, *Princeton University Press*, Princeton.

Bhatia, R.,1997, Matrix Analysis, *Springer–Verlang*, New York.

Bhatia, R., Kittaneh, F., 2000,Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, *Linear Algebra and its Applications*, 308,203-211

Bhatia, R., Davis, C., 1993, More Matrix forms of the arithmetic-geometric mean inequality, *SIAM J. Matrix Analysis*, 14, 132-136.

Bhatia, R., Kittaneh, F., 1990, On the singular values of a product of operators, *SIAM J. Matrix Analysis*, 11,272-277.

Bhatia R., Kittaneh F., 2008, The Matrix Arithmetic-Geometric Mean Inequality revisited, *Linear Algebra and its Applications*, 428, 2177-2191.

Bhatia R. ve Kittaneh F., 2009**,** The singular values of *A + B and A + iB***,** *Linear Algebra and its Applications*, 431, 1502–1508.

Bozkurt D., Türen B., ve Solak S., 2005, Lineer Cebir, *Selçuk Üniversitesi Yayınları.*

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1991,Topics in Matrix Analysis, *Cambridge University Pres.*

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge University Pres.*

Lang, S., 1986, Introduction to Linear Algebra, *Springer-Verlang*, New York.

Marshall, A.W., Olkin, I., 1979, Inequalities: Theory of Majorization and its Applications, *Academic Pres.*

Murad, M.A., 2003, The Löwner Ordering of Hermitian Matrices, Yüksek Lisans Tezi, The University of Jordan, *Faculty of GraduadeStudies*.

Tao, Y., 2006, More results on singular value inequalities of matrices, *Linear Algebra and its Applications*,416, 724-729

Ulukök Z.,2009, 2×2 Blok Matrisler için Eşitsizlikler, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Zhan, X.,2004, On some matrix inequalities, *Linear Algebra Appl.,*376,299-303.

Zhan X. , 2000, Singular values of differences of positive semidefinite matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl*., 22, (3), 819-823.

Zhang, F., 1999, Matrix Theory:Basic and Techniques, *Springer–Verlang*, NewYork.

Zhang, F., 2011, Matrix Theory:Basic and Techniques, *Springer–Verlang*, NewYork.

Zhang, F., 2001, Matrix Inequalities by Means of Block Matrices, *Math. Ineq. Apply.*, 4(4), 481-490.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Esma Baran
Uyruğu	**:**	Türk
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Meram\ KONYA, 04.12.1988
Telefon	**:**	0 (506)334 03 91
Faks	**:**	
e-mail	**:**	husna_baran42@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Dolapoğlu Anadolu Lisesi, Selçuklu, KONYA	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	2010
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2010	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi	Araş. Gör
2011	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi	Araş. Gör