T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilim Dalı
Sayısal Yöntemler Bilim Dalı

Doktora Tezi

146910

Stokastik Programlama Yöntemiyle Bir Portföy Optimizasyonu Modelinin Geliştirilmesi

146910

Eyüp ÇETİN

2502010023

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öner ESEN

İstanbul, 2004

T.C
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüz **SAYISAL YÖNTEMLER** Bilim Dalında **2502010023** numaralı **EYÜP ÇETİN'in** hazırladığı **"STOKASTİK PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE BİR PORTFÖY OPTİMİZASYONU MODELİNİN GELİŞTİRİLMESİ"** konulu ~~YÜKSEK LİSANS~~ **/ DOKTORA** TEZİ ile ilgili **TEZ SAVUNMA SINAVI,** Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin 28.Maddesi uyarınca **07/09/2004 Salı** günü saat: **10.30'da** yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **.....KABULÜ.....**'ne* **OYBİRLİĞİ** /~~OYÇOKLUĞUYLA~~ karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	KANAATİ(*)	İMZA
PROF.DR.ÖNER ESEN	Kabulü	
PROF.DR.İBRAHİM DOĞAN	KABULÜ	
DOÇ.DR.ERHAN ÖZDEMİR	Kabulü	
YRD.DOÇ.DR.MEHPARE TİMOR	Kabulü	
YRD.DOÇ.DR.MURAT KIYILAR	Kabul	

Besim Ömer Paşa Caddesi Beyazıt-34452-İstanbul
Tel:0212 440 00 00 –14221 – 0212 514 01 35 Fax: 0212 440 03 40

ÖZ

Farklı risk ölçüsünü kabul eden Konno & Yamazaki modeli en önemli portföy optimizasyonu modellerindendir. Bu çalışmada, Konno & Yamazaki modeli esas alınarak stokastik programlama yöntemiyle bir portföy optimizasyonu modeli geliştirilmiştir. Önerilen probabilistik programlama modelinde, belirli güven seviyelerinde risk biraz daha indirgenebilmektedir. Geliştirilen model İMKB'den alınan verilerle uygulanmıştır. Uygulama modeli elektronik tablo aracı olarak Microsoft Excel 2000 versiyonu kullanılarak çözülmüştür. Önerilen model aynı verilerle çözülen Markowitz ve Konno & Yamazaki modelleriyle karşılaştırılmıştır. Önerilen modelin bazı üstünlükleri söz konusudur. İlk olarak, önerilen modelin portföylerinin standart sapmaları, Konno & Yamazaki portföylerinin standart sapmalarından düşüktür. İkinci olarak, önerilen model ilgili güven seviyesinde daha fazla getiri sunmaktadır. Dahası, önerilen model yaklaşık olarak %11 daha iyi çözüm üretmektedir. Önerilen model çok daha yüksek performanslı portföyler üretmektedir. Ayrıca, yeni model diğerlerine göre çok daha yüksek getiri oranı çözüm eşik değerine sahiptir. Son olarak, üç model arasında tam bir uyumun olduğu gösterilmiştir.

ABSTRACT

Konno & Yamazaki model which has a different risk measure, is one of the most important portfolio optimization models. In this dissertation, an alternative portfolio optimization model is developed based on Konno & Yamazaki model via stochastic programming method. Portfolio risk can be reduced more at some confidence levels by proposed probabilistic programming model. The proposed model is applied to the data taken from IMKB. The application model is solved as a spreadsheet model by Microsoft Excel 2000 version. The new model is compared with Markowitz and Konno & Yamazaki models, which are applied to the same data set. The developed model has some superiorities. Firstly, the standard deviations of the portfolios generated by proposed model are lower than that of the others. Secondly, the developed model proposes more rates of return at a specific confidence level. Moreover, the new model generates generally 11% better solutions. The model also generates portfolios with higher performance compared with the others' portfolios. Furthermore, the model has higher rates of return solution threshold value. Finally, it is shown that three models are totally in accordance with each other.

ÖNSÖZ

Modern finansal optimizasyon modellerinin en önemlilerinden birisi portföy optimizasyonu modelleridir. Söz konusu modellerde, genellikle belirli getiri seviyesinde risk minimize edilmekte veya belirli risk seviyesinde getiri maksimize edilmektedir. Portföy optimizasyonu için önerilen modellerden birisi, mutlak sapmalara dayanan Konno & Yamazaki modelidir.

Bu çalışmada, Konno & Yamazaki modeli esas alınarak bir portföy optimizasyon modeli geliştirilmiştir. Sözü edilen modelde, belirli güven seviyesinde getiriden katlanılabilir seviyede ödün verilerek riskin daha da küçüklenmesi amaçlanmıştır.

Teorik olarak geliştirilen model, İMKB-Ulusal 30 Endeksinden seçilen 12 hisse senedinin 60 aylık verileri ile uygulanmıştır. Elde edilen bulgular, klasik Markowitz ve Konno & Yamazaki modelleri ile ayrıntılı olarak karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın her aşamasında sürekli olarak yardımlarını ve desteğini yanımda hissettiğim değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Öner ESEN'e özellikle teşekkür ederim. Yine tecrübe ve birikimlerini paylaşarak yol gösteren değerli hocam Sayın Doç.Dr. Erhan ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, gösterdikleri sabır ve anlayıştan dolayı çalışma arkadaşlarıma ve özellikle de İstatistik birimi Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, her zaman maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan ve beni yetiştiren aileme ve gösterdiği anlayıştan dolayı eşime teşekkür ederim.

Arş. Grv. Eyüp ÇETİN

İÇİNDEKİLER

ÖZ (ABSTRACT)....iii
ÖNSÖZ....iv
ŞEKİLLER LİSTESİ....ix
TABLOLAR LİSTESİ....x
KISALTMALAR LİSTESİ....xi

GİRİŞ....1
1.BÖLÜM:OPTİMİZASYON KAVRAMI VE OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ....3
1.1. Optimizasyon Kavramı....3
1.2. Tarihsel Gelişim....4
1.3. Genel Optimizasyon Algoritması....6
1.4. Optimizasyon Modelleri....8
1.4.1. Matematik Programlama....9
1.4.1.1. Doğrusal Programlama....11
1.4.1.2. Tam Sayılı Programlama....13
1.4.1.3. Parametrik Programlama....14
1.4.1.4. Hedef Programlama....15
1.4.1.5. Doğrusal Olmayan Programlama....16
1.4.1.6. Kuadratik Programlama....16
1.4.1.7. Konveks Programlama....18
1.4.1.8. Ayrık Programlama....19
1.4.1.9. Konik Programlama....20
1.4.1.10. Geometrik Programlama....20
1.4.1.11. Dinamik Programlama....21
1.4.1.12. Stokastik Programlama....22
1.4.2. Sezgisel Optimizasyon....24
1.4.2.1. Sezgisel Optimizasyon Yöntemlerinin Bazı Özellikleri....24
1.5. Risk ve Belirsizlik Altında Optimizasyon....26

2.BÖLÜM:RASSAL DEĞİŞKENLER, OLASILIK DAĞILIMLARI VE UYGUNLUK TESTLERİ....28
2.1. Olasılık Uzayları ve Olasılık Ölçüsü....28
2.2. Rassal Değişken Kavramı....29
2.3. Olasılık Fonksiyonu....30
2.3.1. Kesikli Olasılık Fonksiyonu....30
2.3.2. Sürekli Olasılık Fonksiyonu....31
2.4. Birikimli Dağılım Fonksiyonu....32
2.4.1. Kesikli Birikimli Dağılım Fonksiyonu....32
2.4.2. Sürekli Birikimli Dağılım Fonksiyonu....33
2.5. Özel Olasılık Dağılımları....33
2.5.1. Normal Dağılım....35
2.5.2. Standart Normal Dağılım....38
2.5.3. Lognormal Dağılım....40

2.5.4. Student (t) Dağılımı.....42
2.6. Uygunluk Testleri.....43
2.6.1. Ki-Kare Testleri.....43
2.6.2. Kolmogorov-Smirnov Testi.....44
2.6.3. Bowman-Shelton (Jarque-Bera) Normallik Testi.....45
2.7. Stokastik Kavramı ve Stokastik Süreçler.....46

3.BÖLÜM:STOKASTİK PROGRAMLAMA VE STOKASTİK ÇÖZÜM DEĞERİ.....48
3.1.Tarihsel Gelişim.....48
3.2.Stokastik Programlamanın Uygulama Alanları.....50
3.3.Stokastik Programlamanın Genel Modeli.....52
3.3.1. Ölçü ve İntegral.....53
3.3.2. Deterministik Eşdeğerler.....60
3.4.Deterministik Karar Ağaçları.....69
3.5.Stokastik Karar Ağaçları.....69
3.6.Senaryo Oluşturma.....71
3.6.1. Yaklaşık Senaryo Çözümleri.....82
3.7.Stokastik Programlamanın Diğer Karar Modelleriyle İlişkileri.....83
3.7.1.Stokastik Programlama ve Yöneylem Araştırması Modelleri.....84
3.7.2.İstatistiksel Karar Teorisi ve Karar Analizi.....84
3.7.3.Dinamik Programlama ve Markov Karar Süreçleri.....87
3.7.4.Optimal Stokastik Kontrol.....88
3.8.Bilginin Değeri ve Stokastik Çözüm Değeri.....89
3.8.1. Deterministik ve Stokastik Amaç Değerlerinin Karşılaştırılması.....90
3.8.2. Olay Ağacında Deterministik Çözümler.....91
3.8.3. Tam Bilginin Beklenen Değeri (EVPI).....92
3.8.4. Stokastik Çözüm Değeri (VSS).....94
3.8.5. Basit Eşitsizlikler.....96
3.8.6. EVPI ve VSS Arasındaki İlişkiler.....97
3.8.7. EVPI ve VSS Değerlerindeki Sınırlar.....98

4.BÖLÜM:STOKASTİK PROGRAMLAMA TÜRLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....105
4.1.İki Aşamalı Stokastik Lineer Programlama.....105
4.1.1.Telafi Problemlerinin Özellikleri.....107
4.1.2.İki Aşamalı Stokastik Programların Çözüm Yöntemleri.....110
4.1.2.1.L-Şekil Ayrıştırma Yöntemi.....111
4.1.2.1.1.Uygunluk.....122
4.1.2.1.2.Çoklu Kesme Versiyonu.....124
4.1.2.2.İçsel Lineerleştirme Yöntemleri.....126
4.1.2.3.Temel Ayırma Yöntemleri.....130
4.1.2.4. İki Aşamalı Telafi Problemlerine Doğrusal Olmayan Yaklaşımlar.....135
4.1.2.4.1.Düzenlenmiş Ayrıştırma.....136
4.2.Çok Aşamalı Stokastik Programlama.....139
4.2.1. Çok Aşamalı Stokastik Programların Çözüm Yöntemleri.....145
4.2.1.1.İçiçe Ayrıştırma Yöntemi.....146

4.3. Probabilistik Kısıtlı Stokastik Programlama 157
4.3.1. Probabilistik Kısıtların Bazı Özellikleri 158
4.3.2. Probabilistik Kısıtlı Problemlerin Çözüm Yöntemleri 161
4.3.2.1.Ortak Probabilistik Kısıtlı Problemler 163
4.3.2.2.Ayrık Probabilistik Kısıtlı Problemler 166
4.4. Rassal Amaç Fonksiyonunun Deterministik Eşdeğeri 175
4.5. Stokastik Tamsayılı Programlama 176
4.5.1. Telafi Problemleri 177
4.5.2. Basit Tamsayılı Telafi 179
4.5.3. Probabilistik Kısıtlar 182
4.6.Stokastik Programlama ve Oyun Teorisi 184

5.BÖLÜM: PORTFÖY OPTİMİZASYONU VE STOKASTİK PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE BİR PORTFÖY OPTİMİZASYON MODELİ ÖNERİSİ 191
5.1.Portföy Optimizasyonu 191
5.1.1. Portföy Optimizasyonunda Etkin Sınır 191
5.1.2. Portföy Seçimi 192
5.1.3. Risk Ölçüleri ve Portföy Varyansı 193
5.1.4. Bazı Portföy Optimizasyon Modelleri 196
5.1.4.1. Markowitz Modeli 196
5.1.4.2. Kataoka Modeli 198
5.1.4.3. Telser Modeli 199
5.1.4.4. Konno & Yamazaki Modeli 199
5.1.4.5. Çarpıklık Tabanlı Modeller 201
5.1.5.Portföy Performansının Ölçülmesi 202
5.1.5.1.Sharpe Performans Kriteri 202
5.1.5.2. Treynor Performans Kriteri 203
5.2. Bir Portföy Optimizasyon Modeli Önerisi 204
5.2.1. Önerilen Modelin Varsayımları 209
5.3.Önerilen Modelin Uygulanması ve Diğer Modellerle Karşılaştırılması 210
5.3.1.Uygulamanın Kapsamı 210
5.3.2.Uygulamada İzlenen Yöntem 212
5.3.3.Verilerin Elde Edilmesi 214
5.3.3.1.Getirilerin Hesaplanması 214
5.3.4.Uygulama Modelinin Varsayımlarının Sağlanması 215
5.3.4.1.Ortalamaların Üretilmesi 215
5.3.4.2.Normallik Testleri 216
5.3.5.Uygulama Modelinin Kurulması ve Çözülmesi 223
5.3.5.1.Kurulan Modelin Çözülmesi 232
5.3.6.Çözümün Yorumlanması 235
5.3.7.Önerilen Modelin Duyarlılık Analizi 236
5.3.7.1.Duyarlılık Raporu (Sensitivity Report) 236
5.3.7.2.Sınır Değerler Raporu (Limits Report) 238
5.3.8.Önerilen Modelin Diğer Modellerle Karşılaştırılması 239
5.3.8.1.Etkin Sınırların Karşılaştırılması 240
5.3.8.2.Stokastik Çözüm Değeri 245
5.3.8.3.Portföy Performanslarının Karşılaştırılması 246

5.3.8.4.Yöntemler Arasındaki İlişkinin Gücü.....250
SONUÇ 252

EKLER.....256
EK 1. AYLIK GETİRİ ORANLARI.....256
EK 2. HAZİNE BONOSU.....260
EK 3. HAREKETLİ ORTALAMALAR.....261
EK4. HAREKETLİ ORTALAMALARIN TANIMSAL İSTATİSTİKLERİ VE KOLMOGOROV-SMİRNOV TESTLERİ.....264
EK5.HAREKETLİ ORTALAMALARIN Q-Q VE KUTU GRAFİKLERİ.....265
BİBLİYOGRAFYA.....277
ÖZGEÇMİŞ.....285

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.Genel Optimizasyon Algoritması....8
Şekil 2.Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu....37
Şekil 3. Standart Normal Dağılımın Altındaki Belirli Alan....38
Şekil 4.Lognormal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu....41
Şekil 5. Student (t) Dağılımı....43
Şekil 6. Deterministik Karar Ağacı....69
Şekil 7. Stokastik Karar Ağacı....70
Şekil 8. Senaryo Ağacı....72
Şekil 9. Örnek Bir Senaryo Ağacı....75
Şekil 10. Yöneylem Araştırması Modelleri....85
Şekil 11. Stokastik Programlama İçeren Karar Ağacı....87
Şekil 12. $pos\ W_{3x4}$ konisi....106
Şekil 13. İki Aşamalı Geniş Formun Blok Yapısı....113
Şekil 14. İki Aşamalı Dualin Blok Açısal Yapısı....114
Şekil 15. Örnek 4 İçin Telafi Fonksiyonları....117
Şekil 16. Örnek 7 İçin İlk Aşama Amaç Fonksiyonu ve İçiçe L-Şekil Yöntemince Üretilen Kesmeler....156
Şekil 17. Etkin Sınır....192
Şekil 18. Risk Tercihine Göre Portföy Seçimi....193
Şekil 19. Sharpe Performans İndeksi....203
Şekil 20. Hareketli Ortalamaların İkişerli Serpilme Diyagramları....222
Şekil 21. Kovaryans Diyalog Kutusu....225
Şekil 22. Önerilen Modelin Standart Solver Diyalog Kutusu....232
Şekil 23. Solver Results Diyalog Kutusu....233
Şekil 24. Önerilen Modelin Premium Solver Diyalog Kutusu....234
Şekil 25. Premium Solver Results Diyalog Kutusu....234
Şekil 26. Üç Modelin ρ-Standart Sapma Uzayındaki Etkin Sınırları....242
Şekil 27. L_{1p} Risk Modelinin ρ-Standart Sapma Uzayındaki Etkin Sınırı....243
Şekil 28. Önerilen Modelin ρ-L_{1p} Risk Uzayındaki Etkin Sınırı....244
Şekil 29. Üç Modelin Standart Sapma-Beklenen Getiri Uzayındaki Etkin Sınırları244

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Örnek 2 İçin Çözümler ve Optimal Değerler.....102
Tablo 2. Örnek 2 İkili Alt Problem Çözümleri.....103
Tablo 3. İMKB-Ulusal 30 Endeksinde Yer Alan Hisse Senetleri.....211
Tablo 4. Uygulama Kapsamına Alınan Hisse Senetleri.....212
Tablo 5. Hareketli Ortalamaların Tanımsal İstatistikleri.....216
Tablo 6. Hisse Senetlerinin Düzeltilmiş Aylık Getiri Oranları.....224
Tablo 7. Getirilerin Kovaryans Matrisi ve Pozitif Definitliği.....226
Tablo 8. Getirilerin Sapmaları ve Mutlak Değerler.....230
Tablo 9. Önerilen Modelin Optimal Çözümü.....235
Tablo 10. Duyarlılık Raporu Değeri Düzeltilen Hücreler Tablosu.....237
Tablo 11. Değeri Düzeltilen Hücre Sınırları Tablosu.....238
Tablo 12. Konno & Yamazaki Modelinin Optimal Çözümü.....239
Tablo 13. Markowitz Modelinin Optimal Çözümü.....240
Tablo 14. Üç Farklı Modelin %6 İstenen Getiri Oranında Portföy Önerileri.....241
Tablo 15. Güven Seviyelerine Göre Beklenen Getiriler.....246
Tablo 16. Güven Seviyelerine Göre Sharpe Performans İndeksleri.....248
Tablo 17. ρ=0,06 İçin Sharpe Performans İndekslerinin Karşılaştırılması.....249
Tablo 18. Üç Modelin Getiri Oranı Çözüm Eşik Değerleri.....249
Tablo 19. Modellerin Standart Sapmalarındaki Değişimler.....250
Tablo 20. Yöntemler Arasındaki Korelasyon Matrisi.....251

KISALTMALAR LİSTESİ

YA	Yöneylem Araştırması
EVPI	Tam Bilginin Beklenen Değeri
VPI	Tam Bilginin Değeri
VSS	Stokastik Çözüm Değeri
WS	Bekle-ve-gör
RP	Telafi Problemi
EEV	Beklenen Değer Çözümü Kullanımının Beklenen Sonucu
SOV	Stokastik Modelin Optimal Amaç Fonksiyonu Değeri
DOV	Deterministik Modelin Optimal Amaç Fonksiyonu Değeri
SPEV	İkililerin Beklenen Değer Toplamı
EVRS	Referans Senaryonun Beklenen Değeri
EPEV	İkililerin Beklenen Değer Beklentisi
NLDS (t,k)	İçiçe Ayrıştırma Yönteminde Özel Bir Alt Problem
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
TCMB	Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası

GİRİŞ

İnsanoğlu yüzyıllardır bilinçli ya da bilinçsiz olarak yaptığı işlerin tümünde her zaman *en iyi*yi yapmayı planlamış ve istemiştir. Bu çabalar, bazen bir işçinin belirli bir kuvvetle *maksimum* yükü kaldırabilmesi, bazen de uçaklardaki sürtünmenin *minimum*a indirgenmesi olarak karşımıza çıkagelmiştir. Yadsınamaz bir gerçektir ki, her zaman bir *optimizasyon* çabası var olmuştur. Leonhard Euler'in ifadesiyle "Doğada *maksimum* ya da *minimum* duyusunun olmadığı hiç bir olay yoktur."

Optimizasyon çabaları finans dünyasında da geniş ölçüde kendisine yer edinmiştir. Bu çabaların en başında ise şüphesiz portföy optimizasyonu gelmektedir. Yaklaşık yarım yüzyıldır portföy çeşitlendirmesi veya optimizasyonu konularında bir çok model geliştirilmiş ve önerilmiştir. Bu modellerden bazıları statik bazıları da dinamik yapıdadırlar.

Güçlü bir optimizasyon aracı olan stokastik programlama ile de gerek statik gerekse dinamik yapıda portföy optimizasyonu modelleri geliştirilmiştir. Bu modellerdeki asıl amaç problemin daha iyi modellenebilmesidir. İyi temsil yeteneğine sahip bir stokastik program deterministik programlara göre daha iyi çözüm üretebilmektedir. Bu nedenle, riskin minimizasyonu amaçlanan bir portföy optimizasyonu probleminin güçlü temsil yeteneğine sahip stokastik modeli riski biraz daha indirgeyebilmektedir.

Bu çalışmada ilk olarak genel optimizasyon tekniklerinden özet olarak söz edilmiş ve bazı özel olasılık dağılımları incelenerek stokastik programlama kavramına temel oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu bilgiler ışığında, stokastik programlama kavramı ve türleri ile çözüm yöntemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Portföy optimizasyonu için önerilen modellerden birisi Konno & Yamazaki modelidir. Bu model, mutlak sapmalara dayanan bir risk minimizasyonu modelidir.

Bu çalışmada, sözü edilen model esas alınarak, belirli güven seviyelerinde riski biraz daha küçükleyen bir statik model geliştirilmiştir. Bu amaç için stokastik programlama yöntemi kullanılmıştır.

Teorik olarak geliştirilen model, İMKB'den alınan gerçek verilerle uygulanmıştır. Kurulan modelin deterministik eşdeğeri etkin bir elektronik tablo olan Microsoft Excel 2000 versiyonuyla çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar, Markowitz ve Konno & Yamazaki modelleri ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma, modellerce üretilen etkin sınırlar, stokastik çözüm değeri ve portföy performansları kriterlerine göre yapılmıştır. Söz konusu üç model etraflıca karşılaştırılmış ve önerilen modelin üstünlükleri ayrıca belirtilmiştir. Anlatılanların gerektiğinde şekil ve tablolarla desteklendiği çalışmanın sonunda, üç model arasındaki uyum sorgulanmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

OPTİMİZASYON KAVRAMI VE OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ

Bu bölümde, optimizasyon kavramı üzerinde durularak optimizasyonun tarihsel gelişimindeki kilometre taşlarından kısaca bahsedilmiştir. Optimizasyonun matematiksel temelleri genel olarak irdelenmiş ve optimizasyon modelleri matematik programlama ve sezgisel optimizasyon adı altında kısaca incelenmiştir. Risk ve belirsizlik altındaki optimizasyon çabalarından söz edilerek bölüm noktalanmıştır.

1.1. Optimizasyon Kavramı

Optimizasyon kavramı, bir probleme en iyi mümkün çözüm bulma süreci olarak adlandırılabilir. Matematikte, bu süreç genellikle bir fonksiyonun değerinin verilen kısıtlar altında maksimize ya da minimize edilmesinden oluşur[1]. Optimizasyon, işlerin nasıl en iyi şekilde yapılabileceğiyle ilgilenir.

Bir optimizasyon probleminin çözümü zaman faktörüyle değişmezse, optimizasyon problemi *statik optimizasyon* olarak adlandırılır. Böyle bir problemin cebirsel ya da transendental eşitliklerle tanımlanmasına *matematiksel model* ya da kısaca *model* denir. Probleme ilişkin çözüm sadece modelin optimal çözümü olacaktır. Bu nedenle, özellikle fiziksel sistemler için, optimale yakın bir çözümün elde edilebilmesi için kurulacak model en azından sistemin gerçek davranışına oldukça yakın olmalıdır. Optimizasyon probleminin çözümü zamanın bir fonksiyonu ise, problem *dinamik optimizasyon* olarak adlandırılmaktadır[2].

---

[1] Christopher Clapham, **Coincise Dictionary of Mathematics**, 2nd Edition, New York, Oxford University Press, 1996, s. 196.

[2] David A. Wismer, R. Chattergy, **Introduction to Nonlinear Optimization: A Problem Solving Approach**, New York, Elsevier North-Holand Inc., 1978, s. 1.

1.2. Tarihsel Gelişim

Bir işin en iyi yolun seçilerek başarılması fikri uygarlık tarihi kadar eskidir. Örneğin, Yunan tarihçisi Herodotus'a göre, Mısırlılar Nil nehrinin her yıl taşması sonucu arazi sınırlarının yeniden belirlenmesi ve yeni sınırlara göre vergilendirme işleminin *en iyi* yolla yapılabilmesi için çaba sarfetmişlerdir. Bu çabalar, ölçme ve karar verme aracı olarak düzlem geometrisinin temel kavramlarının oluşturulmasına yol açmıştır[3]. Mısırlılar, Nil nehrinin bahar dönemlerindeki yıllık taşmalarında nehir kıyısından toplu halde uzaklaşıp sular çekildiğinde yine büyük topluluklar halinde geri dönüyorlardı. Çekilme işlemi çok kısa sürede yapılamamaktaydı. Bunun için günlerce önceden halk uyarılmalıydı. Bu amaçla, Mısırlılar *en iyi* çekilme zamanını hesaplayabilmek için bir tür takvim bile geliştirmişlerdi. Söz konusu takvimi de sayma ve geometri konusundaki birikimlerini kullanarak yapmışlardı[4].

Newton ve Leibniz tarafından Kalkülüs'ün (Calculus) 17. yüzyılda geliştirilmesi optimizasyon teorisinin gelişiminde önemli bir kilometre taşı olmuştur. Kalkülüs, hem matematiksel bir fonksiyonun hem de fonksiyon oluşturabilen bağımsız değişkenlerin maksimum veya minimum cinsinden optimal koşullarının elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Kalkülüs'ün kullanımı düzgün-davranışlı fonksiyonlarla sınırlandırılmıştır. Ancak, Kalkülüs uygulamalarında karşılaşılan cebirsel problemlerin çözümü bazen güç olabilmektedir. Dolayısıyla, Kalkülüs pragmatik anlamda gerçek dünya problemlerinin optimizasyonunda yeterli ve güçlü bir araç olamamaktadır[5].

J.L. Lagrange'ın 1788 yılında Lagrange çarpanları yöntemini bilim dünyasının hizmetine sunması önemli bir adım olmuştur. 1939'da W. Karush'un kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını bulması optimizasyon teorisinde yeni bir atılım olmuştur. II. Dünya Savaşı'nın başlamasıyla 1942'de

---

[3] Byron S. Gottfried, Joel Weisman, **Introduction to Optimization Theory**, New Jersey, Prentice Hall Inc.,1973, s. 4.
[4] Roger Cooke, **The History of Mathematics: A Brief Course**, Canada, John Wiley & Sons Inc., 1997, s. 38
[5] Gottfried, **a.g.e.**, s. 4.

İngiltere ve Amerika Birleşik Devletleri'nin Yöneylem Araştırması gruplarını oluşturması optimizasyon dünyası için bir dönüm noktası olmuştur. Sezgisel optimizasyon araçlarından olan yapay sinir ağları 1943'de W. McCulloch ve W. Pitts tarafından çalışıldı. Ertesi yıl ise, J. Von Neumann ve O. Morgenstern tarafından "Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı eserle oyun kuramı tanıtıldı[6].

II. Dünya Savaşı'ndan sonra yeni sınıf optimizasyon teknikleri geliştirildi. Sözkonusu teknikler daha karmaşık problemlere başarıyla uygulandı. Bunda, yüksek hızlı dijital bilgisayarların geliştirilmesi ve optimum değerlerin elde edilmesi için nümerik tekniklere matematiksel analizin uygulanması son derece etkili olmuştur. Nümerik teknikler Kalkülüs'ün bir takım zorluklarını ortadan kaldırmıştır[7].

Simplex yöntem 1947'de G.B. Dantzig tarafından geliştirildi. Bu, optimizasyon dünyasında gerçekten bir devrim sayılmaktadır. R. Bellman 1950'de dinamik programlama modelini ve çözümünü geliştirdi. 1951'de H. Kuhn ve A. Tucker daha önce Karush'un önerdiği kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını tekrar formüle ederek doğrusal olmayan programlama modelleri üzerinde çalıştılar. Yine aynı yıl, J. Von Neumann, G. Dantzig ve A. Tucker primal-dual lineer programlama modellerini geliştirdiler. 1952 yılında ise H. Markowitz portföy optimizasyonuna ilişkin modellerini önerdi. C. Lemke ve E. Beale 1954'de dual simplex yöntemi geliştirdi. Yine önemli bir katkı 1955'de stokastik programlama adı altında G. B. Dantzig tarafından yapıldı. 1956'da proje çizelgeleme yöntemleri olan PERT/CPM modelleri J.Kelley, W. Walker/ D. Malcolm, J.Roseboom, C. C. Fazar tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirildi. Kuadratik programlama 1956'da M. Frank ve P. Wolfe tarafından geliştirildi. 1958'deki önemli bir katkı R. Gomory tarafından tamsayılı programlama olarak adlandırıldı. A. Charnes ve W. Cooper şans kısıtlı programlama modellerini 1959'da optimizasyon dünyasına armağan ettiler. 1960'da sezgisel optimizasyon araçlarından birisi olan yapay zeka ve yöneylem araştırması ilişkilerini içeren çalışmalar yapıldı. Hedef programlama modeli yine A. Charnes ve W. Cooper tarafından 1965 yılında geliştirildi. 1975'de

[6] Saul I. Gass, "Great Moments in History", **OR/MS Today**, C. V, No: 29, October 2002, s. 31.
[7] Gottfried, **a.g.e.**, s.5.

çok amaçlı karar verme teorisinin temelleri M. Zeleny, S. Zionts, J. Wallenius, W. Edwards ve B. Roy tarafından atıldı. L. Khachian lineer programlama modellerinin çözümü için farklı bir algoritma olan elips yöntemini 1979'da geliştirildi. 1984'te J. Hopfield yapay sinir ağları kavramına önemli katkıda bulundu. Aynı yıl, N. Karmarkar lineer programlama için alternatif bir çözüm algoritması olan içnokta algoritmasını geliştirdi. 1992'de J.H. Holland tarafından genetik algoritma geliştirildi. 1995'te bir çok optimizasyon tekniklerini içeren veri madenciliği ekolü doğdu[8]. Çağdaş optimizasyon dünyasında da her geçen gün artan bir ivmeyle önemli katkılar yapılmakta ve bilimin hizmetine sunulmaktadır.

1.3. Genel Optimizasyon Algoritması

Optimizasyon problemlerinin çözümü için bir çok algoritma geliştirilmiştir. Çünkü, optimizasyon problemleri çok farklı biçimlerde ortaya çıkabilmektedir. Örneğin, tek değişkenli kısıtsız minimizasyon problemleri için bile kullanılabilecek bir çok algoritma mevcuttur. Problemlerin ve algoritmaların fazlalığına rağmen genel optimizasyon algoritmalarından bir tanesi aşağıdaki gibidir.

Genel Optimizasyon Algoritması I

x_0 çözümü için tahmini başlangıç değeri seç.

$k = 0, 1, \ldots$ için,

x_k optimalse, dur.

Çözümün yeniden tahmini için x_{k+1} belirle.

Yukarıdaki algoritma, optimallik testi ve yeni bir nokta x_{k+1}' in belirlenmesi işlemlerinin ayrı fikirler olarak ele alınması gerektiğini önermektedir. Ancak genellikle bu doğru değildir. Optimallik testinden alınan bilgi, sıklıkla, yeni noktanın hesaplanması için bir temel oluşturmaktadır. Örneğin, kısıtsız bir boyutlu problemi çözmeye çalışıyor olsaydık,

[8]Gass, **a.g.e.,** ss. 31-37.

$$\min f(x)$$

biçimindeki bir problem için, optimallik testi, büyük bir ihtimalle $f'(x) = 0$ koşulu üzerine kurulacaktı. $f'(x_k) \neq 0$ olması durumunda, x_k noktası optimal nokta olmayacaktı. $f'(x_k)$ ifadesinin işareti ve değeri f fonksiyonun x_k noktasında arttığını ya da azaldığını ve değişme hızını gösterecekti. Ancak böyle bir bilgi x_{k+1} 'in seçiminde değerli olabilir.

Bir çok optimizasyon algoritması aşağıdaki gibi daha belirli ve genel bir halde bulunurlar.

Genel Optimizasyon Algoritması II

x_0 çözümü için tahmini başlangıç değeri seç.

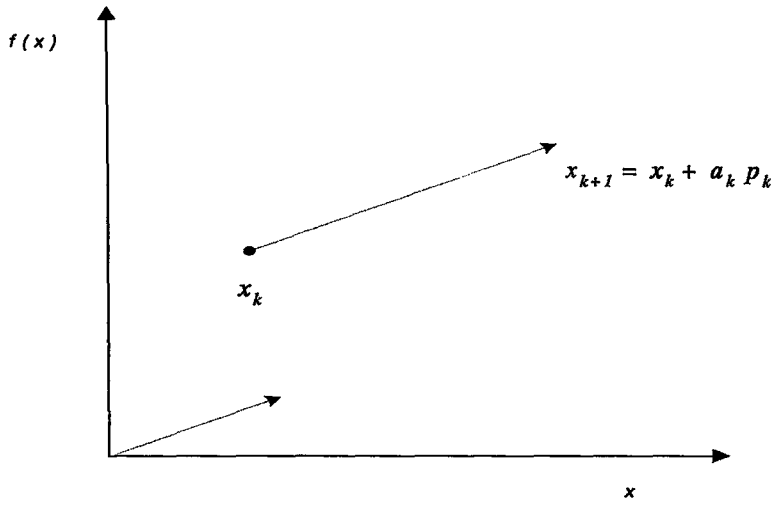
$k = 0, 1, \ldots$ için,

x_k optimalse, dur.

Çözümün daha gelişmiş tahminini yap: $x_{k+1} = x_k + a_k p_k$.

Yukarıdaki algoritmada, p_k genel olarak çözüm yönünü göstermesini umduğumuz *araştırma yönü* olarak tanımlanabilir. Araştırma yönü çözümümüzü iyileştiren bir ifade olarak karşımıza çıkmaktadır. a_k skaleri de x_{k+1} noktasının bulunmasını sağlayan *adım büyüklüğü* olarak adlandırılır. Araştırma yönü hesaplandıktan sonra adım büyüklüğü tek boyutlu geçici bir problemin çözülmesiyle bulunur. Şekil 1'de genel optimizasyon algoritmasının geometrik ifadesi yer almaktadır.

Optimallik testi, araştırma yönü ve adım büyüklüğünün hesaplanması aşamalarından oluşan genel optimizasyon algoritması II, geliştirmiş bir çok başarılı optimizasyon algoritmasının temelini oluşturmaktadır. Adı geçen algoritma, birçok doğrusal olmayan optimizasyon yazılımlarının geliştirilmesinde kullanılmıştır. Ayrıca, lineer programlama çözüm yöntemlerinden simpleks yöntemin de bir parçası



Şekil 1. Genel Optimizasyon Algoritması

olarak yer almıştır. Söz konusu algoritmik yaklaşım kısıtlı problemler için de optimallik koşulları geliştirmede kullanılabilmektedir[9].

1.4. Optimizasyon Modelleri

Karar verme modellerinin azımsanamayacak bir kısmında karar değişkenleri *miktarlar*dır. Örneğin üretim miktarları, farklı yatırım alternatiflerindeki portföy oranlarının büyüklüğü ve reklam bütçesinin paylaşımı gibi miktar sorunlarıyla karşılaşılabilir. Bu tür kararlarda alternatiflerin performansları araştırılır ve *değerlendirilir*. Sözkonusu modeller *değerlendirme modelleri* olarak adlandırılabilir. Yukarıda belirtilen miktar sorunundaki gibi problemlerde, tüm alternatifleri araştırmadan optimal miktar değerine bazı kantitatif tekniklerle ulaşılabilir. Bu tür kantitatif yöntemlerle optimal değeri bulmaya yönelik modelleri *optimizasyon modelleri* olarak nitelendirmek mümkündür. Dolayısıyla, bir değerlendirme modeli optimizasyon modellerinden ayrılmaktadır. Çünkü, değerlendirme modellerinde sunulan alternatiflerin sonuçları değerlendirilirken, optimizasyon modellerinde

[9]Stephen G. Nash, Ariela Sofer, **Linear and Nonlinear Programming,** USA, McGraw-Hill Inc., 1996, ss. 25-28.

gerçekten optimal alternatif ortaya çıkartılır. Değerlendirme modelleri optimizasyon modellerinin bileşenleridir. Optimizasyon modeli optimal sonucu bulmak amacıyla algoritmik araştırmasını yürütürken değerlendirme modelini kullanır. Dolayısıyla, bir optimizasyon modeli kurmak için gerekli ilk adım çalışan bir değerlendirme modeli kurmaktır[10].

Optimizasyon modelleri yukarıda da belirtildiği gibi matematiksel teknikler kullanmaktadır. Daha özel anlamda, optimizasyon modelleme geleneksel olarak *matematik programlama* olarak adlandırılmaktadır[11]. Diğer bir ifadeyle, matematik programlama, optimizasyon modelinin kurulması ve çözümün elde edilmesi işlemine verilen genel isimdir[12]. Geçmişten gelen bir gelenekle günümüzde de 'matematik programlama' ve 'optimizasyon' kavramları eşanlamlı olarak kullanılmaktadır.

Optimizasyon modellerinin başlıcaları, aşağıda matematik programlama ve sezgisel optimizasyon adı altında kısaca incelenecektir.

1.4.1. Matematik Programlama

Tipik bir matematik program (doğrusal ya da doğrusal olmayan) aşağıdaki gibi ifade edilebilir; n değişken sayısı ve m kısıt sayısı olmak üzere,

$$Optimum: \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[10]Samuel E. Bodily v.d.,**Quantitative Business Analysis: Text and Cases,** USA, Irwin/McGraw-Hill, 1998, ss.287-288.
[11]**A.e.,** s. 335.
[12]Oygur Yamak, **Üretim Yönetimi: Sistemler, İlkeler ve Teknikler,** İstanbul, Alfa Yayınları, 1994, s. 221.

$$\text{Kısıtlar:} \quad \begin{array}{lcl} g_1(x_1, x_2,\ldots,x_n) & & b_1 \\ g_2(x_1, x_2,\ldots,x_n) & \leq & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \} = \{ & \ldots. \\ g_m(x_1, x_2,\ldots,x_n) & \geq & b_m \end{array}$$

Bu ifadede, m farklı kısıt $\leq$, = , $\geq$ sembollerinden birisini içerebilir. Her g_i fonksiyonu ve b_i katsayıları sıfır seçilirse *kısıtsız matematik programlar* elde edilir. Burada, f amaç fonksiyonu ve g_i kısıt fonksiyonları doğrusal ise matematik program *doğrusal programlama*, diğer tüm durumlarda ise *doğrusal olmayan programlama* adını alır[13].

Matematik programlama modellerinde, f fonksiyonu optimize edilecek yani maksimize ya da minimize edilecek *amaç fonksiyonu*dur. Kâr, getiri, fayda ve türevleri gibi kavramlar amaç fonksiyonunda yer alırsa maksimize, maliyet, gider ve türevleri gibi kavramlar yer aldığında da minimize edilir. g_i fonksiyonlarının herbiri birer kısıt belirtmektedir. Kısıt sayısında herhangi bir sınır bulunmamaktadır. Kısıtların hepsi birlikte bir uygun çözüm bölgesi belirlerler. Optimal çözüm değeri veya değerleri bu bölgeye ait bir değer olmaktadır. Kısıtlar sınırlayıcı şartların ifadeleridir. İşletme problemlerinde sınırlayıcı şartların varlığını görebilmek oldukça kolaydır. Örneğin, üretilmesi planlanan ürünler için hammadde, işçilik, makine zamanı, stoklama alanı gibi sınırlamalar kısıtlar olarak ifade edilirler. Sözkonusu kısıtlar genelde doğrusaldırlar. Bazı özel problemlerde amaç fonksiyonu olmayabilmektedir. Optimizasyonun sözkonusu olmadığı böylesi modellerde sadece uygun bir çözümün varlığı yeterli olmaktadır.

---

[13] Richard Bronson, **Theory and Problems of Operations Research,** Schaum's Outline Series, USA, McGraw-Hill , 1982, s.1.

1.4.1.1. Doğrusal Programlama

Yöneylem araştırmasının önemli bir matematik aracını doğrusal programlama yöntemi teşkil etmektedir. Doğrusal programlama, matematik programlamanın önemli bir kısmi disiplinini oluşturmaktadır. Özellikle matematik programlama tekniklerinin ekonomik karar problemlerinde uygulanması doğrusal programlama aracılığıyla olmuştur. Nitekim ekonomik karar modellerinin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır[14]. Doğrusal programlama uygulama alanlarına,

- Portföy yönetimi problemleri,
- Taşımacılık problemleri,
- Tarımsal planlama problemleri,
- Üretim stok kontrol problemleri,
- Mamul karışım problemleri,
- Makine-işgücü atama problemleri,
- İşgücü programlama modelleri,
- Pazarlama problemleri,
- Doğal kaynakların ülke ihtiyaçlarına uygun şekilde tahsisi problemleri,
- Radyoterapi tedavi problemi,

gibi birbirinden çok farklı alanlar örnek verilebilir[15].

Doğrusal programlama modellerinde, hem amaç fonksiyonu hem de kısıtlar doğrusal ilişkiler şeklinde oluşturulur. Doğrusal programlama şu varsayımlara dayanır.

- *Kesinlik İlkesi:* Modelin tüm katsayılarının kesinlikle bilindiği varsayılır.
- *Sabit Orantılı Değişme İlkesi:* Hem amaç fonksiyonunda hem de kısıtlarda bir orantı olduğu varsayılır.

---

[14] Zekâi Yılmaz, **Sayısal Yöntemler,** 3.baskı, Bursa, Uludağ Üniversitesi Vakfı Yayınları, 2000, s. 53.
[15] Mehpare Timor, **Yöneylem Araştırması ve İşletmecilik Uygulamaları,** İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 2001, s. 1.

- *Toplanabilirlik İlkesi:* Tüm ürünlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır.
- *Bölünebilirlik İlkesi:* Çözüm değerlerinin tam sayı olmasının gerekmediği varsayılır.
- *Pozitiflik İlkesi:* Tüm değişkenlerin sıfır veya pozitif olduğu kabul edilir[16]. Çünkü, gerçek dünya problemlerinde karar değişkenleri negatif olamamaktadırlar. Bu ilke doğrusal programlamanın en önemli ilkelerinden birisidir. Ancak bazı çok özel problemlerde karar değişkenlerinin negatif olmasına izin verilebilmektedir.

Doğrusal programlamanın temel varsayımlarından kısaca bahsettikten sonra matematiksel olarak aşağıdaki şekilde tanımlamak mümkün olacaktır. Aslında, matematik programlama tanımı yapılırken doğrusal programlama tanımı da yapılmıştı. Ancak aşağıda daha ayrıntılı bir tanım verilmiştir.

n değişkenli ve m kısıtlı maksimizasyon formundaki bir doğrusal programlama modeli,

$$max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$i = 1,2,...,m \text{ ve } j = 1,2,..., n$$

olarak tanımlanabilir. Burada, a_{ij} bir birim x_j üretmek için kullanılması gereken kaynak miktarı, b_i mevcut i kaynağı miktarı, c_j birim kâr ve x_j karar değişkeni olarak tanımlanmıştır. $x_j \geq 0$ ifadesi pozitiflik koşulunu belirtmektedir. c_j birim

[16] Fahri M. Ünsal, Bahadtin Rüzgar, Nursel Rüzgar, **İşletme ve Ekonomi için Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Yöntemler,** Cilt 1, İstanbul, Türkmen Kitabevi, 2000, s. 114.

maliyeti gösterdiğinde yani minimizasyon halinde genellikle kısıtlardaki $\leq$ ifadesi $\geq$ şeklini almaktadır[17].

Yukarıdaki doğrusal programlama modeli daha kısa bir notasyon aracı olan matrislerle,

$$max\ c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

şeklinde ifade edilir. Burada, c kâr matrisi, A matrisi ağırlık matrisi veya teknolojik katsayılar matrisi, x vektörü karar değişkenleri vektörü ve b vektörü de kapasite vektörü olarak adlandırılır[18].

1.4.1.2. Tam Sayılı Programlama

Bazı matematik programlarda, ek bir sınırlama olarak değişkenlerin hepsinin veya bazılarının tam sayı değerler alması istenmektedir. Bu tür programlar tam sayılı programlama olarak bilinmektedir. Uygulamada genellikle üretim programlarında karşılaşılmaktadır. Çünkü, kesirli miktarda ürünlerin üretilmesi mümkün değildir.

Tam sayılı programlama hem doğrusal hem de doğrusal olmayan programlama için geçerlidir[19]. Ancak literatürde genellikle tam sayılı doğrusal programlama üzerinde durulmaktadır.

Klasik doğrusal programlama modeline ek olarak tüm değişkenlerin tam sayı olma koşulu eklenirse *tam sayılı (doğrusal) programlama* modeli elde edilir. Bazı değişkenlerinin tam sayı olması durumunda *karma tam sayılı (doğrusal)*

---

[17] Timor, **a.g.e.,** ss. 2-3.
[18] Yılmaz Tulunay, **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları,** 3.baskı, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 1991, ss. 208-209.
[19] Yılmaz, **a.g.e.,** s. 149.

programlama modeli elde edilmektedir. Tam sayılı programlama türlerinin önemli bir sınıfı da *transport modelleri*dir. Diğer önemli bir sınıf da *0-1 programlama* modelleridir. Tam sayılı programlama modellerinin çözümü için geliştirilen algoritmaların başında *dal-sınır yöntemi* ve *Gomory kesme düzlemi* gelmektedir. Ayrıca, grup teorisini kullanılarak da çözüme ulaşmak mümkün olmaktadır.

1.4.1.3. Parametrik Programlama

Parametrik doğrusal programlama, duyarlılık analizi yöntemlerinin genişletilmiş şeklidir. Parametrik doğrusal programlama, amaç fonksiyonu katsayılarındaki ve kısıtların sağ taraflarındaki önceden belirlenmiş sürekli değişimlerden dolayı optimum çözümde meydana gelen değişiklikleri inceler. Sözkonusu yöntem, doğrusal ya da doğrusal olmayan herhangi bir nicelik fonksiyonuna uygulanabilir. Doğrusal olmayan fonksiyonlarda işlemler biraz daha karmaşık olmaktadır.

Doğrusal programlama probleminin

$$\max z = \left\{ CX \middle| \sum_{j=1}^{n} P_j X_j = b, X \geq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlandığını varsayalım. Parametrik analiz genellikle amaç fonksiyonu ve kısıtların sağ taraflarındaki parametrik değişimlerle ilgilenmektedir. Tipik parametrik doğrusal fonksiyonlar,

$$C(t) = C + tC' \quad \text{ve} \quad b(t) = b + tb'$$

şeklinde yazılabilirler. Burada, C' ve b' verilmiş olan vektörler, t de değişim parametresidir. Kolaylık olması açısından $t \geq 0$ varsayılacaktır.

Parametrik analizdeki genel düşünce, $t = 0$ 'da optimum çözümle başlamaktır. Bu durumda, simpleks yöntemin optimumluk ve uygunluk koşulları kullanılarak $0 \leq t \leq t_1$ aralığı belirlenir. $t = 0$ 'da çözüm optimum ve uygun kalır. Bu durumda t_1, *kritik değer* olarak adlandırılır. İşlem, ardarda kritik değerlerin ve bunlara bağlı uygun optimum çözümlerin belirlenmesiyle devam eder. Bu durum, son çözümün $t > t_r$ için değişmeden kaldığı veya ötesinde başka uygun çözümün olmadığı $t = t_r$ noktasında sona erer[20].

1.4.1.4. Hedef Programlama

Doğrusal programlama modellerinde tek bir amaç fonksiyonu bulunmaktadır. Ancak gerçek dünya problemlerinde bir çok amaç bir arada olabilmektedir. Hatta bu amaçlar birbirleriyle çelişebilmektedir. Bu tür modeller için *çok amaçlı programlama* teknikleri geliştirilmiştir. Çok amaçlı doğrusal programlama problemlerinin çözümünde hedef programlama kullanılmaktadır. Bu teknikte, birbirleriyle çelişen unsurlar bulunduran problemin tüm kriterlerinin önem dereceleri belirlenir ve en önemli kriterlerin istendiği biçimde sonuçlanmasını hedeflenerek, daha az önemlilerde amaçtan sapmalara izin verilir.

Hedef programlamada, hedeflerden toplam sapmanın minimize edilmesi amaçlanır. Hedeflerden sapmalar halinde ortaya çıkacak maliyetler ceza değeri olarak amaç fonksiyonunda belirtilir. Kısıtlarda, herhangi bir şekilde ihlali mümkün olmayan *fonksiyonel kısıtlar* grubu ile hedeflerin aşılması veya altında kalınmasını ifade eden *hedef kısıtları* grubu yer alır. Daha sonra problem doğrusal programlama problemi olarak çözülür[21].

Hedef programlama, amaçların önceliklerinin belirlenmesine göre *eşdeğerli hedef programlama* ve *öncelikli hedef programlama* olarak iki gruba ayrılmaktadır.

---

[20] Hamdy A. Taha, **Yöneylem Araştırması,** Çev. Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf, İstanbul, Literatür Yayınları, 2000, ss. 324-325.
[21] Timor, **a.g.e.,** ss. 194-197.

Öncelikli hedef programlamada amaçların önceliklerine göre, modelin amaç fonksiyonundaki sapma değerlerine göreceli katsayılar verilmektedir.

1.4.1.5. Doğrusal Olmayan Programlama

Gerçek hayatta karşılaşılan çoğu problem için geliştirilen karar modellerinin kısıtlarında ve amaç fonksiyonunda doğrusal ilişkileri gözlemek zordur. Karar modelinin kısıtlarından en az biri veya amaç fonksiyonunun doğrusal olmadığı durumlar için geliştirilen kavram ve teknikler, matematik programlama tanımında değinildiği üzere, *doğrusal olmayan programlama* başlığı altında incelenmektedir. Doğrusal olmayan programlama problemini çözen etkin bir yöntem ve genel bir algoritma geliştirilememiştir. Ancak amaç fonksiyonu ve kısıtların yapılarına göre özel modellerin çözüm teknikleri söz konusudur[22].

Doğrusal olmayan programlama geniş bir yelpazede uygulama alanına sahiptir. İşletme ve ekonomi problemlerinde geniş ölçüde uygulanmasının yanısıra, optimal kontrol, yapısal dizayn, mekanik dizayn, elektrik şebekeleri, su kaynakları yönetimi, stokastik kaynak tahsisi gibi alanlar sadece ilk akla gelen alanlardandır[23].

1.4.1.6. Kuadratik Programlama

Kuadratik programlama amaç fonksiyonunun kuadratik ve diğer tüm kısıtların doğrusal olduğu özel bir doğrusal olmayan programlama sınıfıdır[24]. Bu yüzden doğrusal programlamadan farkı, amaç fonksiyonunda bazı değişkenlerin karesinin ya da iki değişkenin çarpımının yer almasıdır[25].

Bir kuadratik programlama modeli aşağıdaki gibi tanımlanır.

---

[22]İbrahim Doğan, **Yöneylem Araştırması Teknikleri ve İşletme Uygulamaları,** 2.baskı, İstanbul, Bilim Teknik Yayınevi, ss. 193-194.
[23] Mokhtar S. Bazaraa, C.M. Sheety, **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms,** Canada, John Wiley and Sons, 1979, s. 4.
[24]Mokhtar, **a.g.e.,** s. 447.
[25]Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Introduction to Operations Research,** 6th Ed., Singapore, McGraw-Hill Inc., 1995, s. 569.

$$Optimum \quad z = CX + X^T DX$$
$$AX \leq b, \quad X \geq 0$$

Burada,

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$$
$$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$$
$$b = (b_1, b_2, ..., b_m)$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilmektedir.

X^TDX fonksiyonu kuadratik bir form tanımlar. Burada D matrisi simetriktir. D matrisi problem maksimizasyonsa negatif tanımlı, problem minimizasyonsa pozitif tanımlıdır. Bu da z 'nin X 'te minimizasyon için kesinlikle konveks, maksimizasyon için de kesinlikle konkav olması anlamına gelir. Bu durumda konveks çözüm uzayını garanti eden kısıtların doğrusal olduğu varsayılır.

Bu problemin çözümü Kuhn-Tucker gerekli koşullarını temel alır. Z kesinlikle konveks (veya konkav) ve çözüm uzayı konveks küme olduğu için bu koşullar global optimum için yeterlidir. Problem bazı ek koşulları sağlayan doğrusal programlama problemi haline dönüşür. Problemin çözümü iki faz yönteminin 1. fazı kullanılarak elde edilir[26].

Kuadratik programlama geniş ölçüde uygulama alanına sahiptir. Özellikle makina ve elektrik mühendisliğinde sıkça kullanılmaktadır. Diğer kullanım alanlarından belki de en önemlisi, amaç fonksiyonundaki katsayıların rassal

[26] Taha, **a.g.e**, ss. 789-791.

değişken olarak alınabilecek doğrusal programlama problemleridir. Böyle bir amaç fonksiyonunun varyansı, ortalamanın da en az belli bir değere eşit olması kısıtı altında minimize edilmek istenebilir. Ek olarak başka kısıtlar da doğal olarak eklemek mümkündür. Çözüm ortalamanın bazı değer limitleri arasında çıkarılabilir. Böyle bir çalışma H. M. Markowitz tarafından portföy optimizasyonu için yapılmıştır.

Kuadratik programlama ayrıca, parametreler üzerinde eşitsizlik kısıtlarının yer alması durumunda nümerik verilere *en küçük kareler yöntemi*ne göre doğrusal model oturtmakta da kullanılmaktadır.

Daha genel olarak, genel doğrusal olmayan programlama problemlerine lokal kuadratik programlama problemleriyle yaklaşılabilir[27].

1.4.1.7. Konveks Programlama

Amaç fonksiyonunun konkav ve tüm kısıtların konveks olduğu problemler doğrusal olmayan programlamanın özel bir sınıfını oluştururlar. Doğrusal olmayan kısıtların konveksliği uygun çözümler kümesinin bir konveks küme olmasını gerektirir. Bu koşullar büyük oranda optimal çözümü bulmayı kolaylaştırmaktadır[28]. Çünkü amaç fonksiyonunun konkav oluşuyla, bulunacak herhangi bir ekstremum ya da lokal optimum çözümün aynı zamanda mutlak optimum olması sağlanmış olur.

Konveks programların çözümü için bir çok teknik geliştirilmiştir. Bunlardan en çok bilineni, amaç fonksiyonunun gradyanını kullanan *gradyan araştırma süreci*dir[29]. Diğer bir teknik de, *ardışık sınırlanmamış gradyan tekniği* olarak ifade edilebilecek *SUMT* tekniğidir. Bu teknikte öncelikle problem minimizasyon formuna dönüştürülür ve tüm kısıtlar $\geq$ biçiminde yazılır. Daha sonra amaç

---

[27]E. M. L. Beale, **Mathematical Programming in Practice,** London, Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., 1968, ss. 114-115.
[28]Sang M. Lee, Laurence J. Moore, Bernard W. Taylor, **Management Science,** 3rd Ed., Needham Heights, Allyn and Bacon, 1990, s. 824.
[29]Tulunay, **a.g.e.,** s. 594.

fonksiyonu ve kısıtlar birlikte bir fonksiyon olarak ifade edilirler. Çözüm gradyan araştırma süreci ya da benzer bir teknikle bulunur[30].

Burada altı çizilmesi gerekli önemli bir yargı da, her doğrusal program aynı zaman da bir konveks programlama problemidir. Bilindiği gibi doğrusal fonksiyonlar hem konveks hem de konkav fonksiyonlardır.

1.4.1.8. Ayrık Programlama

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonu, $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots f_n(x_n)$ şeklindeki tek değişkenli n fonksiyonun toplamı olarak ifade edilebiliyorsa, *ayrık*tır. Bu da,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$$

şeklinde gösterilir. Bazı doğrusal olamayan fonksiyonlar doğrudan ayrık değildir ancak uygun değişikliklerle ayrık hale getirilebilir. Bunun için de genelde logaritmik dönüşümler kullanılır.

Ayrık programlama, amaç fonksiyonunun ve kısıtların ayrık olduğu özel bir konveks programlama türüdür[31]. Konveks programlamadaki varsayımlara ek olarak problemdeki tüm fonksiyonların ayrık olduğu varsayımına dayanmaktadır.

Bu tür problemleri diğer konveks programlama problemlerinden ayırmak gerekmektedir. Çünkü bir ayrık programlama problemini yaklaşık olarak bir lineer programlama problemiyle etkin olarak çözmek mümkündür. Özel olarak karma tamsayılı programlama ile yaklaştırma yapılabilmektedir.

---

[30]Lee, **a.g.e.**, s. 824.
[31]Taha, **a.g.e.**, ss. 780-781.

1.4.1.9. Konik Programlama

Konik programlama, karar değişkenlerinin bir konveks koni kümesine ait olduğu, ek olarak doğrusal olmayan kısıtlarla oluşturulmuş genel bir doğrusal programdır[32]. Konik programlama modelleri, doğrusal olmayan konilerin çarpımı ve bir afin kümesinin kesişimleri üzerindeki bir doğrusal fonksiyonu minimize etmektedirler. İkinci dereceden (kuadratik) konileri içeren problemlere *İkinci dereceden konik programlar* denir. Kuadratik koniler, *Lorentz* veya *dondurma konileri* olarak da bilinirler. Aslında bunlar, doğrusal ve (konveks) kuadratik programları içeren doğrusal olmayan konveks programlama türünün özel bir sınıfıdır. Konik programlamanın uygulama alanları arasında, portföy optimizasyonu, norm minimizasyon problemi, güçlü doğrusal programlama, elektronik filtre dizaynı ve sinyal süreçlendirme gibi alanlar ilk sıraları almaktadır[33].

1.4.1.10. Geometrik Programlama

Geometrik programlama, doğrusal olmayan problemlerin özel bir halinin çözümü için kullanılır. Bu yöntemde çözüm, buna ilişkin dual programın dikkate alınmasıyla bulunur.

Geometrik programlama, amaç ve kısıt fonksiyonları aşağıdaki tipte olan problemlere çözüm bulmaya çalışır.

$$z = f(X) = \sum_{j=1}^{N} U_j$$

Burada,

[32]GAMS, "Conic Programming," (Çevrimiçi) http://www.gams.com/conic/conehtml/index.html, 1 Temmuz 2003.
[33]GAMS, "Conic Programming in GAMS," (Çevrimiçi) http://www.gams.com/conic/, 1 Temmuz 2003.

$$U_j = c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}} \qquad j = 1,2,...,N$$

olup tüm c_j'ler için $c_j > 0$ olduğu varsayılır ve N sonlu bir sayıdır. a_{ij} üstel değerinin işareti sınırlandırılmamıştır. $f(X)$ fonksiyonu a_{ij} üstel değerinin negatif olması dışında polinom biçimindedir. Bu nedenle ve tüm $c_j > 0$ olduğu için, $f(X)$ *posinomial* olarak adlandırılır[34].

Doğrusal olmayan programlama mühendislik dizayn problemlerine uygulandığında sıklıkla geometrik programlama biçimi elde edilir. c_j ve a_{ij} değerleri tipik olarak fiziksel sabitleri ve x_i değerleri de dizayn değişkenleri olmaktadırlar. Bu tür fonksiyonlar ne konveks ne de konkavdırlar. Bu nedenle konveks programlama tekniği uygulanamaz. Ancak, tüm c_j katsayıları kesinlikle pozitif seçilir ve amaç fonksiyonu minimize edilirse eşdeğer konveks program elde edilir[35].

1.4.1.11. Dinamik Programlama

Dinamik programlama optimizasyon problemlerine yinelemeli bir yaklaşımdır. Yinelemeli optimizasyon problemlerinde süreç, daha önceki adımlardaki bilgilerden faydalanarak adım adım optimizasyonu gerçekleştirmektir. Diğer matematik programlama modellerinde yinelemeden çok iterasyon sözkonusudur. Yani her adımda elde edilen değer optimal değildir. Ancak yinelemeli optimizasyonda her adımda optimal değer elde edilir.

Dinamik programlama genellikle ilişkili kararlar dizisi gerektiren problemlere uygulanmaktadır. Çoğu zamana bağlı (dinamik) süreçler, ardışık karar problemleri olarak ifade edilebilirler[36].

---

[34] Taha, **a.g.e.,** ss. 793-794.
[35] Hillier, **a.g.e.,** ss. 571-572.
[36] Frank S. Budnick, Richard Mojena, Thomas E. Vollmann, **Principles of Operations Research for Management,** USA, Richard D. Irwin Inc., 1977, s. 313.

Daha somut bir ifadeyle, dinamik programlama n değişkenli bir problemin optimum çözümünü n aşamaya ayrıştırarak ve her aşamada tek değişkenli bir alt problemi çözerek belirler. Bu hesaplama avantajı sağlamaktadır. Dinamik programlamanın asıl katkısı, problemleri aşamalara ayrıştırmasının çerçevesini oluşturan optimumluk ilkesidir. Optimizasyon problemine bağlı olarak aşamaların yapısı farklılık gösterdiğinden, dinamik programlama her bir aşamayı optimum kılmak için gereken hesaplamaların ayrıntısını vermez. Dinamik programlamada hesaplamalar yinelenerek yapıldığından bir alt problemin optimum çözümü bir sonraki alt problemin girdisidir. Son alt problem çözüldüğünde problemin tamamının alt çözümüne ulaşılmış olur[37].

Dinamik programlama modellerinde ileri ve geriye yineleme aynı sonucu vermekle birlikte genellikle geriye doğru yineleme kullanılmaktadır.

Dinamik programlamanın genel bir formülasyonu bulunmamaktadır. Model tipine göre genel formülasyonlar değişebilmektedir. Dinamik programlama yapısına göre deterministik ve olasılıklı olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Deterministik dinamik programlama modelleri arasında yaygın olarak, kargo yükleme modeli (sırt çantası problemi), işgücü miktarı modeli, techizat yenileme modeli, yatırım modeli ve stok modelleri yer almaktadır. Olasılıklı dinamik programlama modellerinde şans oyunu ve olasılıklı yatırım modelleri ilk göze çarpanlardır.

1.4.1.12. Stokastik Programlama

Stokastik programlama, matematik programlama modellerinin bazı veya tüm parametrelerinin rassal değişkenlerle tanımlandığı durumlara çözüm bulmaya çalışır. Böyle durumlar genellikle gerçek hayatta parametrelerin kesin olarak belirlenmesinin

[37] Taha, **a.g.e.,** s.403.

zor olduğu problemlerde görülür. Stokastik programlamanın temelindeki düşünce, problemin olasılıklı yapısını eşdeğer deterministik duruma dönüştürmektir[38].

Stokastik programlamada genellikle üç yaklaşım sözkonusudur. Birincisi, *probabilistik* veya *şans kısıtlı stokastik problemler*dir. Bu tür programlarda uygunsuzluk (infeasibility) olasılığı belirlenen bir eşik değerinden daha büyük olamamaktadır. Şans kısıtlı problemler belirli olaylar ya da şartlarla ilgili belirsizlikleri olasılık kısıtlarıyla modele sokmaktadır. Ancak, bu yaklaşım konveks olmayan kısıtlar kümesiyle karşılaşılmasına neden olmaktadır ki bu tür problemlerin çözümü oldukça güçtür.

İkinci yaklaşım, gelecekteki davranışın modellenmesi üzerinde odaklaşmaktadır. Bu tür problemler, rassal olaylar kümesinin gözlemlenmesinden sonra süreç ya da sistem hakkında bilgi almayı içerirler. Gözlemlenen çıktı grubu için bir yanıt modellenir. Rassal çıktılar gözlemlenmeden önce proaktif olan ***birinci aşama kararları***yla eşleştirilen çıktılara dayalı kararlar, ***reaktif kararlar*** veya ***ikinci aşama kararlar*** olarak adlandırılır. Bu tür problemlerdeki temel güçlük, telafi (ikinci aşama) fonksiyonunun beklenen değerinin hesaplanmasında çok boyutlu integral hesabı gerekmektedir. Daha da zor olanı, ayrık rassal değişken içeren stokastik programlama modellerinde sözkonusu fonksiyon diferansiyellenememektedir.

Diğer yaklaşım da, stokastik programlama problemlerinin çözümünde *senaryo tabanlı analizi* içeren yaklaşımdır. Senaryo kökeni, bilinen ayrık bir olasılık dağılımından, sınırlı örnek bilgisinden, bazı yaklaşım tiplerinden ya da bir uzmanın fikirlerine dayandırılan olasılıksal önceki analizlerden elde edilebilir. Senaryo yaklaşımında çok sayıda senaryo oluşabilmektedir[39].

Stokastik programlamanın teorik altyapısı, çeşitleri ve çözüm algoritmaları ileride ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

---

[38] **A.e.** s. 799.

[39] David C. Novak, Cliff T. Ragsdale, "A Decision Support Methodology for Stochastic Multi-criteria Linear Programming using Spreadsheets," **Decision Support Systems,** No:36, 2003, s. 100.

1.4.2. Sezgisel Optimizasyon

1960'ların sonlarında, bilinen tekniklerin uygulanmasıyla çözümü çok zor olan bir kombinatoryal problemler sınıfının olduğu ortaya çıktı. Bu tür problemler oldukça kompleks olduklarından hesaplamalarında bir hayli güçlük çekilmekteydi. Sözkonusu problemlerin çözümüne harcanan çaba problemin boyutlarına göre polinomial olarak artmaktadır. Bu gibi problemler çözümü çok güç anlamında NP-zor (NP-hard) problemler olarak adlandırılmaktadır.

Gerçek dünya problemlerinin bir çoğu NP-zor olarak adlandırılan sınıfa girmektedir. Bu tür problemlerin doğrusal programlama ve dinamik programlama gibi birtakım algoritmalarla tam çözümü mümkündür. Ancak bu çözümler bir hayli hesaplama güçlüğünün yanısıra çok fazla da çözüm zamanı gerektirmektedir. Bu durumda, çok kısa zamanda çözüme ulaştıran ancak içinde kısmi optimallik riskini de barındıran algoritmalara gereksinim vardır. Bu tür algoritmalara *yaklaşım algoritmaları* ya da *sezgisel algoritmalar* adı verilmektedir.

Sezgisel algoritmalar çözüm alternatiflerinin çok fazla olduğu durumlarda oldukça etkin olarak çalışmaktadırlar. Bu tür problemlerle üretim operasyonları, finansal yatırımlar, bütçeleme, kaynak yönetimi ve çizelgeleme gibi alanlarda karşılaşmak olasıdır. İstatistiksel mekanikten esinlenerek geliştirilen benzetilmiş tavlama (simulated annealing), biyolojik çaprazlama esas alınarak geliştirilen genetik algoritma, insan sinir sisteminden benzerlikle geliştirilen yapay sinir ağları ve yapay zeka kavramına dayanan tabu araştırması sezgisel optimizasyon algoritmalarından en önemlileridir[40].

1.4.2.1. Sezgisel Optimizasyon Yöntemlerinin Bazı Özellikleri

Bu çalışmada sezgisel optimizasyon yöntemlerinden tabu arama ve hedef analizi kapsam dışı bırakılmıştır. Benzetilmiş tavlama, genetik algoritma ve yapay

[40]N. K. Jaiswal, **Military Operations Research: Quantitative Decision Making,** USA, Boston Hardbound, Kluwer Academic Publishers, 1997, s. 169.

sinir ağları yöntemlerinin bazı avantajları ve dezavantajları vardır. Bunlar çözülecek problemlerin yapısına, hesaplama zorlukları ve gerekli donanım ve yazılım imkanlarından kaynaklanmaktadır. Sözkonusu yöntemlerin bazı çarpıcı özellikleri aşağıda özet olarak verilmiştir.

(a) Benzetilmiş tavlama,

i) Özellikle sürekli değişkenli problemler için uygundur.
ii) Uygulanması kolaydır. Çok fazla değişkenli problemler bile göreceli kolaylıkla çözülebilir.
iii) Diğer tekniklerle karşılaştırıldığında daha fazla hesaplama zamanına gereksinim duyar. Paralel uygulamalar daha hızlı çözümler elde etmek için uygulanmaktadır.
iv) Güçlü bir yapısı vardır ve dolayısıyla çok çeşitli problemlere uygulanabilir.

(b) Genetik algoritma,

i) Özellikle kesikli değişkenli problemler için uygundur.
ii) Uygulanması kolaydır ancak problem hakkında spesifik bilgilere ihtiyaç duyar. Örneğin, her değişkenin değişim aralığı şerit uzunluğu ve popülasyondaki örnek sayısı için gereklidir.
iii) Paralel makinalar için daha uygundur ve böylece hesaplama zamanı indirgenmiş olur.
iv) Birden fazla başlangıç çözümüyle başlar. Dolayısıyla bir veya daha çok şerit düzgün olarak süreçlendirilir.
v) Güçlü bir yapısı vardır.

(c) Yapay sinir ağları,

i) *0 – 1* tipindeki optimizayon problemleri için çok uygundur.

ii) Amaç fonksiyonu sadece Lyapunov enerji fonksiyonuna dönüştürülebilen modellere uygulanabilir. Amaç fonksiyonunun doğrusal olmadığı durumlarda dönüşüm oldukça zordur.

iii) Yazılım uygulaması geniş ana bellek gerektirmektedir. Bu yüzden büyük boyutlu problemleri çözmek zordur.

iv) Donanım uygulaması daha kolaydır. Bu yüzden çok daha hızlı çözümler elde edilebilir. Dolayısıyla, gerçek-zaman uygulamaları için önemli bir tekniktir[41].

1.5. Risk ve Belirsizlik Altında Optimizasyon

Karar ortamları genel olarak, *belirlilik*, *risk*, ve *belirsizlik* olmak üzere üç grupta incelenmektedir. Belirlilik ortamında, karar verici her alternatifin veya karar seçeneğinin sonucunu kesinlikle bilmektedir. Diğer bir deyişle, karara ilişkin veriler deterministiktir. Risk altında karar vermede, karar verici her sonucun olma olasılığını bilmektedir. Yani, veri *olasılık dağılımı*yla ifade edilmektedir. Belirsizlik altında ise, karar verici çeşitli sonuçların olasılık dağılımını bilememektedir. Bu durumda, veri karar sürecindeki ilişki derecesini temsil eden göreceli ağırlıklara atanamamaktadır[42].

Belirlilik altındaki karar ortamlarında bilgi tamamiyle bilinmektedir. Örneğin, doğrusal programlama modellerinde karar belirlilik altında verilmektedir. Benzer şekilde, transport, atama ve bir çok şebeke ve envanter modellerinde ortam genellikle deterministiktir. Belirsizlik altındaki bazı problemlerde, belirlilik olduğu

---

[41]Jaiswal, **a.g.e.**, ss. 205-206.
[42]Barry Render, Ralph M. Stair, Jr., **Quantitative Analysis for Management,** 3rd Ed., USA, Allyn and Bacon Inc., 1988, s. 125.

varsayımıyla yapılan çözümlerde de optimal çözüme yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir.

Risk altındaki optimizasyon modellerinde olasılık dağılımlarıyla ilgilenildiğinden, olasılık teorisi önemli bir yer tutmaktadır. Risk altında karar verme ve optimizasyon için bir çok teknik geliştirilmiştir. *Şans kısıtlı programlama* veya *probabilistik programlama* olarak adlandırılan özel bir stokastik programlama türü, kuyruk teorisi, Markov analizi, simülasyon ve probabilistik envanter kontrolu *stokastik* modellerin önde gelenlerindendir[43]. Dinamik programlama modelleri de risk altındaki optimizasyonda ardışık çözüm süreçlerinde etkin çözümler sağlayabilmektedir.

Belirsizlik altında karar verme problemlerine çözüm aracı olarak ***Laplace kriteri, Minimaks kriteri, Savage kriteri*** ve ***Hurwics kriteri*** geliştirilmiştir. Belirsizlik altındaki karar ortamında, Von Meumann ve Morgenstern tarafından geliştirilen iki oyunculu *oyun teorisi* yapısı genellikle bir optimizasyon modeli olarak kabul edilmektedir. Oyun teorisinin çözümünde doğrusal programlama etkin çözümler sunmaktadır[44].

Risk altındaki optimizasyon modellerinde önemli bir yeri olan stokastik programlama, ilerideki bölümlerde ayrıntılı olarak teorik ve uygulamalı bazda incelenecektir.

---

[43]Lee, **a.g.e.,** s. 402.
[44]Gottfried, **a.g.e.,** ss. 526-527.

İKİNCİ BÖLÜM

RASSAL DEĞİŞKENLER, OLASILIK DAĞILIMLARI VE UYGUNLUK TESTLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, olasılık ölçüsü ve rassal değişkenler tanımlanarak olasılık fonksiyonları ve birikimli dağılım fonksiyonları üzerinde durulmuştur. Bir rassal değişkenin tüm mümkün değerlerinin olasılıklarının sunumu olarak ifade edilen olasılık dağılımları irdelenmiştir. Bazı özel olasılık dağılımları, kesikli ve sürekli sınıflandırmaları altında incelenmiştir. Sözü edilen sınıflandırmaya örnekleme dağılımları da dahil edilmiştir. Verilerin teorik dağılımlara uyumlarının test edildiği uygunluk dağılımları üzerinde durularak stokastik kavramı ve stokastik süreçler kısaca incelenmiştir.

2.1. Olasılık Uzayları ve Olasılık Ölçüsü

Bir olasılık uzayı (Ω, P), boş olmayan bir küme Ω ve bir P fonksiyonundan oluşmaktadır. Ω kümesi *örnek uzay*, Ω kümesindeki her nokta ω ise *örnek nokta* olarak adlandırılmaktadır. Ω kümesinin her A alt kümesi ise bir *olay* olarak nitelendirilmektedir. P tüm olayların kolleksiyonunda tanımlanan reel değerli bir fonksiyon ve $P(A)$, A olayının olasılığı olmak üzere, P fonksiyonu,

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) Her olay A için, $P(A) \geq 0$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots$ ayrık olayların herhangi bir dizisi olmak üzere,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

koşullarını sağladığı taktirde bir *olasılık ölçüsü (probability measure)* olarak adlandırılır. P olasılık ölçüsü, Ω örnek uzay olmak üzere (Ω, P) sıralı ikilisi *olasılık*

uzayı (probability space) olarak tanımlanır[1]. Olasılık uzayları, örnek uzayın alt kümelerinin bir kolleksiyonu olan olayların da ilavesiyle sıralı üçlüler olarak da ifade edilebilmektedir. Bu durumda, A örnek uzayın alt kümelerinin bir kolleksiyonu olmak üzere, olasılık uzayı (Ω, A, P) şeklinde gösterilmektedir. Bir olasılık ölçüsü tüm olayların sınıfında tanımlanan, normalleştirilmiş (normed), negatif olmayan ve sayılabilir toplamsal bir küme fonksiyonudur.

2.2. Rassal Değişken Kavramı

Rassal değişken (random variable), rassal bir denemenin sonuçlarına göre belirlenen sayısal değerleri alan bir değişken olarak tanımlanabilir[2]. Daha özel bir tanımla, *rassal değişken*, belirli bir tanım aralığında hangi değeri alacağı önceden bilinmeyen ve bu değeri belli olasılıklarla alabilen değişken olarak tanımlanabilir[3]. Başka bir açıdan rassal değişken, *örnek uzay*daki her noktanın bir reel sayıyla eşleştirilmesinden elde edilen *fonksiyon*dur. Rassal değişken, *stokastik değişken*, *rassal fonksiyon* veya *stokastik fonksiyon* olarak da isimlendirilmektedir[4]. Matematiksel olarak, bir rassal değişken ξ, değişkenin alabileceği değerler ω 'nın bazı (örnek) uzayı Ω olmak üzere, temel sonuçların bir fonksiyonu olarak $\omega \in \Omega$ için $\xi = \xi(\omega)$ şeklinde tanımlanabilir[5].

Rassal değişkenler alacakları değerler açısından ya kesikli ya da sürekli olmaktadır. Bir rassal değişken, yalnızca sayılabilir sayıda değerler alabiliyorsa *kesikli*dir. Sonsuz sayıda olsalar bile olası sonuçlar sayılabiliyorsa, rassal değişken yine kesiklidir. Tersine olarak, bir rassal değişken bir aralıktaki bütün değerleri

---

[1] Aram J. Thomasian, **The Structure of Probability Theory with Applications,** USA, Mc-Graw Hill Inc., 1969, s. 295.
[2] Paul Newbold, **İşletme ve İktisat için İstatistik,** 4. baskı, Çev. Ümit Şenesen, İstanbul, Literatür Yayınları, 1995, s. 139.
[3] Bedriye Saraçoğlu, Ferhan Çevik, **Matematiksel İstatistik: Olasılık ve Önemli Dağılımlar,** 2.baskı, Ankara, Gazi Büro Kitabevi, 1995, s. 63.
[4] Murray R. Spiegel, **Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics,** SI (Metric) Edition, Singapore, McGraw-Hill Co., 1988, s. 38.
[5] Yu. V. Prohorov, Yu. A. Rozanov, **Probability Theory,** Çev. K. Krickeberg, H. Urmitzer, Berlin, Springer-Verlag, 1969, s. 27.

alabiliyorsa *sürekli*dir. Sürekli rassal değişkenlerde belli değerlere olasılıklar verilmez. Ancak olasılıklar belli aralıklar için verilmektedir[6]. Çünkü, sürekli bir rassal değişkenin değer aralığında sonsuz sayıda değer vardır. Bunlar arasından değişkenin bir değeri alma olasılığı sıfırdır.

(Ω, P) olasılık uzayının örnek uzayı üzerinde tanımlanmış herhangi bir $\xi : \Omega \to R^n$ fonksiyonu, (Ω, P) olasılık uzayıyla eşleştirilmiş *rassal vektör* olarak tanımlanmaktadır. $n = 1$ olması durumunda ξ fonksiyonu rassal değişken olarak isimlendirilmektedir[7]. Başka bir deyişle, rassal vektör $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, bazı rassal değişkenlerin bir ailesidir[8].

2.3. Olasılık Fonksiyonu

Bir değişkenin alabileceği değerlerle bu değerleri alma olasılıkları arasındaki bağıntıyı gösteren fonksiyona *olasılık fonksiyonu* denir. Söz konusu fonksiyon, $f : \omega \to [0,1]$ şeklinde gösterilir[9]. Olasılık fonksiyonları rassal değişkenlerin yapısına göre kesikli ve sürekli olmak üzere iki ayrı kategoride ele alınmaktadır.

2.3.1. Kesikli Olasılık Fonksiyonu

ξ rassal değişkeninin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ değerlerini aldığını, yani görüntü kümesinin $\xi(\omega) = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ olduğunu varsayalım. ξ'nin herhangi bir ξ_i değerini alma olasılığını veren fonksiyon

$$P(\xi = \xi i) = f(\xi_i) \qquad i = 1,2,...,k$$

---

[6] Newbold, **a.g.e.**, s. 140.
[7] Thomasian, **a.g.e.**, s. 297.
[8] Prohorov, **a.g.e.**, s. 29.
[9] Saraçoğlu, **a.g.e.**, s. 67.

ξ 'nin *olasılık fonksiyonu* ya da *olasılık (kütle) dağılımı* olarak adlandırılır. Bir kesikli rassal değişkenin $f(\xi)$ fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olması için aşağıdaki iki koşulu sağlaması gerekir.

(i) Her ξ değeri için $f(\xi_i) \geq 0$,

(ii) Tekil olasılıkların toplamı 1'dir. Yani, $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) = 1$[10].

2.3.2. Sürekli Olasılık Fonksiyonu

Daha önce de değinildiği gibi sürekli rassal değişkenler için tek bir noktanın olasılığı yerine bir reel aralığın olasılığından söz etmek daha anlamlıdır. Bir ξ rassal değişkeninin $[a,b]$ aralığına düşme olasılığı,

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır. Eşitlikteki $f(\xi)$, ξ rassal değişkeninin *olasılık fonksiyonu* ya da *olasılık yoğunluk fonksiyonu* olarak adlandırılır. $f(\xi)$ sürekli olasılık fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlamalıdır.

(i) Tüm ξ değerleri için $f(\xi) \geq 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$.

Kesikli durumun aksine, tek bir noktanın gerçeklenme olasılığı sıfır olduğundan ξ 'nin düşeceği aralığın açık, yarı açık ya da kapalı olarak ifade edilmesinin önemi yoktur[11].

---

[10] Enis Sınıksaran, **Teori ve Uygulamalarıyla İstatistiksel Yöntemler,** İstanbul, Sigma Yayınları, 2000, s. 104.
[11] **A.e.,** ss. 107-108.

2.4. Birikimli Dağılım Fonksiyonu

ξ rassal değişkeninin verilen bir değere eşit ya da küçük olma olasılığı ile ilgilenildiği zaman doğrudan başka bir özel fonksiyon ile ilgilenilmektedir. Söz konusu özel fonksiyon *birikimli dağılım fonksiyonu* olarak bilinmektedir. Birikimli dağılım fonksiyonları, kesikli ve sürekli olmak üzere aşağıda irdelenmektedir.

2.4.1. Kesikli Birikimli Dağılım Fonksiyonu

ξ kesikli rassal değişkeninin *birikimli dağılım fonksiyonu* ya da kısaca *dağılım fonksiyonu,*

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x)$$

olarak tanımlanır[12]. Diğer bir tanımla, $F_\xi(x)$ dağılım fonksiyonu,

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i) \quad \text{ya da} \quad F_\xi(x) = \sum_{t=-\infty}^{x} f(t)$$

biçiminde ifade edilebilir[13]. $F_\xi(x)$ dağılım fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

(i) $F_\xi(x)$ sağdan sürekli ve *[0,1]* aralığında monoton artan bir adım fonksiyondur.

(ii) $P(\xi > x) = 1 - P(\xi \le x) = 1 - F_\xi(x)$

(iii) $P(a < \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$[14].

---

[12] **A.e.,** s. 109.
[13] Saraçoğlu, **a.g.e.,** s. 86.
[14] Sınıksaran, **a.g.e.,** ss. 109-110.

2.4.2. Sürekli Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Sürekli rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu ya da kısaca dağılım fonksiyonu,

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = P(-\infty < \xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

olarak tanımlanır. $F_\xi(x)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$

(ii) $\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$

(iii) $F_\xi(x)$, *[0,1]* aralığında azalmayan bir fonksiyondur.

(iv) $\frac{d}{dx} F_\xi(x) = f(x)$

(v) $P(\xi > x) = 1 - F_\xi(x)$

(vi) $P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$[15].

2.5. Özel Olasılık Dağılımları

Rassal olgulara veya süreçlere ilişkin araştırmalar yapılırken, öncelikle ilgilenilen olguları veya süreçleri belirleyen rassal değişkenin olasılık dağılımının bilinmesine gereksinim duyulur. Rassal bir değişkenin olasılık dağılımı, olanak içindeki tüm sonuçlar için olasılıkların bir gösterimidir. Bu gösterim, cebirsel, çizimsel veya çizelge biçiminde olabilmektedir. İlgilenilen problemin istatistiksel modeli olan bu türden özel olasılık dağılımları kesikli, sürekli ve karma olasılık dağılımları başlıkları altında sınıflandırılabilmektedir.

---

[15] **A.e.,** ss. 111-112.

Kesikli bir rassal değişkenin tüm olanaklı değerlerin olasılıklarının sunumu *kesikli olasılık dağılımları*nı oluşturmaktadır. Kesikli düzgün (uniform) dağılım, Bernoulli dağılımı, Binom dağılımı, Pascal dağılımı, geometrik dağılım, hipergeometrik dağılım ve Poisson dağılımı kesikli olasılık dağılımlarının başlıcalarıdır.

Sürekli bir rassal değişkenin tüm olanaklı değerlerin olasılıklarının sunumu *sürekli olasılık dağılımları*nı oluşturmaktadır. Sürekli olasılık dağılımlarında, rassal değişkenler sonsuz sayıda değerler aldıklarından, aralıkların gerçekleşme olasılıklarıyla ilgilenilmektedir. Sürekli düzgün dağılım, gamma dağılımı, üstel dağılım, Weibull dağılımı, beta dağılımı, normal dağılım, lognormal dağılım, Cauchy dağılımı, student (t) dağılımı, F dağılımı ve Ki-kare dağılımları sürekli olasılık dağılımlarının en çok kullanılanları arasında yer almaktadır.

Kesikli dağılım değerleri, olasılık (kütle) fonksiyonunun değerlerinin toplanmasıyla elde edilmektedir. Sürekli dağılım değerleri ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun integralinin alınmasıyla elde edilmektedir. Ayrıca, ne kesikli ne de sürekli olan olasılık dağılımları bulunmaktadır. Bu tür kısmen kesikli kısmen de sürekli olan dağılımlar *karma olasılık dağılımları* olarak adlandırılmaktadır.

Matematiksel olarak, $F_{1\xi}(x)$ kesikli ve $F_{2\xi}(x)$ sürekli (birikimli) olasılık fonksiyonu olmak üzere, söz konusu fonksiyonların lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen,

$$F_{\xi}(x) = c_1 F_{1\xi}(x) + c_2 F_{2\xi}(x)$$

dağılım fonksiyonu bir *karma olasılık dağılımına* aittir. Burada c_1 ve c_2 sabitleri,

$$0 < c_1 < 1, \quad 0 < c_2 < 1, \quad c_1 + c_2 = 1$$

koşullarını sağlamaktadır. Karma olasılık dağılımlarının özellikleri kesikli ve sürekli dağılımların özelliklerinden elde edilebilmektedir. Bu konuda, *Riemann-Stieltjes integrali* olarak bilinen genel integral türü kullanılarak bazı teorik özellikler elde edilebilse de özel olasılık hesaplaması gerektiren durumlarda yetersiz kalabilmektedir. Bunun yerine, daha güçlü bir kavram olan *Lebesgue-Stieltjes integrali* tüm durumlar için yeterli olabilmektedir[16].

Burada, sürekli olasılık dağılımlarından normal dağılım, standart normal dağılım ve student (t) dağılımları üzerinde özet olarak durulmuştur.

2.5.1. Normal Dağılım

Normal dağılım, modern istatistik teorisinin köşe taşı olarak nitelendirilebilecek bir sürekli olasılık dağılımıdır. İlk kez onsekizinci yüzyılda, bilimcilerin ölçme hatalarındaki düzenlilik derecesini farketmesiyle keşfedilmiştir. Gözlemledikleri örüntüye (dağılıma) *normal hatalar eğrisi* olarak adlandırılan sürekli eğrilerce çok yakın olarak yaklaşıldığını gördüler. Söz konusu normal eğrilerin matematiksel özellikleri ilk kez Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) ve Karl Gauss (1777-1855) tarafından çalışılmıştır.

Rassal değişken ξ, $-\infty < \xi < \infty$ aralığında ve $\sigma > 0$ olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

şeklinde olan rassal değişkenlerin oluşturduğu dağılım *normal dağılım* olarak isimlendirilir. Normal dağılımın μ ve σ olmak üzere iki parametresi

[16] Tom M. Apostol, **Calculus,** V.II, 2nd edition, Singapore, John Wiley & Sons Inc.,1969, s. 539.

bulunmaktadır. Bu dağılımın aslında ortalaması ya da beklenen değeri $E(\xi)=\mu$ ve varyansı $Var(\xi)=\sigma^2$ ya da standart sapması σ parametreleridir[17].

Normal dağılımın özellikleri ve karakteristikleri kısaca aşağıda verilmiştir.

(i) Normal dağılımın grafiği simetriktir ve x ekseni, x değişkeninin olası değerlerini temsil etmektedir.

(ii) Dağılımın sol ve sağ kuyrukları x eksenine asimptotik olarak yaklaşmaktadır.

(iii) Sürekli değişkenlerin olasılıkları normal eğri altındaki alanlara karşılık gelmektedir.

(iv) Dağılımın merkezi μ parametresi ve genişliği σ parametresi ile belirlenmektedir.

(v) Normal eğri altında kalan toplam alan 1 veya %100 değerine eşittir. Eğri simetrik olduğundan simetri ekseninin sol ve sağında kalan alanların her biri 0,5 veya %50 değerine eşittir.

(vi) Normal dağılım standart bir hale getirilebilmektedir[18].

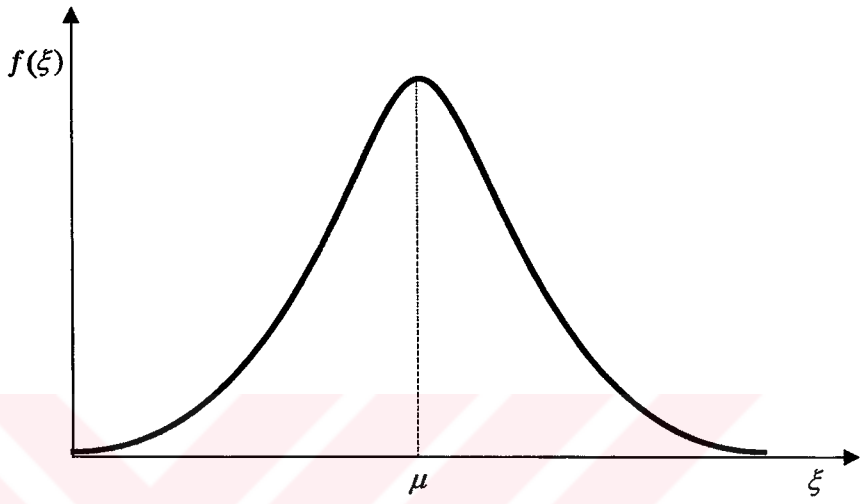
(vii) Normal dağılım, bağımsız değişkenlerin toplamı anlamında kendisini üretebilmektedir. Bununla ilgili teorem aşağıda verilmektedir.

Teorem 1. $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ bağımsız değişkenler ve ξ_i, μ_i ortalama ve σ_i standart sapma ile normal dağılsın. Bu durumda, $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ toplamı da $\mu=\mu_1+\mu_2+...+\mu_n$ ortalama ve $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+...+\sigma_n^2$ varyans ile normal dağılmaktadır[19].

---

[17] John E. Freund, **Mathematical Statistics,** 5th edition , USA, Prentice-Hall Inc., 1992, s. 236.
[18] Isabel Williemse, **Statistical Methods and Financial Calculations,** 2nd edition, Kenwyn, Juta & Co Ltd., 1994, s. 98.
[19] Harald Cramér, **The Elements of Probability Theory,** USA, John Wiley and Sons Inc., 1955, s. 113.

Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 2'de görülmektedir[20]. Normal dağılım eğrisi, *Gauss eğrisi, tesadüfi (rassal) hatalar eğrisi*, şeklinden dolayı *çan eğrisi* veya *normal eğri* olarak da isimlendirilmektedir.



Şekil 2. Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Doğal olayların yanı sıra, üretim sürecinde mamüllerin ağırlık, uzunluk, yarıçap, dayanıklılık ve direnç gibi çeşitli özelliklerinin dağılımı da normal dağılıma uymaktadır.

Rassal faktörlerin etkilediği olayların dağılımı olan bu dağılımdan rassal olayların etkisiyle hataların nasıl dağıldığını iyi temsil ettiği için örnekleme teorisinde yararlanılmaktadır. Bu teoriye göre, N birimlik bir anakütleden rassal olarak seçilen n birimlik örneklerin ortalamalarının ortalaması anakütle ortalamasına eşittir ve bu örnek ortalamaları anakütle ortalaması etrafında, anakütle normal dağılıyorsa ya da $n \geq 30$ olduğunda normal dağılım göstermektedir. Bu bilgiler yardımıyla tamamının gözlenmesi mümkün olmayan anakütlelerin ortalamalarının, toplam değerlerinin ve belirli özelliklere sahip olan birimlerinin oranı ve sayıları tahmin edilebilmektedir.

[20] Freund, **a.g.e.**, s. 237.

Normal dağılım bu özellikleri yanı sıra simetrik ($\alpha_3 = 0$) ve belirli yüksekliği olan ($\alpha_4 = 3$) bir eğri olduğu için çeşitli dağılımların basıklık ve asimetri açısından karşılaştırıldığı önemli bir ölçü özelliği de taşımaktadır. Çeşitli eğrilerin asimetri ve basıklığı normal dağılımla mukayese edilmektedir[21].

2.5.2. Standart Normal Dağılım

ξ rassal değişkeninin, ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonunda,

$$z = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

dönüşümü yapılırsa ortalaması $\mu = 0$ ve standart sapması $\sigma = 1$ olan,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

standart normal dağılım ya da *eğrisi* elde edilir[22].

Standart normal dağılımın bazı özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

(i) Aritmetik ortalamanın z değeri sıfırdır.

(ii) Normal dağılım simetrik olduğu için aritmetik ortalamaya eşit uzaklıkta olan z değerleri mutlak olarak birbirine eşittir.

(iii) Normal eğri simetrik olduğu için aritmetik ortalamadan küçük ve büyük olan değerlerin toplamı birbirine eşittir.

---

[21] Neyran Orhunbilge, **Tanımsal İstatistik Olasılık ve Olasılık Dağılımları,** İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 2000, ss. 211-212.

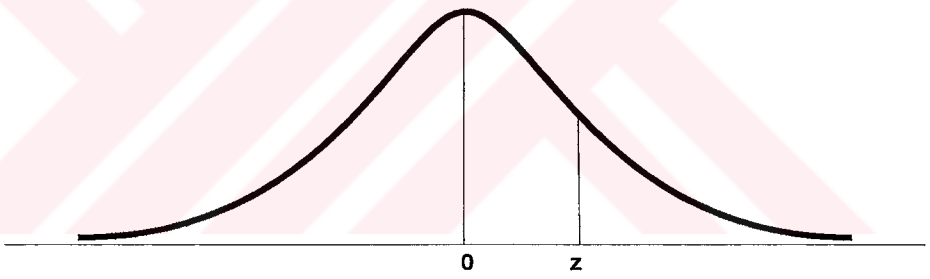
[22] Seymour Lipschutz, **Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability,** Si(metric) Edition, Çev. Hacer Kutluk, New York, McGraw Hill Co., 1974, s. 107.

(iv) Birimlerin *%68,26*'sı $\mu \pm \sigma$, *%95*'i $\mu \pm 1{,}96\sigma$, *95,5*'i $\mu \pm 2\sigma$, *%99*'u $\mu \pm 2{,}58\sigma$ ve *%99,73*'ü $\mu \pm 3\sigma$ sınırları arasında değer almaktadır.

(v) Standart normal dağılım tablolarında z değeri karşısındaki olasılıklar, ortalamadan itibaren z'ye kadar olan tüm değerlerin olasılıklarının toplamıdır[23]. Matematiksel olarak ise,

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi$$

şeklinde ifade edilen alandır. Söz konusu alan Şekil 3'te görülen 0 ile z arasında kalan alandır[24].



Şekil 3. Standart Normal Dağılımın Altındaki Belirli Alan

Binom dağılımı $n \to \infty$ giderken ve simetrik binom (P=Q) olduğunda normal dağılıma yaklaşmaktadır. Kesikli bir dağılım olan binom dağılımının sürekli bir dağılım olan normal dağılıma yaklaşması n ve P'ye bağlıdır. NP ve $nQ \geq 5$ olduğunda binom dağılımının normal dağılıma yaklaştığı kabul edilmektedir. Bu yaklaşımda, normal dağılımda çözüm yapabilmek için negatif olmayan her tamsayı k değeri, ½ düzeltme faktörü kullanılarak $k - ½$ ve $k + ½$ aralığıyla temsil

[23] Orhunbilge, **a.g.e.,** ss. 213-215.
[24] Freund, **a.g.e.,** ss. 238-239.

edilmektedir[25]. Bu süreçte, değişkenler standart normal dağılımın z değerine çevrilmektedir. Binom dağılımında ortalama $\mu = np$ ve varyans $\sigma^2 = np(1-p)$ olduğundan standart normal değişken değeri,

$$z = \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

şekline dönüşür.

Poisson dağılımında ortalama $\lambda = np$ daha da büyüdükçe, çarpıklık miktarı azalmaktadır. Bu durumda normal dağılımın kullanılması mümkün olmaktadır. Poisson dağılımı $\lambda > 30^*$ olması durumunda normal dağılımına yaklaşmaktadır. Orijinal dağılımın değerleri standart normal değişken haline,

$$z = \frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

biçiminde dönüştürülür[26].

2.5.3. Lognormal Dağılım

Bir ξ rassal değişkeninin logaritması $\ln \xi$ normal dağılım gösterirse, söz konusu rassal değişken *lognormal dağılım* göstermektedir. Bazı kaynaklarda *logaritmik normal dağılım* olarak da isimlendirilmektedir.

Lognormal dağılım, oldukça yaygın kullanım alanına sahiptir. Bu alanların en başında sosyo-ekonomik alanlar gelmektedir. Gerçekten de, rassallık sebepleri, merkezi limit teoreminin uygulama koşullarına göre toplanabilirlik özellik yerine

---

[25] Orhunbilge, **a.g.e.**, s. 221.

* Bazı kaynaklar, iyi bir yaklaşım için $\lambda > 20$ olmasının yeterli olabileceğini belirtmektedir.

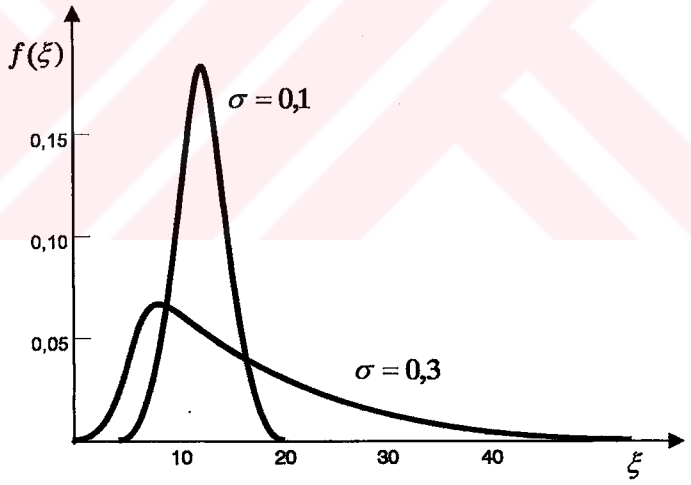
[26] Jon Curvin, Roger Slater, **Quantitative Methods for Business Decisions,** 4th edition, London, International Thomson Publishing, 1996, s. 210.

çarpılabilir karakterde oldukları durumda gözlenen olayların dağılımının bir lognormal kurala doğru yaklaştığı söylenebilir.

Lognormal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\xi}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\xi-\mu}{\sigma}\right)^2}, & \xi\rangle 0\\ 0, & \textit{aksi halde}\end{cases}$$

şeklinde elde edilmektedir[27]. Lognormal dağılımın ortalaması $\mu=\sqrt{e}$ ve varyansı $\sigma^2=e^2-e$ şeklinde elde edilmektedir[28]. Lognormal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\mu=1$ ve çeşitli σ değerleri için grafiği Şekil 4'te görülmektedir.



Şekil 4. Lognormal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

[27] Saraçoğlu, **a.g.e.,** ss. 490-491.
[28] I. Richard Savage, **"Random Variables," Time Series and Statistics,** Ed by John Eatwell, Murray Milgate, Peter Newman, UK, The Macmillan Press Ltd., 1990, s. 216.

2.5.4. Student (t) Dağılımı

Örnek birim sayısı az ($n < 30$) olduğunda örnek ortalamalarının gösterdiği dağılıma örnekleme teorisinde *student* veya *t dağılımı* adı verilmektedir[29]. Matematiksel olarak, Y ve Z bağımsız rassal değişkenler, Y , ν serbestlik dereceli ki-kare dağılımı ve Z standart normal dağılım göstermek üzere,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

değerinin dağılımı, $-\infty < t < \infty$ için,

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

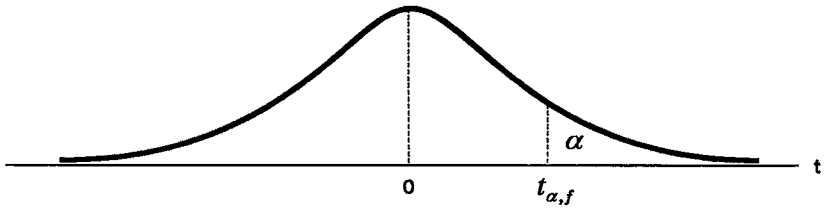
ile verilir ve ν serbestlik dereceli *t dağılımı* olarak isimlendirilir[30]. t dağılımının ortalaması serbestlik derecesi $\nu > 1$ ise $\mu = 0$ ve varyansı $\nu > 2$ ise $\sigma^2 = \nu/(\nu - 2)$ olarak elde edilmektedir[31].

Student (t) dağılımı normal dağılım gibi simetrik ($\alpha_3 = 0$) ancak normal dağılıma göre daha basık ($\alpha_4 < 3$) ve değişkenliği daha fazla olan bir dağılımdır. t dağılımının basıklığı serbestlik derecesine ($\nu = f = n - 1$) bağımlıdır. Örnek birim sayısı artarken dağılım yükselerek normal dağılım eğrisiyle kesişir[32]. Örnekleme teorisinde, t değeri örnek ortalamasının standart rassal değişkene dönüştürülmesiyle elde edilmektedir.

---

[29] Orhunbilge, **a.g.e.,** s. 223.
[30] Freund, **a.g.e.,** s. 311.
[31] Savage, **a.g.e.,** s. 215.
[32] Orhunbilge, **a.g.e.,** s. 223.

f serbestlik derecesi ve α anlamlılık seviyesine sahip t dağılımı tablo değeri $t_{\alpha,f}$ sembolü ile gösterilmektedir. $t_{\alpha,f}$ öyle ki $P(\xi \geq t_{\alpha,f}) = \alpha$ şeklindedir. Student (t) dağılımının grafiği Şekil 5'te görülmektedir[33].



Şekil 5. Student (t) Dağılımı

2.6. Uygunluk Testleri

Uygunluk (goodness-of-fit) testleri, örnek verileri kümesinin teorik bir olasılık dağılımına uyup uymadığının belirlenmesi için kullanılmaktadır. Söz konusu testler örnek verilerinin beklenen teorik dağılım değerlerinden anlamlı olarak farklı olup olmadığını araştırmaktadır[34]. Diğer bir deyişle, herhangi bir örneğin dağılımından hareketle, bu örneğin belirli bir teorik olasılık dağılımı gösteren anakütleden gelip gelmediğinin araştırılmasında kullanılmaktadır[35].

2.6.1. Ki-Kare Testleri

Ki-kare testleri, uygunluk testleri içinde en çok kullanılan testlerden birisidir. Anakütle dağılımları hakkında belirli varsayımlara dayanan parametrik tekniklerin kullanılıp kullanılmayacağına karar vermek için sıklıkla kullanılan parametrik olmayan bir testtir. Ki-kare testleri normal, düzgün, binom ve Poisson dağılımı gibi

---

[33] Freund, **a.g.e.,** ss. 312-313.
[34] Williemse, **a.g.e.,** s. 162.
[35] Neyran Orhunbilge, **Örnekleme Yöntemleri ve Hipotez Testleri,** 2. baskı, İstanbul, İ.Ü. İşletme İktisadı Yayınları, 2000, s. 265.

herhangi bir dağılım için uygulanabilmektedir. Uygulanabilmesi için olasılık şıklarına ait frekansların 5 ve 5'ten büyük olması gerekmektedir.

Test, tipik bir hipotez testi gibi dört aşamadan oluşmaktadır. Önce hipotezler oluşturulur. H_0 örnek dağılımı anakütle için ileri sürülen dağılıma uygun olduğu, H_1 uygun olmadığı şeklinde kurulur. İkinci olarak α anlamlılık düzeyi belirlenir. Daha sonra ki-kare istatistik değeri hesaplanır. f_i gözlenen frekans ve f_i' beklenen teorik frekanslar olmak üzere test istatistiği,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i')}{f_i'}$$

hesaplanarak elde edilir. Son olarak karar aşamasına geçilir. Elde edilen istatistik değeri α anlamlılık düzeyi ve $f = k - m - 1$ serbestlik dereceli ki-kare tablo değeriyle karşılaştırılır. Serbestlik derecesinde k değişkenin alabileceği değer sayısını (şık sayısını), m olasılık dağılımının parametre sayısını (normal dağılımda $m = 2$, Poisson dağılımında $m = 1$...), 1 ise hesaplanan olasılıkları frekansa çevirmek için kullanılan örnek birim sayısını (n) temsil etmektedir. Serbestlik derecesi kısaca şık sayısından, teorik ferekansları hesaplayabilmek için bilinmesi gereken değerlerin toplam sayısının çıkarılmasıyla elde edilir. Test istatistiği tablo değerinden küçük veya eşitse H_0 kabul edilir, büyükse H_0 reddedilir[36].

2.6.2. Kolmogorov-Smirnov Testi

Ki-kare uygunluk testlerinin alternatifi olan bu test de parametrik olmayan bir testtir. Ki-kare testinin uygulanması için her iki özelliğin şıklarına ait frekansların 5 ve 5'ten büyük olması gerekirken, Kolmogorov-Smirnov testi böyle bir şarta dayanmamaktadır. Böylece küçük örneklere de kolayca uygulanabilmektedir.

[36] A.e., ss. 265-266.

Test, örnekten elde edilen birikimli nisbi frekans dağılımının H_0'da ileri sürülen anakütle teorik olasılık dağılımıyla karşılaştırılmasına dayanmaktadır. Hesaplanması gereken D istatistiği, gözlenen birikimli nisbi frekans dağılımı (f) ile H_0'daki birikimli teorik frekans dağılımı (f') arasındaki maksimum mutlak farktır. Teorik olasılık dağılımlarıyla elde edilen nisbi frekanslar ile gözlenen nisbi frekansların farkları alınarak D değeri elde edilmektedir. Test istatistiği,

$$D = \max|f - f'|$$

biçiminde ifade edilebilir. Hesaplanan bu değer çeşitli anlamlılık düzeyleri ve örnek birim sayıları için kritik D değerlerini gösteren tablodan bulunan $D_{\alpha,n}$ değeriyle karşılaştırılır. $D \leq D_{\alpha,n}$ ise H_0 kabul, yani anakütle iddia edilen teorik dağılıma uygundur. $D > D_{\alpha,n}$ ise H_0 red, yani anakütle iddia edilen teorik dağılıma uygun değildir kararları alınır[37].

2.6.3. Bowman-Shelton (Jarque-Bera) Normallik Testi

Normallik testleri ki-kare ve Kolmogorov-Smirnov testleri ile de yapılabilmektedir. Ancak burada sunulan özel normallik testi, uygulanması daha kolay ve daha güçlü bir testtir. Verilerin çarpıklık ve basıklık ölçülerinin hesaplanması ile elde edilen test istatistiğinin ki-kare dağılımı ile karşılaştırılması sonucu normal dağılıma uygunluk olup olmadığı incelenir.

Test istatistiği,

$$B = n\left[\frac{\alpha_3^2}{6} + \frac{(\alpha_4 - 3)^2}{24}\right]$$

[37] **A.e.,** ss. 281-282.

olarak hesaplanır. α_3 çarpıklık ve α_4 ise basıklıktır. Bu değerler momentler yardımı ile hesaplanmaktadır. Burada,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{ve} \quad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

olacaktır. Normal dağılımda, çarpıklık $\alpha_3 = 0$ ve basıklık $\alpha_4 = 3$'tür. Temel hipotez H_0 verilerin normal dağıldığı, alternatif hipotez H_1 verilerin normal dağılmadığı şeklinde kurulur. Hesaplanan test istatistiği 2 serbestlik dereceli χ^2 tablosu ile karşılaştırılır. Hesaplanan test istatistiği tablo değerinden küçük veya eşitse H_0 hipotezi, büyükse H_1 hipotezi kabul edilir[38].

Yukarıda verilen test istatistiği dağılımının ki-kareye iyi yakınsaması ancak çok büyük örnekler içindir. Alternatif olarak, çeşitli örnek büyüklükleri için C.M. Jarque ve A. K. Bera eşik değerlerini gösteren tablo hazırlamışlardır. Küçük örnekler için de yine izlenecek yol aynı olmakla birlikte ki-kare tablosu yerine Jarque-Bera tablosu kullanılmalıdır[39]. Bu nedenle, Bowman-Shelton testi bazı kaynaklarda Jarque-Bera testi olarak da yer almaktadır.

2.7. Stokastik Kavramı ve Stokastik Süreçler

Yukarıda ayrıntılarıyla incelenen rassal değişken kavramı yerine, literatürde *stokastik değişken* ve *şans değişkeni* kavramları da kullanılmaktadır. Olasılık teorisinde geniş olarak kullanılan "*stokastik*" kelimesi, Latince "şans" kelimesinden türetilmiştir. Jacob Bernoulli tarafından literatüre kazandırıldığı düşünülmektedir[40]. Stokastik kelimesi, literatürde olasılıksal ve olasılıkla ilişkili olgular anlamını karşılamak için de kullanılmaktadır.

---

[38] Selahattin Güriş, Ebru Çağlayan, **Ekonometri:Temel Kavramlar,** İstanbul, Der Yayınları, 2000, s. 578.
[39] Newbold, **a.g.e.,** s. 462.
[40] Apostol, **a.g.e.,** s. 512.

Stokastik süreç, $\{x_t, t \in T\}$ rassal değişkenler ailesi ve kümesi olarak tanımlanmaktadır. Burada, x_t, t zamanında gözlenen değer ve *indeks parametresi* T, içinde bulunulan zaman aralığıdır[41]. Rassal deneme ile stokastik süreç aynı anlamdadır. Ancak, stokastik süreç zaman parametresi esas alınarak tanımlanmıştır.

Rassal değişkenlerin aldığı aldığı her bir özel değer, bir *durum* (state) olarak adlandırılır. Stokastik süreç literatüründe, x_t rassal değişkeni bir *durum değişkeni*dir. $\{S\}$ *durum uzayı*, x_t'nin tüm olası değerleri için örnek uzayını tanımlar. S tam sayılı kesikli değerleri içerirse $\{x_t, t \in T\}$ *ayrık durumlu stokastik süreç* adını alır. S reel doğru üzerindeki reel (sürekli) değerlerle tanımlanırsa *reel değerli stokastik süreç* olarak tanımlanmaktadır.

İndeks parametresi T kesikli veya sürekli olabilmektedir. T tam sayılı değerlerle sınırlanırsa, *kesikli parametreli stokastik süreç* olarak adlandırılır[42]. T bir aralık ise, $\{x_t, t \in T\}$ *sürekli parametreli stokastik süreç* adını almaktadır[43]. Sürekli zaman stokastik süreci, sistemin durumunu sadece zamanın farklı anlarında değil, herhangi bir anında gözleyebilen stokastik bir süreçtir. Sözü edilmesi gerekli önemli bir nokta, kesikli zaman stokastik sürecin bir özel türü *Markov zinciri*dir[44].

---

[41] J.L. Doob, **Stochastic Processes,** USA, John Wiley & Sons Inc., 1953, s. 46.
[42] Osman Halaç, **Kantitatif Karar Verme Teknikleri,** 4. baskı, Alfa Basım Yayım, 1995, ss. 99 - 100.
[43] Doob, **a.g.e.,** s. 46.
[44] Ahmet Öztürk, **Yöneylem Araştırması,** 7. baskı, Bursa, Ekin Kitabevi Yayınları, 2001, s. 476.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

STOKASTİK PROGRAMLAMA VE STOKASTİK ÇÖZÜM DEĞERİ

Bu bölümde, stokastik programlamanın tarihsel gelişimi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Stokastik programlamanın tanımı, ölçme ve integral teorisi ile deterministik eşdeğerler üzerinde durulmuştur. Deterministik ve stokastik karar ağaçları irdelenerek çok aşamalı stokastik programlar için bir çözüm yöntemi olan senaryo oluşturma yöntemi ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Ayrıca, stokastik programlamanın diğer yöneylem araştırması ve karar modelleri ile olan ilişkileri incelenerek bilginin değeri ve stokastik çözüm değeri irdelenmiştir.

3.1.Tarihsel Gelişim

Stokastik programlama kavramı 1955 yılında G. B. Dantzig ve bağımsız olarak yine aynı yıl E. Beale tarafından ortaya atılmıştır. Dantzig, Beale ve diğerleri çözülmesi gereken bir çok lineer programların bilindiği varsayılan katsayılarının mevcut olmadığını farketmişlerdir. Bu nedenle, stokastik çerçeveyi, bilinmeyen katsayıların veya parametrelerin *rassal* olduğu ve *P* olasılık dağılımlarının *bilindiği* ve karar değişkenlerinden bağımsız olduğu varsayımları altında deterministik eşdeğerleri ile değiştirilebileceğini önermişlerdir[1]. G. B. Dantzig ve A. Ferguson gibi bir çok bilimci, özellikle 1955-1960 yılları arasında amaç fonksiyonları ya da kısıtların katsayılarının rassal olarak değiştiği optimizasyon problemleriyle başa çıkabilmek için lineer programlama yöntemlerini geliştirmeye çalışmışlardır[2].1958 yılında, yukarıdakilerden bağımsız olarak, probabilistik kısıtlı (şans kısıtlı) stokastik programların formülasyonu ilk olarak A. Charnes, W. Cooper ve G. Symond tarafından geliştirilmiştir. İki aşamalı telafili (recourse) stokastik programların

[1] Jitka Dupacova, "Applications of Stochastic Programming: Achivements and Questions," **European Journal of Operational Research,** No: 140, 2002, s. 281.
[2] George B. Dantzig, **Linear Programming and Extensions,** 2nd Ed., New Jersey, Princeton University Press, 1963, s. 499.

formülasyonu da Dantzig ve Beale'e atfedilmektedir[3]. Stokastik programlamanın ilk uygulamaları 1950'lerde görülmeye başlandı. Bu uygulamalar genellikle basit stokastik programlama uygulamalarıydı.

1970'lerdeki önemli gelişmeler ortak probabilistik kısıtların uygulamalarını kolaylaştırdı. İz bırakan etkin gerçek-dünya uygulamaları yine bu yıllarda geliştirildi. Bu uygulamalar arasında en önemlileri su kaynaklarının yönetimine ilişkin uygulamalardı[4]. Probabilistik kısıtlı programlar için genel konkavımsılık (quasi-concavity) ve logaritmik konkavlık konusu ilk olarak Andreas Prékopa tarafından 1973'te yayınlanarak büyük yankı uyandırmıştır[5]. 1970'lerin sonlarında çok aşamalı stokastik programların uygulamaları yapılarak daha temsili gerçek-dünya problemleri modellenmiştir.

1980'lerin başında S. P. Bradley ve D. B. Crane isimlerinin katkılarıyla stokastik programlamanın portföy yönetimine uygulamaları başarıyla gerçekleştirilmiştir. Bu başarılar, çağdaş finansal uygulamalar için dönüm noktası oluşturdukları gibi çok aşamalı stokastik programlar için yazılımlar geliştirilmesine de yol açmıştır. 1980'lerde stokastik programlama problemlerinin çözümleri için yazılım geliştirilmesine özel bir önem verilmiştir[6].

1991'de, çok aşamalı stokastik programların çözümünde bir çığır açan senaryo oluşturma yöntemi, R.T. Rockafellar ve R.J.-B. Wets tarafından *Mathematics of Operations Research* dergisinde yayınladıkları "Scenarios and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty" adlı makalede tanıtıldı. Bu, çok önemli bir kilometre taşıydı[7].

---

[3] J.E. Dennis Jr., Robert B. Schnabel, **"A View of Unconstrained Optimization," Optimization,** Ed. G .L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kann, M.J. Todd, Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1989, s. 3.
[4] Dupacova, **a.g.e.,** s. 282.
[5] Dennis, **a.g.e.,** s. 3.
[6] Dupacova, **a.g.e.,** s. 282.
[7] Andras Prékopa, **Stochastic Programming,** Hungary, Kluwer Academic Publishers, 1995, s. 444.

Özellikle yakın geçmişte, optimizasyon, olasılık, istatistik ve bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler çeşitli stokastik programlama modelleri için teorik analiz ve yazılım geliştirme çabalarına olanak sağlamıştır. Günümüzde, stokastik programlama alanında, sınırlı sayıda da olsa kitaplar, konferans bildirileri, dergilerin özel sayıları ve atelye çalışmaları gibi bir çok yelpazede kaynak bulunmaktadır[8]. Stokastik programlama modellerinin çözümü için günümüze kadar SLP-IOR, MSLiP, NEOS Solver, SPInE, BNBS ve COIN-SMI gibi bir çok yazılım geliştirilmiştir[9]. Ayrıca, bazı özel vak'alar için internet üzerinden interaktif olarak çalışan yazılım örnekleri de analistlerin hizmetine sunulmuştur[10]. Matematik Programlama Topluluğu (MPS)'na bağlı olarak Stokastik Programlama Komitesi (COSP) 1981'de kurulmuştur[11]. Bu komitenin yanısıra başka organizasyonlar da stokastik programlama alanında geleneksel hale gelmiş uluslararası konferanslar düzenlemektedirler. Dünya çapında, stokastik programlamanın gerek teorik gerekse uygulamasına yönelik önemli ve sevindirici katkılar, çeşitli platformlarda artan bir ivmeyle bilim dünyasının hizmetine sunulmaktadır.

3.2.Stokastik Programlamanın Uygulama Alanları

Stokastik programlama kavramı özellikle son yıllarda artan bir yoğunlukla hem teorik hem de uygulamalı olarak üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Model kurma ve çözme zorluğuna rağmen, stokastik programlamayı popüler kılan en önemli etkenlerden birisi, gerçek dünya problemlerini çok daha iyi temsil etme becerisine sahip olmasında yatmaktadır. Stokastik programlama çok geniş bir yelpazede uygulama alanına sahiptir. Aşağıda bazı uygulama alanları sıralanmıştır.

- Finansal planlama ve kontrol,
- Kapasite geliştirme,

---

[8] Dupacova, **a.g.e.**, s. 282.
[9] Shabbir Ahmed, "Software & Test Sets," (Çevrimiçi) http://www.stoprog.org/index.html? software. html, 3 Eylül 2003.
[10] Argonne National Laboratory, (Çevrimiçi) http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/cgi-bin/neos/Guide/ CaseStudies/slp/ nph-count.cgi, 3 Eylül 2003.
[11] Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) http://www.stoprog.org, 4 Eylül 2003.

- Üretim kalite kontrol dizaynı,
- Hava yolları planlaması,
- Üretim planlama[12],
- Su kaynakları planlaması[13],
- Enerji planlama[14],
- Envanter Kontrol Modelleri[15],
- Ekonomi uygulamaları[16],
- Proje yönetimi uygulamaları[17],
- İnsan kaynakları planlaması[18],
- Çevre kirliliğinin azaltılmasına ilişkin planlamalar[19],
- Doğal gaz fiyatlandırma ve planlama uygulamaları[20],
- Reklam ve pazarlama karması[21],
- Robot teknolojisi[22],
- Mekanik ve teknik uygulamalar[23],
- Trafik yönetimi,

---

[12] John R. Birge, François Louveaux, **Introduction to Stochastic Programming,** New York, Springer, 1997, ss. 20-44.

[13] B.R. Feiring, T. Sastri, "A Stochastic Programming Model for Water Resource Planning," **Mathematical Computation Modelling,** Great Britain, Vol. 27, No:3, 1998, ss. 1-7.

[14] Andras Prekopa v.d., **"The STABIL Stochastic Programming Model and its Experimental Application to the Electrical Energy Sector of the Hungarian Economy," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 369-385.

[15] Muhittin Oral, S.Subba Rao, **"An Objective Function for Inventory Control Models," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 403-426.

[16] Jati K. Sengupta, **"Stochastic Programming: A Selective Survey of Recent Economic Applications," Stochastic Programming,** Ed. By M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 525-536.

[17] Salah E. Elmaghray, Hanijanto Soewandi and Ming-Jong Yao, "Chance Constrained Programming in Activity Networks: A Critical Evaluation," **European Journal of Operational Research,** No:131, 2001, ss. 440-458.

[18] Elmira Popova, David Morton, **"Adaptive Stochastic Manpower Scheduling," Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference,** Ed.D.J. Medeiros v.d., y.y., y.y., t.y., ss. 661-668.

[19] Athanasios Kampas, Ben White, "Probabilistic Programming for Nitrate Pollution Control: Comparing Different Probabilistic Constraint Approximations," **European Journal of Operational Research,** No:147, 2003, ss. 217-228.

[20] Argonne National Laboratory, (Çevrimiçi) http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/cgi-bin/neos/Guide/CaseStudies/slp/nph-count.cgi, 3 Eylül 2003.

[21] Charles S. Tapiero, **Applied Stochastic Models and Control in Management,** Netherlands, Elseiver Science Publishing Inc., 1988, ss. 164-192.

[22] A.S. Poznyak, K. Najim, **Learning Automata and Stochastic Optimization,** Great Britain, Springer-Verlag, 1997, ss. 3-24.

[23] Kurt Marti, Peter Kall, Eds., **Stochastic Programming Methods and Technical Applications: Proceedings of the 3rd GAMM/IFIP-Workshop on Sochastic Optimization; Numerical Methods and Technical Applications,** Germany, Springer-Verlag, 1998, ss. 345-437.

- Göl ve su seviyesi yönetimi,
- Elektrik üretimi kapasite planlama,
- Orman ürünleri yönetimi
- Makine çizelgeleme[24].

3.3.Stokastik Programlamanın Genel Modeli

Stokastik programlar, kısıtlar veya amaç fonksiyonlarındaki bazı verilerin belirsiz olduğu matematik programlardır. Söz konusu belirsizlik genellikle olasılık dağılımlarıyla ifade edilmektedir[25]. Genel olarak bir stokastik programlama modeli, $\tilde{\xi}$ rassal vektörü, $\Xi \subset R^k$ kümesinde değişmek üzere,

$$\min g_0(x,\tilde{\xi})$$
$$g_i(x,\tilde{\xi}) \le 0, i = 1,2,...,m,$$
$$x \in X \subset R^n$$

biçiminde ifade edilebilir. Daha açık bir ifadeyle, $\tilde{\xi}$ rassal vektörü bir *olay*lar ailesi F içinde yer almaktadır. Yani, Ξ'nın altkümeleri ve F üzerindeki olasılık dağılımı P bilinmektedir. Bu nedenle, her altküme $A \subset \Xi$ bir olaydır, $A \subset F$ için $P(A)$ bilinmektedir. Ayrıca, $g_i(x,.):\Xi \to R \forall x,i$ ifadelerinin kendilerinin rassal değişkenler ve olasılık dağılımı P' nin, x değişkenlerinden bağımsız oldukları varsayılmaktadır[26].

---

[24] Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) www.stoprog.org/resources.html, 5 Eylül 2003.
[25]Derek Holmes, "What is Stochastic Programming," (Çevrimiçi) http://users.iems.nwu.edu/~jrbirge//html/dholmes/StoProIntro.html, 8 Eylül 2003.
[26] Peter Kall, Stein W. Wallace, **Stochastic Programming,** USA, John Wiley & Sons Inc., 1995, s. 15.

3.3.1. Ölçü ve İntegral

Bir *ölçü* negatif olmayan reel değerli bir küme fonksiyonudur. Yani, ölçü, kümeleri negatif olmayan sayılara veya ∞'a eşlemektedir. Bir açıdan, kümelerin ne kadar büyük olduğunu ifade etmektedir[27]. R^k'de, kümeleri,

$$I_{[a,b)} = \left\{x \in R^k \;\middle|\; a_i \le x_i < b_i, i = 1,2,...,k\right\}$$

biçimindeki yarı-açık aralıklarla ifade etmek mümkündür. $k = 1$ ise bir aralık, $k = 2$ ise dörtgen ve $k = 3$ ise bir küp elde edileceği açıktır. Kümelerin büyüklüğünün ele alınmasının mümkün yollarından birisi, μ doğal ölçüsünü,

$$\mu(I_{[a,b)}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i), a \le b \\ 0 \qquad\qquad , aksi\ halde \end{cases}$$

biçiminde ifade etmektir.

Reel ayrık aralıkların sonlu birleşimlerinin kümesi A olmak üzere, $A = \bigcup_{n=1}^{M} I^{(n)}$ ve $I^{(n)}$ öyle aralıklar ki $n \neq m$ için $I^{(n)} \cap I^{(m)} = \varnothing$ ise, A'nın ölçüsü,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{M} \mu(I^{(n)})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Aralık olmayan veya ayrık aralıkların sonlu birleşimi olmayan kümeleri ölçmek için aşağıdaki yöntem izlenir.

A kümesindeki ikili-ayrık aralıkların herhangi bir sonlu kolleksiyonu A'nın bir *bağlaması (packing)* C'yi oluşturur. C, iyi tanımlanmış $\mu(C)$ ölçüsü ile söz

[27] Norman R. Howes, **Modern Analysis and Topology,** New York, Springer-Verlag, 1995, s. 229.

konusu aralıkların birleşimi olmaktadır. Benzer şekilde, ikili-ayrık aralıkların sonlu kolleksiyonu ile A' yı içeren birleşimleri A' nın bir *kaplaması (covering)* D' yi oluşturur. D, iyi tanımlanmış $\mu(D)$ ölçüsüne sahiptir. Genel olarak, herhangi bir sınırlı $A \subset R^k$ kümesi için, C_A, A' nın tüm bağlamaları ve D_A, A' nın tüm kaplamalarını göstermek üzere aşağıdaki tanım yapılabilir. Ölçüsü $\mu(A) = \sup\{\mu(C) | C \in C_A\}$ olan kapalı ve sınırlı bir küme A,

$$\sup\{\mu(C) | C \in C_A\} = \inf\{\mu(D) | D \in D_A\}$$

koşulu sağlanıyorsa *ölçülebilir*dir. Sınırlılık kısıtından kurtulmak için tanım şöyle geliştirilebilir. Herhangi bir kapalı $A \subset R^k$ kümesi *ölçülebilir*dir ancak ve ancak her aralık $I_{[a,b)} \subset R^k$ olmak üzere $A \cap I_{[a,b)}$ ölçülebilirdir. Bu tanım da, R^k'nin kendisinin ölçülebilir olduğunu gerektirmektedir. Her zaman R^k'yı kapsayan sayılabilir bir çok ikili-ayrık $I_{[a^\nu,b^\nu)}, \nu = 1,2,...,$ aralıklarının koleksiyonları mevcuttur. Matematiksel olarak, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_{[a^\nu,b^\nu)} = R^k$ olarak ifade edilebilir. Buradan, A' nın ölçüsü olarak $\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A \cap I_{[a^\nu,b^\nu)})$ elde edilir. Açıktır ki $\mu(A) = \infty$ elde edilebilir[28]. Ölçülebilir kümelerin bazı özellikleri aşağıdadır.

- S ve T ölçülebilir kümeler ise aşağıdaki kümeler de ölçülebilir kümelerdir,

$$S \cap T,\ S \cup T,\ S - T,\ S \Delta T \text{ ve } R - S.$$

- $\{S_k\}$ ölçülebilir kümelerin bir dizisi olmak üzere,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \text{ ve } \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

ifadeleri de ölçülebilirlerdir. Ölçünün bazı özellikleri de aşağıda sıralanmıştır.

[28] Wallace, **a.g.e.**, ss. 16-18.

- S ve T ölçülebilir kümeler olsunlar. $S \subseteq T$ ise $\mu(S) \leq \mu(T)$.
- S ve T ölçülebilir kümeler ise,

$$\mu(S \cup T) + \mu(S \cap T) = \mu(S) + \mu(T)$$

- $\{S_k\}$ ölçülebilir kümelerin bir dizisi olmak üzere,

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k),$$

- $\{S_k\}$ kümeleri ikili-ayrık iseler eşitlik durumu elde edilir (sayılabilir toplamlık).

- $d \in R$ ve S ölçülebilir ise, $S + d$ ölçülebilir ve $\mu(S + d) = \mu(S)$ [29].

Buraya kadar anlatılanlar R^k'deki ölçülebilir kümelerin bir sınıfı olan $\mathcal{A}$ için genişletebilir. Bu amaçla, $\mathcal{A}$ için aşağıdaki özellikler eklenecektir.

- $A \in \mathcal{A}$ ise $R^k - A \in \mathcal{A}$, (3.1.)
- $A_i \in \mathcal{A}, i = 1,2,...,$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. (3.2.)

Bu özellik aşağıdaki özelliği gerektirmektedir,

- $A_i \in \mathcal{A}, i = 1,2,...,$ ise $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Buradan R^k'de tanımlı μ doğal ölçüsü için,

---

[29] H.A. Priestley, **Introduction to Integration,** Oxford Science Publications, New York, 1997, ss. 166-167.

- $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ve $\mu(\varnothing) = 0$, (3.3.)
- $A_i \in \mathcal{A}, i = 1,2,...,$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, (3.4.)

elde edilmektedir. Yukarıda da ifade edildiği gibi, son özellik sayılabilir toplamlık özelliği olarak adlandırılmaktadır.

Bu özellikler olasılık teorisindeki özellikleri çağrıştırmaktadır. 2. Bölüm'de değinildiği üzere, rassal denemelerin sonuçları (*çıktılar*) ω'nın bazı *uzayı* Ω olmak üzere Ω'un F altkümelerinin bir kolleksiyonu $\mathcal{F}$, *olaylar (events)* olarak adlandırılır. *Olasılık ölçüsü (olasılık dağılımı)* P, her $F \in \mathcal{F}$' i kendisinin gerçekleşme olasılığıyla eşleştirir. Olasılık teorisinin kurulması için aşağıdakiler gereklidir.

- $\Omega \in \mathcal{F}$ bir olay ve $F \in \mathcal{F}$ ise $\Omega - F \in \mathcal{F}$ sağlanır. Yani, F bir olay ise tümleyeni de bir olaydır.
- Olayların sayılabilir birleşimi de bir olaydır.

Görüldüğü gibi bu ifadeler (3.1.) ve (3.2.)' de ifade edilenlerle örtüşmektedir. Ancak burada, Ω herhangi nesneler uzayı olabilmekte, R^k olmak zorunda değildir. Olasılık uzayı olması için,

- $P(F) \geq 0 \forall F \in \mathcal{F}$ ve $P(\Omega) = 1$,
- $F_i \in \mathcal{F}, i = 1,2,...,$ ve $i \neq j$ için $F_i \cap F_j = \varnothing$ ise $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)$,

şartlarının sağlanması gerekmektedir. Buradakilerin (3.3.) ve (3.4.)'den tek farkları, P'nin $P(F) \leq 1$ ile sınırlandırılırması ve μ'nün R^k'de sınırsız olmasıdır. Yukarıdaki özelliklere sahip $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ üçlüsü bir *olasılık uzayı* olarak adlandırılmaktadır.

Ayrıca, olasılık teorisinde –2.Bölüm'de ayrıntılı olarak değinildiği gibi- *rassal değişkenler* ve *rassal vektörler* $\tilde{\xi}$ kavramları bulunmaktadır. R^k'de doğal ölçülebilen kümelerin bir kolleksiyonu $\mathcal{A}$ olmak üzere, bir rassal vektör,

$$\tilde{\xi}:\Omega \to R^k \text{ öyle ki } \forall A \in \mathcal{A},\ \tilde{\xi}^{-1}[A] := \{\omega | \tilde{\xi}(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

biçiminde ifade edilebilen bir fonksiyondur. Bu ifade, R^k'deki her ölçülebilen kümenin $\tilde{\xi}$ fonksiyonuna göre terslerinin de Ω'da bir olay olması gerektirdiğini belirtmektedir. Vurgulanması gerekli diğer bir nokta, $\tilde{\xi}:\Omega \to R^k$ rassal vektörü $\mathcal{A}$ üzerinde,

$$P_{\tilde{\xi}}(A) = P(\{\omega | \tilde{\xi}(\omega) \in A\})\ \forall A \in \mathcal{A}$$

biçiminde bir olasılık ölçüsüne neden olmaktadır.

İntegral kavramına kısaca değinmek faydalı olacaktır. R^k'nın ölçülebilir kümeleri $\mathcal{A}$, doğal ölçü μ, bazı sınırlı küme $B \in \mathcal{A}$ ve $\{A_1,..., A_r\}$, B'nin ölçülebilir kümelere *bölünmesi(partition)*, matematiksel olarak, $A_i \in \mathcal{A},\ i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ve $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = B$ olsun. *Gösterge fonksiyonu* $\chi_{A_i}: B \to R$,

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & \textit{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Verilen bazı c_i sabitleri için *basit fonksiyon* $\varphi(x): B \to R$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i \chi_{A_i}(x)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $x \in A_i$ için $\varphi(x) = c_i$ olacaktır. *İntegral* $\int_B \varphi(x)d\mu$,

$$\int_B \varphi(x)d\mu = \sum_{i=1}^{r} c_i \mu(A_i)$$

olarak tanımlanmaktadır[30]. Bu tür bir integral *Lebesgue integrali* olarak da bilinmektedir[31].

Basit fonksiyonlar φ_1 ve φ_2'nin toplamları ya da farkları yine bir basit fonksiyondur. Ayrıca, toplamanın temel özelliklerinden,

$$\int_B [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]d\mu = \int_B \varphi_1(x)d\mu + \int_B \varphi_2(x)d\mu$$

$$\left|\int_B \varphi(c)d\mu\right| \leq \int_B |\varphi(x)|\, d\mu$$

yazılabilir. Ayrık ölçülebilir kümeler, $B_j \in \mathcal{A},\ j \neq l,\ j = 1,...,s$ için $B_j \cap B_l = \varnothing$ ve $\bigcup_{j=1}^{s} B_j = B$ olsun. Buradan,

$$\int_B \varphi(x)d\mu = \sum_{j=1}^{s} \int_{B_j} \varphi(x)d\mu$$

olduğu görülebilir.

$\psi : B \to R$ tipindeki başka fonksiyonların integrallerini almak için, integralleri yakınsayan basit fonksiyonlarla ψ fonksiyonuna yaklaşılır. B'deki basit fonksiyonların,

$$n, m \to \infty \text{ için } \int_B |\varphi_n(x) - \varphi_m|\, d\mu \to 0$$

[30] Wallace, **a.g.e.**, ss. 19-22.
[31] Howes, **a.g.e.**, s. 249.

şartını sağlayan $\{\varphi_n\}$ dizisine *ortalama temel (mean fundamental)* adı verilmektedir. Hemen heryerde (a.e., almost everywhere) $\varphi_n(x) \to \psi(x)$ ve $\{\varphi_n\}$ dizisi temel ortalama olan bir $\{\varphi_n\}$ dizisi var ise, $\int_B \psi(x)d\mu$ integrali,

$$\int_B \psi(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B \varphi_n(x)d\mu$$

ile tanımlanır ve ψ *integrallenebilir* olarak adlanır. Söz konusu integralin tek bir değer alabileceği gösterilebilir.

$\tilde{\xi} \in R^k$ tarafından oluşturulan olasılık uzayı $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ve $\psi : \Xi \to R$ fonksiyonunun P olasılık ölçüsüne göre integrali,

$$E_{\tilde{\xi}}\psi(\tilde{\xi}) = \int_{\Xi} \psi(\xi)dP$$

olarak gösterilebilir ve yukarıdaki işlemlerin uygulanmasıyla türetilebilir. Bu durumda, μ ölçüsü yerine P olasılık ölçüsü ele alınmalıdır. Bu gösterimde E *beklenen değeri* ve $\tilde{\xi}$ de olasılık uzayının $\tilde{\xi}$ rassal vektörü tarafından oluşturulduğunu belirtmektedir.

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \in R^k$ olasılık uzayının P olasılık ölçüsü denk olarak,

$$F_{\tilde{\xi}}(x) = P(\{\xi | \xi \le x\}), x \in R^k$$

biçiminde ifade edilen bir *dağılım fonksiyonu* $F_{\tilde{\xi}}$ ile gösterilebilir. İntegrali,

$$F_{\tilde{\xi}}(x) = \int_{x \le \hat{x}} f_{\tilde{\xi}}(x)d\mu, \hat{x} \in R^k$$

μ doğal ölçüsüne göre dağılım fonksiyonunu veren $f_{\tilde{\xi}} : \Xi \to R$ fonksiyonu varsa $f_{\tilde{\xi}}$ fonksiyonu *P*'nin *yoğunluk fonksiyonu* olarak isimlendirilir. Bu durumda dağılım fonksiyonu süreklidir.

3.3.2. Deterministik Eşdeğerler

Öncelikle deterministik eşdeğer kavramını tanımlamak yararlı olacaktır. İstatistiksel işlem içermeyen deterministik matematik programlama problemi, orjinal stokastik programıyla aynı optimal amaç değerlerine ve /veya optimal stratejilere sahipse, söz konusu stokastik programın *deterministik eşdeğeri* olarak tanımlanmaktadır[32].

Yukarıda verilen stokastik programlama modelini,

$$\begin{aligned} &\min g_0(x,\tilde{\xi}) \\ &g_i(x,\tilde{\xi}) \le 0, i = 1,2,...,m, \\ &x \in X \subset R^n \end{aligned} \qquad (3.5.)$$

tekrar ele alalım. (3.5.)'in *i.* kısıtı verilen bir x kararı ve $\tilde{\xi}$ 'in bir ξ gerçeklenmesi için sadece ve sadece $g_i^+(x,\xi) > 0$ olması durumunda ihlal edilmektedir. Burada,

$$g_i^+(x,\xi) = \begin{cases} 0 & , g_i(x,\xi) \le 0 \ ise \\ g_i(x,\xi), & aksi\ halde \end{cases}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu nedenle, olası kısıt ihlallerinin telafisini sağlamak amacıyla her bir kısıt için, ξ 'nin gerçeklenmesinden sonra, bir *telafi (recourse)* veya *ikinci-aşama faaliyeti* $y_i(\xi)$ oluşturulmalıdır[33]. Stokastik lineer programlamanın

---

[32] Andrey I. Kibzun, Yuri S. Kan, **Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions,** England, John Wiley & Sons Ltd., 1996, s. 216.
[33] Wallace, **a.g.e.,** ss. 23-25.

arkasındaki temel fikir *telafi (recourse)* kavramıdır. Telafi, rassal bir olay gerçekleştikten sonra, rassal olayın bozduğu ve ihlal ettiği kısımları düzeltici bir faaliyet becerisidir[34]. Bu ikinci-aşama faaliyeti $g_i(x,\xi) - y_i(\xi) \leq 0$ koşulunu sağlamalıdır. Bu ilave çabanın birim başına ek bir q_i maliyeti ya da telafiyi oluşturduğu varsayılmaktadır. *Telafi fonksiyonu (recourse function)* olarak da nitelendirilebilen ilave maliyetlerin miktarı,

$$Q(x,\xi) = \min_{y}\left\{\sum_{i=1}^{m} q_i y_i(\xi) \,\middle|\, y_i(\xi) \geq g_i^+(x,\xi), i = 1,2,...,m\right\} \qquad (3.6.)$$

olarak elde edilir. Bu ifade, toplam maliyetin (*ilk aşama* ve *telafi-recourse- maliyeti*),

$$f_0(x,\xi) = g_0(x,\xi) + Q(x,\xi) \qquad (3.7.)$$

biçiminde elde edilmesini sağlamaktadır. (3.6.)'nın yerine daha genel bir lineer (telafili) program yazılabilir. Y herhangi bir polihedral küme (örneğin $\{y \mid y \geq 0\}$), telafi vektörü $y(\xi) \in Y \subset R^{\bar{n}}$, keyfi sabit $mx\bar{n}$ boyutlu matris (telafi matrisi) w ve karşılık gelen birim maliyet vektörü $q \in R^{\bar{n}}$ olmak üzere, telafi fonksiyonu,

$$Q(x,\xi) = \min_{y}\{q^T y \mid wy \geq g^+(x,\xi), y \in Y\} \qquad (3.8.)$$

olarak elde edilir. Burada, $g^+(x,\xi) = (g_1^+(x,\xi),..., g_m^+(x,\xi))^T$ şeklindedir. Açık olarak görülebileceği gibi, $w = I_{mxm}$ olması durumunda, (3.6.) ifadesi, (3.8.)'nin özel bir hali olmaktadır.

[34]Optimization Technology Center, (Çevrimiçi) http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/ OptWeb/ continuous/constrained/stoch.../ index.htm, 10 Eylül 2003.

Sonuç olarak, ayrıca, (3.7.)'deki telafi fonksiyonunu tanımlamak için bir doğrusal olmayan telafi programı seçilebilir. $q: R^{\bar{n}} \to R$ ve $H: R^{\bar{n}} \to R$ olmak üzere söz konusu telafi fonksiyonu,

$$Q(x,\xi) = \min\left\{q(y) \,|\, H_i(y) \geq g_i^+(x,\xi), i = 1,2,...,m; y \in Y \subset R^{\bar{n}}\right\} \qquad (3.9.)$$

şeklinde seçilebilir.

Tüm durumlarda, karar verici için, *ilk-aşama ve telafi maliyetleri* toplamından oluşan toplam maliyetlerin *beklenen değeri*ni minimize etmek anlamlı ve kabul edilebilir olmaktadır. Problem (3.5.)'in yerine deterministik eşdeğerini yazabiliriz. İki aşamalı (telafi fonksiyonlu) stokastik program,

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} f_0(x,\tilde{\xi}) = \min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} \left\{g_0(x,\tilde{\xi}) + Q(x,\tilde{\xi})\right\} \qquad (3.10.)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yukarıdaki iki aşamalı problem, *çok aşamalı* (telafi) programına dönüştürülebilir. Birinci ve ikinci aşamalarda alınan *x* ve *y* kararları yerine, *K+1* tane $x_0, x_1, ..., x_K$ $(x_\tau \in R^{\bar{n}_\tau})$ ardışık kararlar söz konusudur. Burada "aşama" terimi gerekli olmamasına rağmen "zaman periyotları" olarak da yorumlanabilir.

Kolaylık olması açısından (3.5.)'deki programın amaç fonksiyonunun deterministik olduğunu varsayalım. Bu durumda, $g_0(x,\xi) \equiv g_0(x_0)$ elde edilir. $\tau \geq 1$ aşamasında, $\tilde{\xi}_1,...,\tilde{\xi}_\tau$ rassal vektörlerinin $\xi_1,...,\xi_\tau$ gerçeklenmeleri olarak ve önceki kararlar $x_0,...,x_{\tau-1}$ bilinmektedir. Kısıt(lar)ı,

$$g_\tau(x_0,...,x_\tau,\xi_1,...,\xi_\tau) \leq 0$$

şartını sağlayan x_τ değişkeni için karar vermek zorundayız. $\tau \geq 1$ aşamasında maliyet fonksiyonunun $q_\tau(x_\tau)$ olduğu varsayımıyla, bir telafi (recourse) fonksiyonu,

$$Q_\tau(x_0, x_1, ..., x_{\tau-1}, \xi_1, ..., \xi_\tau) = \min_{x_\tau} \{q_\tau(x_\tau) \mid g_\tau(x_0, ..., x_\tau, \xi_1, ..., \xi_\tau) \leq 0\},$$

τ zamanındaki $\hat{x}_\tau$ optimal ceza faaliyetinin önceki kararlara ve τ aşamasına kadar gözlenen gerçeklenmelere bağlı olduğunu göstermektedir. Matematiksel olarak,

$$\hat{x}_\tau = \hat{x}_\tau(x_0, ..., x_\tau, \xi_1, ..., \xi_\tau),\ \tau \geq 1$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu nedenle, çoklu aşamaları hesaba katarak, çok aşamalı problem için *toplam maliyetler*,

$$f_0(x_0, \xi_1, ..., \xi_K) = g_0(x_0) + \sum_{\tau=1}^{K} Q_\tau(x_0, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{\tau-1}, \xi_1, ..., \xi_\tau) \qquad (3.11.)$$

olarak elde edilir. Buradan, yukarıdaki dinamik karar problemi -çok aşamalı (telafili) stokastik program- için deterministik eşdeğer,

$$\min_{x_0 \in X} \left[g_0(x_0) + \sum_{\tau=1}^{K} E_{\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_\tau} Q_\tau(x_0, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{\tau-1}, \tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_\tau) \right] \qquad (3.12.)$$

elde edilir. Bu ifade de, (3.10.)'da verilen iki aşamalı stokastik programın genelleştirilmiş halidir.

İki aşamalı durum için bazı özelliklere değinmek faydalı olacaktır. Aşağıdaki stokastik lineer programın,

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$

$$T(\tilde{\xi}) = h(\tilde{\xi}) \qquad (3.13.)$$
$$x \geq 0$$

verildiğini varsayalım. (3.5.)'deki genel stokastik programla karşılaştırıldığında, $X \subset R^n$ kümesinin, $A_{m_0 xn}$ matrisi ve b vektörünün deterministik olduğu varsayımıyla $X = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ biçiminde ifade edildiği görülmektedir. Buna karşın, $T(\cdot)_{m_1 xn}$ matrisi ve $h(\cdot)$ vektörü $\tilde{\xi}$ rassal vektörüne bağımlıdır. Bu nedenle rassal elemanlara sahiptirler. $\xi \in \Xi \subset R^k$ 'ya bağımlılık,

$$T(\xi) = \hat{T}^0 + \xi_1 \hat{T}^1 + ... + \xi_k \hat{T}^k \qquad (3.14.)$$

$$h(\xi) = \hat{h}^0 + \xi_1 \hat{h}^1 + ... + \xi_k \hat{h}^k \qquad (3.15.)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, $\hat{T}^0,...,\hat{T}^k$ matrisleri ve $\hat{h}^0,...,\hat{h}^k$ vektörleri deterministiktir. (3.13.)'teki stokastik kısıtların, (3.5.)'teki genel formülasyonda verilenin aksine eşitlik halinde olduğuna dikkat edilmelidir. Kısıtların ihlallerini lineer telafi fonksiyonu eşitlemek anlamlı bir davranış olacaktır. $Y = \{y \in R^{\bar{n}} \mid y \geq 0\}$ olduğu varsayımıyla, (3.8.)'e göre ***sabit telafili stokastik lineer program,***

$$\min_x E_{\tilde{\xi}} \{c^T x + Q(x, \tilde{\xi})\}$$
$$\text{öyle ki} \quad Ax = b \qquad (3.16.)$$
$$x \geq 0$$
$$Q(x, \xi) = \min\{q^T y \mid Wy = h(\xi) - T(\xi)x, y \geq 0\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Özel olarak, *sabit* $m_1 x \bar{n}$ boyutlu telafi matrisi W, $\{z \mid z = Wy, y \geq 0\} = R^{m_1}$ koşulunu sağlarsa ***tam sabit telafi (complete fixed recourse)***

olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla, birinci aşama kararı x ve $\tilde{\xi}$'nin ξ gerçeklenmesi ne olursa olsun, ikinci aşama programı,

$$Q(x,\xi) = \min\left\{q^T y \middle| Wy = h(\xi) - T(\xi)x, y \geq 0\right\}$$

her zaman çözüm için uygundur. Tam sabit telafinin özel bir hali *basit telafi*dir. $I_{m_1 x m_1}$ birim matris ve $W = (I, -I)$ olmak üzere, ikinci aşama program,

$$Q(x,\xi) = \min\left\{(q^+)^T y^+ + (q^-)^T y^- \middle| y^+ - y^- = h(\xi) - T(\xi)x, y^+ \geq 0, y^- \geq 0\right\}$$

olarak elde edilir. Yani, $q^+ + q^- \geq 0$ için, telafi değişkenleri y^+ ve y^- stokastik kısıtların mutlak bozulmalarını ölçmek (pozitif) amacıyla seçilebilir.

Buraya kadar anlatılanları genel bir model olarak,

$$\begin{aligned} &\min E_{\tilde{\xi}} f_0(x,\tilde{\xi}) \\ &E_{\tilde{\xi}} f_i(x,\tilde{\xi}) \leq 0, i = 1,...,s, \\ &E_{\tilde{\xi}} f_i(x,\tilde{\xi}) = 0, i = s+1,...,\overline{m}, \\ &x \in X \subset R^n \end{aligned} \qquad (3.17.)$$

ifadesinin içerisine yerleştirebiliriz. Burada, f_i, (3.5.) ve (3.13.)'deki amaç ve kısıt fonksiyonlarından elde edilmiştir[35]. Söz konusu model genel stokastik programlama sınıflandırmasında *beklenen değer modelleri* olarak da isimlendirilmektedir[36]. Şimdiye kadar, f_0 toplam maliyetleri ve $f_1,...,f_{\overline{m}}$ birinci aşama uygun küme X'i tanımlamak için kullanmıştı. Bununla birlikte, (3.5.)'teki g_j fonksiyonlarından

[35] Wallace, **a.g.e.,** ss. 25-29.
[36] Baoding Liu, "Uncertain Programming:A Unifying Optimization Theory in Various Uncertain Environments," **Applied Mathematics and Computation,** No: 120, 2001, s. 228.

türetilen f_i fonksiyonlarının türetilme yollarına bağlı olarak, bu genel ifade problem (3.5.) için başka deterministik eşdeğer tiplerini de içermektedir.

Farklı deterministik eşdeğer tiplerinden iki tanesini incelemek yararlı olacaktır. $\alpha \in [0,1]$ seçelim ve tüm kısıtlar için bir *ödeme* fonksiyonunu,

$$\varphi(x,\xi) := \begin{cases} 1-\alpha, & g_i(x,\xi) \le 0, i = 1,...,m, \\ -\alpha, & \textit{aksihalde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dolayısıyla, ξ'de uygun olmayan x için mutlak α *kaybı*, ξ'de uygun x için $1-\alpha$ *getirisi* mevcuttur. En azından *ortalama* bir mutlak kayıptan kaçınacak şekilde x kararları almayı amaçlamak gayet doğaldır. Bu,

$$E_{\tilde{\xi}}\varphi(x,\tilde{\xi}) = \int_{\Xi} \varphi(x,\xi)dP \ge 0$$

önermesine denktir. $f_0(x,\xi) = g_0(x,\xi)$ ve $f_1(x,\xi) := -\varphi(x,\xi)$ olarak tanımlanırsa,

$$f_0(x,\xi) = g_0(x,\xi),$$
$$f_1(x,\xi) = \begin{cases} \alpha - 1, & g_i(x,\xi) \le 0, i = 1,...,m, \\ \alpha, & \textit{aksihalde} \end{cases} \qquad (3.18.)$$

elde edilir. Bu ifade,

$$E_{\tilde{\xi}} f_1(x,\tilde{\xi}) = -E_{\tilde{\xi}}\varphi(x,\tilde{\xi}) \le 0$$

olmasını gerektirmektedir. Burada, vektör değerli fonksiyon $g(x,\xi) = (g_1(x,\xi),...,g_m(x,\xi))^T$ olmak üzere,

$$E_{\tilde{\xi}} f_1(x,\tilde{\xi}) = \int_{\Xi} f_1(x,\xi)dP$$

$$= \int_{\{g(x,\xi)\le 0\}} (\alpha - 1)dP + \int_{\{g(x,\xi)\neq 0\}} \alpha dP$$

$$= (\alpha - 1)P(\{\xi \mid g(x,\xi) \le 0\}) + \alpha P(\{\xi \mid g(x,\xi) \not\le 0\})$$

$$= \alpha\left[P(\{\xi \mid g(x,\xi) \le 0\}) + \alpha P(\{\xi \mid g(x,\xi) \not\le 0\})\right] - P(\{\xi \mid g(x,\xi) \le 0\})$$

elde edilmektedir. Dolayısıyla, $E_{\tilde{\xi}} f_i(x,\tilde{\xi}) \le 0$ kısıtı $P(\{\xi \mid g(x,\xi) \le 0\}) \ge \alpha$ ifadesine denktir. Sonuçta, (3.17.) programı,

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} g_0(x,\tilde{\xi})$$

$$P(\{\xi \mid g_i(x,\xi) \le 0, i = 1,...,m\}) \ge \alpha \qquad (3.19.)$$

biçiminde ifade edilebilir. (3.19.) programı *probabilistik programlama* veya *şans-kısıtlı programlama* olarak adlandırılmaktadır.

Problem (3.18.) yerine, $\alpha_i \in [0,1], i = 1,...,m$ ve her ayrı kısıt için ödeme fonksiyonları tanımlarsak,

$$f_0(x,\xi) = g_0(x,\xi)$$

$$f_1(x,\xi) = \begin{cases} \alpha_i - 1, & g_i(x,\xi) \le 0, i = 1,...,m, \\ \alpha_i \quad , & \textit{aksihalde}, \quad i = 1,...,m, \end{cases}$$

elde edilir. (3.17.)'den *ayrık probabilistik kısıtlı program,*

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} g_0(x,\tilde{\xi})$$

$$P(\{\xi \mid g_i(x,\xi) \le 0\}) \ge \alpha_i, i = 1,...,m. \qquad (3.20.)$$

olarak elde edilmektedir.

Özel olarak, $g_i(x,\xi)$ lineer ve X kümesi konveks polihedral ise, stokastik lineer program,

$$\min c^T(\tilde{\xi})x$$
$$Ax = b$$
$$T(\tilde{\xi})x \geq h(\tilde{\xi})$$
$$x \geq 0$$

biçiminde ifade edilebilir ve buradan, (3.19.) ve (3.20.) programları,

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} c^T(\tilde{\xi})x$$
$$P(\{\xi | T(\xi)x \geq h(\xi)\}) \geq \alpha$$

biçiminde *ortak şans-kısıtlı stokastik lineer program* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $T_i(\cdot)$, $T(\cdot)$'nin *i.* satırı ve $h_i(\cdot)$, $h(\cdot)$'nin *i.*bileşeni olmak üzere,

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} c^T(\tilde{\xi})x$$
$$P(\{\xi | T_i(\xi)x \geq h_i(\xi)\}) \geq \alpha_i, i = 1,...,m,$$

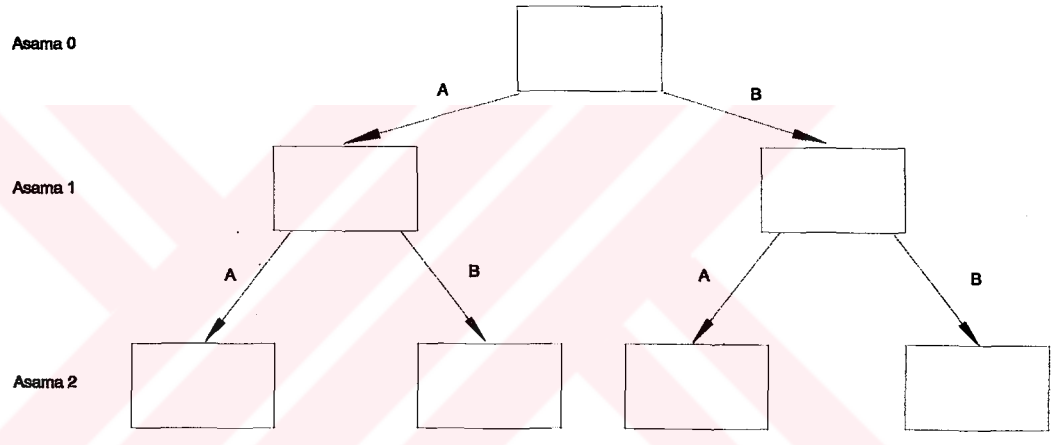
programı *ayrık şans-kısıtlı stokastik lineer program* olarak isimlendirilmektedir.

Açık olarak görülmektedir ki, f_i fonksiyonlarını farklı yollarla geliştirerek (3.5.) programı için bir çok deterministik eşdeğerler üretmek mümkündür. Yukarıda üretilen tüm deterministik eşdeğerler yine matematik programlardır. Ancak, varsa hangi koşullar ve varsayımlar altında konvekslik ve düzgünlük gibi özelliklerinin bulunduğunu saptamak gerekmektedir[37].

[37] Wallace, **a.g.e.,** ss. 29-30.

3.4.Deterministik Karar Ağaçları

Bir karar ağacı düğümlerden ve dallardan oluşmaktadır. Düğümler *durumları* ve dallar da *kararları* temsil etmektedir. Aşamalardaki her mümkün durum ve her mümkün karar için bir dal oluşturulmalıdır. Bu yöntemin kullanışlı olması için olası kararların sayısı çok sınırlı olmak zorundadır. Çünkü, ağaçta her mümkün karar *dizisi* için bir dal grubu bulunmaktadır. Genellikle, deterministik karar ağaçlarında, karar verilmesi gereken noktalar kare ya da dikdörtgenlerle temsil edilmektedir. Şekil 6'da örnek bir deterministik karar ağacı görülmektedir[38].



Şekil 6. Deterministik Karar Ağacı

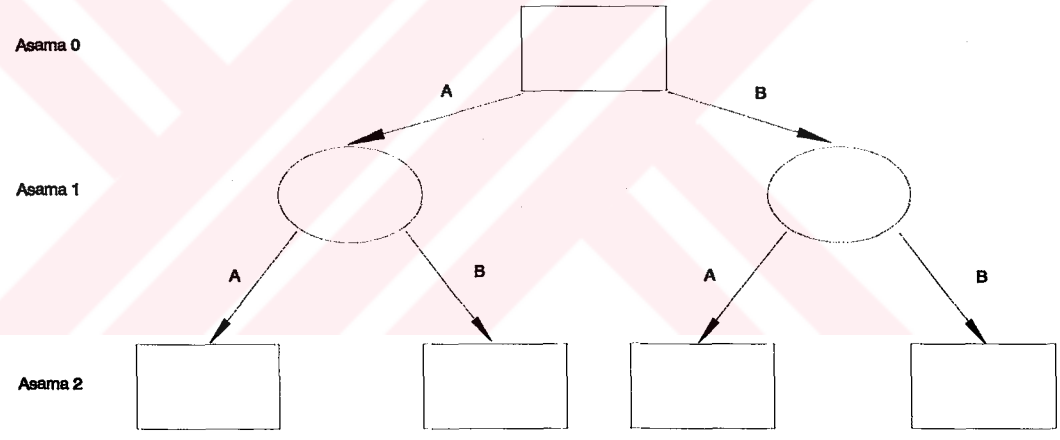
3.5.Stokastik Karar Ağaçları

Tipik bir stokastik karar ağacında, dairesel düğümler *şans düğümleri* olarak adlandırılmaktadır. Şans düğümleri, söz konusu noktalarda rassal olayların olacağını belirtmektedir[39]. Karar ağaçlarındaki temel fikir, kararların nasıl birleştirileceği değil,

[38] **A.e.,** ss. 116-117.
[39] Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, **Introduction to Operations Research,** 6th Ed., Singapore, McGraw-Hill Inc., 1995, s. 874.

hangi kararların verileceğini ele almaktır. Şekil 7'de örnek bir stokastik karar ağacı görülmektedir[40].

Bazı özel durumlarda, deterministik karar ağacı çözümü ile stokastik karar ağacı sonuçları aynı çıkabilmektedir. Bunun nedeni, örneğin, bir yatırım probleminde deterministik durumdaki faiz oranı ile stokastik durumdaki beklenen faiz oranı değerleri eşitse aynı sonuçlara ulaşılacaktır. Ayrıca, amaç fonksiyonun lineer olması da aynı sonuçların elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Çünkü, $\tilde{\xi}$ rassal değişken ve a ve b sabit iseler, $E_{\tilde{\xi}}(a\tilde{\xi}+b)=aE(\tilde{\xi})+b$ eşitliği sağlanmaktadır. Stokastik durumda, eşitliğin sol tarafı, deterministikte ise sağ tarafı hesaplanmaktadır.



Şekil 7. Stokastik Karar Ağacı

Çoğu problemlerde beklenen kârı maksimize etmek doğal olmakla birlikte her zaman doğru olmamaktadır. Belirsizlik altındaki karar problemlerindeki yaygın durumlardan birisi, karar bir çok kez bazen de sonsuz çoklukta tekrarlanabilmektedir. Hisse senetleri ve bono yatırımları bu duruma örnek olarak verilebilir. Durum, verilerin uzun zaman serileri ve bir çok alt kararlarla karakterize edilmektedir.

[40] Wallace, **a.g.e.,** s. 121.

Bu durumda, yapılacak en iyi davranış *fayda fonksiyonu*ndan yararlanmaktır. Fayda fonksiyonu kavram olarak belirsizlik altında karar verme süreciyle yakından ilgilidir. Fayda fonksiyonunu belirli bir (ekonomik) varlıktan faydalanma seviyesini ölçen bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Fayda fonksiyonları, faydayı sabit bir birimde ölçmez ancak durumları *karşılaştırır*[41].

3.6.Senaryo Oluşturma

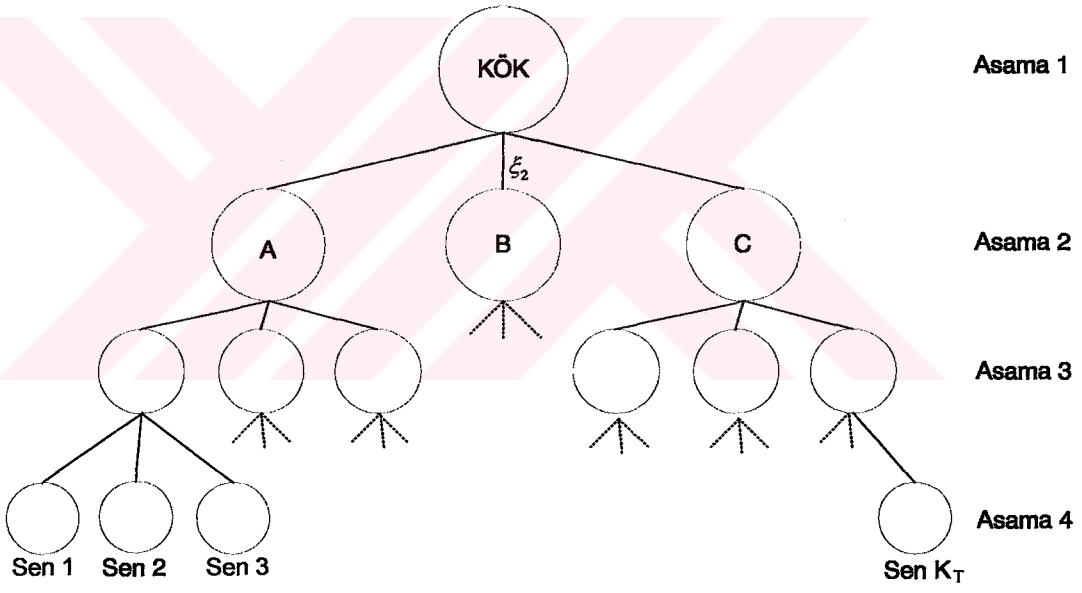
Çok aşamalı stokastik problemlerin formüle edilmesi ve çözümü için geliştirilen yöntemlerden birisi stokastik karar ağaçlarıdır. Stokastik karar ağaçları her mümkün kararda ve her mümkün rassal gerçeklenmede dallara ayrılmaktadır. Dolayısıyla, bunlar sonlu bir çok mümkün değer alabilmektedirler. Durumlar (state) ise ağacın parçası değillerdir. Stokastik karar ağaçları kolayca kontrol dışına çıkabilmektedirler.

Diğer bir yaklaşım da, stokastik dinamik programlama yaklaşımıdır. Burada, her t aşamasında her mümkün z_t durumu için bir karar vermek zorunludur. Sonlu bir çok mümkün durum var ise bu bir avantaj olmaktadır. Bununla birlikte, teori sürekli durum uzayı için geliştirilmiştir. Sürekli x_t kararları kümesi ve $\tilde{\xi}$'nin sürekli dağılımı kabul edilebilmektedir.

Senaryo oluşturma yöntemi, yukarıdaki zorluklar noktasında diğer yöntemlerden farklılık arz etmektedir. Her t aşamasındaki $\tilde{\xi}_t$ rassal değişkeninin her olası değerinde dallanarak oluşan ağaç *olay ağacı (event tree)* veya *senaryo ağacı* olarak adlandırılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, senaryo ağacı (olay ağacı) stokastik karar ağacının stokastik parçasıdır[42]. Stokastik programlamanın senaryo yaklaşımında, olay ağacının her düğümü için söz konusu düğümdeki mevcut bilgiler kullanılarak bir optimal karar elde edilir. Bu optimal kararlar geride kalan düğümleri

[41] **A.e.,** ss. 119-124.
[42] **A.e.,** ss.129-131.

istismar etmeyecektir çünkü bir çok ardışık düğümler mevcuttur[43]. Şekil 8'de dört-aşamalı bir senaryo ağacının genel hali görülmektedir. *Kök düğüm* şu an içinde bulunulan anı veya bilinen verilerin bir parçasını temsil etmektedir. İkinci aşamada, üç farklı mümkün sonuç ve bunların her biri üçüncü aşamada farklı sayıda mümkün sonuçlara sahip olmaktadır. Senaryo ağacı bu şekilde gelişmektedir. Burada, $t=1$ aşamasında tüm veriler sabit olmasına karşın $t=2,...,T$ aşamalarında bazıları ya da tamamı stokastiktir. Olay uzayları Ω_t, tüm aşamalar için sonlu varsayıldığından, $t=1,2,...,T$ için t aşamasındaki tüm farklı düğümleri $k_t=1,2,...,K_t$ notasyonları ile numaralandırabiliriz[44]. Burada olduğu gibi bazen de aşamalar 1'den başlatılabilmektedir.



Şekil 8. Senaryo Ağacı

Sözü edilmesi gereken diğer önemli bir nokta, bir senaryo ağacı aşamalarının sayısına göre üstel olarak artmaktadır. Bu durumda planlama ufku T 'nin problemin

[43] Roy Kouwenberg, "Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management," **European Journal of Operational Research,** No:134, 2001, s. 284.
[44] Karen K. Lau, Robert S. Womersley, "Multistage Quadratic Stochastic Programming," **Journal of Computational and Applied Mathematics,** No:129, 2001, s. 107.

boyutlarının yönetilebilir olması açısından dikkatli bir şekilde seçilmesi gerekmektedir[45].

Senaryo ağacı, stokastik karar ağaçları gibi $\tilde{\xi}_t$'nin mümkün değerlerinin sayısı açısından benzer sınırlamalara sahiptir. Her ikisi de *sonlu kesikli dağılımlara* gereksinim duymaktadır. Her mümkün karar x_t cinsinden, karar ağacında sonlu bir çok değerlere sahip olmak zorundayız. Yeni senaryo yöntemi *sürekli* değişkenleri tercih etmektedir. Gerek stokastik karar ağaçları gerekse senaryo ağaçlarının z_t durumları üzerinde özel bir gereksinimleri söz konusu değildir. Stokastik dinamik programlama, $\tilde{\xi}_t$'nin dağılımları ve x_t açısından senaryo oluşturma yöntemine göre daha esnektir. Ancak, z_t durum değişkenlerine göre daha kısıtlayıcıdır.

Zaman periyodu sayısı T ve ξ_t vektörü ($\tilde{\xi}_t$'nin bir gerçeklenmesi) t zaman periyodunda (aşamasında) neler olduğunu tanımlayan bir vektör olmak üzere,

$$s = (\xi_0^s, \xi_1^s, \ldots, \xi_T^s)$$

bir senaryo olarak adlandırılmaktadır. Bir senaryo bir mümkün geleceği temsil etmektedir. Tüm mümkün gelecekleri tanımlayan bir senaryolar kümesi S olsun. Üzerinde çalıştığımız dünyanın (problemin), durum değişkenleri z_t, karar değişkenleri x_t ve t zaman periyodundaki maliyet (getiri) fonksiyonunun $r_t(z_t, x_t, \xi_t)$ ile tanımlanabileceğini varsayalım. Ayrıca, durum değişkenleri z_{t+1}'in aşamalar arası *geçiş fonksiyonu* G_t yardımıyla, z_0 verilmek şartıyla,

$$z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \xi_t)$$

[45] Karl Frauendorfer, Michael Schürle, "Management of Non-maturing Deposits by Multistage Stochastic Programming," **European Journal of Operational Research,** No:151, 2003, s. 607.

biçiminde hesaplanabileceğini düşünelim. İndirgeme (discount) faktörü α olmak üzere, her $s \in S$ için,

$$\min \sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t, x_t, \xi_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1})$$

$$\text{öyle ki} \quad z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \xi_t^s),\ t=0,...,T \text{ ve } z_0 \text{ verilmiş}, \qquad (3.21.)$$

$$A_t(z_t) \le x_t \le B_t(z_t),\ t=0,...,T$$

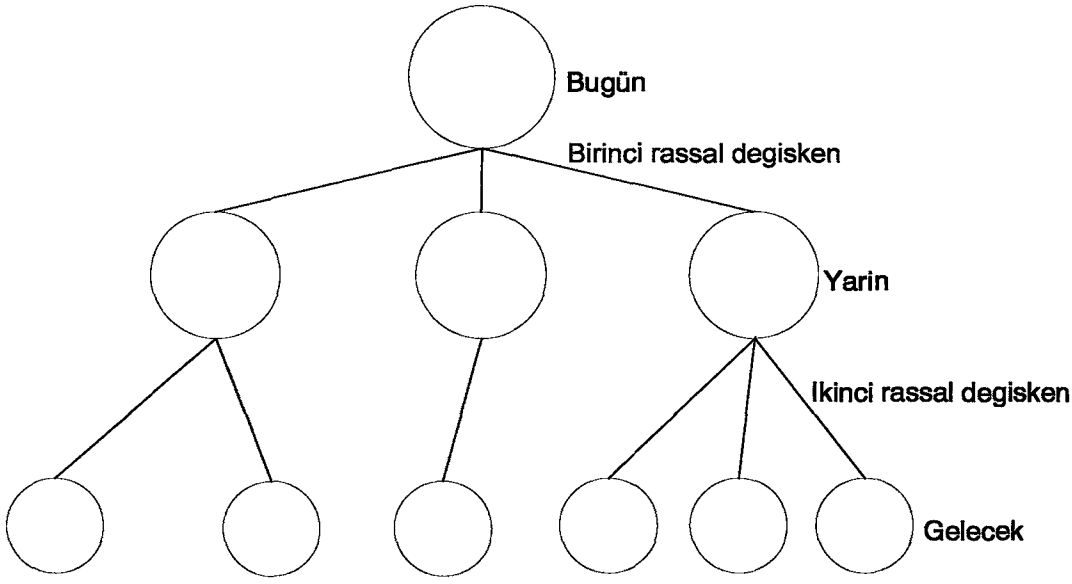
problemi çözülmelidir. Burada, $Q(z)$, $x^s = (x_0^s, x_1^s, ..., x_T^s)$ optimal sonucunu veren problemi z durumunda sona erdiren değeri temsil etmektedir. Bu noktada her $s \in S$ için farklı sonuçlar bulunmaktadır. Sıkça yapılan ancak bazı yanlışlıklara yol açabilen yöntem, ortalamayı almak ve her t için, p^s problemi s senaryosunda sonlandırma olasılığı olmak üzere,

$$\bar{x}_t = \sum_{s \in S} p^s x_t^s$$

değerini hesaplamaktır. Bu yanlışlık, $\bar{x}$ politikamız olarak seçilirse, uygun bile olmayan s değerlerinin gündeme gelebilmesi ile karşımıza çıkabilir[46].

Bu noktaya açıklık getirmek için, Şekil 9'daki bir örnek senaryo (olay) ağacını ele alalım[47]. Bu ağaçta $T = 1$ olduğu görülmektedir. En üstteki kök düğüm "bugün"ü temsil etmektedir. Bu düğümden sonra üç farklı durum söz konusudur. Yani, ilk olarak üç sonuçlu bir rassal değişkenimiz vardır. İkinci sıra düğümler de "yarın"ı temsil etmektedirler. Bugün ne olduğuna bağlı olarak farklı seçenekler vardır. En alttaki düğüm sırası ise zamanın geriye kalanını yani "gelecek"i temsil etmektedir.

[46] Wallace, **a.g.e.,** ss. 129-130.
[47] **A.e.,** s. 131.



Şekil 9. Örnek Bir Senaryo Ağacı

Bu ağaç altı senaryoyu temsil etmektedir. Çünkü ağacın altı dalı bulunmaktadır. Optimizasyon çerçevesinde, daha önce de bahsedildiği gibi, iki karar verilmek durumundadır. Bunlar "bugün" ve "yarın" dır. Bununla birlikte, yarın ne yapacağımız bugün ne olduğuna bağlıdır. Dolayısıyla yarın için bir karar değil, ikinci sıradaki üç düğümün her biri için bir karar söz konusudur. Bu nedenle, $\bar{x}_0$ önerilen ilk karar olarak çalışır fakat $\bar{x}_1$ çok ilginç değildir. Ancak, yarını temsil eden diğer düğümler için (iki senaryo) bir $\bar{x}_1$ 'den bahsedilebilir. Yarının her versiyonu için bir ortalama $\bar{x}_1$ hesaplayabiliriz. Burada, beklenti diğer senaryolardan birisinde olmaya koşulludur.

Görüldüğü gibi senaryo ağacındaki düğümler karar noktaları ve bağlantılar da rassal değişkenlerin gerçeklenmeleridir. x^s senaryo çözümlerimizden ağaçtaki her düğüm için kararları hesaplayabiliriz. Bu kararların hepsi anlamlı olacaktır. Çünkü hepsi olası kararlardır veya *uygulanabilir kararlar*dır.

Her zaman periyodu t için, $\{s\}_t$ genel s senaryosundaki tüm $\xi_0^s,\ldots,\xi_{t-1}^s$ senaryolarının kümesi olsun. Şekil 9'da, $\{s\}_0 = S$ ve $\{s\}_2$ sadece bir senaryo

içermektedir. Üç tane $\{s\}_1$ kümesi vardır. $\{s\}_t$'deki tüm senaryoların olasılıklarının toplamı $p(\{s\}_t)$ olsun. Dolayısıyla, tüm s'ler için (3.21.)'in çözülmesinden sonra, tüm $\{s\}_t$ için,

$$\bar{x}(\{s\}_t) = \sum_{s \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

hesaplanabilir. Bu çözümün ne anlama geldiği üzerinde duralım. Söz konusu çözümün uygulanabilir olma avantajı bulunmaktadır. Ancak bu çözüm çözmek istediğimiz herhangi bir probleme optimal çözümü sunar mı? Bu nedenle, $\bar{x}(\{s\}_t)$ değerinin nasıl kullanıldığını görmek amacıyla bir olay ağacındaki *çok aşamalı problem*in matematiksel tanımına bakalım. Aşağıdaki tanımda sonlu kesikli dağılımın olduğunu varsayalım.

$$\min \sum_{s \in S} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t^s, x_t^s, \xi_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right)$$

$$\text{öyle ki } z_{t+1}^s = G_t(z_t^s, x_t^s, \xi_t^s),\ t=0,...,T \text{ ve } z_0^s = z_0 \text{ verilmiş,} \qquad (3.22.)$$

$$A_t(z_t^s) \le x_t^s \le B_t(z_t^s),\ t=0,...,T,$$

$$x_t^s = \sum_{s \in \{s\}_t} \frac{p^s x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}, t = 0,...,T,\ \forall s$$

Sadece (3.22.) tanımında uygulanabilirlik kısıtları senaryolarla ilişkilenmektedir. Doğrusal olmayan optimizasyondaki yaygın yaklaşım, karmaşık görünen kısıtları amaç fonksiyonuna dahil etmek ve sapmaları cezalandırmaktır. Bu noktada bir kaç yaklaşım mevcuttur. Bunlardan birisi *artırılmış Lagranjien yöntemi*dir. Uygulanabilir kısıtları amaç fonksiyonuna eklersek, geriye kalan kısıtlar senaryolarda ayrılabilirler. Yani, birden fazla senaryoya ait bilgi içeren kısıt kalmamaktadır. Amaç fonksiyonumuz, t periyodundaki s senaryosu için *uygulanabilirlik çarpanı* w_t^s olmak üzere,

$$\sum_{s\in S} p(s)\left\{\sum_{t=0}^{T}\alpha^t\left[r_t(z_t^s,x_t^s,\xi_t^s)+w_t^s(x_t^s-\sum_{s'\in\{s\}_t}\frac{p^{s'}x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)})\right]+\alpha^{T+1}Q(z_{T+1}^s)\right\}$$

olarak elde edilir.

Artırılmış Lagranjien terimi eklenirse, bu problem prensip olarak şu yaklaşımla çözülebilir. Önce w sabitlenir, tüm problem çözülür ve daha sonra w güncellenir ve yakınsayana kadar devam edilir. Bununla birlikte, bir pratik problemde, artırılmış Lagranjien terimi amaç fonksiyonunu farklı değişkenlerin ayrıldığı yerden değişkenlerin çarpımlarının olduğu yere değiştirir. Dolayısıyla, bu yaklaşım prensipte kabul edilebilir olmasına rağmen nümerik olarak iyi çalışmamaktadır. Çünkü, ayrı ayrı çözülebilecek bir çok senaryo problemleri yerine büyük bir problemimiz bulunmaktadır. Bunu aşmak için,

$$\sum_{s'\in\{s\}_t}\frac{p^{s'}x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

değeri, bir önceki iterasyondan gelen

$$\bar{x}(\{s\}_t)=\sum_{s'\in\{s\}_t}\frac{p^{s'}x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

değeri ile değiştirilir. Dolayısıyla, amaç fonksiyonu olarak,

$$\sum_{s\in S} p(s)\left\{\sum_{t=0}^{T}\alpha^t\left[r_t(z_t^s,x_t^s,\xi_t^s)+w_t^s(x_t^s-\bar{x}(\{s\}_t)\right]+\alpha^{T+1}Q(z_{T+1}^s)\right\}$$

elde edilmektedir. Ancak, sabit w değeri için $w_t^s\bar{x}(\{s\}_t)$ terimleri sabit olacaktır. Dolayısıyla, bu terimleri de çekebiliriz. Bir artırılmış Lagranjien terimi eklersek,

$$\sum_{s\in S} p(s)\left\{\sum_{t=0}^{T}\alpha^t\left[r_t(z_t^s,x_t^s,\xi_t^s)+w_t^s x_t^s+\frac{1}{2}\rho\left[x_t^s-\bar{x}(\{s\}_t)\right]^2\right]+\alpha^{T+1}Q(z_{T+1}^s)\right\}$$

elde edilir.

Şu andaki ilgi alanımız senaryolardaki ayrılabilirliktir. Yani, senaryo oluşturma yöntemini tanımlamak için nelere ihtiyacımız olduğudur. Öncelikle, *bireysel senaryo problemleri*nin çözümü için aşağıdaki algoritmayı uygulamak mümkündür.

Senaryo $(s,\bar{x},x^s,z^s)$ için algoritma;

başla,

$$\min\left\{\sum_{t=0}^{T}\alpha^t\left[r_t(z_t,x_t,\xi_t^s)+w_t^s x_t+\frac{1}{2}\rho(x_t-x)^2\right]+\alpha^{T+1}Q(z_{T+1})\right\}$$

$z_{t+1}=G_t(z_t,x_t,\xi_t^s)$, $t=0,...,T$ ve z_0 verilmiş,

$A_t(z_t)\le x_t\le B_t(z_t)$, $t=0,...,T$

problemini $x^s=(x_0^s,...,x_T^s)$ ve $z^s=(z_0^s,...,z_{T+1}^s)$ elde etmek için çöz,

son.

Senaryo oluşturma yöntemi için ise aşağıdaki algoritmayı uygulamak mümkündür.

Senaryo oluşturma yöntemi için algoritma,

başla,

$\forall s,\forall t$ için $w_t^s := 0$ al;

başlangıç $\bar{x}(\{s\}_t)$ değeri bul;

$\rho > 0$ olsun;

tekrarla,

$\forall s\in S$ için, senaryo $(s,\bar{x}(\{s\}_t),x^s,z^s)$ oluştur;

$\forall \bar{x}(\{s\}_t)$ için, $\bar{x}(\{s\}_t) = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$ hesapla;

gerekliyse ρ'yu güncelle;

$\forall s, \forall t$ için, $w_t^s := w_t^s + \rho\left|x_t^s - \bar{x}(\{s\}_t)\right|$ hesapla;

sonuç yeterince iyi olana kadar **tekrarla**;

son.

Yukarıdaki algoritmalar için söylenecek bir kaç yorum bulunmaktadır. İlk olarak, başlangıç $\bar{x}(\{s\}_t)$ değerini bulmak için tüm rassal değişkenlerin beklenen değerlerini kullanarak problem (3.21.)'i çözebiliriz. ρ'nun doğru değerini bulmak ve nasıl güncelleştirileceğini bilmek çok zordur. Burada durma kriterleri üzerinde durulmayacaktır. Buradaki asıl amaç, senaryo problemlerine $x^s = \bar{x}(\{s\}_t)$ olacak şekilde uygulanabilir çözümler ürettirmektir.

Örnek 1. Burada balıkçılık yönetimine ilişkin bir model üzerinde durulacaktır. Her zaman periyodu için bir durum değişkeni, bir karar değişkeni ve bir rassal değişken söz konusudur. z_t durum değişkeni, t zaman periyodundaki balık stoğunun biyokütlesini temsil etmektedir. Ayrıca, z_0'ın bilindiğini varsayalım. x_t karar değişkeni, verilen bir yıldaki yakalanan balık stoğunun miktarını belirtmektedir. Burada aslında gizli olan varsayım vardır. Bu varsayım da, bir miktar balık yakalamak için kullanılan sabit bir çabanın olduğudur. Bu çaba, örneğin, işleme katılan kazan sayısı şeklinde ölçülebilir. Verilen bir yıldaki avlanma, $z_t x_t$ şeklinde belirtilebilir.

Bir yıl boyunca, bazı balıklar büyürken bazıları da ölmektedir. Bu faktörlerin toplam etkisi *Schaefer modeli*yle belirtilmektedir. Bu modele göre, yukarıda değinilen *doğal* etkiler nedeniyle stoktaki toplam değişme,

$$s z_t \left(1 - \frac{z_t}{K}\right)$$

olarak verilmektedir. Burada, s büyüme oranı ve K çevrenin taşıyan kapasitesidir. Görüleceği üzere, $z_t = K$ ise stok hacminde net bir değişme olmamaktadır. Ayrıca, $z_t \rangle K$ ise negatif net bir etki vardır, yani stok hacmi azalmaktadır. $z_t \langle K$ ise pozitif bir net etki vardır. Dolayısıyla, $z_t = K$ ve $z_t = 0$ olduğunda kararlı bir durum vardır ve balık stoğu avlanma olmazsa $z = K$ durumunda kararlı olarak kalacaktır.

Balık avlanırsa, yakalanan miktar mevcut stoktan çıkarılmalıdır. Bu durumda *geçiş fonksiyonu*,

$$z_{t+1} = z_t - x_t z_t + s z_t \left(1 - \frac{z_t}{K}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Bu geçiş fonksiyonunun doğrusal olmadığı açıklıkla görülmektedir. Amaç mümkün olduğunca çok balık yakalamak ise,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t z_t x_t$$

ifadesini maksimize etmeye çalışmalıyız. Burada, α daha önce değinilen indirgeme (discount) faktörüdür. Sonsuz ufuklar için $0 \leq \alpha \leq 1$ alınmalıdır, ancak sonlu problemler için $\alpha = 1$ seçebiliriz. Bunlara ilave olarak,

$$0 \leq x_t \leq 1$$

biçiminde doğal bir kısıtımız söz konusudur.

Buraya kadar anlatılanlar bir deterministik kontrol problemiydi. Bilindiği gibi, büyümenin net etkilerini ve doğal ölümleri tahmin etmek oldukça zordur. Dolayısıyla, deteministik model yerine stokastik model geliştirmek daha akıllıca

olacaktır. Büyüme oranı s'nin bilinmediğini fakat t zaman periyodundaki $\tilde{\xi}_t$ rassal vektörüyle verildiğini varsayalım.

Senaryo oluşturma çerçevesine oturtmak için sonlu bir ufukta (T periyot sonra) kesebileceğimizi düşünelim. Dahası, tüm $t \leq T$ için $\tilde{\xi}_t$'nin bir sonlu bölümlenmesini bulduğumuzu varsayalım.

Sonsuz ufuklu bir problemi sonlu ufuklu bir probleme çevirmedeki diğer bir sorun da, $Q(z_{T+1})$ fonksiyonunu oluşturmaktır. Bu fonksiyon değerlerin $T+1$ zamanındaki Z_{T+1} durumunda sonlandırılmasına yaklaşmalıdır. Bu zorluklara rağmen örnek problemimiz için bir yaklaşım bulmaya çalışalım.

Tüm $\tilde{\xi}_t$'nin bağımsız ve $\bar{\xi}$ beklenen değeri ile özdeş dağıldıklarını varsayalım. Ayrıca, tüm rassal değişkenleri ortalamaları ile yer değiştirelim ve her yıl tam olarak net iyileştirme (recruitment) kadar balık yakalandığını varsayalım. Matematiksel olarak,

$$x_t = \bar{\zeta}\left(1 - \frac{z_t}{K}\right)$$

olsun. Fakat, tüm $t \geq T+1$ değerleri için $z_t = Z_{T+1}$ olacaktır. Bu nedenle, $t \geq T+1$ şartını sağlayan tüm x_t'ler eşittir.

$$Q(z_{T+1}) = \sum_{t=T+1}^{\infty} \alpha^{t-T-1} x_t z_t = \frac{\bar{\xi}\, z_{T+1}(1 - z_{T+1}/K)}{1-\alpha}$$

olsun. Söz konusu varsayımlar, $Q(z_{T+1})$'nin varlığı ve rassal değişkenlerin sonlu bölümlenmesi ile aşağıdaki optimizasyon problemine ulaşılır.

$$\min \sum_{s \in S} p(s) \left[\sum_{t=0}^{T} \alpha^t z_t^s x_t^s + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right]$$

öyle ki $z_{t+1}^s = z_t^s \left[1 - x_t^\xi + \xi_t^s \left(1 - \frac{z_t^s}{K} \right) \right]$ ve $z_0^s = z_0$ verilmiş,

$$0 \le x_t^s \le 1$$

$$x_t^s = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

Bu modelde, amaç fonksiyonu indirgenmiş ufuk üzerinden beklenen balık yakalama miktarını vermektedir. Bu miktar parasal terimlerle de ilişkilendirilebilir. Daha önce algoritmik olarak verilen senaryo oluşturma yöntemi kullanılarak problem çözülebilir.

3.6.1. Yaklaşık Senaryo Çözümleri

Yukarıda sunulan algoritmayı ele alalım. Çözülen problem stokastik problem ise, w^s dual değişkenleri kendi doğru değerlerini almadan önce, x^s senaryo çözümlerinin başlangıçta çok farklı olabileceğini beklemeliyiz. Bu yüzden, özellikle ilk iterasyonlarda, senaryo problemlerinin optimal çözümlerinin bulunması bir enerji kaybı gibi görülebilir. Bu durumda x^s senaryo çözümleri ile $\bar{x}(\{s\}_t)$ uygulanabilir çözümleri arasında bir "kavga" görürüz. Senaryo çözümleri, uygulanabilir çözümlerden uzaklaştırmaya çalışır ve sadece ceza (w_t^s cinsinden) düzgün ayarlandığı zaman senaryo çözümleri ile uygulanabilir çözümler anlaşabilmektedir. Aslında, üstü kapalı ifade ettiğimiz *yakınsama kriteri* tam olarak senaryo çözümleri ile uygulanabilir çözümlerin uyuşması durumudur.

Bu gözlemden, senaryo problemlerini sadece yaklaşık olarak çözmek akıllıca bir davranış olacaktır. Ancak senaryo probleminin uygulanabilir çözümlere hareket etme yönünün zaptedilmesi kısaca yeterli olacaktır. Doğal olarak, iterasyon ilerledikçe ve w_t^s dual değişkenleri kendi doğru değerlerini aldıkça, senaryo

çözümleri ve uygulanabilir çözümler daha da uyuşacaktır. Sonuçta, her şey düzgün organize edilirse, baştan sona tüm ayarlar yakınsayacaktır. Önemli bir nokta da, senaryo oluşturma yöntemi için yakınsama ispatı gerçekte yaklaşık senaryo çözümleri için ispata da izin vermektedir. Algoritmik açıdan, yukarıda bireysel senaryo çözümleri için sözü edilen algoritmadaki çözüm prosedürünü sadece yaklaşık çözüm prosedürüyle değiştirebiliriz.

Görüldüğü üzere, senaryo problemlerini optimal olarak çözmek yerine çok yaklaşık olarak çözmek daha akıllıca olacaktır[48]. Senaryo ağaçları ile ilgili olarak vurgulanması gerekli son bir nokta da senaryo ağaçlarının, stokastik programın her aşamasındaki rassal verilerin sürekli dağılımlarına, kesikli dağılımlarla yaklaşılması amacıyla kullanılabilmesidir[49].

3.7.Stokastik Programlamanın Diğer Karar Modelleriyle İlişkileri

Genel olarak, bazı kontrol edilemeyen ve kesin olarak bilinmeyen verileri içeren deterministik matematik programların genelleştirilmiş hali stokastik programlardır. Karar değişkenleri, kararlar için kesikli zaman periyotları, amaç fonksiyonlarında beklenen değer operatörlerinin kullanılması ve bilinen ya da kısmen bilinen olasılık dağılımları anahtar özellikleri oluşturmaktadır. Söz konusu özelliklerin göreceli önemi benzer alanlarla ilişkilendirilebilir. Burada, öncelikle stokastik programlamanın diğer yöneylem araştırması modelleri arasındaki yeri üzerinde durulmuştur. Daha sonra, stokastik programlama ile istatistiksel karar teorisi, karar analizi, dinamik programlama, Markov karar süreçleri ve stokastik kontrol arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

[48] **A.e.**, ss. 131-137.
[49] Frauendorfer, **a.g.e.**, s. 606.

3.7.1.Stokastik Programlama ve Yöneylem Araştırması Modelleri

Yöneylem Araştırması modelleri temelde *deterministik* ve *stokastik* olmak üzere sınıflandırılabilir. Ancak bazı modeller bu iki kategorinin *hibriti* olarak ele alınmaktadır. Deterministik modeller, stokastik modellerin aksine, parametrelerinin kesinlikle bilindiği ve sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Şekil 10'da stokastik programlamanın diğer yöneylem araştırması (YA) modelleri arasındaki yerini gösteren bir sınıflandırma yer almaktadır[50].

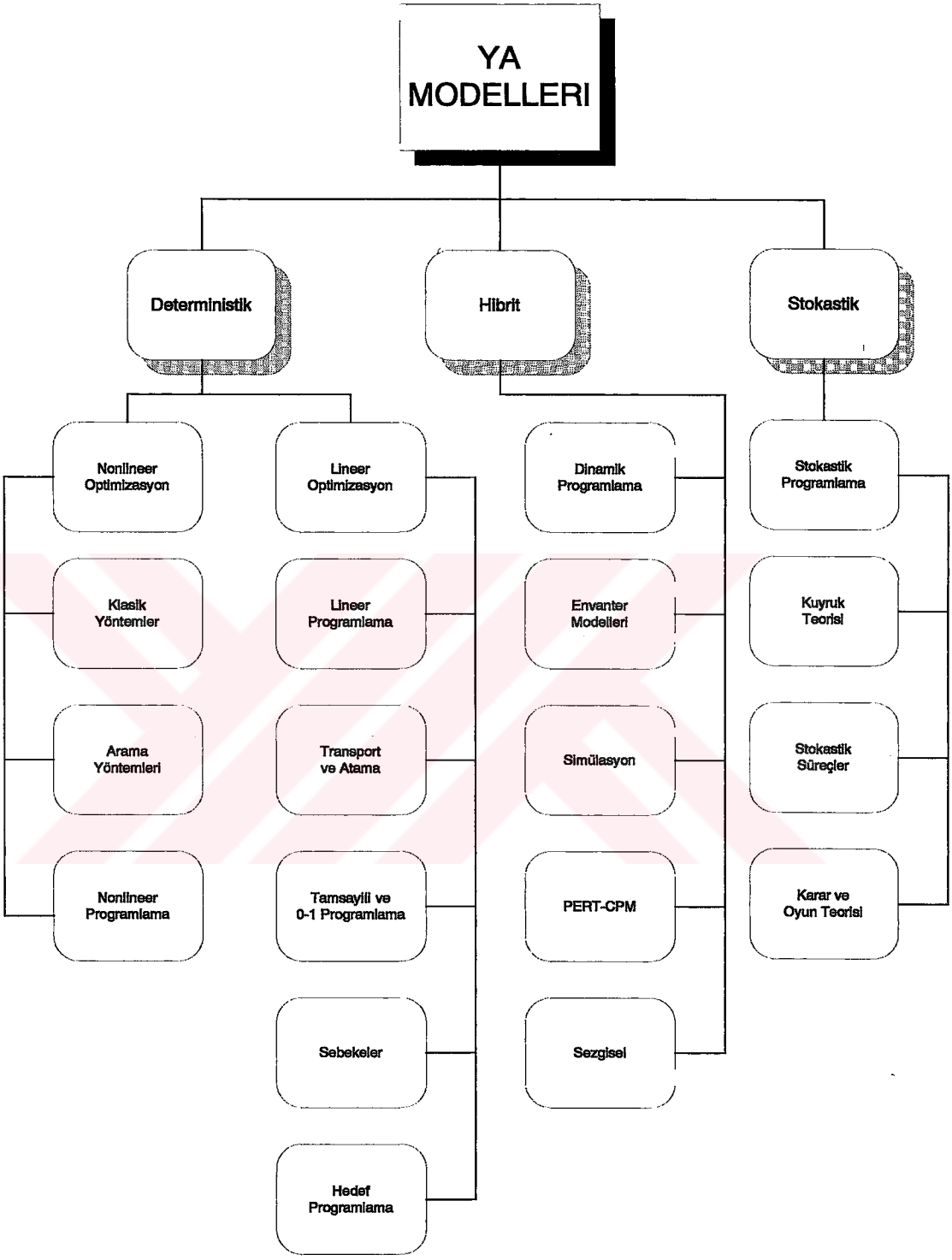
3.7.2.İstatistiksel Karar Teorisi ve Karar Analizi

Optimal istatistiksel karar teorisinin temelinde, bir deneyin sonuçlarını etkileyen değişkenlerin en iyi seviyelerini belirleme yatmaktadır. $x \in X$, rassal çıktılar $\omega \in \Omega$, eşleştirilmiş dağılım $P(\omega)$ ve ω sonucu altındaki deneyle ilintili $r(x,\omega)$ getiri (ödül) ya da kayıp fonksiyonu olmak üzere, temel problem $x \in X$ için,

$$\max E_{\omega}\left[r(x,\omega)\middle| P\right] = \max \int_{\omega} r(x,\omega)dP(\omega) \qquad (3.23.)$$

ifadesini maksimum yapan değeri bulmaktır. (3.23.)'teki problem aslında *stokastik programlamanın temel formudur*. Temel farklar, problemin farklı yanlarının göreceli önemleri hakkında altta yatan varsayımların alanları arasındaki vurgudan kaynaklanmaktadır.

[50] Frank S. Budnick, Richard Mojena, Thomas E. Vollmann, **Principles of Operations Research for Management,** USA, Richard D. Irwin Inc., 1977, s. 18.



Şekil 10. Yöneylem Araştırması Modelleri

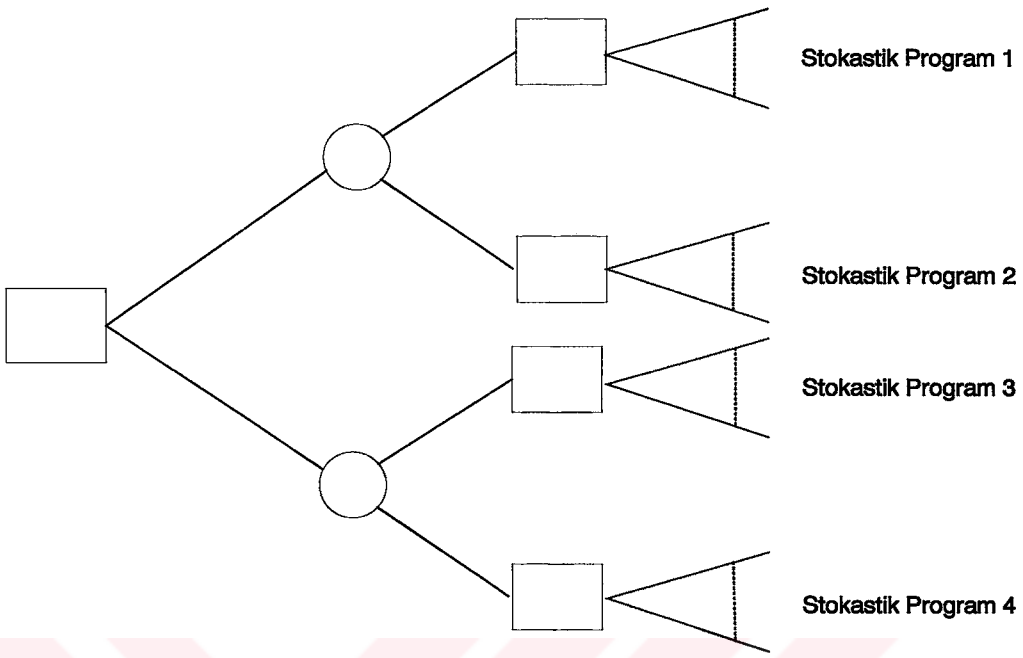
Stokastik programlamada, r fonksiyonunun biçiminin ve hareketlerin bir fonksiyonu olarak P dağılımındaki değişikliklerin bulunmasındaki zorluklar, bilinen dağılımlarla beklentilerin ve bilinen tüm diğer verilerle optimal x değerlerinin bulunmasındaki zorluklarla karşılaştırıldığında daha küçük kaldığı varsayılmaktadır. (3.23.)'teki forma uygun bir problem bulunduktan sonra vurgu bir çözüm bulma üzerindedir. Örneğin, olasılıkların numaralanması veya sıralanması gibi etkin olmayan işlerden stokastik programlama kaçınmaktadır.

(3.23.) cinsinden, P 'nin ω'nın bazı gözlemleri ve x'in kısmi seçeneklerine bağımlı güncellenmiş dağılım $\hat{P}_x$'ye olan değişikliklerinde istatistiksel karar teorisinin ağır bir vurgusu vardır. Özellikle, X kolayca sıralandırılabilen küçük sonlu bir küme iken analizin bu parçası diğer çözüm yöntemlerine baskın gelmektedir.

Karar analizi, optimal istatistiksel karar teorisinin özel bir parçası olarak görülebilir. Anahtar vurgular sıklıkla mümkün sonuçlar hakkında bilgi edinme, çeşitli sonuçlarla ilişkili faydayı elde etme ve mümkün davranışların sınırlı bir kümesini tanımlama üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bu küme genellikle karar ağaçları şeklinde olmaktadır.

Problemin yapısına bağlı olarak değişmekle birlikte bazı durumlarda, karar ağaçları ile birlikte stokastik programlama içiçe yer alabilmektedir. Bu durumda, stokastik programlama alternatiflerin faydalarının hesaplanmasında kullanılabilmektedir. Şekil 11'de faydanın stokastik programlama ile hesaplandığı bir stokastik karar ağacı görülmektedir[51].

[51]Birge, **a.g.e.,** ss. 67-69.



Şekil 11. Stokastik Programlama İçeren Karar Ağacı

3.7.3.Dinamik Programlama ve Markov Karar Süreçleri

Stokastik optimizasyon literatürü dinamik programlama ve Markov karar süreçlerini de ele almaktadır. Bu modellerde genellikle zamanın kesikli noktalarındaki optimal davranışlar araştırılmaktadır. Davranışlar rassal sonuçlar tarafından etkilenmektedir ve bir *t* aşamasındaki durumdan, *t+1* aşamasındaki başka bir duruma taşınmaktadır. Bu modellerdeki vurgu tipik olarak sonlu durumu tanımlama, davranış uzayı ve Markov yapısının varsayımına yapılmaktadır. Markov yapısında da davranışlar ve sonuçlar sadece mevcut duruma bağlıdır.

Stokastik programlamada, tipik yaklaşım her aşamada her durumla ilgili bir optimal kararla sonuçlanan geriye doğru iterasyon oluşturmaktır. Büyük durum uzaylarında bu yaklaşım hesaplama açısından hantal bir yapı oluşturmaktadır. Ancak böyle bir yapı da, bir çok stokastik programlama hesaplama çerçevesine olanak sağlamaktadır. Diğer bir yaklaşım da, sonsuz bir ufuk ele almak ve herhangi bir aşamadaki bir durum için bir optimal karar bulmak amacıyla problemi indirgeyerek

(discounting) kararlı bir politika oluşturmaktır. Vurgulanması gerekli önemli bir nokta da, stokastik programlar genel olarak Markov varsayımlarını içermezler.

3.7.4.Optimal Stokastik Kontrol

Stokastik kontrol modelleri sıklıkla stokastik programlama modellerine benzemektedirler. Farklar genel olarak problem boyutlarında ortaya çıkmaktadır. Stokastik programlar genellikle daha büyük boyutludurlar. Stokastik kontrolda vurgular kontrol kuralları üzerindedir. Ayrıca, stokastik kontrolda daha sınırlayıcı kısıt varsayımları bulunmaktadır. Tüm bunlarla birlikte çoğu durumda, ayırım tamamiyle açık değildir.

Stokastik programlamada genel kısıtlar (örneğin negatif olamayan durum değişkenleri) daha önemlidir. Bu durumda, çoğu basit karar kuralları biçimleri tatminkâr çözüm bulmaktan uzakta kalmaktadır. Bu nedenle, stokastik programlama daha genel çözüm karakteristiklerini araştırma eğilimindedir.

Güçlü kontrol (robust control) gibi bazı kontrol modelleri stokastik programlama modellerinin özel halleri olarak ele alınabilir. Bu programlar, verilen karakteristiklerle kontrol politikaları geliştirmek amacıyla özel teknikler gerektiren programlardır.

Sürekli zaman için stokastik modeller oluşturmak mümkündür. Söz konusu modeller stokastik programlamadakine göre daha basit formülasyonlar gerektirmektedir. Sürekli zaman stokastik modelleri stokastik programlama ile tutarlılık göstermektedir.

Sözü edilen tüm kontrol problemlerinde, ana vurgu dinamik programlamanın bazı tiplerinin çözümlerinin geliştirilmesi üzerine yapılmaktadır. Stokastik programlar sürecin bir parçası olarak, başlangıçtan sona kadar tüm kararları görme

eğilimindedir. Mevcut kararın gelecek sonuçlar üzerindeki bağımlılığı ve çözümlerin geçici doğası anahtar elemanlar olarak karşımıza çıkmaktadır.

Özetle, stokastik programlama belirsizlik altında optimal karar verme çalışmalarının diğer bir adıdır. Stokastik programlama terimi matematik programlama ve algoritmik optimizasyon metodolojisi arasındaki ilişkiyi vurgulamaktadır[52].

3.8.Bilginin Değeri ve Stokastik Çözüm Değeri

Stokastik programlar çözümünün zor olduğu yönünde bir üne sahiptir. Gerçek-dünya problemleriyle karşılaşan bir çok kişi doğal olarak problemlerin daha basit versiyonlarının çözümlerini bulma eğilimine girmektedirler. Sıkça kullanılan daha basit versiyonların başında, modeldeki tüm rassal değişkenlerin, ***beklenen değerleriyle*** yer değiştirmesiyle elde edilen deterministik modeli çözme çabaları gelmektedir. Diğer sıkça kullanılan yöntem ise, bir kaç senaryoya karşılık gelen deterministik programların çözümünden elde edilen farklı çözümlerin bazı sezgisel yöntemlerle birleştirilmesi çalışmalarıdır.

Burada sorulması gereken doğal bir soru; söz konusu yaklaşımların bazen optimale yakın sonuçları verip vermeyeceği ya da hepsinin güvenilmez ve sağlıksız çözümler olup olmadığıdır. Bu soruya verilecek teorik cevap, tam bilginin beklenen değeri ve stokastik çözüm değeri kavramlarıyla daha anlamlı olacaktır[53]. Aşağıda stokastik model kullanımının değerine yönelik olarak bazı kriterler üzerinde durulmuştur.

---

[52] **A.e.**, ss. 69-72.
[53] **A.e.**, s. 137.

3.8.1. Deterministik ve Stokastik Amaç Değerlerinin Karşılaştırılması

Bir modelde rassallığın önemli ya da önemsiz oluşunun araştırılmasının en açık yolu, stokastik modelin optimal amaç değeri ile söz konusu modele karşılık gelen deterministik modelin optimal amaç değerinin karşılaştırılmasıdır. Bu deterministik model büyük olasılıkla tüm rassal değişkenlerin, *ortalamaları* ile yer değiştirmesinden elde edilmektedir.

Her iki durumda da optimal amaç değerleri (ve çözüm değerleri) karşılaştırılırken, gözlemlemlerimizin bir kaç elemandan oluştuğunun farkında olmalıyız. İlk olarak, her zaman periyodu için deterministik çözüm bir karara sahipken, stokastik çözüm bir ağaç üzerine konuşlanmıştır. Burada önemli bir nokta, deterministik modelin dinamiklerinin tüm elemanlarını kaybetmiş olmasıdır. Deterministik model bir kaç zaman periyoduna sahiptir ama tüm kararlar ***burada-ve-şimdi*** *(here-and-now)* yapılmaktadır. Dolayısıyla, içinde alternatifler bulunan kararlar asla kullanılamayacaktır. İkinci olarak, rassal değişkenleri kendi ortalamalarıyla değiştirmek farklı bir etki oluşturacaktır.

Her iki model de aynı optimal amaç değerlerini verse bile, stokastik bir modelle çalışmanın daha akıllıca bir yol olup olmadığı konusunda fazla bir fikir sahibi olmak zordur. Çoğu durumlarda bu modellerin basitçe çok farklı olduğu söylenebilir.

Buraya kadar ifade edilenlere göre, bir modelin çözümünde, gerçekten iki ana meselenin var olduğu söylenebilir. Birisi optimal amaç değeri, diğeri de optimal çözümdür. Hangisinin daha önemli olduğu duruma göre değişmektedir. Bazen ana ilgi noktası, bir şeyin yapılıp/yapılmaması ya da ne yapılması gerektiği olabilmektedir[54].

[54] **Wallace, a.g.e., ss. 137-138.**

3.8.2. Olay Ağacında Deterministik Çözümler

Olay ağacının bir modeldeki rassallığın dürüst bir tanımlayıcısı olduğunu varsayalım. Aşağıdaki yaklaşım deterministik modelin gerçekten ne kadar iyi olduğunun bir ölçüsünü verecektir. Öncelikle, olay ağacının kökünden başlayıp deterministik modeli çözelim. Muhtemelen burada rassal değişkenler ortalamaları ile değiştirilerek deterministik versiyonları elde edilecektir. Stokastik modelin birinci aşamasına karşılık gelen deterministik çözümün parçasını ele alalım ve onu olay ağacının kökünde uygulanabilir bir çözüm olarak düşünelim. Daha sonra, olay ağacının ikinci aşamasındaki her düğüme gidelim ve süreci tekrarlayalım. Birinci aşamada neler olduğunu dikkate alarak (her düğüm için farklıdır), ikinci aşamadan ileriye doğru elde edilen deterministik modeli çözelim ve ikinci aşamaya karşılık gelen çözümün parçasını uygulanabilir bir çözüm olarak alalım. Süreci olay ağacının yapraklarına ulaşana kadar devam ettirelim.

Bu dürüst bir karşılaştırma olmaktadır. Çünkü, deterministik modelleri tercih edenler bile olay ağacıyla temsil edilen yeni bilgiler mevcut oldukça onları tekrar çözmektedirler. Bu çerçevede, kararları ve (beklenen) optimal amaç değerlerini karşılaştırabiliriz. Çözümler farklı olsa bile optimal değerlerin yaklaşık aynı olduğunu gözlemleyebiliriz. Eğer öyleyse, bir çok yaklaşık optimal çözümlere sahip amaç fonksiyonlarını gözlemliyoruz demektir. Amaç değerlerinde ***büyük*** farklılıklar gözlemliyorsak, ***stokastik bir modeli*** çözmenin ***önemli*** olduğu kanısına varabiliriz.

Yukarıdaki algoritmanın spesifik olarak çok etkin olduğu söylenemez. Ancak basitliğinden ve bir ölçü vermesinden dolayı burada kısaca bahsedilmiştir. Altı çizilmesi gereken önemli bir nokta, modeli çözüp sonuçları kontrol etmeden önce rassallığın önemli olduğunu bilebilmek son derece zordur[55].

[55] **A.e.,** ss. 138-140.

3.8.3. Tam Bilginin Beklenen Değeri (EVPI)

Tam bilginin beklenen değeri (Expected Value of Perfect Information, EVPI*),* belirlilik şartları altındaki beklenen değer ile belirsizlik şartları altındaki optimal kararın farkı olarak tanımlanmaktadır[56]. Diğer bir tanımla, tam bilginin beklenen değeri (EVPI), tam bilgi ortamında beklenen ödemenin, denemesiz beklenen ödemeden farkıdır. Aslında, *tam bilginin değeri (value of perfect information, VPI),* tam bilgi ortamındaki ödemenin, denemesiz ödemeden farkına eşit olan bir ***rassal*** değişkendir. Tam bilginin beklenen değeri (EVPI) ise, bu rassal değişkenin beklenen değeridir[57]. Diğer bir deyişle, tam bilginin beklenen değeri (EVPI), karar vericinin getiri için, gelecek hakkındaki tam ve sağlıklı bilgiye ödemeye hazır olduğu maksimum miktarın ölçüsüdür. İlk olarak karar analizi çalışmalarında geliştirilen EVPI kavramı, stokastik programlama çerçevesinde aşağıdaki gibi geliştirilebilir.

Öncelikle, bekle-ve-gör (wait-and-see) ve burada-ve-şimdi (here-and-now) çözümlerinden bahsetmek faydalı olacaktır. Belirsizlik ortamının bazı senaryolarla modellendiğini varsayalım. $\tilde{\xi}$ rassal vektörünün her bir gerçeklenmesinin farklı senaryolara karşılık geldiğini düşünelim. Bir ξ senaryosuna karşılık gelen optimizasyon probleminin, önceki kesimlerde tanımlanan parametre şartları geçerli olmak üzere,

$$\min Z(x,\xi) = c^T x + \min\{q^T y \,|\, Wy = h - Tx, y \geq 0\}$$

$$\text{öyle ki} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

biçiminde tanımlandığını varsayalım. Optimal çözümün beklenen değeri literatürde, *bekle-ve-gör (wait-and-see,WS)* çözümü olarak adlandırılmaktadır. Matematiksel olarak,

---

[56] Robert D. Mason, Douglas A. Lind, **Statistical Techniques in Business and Economics,** 9th Ed., USA, Richard D. Irwin Inc., 1996, s. 776.
[57] Hillier, **a.g.e.,** s. 873.

$$WS = E_{\tilde{\xi}}\left[\min_x z(x,\tilde{\xi})\right] \qquad (3.24.)$$
$$= E_{\tilde{\xi}} z(\hat{x}(\tilde{\xi}),\tilde{\xi})$$

biçiminde ifade edilebilir. Diğer taraftan, iki aşamalı (telafili) bir stokastik problem *burada-ve-şimdi (here-and-now)* çözümüne sahiptir denilebilir. Söz konusu *telafili problem (recourse problem, RP)* için amaç fonksiyonu çözümü,

$$RP = \min_x E_{\tilde{\xi}} z(x,\tilde{\xi})$$

şeklinde ifade edilmektedir[58]. Burada-ve-şimdi (here-and-now) çözümlerde, rassal değişkenlerin gözlemlenmesinden önce kararlar alınırken, bekle-ve-gör (wait-and-see) çözümlerde her karar bir gözlemden sonra alınmaktadır[59].

Tam bilginin beklenen değeri (EVPI), burada-ve-şimdi (RP) ile bekle-ve-gör (WS) çözümleri arasındaki fark olarak tanımlanır, şöyle ki,

$$EVPI = RP - WS$$

olarak ifade edilir[60].

Şimdi de farklı bir yaklaşımla tam bilginin beklenen değerini (EVPI) stokastik programlama literatüründe elde etmeye çalışalım. İki aşamalı bir modelimizin olduğunu varsayalım ve bekle-ve-gör (wait-and-see) çözümlerinin beklenen değerli stokastik modelin optimal amaç değerlerini karşılaştıralım. Daha sonra, rassal değişkenlerin her olası gerçeklenmesi için optimal çözümlerin hesaplandığını düşünelim. Rassal değişkenin değerini karar vermeden önce bilmek, karar verdikten sonra bilmekten çok daha iyidir. Bu iki beklenen amaç değerleri arasındaki fark *tam bilginin beklenen değeri (EVPI)* olarak adlandırılmaktadır. Diğer

[58] Birge, **a.g.e.,** ss. 137-138.
[59] Prékopa, **a.g.e.,** s. 234.
[60] Birge, **a.g.e.,** s. 139.

bir yorum olarak, söz konusu fark karar vericinin bilgi için ne kadar ödeme yapmaya gönüllü olduğunu göstergesidir.

EVPI değerinin büyük olması bir stokastik modelin önemli olduğunu göstermemektedir. EVPI değeri modeldeki rassallığın önem derecesini göstermektedir. Ancak bu gerçek, aynı model için deterministik versiyonunun uygun olmadığı anlamına gelmez. Bununla birlikte, ***küçük*** EVPI değerinin, rassallığın modelde ***küçük*** bir rol oynadığını gösterdiğini kesinlikle söyleyebiliriz.

Çok aşamalı modellerde de temel olarak durum yine aynıdır. Ancak çok küçük bir EVPI değeri elde etmek olasıdır fakat aynı zamanda, ağacın uç kısımlarında çok yüksek bir EVPI değerli ve düşük olasılıklı bir düğüm bulmak mümkündür[61].

3.8.4. Stokastik Çözüm Değeri (VSS)

Daha önce de sözü edildiği üzere bekle-ve-gör çözümlerine ulaşmak bir hayli zor olmaktadır. Bu nedenle, modellerin daha basitleştirilmiş versiyonlarının çözülmeye çalışıldığından bahsedilmişti. Bu versiyonların en yaygın olanın ise rassal değişkenlerin, beklenen değerleri ya da ortalamaları ile yer değiştirmesiyle elde edildiğinden de söz edilmişti. Bu yöntem *beklenen değer problemi (expected value problem, EV)* ya da *ortalama değer problemi* olarak isimlendirilmektedir. Matematik olarak, $\tilde{\xi}$ rassal vektörünün beklenen değeri $\bar{\xi} = E(\tilde{\xi})$ olmak üzere,

$$EV = \min_x z(x, \bar{\xi}) \qquad (3.25.)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Problem (3.25.)'in optimal çözümü $\bar{x}(\bar{\xi})$, ***beklenen değer çözümü*** olarak nitelendirilir.

[61] Wallace, **a.g.e.,** ss. 140-141.

Stokastik çözüm değeri, kısaca $\bar{x}(\bar{\xi})$ kararının telafi problemi (RP) cinsinden ne kadar iyi olduğunu ölçmektedir. *EV çözümü kullanımının beklenen sonucu (EEV)*,

$$EEV = E_{\tilde{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}), \tilde{\xi})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. *EEV* miktarı, $\bar{x}(\bar{\xi})$ 'nin, ikinci aşama kararlarının optimal biçimde seçilmesine hangi ölçüde izin verdiğinin bir göstergesidir. Yani $\bar{x}(\bar{\xi})$ 'nin performansını ölçmektedir. Artık stokastik çözüm değerini tanımlayabiliriz. ***Stokastik çözüm değeri (the value of stochastic solution,VSS)***, EV çözümü kullanımının beklenen sonucu (EEV) ile telafi problemi (RP) arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır. Kısaca,

$$VSS = EEV - RP$$

olarak ifade edilebilir. Aslında, VSS, karar seçiminde belirsizliği ihmal etmenin maliyetidir[62].

Bir modelin, stokastik çözüm değerini deterministik çözüm değeri ile karşılaştırmak da mümkündür. Bu durumda, stokastik çözüm değeri amaç fonksiyonu değerindeki göreceli iyileşme olarak alınır. O halde, stokastik çözüm değeri, stokastik modelin optimal amaç fonksiyonu değerinden (SOV) deterministik modelin optimal amaç değerinin (DOV) çıkarılmasıyla elde edilen farkın deterministik değere bölümüdür. Yüzde olarak,

$$VSS = \frac{SOV - DOV}{DOV} \cdot 100$$

formülüyle hesaplanabilmektedir[63].

---

[62] Birge, **a.g.e.,** ss. 139-140.

[63] S.O. Duffuaa, K.S. Al-Sultan, "A Stochastic Programming Model for Scheduling Maintenance Personnel," **Applied Mathematical Modelling,** No: 25, 1999, s. 392.

3.8.5. Basit Eşitsizlikler

Yukarıda tanımlanan bazı değerler arasındaki ilişkiler önermeler şeklinde aşağıda sıralanmıştır.

Önerme 1.

$$WS \leq RP \leq EEV$$

İspat. Herhangi bir rassal gerçeklenme ξ için, (3.16.) telafi problemin bir optimal sonucu x^* olmak üzere,

$$z(\bar{x}(\xi),\xi) \leq z(x^*,\xi)$$

ilişkisi vardır. Her iki yanın beklenen değerlerini aldığımızda ilk eşitsizlik ispatlanmış olur. x^* söz konusu telafi probleminin optimal çözümüyken, $\bar{x}(\bar{\xi})$ değeri telafi probleminin sadece bir çözümüdür. Dolayısıyla ikinci eşitsizlik de gösterilmiş olur.

Önerme 2. Sabit amaç katsayılı (T ve W matrisleri sabit) stokastik programlar için,

$$EV \leq WS$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Önerme 3. Telafi problemi (3.16.)'nın optimal çözümü x^* ve beklenen değer problemi (3.24.)'ün bir çözümü $\bar{x}(\bar{\xi})$ olmak üzere,

$$RP \geq EEV + (x^* - \bar{x}(\bar{\xi}))^T \eta$$

eşitsizliği vardır. Burada, η, $\bar{x}(\bar{\xi})$ noktasındaki $E_{\tilde{\xi}} z(x,\tilde{\xi})$'nin alt diferansiyeli kümesidir. Yani, $\eta \in \partial E_{\tilde{\xi}} z(\bar{x}(\bar{\xi}),\tilde{\xi})$.

3.8.6. EVPI ve VSS Arasındaki İlişkiler

EVPI ve VSS değerleri çoğu zaman birbirlerinden farklıdırlar. Bu kesimde, bu iki belirsizlik etki ölçüsü arasında ilişkiler incelenecektir.

Önerme 4.

i) Herhangi bir stokastik program için,

$$0 \le EVPI$$
$$0 \le VSS .$$

ii) Sabit telafi matrisli ve sabit amaç katsayılı stokastik programlar için,

$$EVPI \le EEV - EV$$
$$VSS \le EEV - EV .$$

Yukarıdaki önerme, EVPI ve VSS değerlerinin negatif olamayacağını ve ikisinin de yukarıdan $EEV - EV$ değerleri ile sınırlandırıldığını belirtmektedir. Buradan, $EV = EEV$ ise EVPI ve VSS değerlerinin yok olacağını söylemek gayet kolaydır. Bunun olması için yeter koşul $\bar{x}(\tilde{\xi})$'nin $\tilde{\xi}$'den bağımsız olmasıdır. Bunun anlamı, optimal çözümlerin rassal elemanlara duyarsız olmasıdır. Böyle durumlarda, ξ gerçeklenmesi veya $\tilde{\xi}$ için optimal çözümleri bulma aynı sonucu verecektir ve bir telafi problemini çözmek gereksiz olacaktır. Böylesine uç durumlar çok nadiren görülmektedir.

Ayrıca, $EVPI = 0$ iken $VSS \neq 0$ olan ve $VSS = 0$ iken $EVPI \neq 0$ olan örnekler vermek mümkündür. Stokastik programların kullanımıyla ilgili çok genel

bir kriter belirtmek mümkün değildir. Ancak, genellikle, problemlerde daha çok rassallık var iken stokastik programlamayı kullanmanın daha iyi olacağı düşünülmektedir. Bu düşünceyi daha somut bir ifadeye çevirmek gerekirse, verilen bir modelde rassal değişkenlerin *varyansları* arttıkça EVPI ve VSS değerlerinin artması beklenmektedir.

3.8.7. EVPI ve VSS Değerlerindeki Sınırlar

EVPI ve VSS değerlerindeki sınırlar, WS, RP ve EEV ile belirtilen lineer programların çözümlerinin beklenen değerleri için aralıklar oluşturmakta yatmaktadır. En basit sınırlar Önerme 4'ten gelmektedir.

Öncelikle, stokastik programlamanın basitleştirilmiş biçimini ele alalım. Sadece sağ tarafın stokastik ($\tilde{\xi} = h(\omega)$) ve Ξ'nin sonlu olduğunu varsayalım. $\xi_1,...,\xi_K$'nın indeks kümesi ve $\tilde{\xi}$'nin mümkün gerçeklenmeleri ve p^k, $k = 1,...,K$ onların olasılıkları olsun. $\tilde{\xi}$'nin her ξ^k gerçeklenmesi *senaryo k* olarak da adlandırılabilir.

VSS değerindeki sınırlar için, bir *referans senaryo* ξ^r oluşturalım. İki klasik referans senaryo, $\tilde{\xi}$'nin beklenen değeri $\bar{\xi}$ ve en kötü durum senaryosudur. Her iki durumda da referans senaryo Ξ'daki mümkün senaryolara karşılık gelmeyebilir. Bu $\bar{\xi}$ için açıktır. Bununla birlikte en kötü durum senaryosu, $\tilde{\xi}$ bağımsız rassal değişken bileşenleriyle oluşturulduğu zaman bir mümkün senaryo olabilmektedir. Rassal değişkenler bağımsız olmadıkları zaman anlamlı bir en kötü durum senaryosu oluşturmak daha güç olmaktadır.

Referans senaryo olasılığı $p^r = P(\tilde{\xi} = \xi^r)$ olsun. *İkili alt problem,* sırasıyla p^r ve $1 - p^r$ olasılıklarına sahip ξ^r ve ξ^k iki mümkün gerçeklenmeli stokastik programlama problemi olarak tanımlanabilir. Söz konusu ikili alt problem,

$$\min z_P(x,\xi^r,\xi^k) = c^T x + p^r q^T y(\xi^r) + (1-p^r) q^T y(\xi^k)$$
$$Ax = b,$$
$$Wy(\xi^r) = \xi^r - Tx,$$
$$Wy(\xi^k) = \xi^k - Tx$$
$$x, y \geq 0$$

olarak tanımlanmaktadır. $(\bar{x}^k, \bar{y}^k, y(\xi^k))$ ikili alt problemin optimal çözümü ve $z_P(\bar{x}^k, \bar{y}^k, y(\xi^k))$ de optimal amaç değeri olsun.

İkili alt problemin iki özel durumu ilgi alanımızda olacaktır. İlk olarak, $z_P(x,\xi^r,\xi^r)$'nin iyi tanımlı ve gerçekte $z(x,\xi^r)$ içinde olduğu görülmektedir ve sadece referans senaryo için deterministik problem elde edilmektedir. İkinci olarak, referans senaryo mümkün senaryo değilse, $p^r = P(\tilde{\xi} = \xi^r) = 0$ elde edilir ki $z_P(x,\xi^r,\xi^k)$ basitçe $z(x,\xi^k)$ olmaktadır.

İkili alt problemlerle telafi problemleri arasındaki ilişkiyi göstermek için, *ikililerin beklenen değer toplamını (the sum of pairs expected values, SPEV)*,

$$SPEV = \frac{1}{1-p^r} \sum_{k=1}^{K} p^k \min z_P(x,\xi^r,\xi^k)$$

şeklinde tanımlayalım. Senaryo r mümkün değilken bile bu tanımın anlamlı olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerme 5. Referans senaryo Ξ'ya ait değilse, $SPEV = WS$.

İspat. Daha önceden görüldüğü üzere, $p^r = 0$ iken, ikili alt problemler $z_P(x,\xi^r,\xi^k)$, $z(x,\xi^k)$ ile çakışmaktadır. Dolayısıyla, $k \neq r$ için

$SPEV = \sum_{k=1}^{K} p^k \min z_P(x, \xi^k)$ olmaktadır. (3.24.)'teki WS 'in tanımından eşitlik ispatlanmış olur.

Önerme 6.

$$WS \leq SPEV \leq RP .$$

RP üzerinde ikili alt problemlerle ilgili üst sınırlar elde etmek için, VSS tanımını genelleştirelim. Senaryo ξ^r (ξ^r, mümkün bir senaryo olmak zorunda değil) ile eşleştirilen deterministik problem $z(x, \xi^r)$ ve $\bar{x}^r$, $\min_x z(x, \xi^r)$ 'in bir optimal çözümü olsun. *Referans senaryonun beklenen değeri (the expected value of the reference scenario, EVRS)*,

$$EVRS = E_{\tilde{\xi}} z(\bar{x}^r, \tilde{\xi})$$

ve stokastik çözüm değeri,

$$VSS = EVRS - RP$$

şeklinde tanımlanmaktadır. VSS yine negatif değildir. Çünkü, $\bar{x}^r$ telafi probleminin uygun çözümüyse $EVRS \geq RP$ 'dir. Uygun olmayan çözümse, $EVRS = +\infty$ 'dur.

Önceden sözü edildiği gibi, $(\bar{x}^k, \bar{y}^k, y(\xi^k))$, ikili ξ^r ve $\xi^k, k = 1,...,K$ 'nin oluşturduğu alt problemin optimal çözümü olsun. *İkililerin beklenen değer beklentilerini (the expectations of pairs expected value, EPEV)*,

$$EPEV = \min_{k=1,...,K \cup \{r\}} E_{\tilde{\xi}} z(\bar{x}^k, \tilde{\xi})$$

olarak tanımlamak mümkündür.

Önerme 7.

$$RP \leq EPEV \leq EVRS .$$

Son iki önermeyi birleştirerek aşağıda ispatsız olarak verilecek olan teoremi elde etmek mümkündür.

Teorem 2.

$$0 \leq EVRS - EPEV \leq VSS \leq EVRS - SPEV \leq EVRS - WS .$$

Buraya kadar tartışılan teorik kavramları bir örnek üzerinde uygulamak faydalı olacaktır.

Örnek 2. $\tilde{\xi}_1 = 4$ veya 6, $\tilde{\xi}_2 = 4$ veya 8, birbirlerinden bağımsız ve her birinin olasılığı ½ olmak üzere,

$$\min \; 3x_1 + 2x_2 + E_{\tilde{\xi}} \min(-15y_1 - 12y_2)$$
$$3y_1 + 2y_2 \leq x_1,$$
$$2y_1 + 5y_2 \leq x_2,$$
$$0{,}8\tilde{\xi}_1 \leq y_1 \leq \tilde{\xi}_1,$$
$$0{,}8\tilde{\xi}_2 \leq y_2 \leq \tilde{\xi}_2$$
$$x, y \geq 0,$$

problemini ele alalım.

Bu örnek x_1 ve x_2 kaynaklarındaki bir yatırım karar problemi olarak alınabilir. Burada, ikinci aşamada talebin en az %80'i karşılanmalıdır. Bu durumda *EEV* ve *WS* cevapları genel olarak yetersiz kalacaktır.

Tablo 1'de dört senaryo altında çeşitli çözümler, söz konusu senaryolar altında optimal amaç değeri ve *WS* çözümü verilmiştir. Tabloda ayrıca, beklenen

değer senaryosu $\bar{\xi} = (5,6)^T$ altındaki *EV* değeri de verilmiştir. Görüldüğü gibi, bu senaryo mümkün senaryolar arasında yer almamaktadır. Stokastik problemin optimal çözümü $\bar{x}(\bar{\xi}) = (24.6,34)^T$ uygun olmayan bir çözümdür. Bu nedenle, *EEV* değeri $+\infty$ olarak alınmıştır.

Senaryo	**Birinci-Aşama Çözümü**	**İkinci-Aşama Çözümü**	**Optimal Değer** $z(\bar{x}(\xi),\xi)$
1. (4,4)	(18.4, 24)	(4, 3.2)	4.8
2. (6,4)	(24.4, 28)	(6, 3.2)	0.8
3. (4,8)	(24.8, 40)	(4, 6.4)	17.6
4. (6,8)	(30.8, 44)	(6, 6.4)	13.6
			WS = 9.2
$\bar{\xi} = (5,6)$	(24.6, 34)	(5, 4.8)	EV = 9.2
			EEV = $+\infty$

Tablo 1. Örnek 2 İçin Çözümler ve Optimal Değerler

Tablo 1'den, $EV = WS = 9.2 \leq RP \leq EEV = +\infty$ olduğu görülebilir. Bu ilişki bize çok yardımcı olamamaktadır. Sadece, *EVPI* ve *VSS* değerlerinin 0 ile $+\infty$ arasında bir yerlerde olduğu sonucu çıkarılabilir.

Böyle durumlarda ikili alt problemler büyük önem taşımaktadır. Varsayımımıza göre problem talep karşılama kısıtlı bir yatırım problemi olduğundan, en mantıklı referans senaryo ortalama talep $\bar{\xi}$'ye değil en büyük talep olan $\xi^r = (6,8)^T$'e karşılık gelmektedir.

Bu durum, birinci-aşama kararlarını maksimum talep altında talep karşılamaya yönlendirecektir. Böylelikle, ikili alt problemler altında alınan kararlar

telafi problemi için uygun (feasible) olacaktır. Bağımsızlık nedeniyle, $p_r = 1/4$ olasılığıyla, ξ_r, ξ'nin bir mümkün gerçeklenmesi olacaktır.

ξ^r ve ξ^k'nin ikili alt problemleri,

$$\min 3x_1 + 2x_2 - \frac{1}{4}(15y_1^r + 12y_2^r) - \frac{3}{4}(15y_1 + 12y_2)$$

$$x_1 \geq 27{,}2, \quad 3y_1^r + 2y_2^r \leq x_1, \quad 3y_1 + 2y_2 \leq x_1,$$

$$x_2 \geq 41{,}6, \quad 2y_1^r + 5y_2^r \leq x_2, \quad 2y_1 + 5y_2 \leq x_2,$$

$$4{,}8 \leq y_1^r \leq 6, \quad 0{,}8\xi_1^k \leq y_1 \leq \xi_1^k,$$

$$6{,}4 \leq y_2^r \leq 8, \quad 0{,}8\xi_2^k \leq y_2 \leq \xi_2^k,$$

$$y \geq 0,$$

şeklinde ifade edilebilir. x_1 ve x_2 üzerindeki sınırlar referans senaryoların uygunluğu ile üretilmektedir.

İkili alt problemlere ilişkin üç senaryo ve referans senaryo için çözümler, *SPEV*, *EVRS* ve *EPEV* değerleri Tablo 2'te görülmektedir.

İkili Alt Problem	**Birinci-Aşama Çözümü**	**Referans Senaryo Altında İkinci-Aşama Çözümü**	ξ_k **Altında İkinci-Aşama Çözümü**	**Amaç Değeri** z^P
1. (4,4), r	(27.2, 41.6)	(4.8, 6.4)	(4,4)	46.6
2. (6,4), r	(27.2, 41.6)	(4.8, 6.4)	(6,4)	24.1
3. (4,8), r	(27.2, 41.6)	(4.8, 6.4)	(4, 6.72)	22.12
				SPEV = 30.94
		EPEV= $\min_k E_{\tilde{\xi}} z(\bar{x}(\tilde{\xi}^k), \tilde{\xi}) = E_{\tilde{\xi}} z((27.2,41.6), \tilde{\xi}) = 30.94$		
		EVRS= $E_{\tilde{\xi}} z((30.8,44), \xi) = 40.6$		

Tablo 2. Örnek 2 İkili Alt Problem Çözümleri

Bu kez Tablo 2'den daha güçlü olarak,

$$WS = 9{,}2 \leq SPEV = 30{,}94 \leq RP \leq EPEV = 30{,}94 \leq EVRS = 40{,}6$$

ilişkileri çıkarılabilir. Bu ifade de $RP = 30{,}94$ ve $(27.2{,}41.6)^T$ değerinin bir optimal çözüm olmasını gerektirmektedir[64].

[64] Birge, **a.g.e.,** ss. 140-150.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
STOKASTİK PROGRAMLAMA TÜRLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, iki aşamalı (telafili), çok aşamalı, probabilistik kısıtlı (şans kısıtlı) ve tamsayılı stokastik programlama türleri ve çözüm yöntemleri üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur. Ayrıca, oyun teorisi ve stokastik programlama arasındaki ilişkiler irdelenmiştir.

4.1.İki Aşamalı Stokastik Lineer Programlama

Burada *iki aşamalı stokastik lineer programlama* modelini yeniden kuralım. Söz konusu aşağıdaki model, 3. bölümdeki (3.16)'dan telafi (recourse) probleminin amaç fonksiyonundaki rassallık açısından farklılık arz etmektedir.

$$\min c^T x + Q(x)$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Burada,

$$Q(x) = \sum_j p^j Q(x, \xi^j)$$

ve

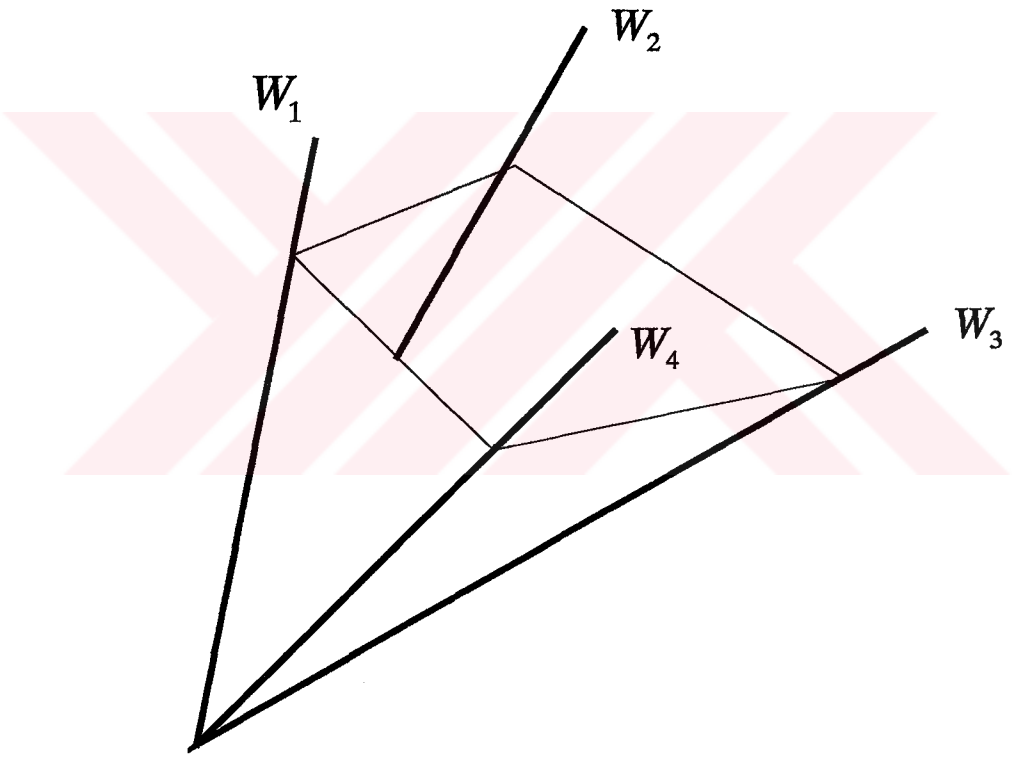
$$Q(x,\xi) = \min\left\{q(\xi)^T y \,\middle|\, W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0\right\}$$

biçimindedir. Bu ifadede, p^j, $\tilde{\xi}$'nin j. gerçeklenmesi $\tilde{\xi} = \xi^j$'nin olasılığı, $h(\xi) = h_0 + H\xi = h_0 + \sum_i h_i \xi_i$, $T(\xi) = T_0 + \sum_i T_i \xi_i$ ve $q(\xi) = q_0 + \sum_i q_i \xi_i$'dir. Daha önce değinildiği üzere, $Q(x,\xi)$ fonksiyonu *telafi (recourse) fonksiyonu* ve $Q(x)$ ise *beklenen telafi fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Burada sadece *sabit telafi*, yani $W(\xi) \equiv W$ durumu üzerinde durulacaktır. 3. bölümdeki (3.16)'da sözü edilen koni,

$$pos\, W = \{t \mid t = Wy, y \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Üç satır ve dört sütunlu bir W matrisi için *pos* W konisi Şekil 12'de görülmektedir[1].



Şekil 12. *pos* W_{3x4} konisi

Burada,

$$Wy = h, y \geq 0 \text{ uygun} \Leftrightarrow h \in pos\ W$$

[1] Peter Kall, Stein W. Wallace, **Stochastic Programming,** USA, John Wiley & Sons Inc., 1995, ss. 147-148.

olduğu vurgulanmalıdır. Hatırlanacağı üzere,

$$pos\,W = R^m$$

ise, problem *tam telafi*ye (*complete recourse)* sahiptir. Bu ifade,

$$h(\xi) - T(\xi)x \in pos W \quad \forall \xi, \forall x$$

olmasını gerektirmektedir. Ancak bu durum çoğu durumlarda ihtiyacımızdan fazlasını vermektedir. $Ax = b$ eşitliğini sağlayan tüm $x \geq 0$ için,

$$h(\xi) - T(\xi)x \in pos W \quad \forall \xi$$

ifadesi sağlanıyorsa *göreceli tam telafi*ye *(relatively complete recourse)* ile karşı karşıyayız demektir. Doğal olarak, tam telafi göreceli tam telafiyi gerektirmektedir[2].

4.1.1.Telafi Problemlerinin Özellikleri

Aşağıda telafili problemlerinin bazı özellikleri teoremler halinde verilmektedir. Öncelikle (3.10.)'da verilen telafi probleminin konveksliği $g_0 + Q$ 'nun integrallenebilirlik varsayımı altında kolayca gösterilebilir.

Teorem 3. $g_0(\cdot,\xi)$ ve $Q(\cdot,\xi)$ $\forall \xi \in \Xi$ için x'de konveks ve X konveks küme ise (3.10.) bir konveks programdır.

İspat. $\hat{x}$, $\bar{x} \in X$, $\lambda \in (0,1)$ için ve $\hat{x} := \lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}$ olmak üzere,

$$g_0(\hat{x},\xi) + Q(\hat{x},\xi) \leq \lambda[g_0(\hat{x},\xi) + Q(\hat{x},\xi)] + (1-\lambda)[g_0(\bar{x},\xi) + Q(\bar{x},\xi)], \forall \xi \in \Xi$$

[2] Kall, **a.g.e.,** ss.148-149.

buradan,

$$E_{\tilde{\xi}}\left\{g_0(\lambda\hat{x},\tilde{\xi})+Q(\lambda\hat{x},\tilde{\xi})\right\}\le\lambda E_{\tilde{\xi}}\left\{g_0(\hat{x},\tilde{\xi})+Q(\hat{x},\tilde{\xi})\right\}+(1-\lambda)E_{\tilde{\xi}}\left\{g_0(\bar{x},\tilde{\xi})+Q(\bar{x},\tilde{\xi})\right\}$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Genel koşullar altında telafi problemlerinin *düzgünlüğü (smoothness)* iddia edilebilir. Düzgünlük, burada,

$$Q(x)=\int_{\Xi}Q(x,\xi)dP$$

ifadesinin kısmi diferansiyellenebilmesi anlamına gelmektedir.

Teorem 4. Sıfır olasılıklı olaya karşılık gelen rassal değişken hariç olmak üzere tüm ξ için, $Q(x,\tilde{\xi})$, x_j'ye göre kısmi diferansiyellenebilir, kısmi diferansiyeli $\frac{\partial Q(\hat{x},\xi)}{\partial x_j}$ integrallenebilir ve artık $(1/h)\int_{\Xi}\rho_j(\hat{x},\xi;h)dP\xrightarrow{h\to 0}0$ koşulunu sağlıyor ise, $\frac{\partial Q(\hat{x})}{\partial x_j}$ vardır ve $\frac{\partial Q(\hat{x})}{\partial x_j}=\int_{\Xi}\frac{\partial Q(\hat{x},\xi)}{\partial x_j}dP$ değerine eşittir.

Teorem 5. Bir $m_1 x\bar{n}$ boyutlu W matrisi bir *tam telafi* matrisidir ancak ve ancak,

- matrisin rankı $rk\,(W)=m_1$, ve
- matrisin ilk m_1 sütunları $W_1,W_2,...,W_{m_1}$'nin lineer bağımsız ve lineer kısıtlar,

$$Wy=0$$

$$y_i\ge 1, i=1,...,m_1,$$

$$y\ge 0$$

uygun bir çözüme sahiptir.

İspat. W bir tam telafi matrisidir ancak ve ancak

$$\{z \mid z = Wy, y \geq 0\} = R^{m_1}$$

Bu koşuldan dolayı, $rk(W) = m_1$'dir. Ek olarak, $\hat{z} = -\sum_{i=1}^{m_1} W_i \in R^{m_1}$ için ikinci aşama kısıtları $Wy = \hat{z}, y \geq 0$ uygun bir çözüm $\hat{y}$'ye sahiptir öyle ki

$$\sum_{i=1}^{m_1} W_i \hat{y}_i + \sum_{i=m_1+1}^{\bar{n}} W_i \hat{y}_i = \hat{z} = -\sum_{i=1}^{m_1} W_i,$$

$$\hat{y}_i \geq 0, i = 1,..., \bar{n}$$

ve

$$y_i = \begin{cases} \hat{y}_i + 1, & i = 1,..., m_1, \\ \hat{y}_i, & i \rangle m_1, \end{cases}$$

Bu ifade, teoremde ifade edilen kısıtların uygun olduğunu gerektirmektedir.

Yukarıdaki koşulların tam telafi için yeterli olduğunu göstermek için keyfi bir $\bar{z} \in R^{m_1}$ seçelim. $W_1, W_2, ..., W_{m_1}$ sütunları lineer bağımsız olduğundan, lineer denklemler

$$\sum_{i=1}^{m_1} W_i y_i = \bar{z}$$

tek bir $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_{m_1}$ çözümüne sahiptir. $\bar{y}_i \geq 0, i = 1,..., m_1$ ise ispat tamamlanmıştır. Aksi halde, $\gamma := \min\{\bar{y}_1, ..., \bar{y}_{m_1}\}$ tanımlayalım. Varsayımdan dolayı, teoremde ifade edilen kısıtlar $\hat{y}$ uygun çözümüne sahiptir. Şimdi, $\hat{y}_i$,

$$\hat{y}_i = \begin{cases} \bar{y}_i - \gamma \hat{y}_i, & i = 1,...,m_1, \\ -\gamma \hat{y}_i, & i = m_1 + 1,...,\bar{n}, \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve $Wy = \bar{z}, y \geq 0$ sistemini çözer[3].

4.1.2.İki Aşamalı Stokastik Programların Çözüm Yöntemleri

İki aşamalı stokastik programların çözümü için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan çoğu rassal değişkenlerin kesikli doğasına dayanmaktadır. Sürekli olanlar da bir şekilde kesikli hale getirilerek kullanılabilmektedir. Ancak bu durumda problemin boyutları bir hayli büyümektedir.

Sürekli durumlar için geliştirilen yöntemler azınlıktadır. Kesikli destekli rassal değişkenler için bir deterministik eşdeğer lineer programlama oluşturulabilmektedir. Bu problem bir dual ayrıştırılabilir yapıya sahiptir. Söz konusu yapının çözümü için, temel ayrıştırma yöntemi, içiçe ayrıştırma ve düzenlenmiş ayrıştırma yöntemleri önerilmiştir.

Diğer bir yaklaşım da, Jensen alt ve Edmunson-Madansky üst sınırlarının hesaplanmasıyla telafi fonksiyonunun sınırlandırılmasıdır. Rassal değişkenlerin desteklerinin daha detaylı bölümlenmeleri oluşturularak yaklaşık sonuçların yakınsak bir serisi oluşturulabilir. L-şekil yöntemleri de bölünlenme yaklaşımlarıyla aynı çerçevede kullanılabilir.

Stokastik ayrıştırma da ayrı bir tekniktir. Bu yaklaşımda sınırlandırma fonksiyonlarının istatistiksel tahminleri ele alınmaktadır. Doğrusal olmayan optimizasyon teknikleri de orijinal iki aşamalı problemlerin çözümünde kullanılmaktadır[4].

---

[3] **A.e.,** ss. 31-40.

[4] Istvan Deak, **"Computing Two-stage Stochastic Programming Problems by Successive Regression Approximations" Stochastic Optimization Techniques: Numerical Methods and Technical Applications,** Ed. Kurt Marti, Berlin, Springer, 2002, ss. 93-94.

Daha önceki bölümde değinildiği üzere, iki aşamalı stokastik programlarda bir başlangıç kararı verilir (ilk aşama) ve ardışık etkileri bir kayıp ya da ceza fonksiyonu olarak ifade edilebilen telafi fonksiyonu (ikinci aşama) ile değerlendirilmektedir. İkinci aşamaya başlamadan önce ilk aşama kararları verilmiş ve rassal değişkenler gerçeklenmiştir. Bu tür problemlerin çözümündeki temel sorun da, telafi işleminin problemin boyutlarını anlamlı bir şekilde artırmasıdır. Karşılaşılan diğer temel problem ise ceza ya da telafi fonksiyonun belirlenmesidir[5].

İki aşamalı problemlerde, telafi fonksiyonunun konveks olmasıyla amaç fonksiyonu da konveks olmaktadır. Böylece bir konveks doğrusal olmayan program elde edilmektedir. Söz konusu problemin çözümünde karşılaşılaşılan diğer bir temel problem de amaç fonksiyonunun bazen diferansiyellenebilme özelliğini sağlayamaması ve yukarıda değinildiği gibi problemin boyutlarının çok fazla büyümesidir. Bu durumda, *düzgünleştirme yaklaşımları*, optimizasyon algoritması tarafından değerlendirilecek fonksiyon ve iterasyon sayısının *Newton-tipi yöntemleri* ile minimizasyonu ve ikinci aşamadaki optimizasyon problemlerinin çözümünde *paralel süreçlendirme teknikleri* kullanılan yöntemlerden bir kaçıdır[6].

4.1.2.1.L-Şekil Ayrıştırma Yöntemi

L-şekil yöntemi, telafi maliyet fonksiyonunun bir dışsal lineerleştirmesinin elde edilmesi ve bu lineerleştirmeyle birlikte birinci aşama problemine bir çözüm geliştirilmesine dayanmaktadır. Bu yöntemin ardındaki temel düşünce amaç fonksiyonundaki doğrusal olmayan terimlere yaklaşmaktır. Sözü edilen yaklaşımın ardındaki temel fikir ise doğrusal olmayan amaç teriminin (telafi fonksiyonu) tüm ikinci aşama telafi lineer programların bir çözümünü içermesi nedeniyle, bir çok fonksiyonun ele alınmasından kaçınılmasıdır. Dolayısıyla, doğrusal olmayan terim x'e bağlı bir ana problem oluşturmak için kullanılır, ancak telafi fonksiyonu bir alt

[5] W.W. Cooper v.d., "Survey of Mathematical Programming Models in Air Pollution Managemant," **European Journal of Operational Research,** No: 96, 1996, s. 21.
[6] X. Chen, "Newton-Type Methods for Stochastic Programming," **Mathematical and Computer Modelling,** No:31, 2000, s. 90.

problem olarak ele alınır. Aslında, söz konusu L-şekil yöntemi, bir düzlem kesme tekniğidir.

L-şekil yaklaşımını oluşturmak için, rassal vektör $\tilde{\xi}$ 'nin sonlu desteğe sahip olduğunu varsayalım. $k=1,...,K$ rassal vektörün olası gerçeklenmeleri ve p_k onların olasılıkları olsun. Bu varsayımlar altında, deterministik eşdeğer programı *geniş form*da yazabiliriz. Geniş form, ikinci aşama kararlarının bir kümesinin (y_k), $\tilde{\xi}$ 'nin her bir gerçeklenmesi ile eşleştirilmesiyle oluşmaktadır. Bu eşleme q_k, h_k ve T_k 'nin gerçeklenmelerini de kapsamaktadır. Geniş formda tanımlayabileceğimiz lineer problem büyük ölçekli bir problemdir.

$$\begin{aligned} &\min c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k q_k^T y_k \\ &\text{öyle ki } Ax = b, \\ &T_k x + W y_k = h_k, k = 1,...,K; \\ &x \geq 0,\ y_k \geq 0, k = 1,...,K. \end{aligned} \tag{4.1.}$$

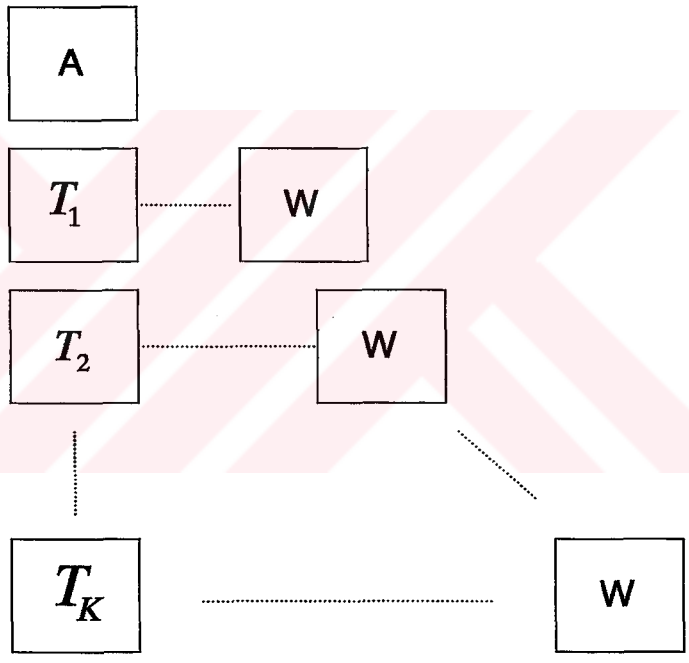
İki aşamalı geniş formun blok yapısı Şekil 13'te görülmektedir. Bu şekilden görüleceği üzere, *L-şekil yöntemi* ismini bu yapıdan almıştır. Geniş formun dualinin alınmasıyla bir dual blok-açısal yapı elde edilmektedir. Söz konusu dual yapı Şekil 14'te görülmektedir[7]. Dual blok açısal yapı bazen *cebirsel eşdeğer* olarak da adlandırılmaktadır. Söz konusu yapı özel bir tipik geniş ölçekli problemdir. Örneğin, 9 bağımsız rassal değişken olduğunu varsayarsak, köşegen blokların sayısı her rassal değişkenin 3 gerçeklenmesi için $T = 3^9 = 19683$ olmaktadır. Rassal değişkenlerin ve rassal vektörün bileşenlerinin gerçeklenme sayısı arttıkça problemin boyutları büyümektedir[8]. Bu dual yapı, dualin *Dantzig-Wolfe ayrıştırması* (içsel lineerleştirme)

---

[7] John R. Birge, François Louveaux, **Introduction to Stochastic Programming,** New York, Springer, 1997, ss. 155-157.

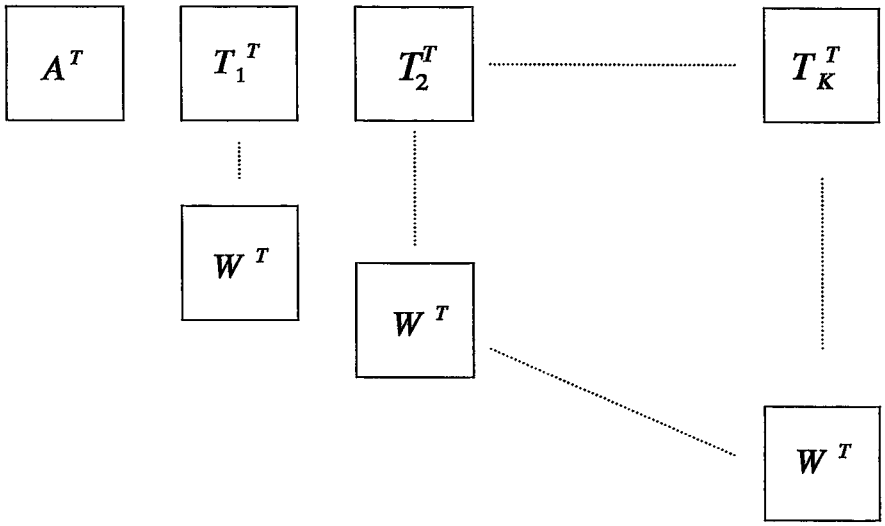
[8] P. Kall, J. Mayer, **"On Solving Stochastic Linear Programming Problems," Stochastic Programming Methods and Technical Applications: Proceedings of of th 3rd GAMM/IFIP-Workshop on Stochastic Optimization; Numerical Methods and Technical Applications,** Ed. Kurt Marti, Peter Kall, Germany, Springer- Verlag, 1998, s.332.

ya da primalin *Benders ayrıştırması* (dışsal lineerleştirme) ile çözülebilir. Bu yöntem uygunluk kriterlerinin dikkate alınması amacıyla stokastik programlama için de genişletilmiştir. Sözü geçen yöntem *Van Slyke ve Wets'in L-şekil yöntemi* olarak adlandırılmaktadır[9]. Stokastik programlama uygulamaları genellikle büyük çaplı matematik programlardır. Bu nedenle de iç nokta yöntemlerine doğal olarak uygundur. Ancak buna rağmen paralel hesaplama gibi yöntemlerle çözüm bulunmaya çalışılmıştır. Alternatif olarak ise, Van Slyke ve Wets iç nokta algoritmasıyla çalışan L-şekil yöntemini geliştirmişlerdir[10].



Şekil 13. İki Aşamalı Geniş Formun Blok Yapısı

[9] Birge, **a.g.e.**,155-157.
[10] Jörgen Blomwall, Per Olov Lindberg, "A Riccati-Based Primal Interior Point Solver for Multistage Stochastic Programming," **European Journal of Operational Research,** No: 143, 2002, s. 452.



Şekil 14. İki Aşamalı Dualin Blok Açısal Yapısı

L-şekil ayrıştırma yöntemi aşağıda verilen algoritmayı kullanarak çözüme ulaşmaktadır.

L-Şekil Algoritması

Adım 0. $r = s = \nu = 0$ olsun.

Adım 1. $\nu = \nu + 1$ olsun. (4.2.)-(4.4.) lineer programını çöz.

$$\min z = c^T x + \theta \qquad (4.2.)$$

öyle ki $Ax = b$

$$D_\lambda x \geq d_\lambda, \ \lambda = 1,...,r, \qquad (4.3.)$$

$$E_\lambda x + \theta \geq e_\lambda, \ \lambda = 1,...,s, \qquad (4.4.)$$

$$x \geq 0, \ \theta \in \Re$$

(x^ν, θ^ν) bir optimal çözüm olsun. (4.4.) kısıtı yok ise, θ^ν'yü $-\infty$'a eşitle ve x^ν'nün hesaplanmasında dikkate alma.

Adım 2. $k=1,...,K$, $e^T=(1,...,1)$ olmak üzere, bazı k için $w'>0$ optimal değeri bulunana kadar,

$$\min w' = e^T v^+ + e^T v^- \tag{4.5.}$$

$$\text{öyle ki } Wy + Iv^+ - Iv^- = h_k - T_k x^v, \tag{4.6.}$$

$$y \geq 0,\ v^+ \geq 0,\ v^- \geq 0$$

programını çöz. Bu durumda, (4.3.) tipinde bir kısıt üretmek amacıyla (*uygunluk kesmesi*) σ^v simpleks çarpanlarla eşlendirilsin ve

$$D_{r+1} = (\sigma^v)^T T_k \tag{4.7.}$$

ve

$$d_{r+1} = (\sigma^v)^T h_k \tag{4.8.}$$

olarak tanımlansın. $r=r+1$ olsun, kısıtlar kümesi (4.3.)'e ekle ve *Adım1*'e dön. Tüm k için, $w'=0$, *Adım 3*'e git.

Adım 3. $k=1,...,K$ için,

$$\min w = q_k^T y \tag{4.9.}$$

$$Wy = h_k - T_k x^v$$

$$y \geq 0$$

programını çöz. π_k^v, (4.9.) tipindeki Problem k'nın optimal çözümleriyle eşleştirilen simpleks çarpanları olsun.

$$E_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k . (\pi_k^v)^T T_k \tag{4.10.}$$

ve

$$e_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k . (\pi_k^v)^T h_k \tag{4.11.}$$

olarak tanımlayalım. $w^v = e_{s+1} - E_{s+1} x^v$ olsun. $\theta^v \geq w^v$ ise, dur; x^v bir optimal çözümdür. Aksi halde, $s=s+1$ alarak, (4.4.) kısıtlar kümesine ekle ve *Adım 1*'e dön.

Yukarıdaki yöntem aslında Q'nun bir dışsal lineerleştirmesini kullanarak genel formülasyonun bir yaklaşımını çözme işleminden oluşmaktadır. İki kısıt tipi ardışık olarak eklenmektedir. Bunlardan ilki, $\{x|Q(x)<+\infty\}$'i ele alan (4.3.) *uygunluk kesme*leridir. İkincisi ise, Q'nun sonlu tanım kümesindeki lineer yaklaşımları olan *optimallik kesmeleri*dir.

Örnek 3.

$$Q(x,\xi)=\begin{cases}\xi-x, & x\le\xi \text{ ise}\\ x-\xi, & x\rangle\xi \text{ ise}\end{cases}$$

olsun ve $\tilde{\xi}$ rassal vektörü, 1/3 olasılığıyla 1,2 ve 4 değerlerini alsın. $c=0$ ve $0\le x\le 10$ olduğunu varsayalım.

Şekil 15'de $Q(x,1)$, $Q(x,2)$, $Q(x,4)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları görülmektedir. Bu söz konusu fonksiyonların her biri polihedraldir. Birinci aşama amacı $c^T x$ sıfır olduğundan, $Q(x)$ de $z(x)$ gibi minimize edilmelidir. Başlangıç noktasının $x^1=0$ olduğunu varsayalım. L-şekil yöntemi için iterasyonlar dizisi aşağıdaki gibidir.

İterasyon 1.

x^1 optimal değil, kesmeyi

$$\theta\ge 7/3-x$$

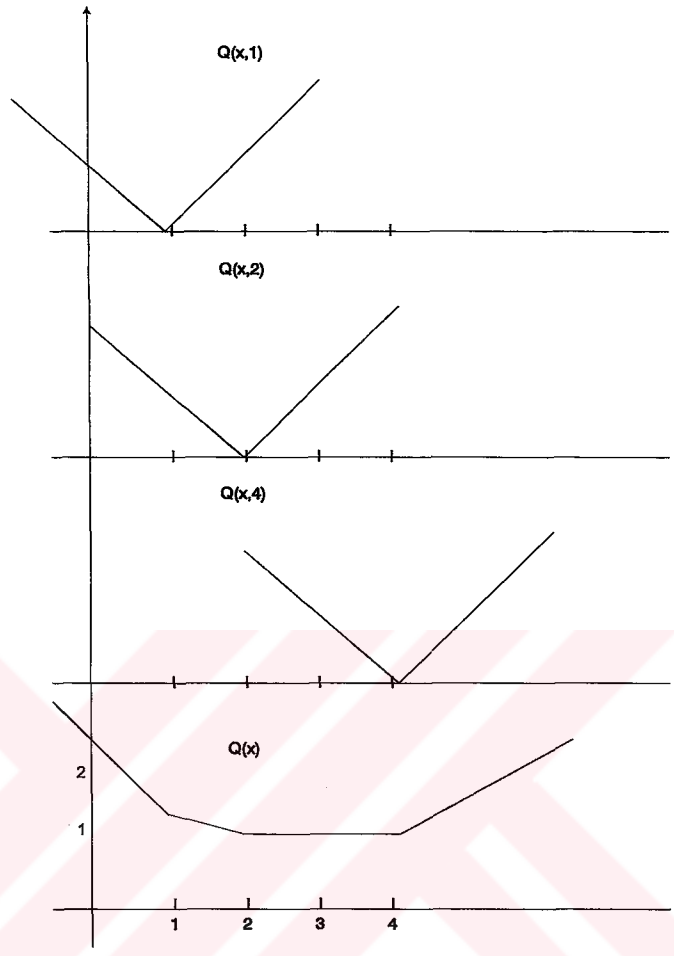
olacak şekilde yönlendir.

İterasyon 2.

$x^2=10$, $\theta^2=-23/3$ optimal değil, kesmeyi

$$\theta\ge x-7/3$$

olacak şekilde yönlendir.



Şekil 15. Örnek 4 İçin Telafi Fonksiyonları

İterasyon 3.

$x^3 = 7/3$, $\theta^3 = 0$ optimal değil, kesmeyi

$$\theta \geq \frac{x+1}{3}$$

olacak şekilde yönlendir.

İterasyon 4.

$x^4 = 1{,}5$, $\theta^4 = 2{,}5/3$ optimal değil, kesmeyi

$$\theta \geq \frac{5-x}{3}$$

olacak şekilde yönlendir.

İterasyon 5.

$x^5 = 2$, $\theta^5 = 1$ optimal sonuçtur.

Adım 3'te tanımlanan (4.4.) tipindeki kısıtların $Q(x)$'in destek hiperdüzlemleri olduğunu ve algoritmanın optimal bir sonuca yakınsadığını örnek üzerinden göstermiş olduk[11].

$K_1 = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ rassal vektörün özel gerçeklenmelerinden bağımsız sabit kısıtların oluşturduğu küme ve $K_2 = \{x | Q(x) < \infty\}$ ikinci aşama uygunluk kümesi olmak üzere, iki aşamalı stokastik programın deterministik eşdeğeri,

$$\begin{aligned} &\min\ z(x) = c^T x + Q(x) \\ &\text{öyle ki}\ \ x \in K_1 \cap K_2 \end{aligned} \qquad (4.12.)$$

biçiminde ifade edilebilir[12]. (4.12.) programının çözümü,

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x + \theta \\ &\text{öyle ki}\ Q(x) \leq \theta \\ &x \in K_1 \cap K_2 \end{aligned} \qquad (4.13.)$$

probleminin çözümüne denktir. Burada,

$$Q(x) = E_\omega Q(x, \xi(\omega))$$

ve

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\}$$

---

[11] Birge, **a.g.e.,** ss. 157-160.
[12] **A.e.,** s. 86.

şeklindedir.

Dolayısıyla, (4.12) veya (4.13.)'ün çözümü için sonlu olarak yakınsayan bir algoritma araştırmalıyız.

Yukarıda verilen L-şekil algoritmasının üçüncü adımındaki (4.9.) problemi $k=1,...,K$ için çözülerek $\pi_k^\nu;\ k=1,...,K$ optimal simpleks çarpanları elde edilmektedir. Doğrusal programlamadaki dualiteden, her k için,

$$Q(x^\nu,\xi_k)=(\pi_k^\nu)^T(h_k-T_kx^\nu)$$

elde edilir. Ayrıca, $Q(x,\xi_k)$ 'nin konveksliği ile alt-gradyan eşitsizliğinden,

$$Q(x,\xi_k)\geq(\pi_k^\nu)^T h_k-(\pi_k^\nu)^T T_k x$$

ifadesine ulaşılır. Bu iki ilişkinin beklenen değerlerini alarak,

$$Q(x^\nu)=E(\pi^\nu)^T(h-Tx^\nu)=\sum_{k=1}^{K}p_k.(\pi_k^\nu)^T(h_k-T_kx^\nu)$$

ve

$$Q(x)\geq E(\pi^\nu)^T(h-Tx)=\sum_{k=1}^{K}p_k.(\pi_k^\nu)^T h_k-\left(\sum_{k=1}^{K}p_k(\pi_k^\nu)^T T_k\right)x$$

ifadelerini elde ederiz. $\theta\geq Q(x)$ ile ve sadece (4.4.)'e karşılık gelen $\theta\geq E(\pi^\nu)^T(h-Tx)$ ise (x,θ) ikilisi (4.13.) için *uygun*dur.

Diğer taraftan, (x^ν,θ^ν) ikilisi (4.13.) için *optimal*dir ve $Q(x^\nu)=\theta^\nu$'dür. Çünkü, $\theta\geq Q(x)$ haricinde θ, (4.13.)'de sınırlandırılmamıştır. Bu, *Adım 3*'teki yok etme kriterini doğrulayan $Q(x^\nu)=E(\pi^\nu)^T(h-Tx^\nu)$ iken olmaktadır. Bu demektir ki, her iterasyonda $\theta\geq Q(x^\nu)$ veya $\theta\langle Q(x^\nu)$ olmaktadır. Son durumda, (4.4.)'te

tanımlanan optimallik kesmelerinin hiç biri $\theta \geq Q(x^{\nu})$ olmasını yeterince zorlamamaktadır. Bu nedenle, (4.4.)'teki gibi bir uygun kısıt üretmek amacıyla x^{ν}'de yeni π_k^{ν} çarpanları kümesi tanımlanacaktır. Algoritmanın sonlu yakınsaklığı, π_k çarpanlarının sadece K'nın sonlu sayıda farklı kombinasyonunun bulunmasına dayanmaktadır. Çünkü, her biri (4.9)'un sonlu farklı temellerinden birisine karşılık gelmektedir.

Şimdi de, $x \in K_2$ olduğunu garantilemek için (4.3.) kısıtlarının en çok sonlu sayıda olduğunu göstermeliyiz. (4.3.) kısıtları algoritmanın ikinci adımında üretilmektedir.

Tanım gereği, $x \in K_2$,

$$x \in \{x \mid k = 1,...,K \text{ için } \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } Wy = h_k - T_k x\}$$

ifadesine denktir. Daha önce belirtilen notasyonlar gereğince, bu denklik,

$$h_k - T_k x \in pos\, W, k = 1,...,K$$

olarak yazılabilir. *Adım 2*'de, alt problem (4.5.), $k = 1,...,K$ için $h_k - T_k x^{\nu}$'nin $pos\, W$'ya ait olup olmadığını test etmektedir. Değilse, bazı $k = 1,...,K$ için $h_k - T_k x^{\nu} \notin pos\, W$'dir. Dolayısıyla, $h_k - T_k x^{\nu}$ ve $pos\, W$'yi ayıran bir hiperdüzlem olmalıdır. Bu hiperdüzlem, tüm $t \in pos\, W$ ve $\sigma^T (h_k - T_k x^{\nu}) > 0$ için $\sigma^T t \leq 0$ eşitsizliğini sağlamalıdır. *Adım 2*'de, çözülen alt problem (4.5.)'in simpleks çarpanlarının σ^{ν} değeri için σ değerlerinin eldesiyle bu hiperdüzlem oluşturulur.

Dualiteden dolayı, $(\sigma^{\nu})^T (h_k - T_k x^{\nu}) > 0$ gibi w' tam pozitif olmaktadır. Ayrıca, $(\sigma^{\nu})^T W \leq 0$ eşitsizliği sağlanmaktadır çünkü, σ^{ν} bir optimal simpleks çarpandır ve optimumda y ile eşleştirilen indirgenmiş maliyetler negatif olmamalıdır.

Dolayısıyla, σ^{ν} istenen özelliğe sahiptir. $x \in K_2$ olması için *gerek koşul* $(\sigma^{\nu})^T (h_k - T_k x) \leq 0$'dir. (4.3.) tipindeki kısıtlardan en çok sonlu sayıda bulunmaktadır çünkü, *Adım 2*'deki (4.5.) problemine optimal temellerin sayısı sonludur. $\tilde{\xi}$ bir sonlu rassal değişken ise, K_2 polihedraldir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 6. $\tilde{\xi}$ sonlu bir rassal değişken iken, L-şekil algoritması sonlu olarak varsa bir optimal sonuca yakınsar veya problem (4.12.)'nin uygun olmadığını ispatlar.

Örnek 4. Uygunluk kesmelerini göstermek için Örnek 2'deki problemi ele alalım.

$$\min \; 3x_1 + 2x_2 - E_{\tilde{\xi}} \min(15y_1 + 12y_2)$$
$$3y_1 + 2y_2 \leq x_1,$$
$$2y_1 + 5y_2 \leq x_2,$$
$$0{,}8\tilde{\xi}_1 \leq y_1 \leq \tilde{\xi}_1,$$
$$0{,}8\tilde{\xi}_2 \leq y_2 \leq \tilde{\xi}_2$$
$$x, y \geq 0,$$

ve $\tilde{\xi}_1 = 4$ veya 6, $\tilde{\xi}_2 = 4$ veya 8, birbirlerinden bağımsız ve her birinin olasılığı ½ ve $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)^T$'dir.

Öncelikle rassal vektörün gerçeklenmesinin $(6,8)^T$ olduğunu varsayalım. Bu şekilde değilse, bir çok kesmeler gerekecektir. Başlangıç noktası, $x^0 = (0,0)^T$ olsun ve ilk uygunluk kesmesi $3x_1 + x_2 \geq 123.2$ üretilir. Bu nedenle, ilk aşama çözümü $x^1 = (41.067,0)^T$ olur. İkinci uygunluk kesmesi $x_2 \geq 22.4$ elde edilir. İlk aşama çözümü $x^2 = (33.6,22.4)^T$ olur. Üçüncü uygunluk kesmesi $x_2 \geq 41.6$ üretilir. Uygun ikinci aşama kararlarına imkan veren ilk aşama çözümü olarak,

$$x^3 = (27.2, 41.6)^T$$

elde edilir.

Bu örnek L-şekil yönteminin salt ikinci adımının uygulamasıyla uygunluk kesmelerinin üretilmesinin etkin olamayabileceğini göstermektedir. Gerçekte, probleme bir bakış şu gerçeği açığa çıkarmaktadır; uygunluk için $\tilde{\xi}_1 = 6$ ve $\tilde{\xi}_2 = 8$ iken, en azından $y_1 \geq 4.8$ ve $y_2 \geq 6.4$ olmalıdır, bu da $x_1 \geq 27.2$ ve $x_2 \geq 41.6$ olmasını gerektirmektedir. Bu nedenle başlangıç problemi olarak,

$$\min 3x_1 + 2x_2 + Q(x)$$
$$\text{öyle ki } x_1 \geq 27.2$$
$$x_2 \geq 41.6$$

ele alınabilir. Bu problemin uygun olduğu görülmektedir. Bu tür durumlara pratikte sık olarak rastlanmaktadır.

4.1.2.1.1.Uygunluk

Daha önceki kesimde belirtildiği gibi, L-şekil yönteminin *2.Adım*'ı ilk aşama kararı $x \in K_1$'in aynı zamanda ikinci aşama için uygun olup olmadığını ele almaktadır. İkinci aşamanın uygun olması demek $x \in K_2$ olması demektir. Bu adım bir hayli zaman almaktadır. Bu, (4.5.)-(4.6.) biçimindeki problemlerin K faza kadar ayrı ayrı çözümünü gerektirmektedir. Söz konusu süreç ardışık aday ilk aşama çözümleri için bir kaç kez tekrarlanabilir.

Bazı durumlarda, *Adım 2* basitleştirilebilir. İlk durum, ikinci aşamanın *her zaman* uygun olması durumudur. Stokastik program, bu durumda, daha önceden de değinildiği gibi *tam telafi* olarak adlandırılmaktadır.

İkinci durum ise, ikinci aşamanın uygunluğunu garantilemek için bazı kısıtlar türetmektir. Bu kısıtlar bazen de *uyarılmış (induced) kısıtlar* olarak adlandırılır. Model iyi anlaşıldığında söz konusu kısıtlar elde edilebilir. Örnek 4'teki ikinci aşama programına bakıldığında uygunluk için koşullar açığa çıkmaktadır. $x_1 \geq 27.2$ ve $x_2 \geq 41.6$ uyarılmış kısıtlara örnektir. Bu kısıtların devreye girmesiyle, L-şekil algoritmasının *2.Adım*'ı devre dışı bırakılabilmektedir.

Üçüncü durum ise, *Adım* 2'nin tüm $k = 1,...,K$ için değil, sadece bir h_k için gerekli olması durumudur. T 'nin deterministik olduğunu ve W'yu $t \geq 0$, $t \in pos\,W$ olacak şekilde dönüştürebileceğimizi varsayalım. Bu eşitsizlikler için bir zorluk çıkarmamaktadır. Sadece, aylak değişkenleri pozitif bir katsayıyla yazmak gerecektir. Örnek 3 için W'nun aşağıdaki gibi yazımı isteneni sağlamaktadır.

$$
\begin{aligned}
3y_1 + 2y_2 + w_1 &= x_1,\\
2y_1 + 5y_2 + w_2 &= x_2,\\
y_1 + w_3 &= d_1,\\
-y_1 + w_4 &= -0.8d_1,\\
y_2 + w_5 &= d_2,\\
-y_2 + w_6 &= -0.8d_2.
\end{aligned}
$$

Herhangi $t \geq 0$ için, ikinci aşamanın uygun çözüme sahip olması için $w = t$ almak yeterlidir. Bazı alt limitin,

$$b(x) \leq h_k - T_k x, k = 1,...,K,$$

var olduğunu varsayalım. x'in uygun olması için *yeter koşul* lineer sistem $Wy = b(x), y \geq 0$ 'in uygun olmasıdır. Gerçekte, $Wy = b(x), y \geq 0$ uygun ise, herhangi bir $b'(x) \geq b(x)$ için W'nun oluşturulmasıyla $Wy = b'(x), y \geq 0$ uygun olmaktadır.

4.1.2.1.2.Çoklu Kesme Versiyonu

L-şekil yönteminin *3. Adım*ında, ikinci aşama programının K gerçeklenmelerinin tümü kendi optimal simpleks çarpanlarını elde etmek amacıyla optimize edilirler. Bu çarpanlar, daha sonra, bir (4.4.) kesmesini üretmek için (4.10.) ve (4.11.)'de birikirler. Stokastik programların yapısı bir kesme yerine birkaç kesmenin yerleştirilmesine izin vermektedir. Çoklu kesme versiyonunda, ikinci aşamada gerçeklenme başına bir kesme yerleştirilmektedir. Her iterasyonda çoklu kesmeler eklemek, bir içsel lineerleştirme algoritmasının ana programında birkaç sütun içermeye karşılık gelmektedir. Çoklu kesme algoritması aşağıda verilmiştir.

Çoklu Kesme L-Şekil Algoritması

Adım 0. $k = 0,...,K$ için $r = v = 0$ ve $s_k = 0$ olsun.

Adım 1. $v = v + 1$ olsun. Düzenlenmiş aşağıdaki ana programı çöz.

$$\min c^T x + \sum_{k=1}^{K} \theta_k \tag{4.14.}$$

$$\text{öyle ki } Ax = b \tag{4.15.}$$

$$D_\lambda x \geq d_\lambda,\ \lambda = 1,...,r \tag{4.16.}$$

$$E_{\lambda(k)} x + \theta_k \geq e_{\lambda(k)},\ \lambda(k) = 1,...,s(k) \tag{4.17.}$$

$$x \geq 0$$

(4.14.)-(4.17.)'nin bir optimal çözümü $(x^v, \theta_1^v, ..., \theta_K^v)$ olsun. Bazı k için (4.17.) kısıtı mevcut değil ise, $\theta_k^v, -\infty$'a eşitlenir ve x^v'nün hesabında dikkate alınmaz.

Adım 2. Önceki gibi.

Adım 3. $k = 0,...,K$ için, doğrusal program (4.9.)'u çöz. π_k^v, problem k'nın optimal çözümü ile eşleştirilen simpleks çarpanlar olsun.

$$\theta_k^v < p_k(\pi_k^v)^T(h_k - T_k x^v) \tag{4.18.}$$

ise,

$$E_{s(k)+1} = p_k(\pi_k^v)^T T_k \tag{4.19.}$$

$$e_{s(k)+1} = p_k(\pi_k^v)^T h_k \tag{4.20.}$$

olarak tanımla ve $s(k) = s(k)+1$ olsun. Herhangi $k = 0,...,K$ için, (4.18.) sağlamazsa, dur; x^v bir optimal çözümdür. Aksi halde, *Adım 1*'e dön.

Örnek 5. Örnek 4'teki model üzerinde çoklu kesme L-şekil yöntemini gösterelim. $x^1 = 0$ 'den başlarsak, iterasyonlar aşağıdaki gibi olur.

İterasyon 1.

$x^1 = 0$ optimal değil, kesmeyi

$$\theta_1 \geq \frac{1-x}{3};\ \theta_2 \geq \frac{2-x}{3};\ \theta_3 \geq \frac{4-x}{3}$$

olacak şekilde yönlendir.

İterasyon 2.

$x^2 = 10$, $\theta_1^2 = -3$, $\theta_2^2 = -8/3$, $\theta_3^2 = -2$ optimal değil,

kesmeyi

$$\theta_1 \geq \frac{x-1}{3};\ \theta_2 \geq \frac{x-2}{3};\ \theta_3 \geq \frac{x-4}{3}$$

olacak şekilde yönlendir.

İterasyon 3.

$x^3 = 10$, $\theta_1^3 = 1/3$, $\theta_2^3 = 0$, $\theta_3^3 = 2/3$ optimal çözümdür.

Her iki algoritmada da *Adım 1*'e dönüşler arasında yapılan işlemlerden oluşan iterasyonu *ana iterasyon* olarak tanımlayalım. Çoklu kesmeleri yönlendirerek, tekli

kesme L-şekil yöntemiyle dört ana iterasyon yerine, iki ana iterasyonla bir çözüm bulunmaktadır.

Kesmelerin dağıtılması ile, ilk aşamaya daha fazla bilgi verilmektedir. Ana iterasyon sayısının tekli kesme yöntemindekine göre daha az olması beklenmektedir. Çünkü iki yöntem aynı yolu izlememektedir. Bazen şans eseri olarak tekli L-şekil algoritması daha iyisini yapabilmektedir.

Genel olarak, ana iterasyon sayısı indirgenebilmektedir. Bu daha büyük bir ilk aşama programına katlanılarak yapılmaktadır. Çünkü bir çok kesmeler eklenmektedir. Daha az ana iterasyon ile daha büyük ilk aşama programları arasındaki denge probleme bağlı olarak değişmektedir. Genel bir kural olarak söylemek gerekirse, gerçeklenme sayısı K, ilk aşama kısıt sayısı m_1'den anlamlı olarak büyük değilse, çoklu kesme yaklaşımının daha etkin olması beklenmektedir. Ayrıca, gerçeklenmelerin alt kümeleri daha küçük bir kesmeler kombinasyonu oluşturmak için gruplanırsa bazı hibrit yaklaşımlar da uygulanabilmektedir[13].

4.1.2.2.İçsel Lineerleştirme Yöntemleri

Bir *dışsal lineerleştirme* veya *kesme üretme* yöntemine doğrudan alternatif yöntem bir *içsel lineerleştirme* veya *sütun üretme* yöntemidir. Aslında bu yöntem, stokastik lineer programların çözümü için önerilen *ilk* yöntemdir. Söz konusu yöntem Dantzig ve Madansky tarafından geliştirilmiştir. Şekil 14'de görülen dual yapı Dantzig-Wolfe ayrıştırmasına uymaktadır. Bu yaklaşımı L-şekil yönteminden dual alarak türetebiliriz.

L-şekil algoritmasındaki (4.2.)-(4.4.)'ün aşağıdaki dual lineer programını ele alalım.

[13] **A.e.,** ss. 161-167.

$$\max \zeta = \rho^T b + \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_\lambda d_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{s} \pi_\lambda e_\lambda \qquad (4.21.)$$

$$\text{öyle ki} \quad \rho^T A + \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_\lambda D_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{s} \pi_\lambda E_\lambda \le c^T \qquad (4.22.)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \pi_\lambda = 1, \sigma_\lambda \ge 0, \lambda = 1,...,r, \pi_\lambda \ge 0, \lambda = 1,...,s \qquad (4.23.)$$

(4.21)-(4.23.)'deki doğrusal program, alt problemlerin duallerinin uç noktalarının beklenen değerlerlerindeki π_λ çarpanlarının, alt problemlerin duallerinin ve diğer ayrık duraksama yönlerinin pozitif kombinasyonlarınca üretilemeyen *uç ışınlardaki (extreme rays)* veya ***duraksama yönlerindeki (recession directions)*** σ_λ çarpanlarını içermektedir. Bunu görmek için, (4.22.) kısıtındaki bir x^ν çarpanını bulmak amacıyla (4.21)-(4.23.)'ün çözüldüğünü varsayalım. Şimdi de, (4.9.)'un aşağıdaki dualini ele alalım;

$$\max w = \pi^T (h_k - T_k x^\nu) \quad \text{öyle ki} \quad \pi^T W \le q^T \qquad (4.24.)$$

(4.24.) herhangi bir k için sınırsız ise, bazı σ^ν olmalıdır öyle ki $\sigma^{\nu T} W \le 0$ ve $\sigma^{\nu T}(h_k - T_k x^\nu) \rangle 0$ ya da (4.5.)-(4.6.) pozitif bir değerle bir uygun dual çözüme (ve böylece optimal primal çözüme) sahiptir. Dolayısıyla, L-şekil algoritmasının *2.adım*'ı herhangi k için (4.24)'ün sınırsız olup olmadığının araştırılmasına denktir. Bu durumda, L-şekil yöntemindeki (4.7.) ve (4.8.)'deki D_{r+1} ve d_{r+1} oluşturalım ve (4.21.)-(4.23.)'e ekleyelim.

(4.24.) uygun değilse, stokastik program iyi formüle edilmemiştir. (4.24.)'nün tüm k için bir sonlu optimal değere sahip olduğu durumu ele alalım. L-şekil yönteminde, (4.9.) tüm k için çözülebilir ise, E_{s+1} ve e_{s+1} oluşturulup (4.2.)-(4.4.)'e ekleniyordu. İçsel lineerleştirme yönteminde, yine (4.10.) ve (4.11.) kullanılarak E_{s+1} ve e_{s+1} oluşturulur ve (4.21.)-(4.23.)'e eklenir.

L-şekil algoritmasının ilk adımından son adımına kadar dualler çözülürken aslında ana problem olarak (4.21.)-(4.23.) ve alt problem olarak (4.24.) çözülür. Sistematik olarak bu yöntem aşağıda verilmiştir.

İçsel Lineerleştirme Algoritması

Adım 0. $r = s = \nu = 0$ olsun.

Adım 1. $\nu = \nu + 1$ olsun ve (4.21.)-(4.23.) doğrusal programını çöz. $(\rho^{\nu}, \sigma^{\nu}, \pi^{\nu})$ çözüm ve (x^{ν}, θ^{ν}) dual çözüm olsun.

Adım 2. $k = 1,...,K$ için, (4.24.)'i çöz. Herhangi (4.24.) uygun olmayan çözümü bulunursa dur ve formülasyonu değerlendir. Herhangi k için uç ışın σ^{ν} ile bir sınırsız çözüm bulunur ise, yeni sütunlar $d_{r+1} = (\sigma^{\nu})^T h_k$, $D_{r+1} = (\sigma^{\nu})^T T_k$ oluşturulur, $r = r + 1$ olsun ve *Adım 1*'e dön.

Tüm (4.24.) problemleri çözülebilir ise, (4.10.) ve (4.11.)'deki gibi yeni sütunlar E_{s+1} ve e_{s+1} oluştur. $e_{s+1} - E_{s+1}x^{\nu} - \theta^{\nu} \leq 0$ ise, dur; $(\rho^{\nu}, \sigma^{\nu}, \pi^{\nu})$ ve (x^{ν}, θ^{ν}) orijinal problem (4.2.)'de optimaldirler.

$e_{s+1} - E_{s+1}x^{\nu} - \theta^{\nu} \rangle 0$ ise, $s = s + 1$ olsun ve *Adım 1*'e dön.

Açık olarak görülmektedir ki, içsel lineerleştirme yöntemi, L-şekil yöntemiyle aynı adımları izlemektedir. Ancak tek fark, içsel lineerleştirme yönteminde, problemlerin primalleri yerine dualleri çözülmektedir. Dolayısıyla, yakınsaklık doğrudan L-şekil yönteminden gelmektedir. Bu yaklaşımı doğrudan Dantzig-Wolfe ayrıştırmasında da görmekteyiz. (4.21.)-(4.23), (4.2.)'deki temel L-şekil probleminin bir içsel doğrusallaştırılmasıdır ve söz konusu doğrusallaştırmaya alt problem (4.24.)'ün ürettiği yeni uç noktalar ve ışınlar eklenmektedir.

Bir çok problemde olduğu gibi, $n_1 \rangle\rangle m_1$ ise, primal versiyon daha küçük temel matrislere sahiptir. Primal verisyonda en çok $m_1 + m_2$ mertebesinde iken dualde $n_1 x n_1$ temele sahiptir. Bu nedenle, genellikle L-şekil uygulaması tercih edilmektedir. Bununla birlikte, içsel lineerleştirme doğrudan primal forma uygulanabilmektedir. Ancak bunun için, T'nin sabit olduğu varsayılmalıdır. Şöyle ki,

$$\min z = c^T x + \Psi(\chi)$$
$$\text{öyle ki } Ax = b$$
$$Tx - \chi = 0$$
$$x \geq 0$$

Burada,

$$\Psi(\chi) = E_\omega \psi(\chi, \xi(\omega)) \text{ ve } \psi(\chi, \xi(\omega)) = \min \left\{ q(\omega)^T y \middle| Wy = h(\omega) - \chi, y \geq 0 \right\}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu formda önemli nokta, T 'nin sabit tutulması fakat q ve h'nın ω'nın fonksiyonu olmaya devam edebilmesidir. Bu nedenden dolayı, Ψ telafi fonksiyonu olarak kullanılabilmektedir.

Bu durumda, $\Psi(\chi)$ fonksiyonunun bir içsel lineerleştirmesini genelleştirilmiş programlama yaklaşımını kullanarak oluşturabiliriz. Buradaki temel fikir, algoritmanın her iterasyonunda seçilen $\Psi(\chi^\lambda)$ noktalarının *konveks kabuğu (convex hull)* ile $\Psi(\chi)$ fonksiyonunun yer değiştirmesidir. Her iterasyon, Ψ için doğrusallık bölgesinin polihedral olan yeni bir uç noktasını üretmektedir. Dolayısıyla, sonlu yakınsaklık gerçeklenmelerin sonlu sayılarıyla garantilenmektedir. Söz konusu iki aşamalı stokastik programlar için genelleştirilmiş programlama algoritmasından burada söz edilmeyecektir[14].

[14] **A.e., ss. 174-176.**

4.1.2.3.Temel Ayırma Yöntemleri

(4.1.) ve dualindeki matrisler etkin özel *temel ayırmaya (basis factorization)* izin verecek şekilde özel bir yapıya sahiptir. Bu durumda, problemin *geniş formu* uç nokta ya da iç nokta yöntemleriyle daha etkin olarak çözülebilir.

Aynı fikirler dual ya da primal problemlere uygulanmasına karşın, uç nokta yöntemleri için temel ayırma genellikle dual yapı olarak ele alınmaktadır. Primal yaklaşımı burada tercih edeceğiz çünkü, genellikle, orijinal kısıt matrisinde sütun sayısı $n_1 + Kn_2$, satır sayısı $m_1 + Km_2$'den daha büyüktür. Bu durumda, bir temel çözüm olarak $(x_{I_0}, x_{I_1}, ..., x_{I_K}, y_{J_1}, ..., y_{J_K})$ yazabiliriz. Burada, $I_j, j = 0,...,K$ ve $J_l, l = 1,...,K$ her iterasyonda değişebilen indeks kümeleridir. Kısıtlar bu indeks kümelerine göre aşağıdaki temeli oluşturacak şekilde bölümlendirilir.

$$B = \begin{pmatrix} A_{I_0} & A_{I_1} & \Lambda & A_{I_K} & & & \\ T_{1,I_0} & T_{1,I_1} & \Lambda & T_{1,I_K} & W_{J_1} & & \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & W_{J_k} & \\ T_{K,I_0} & T_{K,I_1} & \Lambda & T_{K,I_K} & & & W_{J_K} \end{pmatrix} \qquad (4.25.)$$

Temel ayırmadaki ana gözlem şudur ki B'nin satırlarını etkin bir forma erişmek için değiştirebiliriz. Bu aşağıdaki önermenin bir sonucudur.

Önerme 8. Problem (4.1.) için bir temel matris B, bir satır değiştirme işlemi P'den sonra,

$$B' = PB = \begin{pmatrix} D & C \\ F & L \end{pmatrix} \qquad (4.26.)$$

ifadesine denktir. Burada, D en çok $n_1 x n_1$ boyutlu tersi alınabilen kare matris ve L, her biri en çok $m_2 x m_2$ boyutlu tersi alınabilir K bloğun tersi alınabilen bir matrisidir.

İspat. (4.25.)'teki yer alan B'deki değişmeyi yapabiliriz. Öncelikle, B'nin tekil olmaması için $A_{I_0},...,A_{I_K}$'deki sütun sayısının en çok n_1 olacağını görmeliyiz. B tersi alınabilir ise, bu sütunlardan tekil olmayan bir alt matris oluşturabilmeliyiz. Her alt problem $j=1,...,K$'den satırları T_{ku,I_j} ve $A_{I_0},...,A_{I_K}$ olan söz konusu matrisin oluştuğunu varsayalım. Bu durumda,

$$D=\begin{pmatrix} A_{I_0} & A_{I_1} & \Lambda & A_{I_K} \\ T_{1u,I_0} & T_{1u,I_1} & \Lambda & T_{1u,I_K} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ T_{Ku,I_0} & T_{Ku,I_1} & \Lambda & T_{Ku,I_K} \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla,

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ W_{1u,J_1} & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{O} & 0 & \Lambda & 0 \\ \mathrm{M} & 0 & W_{ku,J_k} & 0 & \mathrm{M} \\ 0 & \Lambda & 0 & \mathrm{O} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & W_{ku,J_K} \end{pmatrix}$$

olacaktır. Sonra, T_{k,I_j}'nin geriye kalan satırları T_{kl,I_j}'dir. Daha sonra,

$$F=\begin{pmatrix} T_{1l,I_0} & T_{1l,I_1} & \Lambda & T_{1l,I_K} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ T_{Kl,I_0} & T_{Kl,I_1} & \Lambda & T_{Kl,I_K} \end{pmatrix}$$

ve

$$L=\begin{pmatrix} W_{1l,J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda\, W_{kl,J_k}\, \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & W_{Kl,J_K} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Çünkü, D'nin rankı en az m_1, L'deki her W_{kl,J_k} 'nin rankı en çok m_2 'dir. Böylece sonuca ulaşılmaktadır.

Bu sonuçtan dolayı, $(x_{I_0}, x_{I_1}, ..., x_{I_K}, y_{J_1}, ..., y_{J_K})$'nin temel değerlerini bulmak için aşağıdaki (4.20.) denklemlerini çözen (x_B, y_B) ileri dönüşümünü yazalım.

$$D x_B + C y_B = b'; \quad F x_B + L y_B = h' \tag{4.27.}$$

Burada, $b' = \begin{pmatrix} b \\ h_u \end{pmatrix}$, $h' = h_l$, h_u D'deki T 'nin satırlarının sağ taraf sabitlerine karşılık gelmektedir ve h_l, F 'deki satırların bileşenlerine karşılık gelmektedir.

Önemli bir nokta da L'nin tersi alınabilir olduğudur. Dolayısıyla,

$$y_B = L^{-1}(h' - F x_B) \tag{4.28.}$$

yazılabilir. İlk denklem sisteminde yerine koyarsak,

$$(D - CL^{-1}F)x_B = b' - CL^{-1}h' \tag{4.29.}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $L^{-1}F$ ve $L^{-1}h'$ 'nin sütunları için çözmek amacıyla L'yi kullanalım. x_B ve y_B 'yi çözmek için, çalışan bir temel $(D - CL^{-1}F)$ oluşturalım. için, x_B 'yi $L^{-1}F$ ile çarpalım ve $L^{-1}h'$ 'dan çıkaralım. Çalışmanın çoğu L'deki kare blok matrisleri içerdiğinden, ayrıştırma işlemindeki büyük bir çabadan kurtulunabilir. Bu yapının avantajını kullanarak geri dönüşüm yapılabilir. Simpleks yöntemindeki çıkan sütunu bulmak da (4.28.) ve (4.29.)'da yapılan işlemlerle aynıdır.

Temel Ayırma Simpleks Algoritması

Adım 0. (4.1.) için bir başlangıç temel uygun çözümü $(x^0_{B^0}, y^0_{B^{0'}}) = (x^0_{I^0_0},...,x^0_{I^0_K}, y^0_{J^0_0},...,y^0_{J^0_K})$ olsun. Burada, başlangıç indisleri, $B^0 = \{\beta^0_1,...,\beta^0_{l^0}\} = \{I^0_i, i = 0,...,K\}$ ve $B^{0'} = \{\beta^{0'}_{1,1},...,\beta^{0'}_{1,l'_1},...,\beta^{0'}_{K,1},...,\beta^{0'}_{K,l'_K}\} =$ $J^0_j, j = 1,...,K$'ye göre bölümlendirilmektedir. Başlangıç permütasyon matrisi P^0 ve $\nu = 0$ olsun.

Adım 1. $\hat{q}_{k,i} = p_k q_{k,i}$ olmak üzere $(\rho^T, \pi^T)\begin{pmatrix} D & C \\ F & L \end{pmatrix} = (c^T_{B^0}, \hat{q}^T_{\beta^0})$'yi çöz.

Adım 2. $\bar{c}_s = \min_j \{c_j - (\rho^T | \pi^T)P^\nu (A^T_{\cdot j} | T^T_{1,\cdot j} | ... | T^T_{K,\cdot j})^T\}$ ve $\bar{q}_{k',s'} =$ $\min_{j,k} \{p_k q_{k,j} - (\rho^T | \pi^T)P^\nu (0...W_{k,\cdot j}...0)\}$'yi bul. $\bar{c}_s \geq 0$ ve $\bar{q}_{k',s'} \geq 0$ ise, dur; mevcut çözüm optimaldir. Aksi halde, $\bar{c}_s < \bar{q}_{k',s'}$ ise *Adım 4*'e git. $\bar{c}_s \geq \bar{q}_{k',s'}$ ise, *Adım 3*'e git.

Adım 3. Giren sütun için çöz, $\begin{pmatrix} D & C \\ F & L \end{pmatrix}\overline{W}_{k',\cdot s'} = P^\nu (0...W^T_{k',s'}...0)^T$.

$$\theta = x^\nu_{B^\nu(r)} / \overline{W}_{k',rs'} = \min_{\overline{W}_{k',is'} > 0, 1 \leq i \leq l^\nu} \{x^\nu_{B^\nu(i)} / \overline{W}_{k',is'}\} \qquad (4.30.)$$

ve

$$\theta' = y^\nu_{B^{\nu'}(r')} / \overline{W}_{k',r's'} = \min_{\overline{W}_{k',is'} > 0, l^\nu + 1 \leq i \leq m_1 + Km_2} \{y^\nu_{B^{\nu'}(i)} / \overline{W}_{k',is'}\} \qquad (4.31.)$$

olsun. (4.30.) veya (4.31.)'de minimuma erişilmez ise, dur; problem sınırsızdır. Aksi halde, $\theta < \theta'$ ise, *Adım 5*'e git. $\theta \geq \theta'$ ise, *Adım 6*'ya git.

Adım 4. Giren sütun için çöz, $\begin{pmatrix} D & C \\ F & L \end{pmatrix}\overline{W}_{\cdot s'} = P^\nu (A^T_{\cdot s} | T^T_{1,\cdot s} | ... | T^T_{K,\cdot s})^T$

$$\theta = x^\nu_{B^\nu(r)} / \overline{A}_{rs} = \min_{\overline{A}_{is} > 0, 1 \leq i \leq l^\nu} \{x^\nu_{B^\nu(i)} / \overline{A}_{is'}\} \qquad (4.32.)$$

$$\theta' = y^{\nu}_{B^{\nu'}(r')} / \overline{A}_{r's} = \min_{\overline{W}_{\overline{A}_{is'}}>0, I^{\nu}+1 \le i \le m_1+Km_2} \left\{ y^{\nu}_{B^{\nu'}(i)} / \overline{A}_{is} \right\} \qquad (4.33.)$$

olsun. (4.32.) ya da (4.33.)'da minimuma erişilmez ise, dur; problem sınırsızdır. Aksi halde, $\theta \langle \theta'$ ise, *Adım 5*'e git. $\theta \geq \theta'$ ise, *Adım 6*'ya git.

Adım 5. $B^{\nu+1} = B^{\nu}$, $B^{\nu+1'} = B^{\nu'}$, $I_i^{\nu+1} = I_i^{\nu}$ ve $J^{\nu+1} = J^{\nu}$ olsun. $B^{\nu}(r) = I^{\nu}_{j,w} = t$ olduğunu varsayalım. x_s çözüme girer ise, $B^{\nu+1}(r) = I^{\nu+1}(j,w) = s$ olsun. $y_{k's'}$ çözüme girer ise, $B^{\nu+1}(i) = B^{\nu}(i+1)$, $i \geq r$, $I^{\nu+1}_{j,i} = I^{\nu}_{j,i+1}, i \geq w$, $J^{\nu+1}_{k',l'_{k'}+1} = s'$ ve $l'_{k'} = l'_{k'} + 1$ olsun. P^{ν}'yi $P^{\nu+1}$'e güncelle, karşılıklı ayırmayla, $\nu = \nu + 1$ olsun ve *Adım 1*'e git.

Adım 6. $B^{\nu+1} = B^{\nu}, B^{\nu+1'} = B^{\nu'}$, $I_i^{\nu+1} = I_i^{\nu}$ ve $J^{\nu+1} = J^{\nu}$ olsun. $B^{\nu'}(r') = J^{\nu}_{k,w} = t$ olduğunu varsayalım. x_s çözüme girer ise, $B^{\nu+1}(\sum_{j=1}^{k} l_j) = I^{\nu+1}(k, l_k + 1) = s$, $B^{\nu+1}(i) = B^{\nu}(i-1)$, $i \rangle \sum_{j=1}^{k} l_j$, $l_k = l_{k+1}$, $J^{\nu+1}_{k,i} = J^{\nu}_{k,i+1}$, $i \geq w$ olsun. $y_{k's'}$ çözüme girer ise, $B^{\nu+1}(i) = B^{\nu}(i+1)$, $i \geq r$, $I^{\nu+1}_{j,i} = I^{\nu}_{j,i+1}$, $i \geq w$, $J^{\nu+1}_{k',l'_{k'}+1} = s'$, $J^{\nu+1}_{k,i} = J^{\nu+1}_{k,i+1}$, $i \geq w$, $l'_k = l'_k - 1$ ve $l'_{k'} = l'_{k'} + 1$ olsun. P^{ν}'yi $P^{\nu+1}$'e güncelle, karşılıklı ayırmayla, $\nu = \nu + 1$ olsun ve *Adım 1*'e git.

(4.28.) ve (4.29.)'da kullanılan temel ayrıştırma güncellemesi için, *Adım 5 ve 6*'daki olası durumlara göre bir kaç duruma ihtiyaç vardır. Çözüme giren ve ayrılan değişkenlerin ikisi de x'de ise, sadece D değişir. Büyük bir çaba yine engellenmiş olur. Diğer durumlarda, L'nin sadece bir bloğu herhangi bir iterasyonla değişmektedir. Dolayısıyla, sadece $L^{-1}F$ ve $L^{-1}h$'nin karşılıklı parçalarının güncellenmesiyle yine bazı kısaltmalar kazanmak mümkündür.

Bu süreç, daha önce de değinildiği gibi, (4.1.)'in dual ve primaline uygulanabilmektedir. Bu durumda, süreç, ayrıştırma işlemlerini taklit edebilir ve her

iterasyon için L-şekil yöntemindeki aynı çalışmayı veya duale uygulanan içsel ayrıştırma yöntemini gerektirebilir. Çözüme giren sütun seçenekleri ayrıştırma sürecinin bir özel durumuna sınırlandırılırsa, ayrıştırma (decomposition) ve ayırma (factorization) aynı yolu izlemektedir.

Genel olarak, ayrıştırma yöntemleri bu tür problem sınıflarının lehindedir. Çünkü bu yöntemler farklı çözüm yolları sunmakta ve daha az çaba gerektirmektedir. Ayrıca, alt problemlere ayırmanın sürüdürülmesi ile paralel hesaplamaya izin verilmektedir. Geniş form etkin çözümler için bir ümit ışığı sunmaktadır. Bazı ticari yöntemler genel matris yapısını ayrıştırmak için geniş imkanlara sahiptirler. Temel ayırma yönteminin tek başına ne kadar kazanç sağlayacağını öngermek oldukça zordur. Ancak ayrıştırma ve ayırma yaklaşımlarının kombinasyonları da faydalı olabilmektedir.

Ayırma yaklaşımı, iç nokta yaklaşımları için de güçlü imkanlar sunmaktadır. Bu tür yaklaşımlarda, çözüm çabaları problem boyutuyla doğrusal olarak artmaktadır. Karmarkar iç nokta algoritmasının standart versiyonu bu yaklaşım için daha uygundur. Çünkü, standart form kanonik formdan daha pratik hesaplanabilme yeteneğine sahiptir[15].

4.1.2.4.İki Aşamalı Telafi Problemlerine Doğrusal Olmayan Yaklaşımlar

Buraya kadar ele alınan yöntemler temel olarak büyük ölçekli doğrusal programlama yöntemleriydi. Stokastik programlar doğrusal olmayan terimler ya da sürekli rassal değişkenler içerdikleri zaman, deterministik eşdeğer olarak sonlu boyutlu doğrusal programlar var olmamaktadır. Bu gibi durumlarda, bazı doğrusal olmayan yöntem tipleri kullanmak zorundayız. Kuadratik amaç terimleri için, kuadratik düzenleme terimi içermek amacıyla L-şekil yönteminin bir genişlemesine burada değinilecektir.

---

[15] **A.e.,** ss. 179-183.

4.1.2.4.1. Düzenlenmiş Ayrıştırma

Düzenlenmiş ayrıştırma yöntemi, ikinci aşama değer fonksiyonunun temsili için çoklu kesmeli yaklaşım ile kuadratik düzenleme teriminin amaca dahil edilmesinden oluşan bir kombinasyonundan oluşmaktadır. Bu ek terim kesme düzlemi yöntemlerinin iki klasik etkisini ortadan kaldıracak şekilde dahil edilmektedir. Bunlardan birincisi, başlangıç iterasyonlarının sıklıkla etkin olmamasıdır. Diğeri ise, sürecin sonunda iterasyonların dejenere olmasıdır. Düzenlenmiş ayrıştırma yöntemi 1986'da Ruszczynski tarafından geliştirilmiştir. Aşağıda söz konusu algoritma yer almaktadır.

Düzenlenmiş Ayrıştırma Algoritması

Adım 0. $k = 0,...,K$ için $r = \nu = 0$ ve $s(k) = 0$ olsun. a^1'i bir uygun çözüm olarak seç.

Adım 1. $\nu = \nu + 1$ olsun. Düzenlenmiş aşağıdaki ana programı çöz.

$$\min c^T x + \sum_{k=1}^{K} \theta_k + \frac{1}{2}\left\| x - a^\nu \right\|^2$$

$$\text{öyle ki } Ax = b$$

$$D_\lambda x \geq d_\lambda,\ \lambda = 1,...,r$$

$$E_{\lambda(k)} x + \theta_k \geq e_{\lambda(k)},\ \lambda(k) = 1,...,s(k)$$

$$x \geq 0$$

$(\theta^\nu)^T = (\theta_1^\nu,...,\theta_K^\nu)^T$, θ_k'lerin vektörü olmak üzere, (x^ν, θ^ν), (4.1.)'in bir optimal çözümü olsun. Bazı k için $s(k) = 0$ ise, θ_k^ν hesaplamada ihmal edilir. $c^T x^\nu + e^T \theta^\nu = c^T a^\nu + Q(a^\nu)$ ise, dur; a^ν optimal.

Adım 2. Önceden olduğu gibi, bir (4.3.) uygunluk kesmesi üretilirse, $a^{\nu+1} = a^\nu$ (boş uygun olmayan adım) ve *Adım 1*'e git.

Adım 3. $k = 0,...,K$ için, lineer alt problem (4.9.)'u çöz. $Q_k(x^\nu)$'yü hesapla. (4.18.) sağlanırsa, (4.19.) ve (4.20.)'deki formülleri kullanarak, (4.17.) optimallik kesmesi ekle. $s(k) = s(k+1)$'e eşitle.

Adım 4. (4.18.) herhangi bir k için sağlanmaz ise, $a^{\nu+1} = x^\nu$'dir (tam bir adım); *Adım 1*'e git.

Adım 5. $c^T x^\nu + Q(x^\nu) \le c^T a^\nu + Q(a^\nu)$ ise, $a^{\nu+1} = x^\nu$'dir. (yaklaşık bir adım); *Adım 1*'e git. Aksi halde, $a^{\nu+1} = a^\nu$ (boş uygun adım), *Adım 1*'e git.

Örnek 6. Örnek 5'deki problemi ele alalım. Bir başlangıç noktası olarak $a^1 = -0,5$ alalım. Bu, 1 olasılıkla $\xi = \bar{\xi}$ olan problemlerin çözümüne karşılık gelmektedir. $Q(a^1) = 3/8$ elde edilir.

İterasyon 1.

$\theta_1 \ge 0$, $\theta_2 \ge -\frac{3}{4}x$ kesmeleri eklenir. $a^2 = a^1$ olsun.

İterasyon 2.

Düzenlenmiş ana problem

$$\min \theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{2}(x + 0,5)^2$$

$$\text{öyle ki } \theta_1 \ge 0, \theta_2 \ge -\frac{3}{4}x$$

çözülerek $x^2 = 0,25, \theta_1 = 0, \theta_2 = -3/16$ elde edilir. Bir kesme $\theta_2 \ge 0$ eklenir. $Q(0,25) = 0 < Q(a^1)$ iken $a^3 = 0,25$ olur (yaklaşık *Adım 1*).

İterasyon 3.

Düzenlenmiş ana problem

$$\min \theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{2}(x - 0{,}25)^2$$

$$\text{öyle ki } \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq -\frac{3}{4}x,\ \theta_2 \geq 0$$

çözülerek $x^3 = 0{,}25, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ elde edilir. Çünkü, $\theta^\nu = Q(a^\nu)$ ve bir çözüm bulunmuştur[16].

İki aşamalı telafili stokastik programlara doğrusal olmayan yaklaşımlar çerçevesinde, yine L-şekil yönteminin bir genişlemesi olan, L-şekil yönteminin parçalı (piecewise) kuadratik formu ele alınabilir. Bu çerçevede, Lagranjien temelli bazı yöntemler ele alınmaktadır.

Burada incelenen kesme düzlemi yöntemleri gibi, Lagranjien tabanlı yöntemler de sürekli rassal değişkenli problemler için, kesikli rassal değişkenler ele alınarak uygulanabilir. Kesikli rassal değişkenlerdeki zorluk, Ψ veya Q'nun genellikle diferansiyellenebilme özelliğini kaybetmesidir. Bu durumda, türev tabanlı yöntemler uygulanamamaktadır. Görüldüğü gibi, L-şekil yöntemi ve diğer kesme düzlemi yaklaşımları alt gradyan bilgisi gerektiren standart yaklaşımlardır.

Genel sürekli rassal değişkenler veya büyük kesikli rassal vektör gerçeklenme sayılarıyla, doğrudan nonlineer programlama yaklaşımları genellikle çalışmamaktadır. Çünkü fonksiyonu ve türev değerlerini belirlemek bir hayli zordur. Bu tür durumlarda, *yaklaşım* güvenilir bir yöntem olabilmektedir. Söz konusu yaklaşımlar, gerçek fonksiyon değerlerindeki sınırların biçimini veya gerçek fonksiyon değerlerinin istatistiksel tahminlerini ele almaktadır[17].

[16] **A.e.,** ss. 199-201.
[17] **A.e.,** ss. 231-232.

4.2.Çok Aşamalı Stokastik Programlama

Bir çok operasyonel ve planlama problemleri belirli bir zaman üzerinden kararlar dizisini oluşturmaktadır. Kararlar gözlem öncesi (*a priori*) bilinmeyen sonuçların gerçeklenmelerini yansıtabilir. Bunların sonucunda optimal karar verme için oluşan model çok aşamalı stokastik programlama modelidir.

İki aşamalı stokastik programlardan yola çıkılarak çok aşamalı stokastik programların genel ifadeleri ve çok aşamalı problemlerin en önemli çözüm yöntemlerinden senaryo oluşturma yöntemi üzerinde 3. bölümde durulmuştu. Ancak yine de bazı önemli noktalara değinmek yararlı olacaktır.

Altı çizilmesi gerekli olan bir nokta, çok aşamalı modellerdeki aşamalar genel olarak zaman periyotları olmak zorunda değillerdir. Sözü edilen aşamalar karar sürecindeki aşamalardır[18].

Stokastik programların her aşamasındaki rassal verilerin orjinal sürekli dağılımlarına kesikli dağılımlarla yaklaşmak yaygın bir tercihtir. Kesikli dağılımlara sahip stokastik programlar da senaryo ağaçlarıyla eşdeğer matematik programlar olarak da ifade edilebilmektedir[19]. Hatırlanacağı gibi, senaryo ağacındaki herhangi bir senaryo, rassal değişkenler kümesindeki bir gerçeklenmeyi ifade eden kökten yaprağa kadar uzayan bir daldır. Senaryo üretimi için bazen *senaryo üreteçleri* kullanılmaktadır. Senaryo üreteçlerinin parametreleri için genellikle klasik yöntemler olan maksimum benzerlik ve momentler yöntemi stokastik diferansiyel denklemler sistemlerine uygulanabilmektedir. Alternatif olarak benzetilmiş moment tahmini ve popülasyon analizi gibi yöntemler de kullanılabilmektedir[20]. Bu alternatifler arasında simülasyon senaryoları da ayrı bir yöntem olarak yer almaktadır. Bazı durumlarda

---

[18] J. Dupacova, K. Sladky, "Comparison of Multistage Stochastic Programs with Recourse and Stochastic Dynamic Programs with Discrete Time," **Mathematical Mech,** No:82, 2002, s.755.
[19] Karl Frauendorfer, Michael Schürle, "Management of Non-maturing Deposits by Multistage Stochastic Programming," **European Journal of Operational Research,** No:151, 2003, s. 606.
[20] John M. Mulvey, "Introduction to Financial Optimization: Mathematical Programming Special Issue," **Mathematical Programming,** Series B 89, 2001, ss. 209-213.

klasik yöntemler ile alternatif yöntemlerin kombinasyonları da kullanılabilmektedir[21].

Ancak burada yine benzer bir notasyonla, çok aşamalı sabit telafili stokastik lineer programların genel ifadesi verilecektir. Burada, doğrusal, sabit telafili ve sonlu ufuklu bir durum incelenecektir.

Çok aşamalı sabit telafili stokastik lineer program aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$\min z = c^1 x^1 + E_{\xi^2}\left[\min c^2(\omega)x^2(\omega^2) + ... + E_{\xi^H}\left[\min c^H(\omega)x^H(\omega^H)\right]...\right]$$

$$\text{öyle ki} \quad W^1 x^1 = h^1$$

$$T^1(\omega)x^1 + W^2 x^2(\omega^2) = h^2(\omega)$$

$$\cdots \qquad (4.34.)$$

$$T^{H-1}(\omega)x^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^H x^H(\omega^H) = h^H(\omega)$$

$$x^1 \geq 0; x^t(\omega^t) \geq 0, t = 2,...,H$$

Burada, c^1, $\Re^{n_1}$'de bilinen bir vektör, h^1, $\Re^{m_1}$'de bilinen bir vektör, $\xi^t(\omega)^T = (c^t(\omega)^T, h^t(\omega)^T, T_{1.}^{t-1}(\omega),...,T_{m_t.}^{t-1})$, $(\Omega, \sum^t, P)$'de tüm $t = 2,...,H$ için tanımlı bir rassal N_t – vektör ve her W^t bilinen bir $m_t x n_t$ matrisdir. x kararları, t zamanına kadar olan geçmişe (ω^t) bağlıdır. Ayrıca, Ξ^t, $\tilde{\xi}^t$'nin bir desteği olduğu varsayılmaktadır.

Bu problemin deterministik eşdeğer formunu dinamik programlama cinsinden tanımlayalım. Aşamalar $1,...,H$ ise, durumları $x^t(\omega^t)$ şeklinde tanımlayabiliriz. Sadece periyotlar arasındaki etkileşim bu gerçeklenme nedeniyledir. Dolayısıyla,

[21] Stein-Erik Fleten, Kjetil Hoyland, Stein W. Wallace, "The Performance of Stochastic Dynamic and Fixed Mix Portfolio Models," **European Journal of Operational Research,** No: 140, 2002, ss. 39-40.

dinamik programlama yinelemeli (recursion) tipte tanımlanabilir. Terminal koşullar için,

$$\begin{aligned} Q^H(x^{H-1}, \xi^H(\omega)) &= \min c^H(\omega) x^H(\omega) \\ \text{öyle ki } W^H x^H(\omega) &= h^H(\omega) - T^{H-1}(\omega) x^{H-1} \\ x^H(\omega) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.35.}$$

elde edilir. Tüm $t = 2,..., H-1$ için yineleme fonksiyonu, x^t sistemin durumunu göstermek üzere,

$$\begin{aligned} Q^t(x^{t-1}, \xi^t(\omega)) &= \min c^t(\omega) x^t(\omega) + E_{\xi^{t+1}} \left[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega)) \right] \\ \text{öyle ki } W^t x^t(\omega) &= h^t(\omega) - T^{t-1}(\omega) x^{t-1} \\ x^t(\omega) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.36.}$$

biçiminde elde edilir. $\tilde{\xi}^t$'nin dağılımı geçmiş sonuçlardan bağımsız ise, t zamanına kadar diğer durum bilgileri, rassal parametrelerin gerçeklenmeleri cinsinden dahil edilmelidir.

Aradığımız değer,

$$\begin{aligned} \min z &= c^1 x^1 + E_{\xi^2} \left[Q^2(x^1, \xi^{t+1}(\omega)) \right] \\ \text{öyle ki } W^1 x^1 &= h^1 \\ x^1 &\geq 0, \end{aligned} \tag{4.37.}$$

iki aşamalı determistik eşdeğer programı formuna sahiptir.

(4.34.)-(4.37.) problemlerinin ayrıştırma gibi bazı matematik programlama özelliklerini elde etmeye çalışalım. (4.36.) biçimindeki problemlerin uygunluk bölgeleri üzerinde yoğunlaşalım. Uygunluk bölgelerinin,

$$K^t = \left\{ x^t \middle| E_{\xi^{t+1}} \left[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega)) \right] < \infty \right\}$$

olduğunu düşünelim. Çok aşamalı stokastik programlar için algoritmaların geliştirilmesinde aşağıdaki özellik yardımcı olmuştur.

Teorem 7. K^t kümeleri ve $E_{\xi^{t+1}} \left[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega)) \right]$ fonksiyonları $t = 1,..., H-1$ için konvekstir ve $t = 1,..., H$ için Ξ^t sonlu ise, K^t ve $E_{\xi^{t+1}} \left[Q^{t+1}(x^t, \xi^{t+1}(\omega)) \right]$ polihedraldir.

Her aşamada $\tilde{\xi}^t$ için sonlu ikinci momentler varsa, her sonuç kümesi için uygunluk kümeleri K^t, uygunluk kümelerinin kesişimleri cinsinden tanımlanabilir. Bu sonuç, gelecek sonuçlarının olası gerçeklenmelerinin sayısı sonlu iken de geçerlidir. Bu durumda, olası gelecek sonuç dizilerinin kümesi *senaryolar* olarak adlandırılmaktadır.

Daha önceden de görüldüğü gibi, senaryoların tanımlanması genellikle ağaçlarla yapılmaktadır. Senaryo ağaçları üzerinde ayrıntılı olarak 3. bölümde durulmuştur.

Sonlu senaryo sayılı (4.34.) problemine deterministik eşdeğer programı hala bir lineer programdır. Söz konusu problem deterministik eşdeğer matrisler yardımıyla da gösterilebilir. Bu sıklıkla *ağaca benzeyen (abrorescent) form* olarak adlandırılmaktadır. Bu yapı büyük ölçekli optimizasyon yaklaşımlarına genişletilebilmektedir. Buradaki zorluk aşama sayılarının artmasıyla oldukça büyük problemlerin elde edilmesidir.

Bununla birlikte, bazı problemlerde, ardışık aşamalar arasındaki etkileşimler yeterince zayıf ise, söz konusu zorluktan kaçabiliriz. Örneğin, bir kapasite geliştirme problemini ele alalım. Bir aşamadan diğerine taşınan kapasite söz konusu aşamadaki

talep tarafından etkilenmemektedir. Kurulması düşünülen kapasite miktarı konusundaki kararlar, başlangıçta ve sonra da sadece bu sonuçlara reaksiyonlardan oluşan gelecekte verilebilir. Bu tür modeller *blok ayrılabilir (block separable)* olarak adlandırılmaktadır. Blok ayrılabilir telafi tanımı aşağıda verilmiştir.

Tüm aşamalar $t = 1,...,H$ ve tüm ω için, w^t toplam seviye kararlarını ve y^t detaylı seviye kararlarını temsil etmek üzere, karar vektörleri $x^t(\omega)$, $x^t(\omega) = (w^t(\omega), y^t(\omega))$ olarak yazılabiliyorsa, bir çok aşamalı stokastik lineer program (4.34.) *blok ayrılabilir telafi*ye sahiptir. Kısıtlar aşağıdaki bölümlenmelere sahiptir;

(i) t aşaması amaç katkısı $c^t x^t(\omega) = r^t w^t(\omega) + q^t y^t(\omega)$'dir.

(ii) Kısıt matrisi W^t köşegen bloktur;

$$W^t = \begin{pmatrix} A^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} \tag{4.38.}$$

(iii) Kısıtların diğer bileşenleri rassaldır ancak, ω'nın her gerçeklenmesi için, $T^t(\omega)$ ve $h^t(\omega)$ aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$T^t(\omega) = \begin{pmatrix} R^t(\omega) & 0 \\ S^t(\omega) & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } h^t(\omega) = \begin{pmatrix} b^t(\omega) \\ d^t(\omega) \end{pmatrix} \tag{4.39.}$$

Burada, $T^t(\omega)$'nin sıfır bileşenleri detaylı seviye değişkenlerine karşılık gelmektedir.

Yukarıdaki tanımın (iii). maddesi, detaylı seviye değişkenlerinin gelecek kısıtları üzerinde doğrudan etkisi olmadığını belirtmektedir. Bu, blok ayrılabilirliğinin temel avantajıdır.

Temel ayrılabilir telafiyle, $Q^t(x^{t-1},\xi^t(\omega))$'yi iki çokluğun toplamı olarak, $Q_w^t(w^{t-1},\xi^t(\omega))+Q_y^t(w^{t-1},\xi^t(\omega))$ yazabiliriz. Burada, y^{t-1} terimlerini x^{t-1}'e dahil etmek zorunda değiliz,

$$Q_w^t(w^{t-1},\xi^t(\omega)) = \min r^t(\omega)w^t(\omega) + E_{\xi^{t+1}}\left[Q^{t+1}(x^t,\xi^{t+1}(\omega))\right]$$

$$\text{öyle ki } A^t w^t(\omega) = b^t(\omega) - R^{t-1}(\omega)w^{t-1} \qquad (4.40.)$$

$$w^t(\omega) \geq 0$$

ve

$$Q_y^t(w^{t-1},\xi^t(\omega)) = \min q^t(\omega)y^t(\omega)$$

$$\text{öyle ki } B^t y^t(\omega) = d^t(\omega) - S^{t-1}(\omega)w^{t-1} \qquad (4.41.)$$

$$y^t(\omega) \geq 0$$

şeklindedir. Blok ayrılabilirliğinin büyük avantajı şudur, detaylı seviye kararları arasında yuvalama (içiçe) yapmaya gerek yoktur. Bu durumda, w değişkenleri toplam seviye değişkenlerinin bir ilk aşamasına birlikte çekilebilirler. İkinci aşama detaylı seviye değişkenlerinden oluşmaktadır. b^t ve R^t bilinirse, blok ayrılabilir problem benzer hacimli iki aşama stokastik lineer programa denktir.

Ayrılabilirlik stokastik programlar için gerçekten kullanışlı bir özelliktir. Hesaplama yöntemleri bu özelliği kullanarak problemleri indirgeyebilmektedir. Ayrıca, ayrılabilirlik (sınırlandırılabilen bazı hatalarla) problemlere de eklenebilmektedir. Bu yaklaşım rassal değişkenlerin büyük sayılarında bir çok mümkün uygulamalara kapı açmaktadır.

Bazı hesaplama avantajları sağlayan diğer bir yaklaşım, stokastik programları Markov karar süreçlerinin örnekleri gibi analiz etmektedir. Bu çerçevede, önceki sonuçlardan gelecek kararlarının ayrılabilir bir formunu elde eden bir yaklaşım elde edilmektedir[22].

---

[22] **A.e.,** ss. 128-132.

4.2.1. Çok Aşamalı Stokastik Programların Çözüm Yöntemleri

Genel olarak, iki aşamalı problemler için önerilen yöntemler çok aşamalı problemlere genelleştirilmektedir. Ancak bu süreçte bazı ek zorluklar da çıkmaktadır. Burada, uygulamada daha başarılı bulunan yöntemler üzerinde durulacaktır.

Sonlu gelecek senaryolu çok aşamalı bir stokastik lineer program bir deterministik eşdeğer lineer programına sahiptir. Bununla beraber, bu tür programların yapısı iki aşamalı problemlerinkinden daha karmaşıktır. Söz konusu modellerin geniş formu, uç veya iç nokta yöntemleri için ayırma (factorization) gibi ayarlamalara uygun değildir. Dolayısıyla, çok aşamalı modellerin çözümleri bir hayli zor olabilmektedir[23].

Yukarıda sözü edilen bir takım zorluklar bazı yöntemlerle azaltılabilmektedir. Bunlardan birisi *senaryo örnekleme* yöntemidir. Çok fazla sayıdaki senaryolar stokastik modelden örneklenerek çözüm yürütülmektedir[24]. Diğer bir yaklaşım da, *senaryo indirgeme* yaklaşımıdır. Aslında senaryo örnekleme yöntemi de bir senaryo indirgeme kuralıdır. Ayrıca, birinci ve ikinci momentlerin kullanıldığı silme kuralları da geliştirilmiştir. Söz konusu indirgeme yöntemlerinde büyük ölçüde sağlıklı yaklaşımlar elde edilmektedir. Örneğin, bir senaryo ağacının %50 oranında indirgenmesi ile sadece %10 civarında göreceli doğruluk kaybı olmaktadır. Dahası, orjinal senaryo ağacının %2'sini içeren alt ağacın göreceli doğruluğu %50 civarında olabilmektedir[25].

Geliştirilen yöntemler genellikle yine ayrıştırma, Lagranjien gevşemesi ve ayrılabilirlik özelliklerini kullanmaktadır. Aşağıda içiçe (nested) ayrıştırma yöntemi üzerinde durulacaktır.

---

[23] **A.e.**, ss. 237.
[24] Mulvey, **a.g.e.**, s. 209.
[25] J. Dupacova, N. Gröwe-Kuska, W. Römisch, "Scenario Reduction in Stochastic Programming: An Approach using Probability Metrics," **Mathematical Programming,** Series A 95, ss. 495-496.

4.2.1.1.İçiçe Ayrıştırma Yöntemi

Deterministik modeller için içiçe (nested) ayrıştırma yöntemi 1973'te Glassey ve 1974'te Ho ve Manne tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşımlar, tüm geçmiş aşamaları, mevcut aşamadaki ana problemin alt problemleri olarak gören içsel lineerleştirmelerdir. Önceki aşamalar, mevcut aşama ana problemi tarafından kullanılabilecek sütunlar üretmektedir.

Bu primal içiçe ayrıştırma ya da içsel lineerleştirme yöntemlerindeki zorluk, farklı son aşama gerçeklenmeleri için girdi kümesi tamamiyle farklı olabilmektedir. Çünkü, son aşama gerçeklenmeleri sayısı problemdeki toplam senaryo sayısıdır. Bununla birlikte, 1987'de Noel ve Smeers'in içsel lineerleştirmeyi duale uygulamasıyla (primal problemin dışsal lineerleştirmesi) bazı başarılı adımlar atılmıştır.

Genel primal yaklaşım iki aşamalı L-şekil yöntemine bina edilmiş bir dışsal doğrusallaştırma kullanmaktadır. Louveaux 1980'de bunu ilk olarak çok aşamalı kuadratik problemler için yaptı. Birge 1985'te doğrusal durumlar için iki aşamalı yöntemi genişletti. Bu yöntem aşağıda irdelenmektedir.

İçiçe L-şekil ya da Benders ayrıştırma yönteminin temel fikri, çok aşamalı (4.46.)'daki $E_{\xi^{t+1}}\left[Q^{t+1}(x^t,\xi^{t+1}(\omega))\right]$'e kesmeleri yerleştirmek ve tüm oğul senaryolarda uygun bir x^t elde edebilmek için diğer kesmeleri eklemektir. Kesmeler $E_{\xi^{t+1}}\left[Q^{t+1}(x^t,\xi^{t+1}(\omega))\right]$'in lineer yaklaşımlarını temsil etmektedir. $E_{\xi^{t+1}}\left[Q^{t+1}(x^t,\xi^{t+1}(\omega))\right]$'in polihedral yapısı nedeniyle, bu süreç sonlu sayıda adımda bir optimal sonuca yakınsamaktadır.

Genel olarak, her aşama $t=1,...,H-1$ için ve her aşamadaki her senaryo $k=1,...,N^t$ için, aşağıdaki ana probleme sahibiz. Bu model aşama t'ye kesmeler üretmekte ve $t+1$ için önermektedir.

$$\min (c_k^t)^T x_k^t + \theta_k^t \tag{4.42.}$$

$$W^t x_k^t = h_k^t - T_k^{t-1} x_{a(k)}^{t-1} \tag{4.43.}$$

$$D_{k,j}^t x_k^t \geq d_{k,j}^t, \; j = 1,..., r_{k,j}^t \tag{4.44.}$$

$$E_{k,j}^t x_k^t + \theta_k^t \geq e_{k,j}^t, \; j = 1,..., s_{k,j}^t \tag{4.45.}$$

$$x_k^t \geq 0 \tag{4.46.}$$

Burada, $a(k)$, *t-1* aşamasındaki k ata senaryosu, $x_{a(k)}^{t-1}$ söz konusu senaryodan gelen mevcut çözüm ve $t=1$ için problemin başlangıç koşulları $b = h^1 - T^0 x^0$'dır. H aşamasında θ_k^H ve (4.44.) ve (4.45.) mevcut değildir. (4.42.)-(4.46.)'daki problemin periyot ve senaryolarının dizaynı için, bu alt problemi *NLDS (t,k)* olarak gösterelim.

Aşamalar arasında iterasyonu sürdürmek için öncelikle bir temel algoritma tanımlayalım. Bu basit yaklaşımın bazı genişlemelerini tartışalım. $D^t(j)$, *t-1* periyodundaki bir j senaryosunun t periyodu oğullarını göstersin. Genel modeldeki tüm değişkenlerin, sınırsız çözüm tehlikesinden kaçınmak için sonlu üst sınırları olduğunu varsayalım. İçiçe ayrıştırma algoritması aşağıdadır.

Çok Aşamalı Stokastik Lineer Programlar İçin İçiçe L-Şekil Algoritması

Adım 0. $t=1$, $k=1$, $r_k^t = s_k^t = 0$ olsun. $\theta_k^t = 0$ kısıtını tüm t ve k için (4.42.)-(4.46.) problemine ekle ve *DIR = FORE* olsun. *Adım 1*'e git.

Adım 1. Mevcut problem *NLDS (t,k)*'i çöz. Uygun değil ve *t=1* ise dur; (4.34.) uygundur. Uygun değil ve $t\rangle 1$ ise, $r_{a(k)}^{t-1} = r_{a(k)}^{t-1} + 1$ ve *DIR = BACK* olsun. Uygunsuzluk koşulu bir dual temel çözümle elde edilsin, $\pi_k^t, \rho_k^t \geq 0$ öyle ki $(\pi_k^t)^T W^t + (\rho_k^t)^T D_k^t \leq 0$ ama $(\pi_k^t)^T (h_k^t - T_k^{t-1} x_{a(k)}^{t-1}) + (\rho_k^t)^T d_k^t \rangle 0$. $D_{a(k),r_{a(k)}^{t-1}}^{t-1} = (\pi_k^t)^T T_k^{t-1}$ ve $d_{a(k),r_{a(k)}^{t-1}}^{t-1} = \pi_k^t h_k^t + (\rho_k^t)^T d_k^t$ olsun. *t = t-1, k = a(k)* olsun ve *Adım 1*'e dön.

Uygun ise, x_k^t, θ_k^t değerlerini güncelle ve (4.43.)-(4.45.) kısıtlarındaki bütünsel temel dual çarpanlarının değerlerini $(\pi_k^t, \rho_k^t, \sigma_k^t)$ biçiminde sakla. $k\langle K^t$ ise, $k=k+1$ olsun ve (4.42.)'e dön. Aksi halde $(k = K^t)$, *DIR* =*FORE* ve $t\langle H$ ise, $t = t+1$ olsun ve dön. $t = H$ ise, *DIR* = *BACK* olsun. *Adım 2*'ye git.

Adım 2. t-1'deki tüm $j = 1,..., K^{t-1}$ senaryoları için,

$$E_j^{t-1} = \sum_{k \in D^t(j)} \frac{p_k^t}{p_j^{t-1}} (\pi_k^t)^T T_k^{t-1}$$

ve

$$e_j^{t-1} = \sum_{k \in D^t(j)} \frac{p_k^t}{p_j^{t-1}} \left[(\pi_k^t)^T h_k^t + \sum_{i=1}^{r_k} (\rho_{ki}^t)^T d_{ki}^t + \sum_{i=1}^{s_k} (\sigma_{ki}^t)^T e_{ki}^t \right]$$

değerlerini hesapla. $D^t(j)$'deki tüm senaryo problemlerinin mevcut koşullu beklenen değeri $\bar{\theta}_j^{t-1} = e_j^{t-1} - E_j^{t-1} x_j^{t-1}$'dir. *NLDS (t-1,j)*'de $\theta_j^{t-1} = 0$ kısıtı varsa, söz konusu kısıtı at, $s_j^{t-1} = 1$ olsun ve E_j^{t-1} ve e_j^{t-1} ile bir (4.45.) kısıtını *NLDS (t-1,j)* problemine ekle.

$\bar{\theta}_j^{t-1} \rangle \theta_j^{t-1}$ ise, $s_j^{t-1} = s_j^{t-1} + 1$ olsun ve E_j^{t-1} ve e_j^{t-1} ile bir (4.45.) kısıtını *NLDS (t-1,j)* problemine ekle. $t = 2$ ve *NLDS (1)* $(j = K^1 = 1)$'e kısıt eklenmez ise, dur x_1^1 optimaldir. Aksi halde, $t = t-1$, $k=1$ olsun. $t = 1$ ise, *DIR* = *FORE* olsun. *Adım 1*'e dön.

Yukarıdaki algoritmadaki gelecek alt problem (4.42.)-(4.46.)'yı çözme açısından bakılacak olursa bir çok alternatif stratejiler mümkündür. Uygun çözümler için, *t-1* veya *t+1*'e hareket etmeye karar vermeden önce *t*'deki tüm senaryoları önceki tanımlama keşfeder. Uygun iterasyonlar için, algoritma, *t*'den *DIR* yönünde gidebileceği kadar ilerler. Bu, 1983'te Wittrock tarafından önerilen *"hızlı-ileri-hızlı-geri" yöntemi*dir. Mümkün olduğunda *t*'den *t-1*'e (hızlı-geri) veya *t*'den *t+1*'e (hızlı-ileri) gidilebilir. Yapılan gözlemlere göre, hızlı-ileri-hızlı-geri dizisi bunların ikisinden de daha iyi çalışmaktadır.

Bazı aşamalardaki uygun olmayan çözümler için, uygun bir çözümün bulunup bulunamayacağının görülmesi için bu algoritma ata (eski) probleme döner. Bu alternatif pratik görünmektedir çünkü, mevcut uygun olmayan çözümlü alt dizi iterasyonları pek önemli değildir.

Söz konusu algoritmanın önemli bir bölümü paralel olarak çalışabilmektedir. Bu yöntemin yakınsaklığı aşağıdaki ispatsız verilen teoremde belirtilmektedir.

Teorem 8. Tüm Ξ^t sonlu ve tüm x^t sonlu üst sınırlara sahipse, içiçe L-şekil yöntemi (4.34.)'ün bir optimal çözümüne sonlu olarak yakınsar.

İçiçe L-şekil yönteminin, standart iki aşama L-şekil algortiması ile bir çok ortak özellikleri bulunmaktadır. Bununla beraber, çok aşamalı yöntemde bazı alışılmadık durumlar söz konusudur. Aşağıdaki örnekte bazıları görülecektir. Özellikle, iki aşamalı yöntem, alt problem optimallik için çözülebilirse, telafi fonksiyonunun beklenen değerinin destekleri olacak şekilde her zaman kesmeler üretmektedir. Çok aşamalı durumda, yaklaşılan fonksiyonun kesinlikle altında olabilecek kesmenin doğru bir desteğini üretemeyebiliriz.

Örnek 7. Üç aylık zaman periyodu üzerinden klima üretim planlaması yaptığımızı varsayalım. Her ay \$100 birim maliyet üzerinden 200 adet ürün üretebiliriz. Talep fazla olduğunda, fazla mesaiye kalan işçiler kullanılarak birim başına \$300'a klima üretebilmekteyiz. Müşterilerimizle bir aylık süreler için sipariş alınmaktadır. 1.ayda, 100 birimlik bir talebi karşılamalıyız. 2. ve 3. aydaki talepler rassaldır ve ağırlıklı olarak öngörülemeyen hava durumuna bağlıdır. Her ay 100 veya 300 birim üretmenin eşit olasılığa sahip olduklarını varsayalım.

Ürünleri bir sonraki ayda dağıtım için depolama imkanımız mevcuttur. Ancak, birim başına aylık depolama maliyeti \$50'dır. Tüm taleplerin karşılanmak zorunda olduğunu varsayalım. Bizim genel amacımız, üç ay boyunca talepleri

karşılama maliyetinin beklenen değerini minimize etmektir. Mevsimin söz konusu noktada bittiğini, kurtarılan ürün olmadığını veya artık ürünler için elden çıkarma maliyetinin bulunmadığını varsayalım. Bunlar, bir ufuk-sonu (end-of-horizon) problemiyle karşı karşıya olduğumuzu göstermektedir.

x_k^t, t ayı ve k senaryosundaki düzenli-zaman üretimi, y_k^t, t ayı, k senaryosundan stoklanan ürün sayısı, w_k^t, t ayı ve k senaryosundaki fazla mesai üretimi ve d_k^t, k senaryosu altındaki t ayının talebi olsun. Deterministik eşdeğer formundaki çok aşamalı stokastik program,

$$\begin{aligned}
&\min x^1 + 3.0w^1 + 0.5y^1 + \sum_{k=1}^{2} p_k^2(x_k^2 + 3.0w_k^2 + 0.5y_k^2) + \sum_{k=1}^{4} p_k^3(x_k^3 + 3.0w_k^3) \\
&\text{öyle ki } x^1 \le 2, \\
&x^1 + w^1 - y^1 = 1, \\
&y^1 + x_k^2 + w_k^2 - y_k^2 = d_k^2, \\
&x_k^2 \le 2, k = 1,2, \\
&y_{a(k)}^2 + x_k^3 + w_k^3 - y_k^3 = d_k^3, \\
&x_k^3 \le 2, k = 1,...,4, \\
&x_k^t, y_k^t, w_k^t \ge 0, k = 1,..., K^t, t = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{4.47.}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada, 3.periyotta k =*1,2* ise, *a(k)* = *1*, 3. periyotta k = *3,4* ise, *a(k)* = *2*, $p_k^2 = 0.5$, k = *1,2*, $p_k^3 = 0.25$, k =*1,...,4*, $d_1^2 = 1$, $d_2^2 = 3$ ve $d^3 = (1,3,1,3)^T$'dir.

İçiçe L-şekil algoritması (4.47.)'ye uygulanırsa ilk iki iterasyon için aşağıdaki adımlar elde edilir. *DIR*'ın her değişmesinde bir iterasyon listelenmektedir.

Adım 0. NLDS (t,k)'nin tüm alt problemleri kapalı olarak $\theta_k^t = 0$ kısıtına sahiptirler. *DIR = FORE.*

İterasyon 1.

Adım 1. Burada $t=1, k=1$. Alt problem *NLDS (1,1)*,

$$\min x^1 + 3w^1 + 0.5y^1 + \theta^1$$

$$\text{öyle ki} \quad x^1 \le 2,$$

$$x^1 + w^1 - y^1 = 1,$$

$$x^1, w^1, y^1 \ge 0,$$

$$\theta^1 = 0,$$

biçimindedir. Bu alt problemin çözümü, $x^1 = 1$ ve diğer değişkenler sıfırdır.

Adım 1. Şimdi, $t = 2, k = 1$ ve alt problem *NLDS (2,1)*,

$$\min x_1^2 + 3w_1^2 + 0.5y_1^2 + \theta_1^2$$

$$\text{öyle ki} \quad x_1^2 \le 2,$$

$$x_1^2 + w_1^2 - y_1^2 = 1,$$

$$x_1^2, w_1^2, y_1^2 \ge 0,$$

$$\theta_1^2 = 0,$$

biçimindedir. Bu alt problemin çözümü, $x_1^2 = 1$ ve diğer değişkenler sıfırdır.

Adım 1. Burada, $t = 2, k = 2$ ve alt problem *NLDS (2,2)*,

$$\min x_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2$$

$$\text{öyle ki} \quad x_2^2 \le 2,$$

$$x_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 3,$$

$$x_2^2, w_2^2, y_2^2 \geq 0,$$

$$\theta_2^2 = 0,$$

şeklindedir. Bu alt problemin çözümü, $x_2^2 = 2$, $w_2^2 = 1$ ve diğer değişkenler sıfırdır.

Adım 1. Daha sonra, $t = 3$, $k = 1$ ve alt problem *NLDS (3,1)*,

$$\min x_1^3 + 3w_1^3 + 0.5y_1^3 + \theta_1^3$$

$$\text{öyle ki } x_1^3 \leq 2,$$

$$x_1^3 + w_1^3 - y_1^3 = 1,$$

$$x_1^3, w_1^3, y_1^3 \geq 0,$$

$$\theta_1^3 = 0,$$

biçimindedir. Bu alt problemin çözümü, $x_1^3 = 1$ ve diğer primal değişkenler sıfırdır. Bütünsel temel dual çözüm $\pi_1^3 = (0,1)^T$'dir.

Adım 1. Daha sonra, $t = 3$, $k = 2$'dir. Alt problem *NLDS (3,2)*, *NLDS (3,1)* ile aynı forma sahiptir. Tek istisna, ikinci kısıtı $x_2^3 + w_2^3 - y_2^3 = 3$ ile değiştirmemiz gerektiğidir. Bu problemin çözümü, $x_2^3 = 2$, $w_2^3 = 1$, diğer primal değişkenler sıfırdır. Bütünsel temel dual çözüm $\pi_2^3 = (-2,3)^T$'dir.

Adım 1. $t = 3$, $k = 3$ için, aynı alt probleme sahibiz ve problem $t = 3$, $k = 1$ durumundaki çözümle aynı değere sahiptir, yani $x_3^3 = 1$, diğer primal değişkenler sıfırdır. Bütünsel temel dual çözüm $\pi_3^3 = (0,1)^T$'dir.

Adım 1. $t = 3$, $k = 4$ için, aynı alt probleme sahibiz ve problem $t = 3$, $k = 2$ durumundaki çözümle aynı değere sahiptir, yani $x_4^3 = 2$, $w_4^3 = 1$ diğer primal değişkenler sıfırdır. Bütünsel temel dual çözüm $\pi_4^3 = (-2,3)^T$'dir. Şimdi, *DIR = BACK* ve *Adım 2*'ye git.

İterasyon 2:

Adım 2. $j = 1$ ve $t - 1 = 2$ senaryosu için,

$$E_{11}^2 = (\frac{0.25}{0.5})(\pi_1^3 T_1^3 + \pi_2^3 T_2^3) = (0.5)(0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0.5)(-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 0 \quad 2)$$

ve

$$e_{11}^2 = (\frac{0.25}{0.5})(\pi_1^3 h_1^3 + \pi_2^3 h_2^3) = (0.5)(0 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.5)(-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

elde edilir ve buradan $2y_1^2 + \theta_1^2 \geq 5$ kısıtı *NLDS (2,1)*'e eklemek üzere elde edilir.

$j = 2$ ve $t - 1 = 2$ senaryosu için, aynı $E_{21}^2 = (0 \quad 0 \quad 2)$ ve $e_{21}^2 = 3$ değerleri söz konusudur. Şimdi, $t = 2$ ve $k = 1$ olsun.

Adım 1. NLDS (2,1),

$$\min x_1^2 + 3w_1^2 + 0.5y_1^2 + \theta_1^2$$

$$\text{öyle ki } x_1^2 \leq 2,$$

$$x_1^2 + w_1^2 - y_1^2 = 1,$$

$$2y_1^2 + \theta_1^2 \geq 3,$$

$$x_1^2, w_1^2, y_1^2 \geq 0,$$

alt probleminin optimal temel uygun çözümü, $x_1^2 = 2$, $y_1^2 = 1$, $\theta_1^2 = 1$, $w_1^2 = 0$ ve bütünsel dual değişkenler $\pi_1^2 = (-0.5 \quad 1.5)^T$, $\sigma_{11}^2 = 1$'dir.

Adım 1. NLDS (2,2), (4.52.) ile aynı forma sahiptir ancak tek farkla ki talep kısıtı $x_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 3$'dir. Bu problemin optimal temel uygun çözüm, $x_2^2 = 2$, $w_2^2 = 1$, $\theta_2^2 = 3$, $y_2^2 = 0$ ve bütünsel dual değişkenler $\pi_2^2 = (-2,3)^T$, $\sigma_{11}^2 = 1$'dir. *DIR = BACK* yönünde *Adım 2*'ye devam et.

Adım 2. t-1 =1 senaryosu için,

$$E_1^1 = (0.5)(\pi_1^2 T_1^2 + \pi_2^2 T_2^2) = (0.5)(-0.5 \quad 1.5)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0.5)(-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \quad 0 \quad 2.25)$$

ve

$$e_1^1 = (0.5)(\pi_1^2 h_1^2 + \pi_2^2 h_2^2) + (0.5)(\sigma_{11}^2 e_{11}^2 + \sigma_{21}^2 e_{21}^2)$$

$$= (0.5)(-0.5 \quad 1.5)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0.5)(-2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (0.5)((1)(3) + (1)(3))$$

$$= (0.5)(0.5 + 5 + 6) = 5.75$$

ifadelerinden $2.25y^1 + \theta^1 \geq 5.75$ kısıtı *NLDS (1)*'e eklemek üzere elde edilir.

Adım 1. NLDS (1),

$$\min x^1 + 3w^1 + 0.5y^1 + \theta^1$$

$$\text{öyle ki} \quad x^1 \leq 2,$$

$$x^1 + w^1 - y^1 = 1,$$

$$2.25y^1 + \theta^1 \geq 5.75,$$

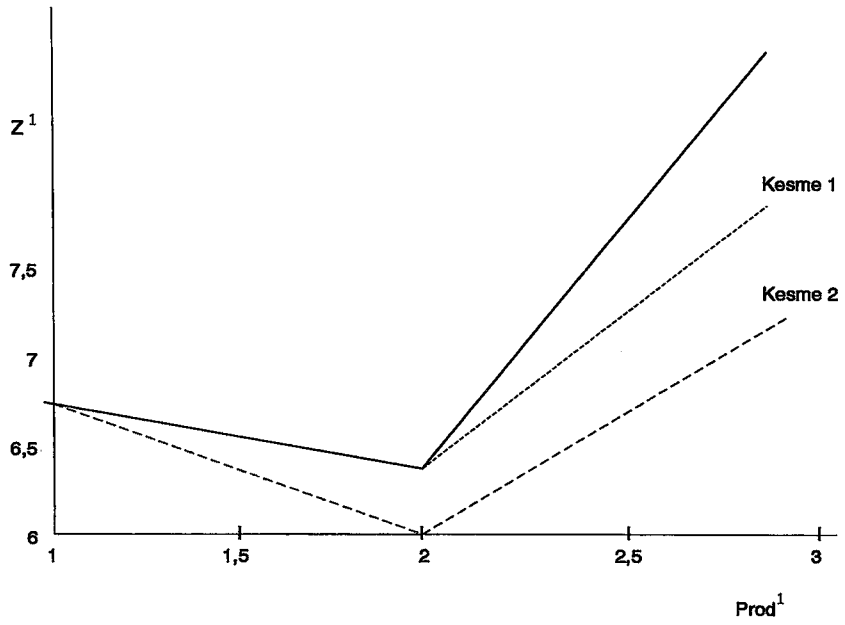
$$x^1, w^1, y^1 \geq 0,$$

alt problemi optimal temel uygun çözümü $x^1 = 2$, $y^2 = 1$, $w^1 = 0$, $\theta^1 = 3.5$ elde edilir. *DIR = FORE.*

Yukarıdaki süreç devam ettirildiğinde toplam altı iterasyonda çözüme ulaşılır. Son iterasyonda, $\overline{\theta}^1 = 3.75 = \theta^1$ elde edilir ve dolayısıyla 1. Periyot için yeni kesmeler üretilmemektedir. Optimal mevcut çözümle, $x^{1*} = 2$, $y^{1*} = 1$, $z^* = 2.5 + 3.75 = 6.25$ elde edilerek algoritma sonlandırılır.

Yukarıdaki örnekte içiçe L-şekil yöntemi altı iterasyon veya yön değişimi gerekmiştir. Burada altı iterasyon üç ileri ve üç geri yöne karşılık gelmektedir. Şekil 16'da Örnek 7 için süreç ve içiçe ayrıştımanın performansı görülmektedir[26]. Şekil 16'da, kesiksiz çizgi, ilk aşamadaki toplam üretimin fonksiyonu olarak (4.47.)'deki amaç değerini göstermektedir. Toplam üretim $prod^1 = x^1 + w^1$ olarak ifade edilebilir. Kesikli çizgiler ise söz konusu algoritma tarafından üretilen kesmelerdir (*Kesme 1,2*). Birinci kesme *İterasyon 2*'den elde edilen $2.25y^1 + \theta \geq 5.75$'dir. Burada $y^1 = x^1 + w^1 - 1$ dönüşümü yapılırsa, $2.25x^1 + 2.25w^1 + \theta \geq 8$ elde edilir. (4.47.)'deki amaç denklemi, $z^1 = x^1 + 3w^1 + 0.5y^1 + \theta$'dır ve dolayısıyla $1 \leq x^1 \leq 2$ kısıtını sağlamalıdır. $\theta \geq 8 - 2.25(prod^1)$ dönüşümü yapılarak, $prod^1 \geq 1$ olmak üzere $z^1(prod^1) = 7.5 + (1.5)\min\{2, prod^1\} + 3.5(prod^1 - 2)^+ - 2.25prod^1$ elde edilir. Bu ifade,

[26] Birge,**a.g.e.,** ss. 237-242.



Şekil 16. Örnek 7 İçin İlk Aşama Amaç Fonksiyonu ve İçiçe L-Şekil Yöntemince Üretilen Kesmeler

$$z^1(prod^1) = \begin{cases} 7.5 - 0.75prod^1, & prod^1 \le 2 \\ 3.5 + 1.25prod^1, & prod^1 \rangle 2 \end{cases}$$

şeklinde de yazılabilir. Elde edilen bu ifade Şekil 16'da görülen *Kesme 1*'e karşılık gelmektedir. İkinci kesme *İterasyon 4*'te $2x^1 + 2w^1 + \theta \ge 7.75$ olarak elde edilmektedir.Buradan, $z^1(prod^1) = x^1 + 3w^1 + 0.5y^2 + \theta \ge 7.25 + (1.5)\min\{2, prod^1\}$ $+ 3.5(prod^1 - 2)^+ - 2prod^1$ veya

$$z^1(prod^1) \ge \begin{cases} 7.25 - 0.5prod^1, & prod^1 \le 2 \\ 3.25 + 1.5prod^1, & prod^1 \rangle 2 \end{cases}$$

elde edilir. Bu kesme Şekil 16'daki *Kesme 2*'ye karşılık gelmektedir.

Optimal değer ve çözüm $prod^1$ cinsinden kesmeler eklendikçe Şekil 16'dan okunabilir. Sadece *Kesme 1* varken, z^1 en düşük değerini $prod^1 = 2$ iken almaktadır. *Kesme 1* ve *2* varken, minimum değer yine $prod^1 = 2$'de elde edilmektedir. *Kesme 1* amaç fonksiyonunun grafiğinin bir yüzeyi değildir. Kesmeler $prod^1 = 1$ ve $prod^1 = 2$'de amaç değerini karşılamaktadır. Ancak kesmeler bunu sağlamak zorunda değildirler. Periyot 1'in kesmelerinin geri kalanları Q_2^2'deki sınırlardan elde edilmektedir[27].

İçiçe L-şekil yöntemi, yukarıda görüldüğü gibi, çok aşamalı stokastik doğrusal programlar için geliştirilmiştir. Ancak, amaç fonksiyonunun konveks kuadratik, kısıtlar kümesinin polihedral ve rassal değişkenlerin kesikli olduğu durumlar için, *kuadratik içiçe ayrıştırma yöntemi* geliştirilmiştir[28].

Bir çok iki aşamalı yöntemler, çok aşamalı problemlere blok ayrılabilirlik özelliği kullanılarak genişletilmişlerdir. Bunlardan birisi, bazı ortalama değerlerden sapmaları sadece mevcut aşamayla ilgili bir cezayla düzeltilebileceğini varsaymaktadır. Bu yöntem temel olarak her aşamada bir basit telafi stratejisini uygulamaktadır. Diğer önemli bir yaklaşım da, doğrusal olmayan problemler için özel bir potansiyele sahip olan *köşegen kuadratik yaklaşım*dır *(DQA)*[29].

4.3. Probabilistik Kısıtlı Stokastik Programlama

Bazı modellerde kısıtlar, bazı *olasılık* ya da *güvenilirlik seviyesi*nde sağlanabilmektedir. Bu tür stokastik programlar özel olarak, *probabilistik* ya da *şans kısıtlı programlama* olarak adlandırılmaktadır. Probabilistik programlamada, amaç fonksiyonu sıklıkla bir beklenen değer fonksiyonu veya bazı sonuçların varyansı

[27] **A.e.**, ss. 241-243.
[28] **A.e.**, s. 244.
[29] **A.e.**, ss. 251-252.

olabileceği gibi bazı oluşların olasılığı da olabilmektedir. Diğer bir tip de, bir rassal fonksiyonun sıklık derecesi (quantile) bir amaç fonksiyonu olabilmektedir[30].

3. bölümde deterministik eşdeğerler elde edilirken probabilistik veya şans kısıtlı programlama genel olarak tanımlanmıştı. Aşağıda probabilistik kısıtların bazı özellikleri yer almaktadır.

4.3.1. Probabilistik Kısıtların Bazı Özellikleri

Aşağıdaki gibi verilen,

$$P(\{\xi \mid g(x,\xi) \leq 0\}) \geq \alpha$$

kısıtlarının oluşturduğu uygun küme,

$$B(\alpha) = \{x \mid P(\{\xi \mid g(x,\xi) \leq 0\}) \geq \alpha\}$$

şeklinde verilsin.

Önerme 9. $g(.,.)$, (x,ξ)'de ortak (jointly) konveks ve P konkavımsı (quasi-concave) ise, uygun küme $B(\alpha) = \{x \mid P(\{\xi \mid g(x,\xi) \leq 0\}) \geq \alpha\}$ tüm $\forall \alpha \in [0,1]$ için konvekstir.

Burada sözü edilmesi gereken önemli bir nokta da, olasılık ölçüsü konkavımsı ise, karşılık gelen dağılım fonksiyonu F_{ξ} konkavımsıdır. Ancak, genel olarak, dağılım fonksiyonu F_{ξ} konkavımsı ise karşılık gelen olasılık ölçüsü P konkavımsı olmayabilir.

---

[30] **A.e.,** s. 104.

Diğer önemli bir nokta ise, *log-konkav* (logaritması konkav) olasılık ölçüleri konkavımsı ölçülerin bir alt sınıfıdır.

Önerme 10. P sürekli tipte $\Xi = R^k$ üzerinde tanımlı ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip bir olasılık ölçüsü olsun. P, aşağıdaki iddialar sağlamaktadır.

- P log-konkavdır $\Leftrightarrow$ f log-konkav ise,
- P konkavımsıdır $\Leftrightarrow$ $f^{-1/k}$ konveks ise.

Önerme 9'a ilave olarak, genel olarak matematik programlarda, uygun kümelerin kapalı oldukları bilinmiyor ise, çözümlerin varlığını ileri sürmemiz imkansız olmaktadır. Aşağıda ispatsız olarak verilen önerme "kapalılık" ile ilgilidir.

Önerme 11. $g : R^n \times \Xi \to R^m$ sürekli ise, uygun küme $B(\alpha)$ kapalıdır.

Ortak şans kısıtlı stokastik programlar için durum, telafili stokastik programlardan daha zor görünmektedir. Ancak, bazı ilave varsayımlar altında uygun kümelerin konvekslik ve kapalılıkları ileri sürülebilmektedir (Önerme 9 ve Önerme 11)[31].

Teorem 9. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ rassal değişkenleri ortak normal dağılıma sahip ise,

$$P(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n \le 0) \ge \alpha \qquad (4.48.)$$

ifadesini sağlayan $x \in R^n$ kümesinin vektörleri,

$$\mu^T x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T C x} \le 0 \qquad (4.49.)$$

[31] Kall, **a.g.e.** ss. 41-47.

ifadesini de sağlarlar. Burada, $\mu_i = E(\xi_i), i = 1,2,...,n$, $\mu = (\mu_1,...,\mu_n)^T$, C, $\xi = (\xi_1, \xi_2,...,\xi_n)^T$ rassal vektörünün kovaryans matrisi, $0 < \alpha < 1$ ve Φ standart normal dağılım fonksiyonudur.

İspat. Beklenen değer ve varyans,

$$E(\xi^T x) = \mu^T x$$
$$Var(\xi^T x) = E(x^T(\xi - \mu)(\xi - \mu)^T x) = x^T C x$$

biçiminde ifade edilebilir. Bazı x için, $x^T C x = 0$ ise, *1* olasılığıyla $\xi^T x = \mu^T x$ elde edilir ve böylece (4.48.) ve (4.49.) ifadeleri denk ifadeler olur. Diğer taraftan, bazı x değerleri için, $x^T C x > 0$ ise,

$$\frac{(\xi - \mu)^T x}{\sqrt{x^T C x}}$$

ifadesi, *N(0,1)* dağılımına (standart normal dağılım) sahiptir. Buradan,

$$P(x^T \xi \le 0) = P((x^T C x)^{-1/2}(\xi - \mu)^T x \le (x^T C x)^{-1/2} \mu^T x)$$
$$= \Phi(-(x^T C x)^{-1/2} \mu^T x)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.48.),

$$\Phi\left(\frac{-\mu^T x}{\sqrt{x^T C x}}\right) \ge \alpha$$

ifadesine denktir ki bu da (4.49.)'a denktir.

Teorem 10. $\alpha \geq 1/2$ ise, (4.48.)'i sağlayan vektörlerin kümesi konvekstir[32].

Yukarıdaki teoremler aşağıda daha ayrıntılı olarak irdelenmiştir.

4.3.2. Probabilistik Kısıtlı Problemlerin Çözüm Yöntemleri

Genel probabilistik programlama modelleri bilinen doğrusal olmayan programlama yöntemleri kullanılarak çözülebilir. Ancak, *ortak şans kısıtlı stokastik lineer program* formundaki modellere doğrudan söz konusu yöntemleri uygulamak daha çok çaba gerektirmektedir. Çünkü, ortak şans kısıtlı stokastik lineer program,

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} c^T(\tilde{\xi})x$$

$$\text{öyle ki} \quad P(\{\xi | T(\xi)x \geq h(\xi)\}) \geq \alpha$$

veya

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} \left\{ c^T x + Q(x, \tilde{\xi}) \right\}$$

burada,

$$Q(x,\xi) = \min \left\{ q^T y \middle| Wy \geq h(\xi) - T(\xi)x, y \in Y \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, bu modellerde, defalarca gradyan elde etmek ve

$$P(\{\xi | T(\xi)x \geq h(\xi)\}) \text{ veya } E_{\tilde{\xi}} \left\{ c^T x + Q(x, \tilde{\xi}) \right\}$$

gibi fonksiyonları değerlendirmek gerekmektedir. Bu değerlendirmelerin her birisi çok değişkenli nümerik integral alma gerektirmektedir. Dolayısıyla, bu yaklaşım etkin çözülebilir problemler kümesinin dışında kalmaktadır. Bu nedenle, öncelikle bilinen doğrusal olmayan programlama yöntemlerinin bazı temel fikirlerini

---

[32] Andras Prékopa, **Stochastic Programming,** Hungary, Kluwer Academic Publishers, 1995, ss. 311-312.

izleyebiliriz. Ancak, aynı zamanda, bu problemlerdeki integral alma işlemlerinden de kaçınmak durumundayız.

Diğer taraftan, şans kısıtları kolaylıkla konveks olmayan uygun kümeleri tanımlayabilmektedir. Global optimumun bulunmak istendiği problemlerde bu hesaplama zorluğu doğurmaktadır. Bunun bir istisnası aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Önerme 12. Uygun küme,

$$B(1) := \{x \mid P(\{\xi \mid T(\xi)x \geq h(\xi)\}) \geq 1\}$$

konvekstir.

Önerme 12'de verilen iddia kesikli dağılımlar için de genelleştirilebilir. Özetle, kesikli dağılımlar için, yeterince yüksek seçilmiş güvenirlik seviyesinde bir konveks probleme sahibiz demektir. $E_{\tilde{\xi}} c(\tilde{\xi})$ yerine c yazarsak, X konveks polihedral olmak üzere,

$$\min_{x \in X} c^T x$$

$$\text{öyle ki } T(\xi_j)x \geq h(\xi_j),\ j = 1,\ldots,r$$

doğrusal programını çözmek zorunda kalırız.

Bu gözlem bazı özel kesikli dağılımlı şans kısıtlı problemler için faydalı olabilecektir. Ancak, sürekli dağılımlı şans kısıtlı ve $\alpha < 1$ güvenirlik seviyesine sahip modeller için, kesikli dağılımlarla sürekli dağılıma yaklaşmanın her zaman başarılı olabileceğini söyleyemeyiz. Çünkü, kesikli dağımla yaklaşılırken $\min_j p_j < 1 - \alpha$ olduğu aşamalarda, orijinal problem konveks olsa da, yaklaşım problemi konveksliğini kaybedebilir. Konveks problemlere konveks olmayanlarla yaklaşmak bizim amacımız dışındadır.

Çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında probabilistik programların nasıl çözülebileceğine bakalım. Varsayımlarımız altında, ortak şans kısıtlı bir program bir konveks program olabilmekte ve ayrık şans kısıtlı programlar da standart doğrusal olmayan programlama algoritmalarına uyacak şekilde bir deterministik konveks program halinde ifade edilebilmektedirler.

4.3.2.1. Ortak Probabilistik Kısıtlı Problemler

Aşağıdaki özel stokastik doğrusal program üzerinde yoğunlaşalım.

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{öyle ki } P(\{\xi | Tx \geq \xi\}) \geq \alpha \\ &Dx = d \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.50.)$$

İlgili önermeye göre, dağılım fonksiyonu F konkavımsı ise, uygun küme $B(\alpha)$ bir kapalı konveks kümedir.

$\tilde{\xi}$'nin (çok değişkenli) normal dağıldığı varsayımı altında, biliyoruz ki F log-konkavdır. Dolayısıyla, bir düzgün konveks programa sahibiz. Bu özel durum için (4.50)'yi çözmek için ceza ve kesme düzlemi yöntemlerinin uyarlanması için çabalar harcanmıştır. Ayrıca *indirgenmiş gradyan yöntemi* de uygulanabilmektedir.

Tüm bu çabalar $F(Tx) = P(\{\xi | Tx \geq \xi\})$ ve gradyanı $\nabla_x F(Tx)$'in değerlendirilmesiyle eşleştirilen "tam olarak" nümerik integral alma işleminden kaçınmak içindir. Bunun nasıl yapıldığını görmek için, probabilistik kısıtlar için geliştirilen ve indirgenmiş gradyan yöntemini kullanarak bir fonksiyonun minimizasyonunu sağlayan *PROCON* bilgisayar yazılımının bir iterasyonunu kısaca görelim.

Yeni bir notasyonla,

$$G(x) := P(\{\xi \mid Tx \geq \xi\})$$

olsun ve x,

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{öyle ki } G(x) \geq \alpha \\ &D x = d \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.51.}$$

programında uygun olsun. Burada, D tüm satır rankına sahip ve temel (B) ve temel olmayan (N) olmak üzere $D = (B, N)$ biçiminde ifade edilebilsin. Diğer bölümlenmeler $x^T = (y^T, z^T)$, $c^T = (f^T, g^T)$ ve azalan yön $w^T = (u^T, v^T)$ şeklinde ifade edilebilsin. Bazı tolerans $\varepsilon > 0$ için,

$$y_j > \varepsilon, \forall j \text{ (tam dejenere değil)}$$

olur. Daha sonra, araştırma yönü $w^T = (u^T, v^T)$ aşağıdaki doğrusal program ile ele alınır.

$$\begin{aligned} &\max \tau \\ &\text{öyle ki } f^T u + g^T v \leq -\tau \\ &\nabla_y G(x)^T u + \nabla_x G(x)^T v \geq \theta \tau \text{ eğer } G(z) \leq \alpha + \varepsilon \\ &Bu + Nv = 0 \\ &v_j \geq 0 \text{ eğer } z_j \leq \varepsilon \\ &\|v\|_\infty \leq 1. \end{aligned} \tag{4.52.}$$

Burada, $\theta > 0$, G ve $\|v\|_\infty = \max_j \{|v_j|\}$'nin yönsel türevleri için sabit bir ağırlık parametresidir. Yukarıdaki varsayıma göre, (4.52.)'den,

$$u = -B^{-1}N\,v$$

elde edilir ki bu da (4.52)'yi aşağıdaki doğrusal programa dönüştürür,

$$\begin{aligned} &\max\ \tau \\ &\text{öyle ki}\ \ r^T v \le -\tau \\ &s^T v \ge \theta\,\tau \ \ \text{eğer}\ G(x) \le \alpha + \varepsilon \\ &v_j \ge 0 \ \ \text{eğer}\ \ z_j \le \varepsilon \\ &\|v\|_\infty \le 1. \end{aligned} \qquad (4.53.)$$

Burada,

$$r^T = g^T - f^T B^{-1}N$$
$$s^T = \nabla_z G(x)^T - \nabla_y G(x)^T B^{-1}N$$

ifadeleri amaç ve probabilistik kısıt fonksiyonlarının indirgenmiş gradyanlarıdır. Program (4.53.) ve dolayısıyla (4.52.) boş olmayan ve sınırlı uygun kümesinden dolayı her zaman çözülebilmektedir. Elde edilen (τ^*, u^{*T}, v^{*T}) çözümüne bağlı olmak üzere yöntem aşağıdaki şekilde ilerlemektedir.

Durum 1. $\tau^* = 0$ iken, ε, 0 ile yer değiştirilir ve (4.51.) yeniden çözülür. Tekrar $\tau^* = 0$ ise, uygun çözüm $x^T = (y^T, z^T)$ optimaldir. Aksi halde, *Durum 2*'nin adımlarıyla devam edilir ve orijinal $\varepsilon > 0$ ile başlanır.

Durum 2. $0 < \tau^* \le \varepsilon$ iken, aşağıdaki döngüye girilir;

Adım 1. $\varepsilon := 0.5\varepsilon$ olsun.

Adım 2. (4.51.)'i çöz. Halâ $\tau^* \le \varepsilon$ ise, *Adım1*'e git; aksi halde *Durum 3*'ü uygula.

Durum 3. $\tau^* \rangle \varepsilon$ iken, $w^{*T} = (u^{*T}, v^{*T})$ araştırma yönü olarak kabul edilir.

Bir araştırma yönü $w^{*T} = (u^{*T}, v^{*T})$ bulunduysa, ikiye bölme kullanılarak bir doğru araştırması (line search) uygulanabilir. Doğru araştırması bu durumda, $\mu \geq 0$ olmak üzere, $x + \mu w^*$ ışını ile ε toleranslı sınır $bdB(\alpha)$'nın kesişimini bulunması gerekmektedir. Bu durumda $G(x)$'in bulunması önem arz etmektedir. Bu amaç için, $G(x)$ ve gradyan $\nabla G(x)$'in alt ve üst sınırlarının etkin hesaplanmasına izin veren özel bir Monte Carlo tekniği kullanılmaktadır.

Doğru araştırmasından gelen sonuçlara göre yapılan iterasyonda da tam dejenere olmama özelliği sağlanıyorsa, D'nin aynı bölümlenmesi ile tüm adım tekrarlanır. Aksi halde, yeniden tam dejenere olmama özelliğini devam ettirecek şekilde bir temel değiştirilir[33].

4.3.2.2. Ayrık Probabilistik Kısıtlı Problemler

Daha önce tanımlanan ayrık (veya tek) şans kısıtlı stokastik lineer programları ele alalım.

$$\min_{x \in X} E_{\tilde{\xi}} c^T(\tilde{\xi}) x$$

$$\text{öyle ki} \quad P(\{\xi | T_i(\xi) x \geq h_i(\xi)\}) \geq \alpha_i, i = 1,...,m, \qquad (4.54.)$$

Burada, $T(\xi)$'nin *i.* satırı $T_i(\xi)$'dir. Buradaki asıl sorun, (4.54.)'teki kısıtların herhangi biriyle uygunluk kümesinin,

$$\{x | P(\{\xi | T_i(\xi) x \geq h_i(\xi)\}) \geq \alpha_i\}$$

[33] Kall, a.g.e., ss. 231-235.

konveks olup olmadığı ya da hangi koşullar altında konveks olduğudur. $T_i(\xi) \equiv T_i$ (sadece sağ taraf $h_i(\tilde{\xi})$'nin rassal olduğu) özel durumu için bu soruyu yanıtlamak kolaydır. Yani, $h_i(\tilde{\xi})$'nin dağılım fonksiyonu F_i olmak üzere, uygunluk kümesi

$$\{x | P(\{\xi | T_i x \geq h_i(\xi)\}) \geq \alpha_i\} = \{x | F_i(T_i x) \geq \alpha_i\} = \{x | T_i x \geq F_i^{-1}(\alpha_i)\}$$

olarak ifade edilebilir. Bu özel şans kısıtının uygunluk kümesi sıradan bir doğrusal kısıtın uygunluk kümesidir.

Genel durum için, notasyonu basitleştirelim. $(\tilde{t}^T, \tilde{h})^T$ bir rassal vektör olmak üzere,

$$B_i(\alpha_i) := \{x | P(\{(t^T, h)^T | t^T x \geq h\}) \geq \alpha_i\}$$

olsun. $(\tilde{t}^T, \tilde{h})^T$, beklenen değeri $\mu \in R^{n+1}$ olan bir *ortak normal dağılım*a sahip olsun ve *(n+1) x (n+1)* boyutlu kovaryans matrisi S olsun. Herhangi sabit x için, $\tilde{\zeta}(x) := x^T \tilde{t} - \tilde{h}$ olsun. Uygunluk kümesi $\tilde{\zeta}(x)$ cinsinden,

$$B_i(\alpha_i) = \{x | P(\zeta(x) \geq 0) \geq \alpha_i\}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Olasılık teorisinden bilindiği gibi, $\tilde{\zeta}(x)$ ortak normal dağılan rassal değişkenlerin lineer kombinasyonu olduğundan, $\tilde{\zeta}(x)$ normal dağılan (bir-boyutlu), $m_{\tilde{\zeta}}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \mu_{n+1}$ beklenen değerli $F_{\tilde{\zeta}}$ fonksiyonuna sahiptir. *(n+1)* vektör kullanılarak, $z(x) := (x_1, ..., x_n, -1)^T$ ve varyans $\sigma_{\tilde{\zeta}}^2 = z(x)^T S\, z(x)$ olarak yazılabilir. Dejenere olmayan çok değişkenli normal dağılımın S kovaryans matrisi pozitif tanımlı olduğundan, varyans $\sigma_{\tilde{\zeta}}^2$ ve standart sapma $\sigma_{\tilde{\zeta}}$, x'de konvekstir. Ayrıca, $z_{n+1}(x) = -1$ ışığında $\forall x$ için $\sigma_{\tilde{\zeta}} > 0$'dir. Dolayısıyla buradan,

$$B_i(\alpha_i) = \{x | P(\zeta(x) \geq 0) \geq \alpha_i\}$$

$$= \left\{ x | P\left(\frac{\zeta(x) - m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \geq \frac{-m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \right) \geq \alpha_i \right\}$$

yazılabilir. Normal dağılan rassal değişken $\tilde{\zeta}(x)$ için $\left|\zeta(x) - m_{\tilde{\zeta}}(x)\right| / \sigma_{\tilde{\zeta}}(x)$ rassal değişkeni *standart normal dağılım fonksiyonu* Φ'ye sahiptir. Buradan,

$$B_i(\alpha_i) = \left\{ x | 1 - \Phi\left(\frac{-m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \right) \geq \alpha_i \right\}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$B_i(\alpha_i) = \left\{ x | 1 - \Phi\left(\frac{-m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \right) \geq \alpha_i \right\}$$

$$= \left\{ x | \Phi\left(\frac{-m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \right) \leq 1 - \alpha_i \right\}$$

$$= \left\{ x | \frac{-m_{\tilde{\zeta}}(x)}{\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)} \leq \Phi^{-1}(1 - \alpha_i) \right\}$$

$$= \left\{ x | -\Phi^{-1}(1 - \alpha_i)\sigma_{\tilde{\zeta}}(x) - m_{\tilde{\zeta}}(x) \leq 0 \right\}$$

elde edilir. Burada, x'de $m_{\tilde{\zeta}}(x)$ lineer afin ve x'de $\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)$ konvekstir. Bu nedenle,

$$-\Phi^{-1}(1 - \alpha_i)\sigma_{\tilde{\zeta}}(x) - m_{\tilde{\zeta}}(x) \leq 0$$

kısıtının sol tarafı konvekstir ancak ve ancak $\Phi^{-1}(1 - \alpha_i) \leq 0$'dır. Tam olarak bu durum gerçeklenir ancak ve ancak $\alpha_i \geq 0.5$. Dolayısıyla, normal dağılımlar ve $\alpha_i \geq 0.5$ varsayımları altında, (4.54.)'ün yerine,

$$-\Phi^{-1}(1-\alpha_i)\sigma_{\tilde{\zeta}}(x)-m_{\tilde{\zeta}}(x)\leq 0$$

tipindeki kısıtlardan oluşan ve standart doğrusal olmayan programlama yaklaşımlarıyla çözülebilen bir deterministik konveks program elde edilmektedir[34].

Yukarıda da değinildiği gibi, probabilistik kısıtlı stokastik programların deterministik eşdeğerleri doğrusal olmayan programlar olarak elde edilebilmektedir. Bunun için, daha somut olarak, teorik alt yapı aşağıda verilmiştir.

Aşağıdaki gibi verilen bir şans kısıtlı (probabilistik) programlama ele alalım.

$$max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{öyle ki } P\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i\right)\geq 1-\alpha_i, i=1,...,m; x_j\geq 0, \forall j$$

Burada $0\langle\alpha_i\langle 1$'dir ve tüm a_{ij} ve b_i'lerin rassal değişkenler olduğu varsayılmaktadır. Tüm rassal değişkenlerin bilinen ortalama ve standart sapmalarla *normal dağıldığını* düşünelim. Burada üç durum söz konusudur. Bunlardan ilki, a_{ij}'nin rassal olduğu, ikincisi b_i'nin rassal olduğudur. Sonuncusu ise, a_{ij} ve b_i'lerin rassal etkilerinin birleştirildiği durumdur.

Durum 1. Her a_{ij}, ortalama $E(a_{ij})$ ve sapma $var(a_{ij})$ ile normal dağılsın. Ayrıca, a_{ij} ve $a_{i'j'}$'nin kovaryansı $cov(a_{ij}, a_{i'j'})$ ile verilsin. i.kısıtı ele alalım.

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i\right\}\geq 1-\alpha_i$$

ve

[34] **A.e., ss. 235-236.**

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

biçiminde tanımlayalım. t_i,

$$E(t_i) = \sum_{j=1}^{n} E(a_{ij}) x_j \quad \text{ve} \quad var\ t_i = X^T S_i X$$

ile normal dağılsın. Burada, $X = (x_1, ..., x_n)^T$ ve *i.* kovaryans matrisi,

$$S_i = \begin{pmatrix} \text{var}(a_{i1}) & \dots & \text{cov}(a_{i1}, a_{in}) \\ . & & . \\ \text{cov}(a_{in}, a_{i1}) & \dots & \text{var}(a_{in}) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda, (4.54.)'deki programın çözümünde olduğu gibi,

$$P(t_i \le b_i) = P\left(\frac{t_i - E(t_i)}{\sqrt{\text{var}(t_i)}} \le \frac{b_i - E(t_i)}{\sqrt{\text{var}(t_i)}} \right) \ge 1 - \alpha_i$$

elde edilir. Burada, $[t_i - E(t_i)]$ / $\sqrt{\text{var}(t_i)}$ ifadesi, ortalaması sıfır ve standart sapması bir olan standart normaldir. Yani,

$$P(t_i \le b_i) = \Phi\left(\frac{b_i - E(t_i)}{\sqrt{\text{var}(t_i)}} \right)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, Φ, standart normal dağılımın kümülatif yoğunluk fonksiyonudur. $K_{\alpha i}$, standart normal tablo değeri ve

$$\Phi(K_{\alpha i}) = 1 - \alpha_i$$

olsun. Bu durumda $P(t_i \le b_i) = 1 - \alpha_i$ ifadesi ancak ve ancak

$$\frac{b_i - E(t_i)}{\sqrt{\text{var}(t_i)}} \ge K_{\alpha i}$$

olması durumunda gerçekleşir. Bu da aşağıdaki doğrusal olmayan kısıtı verir;

$$\sum_{j=1}^{n} E(a_{ij})x_j + K_{\alpha i}\sqrt{X^T S_i X} \le b_i$$

Normal dağılımın bağımsız olduğu özel durum için, $cov\ (\ a_{ij}, a_{i'j'}) = 0$ olur ve söz konusu kısıt,

$$\sum_{j=1}^{n} E(a_{ij})x_j + K_{\alpha i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{var}(a_{ij})x_j^2} \le b_i$$

şekline indirgenir. Bu kısıt, aşağıdaki dönüşüm kullanılarak ayrık programlama formuna getirilebilir;

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{var}(a_{ij})x_j^2}, \quad \forall i,$$

Böylece orjinal kısıt,

$$\sum_{j=1}^{n} E(a_{ij})x_j + K_{\alpha i} y_i \le b_i$$

ve

$$\sum_{j=1}^{n} \text{var}(a_{ij})x_j^2 - y_i^2 = 0$$

denklemlerine eşdeğer hale gelir.

Durum 2. Sadece b_i, ortalama $E(b_i)$ ve sapma $var(b_i)$ ile normal dağılsın. Yapılan analiz *Durum 1*'dekine benzerdir. Aşağıdaki probabilistik kısıtı ele alalım.

$$P\left(b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \geq \alpha_i$$

Durum 1'deki gibi,

$$P\left(\frac{b_i - E(b_i)}{\sqrt{\text{var}(b_i)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - E(b_i)}{\sqrt{\text{var}(b_i)}}\right) \geq \alpha_i$$

elde edilir. Bu değer sadece eğer,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - E(b_i)}{\sqrt{\text{var}(b_i)}} \leq K_{\alpha i}$$

ise sağlanabilir. Böylece probabilistik kısıt aşağıdaki deterministik doğrusal kısıta,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq E(b_i) + K_{\alpha i}\sqrt{\text{var}(b_i)}$$

eşdeğer olur.

*Durum 3.*Tüm a_{ij} ve b_i 'ler rassal normal değişkenler olsun.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

kısıtını ele alalım. Söz konusu kısıtı,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0$$

biçiminde de ifade edebiliriz. Tüm a_{ij} ve b_i'ler normal olduğundan, istatistik teorisinden $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$'nin de normal dağıldığını söyleyebiliriz. Bu durumda, probabilistik kısıtın *Durum 1*'de verilenle aynı duruma indirgendiğini ve aynı şekilde ele alınabileceğini gösterir[35].

Probabilistik programlama problemlerine ilişkin bir noktaya daha değinmek faydalı olacaktır. Probabilistik programlama modellerinde, şans kısıtları kendi deterministik eşdeğer kısıtlarıyla değiştirilmektedir. Bu deterministik kısıtların gerçeklenme olasılığı *1*'dir. Dolayısıyla bu kısıtlar *kesinlik eşdeğerleri* olarak da adlandırılmaktadır[36].

Probabilistik programlar ayrıca senaryo yaklaşımları ile de ifade edilebilmektedir. Bunun için, reel sayılardan *{0,1}* kümesine bir *gösterge fonksiyonu* tanımlanarak sonuca ulaşılmaktadır. Şans kısıtlı programlarda, genellikle sürekli dağılımlar kullanılmasına karşın doğrudan ya da olasılık dağılımına amprik olarak yaklaşmak amacıyla kesikli dağılımlar da kullanılmaktadır[37].

Gözlem sayısının azlığı ya da dağılımın tam olarak belirlenemediği durumlarda probabilistik kısıtların *parametrik olmayan* yaklaşımlar kullanılabilir. Bu

---

[35] Hamdy A. Taha, **Yöneylem Araştırması,** 6. Baskı, Çev. Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf, İstanbul, Literatür Yayınları, 2000, s. 799-803.

[36] Salah E. Elmaghraby, Hanijanto Soewandi, Ming-Jong Yao, "Chance-Constrained Programming in Activity Networks: A Critical Evaluation," **European Journal of Operational Research,** No: 131, 2001, s. 443.

[37] Andrzej Ruszczynski, "Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra," **Mathematical Programming,** Seies A 93, 2002, s. 196.

yaklaşımın altında yatan ana fikir *Chebyshev eşitsizliği*dir. Buna göre, x_i rassal değişkenler olmak üzere,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b\right) \geq \alpha$$

kısıtının deterministik eşdeğeri,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i) + (1-\alpha)^{1/2} \sqrt{x^T C x} \leq b$$

olarak elde edilmektedir[38].

Bu noktada, iki aşamalı stokastik programlarla şans kısıtlı programlar arasındaki ilişkilere değinmek faydalı olacaktır. Genel olarak, şans kısıtlı programlarla iki aşamalı programları birbirinin yerine ikame etmek beklenmemektedir. Çünkü pratik uygulamalarda, uygunluğun olasılık seviyesi gerekebilirken uygunsuzluk için ceza maliyetlerini belirtmek olanaksızdır. Ayrıca, buraya kadar irdelenen konular ışığında, şans kısıtlı programlar konveksliğini bazen kaybetmelerine rağmen iki aşamalı programlar her zaman konveksliğini korumaktadırlar[39]. Bununla birlikte ilgili teoreme göre, verilen çözülebilen basit doğrusal telafili bir stokastik programa eşdeğer bir şans kısıtlı program vardır. Benzer şekilde, bir optimal çözüme sahip şans kısıtlı program, *aynı* optimal çözüme sahip basit doğrusal telafili bir stokastik programla eşleştirilebilir[40].

---

[38] Athanasios Kampas, Ben White "Probabilistic Programming for Nitrate Pollution Control: Comparing Different Probabilistic Constraint Approximations" **European Journal of Operational Research,** No: 147, 2003, ss. 222-223.
[39] Peter Kall, **Stochastic Linear Programming,** New York, Springer-Verlag, 1976, s. 90.
[40] Stanley J. Garstska, **"The Economic Equivalence of Several Stochastic Programming Models," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, s. 85.

4.4. Rassal Amaç Fonksiyonunun Deterministik Eşdeğeri

Rassal amaç fonksiyonunun $h(x,\xi)$ ile verildiğini ve *minimize* edilmek istendiğini varsayalım. Rassal amaç fonksiyonunun deterministik eşdeğerinin bulunmasına ilişkin bazı yöntemler aşağıda verilmiştir.

i) Rassal amaç fonksiyonu $h(x,\xi)$ olsun. Amaç fonksiyonunun beklenen değeri alınarak deterministik eşdeğere dönüştürülebilir. Örneğin, $h(x,\xi)$, x'e göre lineer ve $h(x,\xi)=\xi^T x$ ise, deterministik eşdeğer amaç fonksiyonu, $E[h(x,\xi)]=[E(\xi)]^T x$ elde edilir ki bu ifade de x'e göre lineerdir.

Bu özelliğin pratikte kullanılabilmesi için iki koşul gerekmektedir. Birincisi, sistem bir çok gözlemde kendi performansını bağımsız olarak tekrarlamalı ki çıktıların ortalaması beklenen değere yeterince yakın olsun. İkincisi ise, çıktıların değişim ölçüsü çok büyük olmamalıdır.

ii) Amaç fonksiyonu, kendi beklenen değerinin ve standart sapmasının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir. Amaç fonksiyonu, $h(x,\xi)$ ise deterministik eşdeğeri,

$$\beta_1 E[h(x,\xi)]+\beta_2\sqrt{Var[h(x,\xi)]}$$

biçiminde elde edilmektedir. Burada, $\beta_1>0, \beta_2>0$ keyfi sabitlerdir. Bazı yazarlar da, standart sapma yerine *varyans*ın alınmasını önermektedirler.

iii) Diğer bir yöntem de, Kataoka'nın önerdiği yöntemdir. Bu yöntem yeni bir amaç fonksiyonu ve yeni bir kısıt oluşturma temeline dayanmaktadır. Oluşan stokastik program,

$$\min d$$
$$P(h(x,\xi) \le d) \ge \alpha$$
$$x \in D$$

şeklindedir. Burada, α önceden belirlenmiş (genelde büyük) $0 \langle \alpha \langle 1$ koşulunu sağlayan bir olasılık değeri ve D diğer kısıtlarla belirlenmiş bir kümedir.

Amaç fonksiyonu $h(x,\xi) = \xi^T x$ biçiminde ve ξ çok değişkenli normal dağılıma sahip ise, söz konusu program,

$$\min \left\{ \mu^T x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^T C x} \right\}$$
$$\text{öyle ki} \quad x \in D$$

biçimine dönüşür. Burada, Φ standart normal olasılık dağılım fonksiyonu ve μ ve C, ξ'nin beklenen değeri ve kovaryans matrisidir. Yukarıdaki amaç fonksiyonunun konveks olabilmesi için Teorem 10'da belirtildiği gibi $\alpha \ge 1/2$ olmalıdır[41].

4.5. Stokastik Tamsayılı Programlama

Son yıllarda stokastik programlamada tamsayılı değişkenler büyük önem kazanmıştır. Sürekli değişkenli klasik stokastik lineer programlar konvekslik özelliklerinin mirasından yararlansa da bu durum, programlara tamsayılı olma kısıtı girince farklılık arz edebilmektedir[42]. Aşağıda tamsayılı telafi problemleri ve probabilistik kısıtlı tamsayılı problemler üzerinde kısaca durulacaktır.

---

[41] Prékopa, **a.g.e.,** ss. 243-246.
[42] Rüdiger Schultz, "Stochastic Programming with Integer Variables," **Mathematical Programming,** Series B 97, s. 285.

4.5.1. Telafi Problemleri

Bazı stokastik programlarda, birinci veya ikinci aşamadaki bazı değişkenler tamsayı olmaktadırlar. Bazılarında ise sadece *0* veya *1* değerlerini alabilmektedirler. Genel olarak,

$$\min_{x\in X} z = c^T x + E_{\tilde{\xi}} \min\left\{q(\omega)^T y \middle| Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \in Y\right\}$$
$$\text{öyle ki } Ax = b,$$

Burada, c, $b, \tilde{\xi}$, A, W,T ve h daha önce tanımlandığı gibi yer almaktadır. Bununla birlikte, X ve/veya Y, x ve/veya y üzerinde bazı tamsayı veya ikili kısıtlamalar içermektedir. Bu tanımla, bir deterministik eşdeğer program,

$$\min_{x\in X} z = c^T x + E_{\tilde{\xi}} Q(x, \xi(\omega))$$
$$Ax = b$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, ikinci aşamanın beklenen değeri $E_{\tilde{\xi}} Q(x, \xi(\omega))$ ve ikinci aşamanın uygunluk kümesi $K_2 = \left\{x \middle| E_{\tilde{\xi}} Q(x, \xi(\omega)) < \infty\right\}$ üzerinde durulacaktır. Tamsayı kısıtlamaları sadece X'de ise ikinci aşamanın beklenen değeri ve K_2, sürekli durumdakiyle aynı özelliklere sahiptir. Söz konusu tamsayı kısıtlamaları ikinci aşamadaysa bazı ilginç durumlar bulunmaktadır. Verilen ξ için $Q(x,\xi)$'nin özellikleri, bir tamsayılı programın sağ tarafı cinsinden yazılan değer fonksiyonunun özellikleriyle aynıdır. Alt toplamsal (subadditive) olmanın yanı sıra, bir tamsayılı programın *değer fonksiyonu*, doğrusal bir fonksiyonla başlanıp ve henüz elde edilmiş fonksiyonların toplamları, maksimumları ve negatif olmayan katlarının alınarak sıklıkla sonlu olarak tekrarlanması ve en yakın tamsayıya yuvarlanmasıyla elde edilmektedir. Bu şekilde elde edilen fonksiyonlara *Gomory fonksiyonları* adı verilmektedir. Maksimum ve yuvarlama işlemleri K_2, $Q(x,\xi)$, $E_{\tilde{\xi}} Q(x,\xi)$'nin bazı istenmeyen özelliklerine neden olmaktadır.

Önerme 13. Bir tamsayılı stokastik programın beklenen telafi fonksiyonu $E_{\tilde{\xi}}Q(x,\xi)$ genellikle konveks değildir ve süreksizdir.

Telafi fonksiyonunun sürekliliği, rassal değişken ***mutlak sürekli*** ise tekrar kazanılabilir.

Önerme 14. Mutlak sürekli rassal değişkenli bir tamsayılı stokastik programın beklenen telafi fonksiyonu $E_{\tilde{\xi}}Q(x,\xi)$ süreklidir.

Önerme 14'e rağmen ikinci aşama beklenen değeri genel olarak yine konvekslik özelliğini kazanmamıştır.

Önerme 15. İkinci aşama uygunluk kümesi $K_2 = \{x | E_{\tilde{\xi}}Q(x,\xi(\omega)) < \infty\}$ genellikle konveks değildir.

Bilindiği gibi, bir matrisin tüm kare alt matrislerinin determinantları *0, 1* veya *-1* ise söz konusu matris *toplam tek-modüler (totally unimodular)* olarak isimlendirilmektedir. Geniş formun kısıt matrisi toplam tek-modüler ise hesaplama açısından çok kullanışlı olabilmektedir. Tüm kısıtların sağ tarafları tamsayı iken karşılık gelen stokastik sürekli programın herhangi bir çözümü tamsayılı olabilmektedir. Toplam tek-modülerlik için geniş olarak kullanılan yeter koşul şöyledir; tüm katsayılar *0, 1* veya *-1*, her değişken en çok iki sıfır olmayan katsayıya sahiptir ve kısıtlar iki grupta toplanmaktadır. Bu gruplar şöyle oluşmaktadır. Bir değişken aynı işaretli iki sıfır olmayan katsayıya sahipse, karşılık gelen iki satır farklı kümelere aittir ve zıt işaretlere sahipse aynı kümelere aittir. Bir basit olmayan stokastik programın geniş formunun kısıt matrisi bu yeter koşulu sağlayamaz. Basitlik olması için, T matrisinin sabit olduğu durumu ele alalım. T 'deki sıfır olmayan katsayıya sahip herhangi bir değişkenin A'da da sıfır olmayan bir katsayıya sahip olduğunu varsayalım. $|\Xi| \geq 2$ ise, geniş formun kısıt matrisi,

$$\begin{pmatrix} A \\ T \\ T \end{pmatrix}$$

biçiminde en az üç sıfır olmayan katsayıya sahip olan bir alt matris içermektedir. Dolayısıyla, sadece çok özel durumlar toplam tek-modüler matrislere götürmektedir.

Genel bir tamsayılı ikinci aşama için, verilen bir x için ikinci aşamanın beklenen değerini bulmak son derece zor bir iştir. İkinci aşamanın beklenen değerinin kabul edilebilir bir sürede hesaplanması ya da yaklaşılması bir istisna oluşturmaktadır. Aşağıda böyle bir istisnaya yer verilecektir.

4.5.2. Basit Tamsayılı Telafi

Rassal vektör $\tilde{\xi}$, R^m'deki Ξ destekli, μ beklenen değerli, $t \in R^m$ için $F(t) = P\{\xi \le t\}$ kümülatif dağılım fonksiyonlu olsun. Basit tamsayı telafili iki aşamalı stokastik program,

$$\min z = c^T x + E_{\tilde{\xi}} \left\{ \min (q^+)^T y^+ + (q^-)^T y^- \,\middle|\, y^+ \ge \tilde{\xi} - Tx, y^- \ge Tx - \tilde{\xi}, y^+ \in Z_+^m, y^- \in Z_+^m \right\}$$
$$\text{öyle ki } Ax = b, x \in X,$$

biçiminde ifade edilir. Burada, X tipik olarak ya negatif olmayan sürekli ya da negatif olmayan tamsayı karar değişkenleridir ve T ve q bilinen ve sabit olduğundan $\tilde{\xi} = h$ alınmaktadır. Sürekli durumdaki gibi, ikinci aşamanın değer fonksiyonunu farklı koordinatlar üzerinden ayrılabilir toplamla ifade edelim. $\chi = Tx$ ise, ikinci aşamanın değeri, χ_i bileşenlerinde ayrılabilmektedir,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(\chi_i)$$

ile

$$\psi_i(x) = E_{\tilde{\xi}_i}\psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)$$

ve

$$\psi_i(\chi_i, \xi_i) = \min\left\{q_i^+ y_i^+ + q_i^- y_i^- \,\middle|\, y_i^+ \geq \tilde{\xi}_i - \chi_i, y_i^+ \geq \chi_i - \tilde{\xi}_i, y_i^+, y_i^- \in Z_+\right\}.$$

Yine sürekli durumdaki gibi, ξ_i'ye karşın χ_i'nin değerlendirilmesinde yapılan hata ikinci aşamada telafi edilmelidir. Bu telafi, bu kez tamsayı olmak zorundadır.

Beklenen eksikliği (kıtlığı),

$$u_i(\chi_i) = E\left[\tilde{\xi}_i - \chi_i\right]^+$$

ve beklenen artıklığı (fazlalığı),

$$v_i(\chi_i) = E\left[\chi_i - \tilde{\xi}_i\right]^+$$

olarak tanımlayalım. Burada, $[x]^+ = \max\{[x], 0\}$'dır. Buradan,

$$\psi_i(\chi_i) = q_i^+ u_i(\chi_i) + q_i^- v_i(\chi_i)$$

elde edilir. Burada, basit tamsayılı telafinin tanımındaki gibi $q_i^+ \geq 0, q_i^- \geq 0$'dır.

Basit tamsayılı telafi üzerindeki çalışmalar böylece beklenen eksiklik ve artıklık üzerindeki çalışmalar haline gelmektedir. Gerekli olmadıkça burada indisleri kullanmayalım. Bazı rassal değişkenler $\tilde{\xi}$ ve $x \in R$ olsun. Beklenen eksiklik,

$$u(x) = E\left[\tilde{\xi} - x\right]^+$$

ve beklenen artıklık,

$$v(x) = E\left[x - \tilde{\xi}\right]^+$$

olsun. Kolaylık olması açısından, sürekli eşlerini de tanımlayabiliriz. Sürekli beklenen eksiklik,

$$\hat{u}(x) = E(\tilde{\xi} - x)^+$$

ve sürekli beklenen artıklık,

$$\hat{v}(x) = E(x - \tilde{\xi})^+$$

olsun.

Önerme 16. Beklenen eksiklik fonksiyonu, negatif olmayan artmayan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyondur. Söz konusu fonksiyon tüm $x \in R$ için sonludur ancak ve ancak $\mu^+ = E\max\{\tilde{\xi},0\}$ sonlu ise.

Teorem 11. Rassal değişken $\tilde{\xi}$, F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip ise,

$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - F(x+k))$ eşitliği sağlanır.

İspat. Önceki tanımlardan,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(1 - F(x+k)) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\tilde{\xi} - x > k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} P\{[\tilde{\xi} - x]^+ = j\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1} P\{[\tilde{\xi} - x]^+ = j\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} jP\{[\tilde{\xi} - x]^+ = j\} = E[\tilde{\xi} - x]^+ = u(x)\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. Benzer sonuçlar $v(x)$ için de sağlanır.

Örnek 8. $\tilde{\xi}$, *[0,a]* 'da düzgün (uniform) yoğunluğa sahip olsun. $0 \le x \le a$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - F(x+k)) = \sum_{k=0}^{[a-x]^+ -1}(1 - F(x+k))$$

$$= \sum_{k=0}^{[a-x]^+ -1}\left(1 - \frac{x+k}{a}\right)$$

$$= [a-x]^+\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{[a-x]^+([a-x]^+ - 1)}{2a}$$

biçiminde ifade edilebilir. $[a-x]^+$ parçalı sabittir. Bu nedenle, *u(x)* parçalı lineer ve konvekstir.

Benzer şekilde,

$$v(x) = \frac{x([x]+1)}{a} - \frac{x([x]+1)}{2a}$$

hesaplanabilir. Aynı şekilde, *v(x)* parçalı lineer ve konvekstir. Görüldüğü gibi, düzgün yoğunluğa sahip basit tamsayılı telafili stokastik program, ikinci aşama telafi fonksiyonu kolayca hesaplanabilen parçalı lineer konveks bir programdır[43].

4.5.3. Probabilistik Kısıtlar

Tamsayılı karar değişkenlerini içeren probabilistik (şans) kısıtlar genel olarak sürekli karar değişkenlerini içeriyormuş gibi ele alınabilir. Tamsayı gereksinimi ile kısıtların deterministik eşdeğerlerinin kesişimlerine ihtiyaç duyulabilmektedir.

---

[43] Birge, **a.g.e.,** ss. 109-117.

Buradaki sorun, bu kesişimin polihedral gösteriminin nasıl elde edileceğidir. Burada bir rotalama problemindeki probabilistik kısıtlar üzerinden devam edilecektir.

Müşterileri temsil eden noktalar kümesi $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olsun. v_0 depoyu temsil etsin ve $v_0=V\cup\{v_0\}$ olsun. Depoda başlayan ve tüm müşterileri tek seferde dolaşıp tekrar depoya dönen bir rota, $k\le n$ olmak üzere, $L=\{i_0=0,i_1,i_2,...,i_k,i_{k+1}=0\}$ sıralı dizisi şeklinde ifade edilebilir. Açıktır ki, $k < n$ ise, tüm müşterileri ziyaret için birden fazla araç gerekmektedir. Verilen C kapasiteli bir aracın her rotayı izlediğini ve müşterilerin d_i taleplerini topladığını varsayalım. Talepler d_i rassal ise, araç verilen rotanın bazı noktalarındaki müşterilerin taleplerini karşılayamayabilir. Bu istenmeyen durum olduğundan, *rotanın başarısızlığı* olarak nitelendirilebilir. Düşük başarısızlık olasılığı gerektiren kapasiteli rotalama için bir probabilistik kısıt uygun olarak ele alınmaktadır,

$$P(\text{herhangi bir rotadaki başarısızlık})\le\alpha\,. \qquad (4.55.)$$

Şimdi de, (4.55.)'i ihlal eden rotanın bir doğrusal eşitsizlikle elimine edilebileceğini gösterelim. Herhangi bir rota L için, $S=\{i_1,i_1,...,i_k\}$ ziyaret edilen müşterilerin indeks kümesi olsun.

$$P\left(\sum_{i\in S}d_i>C\right)>\alpha$$

ise (4.55.) ihlal edilmektedir. $V_\alpha(S)$, S 'deki başarısızlık olasılığının α'yı geçmemesi için S 'nin hizmetine verilmesi gereken en küçük araç sayısını göstersin. Diğer bir deyimle, $V_\alpha(S)$ en küçük tamsayıdır öyle ki

$$P\left(\sum_{i\in S}d_i>C.V_\alpha(S)\right)\le\alpha\,. \qquad (4.56.)$$

$\overline{S} = V_0 - S$ olsun. Böylece, aşağıdaki *alt tur eleme (doğrusal) kısıtı*, S 'deki talebi karşılamak için en az $V_\alpha(S)$ kadar araca gereksinim duyulduğunu belirtmektedir.

$$\sum_{i \in S \text{ veya } i \in \overline{S},\, j \in S} x_{ij} \geq 2V_\alpha(S) \qquad (4.57.)$$

Burada, *arc ij* ziyaret edildiğinde $x_{ij} = 1$ ve aksi halde $x_{ij} = 0$ 'dır. (4.55.) kısıtını ihlal eden rota gerektiğinde lineer kısıt (4.57.) tarafından elenmektedir. Dikkat edilirse, bu sonuca rassal değişkenler üzerindeki hiçbir varsayıma dayanmadan ulaştık. Ayrıca, (4.57.), (4.55.)'in deterministik eşdeğeri değildir. (4.55.)'in analitik bir ifadesini yazmak oldukça güçtür. Sonuç olarak, $\sum_{i \in S} d_i$ 'nin olasılık dağılımını pratikte kolayca elde edilebilir. (4.56.)'daki $V_\alpha(S)$ 'in hesaplanması da büyük zorluk gerektirmemektedir[44].

Probabilistik kısıtlı tamsayılı programlama modelleri için alt ve üst sınırların belirlenmesine yönelik olarak bazı yeni çalışmalar son yıllarda literatüre girmeye başlamıştır. Alt sınırlar genellikle *koni üretme yöntemi* ile elde edilmektedir. Dağılım fonksiyonu hakkında *kısmi* bilgiye sahipken bile marjinal dağılımlar kullanılarak da alt sınırlar elde edilebilmektedir[45].

4.6.Stokastik Programlama ve Oyun Teorisi

Stokastik lineer programlama problemlerindeki oyun teorisi yaklaşımı risk ve belirsizlik altındaki optimal kararların karakterize edilmesinde faydalı olabilmektedir. Çözümlerin daha genelleştirilmiş çerçevesini oluşturmak mümkündür. Yani, önceden belirlenen stratejilerin oyunun aşamalarında güncellenmesi söz konusu olabilmektedir. Bu olgu, sabit rassal olmayan karar kurallarından düşük riskli rassal kararların daha iyi olabileceğini göstermektedir.

---

[44] **A.e.,** ss. 120-121.

[45] Darinka Dentcheva, Andras Prekopa, Andrzej Ruszczynski, "Bounds for Probabilistic Integer Programming Problems," **Discrete Applied Mathematics,** No: 124, 2002, ss. 55-60.

Kısa dönemli diferansiyel oyunlarda da politikaları karşılaştırarak daha geniş ufuk kazanılabilir. Bu olgu da, iki kişili oyunlarda denge çözümüne ulaşmada bilginin önemini vurgulamaktadır[46]. Sıfır toplamlı iki kişili stokastik oyunlarda ödeme matrisinin bazı elemanları oyun başladığında bilinmemektedir. Oyuncuların başlangıçta ödemelerin olasılık dağılımlarını bildikleri varsayılmaktadır. Oyunculardan birisi bilinmeyen ödemeye ilişkin stratejiyi oynadığında dağılımın gerçek değeri diğer oyuncu tarafından bilinmektedir ve işlemler buna göre yürütülmektedir[47].

Stokastik programlamadaki oyun teorisi karar prensibi, veya diğer bir deyimle, ***minimaks karar prensibi*** 1963'te Iosifescu ve Theodorescu tarafından geliştirilmiştir. Stokastik programlama iki-kişili sıfır-toplamlı bir oyun $(X,\mathcal{P},h)$ ile ifade edilebilmektedir. Burada, X birinci oyuncunun stratejiler kümesi, $\mathcal{P}$ ikinci oyuncunun stratejiler kümesi ve $h = h(x,P),\ x \in X, P \in \mathcal{P}$ ödeme fonksiyonudur. x stokastik programlama problemindeki karar değişkeni, X uygun çözümler kümesi, P bir örnek uzay Ω üzerindeki olasılık dağılımı ve $\mathcal{P}$ bu tür olasılık dağılımlarının bir koleksiyonudur.

Oyuncu 1'in herhangi bir optimal saf stratejisi,

$$\sup_{x \in X} \min_{P \in \mathcal{P}} h(\mathrm{x}, \mathrm{P}) \qquad (4.58.)$$

şeklinde ifade edilebilen stokastik programlama probleminin çözümü olarak adlandırılır. Bu, Iosifescu ve Theodorescu tarafından genel varsayımlar altında gösterilmiştir. (4.58.) ifadesi,

$$\sup_{x \in X} \min_{P \in \mathcal{P}} h(\mathrm{x}, \mathrm{P}) = \min_{P \in \mathcal{P}} \sup_{x \in X} h(\mathrm{x}, \mathrm{P})$$

---

[46] Jati K. Sengupta, **Decision Models in Stochastic Programming,** New York, Elsevier Science Publishing Inc., 1982, s. 100.

[47] Gerhard Tintner, Jati K. Sengupta, **Stochastic Economics: Stochastic Processes, Control and Programming,** New York, Academic Press Inc., 1972, s. 212.

eşitliği biçiminde yazılabilir. Ödeme fonksiyonu için, verilen bir deterministik problemden seçilmek üzere bir çok olası durum söz konusudur. T, $\tilde{\xi}$, c rassal olmak üzere problem,

$$\min c^T x$$
$$Tx = \tilde{\xi}$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

biçiminde ise, ödeme fonksiyonunu,

$$h(x,P) = E_{\tilde{\xi}}\left[c^T x + \sum_{i=1}^{r}(q_i^+[\xi_i - T_i x]_+ + q_i^-[T_i x - \xi_i]_+)\right] \qquad (4.59.)$$

olarak yazabiliriz. Burada, P, R^{rn+r+n}'deki olasılık ölçüsü, $r\,x\,n$ boyutlu matris T, $\tilde{\xi}$ bir r-bileşenli ve c bir n-bileşenli vektör olmak üzere $(T,\tilde{\xi},c)$ rassal vektörünün desteğidir.

Yukarıdaki minimaks karar prensibi, olasılık dağılımının belirlenemediği problemlerle başa çıkma olasılığının mümkün olduğunu göstermektedir. Tam olmayan bilgi problemin rassal değişkenlerinin bazı momentlerinde söz konusu olabilmektedir.

Genel problem (4.58.)'e dönelim ve genel moment problemini kullanalım. Ω'da ölçülebilen $u_0(z) \equiv 1, u_k(z), k = 1,2,...,m$ fonksiyonlarının verildiğini ve $\mathcal{P}$'nin eşitlik ilişkileri sistemi

$$\int_{\Omega} u_k(z)dP = \mu_k, k = 0,1,...,m$$

ile belirlendiğini varsayalım. Bu demektir ki, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ momentlerinin bilindiğini ve dolayısıyla bir olasılık dağılımı *P*'nin (4.58.)'deki problemde kullanılmasına izin verildiğini ve söz konusu momentlerin $u_0(z), u_1(z), ..., u_m(z)$ fonksiyonlarına göre olduğunu varsaymaktayız. Ödeme fonksiyonu $h = h(x,P)$, mümkün olabilecek bir fonksiyon $f(x, z)$ ile,

$$h(x,P) = \int_{\Omega} f(x,z) d_z P$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.59.)'daki ödeme fonksiyonu $z = (T, \tilde{\xi}, c)$ ve Ω, R^{m+r+n} veya bir alt kümesi olmak üzere bunun bir özel halidir. Optimizasyon problemi genel bir moment problemi olarak,

$$\min \int_{\Omega} f(x,z) d_z P$$

$$\text{öyle ki} \quad \int_{\Omega} u_k(z) dP = \mu_k, k = 0,1,...,m \qquad (4.60.)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $\mu_0 = 1$'dir. (4.60.), (4.58.)'deki problemin çözümünün bir parçasını vermektedir. (4.60.) probleminin optimum değeri halâ $x \in X$ 'e göre maksimize edilmek zorundadır.

Burada değinilmeyen ilgili teoreme göre, iç noktaları $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ şeklinde bölümlenen $[z_0, z_n]$'de tanımlı $f(z)$, $z \in R^1$ sürekli ve parçalı bir doğrusal fonksiyon ise, söz konusu moment problemi,

$$\min \int_{z_0}^{z_n} f(z) dP$$

$$\text{öyle ki} \quad \int_{z_0}^{z_n} z^k dP = \mu_k, k = 0,1,...,m$$

aşağıdaki ayrık moment problemine

$$\min \sum_{i=0}^{n} f(z_i) p_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} z_i^k p_i = \mu_k, k = 0,1,...,m \qquad (4.61.)$$

denktir. *f (z)*'in tüm *(m+1)*. mertebe bölünmüş farkları pozitifse, ayrık moment problemlerinin teorisi uygulanır ve problem (4.61.)'in optimum değeri bir formül ya da algortima kullanılarak bulunabilir.

Bir uygulama olarak, $m = 2$ ve $f(z) = [z]_+$ durumunu ele alalım. $\mu_1 = \mu$ ve $\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$ notasyonlarını kullanalım. ξ rassal değişkeni bazı L için $|\xi| \le L$ eşitsizliğini sağlasın. Diğer bir ifadeyle, $\Omega = [-L, L]$ olsun. Problemimiz,

$$\min \int_{-L}^{L} [z]_+ dP$$

$$\text{öyle ki } \int_{-L}^{L} dP = 1$$

$$\int_{-L}^{L} z\, dP = \mu$$

$$\int_{-L}^{L} z^2\, dP = \sigma^2 + \mu^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada verilmeyen teorem gereğince, yukarıdaki problem,

$$\min \{0 p_{-L} + 0 p_0 + L p_L\}$$

$$\text{öyle ki } \; p_{-L} + p_0 + p_L = 1$$

$$-L p_{-L} + 0 p_0 + L p_L = \mu$$

$$L^2 p_{-L} + 0p_0 + L^2 p_L = \sigma^2 + \mu^2$$

$$p_{-L} \geq 0,\ p_0 \geq 0,\ p_L \geq 0$$

lineer programına denktir. Üç bilinmeyenli üç denklem ve denklem matrisi tekil olmadığından, problemin bir uygun çözümü vardır ve,

$$p_L = \frac{\mu}{2L} + \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2L^2}$$

$$p_{-L} = -\frac{\mu}{2L} + \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2L^2}$$

$$p_0 = 1 - p_L - p_{-L}$$

olarak ifade edilmektedir. Sadece ve sadece $\sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \leq L \leq \frac{\mu^2 + \sigma^2}{|\mu|}$, $\mu \neq 0$ ise, bu bir olasılık dağılımdır. $\mu = 0$ ise, koşul sadece eşitsizliğin sol kısmıdır. $L = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$ seçilerek, amaç fonksiyon değeri,

$$Lp_L = \frac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}\right)$$

olarak elde edilir. $\xi = \eta - a$ ve $|\eta| \leq L$, $E(\eta) = \mu$, $E(\eta^2) = \sigma^2 + \mu^2$ koşullar ise, μ yerine yukarıdaki formülde $\mu - a$ yazılmalıdır.

Elde edilen sonuç, ödeme fonksiyonu (4.59.)'un minimizasyonuna uygulanabilir. Kabul edilebilir olasılık dağılımları $\mathcal{P}$, sadece marjinal dağılımları empoze etmektedir. Diğer bir ifadeyle, $E(\xi_i) = \mu_i, E(\xi_i^2) = \mu_i^2 + \sigma_i^2$ ve $|\xi_i| \leq \sqrt{\mu_i^2 + \sigma_i^2}, i = 1,2,...,r$ koşulları söz konusudur. Basitlik olması açısından, $q_i^- = 0, i = 1,2,...,r$ olsun. Bu koşullar altında,

$$\min_{P\in\mathcal{P}} h(x,p) = c^T x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} q_i^+ \left(\mu_i - T_i x + \sqrt{(\mu_i - T_i x)^2 + \sigma_i^2}\right)$$

ifadesi elde edilir. x değişkene bağlı fonksiyonun $Ax = b,\ x \geq 0$ kısıtları altında minimizasyonu ile (4.58.) minimaks probleminin optimal çözümü elde edilmektedir[48].

[48]Prékopa, **a.g.e.,** ss. 259-263.

BEŞİNCİ BÖLÜM
PORTFÖY OPTİMİZASYONU VE STOKASTİK PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE BİR PORTFÖY OPTİMİZASYON MODELİ ÖNERİSİ

Bu bölümde portföy optimizasyonu teorisi üzerinde kısaca durularak önerilen bazı modeller incelenmiştir. Sözü edilen bir modelden yola çıkılarak farklı bir portföy optimizasyonu modeli geliştirilmiştir. Teorik olarak geliştirilen model İMKB'den alınan istatistiklerle uygulanmıştır. Elde edilen bulgular aşama aşama tartışılmıştır. Önerilen modelin duyarlılık analizi yapılmış, diğer modellerle karşılaştırılmış ve farklı yanlarına dikkat çekilmiştir. Son olarak, geliştirilen modelin aslında karşılaştırılan modellerle tam bir uyum içinde olduğu gösterilerek bölüm noktalanmıştır.

5.1.Portföy Optimizasyonu

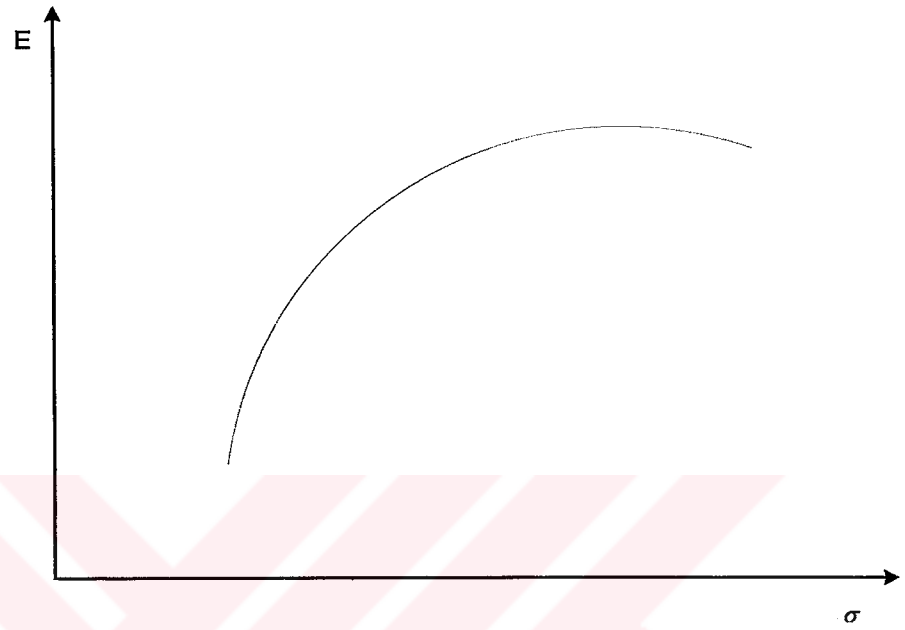
Finansal stokastik optimizasyon modelleri arasında *portföy seçimi* modelleri en klasik olanlardır. Bu konudaki ilk makale 1952'de yayınlanmıştır ve 1990'da Nobel ödülü alan Harry Markowitz'e aittir. Daha sonra, fikirlerini ayrıntılı olarak 1959'da yayınladığı "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments" adlı kitabında açıklamıştır.

5.1.1. Portföy Optimizasyonunda Etkin Sınır

Beklenen getirinin verilen bir seviyesi için riski *minimize* eden ve verilen bir risk seviyesi için beklenen getiriyi *maksimize* eden portföyler *etkin portföyler* olarak adlandırılmaktadır. *Tüm* etkin portföylerin kümesi ise *etkin sınır (efficient frontier)* olarak nitelendirilmektedir[1]. Bu sınır üzerinde büyük beklenen değer ve küçük risk değerleri tercih sebebidir. Etkin sınırın üst ve sol bölgesi *uygun olmayan çözüm* bölgesidir. Dolayısıyla, uygun bölgede beklenen getiri ve riskin artırılmasıyla etkin

[1] Andras Prékopa, **Stochastic Programming,** Hungary, Kluwer Academic Publishers, 1995, s. 492.

sınır oluşturulmaktadır. Risk ölçüsü olarak portföyün standart sapması ve beklenen değeri alındığında tipik bir etkin sınır Şekil 17'deki gibi olacaktır[2].



Şekil 17. Etkin Sınır

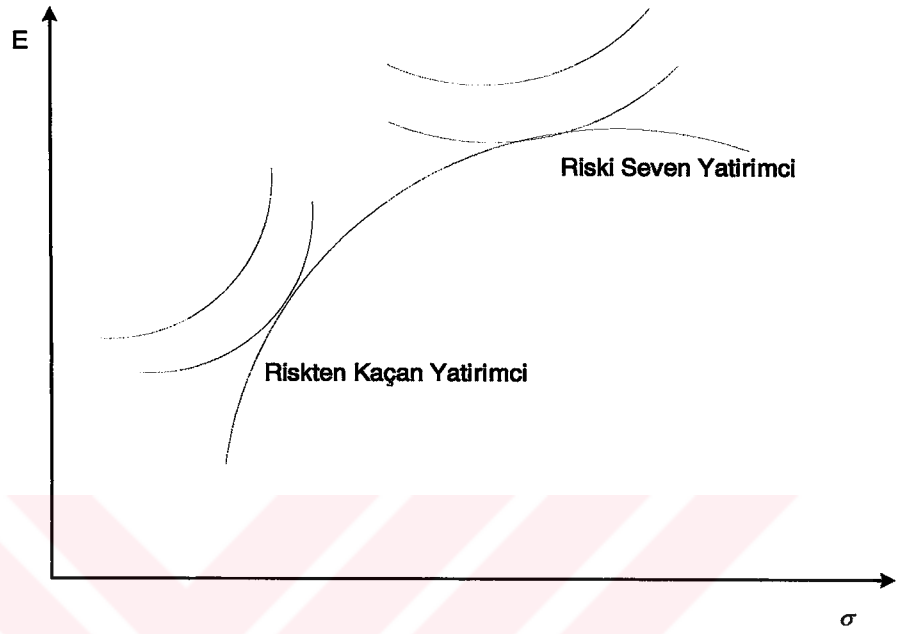
5.1.2. Portföy Seçimi

Belirli bir beklenen getiri seviyesinde riskin minimizasyonu ya da belirli bir risk seviyesinde beklenen getirinin maksimizasyonu sonucunda elde edilen optimal çözümü oluşturan portföy *optimal portföy* olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla, bir *optimal* porföy bir *etkin* portföydür. Çünkü, verilen bir beklenen getiri seviyesi için risk daha fazla azaltılamaz ve verilen bir risk seviyesi için beklenen getiri daha fazla artırılamaz[3].

Söz konusu etkin sınır üzerindeki hangi portföyün seçileceği yatırımcının tercihine göre değişmektedir. Bu tercihler *kayıtsızlık eğrileri* olarak karşımıza

[2] Masahiro Inuiguchi, Jaroslav Ramik, "Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem," **Fuzzy Sets and Systems,** No: 111, 2000, s. 15.
[3] Prékopa, **a.g.e.,** s. 493.

çıkmaktadır. Şekil 18'de riski seven ve sevmeyen yatırımcıların kayıtsızlık eğrileri görülmektedir[4].



Şekil 18. Risk Tercihine Göre Portföy Seçimi

Aslında, kayıtsızlık eğrilerinin eğimlerine göre, Şekil 18'deki yatırımcıların her ikisi de riskten kaçan yapıdadır. Bununla beraber, sağdaki yatırımcı soldakine nazaran daha fazla risk almaya hazırdır ve bu nedenle risk seven yatırımcı olarak adlandırılmıştır. Riski seven yatırımcı getirideki küçük bir artış için diğerinden daha fazla risk artışına katlanabilmekte, riskten kaçan yatırımcı ise riskteki küçük bir artış için getiriride büyük bir artış arzulamaktadır. Bir yatırımcı için en uygun portföy etkin sınırın kayıtsızlık eğrisine *teğet* olduğu noktadadır[5].

5.1.3. Risk Ölçüleri ve Portföy Varyansı

Hisse senetlerinin risk ve getirileri arasında kurulabilecek bir ilişki *değişkenlik katsayısı*dır. Değişkenlik katsayısı, riskin beklenen getiriye oranı

[4] **Mehmet Bolak, Sermaye Piyasası, Menkul Kıymetler ve Portföy Analizi,** 2. baskı, İstanbul, Beta Yayınları, 1994, s. 204.
[5] **A.e.,** s. 205.

şeklinde hesaplanır ve getirideki bir birim artışa karşılık katlanılması gereken risk artışı olarak yorumlanabilir[6].

Portföy riski genellikle toplam getirinin *varyansı* cinsinden ölçülmektedir. Finans dünyasında varyans kavramı yerine *volatilite (volatility)* kavramı kullanılmaktadır[7]. Ancak bu çalışmada varyans kavramı kullanılacaktır. Varyans ya da karekökü olan standart sapmaya dayalı risk ölçüleri L_2 *risk* olarak adlandırılmaktadır. Ortalama mutlak sapmaya dayalı risk ise L_1 *risk* olarak isimlendirilmektedir. Getirilerin çok değişkenli normal dağılması durumunda bu iki risk ölçüsü aynı değeri ifade etmektedirler[8].

Ayrıca risk ölçüsü olarak *yarı-varyans (semi-variance)* da kullanılmaktadır. ξ rassal bir değişken olmak üzere,

$$(\xi - b)^- = \begin{cases} \xi - b, \ \xi - b \le 0 \ \ ise \\ 0 \quad\quad , \xi - b > 0 \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. Yarı-varyans S_b değeri, $[(\xi - b)^-]^2$ değerlerinin aritmetik ortalamasıdır. E, ξ rassal değişkenlerinin aritmetik ortalaması ise, S_E, $[(\xi - E)^-]^2$ değerlerinin aritmetik ortalamasıdır[9]. Diğer bir deyimle, yarı-varyans S_b, $[\min(\xi - b,0)]^2$'nin beklenen değeridir[10]. Varyans, hesaplama maliyeti ve uygunluk açısından yarı-varyansa üstündür.Yarı-varyans tabanlı portföy analizleri daha iyi portföyler üretebilmektedir. Varyans çok düşük ve çok yüksek getirileri aynı önemde ele almaktadır. Buna karşın, yarı-varyans analizi her iki tip uç değerleri eleme

---

[6] **A.e.,** s. 190.
[7] Prékopa, **a.g.e.,** s. 493.
[8] Hiroshi Konno, Hiroaki Yamazaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market," **Management Science,** Vol:37, No:5, 1991, s. 521-522.
[9] Harry M. Markowitz, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,** 2nd Ed., Massachusetts, Basil Blackwell Inc., 1991, s. 189.
[10] **A.e.,** s. 290.

yönüne gitmektedir. Getirilerin tüm dağılımları simetrik veya aynı asimetri derecelerine sahipseler varyans ve S_E aynı etkin portföyler kümesini üretmektedir[11].

Şimdi de portföy varyansına değinelim. ξ_j rassal değişkeni getiri oranı ve x_j, j. hisse senedine yatırılması gereken fonun oranı ve $j=1,...,n$ olmak üzere, *toplam beklenen getiri* vektör notasyonuyla, $E(\xi^T x)=\mu^T x$ olarak ifade edilmektedir. Burada,

$$\xi=(\xi_1,...,\xi_n)^T,$$
$$\mu=(\mu_1,...,\mu_n)^T,$$
$$x=(x_1,...,x_n)^T,$$
$$\mu_i=E(\xi_i), i=1,...,n,$$

biçimindedir. Şimdi, ξ rassal vektörünün kovaryans matrisi C 'yi oluşturalım. Yani, söz konusu kovaryans matrisi,

$$C=(c_{ij}),\ C=E\left[(\xi-\mu)(\xi-\mu)^T\right]$$

şeklinde elde edilir. Buradan, toplam getirinin varyansı, diğer bir deyimle portföyün varyansı,

$$Var(\xi^T x)=E\left\{\left[(\xi-\mu)^T x\right]^2\right\}$$
$$E\left\{\left[x^T(\xi-\mu)(\xi-\mu)^T x\right]\right\}=x^T C x$$

olarak elde edilmektedir[12].

[11] **A.e.,** ss. 193-194.
[12] Prékopa, **a.g.e.,** s. 493.

Görüldüğü gibi portföy varyansı, portföydeki hisse senetlerinin bireysel risklerine ve ikişerli getirileri arasındaki korelasyona (kovaryansa) bağlıdır. Pozitif korelasyonlu hisse senetlerinin uygun kombinasyonlarıyla oluşturulan portföyün riski, hisse senetlerinin bireysel risklerinin ağırlıklı ortalamasının altına indirgenebilir[13].

5.1.4. Bazı Portföy Optimizasyon Modelleri

Bu kesimde, klasik Markowitz modeli, Kataoka modeli, Telser modeli ve Konno & Yamazaki modelleri ile çarpıklık tabanlı modeller üzerinde kısaca durulmuştur.

5.1.4.1. Markowitz Modeli

Markowitz modeli literatürde *MV-Model* olarak da nitelendirilmektedir. Markowitz modelinde, getirilerin çok değişkenli normal dağıldığı ve/veya yatırımcının küçük standart sapmadan büyüğüne göre riskten kaçar yapıda olduğu varsayılmaktadır[14]. Markowitz'in optimal portföy seçme problemi aşağıdaki parametrik kuadratik programlama problemi olarak ifade edilmektedir.

ξ_j rassal değişkeni getiri oranı ve x_j, j. hisse senedine yatırılması gereken fon miktarı, $j=1,...,n$, M sabit toplam fon, u_j önceden belirlenen bazı üst limitler, ρ yatırımcı tarafından önceden belirlenen gereken en az getiri oranı ve C, ξ rassal vektörünün kovaryans matrisi olmak üzere,

[13] R. Charles Moyer, James R. McGuigen , William J. Kretlow, **Contemporary Financial Management,** 4th Ed., USA, West Publishing Company, 1990, s. 248.
[14] Konno, **a.g.e.,** s.520.

$$\min x^T C x$$

öyle ki

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq \rho M$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1,...,n$$

biçimindedir. Burada,

$$\xi = (\xi_1,...,\xi_n)^T,$$

$$\mu = (\mu_1,...,\mu_n)^T,$$

$$x = (x_1,...,x_n)^T,$$

$$\mu_i = E(\xi_i), i = 1,...,n,$$

olarak ifade edilmektedir.

Yukarıdaki modelde, optimal çözüm durumunda genellikle getiri kısıtı eşitlik olarak sağlanmaktadır. Yine bu modelde, görüldüğü gibi, önceden belirlenen bir getiri düzeyinde portföy varyansı minimize edilmektedir. Diğer taraftan, portföy varyansının önceden belirlenen ν risk düzeyini aşmayacak şekilde toplam beklenen getirinin maksimize edilmesi de sağlanabilir. Bu durumda söz konusu model,

$$\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

öyle ki

$$x^T C x \leq \nu$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1,...,n$$

olarak ifade edilir[15].

5.1.4.2. Kataoka Modeli

Kataoka tarafından geliştirilen bu modelde, getiri oranlarının rassal olduğu varsayılmaktadır. Bu modelde, toplam getirinin en az z olma olasılığının en az $1-\alpha$ olması kısıtı altında z maksimize edilmektedir. Sözü edilen model aşağıdadır.

j. hisse senedinin rassal getirisi ξ_j ve ortalaması μ_j olmak üzere,

$$\max z$$

öyle ki

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j \geq z\right) \geq 1-\alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$$

şeklindedir. Her getiri oranının normal dağıldığı varsayımıyla model aşağıdaki şekle indirgenmektedir.

$$\max \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + k_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}$$

öyle ki

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$$

Burada, k_α standart normal dağılım fonksiyonunun tersinin α'daki değeridir. $\alpha < 0{,}5$ ise model kuadratik programlama problemi olarak çözülebilmektedir[16].

---

[15] Prékopa, **a.g.e.**, s. 493-494.
[16] Inuiguchi, **a.g.e.**, s. 16.

5.1.4.3. Telser Modeli

Telser tarafından önerilen modelde, bir getirinin önceden belirlenmiş bazı limit değerinden küçük veya eşit olma olasılığının yine bazı değerden büyük olmama kısıtı altında yatırımcının beklenen getirisi maksimize edilmektedir. Matematiksel olarak, R_P portföy getirisi, $\overline{R}_P$ ortalama getiri ve R_L yatırımcının altına düşmek istemediği seviye olmak üzere,

$$\max \ \overline{R}_P$$

öyle ki

$$\mathrm{P}(R_P \le R_L) \le \alpha$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada getirilerin normal dağılımı varsayımı altında çözüme ulaşılabilir[17].

5.1.4.4. Konno & Yamazaki Modeli

Konno ve Yamazaki 1990 yılında, klasik Markowitz modelinden farklı olarak mutlak sapmaları risk ölçüsü (L_1 risk) kabul eden bir model geliştirmişlerdir. Bu model,

n Hisse senedi sayısı,

T Ele alınan geçmiş periyot sayısı,

r_{jt} t periyodunda j hisse senedinin gerçekleşen getirisi,

x_j j hisse senedine yatırılması gereken para miktarı,

u_j Önceden belirlenmiş üst limitler,

ρ Önceden belirlenmiş istenen en az getiri oranı,

M Yatırıma ayrılan toplam fon,

---

[17]Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,** 5th Ed., Canada, John Wiley & Sons Inc., 1995, ss. 238-239.

$|.|$ Mutlak değer operatörü,

$r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$ ve $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ olmak üzere,

$$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j\right|$$

öyle ki

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j,\ j = 1,...,n$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Sözü edilen problem,

$$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

öyle ki

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0,\ t = 1,...,T$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0,\ t = 1,...,T$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j,\ j = 1,...,n$$

lineer programına denktir.

Bu modelde, rassal getirilerin t periyodundaki r_{jt} gerçeklenmelerinin tarihsel veri ya da gelecek tahminleriyle mevcut olduğu ve rassal değişkenin beklenen değerine söz konusu verilerden elde edilen ortalama değer ile yaklaşılabileceği varsayılmaktadır[18].

5.1.4.5. Çarpıklık Tabanlı Modeller

Getiri dağılımlarının üçüncü momentine dayanan bir portföy seçme kriteri de vardır. Bilindiği gibi üçüncü moment *çarpıklık* olarak nitelendirilmektedir ve çarpıklık bir dağılımın asimetri ölçüsüdür. Normal dağılım sıfır çarpıklığa sahipken log-normal dağılım pozitif çarpıklığa sahiptir. Çarpıklıkla ilgilenen araştırmacılar, yatırımcıların pozitif çarpıklığı tercih etmeleri gerektiğine inanmaktadırlar. Yatırımcıların bu tercihi kullandıkları da amprik olarak gözlemlenmiştir.

Söz konusu çarpıklık ölçüsü kullanılacaksa, üç boyutlu bir uzayla portföy problemi en iyi şekilde temsil edilebilir. Bu durumda, birinci eksende ortalama, ikincisinde varyans ve üçüncüsünde ise çarpıklık olmalıdır. Bu modelde, etkin sınır maksimum getirili, minimum varyanslı ve maksimum çarpıklığa sahip uygun kümenin dış kabuğu olmalıdır[19].

Bazı portföy seçimi modelleri de yatırımcının beklenen faydasını maksimize ederek çözüme ulaşmaktadır. Riskten kaçar yapıdaki üstel fayda fonksiyonunun beklenen değerinin maksimizasyonu ilk olarak R.J. Freund tarafından formülüze edilmiştir. Bu tür çalışmalarda riskten kaçınma katsayısı genellikle rassal olarak seçilmektedir[20]. Özdemir ve Giresunlu, getiri/risk oranı artarken riskten kaçınma katsayısı arttığından, getiri/risk oranından elde edilen ve Freund'un MV modelini maksimize eden riskten kaçınma katsayısını kullanmışlardır. Daha sonra Dinkelbach

---

[18]Konno, **a.g.e.,** ss. 523-524.
[19]Elton, **a.g.e.,** s. 247.
[20] Erhan Özdemir, İ.Müfit Giresunlu, "The Selection of Risky Stock Portfolios Based on the Risk Aversion Constant," **Azerbaycan Respublikası Tehsil Cemiyyeti Bilgi Dergisi: Fizika, Riyazziyat, Yer Elmleri,** Bakı, No:2 (18), 2004, s. 61.

yöntemiyle problem çözülmüştür. Söz konusu çalışmada optimal riskten kaçınma katsayısı ve optimal portföyler elde edilmiştir. Çalışmada farklı riskten kaçınma katsayılarına ilişkin fayda fonksiyonları ile risk-getiri uzayındaki etkin sınır elde edilmiştir (Bakınız. Özdemir ve Giresunlu).

5.1.5.Portföy Performansının Ölçülmesi

Portföy yönetimindeki son aşama portföy performansının ölçülmesidir. Bu işlemle, farklı portföy yönetim stratejilerinin karşılaştırılması yapılabilmektedir. Sağlıklı bir performans ölçme kriteri, getiri ve risk unsurlarını birlikte dikkate alan ve yatırımın bu iki önemli boyutunu tek bir göstergeye dönüştürebilen bir kriter olmalıdır. Aşağıda bazı performans ölçme kriterleri kısaca verilmiştir.

5.1.5.1.Sharpe Performans Kriteri

William F. Sharpe, portföy performansının ölçülmesi için aşağıdaki gibi bir indeks geliştirmiştir. İndeks, $\bar{r}_P$ portföyün ortalama getirisi, σ_P portföyün getirilerinin standart sapması ve r_F risksiz faiz oranı olmak üzere,

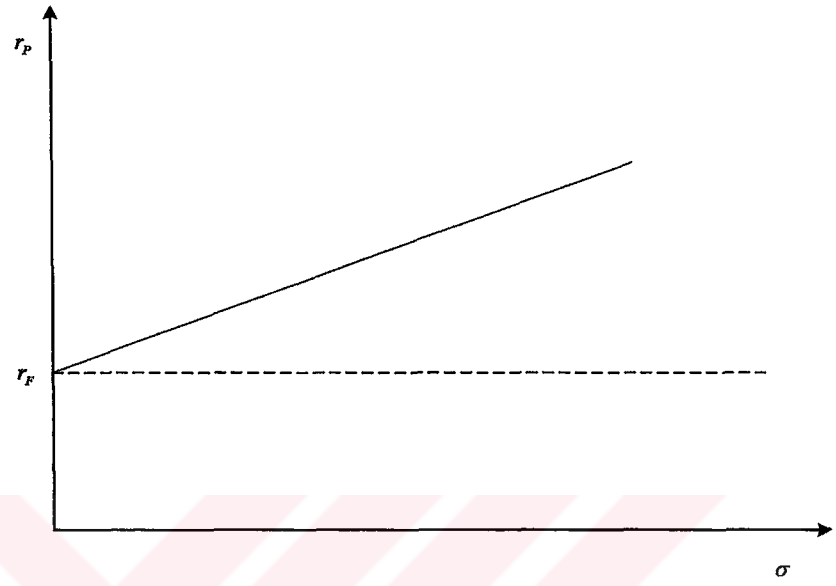
$$S_P = \frac{\bar{r}_P - r_F}{\sigma_P}$$

şeklindedir.

Bu indeks, portföyün taşıdığı toplam risk birimi başına ne kadarlık bir ek getiri sağlandığını ölçmektedir. Sharpe indeksi, risk getiri diyagramı üzerinde, risksiz faiz oranını *i* portföyüne birleştiren doğrunun eğimini göstermektedir. Şekil 19'da bu indeksin grafik açıklaması yer almaktadır[21]. Bu kriter türetilmesinde yapılan bazı

[21] Bolak, a.g.e., ss. 233-235.

varsayımlar gereği, etkin olduğu varsayılan portföylerin performanslarının ölçülmesinde kullanılmaktadır[22].



Şekil 19. Sharpe Performans İndeksi

5.1.5.2. Treynor Performans Kriteri

Jack Treynor'ın portföy performansını ölçmek için geliştirdiği indeks temelde Sharpe indeksiyle aynı niteliktedir. Treynor da portföyün risksiz faiz oranı üzerinde sağladığı ek getiriyi portföy riskine oranlamış ve risk birimi başına elde edilen ek getiriyi performans ölçüsü olarak kabul etmiştir. Ancak, Treynor portföy riskini ölçmek için toplam risk göstergesi olan standart sapma yerine, sistematik risk göstergesi olan beta katsayısını seçmiştir. Buna göre, Treynor' un performans indeksi,

$$T_P = \frac{\bar{r}_P - r_F}{\beta_P}$$

[22] **A.e.,** s. 237.

şeklinde ifade edilebilir[23].

5.2. Bir Portföy Optimizasyon Modeli Önerisi

Konno ve Yamazaki, 5.1.4.4. kesimde belirtildiği gibi, mutlak sapmaları risk ölçüsü kabul eden bir model geliştirmişlerdir. Bu modelden yola çıkarak, toplam getirinin katlanılabilir bir güven seviyesinde elde edilmesiyle riskin biraz daha düşürülmesi mümkün olabilmektedir. Bu amaçla, Konno ve Yamazaki modeli aşağıdaki gibi probabilistik programlama modeline geliştirilebilir.

n Hisse senedi sayısı,

T Ele alınan geçmiş periyot sayısı,

r_{jt} t periyodunda j hisse senedinin gerçekleşen getirisi,

x_j j hisse senedine yatırılması gereken para miktarı,

u_j Önceden belirlenmiş üst limitler,

ρ Önceden belirlenmiş istenen en az getiri oranı,

M Yatırıma ayrılan toplam fon,

α Önceden belirlenen güven seviyesi,

$r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$ ve $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ olmak üzere,

$$\min \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j\right|$$

öyle ki

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M\right) \geq \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j,\ j = 1,\ldots,n$$

[23] A.e., s. 235.

$$0{,}5 \leq \alpha < 1$$

Yukarıdaki stokastik programı çözebilmek için deterministik eşdeğer programı elde etmeliyiz. Öncelikle, amaç fonksiyonunun deterministik eşdeğerini bulalım.

Amaç Fonksiyonunun Deterministik Eşdeğeri

Amaç fonksiyonu,

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \right|$$

şeklindeydi. Daha açık bir ifadeyle,

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \right|$$

yazılabilir. r_j değerleri ortak (birleşik) normal dağılıma sahip rassal değişkenler olduğundan, $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ farkları da rassal değişkenler olacaklardır. Buradaki rassallığın üstesinden, amaç fonksiyonunun beklenen değeri ve standart sapmasının lineer kombinasyonu yazılarak gelinebilir. Amaç fonksiyonundaki stokastik bileşen olan a_{jt}'nin yerine beklenen değeri yazılabilir. Bu durumda, $E(a_{jt}) = E(r_{jt} - r_j) = E(r_{jt}) - E(r_j)$ eşitliği elde edilir. Amaç fonksiyonunun varyansı olarak ise, yaklaşık olarak $a_{jt} = r_{jt} - r_j$'nin –bazı sakıncalarına rağmen- *genelleştirilmiş varyansı* alınabilir. Bilindiği gibi, genelleştirilmiş varyans çok değişkenli istatistikte kovaryans matrisinin *determinantı*dır. Söz konusu genelleştirilmiş varyans, kovaryans matrisi ile ifade edilen değişimin tek bir sayısal

değerle ifadesidir. Diğer bir deyişle, genelleştirilmiş varyans, tüm varyans ve kovaryanslardaki bilginin tek bir sayıya dönüştürülmesini sağlar[24].

$\det(.)$ determinant operatörü ve C, $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ değerlerinin kovaryans matrisi, $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ keyfi sabitler olmak üzere, deterministik amaç fonksiyonu,

$$\beta_1 E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)x_j\right|\right) + \beta_2\sqrt{\det(C)}$$

olarak elde edilir. a_{jt} rassal değişkenleri, pratik olarak kendi beklenen değerleri $E(a_{jt}) = E(r_{jt} - r_j) = E(r_{jt}) - E(r_j)$ ile yer değiştirebilir. Bu durumda deterministik amaç fonksiyonu, yaklaşık olarak,

$$\beta_1 \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(E(r_{jt}) - E(r_j)\right)x_j\right| + \beta_2\sqrt{\det(C)}$$

biçiminde elde edilir. Burada, $E(r_{jt})$ değerleri her bir hisse senedinin geçmişte aldığı getiri oranları ile tahmin edilecektir. Matematiksel olarak, $E(\hat{r}_{jt}) = r_{jt}$ olacaktır. $E(r_j)$ değerleri yerine ise farklı periyotlarda yeterli sayıda üretilen r_j ortalamalarının *ortalamaları* alınacaktır. Değinilmesi gerekli önemli bir nokta da, $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ değerlerinin C kovaryans matrisi aslında, her bir hisse senedinin geçmiş periyotlarda aldığı getiri oranları r_{jt} değerlerinin kovaryans matrisidir. Çünkü, yalnızca r_{jt} değerlerinin tümünden sabit r_j değerleri çıkarılmaktadır

[24] Reha Alpar, **Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1,** 2.baskı, Ankara, Nobel Yayınevi, 2003, s. 55.

Stokastik Kısıtın Deterministik Eşdeğeri

Stokastik kısıt,

$$P(\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M) \geq \alpha$$

biçimindeydi. Ayrıca, $t = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$ biçiminde tanımlayalım.Burada, her r_j ortalama $E(r_j)$ ve var(r_j) ile normal dağılsın. Ek olarak t,

$$E(t) = \sum_{j=1}^{n} E(r_j) x_j \quad \text{ve} \quad var\ t = X^T S X$$

ile normal dağılsın. Burada, $X = (x_1,...,x_n)^T$ ve kovaryans matrisi,

$$S = \begin{pmatrix} \text{var}(r_1) & \dots & \text{cov}(r_1, r_n) \\ . & & . \\ \text{cov}(r_n, r_1) & \dots & \text{var}(r_n) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Söz konusu probabilistik kısıt,

$$P(t \geq \rho M) \geq \alpha$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki parantezin içindeki ifade, ortalamasından farkı alınıp standart sapmasına bölündüğüne standart hale gelecektir. Yani,

$$P\left(\frac{t - E(t)}{\sqrt{\text{var}(t)}} \geq \frac{\rho M - E(t)}{\sqrt{\text{var}(t)}}\right) \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\rho M - E(t)}{\sqrt{\text{var}(t)}}\right) \leq 1 - \alpha$$

elde edilir. Burada, Φ, standart normal dağılımın kümülatif yoğunluk fonksiyonudur. Her iki yanın ters fonksiyonu alınırsa,

$$\frac{\rho M - E(t)}{\sqrt{\text{var}(t)}} \leq \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

bulunur. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$E(t) + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\text{var}(t)} \geq \rho M \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} E(r_j)x_j + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{X^T S X} \geq \rho M$$

elde edilir. Burada, $\alpha \geq 1/2$ ise, $\Phi^{-1}(1-\alpha) \leq 0$ olduğundan yukarıdaki kısıt,

$$\sum_{j=1}^{n} E(r_j)x_j - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{X^T S X} \geq \rho M$$

olacaktır. Teorem 9 ve Teorem 10 ile de aynı sonuca ulaşılmaktadır.

Burada, yukarıda da sözü edildiği gibi, $E(r_j)$ değerleri yerine farklı periyotlarda yeterli sayıda üretilen r_j ortalamalarının *ortalamaları* alınacaktır. S kovaryans matrisi de üretilen ortalamaların kovaryans matrisidir.

Deterministik Eşdeğer Program

Buraya kadar anlatılanlar ışığında, önerilen stokastik modelin deterministik eşdeğeri aşağıdaki gibi olacaktır.

$|.|$ mutlak değer operatörü ve det(.) determinant operatörü olmak üzere,

$$\min \quad \beta_1 \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(E(r_{jt})-E(r_j)\right)x_j\right| + \beta_2\sqrt{\det(C)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}E(r_j)x_j - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{X^T S\, X} \geq \rho M$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j = M$$

$$0 \leq x_j \leq u_j,\ j=1,\ldots,n$$

$$0{,}5 \leq \alpha < 1$$

$$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Burada, β_1 ve β_2 katsayıları keyfi pozitif değerlerdir. Ancak, diğer modellerle karşılaştırma yapabilmek amacıyla $\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 1$ almak daha uygun olacaktır.

$E(a_{jt}) = E(r_{jt} - r_j) = E(r_{jt}) - E(r_j)$ yerine, $E(r_{jt} - r_j)$ olarak düşünülebilecek $r_{jt} - r_j$ değerlerinin ortalaması da alınabilirdi. Bu durumda ortalamadan sapmaların toplamı sıfır olacağından, ortalamadan mutlak sapmaların ortalaması alınmalıdır. Bu şekilde yapılan uygulamalarda da benzer ve yakın sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir.

5.2.1. Önerilen Modelin Varsayımları

Geliştirilen modelin varsayımları aşağıda sıralanmıştır.

- Modelde yer alması düşünülen her bir finansal varlığın getiri oranları tarihsel verilerden elde edilebilir ya da tahmin edilebilir.
- Her bir varlığın üretilen getiri ortalamaları, $E(r_j)$ ortalama ve var(r_j) ile tek boyutlu normal dağılmaktadır.

- Modeldeki tüm varlıkların üretilen r_j ortalamaları ortak (birleşik) normal dağılmaktadır.
- Kısa satışlara (short selling) izin verilmemektedir. Yani, $x_j \geq 0$ olmalıdır.
- Belirlenen güven seviyesi $\alpha \geq 0{,}5$ olmalıdır.

5.3.Önerilen Modelin Uygulanması ve Diğer Modellerle Karşılaştırılması

Bu kesimde, yukarıda geliştirilen teorik model gerçek dünya verilerine uygulanmıştır. Bu uygulamanın kapsamı ve izlenen yöntemlere değinildikten sonra önerilen model çözülmüş ve diğer modellerle karşılaştırılmıştır.

5.3.1.Uygulamanın Kapsamı

Çalışılan modellerin boyutlarının büyümemesi ve en çok işlem gören hisse senetlerinden oluştuğu için İMKB-Ulusal 30 Endeksi uygulama kapsamına alınmıştır. İMKB-Ulusal 30 Endeksinde yer alan hisse senetleri ve İMKB kodları Tablo 3'te verilmiştir[25]. Bu çalışmada getiri değerleri olarak, hisse senetlerinin tarihsel *aylık* düzeltilmiş getiri oranları kullanılmıştır.

Daha geniş bir perspektiften ortalamaların beklenen değerlerinin hesaplanması için, İMKB-Ulusal 30 Endeksinden 150 aylık düzeltilmiş getiri istatistikleri olan hisse senetleri seçilmiştir. Söz konusu 150 aylık serilerden beklenen değerlerin hesaplanması için, 12 aylık hareketli ortalamalar kullanıldığından her bir hisse senedine ilişkin 138 farklı döneme ait ortalamalar elde edilmektedir. Dolayısıyla, elde edilen ortalama sayısının fazla olması amacıyla hareketli ortalamalar için kapsanan dönemin olabildiğince geniş olması gerekmektedir. İMKB-Ulusal 30 Endeksinden 150 aylık düzeltilmiş getiri oranları istatistiklerine sahip olan hisse senetlerinin sayısı 12'dir. Bu hisse senetleri ve kodları Tablo 4'te yer almaktadır.

[25]Analiz Menkul Kıymetler, (Çevrimiçi) www.analiz.com, 05.04.2004.

İMKB Kodu	Hisse Senedi Adı
AKBNK	AKBANK
AKENR	AK ENERJİ
AKGRT	AKSİGORTA
AKSA	AKSA AKRİLİK KİMYA
ALARK	ALARKO HOLDİNG
ARCLK	ARÇELİK
BEKO	BEKO
DOHOL	DOĞAN HOLDİNG
DYHOL	DOĞAN YAYIN HOLDİNG
ENKAI	ENKA İNŞAAT
EREGL	EREĞLİ DEMİR ÇELİK
FINBN	FİNANSBANK
FROTO	FORD OTOMOTİV
GARAN	GARANTİ BANKASI
HURGZ	HÜRRİYET GAZETECİLİK
IHLAS	İHLAS HOLDİNG
ISCTR	İŞ BANKASI (C)
KCHOL	KOÇ HOLDİNG
MIGRS	MİGROS
NETAS	NETAŞ TELEKOM.
PTOFS	PETROL OFİSİ
SAHOL	SABANCI HOLDİNG
SISE	ŞİŞE CAM
TCELL	TURKCELL İLETİŞİM
TNSAS	TANSAŞ
TOASO	TOFAŞ OTOMOBİL FAB.
TUPRS	TÜPRAŞ PETR. RAF.
ULKER	ULKER GIDA
VESTL	VESTEL
YKBNK	YAPI KREDİ BANKASI

Tablo 3. İMKB-Ulusal 30 Endeksinde Yer Alan Hisse Senetleri

İMKB Kodu	Hisse Senedi Adı
AKBNK	AKBANK
AKSA	AKSA AKRİLİK KİMYA
ALARK	ALARKO HOLDİNG
ARCLK	ARÇELİK
EREGL	EREĞLİ DEMİR ÇELİK
FINBN	FİNANSBANK
FROTO	FORD OTOMOTİV
GARAN	GARANTİ BANKASI
KCHOL	KOÇ HOLDİNG
SISE	ŞİŞE CAM
VESTL	VESTEL
YKBNK	YAPI KREDİ BANKASI

Tablo 4. Uygulama Kapsamına Alınan Hisse Senetleri

Ele alınan veri seti, uygulama kapsamına alınan hisse senetlerinin ilgili dönemlere ilişkin 60 aylık (5 yıllık) düzeltilmiş getiri oranlarından oluşmaktadır. Söz konusu 60 aylık dönem, Temmuz 1998-Haziran 2003 arasını kapsamaktadır.

5.3.2.Uygulamada İzlenen Yöntem

Model geliştirme aşamasında da değinildiği gibi, uygulama kapsamına alınan hisse senetlerinin ortalamalarının beklenen değerlerine gereksinim duyulmaktadır. Söz konusu beklenen değerler de ilgili hisse senetlerinin farklı periyotlarda alınmış ortalamalarının *ortalaması* ile tahmin edilmiştir. Bu nedenle, farklı dönemlere ait aylık düzeltilmiş getiri ortalamaları oluşturulmalıdır. Bu işlemi gerçekleştirmenin en kolay yollarından birisi, serilerin değerlerini birer ay kaydırarak ***hareketli ortalamalarını*** hesaplamaktır. Tarihsel veriler kullanılarak hareketli ortalamalar 12 aylık dönemler için hesaplanmıştır. Daha sonra, hareketli ortalamaların aritmetik ortalaması alınarak ortalamaların beklenen değerleri tahmin edilmiştir. Modelin varsayımı gereği, her bir hisse senedinin ortalamaları bireysel olarak normal dağıldığı gibi birlikte de ortak (birleşik) normal dağılım göstermeleri gerekmektedir.

Bu nedenle, her bir hisse senedine ilişkin hareketli ortalamaların normal dağılıma uygunluk gösterip göstermediği sorgulanmalıdır. Bu amaç için Kolmogorov-Smirnov uygunluk testi kullanılmıştır. Söz konusu test, gelişmiş bir istatistik paket programı olan SPSS (Statistical Package for Social Sciences) 9.05 versiyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu normallik sınamaları için de 12 ayrı hipotez testi kurulmuştur. Buradan elde edilen olumlu yanıtlar nedeniyle hisse senetlerine ait hareketli ortalamaların ortak (birleşik) normal dağıldığı varsayılmıştır.

Model varsayımlarının sağlanmasından sonra model kurulmuştur. Kurulan deterministik eşdeğer doğrusal olmayan model için farklı çözüm araçları kullanılabilir. Ancak çözüm aracı olarak, model parametrelerinin kolaylıkla değişimine olanak veren ve değişikliklerin rahatlıkla gözlemlenmesini sağlayan elektronik tablo (spreadsheet) yöntemini kullanmak daha uygun bir seçim olacaktır. Bilindiği gibi elektronik tablolar diğer paket yazılımlara göre çok daha esnek bir yapı sunmaktadırlar.

Bu çalışmada, dünya çapında en yaygın olarak bulunan elektronik tablo Microsoft Excel'in İngilizce 2000 versiyonu kullanılmıştır. Model aşama aşama kurulmuş ve farklı platformlarda da kurulmasına olanak sağlamak amacıyla her aşamada yeterli bilgi verilmiştir. Uygulama kapsamına alınan, her bir hisse senedinin tarihsel düzeltilmiş aylık getiri oranları elektronik tabloya aktarılmış ve hisse senetlerinin aralarındaki kovaryanslar hesaplanarak *kovaryans matrisi* oluşturulmuştur. Söz konusu kovaryans matrisinin *pozitif definit* olduğu gösterilmiştir. Hareketli ortalamaların da kovaryans matrisi oluşturulmuş ve pozitif definit olduğu görülmüştür. Daha sonra, amaç fonksiyonu ve kısıtlar oluşturulmuştur. Optimizasyon aracı olarak da yine Microsoft Excel'in içerisinde bulunan *Solver (Çözücü)* aracı kullanılmıştır.

Model çözümü sonucunda elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Önerilen modelin, Konno & Yamazaki ve Markowitz modelleri ile karşılaştırılması yapılmış ve üstünlükleri üzerinde durulmuştur. Yine elektronik tablo platformunun sunduğu olanaklar kullanılarak, önerilen modelin duyarlılık analizi yapılmıştır. Önerilen

portföylerin performansları da hesaplanarak karşılaştırma çerçevesine dahil edilmiştir. Görsel olarak da grafikler kullanılarak anlatım desteklenmiştir. Ayrıca, sözü edilen veriler ve hareketli ortalamalar ile istatistik bulguları çalışmanın sonunda Ekler bölümünde verilmiştir.

5.3.3.Verilerin Elde Edilmesi

Bu çalışmada kullanılan hisse senetlerinin getiri değerleri, aylık bazda ve düzeltilmiş olarak İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB)'nın resmi internet sitesinden alınmıştır[26]. Sözü edilen veriler Ek 1'de görülmektedir.

Portföy performanslarının ölçülmesinde kullanılan risksiz faiz oranı olarak ise, 3 aylık Hazine Bonosu'nun bileşik ihraç faiz oranı kullanılmıştır. Kullanılan finansal varlık, 18.06.2003 ihraç tarihli, 17.09.2003 itfa tarihli %39,49 bileşik ihraç faiz oranlı TRB170903T17 kodlu Hazine Bonosudur[27]. Bu varlıkla ilgili ayrıntılar Ek 2'de yer almaktadır

5.3.3.1.Getirilerin Hesaplanması

Söz konusu resmi internet sitesinde verilen getiriler, hisse senetlerinin Borsa'da oluşan fiyatları baz alınarak hesaplanmıştır. Aylık getiri, bir hisse senedinin bir ay boyunca elde tutulması sonucunda elde edilen getiriyi göstermekte olup aşağıdaki formüle göre hesaplanarak yayınlanmaktadır. ABD Doları bazında aylık getiriler, TL bazında hesaplanan aylık getirilerin ABD Dolarının aylık değer artışından arındırılması suretiyle bulunan getirilerdir.

$$G_i = \frac{F_i * (BDL + BDZ + 1) - R * BDL + T - F_{i-1}}{F_{i-1}}$$

[26]İMKB, (Çevrimiçi), http://www.imkb.gov.tr/sirket/staveriler.htm, 05.04.2004.
[27]TCMB, (Çevrimiçi), http://www.tcmb.gov.tr, 05.04.2004.

G_i : i ayına ait getiri.

F_i : i ayına ait en son kapanış fiyatı.

BDL : Ay içinde alınan bedelli hisse adedi.

BDZ : Ay içinde alınan bedelsiz hisse adedi.

R : Rüçhan hakkı kullanma fiyatı.

T : Ay içinde 1.000,-TL nominal değerli bir hisse senedine ödenen net temettü tutarı.

F_{i-1} : i ayından bir önceki aya ait en son kapanış fiyatı[28].

Böylece elde edilen ve resmi sitede yayınlanan aylık getiri oranları *düzeltilmiş* getiri oranları olarak kullanılabilmektedir. Bu çalışmada TL bazlı aylık getiri oranları kullanılmıştır.

5.3.4.Uygulama Modelinin Varsayımlarının Sağlanması

Model varsayımlarından ilki olan hisse senetlerinin getirilerinin mevcutluğu, İMKB'den alınan tarihsel düzeltilmiş aylık getiri oranları verileri ile sağlanmış olmaktadır. Güven seviyesi $\alpha = 0{,}95$ seçilerek ilgili varsayım sağlanmaktadır. $x_j \geq 0$ seçilerek kısa satışların lmadığı varsayımı da gerçeklenmektedir. Normallik varsayımları için, öncelikle yeterli miktarda aylık getiri oranları ortalamaları üretilmelidir. Daha sonra, elde edilen ortalamaların tek boyutlu normal ve çok boyutlu normal dağılıp dağılmadığı belirlenmelidir. Bu süreç aşağıda başlamaktadır.

5.3.4.1.Ortalamaların Üretilmesi

Daha önce de değinildiği gibi, ortalama üretmek için hareketli ortalamalar yöntemi kullanılmıştır. Hareketli ortalamalar 12 aylık dönemleri kapsamaktadır. Uygulama kapsamına alınan 12 farklı hisse senetlerine ilişkin 150'şer aylık düzeltilmiş getiri oranları istatistikleri mevcuttur. İlgili veriler Ek 1'de

[28]İMKB, (Çevrimiçi), http://www.imkb.gov.tr/sirket/staveriaciklama.htm, 05.04.2004.

görülmektedir. 12 aylık periyotların hareketli ortalamaları alındığından elde edilen hareketli ortalama sayısı 138 olacaktır.

Hareketli ortalamalar gelişmiş bir istatistik paket programı olan SPSS 9.05 versiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Her bir hisse senedi için 138 dönemlik hareketli ortalamalar elde edilmiştir. Elde edilen hareketli ortalamalar Ek 3'te görülmektedir. Hareketli ortalamaların tanımsal istatistikleri ise Tablo 5'te verilmiştir. Bu tabloda görülen ortalama değerleri, modelde ortalamaların beklenen değerleri $E(r_j)$ olarak kullanılmıştır.

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
PMA(R1,12)	138	6,88E-02	5,617E-02	-,0664	,1791
PMA(R2,12)	138	5,97E-02	5,182E-02	-,0565	,2170
PMA(R3,12)	138	7,74E-02	6,509E-02	-,0368	,2544
PMA(R4,12)	138	7,09E-02	5,621E-02	-,0257	,2254
PMA(R5,12)	138	6,75E-02	7,084E-02	-,0641	,2647
PMA(R6,12)	138	7,53E-02	6,23E-02	-,073567	,245617
PMA(R7,12)	138	8,60E-02	6,804E-02	-,0566	,2326
PMA(R8,12)	138	5,54E-02	6,931E-02	-,0789	,2550
PMA(R9,12)	138	7,20E-02	5,903E-02	-,0393	,2392
PMA(R10,12)	138	6,94E-02	7,739E-02	-,0665	,2574
PMA(R11,12)	138	7,24E-02	6,943E-02	-,0751	,2324
PMA(R12,12)	138	8,34E-02	7,847E-02	-,0618	,2811

Tablo 5. Hareketli Ortalamaların Tanımsal İstatistikleri

5.3.4.2.Normallik Testleri

Üretilen hareketli ortalamaların öncelikle tek boyutlu normal dağıldıklarını gösterelim. Normallik testi olarak Kolmogorov-Smirnov testi kullanılmıştır. Aşağıda 12 hisse senedinin hareketli ortalamalarının normal dağılıp dağılmadığının testi için 12 hipotez testi kurulmuştur. Kurulan hipotez testlerinde *anlamlılık seviyesi* olarak $\alpha = 0{,}01$ alınmıştır. Bu anlamlılık seviyesindeki Kolmogorov-Smirnov tablo değeri, $N = 138$ için, $D_{0{,}01/138} = 1{,}63/\sqrt{N} = 1{,}63/\sqrt{138} = 0{,}138755$ olarak hesaplanmıştır.

Hareketli ortalamaların SPSS 9,05 ile elde edilen Kolmogorov-Smirnov normallik testi çıktıları Ek 4'te görülmektedir. Çıktılardaki "Most Extreme Differences-Absolute" değerleri tablo değerleri ile karşılaştırılarak karar verilmiştir.

AKBNK Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : AKBNK hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,051$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,051$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

AKSA Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : AKSA hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,053$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,053$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

ALARK Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : ALARK hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,098$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,098$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

ARCLK Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : ARCLK hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,108$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,108$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

EREGL Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : EREGL hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,110$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,110$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

FINBN Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : FINBN hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,050$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,050$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

FROTO Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : FROTO hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,085$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,085$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

GARAN Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : GARAN hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,081$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,081$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

KCHOL Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : KCHOL hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,086$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,086$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

SISE Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : SISE hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,067$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,067$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

VESTL Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

H_0 : VESTL hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,067$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,067$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

YKBNK Hisse Senedine İlişkin Normallik Testi

Hipotezler aşağıdaki gibi kurulabilir.

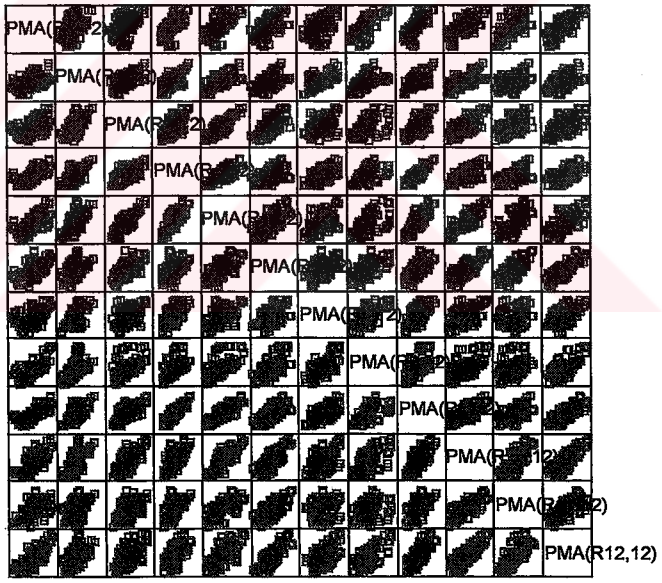
H_0 : YKBNK hisse senedinin yukarıda elde edilen hareketli ortalamaları normal dağılmaktadır.

H_1 : Dağılım normal değildir.

Ek 4'teki çıktılardan, $D = max|f - f'| = 0,058$ olduğu görülmektedir. $D_{0,01/138} = 0,138755 > 0,058$ olduğundan H_0 kabul edilir, söz konusu dağılım normal dağılıma uygundur.

Yukarıdaki hipotez testlerinden de görüleceği gibi, araştırma kapsamındaki tüm hisse senetlerinin üretilen hareketli ortalamaları tek boyutlu normal dağılmaktadır. Yukarıdaki hareketli ortalamalara ilişkin Q-Q grafikleri ve kutu-çizgi grafikleri Ek 5'te görülmektedir. Bilindiği gibi, Q-Q grafiklerinde seri normal dağılıyor ise, veriler I. açıortay doğrusu üzerinde yer almaktadır. Kutu-çizgi grafiklerinde ise kutu içerisindeki yatay çizgi serinin medyanını vermektedir.

Üretilen hareketli ortalamaların ortak dağılımlarının normalliğini inceleyelim. Yukarıda her bir serinin tek boyutlu normal dağıldığı gösterildi. İkişerli olarak serilerin normalliğini araştırmak için, serilerin ikişerli serpilme diyagramlarına bakalım. Şekil 20'te serilerin ikişerli serpilme diyagramları yer almaktadır.



Şekil 20. Hareketli Ortalamaların İkişerli Serpilme Diyagramları

Serpilme diyagramlarına bakıldığında, hemen hepsinde veriler I. açıortay çevresinde eliptik bir alanda yoğunlaşmışlardır. Sözü edilen verilerin grafik yöntemiyle kabaca ikişerli normal dağıldıklarını söylemek mümkündür. Dolayısıyla, bu çalışmada tüm hareketli ortalama serilerinin -tek boyutlu normal ve ikişerli

normal dağıldıklarından- ortak (birleşik) normal dağıldığı kabul edilmektedir. Sonuç olarak, hareketli ortalamaların ortak normal dağıldıklarını varsayabiliriz.

Buraya kadar yapılanlar ışığında, modelin tüm varsayımlarının sağlandığını söylemek mümkündür. Artık modelin kurulması ve çözüm aşamasına geçilebilir.

5.3.5.Uygulama Modelinin Kurulması ve Çözülmesi

Daha önce de değinildiği üzere, önerilen model İMKB-Ulusal 30 Endeksinden seçilen 12 hisse senedi üzerinde uygulanmıştır. İlgili uygulama modelinin deterministik eşdeğer programına ilişkin elektronik tablo kurulumu ve çözümü aşağıdaki adımlarla gerçekleştirilebilir. Bu uygulamada, $M=1$ alınmaktadır. Böylece, çözüm sonucunda elde edilen karar değişkenleri değerleri hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıklarını vermektedir. Ayrıca, u_j sınırlamalarının bulunmadığı ve ilgili dönemde aylık risksiz faiz oranının 0,028123 olduğundan dolayı istenen en az getiri oranının 0,06 olduğu varsayılmıştır. İlk etapta güven seviyesi %95 olarak alınmıştır.

1. **Karar Değişkenleri.** Karar değişkenleri, portföy içindeki hisse senetlerinin ağırlıkları olduğundan, elektronik tabloda B6:M6 alanı portföydeki hisse senetlerinin ağırlıkları olarak belirlenmiştir. İlgili hisse senetlerinin kodları alfabetik sıraya göre B5:M5 alanına girilmiştir.

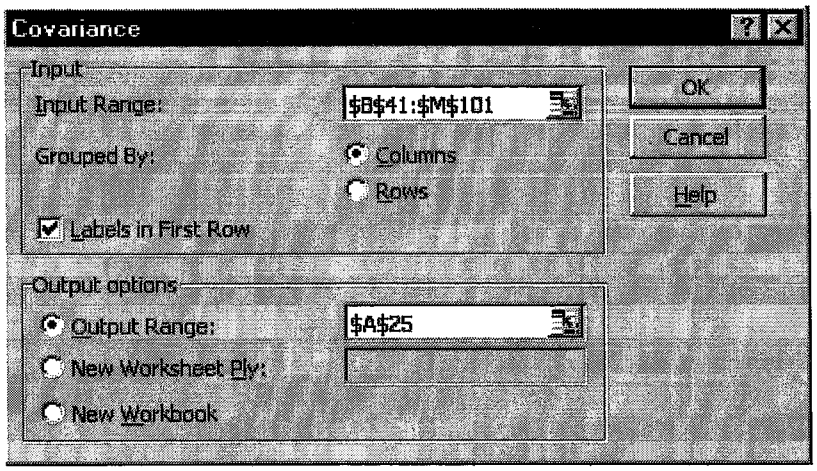
2. **Hareketli Ortalamaların Beklenen Değerleri.** Daha önce SPSS çıktılarından elde edilen hareketli ortalamaların ortalamaları (beklenen değerleri) tabloda B11:M11 alanına girilmiştir.

3. **Getiri Oranları.** Hisse senetlerinin 60'şar aylık düzeltilmiş getiri oranları ile dönemleri karar değişkenleri sırasına göre A41:M101 alanına girilmiştir. Elektronik tabloda getiri oranlarının bulunduğu bölüm, bazı satırları gizlenmiş olarak Tablo 6'da görülmektedir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
39	**Hisse Senetlerinin Düzeltilmiş Aylık Getiri Oranları**												
40													
41	DÖNEM	AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
42	03/06	0,1765	-0,1339	-0,1022	-0,1000	0,0000	0,0313	-0,0168	-0,0120	-0,0462	-0,0707	-0,0833	-0,0778
43	03/05	-0,0541	-0,0843	-0,0810	0,0280	0,0212	0,0323	-0,0056	0,1448	-0,0127	0,0110	0,0400	0,0309
44	03/04	0,2333	0,2281	0,4114	0,3217	0,2600	0,1205	0,1803	0,2813	0,1491	0,1934	0,1538	0,1368
45	03/03	-0,2541	-0,0808	-0,1463	-0,2069	-0,1429	-0,1354	-0,1159	-0,3356	-0,2381	-0,1757	-0,1098	-0,1972
46	03/02	-0,0181	0,0000	0,0513	0,0000	-0,1026	0,2162	0,0147	0,0774	0,0286	0,1386	0,0429	0,0768
47	03/01	0,1273	0,0333	0,0385	0,1164	0,1642	0,0128	0,2143	0,0026	0,0146	0,0484	0,1111	0,2000
48	02/12	-0,1406	-0,2600	-0,3241	-0,1875	-0,2289	-0,2427	-0,2533	-0,2936	-0,2159	-0,3167	-0,2841	-0,1912
49	02/11	0,3600	0,1694	0,3871	0,4222	0,2429	0,8015	0,3393	0,8459	0,2394	0,3582	0,4194	0,2384
90	99/06	-0,0462	-0,1768	-0,1349	0,1538	-0,2027	-0,2065	-0,0585	-0,0444	-0,1311	-0,1702	0,0222	0,1991
91	99/05	0,0520	0,0341	0,1558	-0,1613	0,0278	-0,0641	-0,0848	-0,1046	-0,1380	0,2100	0,0714	-0,0234
92	99/04	0,0417	0,4194	0,4259	0,2653	0,3846	0,1354	0,0000	0,0797	0,5269	0,0885	0,1931	0,3823
93	99/03	0,2600	0,2917	0,0189	0,3920	0,3684	0,3167	0,3137	0,1416	0,1481	0,3333	0,0000	0,1129
94	99/02	0,5484	0,2973	0,4542	0,3333	0,8818	0,2371	0,3859	0,3923	0,8200	0,4545	0,4490	0,5897
95	99/01	-0,0313	-0,0263	0,1294	-0,2747	-0,0577	0,0543	0,4803	0,0889	-0,0909	-0,1538	-0,0577	0,0885
96	98/12	0,0323	0,0411	0,0119	0,0341	-0,2000	0,1600	-0,0308	0,2118	-0,0351	0,2188	-0,1186	-0,0135
97	98/11	0,4688	-0,0385	0,2174	0,3333	0,0000	0,3115	0,0156	0,4639	0,0755	0,0323	0,2553	0,4117
98	98/10	0,0887	-0,0500	0,0816	0,0164	-0,2169	-0,0898	0,0159	0,0102	-0,0862	-0,3034	-0,0784	0,0317
99	98/09	-0,2353	-0,2079	-0,1558	0,0000	-0,1293	-0,2024	-0,1250	-0,2597	0,0175	-0,2193	0,0938	-0,3942
100	98/08	-0,3780	-0,3766	-0,5247	-0,4348	-0,4138	-0,4086	-0,4857	-0,4834	-0,4184	-0,3523	-0,4666	-0,3810
101	98/07	-0,0465	-0,0241	0,1250	-0,0800	-0,0241	-0,0658	-0,0175	-0,0523	-0,0577	0,0000	0,2254	0,2363

Tablo 6. Hisse Senetlerinin Düzeltilmiş Aylık Getiri Oranları

4. **Kovaryans Matrisleri.** İki farklı kovaryans matrisi oluşturulmalıdır. Birincisi, geçmiş dönemlere ait aylık getiri oranlarından elde edilen kovaryans matrisidir. İlgili getiri oranları A41:M101 alanında bulunmaktadır. Microsoft Excel, kovaryans matrisini hesaplama imkanına sahiptir. Bunun için Tools-Data Analysis menüsünden Covariance seçilirse bir diyalog kutusu gelmektedir. Bu kutuda, Input Range alanına B41:M101 alanı ve Output Range alanına A25 adresi girilirse getiri oranlarının kovaryans matrisi A25 alanından başlamak üzere elde edilir. Söz konusu diyalog kutusu Şekil 21'de görülmektedir.



Şekil 21. Kovaryans Diyalog Kutusu

Elde edilen kovaryans matrisi yarı matris şeklindedir. Bu matrisi simetrik matris haline getirmek için bir takım transpoze işlemleri gerekmektedir. Örneğin, C26:M26 alanı seçilip,

= TRANSPOSE (B27:B37)

yazılıp çoklu işlemler için birlikte kullanılan Ctrl-Shift-Enter tuşlarına birlikte basıldığında C26:M26 alanına, B27:B37 alanında yer alan kovaryansların transpozesi yazılarak matrisin ilk satırı tanımlanır. Bu şekilde devam edildiğinde B26:M37 alanında *12 x 12* boyutlu kovaryans matrisi elde edilir. Elde edilen kovaryans matrisi Tablo 7'de görülmektedir. İkinci kovaryans matrisi ise hareketli ortalamaların kovaryans (*S*) matrisidir. SPSS tarafından üretilen hareketli ortalamalar AD42:AO179 alanına girilmiştir. Bu ortalamaların kovaryans matrisi de benzer şekilde AS43:BD54 alanında oluşturulmuştur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
23	**Kovaryans Matrisi**															**Pozitif Definitlik**		
24																		
25		AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK		No	Delta		
26	AKBNK	0,052	0,034	0,043	0,043	0,035	0,044	0,042	0,044	0,039	0,043	0,040	0,044		1	0,052	>	0
27	AKSA	0,034	0,054	0,046	0,044	0,039	0,038	0,044	0,041	0,043	0,042	0,040	0,043		2	0,002	>	0
28	ALARK	0,043	0,046	0,059	0,046	0,040	0,047	0,048	0,046	0,050	0,048	0,049	0,048		3	2E-05	>	0
29	ARCLK	0,043	0,044	0,046	0,063	0,039	0,041	0,043	0,050	0,050	0,041	0,047	0,049		4	4E-07	>	0
30	EREGL	0,035	0,039	0,040	0,039	0,045	0,034	0,037	0,035	0,041	0,039	0,038	0,038		5	5E-09	>	0
31	FINBN	0,044	0,038	0,047	0,041	0,034	0,075	0,048	0,050	0,040	0,053	0,043	0,050		6	2E-10	>	0
32	FROTO	0,042	0,044	0,048	0,043	0,037	0,048	0,061	0,046	0,042	0,046	0,042	0,047		7	3E-12	>	0
33	GARAN	0,044	0,041	0,046	0,050	0,035	0,050	0,046	0,067	0,044	0,045	0,045	0,057		8	5E-14	>	0
34	KCHOL	0,039	0,043	0,050	0,050	0,041	0,040	0,042	0,044	0,058	0,042	0,047	0,048		9	5E-16	>	0
35	SISE	0,043	0,042	0,048	0,041	0,039	0,053	0,046	0,045	0,042	0,059	0,045	0,046		10	6E-18	>	0
36	VESTL	0,040	0,040	0,049	0,047	0,038	0,043	0,042	0,045	0,047	0,045	0,056	0,047		11	7E-20	>	0
37	YKBNK	0,044	0,043	0,048	0,049	0,038	0,050	0,047	0,057	0,048	0,046	0,047	0,069		12	1E-21	>	0
38																		

Tablo 7. Getirilerin Kovaryans Matrisi ve Pozitif Definitliği

5. **Pozitif Definitlik.** Sylvester Teoremine göre, C matrisinin tüm ardışık asal minörleri pozitif ise $X^T C X$ kuadratik formu pozitif definittir. Bu teoremin tersi de doğrudur[29]. Bu nedenle, kovaryans matrisinin ardışık asal minörlerinin pozitif olduklarını göstermeliyiz. Ardışık asal minörler, asal köşegenleri orijinal matrisin asal köşegeninde yer alan kare alt matrislerin determinantları olduğundan ilgili alt matrislerin determinantlarının pozitifliğini göstermek yeterli olacaktır. Elektronik tabloda, O26:O37 alanına 1'den 12'ye kadar olan sayılar girilmiştir. P26 hücresine,

= MDETERM ($B$26:OFFSET($A$25;O26;O26))

formülü girilip O37 hücresine kadar kopyalanırsa sözü geçen alt matrislerin determinantları hesaplanır. Tüm alt matrislerin determinantları $(\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{12} \rangle 0)$ pozitif olduğundan getirilerin kovaryans matrisi pozitif definittir. Dolayısıyla da, $X^T C X$ kuadratik formu pozitif definittir. Elde edilen değerler Tablo 7'de görülmektedir. Benzer işlemler sonucunda hareketli ortalamaların kovaryans matrisinin de pozitif definit olduğu görülmüştür.

[29]David A. Wismer, R. Chattergy, **Introduction to Nonlinear Optimization: A Problem Solving Approach**, New York, Elsevier North-Holland Inc., 1978, s. 12.

6. **Genelleştirilmiş Varyans.** Amaç fonksiyonunun yaklaşık olarak değişkenliğinin ölçüsü olarak alınan genelleştirilmiş varyans, elde edilen getirilerin kovaryans matrisinin determinantıdır. Dolayısıyla, yukarıda elde edilen kovaryans matrisinin determinantı hesaplanmalıdır. Bu amaçla B19 hücresine,

   =MDETERM (B26:M37)

   formülü girilerek genelleştirilmiş varyans elde edilmiştir.

7. **Portföy Varyansı ve Standart Sapması.** Portföy varyansı için vektör notasyonuyla verilen $X^T C X$ değeri hesaplanmalıdır. Portföydeki hisse senedi ağırlıkları alanında verilen vektör, satır vektörü olduğundan X^T olarak alınabilir. $X^T C$ 'nin hesaplanması için W26:AH26 alanı seçilerek,

   =MMULT (B6:M6; B26:M37)

   formülü yazılıp matris çarpımı gerçekleştirilir. Elde edilen matris *1 x 12* boyutludur. Elde edilen $X^T C$ matrisi, X sütun vektörüyle çarpılmalıdır. Bunun için U26:U37 alanında X^T 'nin transpozesi alınarak X sütun vektörü elde edilir. Daha sonra, D19 adresine,

   =MMULT (W26:AH26;U26:U37)

   formülü girilerek portföy varyansı olan $X^T C X$ değeri hesaplanır. G19 hücresine, varyansın karekökünün alınması amacıyla,

   =SQRT(D19)

   formülü yazılarak portföyün standart sapması hesaplanır.

8. **Ortalamaların Varyansı.** Hareketli ortalamaların varyansı $X^T S X$ değerinin hesaplanması için G22 hücresine,

=MMULT(B6:M6;MMULT(AS43:BD54;TRANSPOSE(B6:M6)))

formülü girilir. Böylece $X^T S X$ değeri tek işlemle hesaplanır.

9. **Güven Seviyesi (Alfa) ve Beta Katsayıları.** Güven seviyesi hücresi olarak L19 hücresi ayrılmıştır. Buraya ilk etapta *0,95* yazılmıştır. Modele göre, belirlenen güven seviyesinde standart normal dağılımdan z değerleri hesaplanmalıydı. Bu amaçla, L20 hücresine,

=NORMSINV(1-L19)

formülü girilmelidir. Güven seviyesinin *1*'den çıkarılmasının amacı, modelde geçen $1-\alpha$ değerini elde etmektir. Böylece, L19 adresine yazılan herhangi bir güven seviyesi için otomatik olarak standart z değeri elde edilecektir. Beta 1 ve beta 2 katsayılarının ikisi de *1* olarak belirlendiğinden, L14 hücresine *1* ve L15 hücresine de *1* yazılmıştır.

10. **Ağırlık Kısıtı.** Yatırıma ayrılan fon miktarını *1* olarak aldığımızdan, portföydeki hisse senedi ağırlıkları toplamı *1* yani *%100* olacaktır. O halde, karar değişkenlerinin aldığı değerlerin toplamı *1* olmalıdır. Bunun için, B15 hücresine söz konusu toplam,

=SUM(B6:M6)

formülüyle hesaplattırılır. Ayrıca, daha sonra bu toplamın *1*'e eşitlenmesini sağlamak amacıyla D15 hücresine de *1* yazılır.

11. Getiri Kısıtı. İstenen en az getiri oranı (ρ) I15 hücresine ilk etapta *0,06* olarak yazılmıştır. Bu kısıtın en az getiri oranından büyük veya eşit olması gereken sol tarafı, G15 hücresine,

=SUMPRODUCT(B11:M11;B6:M6) - L20*SQRT(G22)

formülü yazılarak hesaplanır. Burada hesaplanan değer, ilgili güven seviyesinde, portföyün ortalama beklenen getirisidir.

12. Getirilerin Ortalamaların Beklenen Değerlerinden Sapmaları. Daha önce değinildiği gibi, hisse senetlerinin herhangi bir dönemde aldığı getiri oranları değerleri söz konusu dönemde alması *beklenen değer*in tahmin edilmesinde kullanılmıştır. Bu nedenle, getiri oranlarının ortalamaların beklenen değerlerinden (hareketli ortalamaların ortalamasından) sapmalarının hesaplanması gerekmektedir. AKBNK hisse senedi için, O42 hücresine,

=B42-$B$11

formülü yazılarak, B42'de yer alan getiri oranından, B11'de yer alan AKBNK hareketli ortalamalarının ortalaması çıkarılmış olmaktadır. Formül sütun sonuna kadar kopyalandığında her bir getiri oranı için farklar alınmış olacaktır. Benzer biçimde tüm hisse senetlerinin getiri oranları, kendi hareketli ortalamalarının ortalamasından farkları alınanarak sapmalar hesaplanmaktadır. Bu değerler, elektronik tabloda O41:Z101 alanında yer almaktadır. Tablonun bu parçası bazı satırları gizlenmiş olarak Tablo 8'de görülmektedir.

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
39	Getirilerin Ortalamaların Beklenen Değerlerinden Sapmaları													Mutlak Değerler	
40															
41	AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK			
42	0,1077	-0,1835	-0,1798	-0,1709	-0,0875	-0,0441	-0,1027	-0,0855	-0,1182	-0,1400	-0,1557	-0,1813		0,0504	
43	-0,1229	-0,1240	-0,1583	-0,0430	-0,0463	-0,0431	-0,0916	0,0913	-0,0847	-0,0583	-0,0324	-0,0625		0,0762	
44	0,1845	0,1684	0,3341	0,2508	0,1025	0,0452	0,0944	0,2278	0,0771	0,1241	0,0815	0,0634		0,1517	
45	-0,3229	-0,1403	-0,2237	-0,2778	-0,2103	-0,2107	-0,2018	-0,3880	-0,3081	-0,2460	-0,1820	-0,2606		0,2339	
46	-0,0849	-0,0697	-0,0261	-0,0709	-0,1700	0,1398	-0,0712	0,0239	-0,0434	0,0892	-0,0265	-0,0077		0,0947	
47	0,0585	-0,0264	-0,0089	0,0446	0,0987	-0,0625	0,1284	-0,0509	-0,0576	-0,0209	0,0387	0,1186		0,0796	
48	-0,2084	-0,3097	-0,4014	-0,2584	-0,2974	-0,3180	-0,3392	-0,3471	-0,2878	-0,3880	-0,3565	-0,2746		0,3005	
49	0,2912	0,0997	0,2897	0,3513	0,1764	0,5282	0,2534	0,5924	0,1674	0,2889	0,3470	0,1629		0,2350	
92	-0,0271	0,3597	0,3486	0,1944	0,3171	0,0601	-0,0859	0,0262	0,4549	0,0292	0,1107	0,2789		0,1088	
93	0,1812	0,2320	-0,0585	0,3211	0,3009	0,2413	0,2278	0,0881	0,0761	0,2640	-0,0724	0,0285		0,2515	
94	0,4798	0,2378	0,3788	0,2624	0,6142	0,1618	0,3000	0,3388	0,5480	0,3852	0,3788	0,5083		0,4682	
95	-0,1001	-0,0880	0,0521	-0,3467	-0,1262	-0,0210	0,3744	0,0154	-0,1629	-0,2231	-0,1301	-0,0149		0,0011	
96	-0,0386	-0,0186	-0,0856	-0,0388	-0,2875	0,0747	-0,1187	0,1583	-0,1071	0,1496	-0,1910	-0,0989		0,1263	
97	0,3800	-0,0992	0,1400	0,2624	-0,0875	0,2381	-0,0703	0,4104	0,0036	-0,0370	0,1829	0,3283		0,0327	
98	0,0209	-0,1097	-0,0158	-0,0655	-0,2843	-0,1849	-0,0700	-0,0433	-0,1582	-0,3727	-0,1508	-0,0517		0,1720	
99	-0,3041	-0,2676	-0,2332	-0,0709	-0,1938	-0,2777	-0,2109	-0,3132	-0,0546	-0,2886	0,0244	-0,4777		0,2338	
100	-0,4468	-0,4362	-0,6021	-0,5057	-0,4811	-0,4838	-0,5716	-0,5159	-0,4904	-0,4216	-0,5378	-0,4844		0,4898	
101	-0,1153	-0,0938	0,0479	-0,1609	-0,0916	-0,1411	-0,1034	-0,1058	-0,1297	-0,0693	0,1630	0,1619		0,0975	
102															
103										Ortalama Mutlak Değer				0,1533	

Tablo 8. Getirilerin Sapmaları ve Mutlak Değerler

13. **Amaç Fonksiyonu.** Amaç fonksiyonunun hesaplanması için getirilerin ortalamaların beklenen değerlerinden sapmaları kullanılmaktadır. Her döneme ilişkin söz konusu sapmalar, karar değişkenleri ile karşılıklı olarak çarpılıp toplanacak ve bu çıkan sonuçların mutlak değerleri alınacaktır. Böylece dönem sayısı kadar yani 60 adet mutlak değer elde edilmektedir. Bunun için, AB42 hücresine,

=ABS(SUMPRODUCT(O42:Z42;$B$6:$M$6))

formülü girilir ve tüm dönemler için kopyalanırsa 60 adet mutlak değer elde edilir. Görüleceği gibi, karar değişkenlerinin farklı değerleri için hesaplanan bu mutlak değerler değişecektir. Amaç fonksiyonunun bir bileşeni, söz konusu mutlak değerlerin aritmetik ortalamasıdır. Bu nedenle, AB103 hücresine,

=AVERAGE(AB42:AB101)

formülü yazılır ve istenen ortalama hesaplanır. Bazı x değerleri için mutlak değerler ve ortalaması Tablo 8'de görülmektedir. Amaç fonksiyonu, hesaplanan ortalama mutlak değerin Beta 1 ile çarpılması ve buna genelleştirilmiş varyansın karekökünün (standart sapma) Beta 2 ile çarpımının eklenmesiyle oluşmaktadır. Bunun için, D21 hücresine,

=L14*AB103+L15*SQRT(B19)

formülü girilerek amaç fonksiyonu hücresi oluşturulur.

14. **Pozitiflik Kısıtı.** Karar değişkenlerinin pozitif olması kısıtı tablo üzerinde gösterilmeden, doğrudan Solver (Çözücü) tablosuna eklenmiştir.

15. **Solver (Çözücü).** Buraya kadar kurulan modelin optimizasyonu, Microsoft Excel içinde yer alan ve etkin bir araç olan Solver (Çözücü) yardımıyla yapılacaktır. Tools menüsünden Solver aracı çağrılarak ilgili parametreler doldurulmalıdır. Set Target Cell (Hedef Hücre) kısmına tıklanarak amaç fonksiyonu hücresi B21 hücresi seçilir. Equal to alanından Min seçeneği seçilir. By Changing Cells (Değişen Hücreler) alanı tıklanarak, karar vektörünün yer aldığı,

$B$6:$M$6

alanı seçilir. Subject to the Constraints (Kısıtlar) parametresi kısıtların yer alması gerektiği parametredir. İlk olarak ağırlık kısıtı,

$B$15 = $D$15

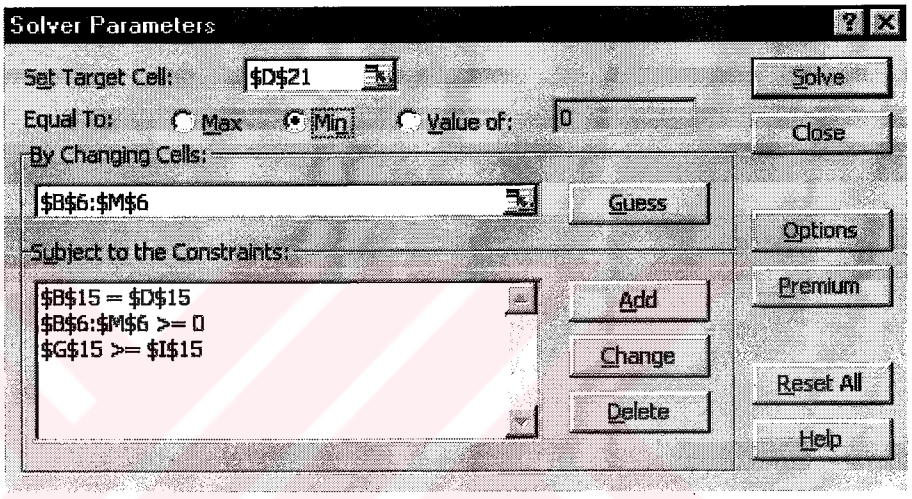
girilir. İkinci olarak, getiri kısıtı,

$G$15 >= $I$15

girilir. Son olarak da karar değişkenlerinin pozitif olma koşulu,

$B$6:$M$6 >= 0

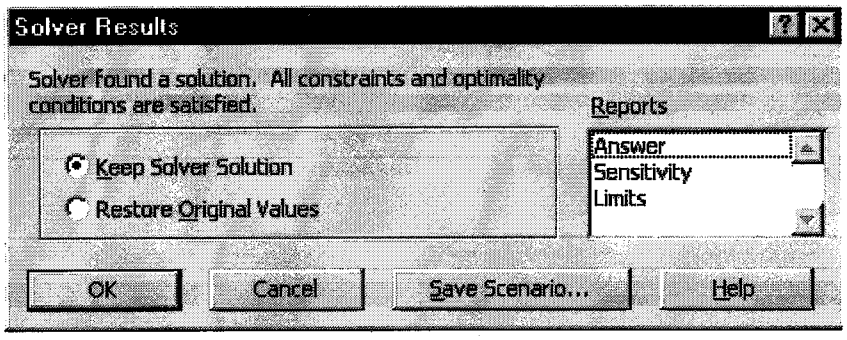
eklenir. Böylece, modele ilişkin tüm kısıtlar Solver'da belirtilmiş olur. Sözü edilen Solver diyalog kutusu Şekil 22'de görülmektedir.



Şekil 22. Önerilen Modelin Standart Solver Diyalog Kutusu

5.3.5.1.Kurulan Modelin Çözülmesi

Yukarıda belirtilen tüm aşamalar izlendikten sonra Standart Solver üzerindeki Solve ikonu tıklanırsa Solver çalışmaya başlar ve Solver Results adı altında bir diyalog kutusu gösterir. Bu model için Solver çalıştırıldığında, "Solver bir çözüm bulmuştur. Tüm kısıtlar ve optimallik koşulları sağlanmıştır" mesajı elde edilmiştir. Buna göre Solver optimal çözümü bulmuştur. Yukarıdaki model için Solver'in çözüme ulaşma süresi PIII 450 işlemci ve 64 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda 4 saniyedir. Sözü edilen Solver Results diyalog kutusu Şekil 23'te görülmektedir.



Şekil 23. Solver Results Diyalog Kutusu

Elde edilen çözümün gerçekten global optimal olup olmadığının test edilmesi için, karar değişkenleri hücrelerine farklı iterasyon başlangıç noktaları vererek Solver'ı çözdüğümüzde hep aynı amaç fonksiyonu değerlerine ulaşılmıştır. Dolayısıyla, bulunan amaç fonksiyonu çözüm değeri ***global minimum*** değeridir.

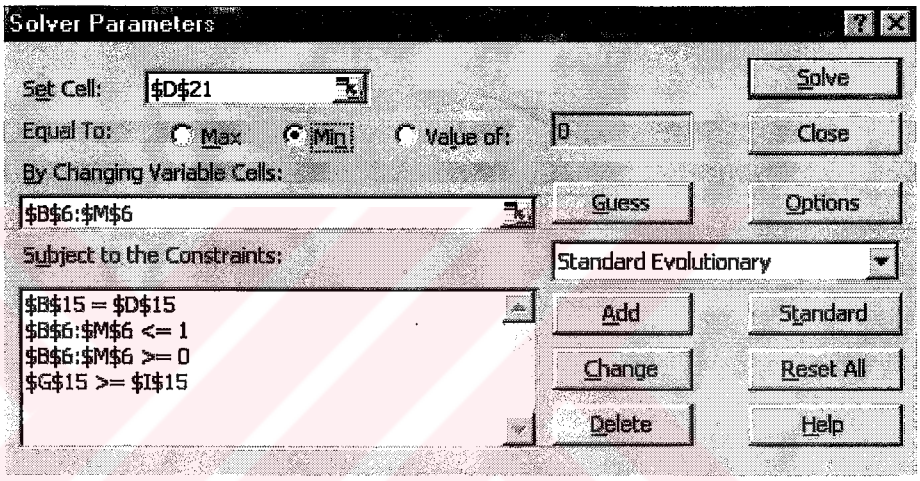
Microsoft Excel üzerinde bulunan Standart Solver bazı modellerde global optimum yerine lokal optimum sonucuna ulaşabilmektedir. Bunu aşmak için, yukarıdaki gibi, farklı noktalardan çözüme başlanmalıdır. Diğer bir yol da, farklı tekniklere göre çalışan Solver araçları kullanmaktır. Bu araçlardan birisi Frontline şirketince üretilen çok daha güçlü ve farklı yöntemlerle çalışabilen Premium Solver'dır. Bu araç, kurulduğunda Microsoft Excel'e otomatik olarak eklenmektedir. Premium Solver'ın Standard Evolutionary modülü *genetik algoritma*ları kullanarak çözüme ulaştığından, global optimuma çok yakın değerler bulmaktadır[30].

Uygulama modelimiz Premium Solver içerisinde yer alan genetik algoritma tabanlı Standard Evolutionary modülü ile de çözülmüştür. Ancak bu Solver'da çözüme çabuk ulaşmak amacıyla karar değişkenleri için alt ve üst limit değerleri de istenmektedir. Pozitiflik koşulundan dolayı alt limite sahip olan karar değişkenleri, $B$6:$M$6 <= 1 kısıtının eklenmesiyle üstten *1* ile sınırlandırılmışlardır. Premium Solver diyalog kutusu Şekil 24'te görülmektedir.

---

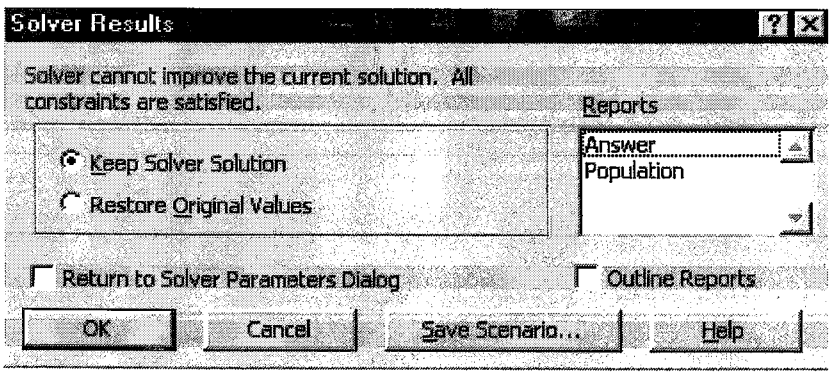
[30] Wayne L. Winston, S. Christian Albright, **Practical Management Science,** 2nd Ed., USA, Duxbury Thomson Learning, 2001, s. 401.

Aynı model için Premium Solver çalıştırıldığında, PIII 450 işlemci ve 64 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda çözüme ulaşma süresi 3 dakika 12 saniye olmuştur. Premium Solver işlem sonucunda "Solver mevcut çözümü iyileştirememektedir. Tüm kısıtlar sağlanmıştır." mesajı vermiştir. Yani amaç fonksiyonu daha fazla minimize edilememektedir. Premium Solver, binler basamağındaki ihmal edilebilecek farkla Standart Solver'ın elde ettiği çözümün aynısını vermiştir. Premium Solver'ın Solver Results diyalog kutusu Şekil 25'te görülmektedir.



Şekil 24. Önerilen Modelin Premium Solver Diyalog Kutusu

Hem farklı başlangıç noktalarından Standart Solver kullanarak hem de Premium Solver kullanarak aynı amaç fonksiyonu değerlerine ulaştığımızdan dolayı bulunan çözüm değeri ***global minimum*** değeridir.



Şekil 25. Premium Solver Results Diyalog Kutusu

Veri seti için Standart Solver kullanarak, % 95 güven seviyesinde ve %6 istenen en az getiri oranı seviyesindeki modelin elektronik tablo optimum çözümü Tablo 9'da verilmiştir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Portföy Optimizasyon Modeli Önerisi**												
2													
3	**Portföydeki Hisse Senedi Ağırlıkları**												
4													
5		AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
6		0,2036	0,0152	0,0000	0,0000	0,4033	0,0135	0,2492	0,0000	0,0000	0,1153	0,0000	0,0000
7		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12
8													
9	**Hareketli Ortalamaların Beklenen Değerleri**												
10													
11		0,0688	0,0597	0,0774	0,0709	0,0675	0,0753	0,0859	0,0535	0,0720	0,0693	0,0724	0,0834
12													
13	**Ağırlık Kısıtı**						**Getiri Kısıtı**						
14		Toplam		Gereken			Beklenen		Gereken		**Beta1**	1	
15		1,0000	=	1			0,1686	>=	0,06		**Beta2**	1	
16													
17	**Genelleştirilmiş Varyans**			**Portföy Varyansı (XtCX)**			**Portföy Standart Sapması**				**Güven Seviyesi**		
18													
19		9,9E-22		0,04215			0,2053				**Alfa**	0,95	
20											**z değeri**	-1,64485	
21	**Amaç Fonksiyonu**			0,15328			**Ortalamaların Varyansı (XtSX)**						
22							0,00341						

Tablo 9. Önerilen Modelin Optimal Çözümü

5.3.6.Çözümün Yorumlanması

Tüm kısıtların sağlandığını elektronik tabloda görmek mümkündür. Karar değişkenlerimiz portföyü oluşturan hisse senetlerinin ağırlıklarıydı. Elektronik tablodan da görüleceği gibi, %95 güven seviyesi ve %6 istenen en az getiri oranı seviyesinde, karar değişkenleri vektörü,

$$X^T = [0.2036,\ 0.0152,\ 0,\ 0,\ 0.4033,\ 0.0135,\ 0.2492,\ 0,\ 0,\ 0.1153,\ 0,\ 0]$$

şeklinde elde edilmiştir. Bunun anlamı şudur; elimizdeki fonun %20,36'sını AKBNK hisse senedine, %1,52'sini AKSA, %40,33'ünü EREGL hisse senedine, %1,35'ini FINBN hisse senedine, %24,92'sini FROTO hisse senedine ve %11,53'ünü SISE

hisse senedine yatırmak gerekmektedir. Dolayısıyla, portföy altı hisse senedinden oluşmaktadır. Amaç fonksiyonu değeri, 0,15328 elde edilmştir. Bu değer, L_1 risk ölçüsünden türetildiğinden bu çalışmada probabilistik L_1 anlamında L_{1p} olarak adlandırılmıştır. Portföyün %95 güven seviyesinde ortalama beklenen getirisi %16,86 elde edilmiştir. Buna karşın, portföyün standart sapması %20,53 elde edilmiştir. Görüldüğü gibi, beklenen getiriye göre standart sapma oldukça yüksektir.

5.3.7.Önerilen Modelin Duyarlılık Analizi

Önerilen model elektronik tabloda kurulup Solver aracı çalıştırıldıktan sonra Solver Results (Çözücü Sonuçları) diyalog kutusu gelmektedir. Bu tabloda Reports (Raporlar) bölümündeki, Answer Report (Cevap Raporu), Sensitivity Report (Duyarlılık Raporu) ve Limits Report (Sınır Değerler Raporu) seçenekleri hepsi birden seçilirse söz konusu rapor analizleri ayrı çalışma sayfalarında elde edilmektedir. Bu analiz sonuçları, çalışılan modelin duyarlılık analizi hakkında bilgi vermektedir. Bu raporlardan Cevap Raporu, hücrelerin başlangıç değerlerini ve optimal değerlerini göstermektedir. Bu rapor üzerinde burada durulmamıştır. Aşağıda %95 güven seviyesinde ve %6 en az getiri oranı istenen modele ilişkin Duyarlılık Raporu ve Sınır Değerler Raporu üzerinde durulmuştur.

5.3.7.1.Duyarlılık Raporu (Sensitivity Report)

Duyarlılık raporu *Solver Options* penceresinde *Assume Linear Model* seçeneğinin işaretlenip işaretlenmemesine bağlı olarak, çözümün lineer ya da nonlineer olmasına göre iki farklı şekilde elde edilecektir. Her iki durumda da elde edilen çözümün modelde kullanılan verilerdeki değişimlere ne dereceye kadar hassas olduğuna ilişkin bilgiler verilmektedir[31]. Modelimiz doğrusal olmadığından elde edilen duyarlılık raporu nonlineer modeller için elde edilen rapordur.

[31] Haldun Akpınar, **Excel'de Fonksiyonlar, Veri Analizleri ve Problem Çözme,** İstanbul, Alfa Yayınları, 1996, s. 324.

Reduced Gradient (Azalan Gradyan) değerleri, değeri değişen hücrelerdeki (karar değişkenleri) *1* birimlik değer değişiminin amaç fonksiyonunda (hedef hücrede) sağlayacağı değer değişimini göstermektedir[32]. Tablo 10'da değeri değişen hücrelere (karar değişkenleri) ilişkin duyarlılık raporu görülmektedir.

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Gradient
$B$6	AKBNK	0,2036	0,0000
$C$6	AKSA	0,0152	0,0000
$D$6	ALARK	0,0000	0,0271
$E$6	ARCLK	0,0000	0,0346
$F$6	EREGL	0,4033	0,0000
$G$6	FINBN	0,0135	0,0000
$H$6	FROTO	0,2492	0,0000
$I$6	GARAN	0,0000	0,0113
$J$6	KCHOL	0,0000	0,0232
$K$6	SISE	0,1153	0,0000
$L$6	VESTL	0,0000	0,0066
$M$6	YKBNK	0,0000	-0,0010

Tablo 10. Duyarlılık Raporu Değeri Düzeltilen Hücreler Tablosu

Yukarıdaki tabloya göre, ALARK hisse senedine ait hücre değerinin *1* birim değişmesi ile amaç fonksiyonu *0,0271* birim değişmektedir. Benzer şekilde, ARCLK hisse sendine ait hücre değerinin *1* birim değişmesi ile hedef hücre *0,0346* birim değişmektedir. GARAN hücresinin *1* birim değişmesi ile hedef hücre *0,0113* birim değişirken KCHOL hücresinin *1* birim değişimi ile hedef hücre *0,0232* birim değişmektedir. VESTL hücresinin *1* birimlik değişimine karşılık hedef hücre *0,0066* birim değişmektedir. Son olarak, YKBNK hücresinin *1* birim değişimi ile hedef hücre *-0,0010* birim değişmektedir. Diğer hücrelerdeki değişimler, amaç fonksiyonunu etkilememektedir.

[32] **A.e.,** s. 325.

5.3.7.2.Sınır Değerler Raporu (Limits Report)

Sınır değerler raporunda hedef hücrenin, değeri değişen hücrelerin değerleri ve bu hücrelerde mümkün alt ve üst sınır değerler yer almaktadır[33]. Tablo 11'de değeri düzeltilen hücre sınırları tablosu görülmektedir.

	Adjustable		Lower	Target	Upper	Target
Cell	Name	Value	Limit	Result	Limit	Result
$B$6	AKBNK	0,2036	0,2036	0,1532	0,2036	0,1532
$C$6	AKSA	0,0152	0,0152	0,1532	0,0152	0,1532
$D$6	ALARK	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532
$E$6	ARCLK	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532
$F$6	EREGL	0,4033	0,4033	0,1532	0,4033	0,1532
$G$6	FINBN	0,0135	0,0135	0,1532	0,0135	0,1532
$H$6	FROTO	0,2492	0,2492	0,1532	0,2492	0,1532
$I$6	GARAN	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532
$J$6	KCHOL	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532
$K$6	SISE	0,1153	0,1153	0,1532	0,1153	0,1532
$L$6	VESTL	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532
$M$6	YKBNK	0,0000	0,0000	0,1532	0,0000	0,1532

Tablo 11. Değeri Düzeltilen Hücre Sınırları Tablosu

Yukarıdaki tabloda, tüm diğer hücre değerleri sabit ve mümkün bir çözümün bulunduğu durumda, amaç fonksiyonunda yer alan değişkenlerin alabileceği en küçük değerler *Lower Limit* sütununda yer almaktadır. Benzer şekilde, tablodaki değişkenlerin tüm diğer hücre değerleri sabit ve mümkün bir çözümün bulunduğu durumda alabileceği en büyük değerler *Upper Limit* sütununda verilmektedir. Tablodaki değişkenlerin, alt veya üst sınır değerlerde bulunması halinde hedef hücrede elde edilecek değerler *Target Result* sütununda yer almaktadır[34]. Tabloya dikkat edilirse, tüm değişkenlere ilişkin alt sınır değerleri ve üst sınır değerleri birbirlerine ve düzeltilen değerlerine eşittir. Dolayısıyla, söz konusu değişkenlerin en

[33] **A.e.,** s. 326.
[34] **A.e.,** s. 326.

küçük değişimlerinde bile optimal amaç hücresi sonucu değişecek ve optimallik bozulacaktır.

5.3.8.Önerilen Modelin Diğer Modellerle Karşılaştırılması

Geliştirilen portföy optimizasyon modelinin %95 güven seviyesi ve %6 istenen en az getiri oranıyla çözülmüş hali, aynı veri setiyle %6 istenen en az getiri oranıyla çözülmüş Konno & Yamazaki ve klasik Markowitz modelleri karşılaştırılmıştır. Önerilen model L_{1p} risk modeli, Konno & Yamazaki modeli L_1 risk modeli ve Markowitz modeli ise L_2 risk modeli olarak adlandırılmaktadır.

Konno & Yamazaki (L_1 risk modeli) modelinin %6 istenen en az getiri oranı seviyesinde çözülmüş optimal elektronik tablosundan bir bölüm, Tablo 12'de görülmektedir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Konno & Yamazaki Modeli**												
2													
3	**Portföydeki Hisse Senedi Ağırlıkları**												
4													
5		AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,4579	0,0000	0,0000	0,5421	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12
8													
9	**Getiri Ortalamaları**												
10													
11		0,0497	0,0462	0,0536	0,0620	0,0365	0,0445	0,0583	0,0249	0,0451	0,0369	0,0468	0,0413
12													
13	**Ağırlık Kısıtı**						**Getiri Kısıtı**						
14		Toplam		Gereken			Beklenen		Gereken				
15		1,0000	=	1			0,0600	>=	0,06				
16													
17	**Portföy Varyansı (XtCX)**			**Portföy Standart Sapması**									
18													
19		0,05273			0,2296								
20													
21	**Amaç Fonksiyonu**			0,1733									

Tablo 12. Konno & Yamazaki Modelinin Optimal Çözümü

Klasik Markowitz (L_2 risk modeli) modelinin %6 istenen en az getiri oranı seviyesinde çözülmüş optimal elektronik tablosundan bir bölüm, Tablo 13'te görülmektedir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Markowitz Modeli**												
2													
3	**Portföydeki Hisse Senedi Ağırlıkları**												
4													
5		AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
6		0,0359	0,0000	0,0000	0,5413	0,0000	0,0000	0,4228	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12
8													
9	**Getiri Ortalamaları**												
10													
11		0,0497	0,0462	0,0536	0,0620	0,0365	0,0445	0,0583	0,0249	0,0451	0,0369	0,0468	0,0413
12													
13	**Ağırlık Kısıtı**						**Getiri Kısıtı**						
14		Toplam		Gereken			Beklenen		Gereken				
15		1,0000	=	1			0,0600	>=	0,06				
16													
17	**Portföy Varyansı (XtCX)**			**Portföy Standart Sapması**									
18													
19		0,05232			0,2287								
20													
21	**Amaç Fonksiyonu**			0,0523									

Tablo 13. Markowitz Modelinin Optimal Çözümü

Bu üç farklı modelin %6 istenen getiri oranında önerdikleri hisse senetleri bileşimi Tablo 14'te görülmektedir. Bu veri seti için, Konno & Yamazaki modeli portföye iki hisse senedi alırken, Markowitz modeli üç hisse senedi almaktadır. Önerilen model ise portföyün altı hisse senedinden oluşması gerektiğini belirtmektedir. Diğer bir deyimle, bu veri seti için, geliştirilen modelin portföyü daha çok çeşitlendirdiği görülmektedir.

5.3.8.1.Etkin Sınırların Karşılaştırılması

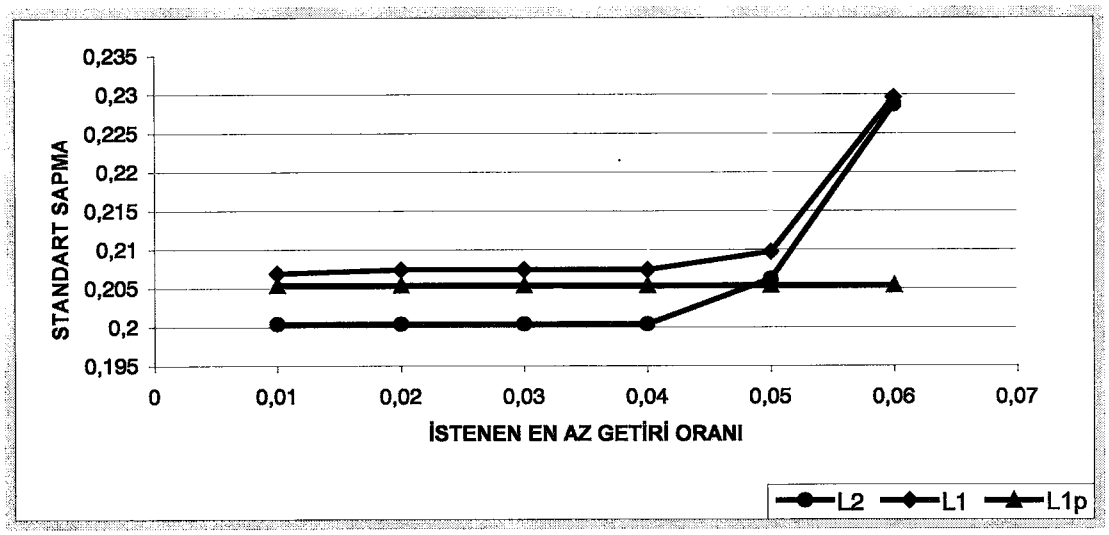
Bilindiği gibi, sözü edilen üç farklı modelin risk ölçüleri farklıdır. Bu nedenle önerin modeli diğer modellerle ilişkilerini gözlemlemek için ortak bir ölçüye ihtiyaç vardır. Bu ölçü, *portföyün standart sapması* olarak ele alınabilir. Çünkü, hangi tip model olursa olsun portföylerin standart sapmalarını hesaplamak mümkün ve

oldukça kolaydır. Bu nedenle, bu üç model standart sapma zemininde karşılaştırılmıştır.

Hisse Senedi	Karar Değişkenleri	Önerilen Model (L_{1p} risk)	Konno&Yamazaki Modeli (L_1 risk)	Markowitz Modeli (L_2 risk)
AKBNK	x_1	0,2036	0	0,0359
AKSA	x_2	0,0152	0	0
ALARK	x_3	0	0	0
ARCLK	x_4	0	0,4579	0,5413
EREGL	x_5	0,4033	0	0
FINBN	x_6	0,0135	0	0
FROTO	x_7	0,2492	0,5421	0,4228
GARAN	x_8	0	0	0
KCHOL	x_9	0	0	0
SISE	x_{10}	0,1153	0	0
VESTL	x_{11}	0	0	0
YKBNK	x_{12}	0	0	0

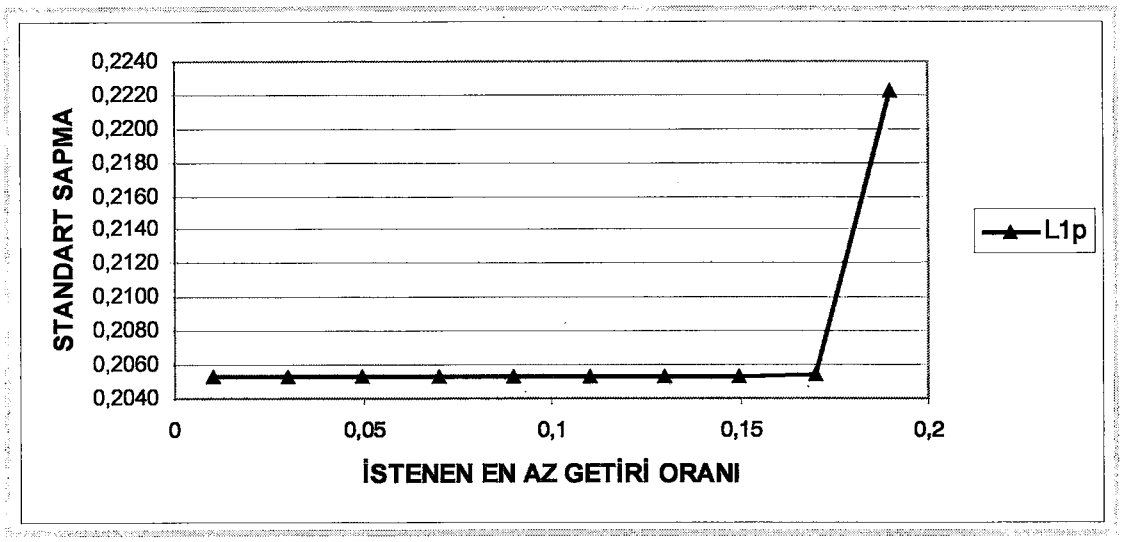
Tablo 14. Üç Farklı Modelin %6 İstenen Getiri Oranında Portföy Önerileri

Şekil 26'da L_{1p} risk modeli, L_1 risk modeli ve L_2 risk modellerince oluşturulan ve *istenen en az getiri oranı(ρ)-standart sapma* uzayındaki portföylerin oluşturduğu *etkin sınır*lar görülmektedir. Bu grafik, $\rho = 0{,}06$ seviyesine kadar olan değerlerle modellerin ayrı ayrı çözülmesi sonucunda oluşturulmuştur. L_{1p} risk modeli için güven seviyesi %95'tir.



Şekil 26. Üç Modelin ρ-Standart Sapma Uzayındaki Etkin Sınırları

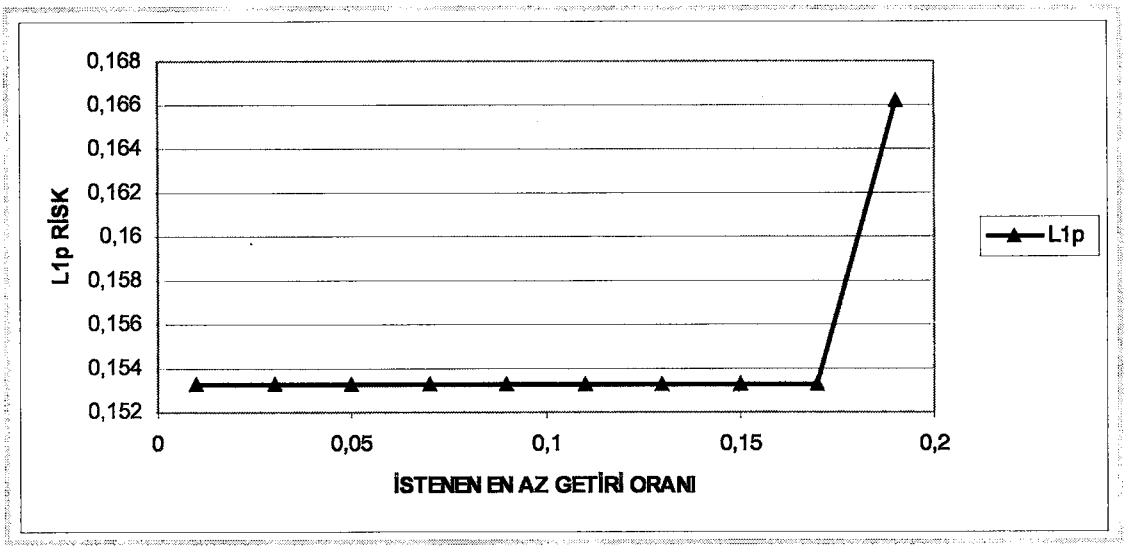
Yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi, L_1 risk modeli ve L_2 risk modelleriyle oluşturulan etkin sınırlar arasında fark bulunmaktadır. Daha önce de sözü edildiği gibi, getiriler çok değişkenli normal dağılsaydı bu iki etkin sınır çakışacaktı. L_{1p} risk modeli bu iki etkin sınır arasında yer almaktadır. Ancak, L_1 risk modelinin etkin sınırına daha yakın bulunmaktadır. Bu grafiğe göre, L_{1p} risk modeli L_1 risk modelinden daha iyi çözüm üretmektedir. Çünkü, aynı ρ değerlerinde ***daha düşük*** standart sapmalı etkin portföyler üretmektedir. İlk başta etkin sınırlar paralel giderken, %4 seviyesinden sonra paralellik bozulmuştur. %6 seviyesinde ise L_1 ve L_2 etkin sınırları biribirlerine çok yaklaşmışlardır. Diğer taraftan, L_{1p} risk modelinin etkin sınırı doğrusallığını korumuştur. Bu doğrusallık %17 seviyesinde bozulmaktadır. Daha ileri seviyedeki ρ değerleri için L_{1p} risk modelinin aynı uzaydaki etkin sınırı Şekil 27'de görülmektedir. Bu grafikten de görüldüğü gibi, L_{1p} risk modeli diğer modellerden farklı olarak %18 seviyelerine kadar beklenen getiri imkanı sunmaktadır. Bu üstünlük, daha sonra tartışılacaktır.



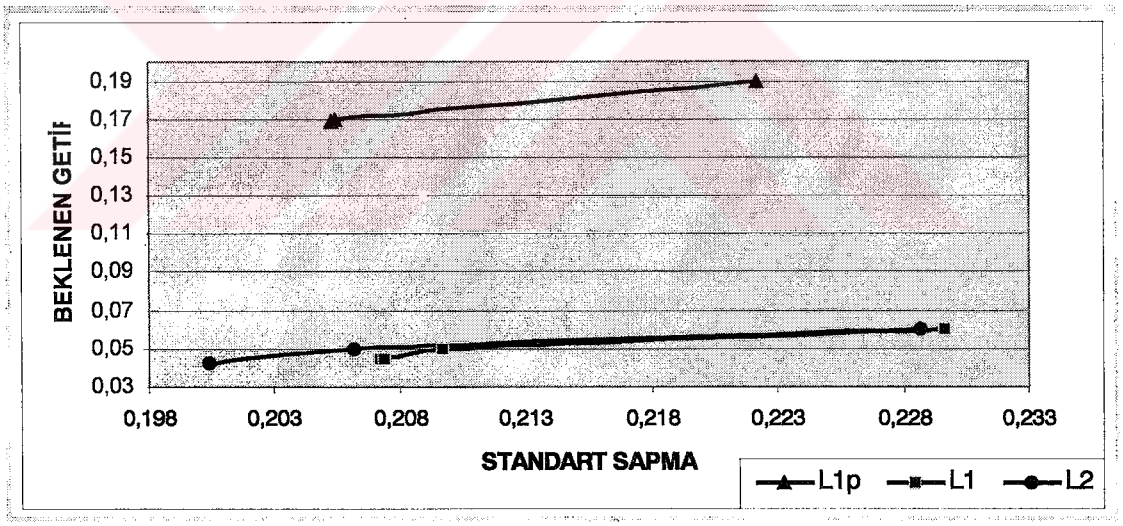
Şekil 27. L_{1p} Risk Modelinin ρ-Standart Sapma Uzayındaki Etkin Sınırı

Önerilen modelin kendi risk ölçüsüne göre oluşturduğu etkin sınırı da görmek mümkündür. Söz konusu modelin, *istenen en az getiri oranı*(ρ)-L_{1p} *risk* uzayındaki etkin sınırı Şekil 28'de görülmektedir. L_{1p} risk değerleri geliştirilen modelin amaç fonksiyonu değerleridir. Aynı modelin, ρ-standart sapma uzayındaki etkin sınır eğrisi de ρ-L_{1p} risk uzayındaki etkin sınır eğrisiyle tamamen aynı karakterdedir. Buradan, önerilen model için, L_{1p} riskinin aynı modelin standart sapması ile paralel hareket ettiğini söylemek mümkündür.

Sözü geçen üç modelin, farklı düzlemlerde de etkin sınırlarını oluşturmak mümkündür. Üç farklı modelce üretilen portföylerin, *standart sapma-ortalama beklenen getiri* uzayında oluşturdukları etkin sınırlar Şekil 29'da görülmektedir. Grafikten de görüldüğü gibi, L_1 risk modeli ve L_2 risk modeline ilişkin etkin sınır eğrileri birbirlerine oldukça yakındırlar. Ancak, %95 güven seviyesindeki L_{1p} risk modelinin etkin sınırı bu eğrilerin çok üzerinde seyretmektedir. Bunun nedeni, yaklaşık aynı standart sapma civarlarında beklenen getirinin çok daha yüksek olmasıdır. Bu da, aslında ortalamaların varyansından kaynaklanmaktadır.



Şekil 28. Önerilen Modelin ρ-L_{1p} Risk Uzayındaki Etkin Sınırı



Şekil 29. Üç Modelin Standart Sapma-Beklenen Getiri Uzayındaki Etkin Sınırları

Çünkü, probabilistik kısıtın deterministik eşdeğeri bulunurken hareketli ortalamaların standart sapması (kuadratik form) eklenmektedir. Grafiğe dikkat edilirse, önerilen modelin etkin sınırı daha dar standart sapma bandındayken daha geniş beklenen getiri bandına sahiptir. Yani, belirli güven seviyesindeyken diğerlerine göre genelde

daha az riskli ama daha çok getirili portföyler sunabilmektedir. Buna karşın, L_2 risk modeli kadar düşük standart sapmalı portföyler üretememektedir. Ancak, L_1 risk modelinden daha düşük standart sapmalı portföyler üretebildiği açıktır. Belirli güven seviyesinde, daha düşük riskle çok daha fazla beklenen getirili portföyler üretmek geliştirilen modelin önemli üstünlüklerinden birisidir.

5.3.8.2.Stokastik Çözüm Değeri

Güven seviyesinin düşürülmesiyle üretilen portföylerin ortalama beklenen getiri seviyesinin düştüğü gözlenmiştir. Yukarıda da değinildiği üzere, standart sapmanın z değeri katı eklenerek deterministik eşdeğer kısıt oluşturulmaktadır. Dolayısıyla, z değerinin küçülmesiyle söz konusu kısıtın sol tarafı da küçülmektedir. Tablo 15'te %6 istenen en az getiri oranında ve çeşitli güven seviyelerine göre ortalama portföy getirisinin aldığı değerler görülmektedir. L_1 risk modelinin deterministik, L_{1p} risk modelini de stokastik (ya da probabilistik) olarak alındığı varsayılmıştır. %50 güven seviyesinde elde edilen portföylerin beklenen getirileri deterministik modelden elde edilen beklenen getiri değerine oldukça yakındır. Güven seviyeleri ile beklenen portföy getirileri arasındaki *korelasyon katsayısı* 0,8807 elde edilmiştir. Bu da, iki değişken arasında pozitif güçlü sayılabilecek bir ilişkinin olduğunu göstermektedir.

Değinilmesi gerekli olan diğer bir nokta, amaç fonksiyonunun stokastik çözüm değeridir. 3.bölümde tartışıldığı üzere, amaç fonksiyonunun stokastik çözüm değeri; stokastik amaç fonksiyonu değerinden deterministik amaç fonksiyonu değerinin çıkarılmasıyla elde edilen farkın deterministik amaç fonksiyonu değerine oranlanmasıyla elde edilmektedir. Burada, Konno & Yamazaki modelini deterministik model olarak varsayarsak ve önerilen model de stokastik model olduğuna göre, amacın stokastik çözüm değeri,

$$\frac{0{,}1533 - 0{,}1733}{0{,}1733}.100 = \% \text{ -}11{,}541$$

elde edilmektedir. Bu demektir ki, %95 güven seviyesinde önerilen model Konno &Yamazaki modeline göre % 11,541 daha iyi çözüm bulmaktadır. Amaç minimizasyon olduğundan daha da düşük amaç fonksiyonu değeri elde edilmektedir. Bu nedenle, sonuç negatif çıkmaktadır. Elde edilen bu değer, ρ=%6 seviyesinde elde edilen değerdir.

Güven Seviyesi (Alfa)	Ortalama Portföy Getirisi (Stokastik)	Ortalama Portföy Getirisi (Deterministik)
0,9998	0,2826	
0,9900	0,2085	
0,9500	0,1686	
0,9000	0,1483	
0,8500	0,1337	
0,8000	0,1222	0,06
0,7500	0,1123	
0,7000	0,1034	
0,6500	0,0952	
0,6000	0,0874	
0,5500	0,0798	
0,5000	0,0724	

Tablo 15. Güven Seviyelerine Göre Beklenen Getiriler

5.3.8.3.Portföy Performanslarının Karşılaştırılması

Portföy performanslarının ölçülmesi ve karşılaştırılmaları için Sharpe performans indeksi kullanılmıştır. Bu durumda, Sharpe indeksinin geliştirilmesinde kullanılan varsayımların geçerli olduğunu kabul edelim. Söz konusu ölçüde risksiz faiz oranı olarak, daha önce değinildiği gibi, 3 aylık Hazine Bonosu'nun bileşik ihraç

faiz oranı kullanılmıştır. Kullanılan finansal varlığın ihraç tarihi 18.06.2003'tür. Bileşik ihraç faiz oranı %39,49'dur.

Bu çalışmada aylık getiri oranları üzerinden çalışıldığına göre söz konusu yıllık bileşik faiz oranını aylık faiz oranına dönüştürmeliyiz. Bu amaçla yine etkin bir elektronik tablo olan Microsoft Excel'i kullanabiliriz. Elektronik tabloda herhangi bir boş hücreye,

=RATE (12;;100;-139,49)

girilip hesaplattırılırsa, dönem sayısı 12, şimdiki değeri 100 ve gelecek değeri 139,49 olan varlığın aylık faiz oranı elde edilir. Burada gelecek değerin eksi (-) işaretli olması, şimdiki değer ödemesi ile gelecek değer ödemesinin ters yönlü olmasındandır. Bu hesaplama sonucunda, *aylık risksiz faiz oranı* olarak, %2,81 elde edilmiştir.

Bilindiği gibi Sharpe performans ölçütü $S_P = (\bar{r}_P - r_F)/\sigma_P$ biçiminde hesaplanmaktadır. Tablo 16'da önerilen modelin güven seviyelerine göre Sharpe performans indeksleri görülmektedir. Güven seviyesi arttıkça performans indekslerinin arttığı görülmektedir.

Geliştirilen modelde, istenen en az getiri oranı seviyesi arttıkça Sharpe performans indeksi genelde 0,68 civarında seyretmektedir.

Güven Seviyesi (Alfa)	Sharpe İndeksi (Stokastik)
0,9998	1,2395
0,9900	0,8786
0,9500	0,6842
0,9000	0,5853
0,8500	0,5142
0,8000	0,4584
0,7500	0,4102
0,7000	0,3666
0,6500	0,3268
0,6000	0,2887
0,5500	0,2517
0,5000	0,2138

Tablo 16. Güven Seviyelerine Göre Sharpe Performans İndeksleri

Üç farklı modelin Sharpe performans indekslerini de karşılaştırmak mümkündür. Risksiz faiz oranı olarak %2,81 alındığında ρ=0,06 seviyesinde ve önerilen modelin güven seviyesi %95 olmak üzere üç modelin Sharpe performans indeksleri Tablo 17'de görülmektedir. Tablodan görüldüğü gibi, L_1 ve L_2 risk modellerinin performansları bu seviyede hemen hemen aynıdır. Ancak, %95 güven seviyesindeki L_{1p} risk modelinin performansı diğerlerine göre çok daha iyidir. Yani, önerilen model belirlenen güven seviyelerinde daha performanslı portföyler üretmektedir.

Önerilen model diğer modellere göre çok daha fazla getiri oranı üretmekteydi. Bu getiri oranlarının belirli eşik değerleri mevcuttur. Bu eşik değerlerinden daha fazla getiri getirmeleri mümkün değildir. Eşik değerleri aşıldığında ise model uygunluğunu yitirmektedir. Sözü edilen değerler bu çalışmada *getiri oranı çözüm eşik değeri* olarak adlandırılmaktadır. Tablo 18'de üç modele ilişkin getiri oranı çözüm eşik değerleri verilmektedir. Bu tabloya göre, örneğin, %85 güven seviyesinde model en fazla %16,48 portföy getirisi sağlayabilmektedir. Bu

eşik değeri aşıldığı zaman model uygun çözüm bulamamaktadır. Önerilen model diğer modellere göre çok daha yüksek eşik değerine sahiptir.

ρ=0,06	L_{1p}	L_1	L_2
$\bar{r}_P$:Ortalama getiri oranı / ay (%)	16,86	6	6
σ_P :Getiri oranının standart sapması / ay (%)	20,53	22,96	22,87
$(\bar{r}_P - r_F)/\sigma_P$:Sharpe Oranı	0,684	0,138	0,139
Portföydeki Hisse Senedi Sayısı	6	2	5
Portföydeki Maksimum Ağırlık (%)	40,33	54,21	41,99
Portföydeki Minimum Ağırlık (%)	1,35	45,79	13,69

Tablo 17. ρ=0,06 İçin Sharpe Performans İndekslerinin Karşılaştırılması

Güven Seviyesi (Alfa)	**Getiri Oranı Çözüm Eşik Değerleri**		
	L_{1p}	L_1	L_2
0,9998	0,3433	0,062	0,062
0,9900	0,2493		
0,9500	0,2125		
0,9000	0,1840		
0,8500	0,1648		
0,8000	0,1495		
0,7500	0,1364		
0,7000	0,1246		
0,6500	0,1137		
0,6000	0,1033		
0,5500	0,0949		
0,5000	0,0859		

Tablo 18. Üç Modelin Getiri Oranı Çözüm Eşik Değerleri

5.3.8.4.Yöntemler Arasındaki İlişkinin Gücü

Üç farklı modelin karşılaştırma zemini portföy standart sapmaları olduklarına göre, çeşitli seviyelerde farklı modellerce üretilen standart sapmalar arasındaki ilişkinin gücü bize yöntemler arasındaki benzerlik ve uygunluk seviyesini gösterecektir. Dolayısıyla, üç yöntemle üretilen standart sapmalar arasındaki korelasyon katsayıları söz konusu amaca hizmet edecektir. Tablo 19'da korelasyon matrisinin elde edilmesine olanak sağlayan standart sapmalar yer almaktadır. Burada L_{1p} modelinin %6 seviyesinde de standart sapması 0,2053 idi. Ancak, korelasyonun hesaplanabilmesi için ilgili modelin daha yüksek getiri seviyelerindeki davranışı göz önüne alınarak, son standart sapma 0,2054 olarak değiştirilmiştir. Daha yüksek getiri seviyelerinde de önerilen modelin getirilerindeki değişkenliğin arttığı hatırlanmalıdır.

ρ	Standart Sapma		
	L_{1p}	L_1	L_2
0,01	0,2053	0,2072	0,2004
0,02	0,2053	0,2072	0,2004
0,03	0,2053	0,2072	0,2004
0,04	0,2053	0,2074	0,2004
0,05	0,2053	0,2097	0,2062
0,06	0,2054	0,2296	0,2287

Tablo 19. Modellerin Standart Sapmalarındaki Değişimler

Microsoft Excel kullanarak, Data Analysis-Correlation menüsünden korelasyon matrisi hesaplattırılabilir. Tablo 20'de hesaplanan korelasyon matrisi görülmektedir.

	L_{1p} Risk Modeli	L_1 Risk Modeli	L_2 Risk Modeli
L_{1p} **Risk Modeli**	1		
L_1 **Risk Modeli**	0,9939	1	
L_2 **Risk Modeli**	0,9787	0,9952	1

Tablo 20. Yöntemler Arasındaki Korelasyon Matrisi

Yukarıdaki matrise göre, ele alınan getiri seviyeleri için, her üç model arasında da güçlü pozitif ilişkilerin olduğu görülmektedir. L_1 ile L_2 modelleri arasında hemen hemen tam ilişki olduğu söylenebilir. Benzer şekilde, L_1 ile L_{1p} arasında da yaklaşık tam ilişkinin olduğu söylenebilir. L_2 ile L_{1p} arasında da yaklaşık tam ilişki söz konusudur. Dolayısıyla, önerilen modelin diğer modellerle çok güçlü bir ilişki içerisinde olduğunu söylemek mümkündür. Bu bulgu, geliştirilen modelin geçerliliğine önemli bir katkıda bulunmaktadır.

SONUÇ

Çalışmanın son aşamasında, Konno & Yamazaki modelinden yola çıkılarak farklı bir portföy optimizasyon modeli önerisinde bulunulmuştur. L_1 risk modelinden hareketle geliştirilen model kabul edilebilir belirli güven seviyelerinde, -ortalama portföy getirisinin belirli olasılıklarla gerçekleşmesiyle- riskin biraz daha azaltılabileceği gerçeğine dayanmaktadır. Diğer bir ifadeyle, getiriden belirli güven seviyelerinde ödün vererek riskin anlamlı bir şekilde indirgenmesi esas alınmıştır. Önerilen modelde, elde edilen risk ölçüsü diğer bir deyişle amaç fonksiyonu, L_1 riskinden türetildiği için bu çalışmada L_{1p} risk olarak tanımlanmıştır.

Geliştirilen model ortalama portföy getirisini probabilistik kısıt ve minimize edilmesi gereken riski de amaç fonksiyonu olarak alan bir stokastik programlama modelidir. Sözü edilen stokastik model kurulmuş ve deterministik eşdeğeri teorik olarak elde edilmiştir. Deterministik eşdeğer program olarak bir doğrusal olmayan programlama modeli elde edilmiştir. Güven seviyesi (α)'nin *0,5*'den büyük veya eşit olması durumunda deterministik eşdeğer program uygun çözüm üretmektedir. Dolayısıyla bu kısıtlama da modele eklenmiştir.

Geliştirilen modelin İMKB'den alınan düzeltilmiş aylık getiri oranları kullanılarak uygulaması yapılmıştır. Problemin boyutlarının büyümemesi için uygulama kapsamına İMKB-Ulusal 30 Endeksinden 12 hisse senedi alınmıştır. Kapsanan hisse senetlerinin 60 aylık getiri oranları analize alınmıştır. Uygulama modelinin deterministik eşdeğer programının çözümü için etkin bir elektronik tablo Microsoft Excel 2000 versiyonu kullanılmıştır. Model ilk etapta, %95 güven seviyesi ve %6 en az istenen aylık getiri oranı seviyesinde çözülmüştür. Çözüm, hem Standard Solver hem de Premium Solver'ın genetik algoritma yöntemiyle çalışan Standard Evolutionary modülüyle yapılmıştır. İlgili modelin çözüme ulaşma süresi PIII 450 işlemci ve 64 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda Standard Solver için 4 saniye iken Standard Evolutionary için 3 dakika 12 saniyedir.

Aynı veri seti kullanılarak klasik Markowitz ve Konno & Yamazaki modelleri de elektronik tabloda çözülerek önerilen portföyler karşılaştırılmıştır. Önerilen model ve diğer adı geçen iki model ayrıntılı olarak karşılaştırılmıştır. Üç farklı risk ölçüsüne sahip modellerin karşılaştırılması *portföy standart sapması* ortak zemininde yapılmıştır. Bu nedenle, her tip modelin çözümünde portföy standart sapmaları hesaplanmıştır.

Bu çalışmada geliştirilen modelin bazı üstünlükleri gözlemlenmiştir. Bunlardan ilki, istenen *en az getiri oranı-standart sapma* uzayında oluşturulan etkin sınırların oluşturulmasıyla görülebilmektedir. Söz konusu etkin sınırlar incelendiğinde önerilen modelin ürettiği portföylerin standart sapması, aynı verilerle çözülmüş Konno & Yamazaki modelince üretilen portföylerin standart sapmalarından daha düşüktür. Diğer taraftan, önerilen modelin portföylerinin standart sapması Markowitz modelinin portföylerinin standart sapmasından yüksektir.

Önerilen modelin diğer bir üstünlüğü *standart sapma-beklenen getiri* uzayındaki etkin sınırlar oluşturulduğunda görülmektedir. İlgili grafiğe bakıldığında, Markowitz ve Konno & Yamazaki modellerinin etkin sınırları birbirlerine çok yakın seyretmektedirler. Oysa ki, %95 güven seviyesinde, geliştirilen modelin etkin sınırı diğer modellerin etkin sınırlarının çok üzerindedir. Dolayısıyla, önerilen model diğerlerinden yaklaşık olarak %10 civarında daha fazla getiri sağlamaktadır. Buna rağmen, aynı grafikten önerilen modelin standart sapma bandının diğerlerinden daha düşük olduğu görülmektedir. Bu özellik çok önemli bir üstünlük olarak yorumlanabilir.

Konno & Yamazaki modeli deterministik model olarak alındığında, %6 istenen en az getiri oranı seviyesinde, önerilen modelin stokastik çözüm değeri - *% 11,541* olarak hesaplanmıştır. Bu değer, geliştirilen modelin Konno & Yamazaki modeline göre *%11,542* oranında daha iyi çözüm ürettiğini göstermektedir. Başka bir deyimle, yeni model %95 güven seviyesinde riski daha da azaltmıştır. Geliştirilen modelde güven seviyesi düştükçe portföy getirisinin de düştüğü gözlemlenmiştir.

Önerilen modelin önemli diğer bir üstünlüğü, çalışılan modelin portföylerin performanslarıyla diğer modellerce üretilen portföylerin performansları karşılaştırıldığında görülmüştür. %95 güven seviyesindeki portföyün Sharpe performans indeksi 0,67 iken diğer iki modelin portföylerinin Sharpe performans indeksi 0,12 civarındadır. Önerilen model çok daha iyi performanslı portföyler üretmektedir. Ayrıca, yeni modelde güven seviyesi düştükçe performansların düştüğü görülmüştür.

Önerilen model güven seviyesiyle artmak kaydıyla, çok daha yüksek getiri oranı çözüm eşik değerine sahiptir. Örneğin, yeni model %75 güven seviyesinde en çok %13,64 oranında getiri sağlayabilirken, diğerleri %6,2 oranından öteye geçememektedirler. Bu eşik değerleri aşıldığında modeller uygun çözüm üretememektedirler.

Sözü edilen üç model arasındaki ilişkinin gücü de araştırılmıştır. Belirli seviyelerde üç farklı model tarafından üretilen portföylerin karşılaştırma ölçüsü olan standart sapmaları hesaplanarak aralarındaki korelasyon matrisi hesaplanmıştır. Bu analiz sonucunda, yöntemler arasında ele alınan getiri seviyeleri için pozitif tam korelasyona yaklaşık değerler elde edilmiştir. Dolayısıyla, önerilen model var olan modellerle tam bir ilişki ve uyum içerisinde hareket etmektedir.

Bu modelin göreceli olarak karmaşık yapıda olması ve hesaplama güçlüğü olumsuz yanı olarak değerlendirilebilir. Ancak, modelin elektronik tablo çözümüne elverişli bir yapıda olması bu sakıncayı ortadan kaldırmaktadır.

Bu çalışmada önerilen portföy optimizasyon modeli, farklı veri setleriyle de uygulanmıştır. Söz konusu uygulamalarda da, yukarıdakilere paralel sonuçlar elde edilmiştir. Bu olgu da, modelin geçerliliği konusunda iyi bir gösterge oluşturmaktadır.

Bilindiği gibi geliştirilen modelde, *toplam* getirinin belirli güven seviyesinde gerçeklenmesi istenmektedir. Farklı bir düşünce tarzıyla, çeşitli sektörlerde bulunan hisse senetlerinin *sektörel bazda* toplam getirileri farklı güven seviyelerinde elde edilmek istenebilir. Bu durumda sektör sayısı kadar probabilistik kısıt oluşturularak ayrık probabilistik kısıtlı stokastik programlama modeli elde edilmelidir.

EKLER

EK 1. AYLIK GETİRİ ORANLARI

DÖNEM	AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
03/06	0,1765	-0,1339	-0,1022	-0,1000	0,0000	0,0313	-0,0168	-0,0120	-0,0462	-0,0707	-0,0833	-0,0778
03/05	-0,0541	-0,0643	-0,0810	0,0280	0,0212	0,0323	-0,0056	0,1448	-0,0127	0,0110	0,0400	0,0309
03/04	0,2333	0,2281	0,4114	0,3217	0,2600	0,1205	0,1803	0,2813	0,1491	0,1934	0,1538	0,1368
03/03	-0,2541	-0,0806	-0,1463	-0,2069	-0,1429	-0,1354	-0,1159	-0,3355	-0,2361	-0,1757	-0,1096	-0,1972
03/02	-0,0161	0,0000	0,0513	0,0000	-0,1026	0,2152	0,0147	0,0774	0,0286	0,1385	0,0429	0,0758
03/01	0,1273	0,0333	0,0685	0,1154	0,1642	0,0128	0,2143	0,0026	0,0145	0,0484	0,1111	0,2000
02/12	-0,1406	-0,2500	-0,3241	-0,1875	-0,2299	-0,2427	-0,2533	-0,2936	-0,2159	-0,3187	-0,2841	-0,1912
02/11	0,3600	0,1594	0,3671	0,4222	0,2429	0,6015	0,3393	0,6459	0,2394	0,3582	0,4194	0,2364
02/10	0,0105	0,2105	0,0972	0,1250	0,1111	0,3387	0,0370	0,2837	0,1452	0,2642	0,2917	0,2791
02/09	0,0106	-0,0339	-0,1111	-0,0244	-0,1711	-0,1143	-0,0847	-0,0887	-0,0462	-0,1167	-0,2000	-0,1224
02/08	0,0108	0,0000	-0,0899	-0,1087	0,0411	0,1290	-0,0923	-0,0321	-0,1333	0,1321	-0,0625	-0,2687
02/07	-0,0882	0,2041	0,1125	0,1500	0,1587	0,0000	0,0656	-0,1646	0,2097	0,0600	0,0000	0,0635
02/06	0,2750	0,0208	0,0811	0,1494	0,0500	-0,1389	0,0702	-0,2760	0,0508	-0,0909	0,1228	-0,5563
02/05	-0,0588	-0,0606	-0,1802	0,1136	-0,1176	-0,1628	-0,0656	-0,0738	0,0000	-0,1129	-0,1364	-0,0779
02/04	0,0000	-0,1200	-0,1078	-0,0566	0,1333	0,0886	-0,0317	-0,0700	-0,0923	0,0333	-0,0294	-0,0375
02/03	0,1806	-0,1071	0,0200	0,1778	-0,1045	0,0000	-0,0870	0,0970	0,1207	0,0169	0,0625	0,1940
02/02	-0,1724	-0,1845	-0,1228	-0,1346	-0,1829	-0,2978	0,1695	-0,1859	-0,1831	-0,2606	-0,1795	-0,1928
02/01	-0,0543	0,0729	0,0000	-0,1475	0,1233	-0,1176	-0,0328	0,2277	-0,0658	-0,0172	0,0541	-0,0674
01/12	0,2603	0,2278	0,2000	0,2708	0,1061	0,1087	0,2449	0,2921	0,1343	0,2340	0,1563	0,2027
01/11	0,1587	0,0676	0,1176	0,1429	0,0313	0,2921	0,1136	0,4135	0,1754	0,3623	0,1636	0,2759
01/10	0,1667	0,4800	0,3934	0,6154	0,2075	0,1867	0,1957	0,2246	0,4430	0,3019	0,6418	0,2889
01/09	-0,1000	-0,2424	-0,3370	-0,2529	-0,0702	-0,5125	-0,3429	-0,4547	-0,2818	-0,2838	-0,3366	-0,2742
01/08	0,0000	0,1000	-0,0213	-0,0114	0,2128	-0,1846	-0,0820	-0,0923	-0,0833	-0,0133	-0,0648	-0,0313
01/07	-0,0769	0,0345	-0,0309	-0,1415	-0,1754	-0,1447	0,0167	-0,0462	-0,0769	-0,1379	-0,1148	-0,1795
01/06	0,0947	0,0000	0,0981	0,0459	0,0364	0,9792	0,0909	-0,0217	-0,0299	0,0235	-0,0161	0,1471
01/05	-0,0686	-0,0169	-0,2639	-0,0540	-0,1129	0,1283	-0,0451	-0,0088	-0,0864	-0,2411	-0,2051	-0,0377
01/04	0,4571	0,8438	0,4400	0,5594	0,4904	0,3480	0,6000	0,7353	0,6610	0,3023	0,5146	0,7966
01/03	-0,0139	-0,1111	0,0101	-0,0194	-0,0280	0,0737	-0,0110	-0,1265	-0,0635	0,0361	-0,0804	-0,0484
01/02	-0,2577	-0,0816	-0,0660	-0,2370	-0,1440	-0,2963	-0,2018	-0,5399	-0,1127	-0,2315	-0,0508	-0,3673
01/01	0,1412	-0,0884	0,0192	0,1739	-0,0909	0,1489	0,0364	0,3329	0,2456	0,0800	0,1919	0,4203
00/12	0,3281	0,0488	0,2235	-0,1154	0,0377	0,0217	-0,0517	-0,0930	0,1176	0,0204	-0,0635	-0,0417
00/11	-0,2727	-0,2931	-0,3561	-0,4091	-0,3837	-0,3134	-0,3763	-0,4007	-0,4138	-0,3553	-0,3393	-0,3898
00/10	0,2941	0,1373	0,4505	0,4194	0,1316	0,1964	0,4762	0,1945	0,5000	0,2258	0,1429	0,2292
00/09	-0,1500	-0,2500	-0,1875	-0,2530	-0,1264	-0,1111	-0,1600	-0,1648	-0,1944	-0,1143	-0,0200	-0,1273
00/08	-0,1111	-0,0933	0,0000	-0,1263	-0,0440	0,0161	0,0563	-0,0939	-0,0526	0,0606	-0,0741	-0,1791
00/07	-0,0625	-0,1667	-0,0508	-0,2213	-0,0900	-0,0159	0,0758	-0,0630	-0,1364	0,0000	-0,2800	-0,0290
00/06	0,0105	0,0227	-0,2027	0,1438	-0,1228	-0,2125	-0,0435	-0,0588	-0,1538	-0,0940	-0,0260	-0,0921
00/05	-0,3091	-0,0988	-0,1048	-0,2231	-0,1493	-0,1828	-0,1375	-0,2422	-0,1498	-0,2451	-0,1630	-0,1854

00/04	0,2500	0,4828	0,2206	0,5758	0,2407	0,0941	0,3559	0,3326	-0,0577	0,1461	0,1646	0,2381
00/03	-0,0511	0,1262	-0,0423	-0,0294	0,0909	0,1184	0,0727	-0,1506	0,1818	0,0988	0,0533	-0,0735
00/02	-0,1897	-0,1694	-0,1548	-0,0685	0,0532	-0,2692	-0,0179	-0,1220	-0,0638	-0,1692	0,1194	0,0625
00/01	-0,0938	0,2157	0,3548	0,0282	0,0444	0,1556	0,1667	0,1161	0,1750	0,2325	0,2885	-0,0448
99/12	0,9512	0,6190	0,8235	0,4639	0,5517	1,0690	1,0426	0,4023	0,5152	1,1324	0,8571	0,7632
99/11	0,0933	0,6237	0,4167	0,3662	0,2083	0,2254	0,6096	0,2715	0,3608	0,2830	0,1864	0,3571
99/10	0,0870	0,0211	0,0435	0,2034	0,1429	0,1452	0,1406	0,1789	0,0899	0,0816	0,0536	0,1111
99/09	0,1695	-0,0104	0,1220	0,4390	0,3462	0,0877	0,2308	0,0764	0,3088	0,1264	0,1789	0,0862
99/08	-0,2133	0,0549	-0,0889	-0,2455	0,0130	-0,0952	-0,2121	-0,2102	-0,1905	0,0610	-0,2578	-0,1714
99/07	0,2097	0,2133	0,4610	0,4667	0,3051	0,0862	-0,0294	0,1378	0,5849	0,0513	0,3913	0,1475
99/06	-0,0462	-0,1758	-0,1348	0,1538	-0,2027	-0,2055	-0,0685	-0,0444	-0,1311	-0,1702	0,0222	0,1961
99/05	0,0520	0,0341	0,1558	-0,1613	0,0278	-0,0641	-0,0848	-0,1046	-0,1380	0,2100	0,0714	-0,0234
99/04	0,0417	0,4194	0,4259	0,2653	0,3846	0,1354	0,0000	0,0797	0,5269	0,0985	0,1831	0,3623
99/03	0,2500	0,2917	0,0189	0,3920	0,3684	0,3167	0,3137	0,1416	0,1481	0,3333	0,0000	0,1129
99/02	0,5484	0,2973	0,4542	0,3333	0,6816	0,2371	0,3859	0,3923	0,6200	0,4545	0,4490	0,5897
99/01	-0,0313	-0,0263	0,1294	-0,2747	-0,0577	0,0543	0,4603	0,0689	-0,0909	-0,1538	-0,0577	0,0685
98/12	0,0323	0,0411	0,0119	0,0341	-0,2000	0,1500	-0,0308	0,2118	-0,0351	0,2188	-0,1186	-0,0135
98/11	0,4588	-0,0395	0,2174	0,3333	0,0000	0,3115	0,0156	0,4639	0,0755	0,0323	0,2553	0,4117
98/10	0,0897	-0,0500	0,0615	0,0154	-0,2169	-0,0896	0,0159	0,0102	-0,0862	-0,3034	-0,0784	0,0317
98/09	-0,2353	-0,2079	-0,1558	0,0000	-0,1263	-0,2024	-0,1250	-0,2597	0,0175	-0,2193	0,0968	-0,3942
98/08	-0,3780	-0,3765	-0,5247	-0,4348	-0,4136	-0,4085	-0,4857	-0,4634	-0,4184	-0,3523	-0,4655	-0,3810
98/07	-0,0465	-0,0241	0,1250	-0,0800	-0,0241	-0,0658	-0,0175	-0,0523	-0,0577	0,0000	0,2254	0,2353
98/06	0,1316	-0,1354	0,0000	0,1628	0,1528	-0,0952	-0,0172	0,0748	0,0612	0,0476	0,0143	0,3600
98/05	-0,1012	0,0209	0,2457	-0,2214	-0,1325	0,1672	-0,1944	-0,1938	-0,0717	-0,1633	0,0448	-0,2694
98/04	0,1972	0,3673	0,3488	0,3333	0,3607	0,4186	0,2733	0,3374	0,3766	0,4244	0,7632	0,4583
98/03	-0,0274	0,0208	0,1026	0,1667	0,0702	0,1944	0,1321	0,0238	0,0267	-0,0544	0,2063	0,1053
98/02	0,0282	-0,0769	-0,1236	-0,0526	-0,1094	-0,1628	-0,1587	-0,1656	-0,2021	-0,0510	-0,0735	-0,0380
98/01	-0,0274	-0,1475	0,0000	-0,0256	0,0000	0,0886	-0,0870	-0,0674	-0,0309	0,0603	0,0000	0,0000
97/12	0,4314	0,0000	0,1125	0,1304	0,2308	0,2742	0,1311	-0,0772	0,0430	0,0893	0,1333	0,2951
97/11	0,0200	-0,0317	0,1765	-0,1585	-0,1333	0,0779	-0,0469	0,0293	0,0109	-0,1111	0,0526	0,0893
97/10	-0,0741	-0,0870	-0,1282	-0,0682	-0,0323	0,5098	0,1852	-0,0310	0,0455	0,3125	-0,1094	0,2874
97/09	0,2558	0,3800	0,5294	0,3134	0,1273	0,2593	0,3171	0,3449	0,5349	0,3636	0,4545	0,2609
97/08	0,0488	0,0417	0,0515	-0,0429	0,0280	0,0519	0,0904	0,0704	0,1026	-0,1111	0,0577	-0,0800
97/07	-0,1961	0,0000	0,2278	-0,1250	0,0808	0,1324	0,1899	-0,0104	0,1143	0,0532	0,2530	0,1029
97/06	0,0000	0,0667	0,2154	0,2698	0,3026	0,1333	0,0128	-0,0650	0,1667	0,2966	-0,1673	0,0149
97/05	0,4655	0,1803	-0,1120	0,4723	0,4682	-0,0625	0,2381	0,5279	0,0964	-0,0169	0,1443	0,3694
97/04	-0,0388	-0,1951	-0,2788	-0,0441	-0,2319	-0,0448	-0,1409	-0,1067	-0,1791	-0,1918	0,0309	0,0000
97/03	0,2842	0,0000	-0,1333	-0,1707	-0,1882	-0,0946	0,0833	-0,2391	-0,0563	-0,0759	0,1548	-0,0172
97/02	0,0000	0,0933	0,3043	-0,1087	-0,0116	0,0571	0,0286	0,1095	-0,0405	0,0395	-0,0769	0,1600
97/01	0,4576	0,2712	0,3333	1,0909	0,6538	0,6471	0,5909	0,7733	0,9474	0,6522	0,7500	0,8519
96/12	0,2826	0,0536	0,0299	0,1458	-0,1034	0,0897	0,0476	-0,1046	-0,0952	0,0000	0,0833	0,0385
96/11	-0,0213	0,0566	-0,0147	0,0105	0,2889	0,0986	0,2923	0,0189	0,1053	0,1979	0,1852	0,0400
96/10	0,2500	-0,2838	0,4167	-0,0104	0,1364	0,0758	0,2264	0,1034	0,4340	-0,0103	0,1912	0,0870
96/09	0,0805	0,2333	-0,0769	0,2468	0,2857	0,1379	0,0928	0,2630	0,2441	-0,0673	0,0794	0,2778
96/08	0,1154	-0,0323	-0,0545	0,1667	0,0132	0,0000	-0,0490	-0,1893	0,0597	0,4247	0,0500	-0,0769

96/07	-0,2121	-0,1014	-0,0833	-0,1316	-0,1648	-0,1343	-0,0893	-0,3534	-0,1625	0,1231	-0,0164	-0,1613
96/06	0,1000	0,1129	-0,0476	0,2063	0,1474	0,1898	0,1089	0,3239	0,1940	0,2500	0,1296	0,2237
96/05	0,0112	0,0836	0,1444	0,0977	0,0366	-0,1233	0,0294	-0,1596	-0,2318	0,0129	-0,0243	0,1549
96/04	0,3288	0,0577	0,0385	-0,0745	-0,0120	-0,2234	0,0408	0,4792	0,0233	-0,1228	0,0370	-0,0556
96/03	0,1413	-0,0189	-0,0714	0,2877	0,1216	0,1190	0,6066	0,0549	0,6538	0,2667	0,2558	0,1868
96/02	0,1194	0,0000	0,1200	0,1231	0,1563	0,5000	0,0702	0,0033	0,1304	0,2640	0,2356	0,3788
96/01	0,4565	0,4133	0,0204	0,3265	0,2800	0,1546	0,4250	0,0746	0,3218	0,2535	0,5000	0,3200
95/12	-0,1321	0,2500	0,1951	-0,0926	0,0101	0,1279	-0,0291	0,1329	0,0000	-0,1744	0,0943	-0,2424
95/11	-0,0185	-0,0625	0,0250	-0,3647	-0,1885	-0,2321	-0,2509	-0,2276	-0,1512	-0,0549	-0,2206	-0,0704
95/10	0,0588	0,2075	0,0000	0,1039	0,0167	-0,0044	0,0784	0,3087	0,1648	0,1235	0,2364	0,3654
95/09	0,0408	0,0289	-0,0244	0,0405	-0,1045	-0,1477	-0,0727	-0,1900	-0,2081	-0,2098	-0,0351	0,0297
95/08	-0,0577	-0,1786	0,0877	-0,0646	-0,0694	-0,2000	0,0577	-0,3583	-0,2024	-0,0238	-0,0339	-0,0982
95/07	0,1556	0,0769	0,0405	0,0556	0,2632	-0,0517	0,2000	0,0266	-0,0345	0,0938	0,0727	-0,0175
95/06	-0,0625	-0,1136	0,1818	0,0588	-0,0409	0,0175	0,2500	0,0747	0,1757	-0,0634	-0,0179	0,0279
95/05	0,0435	0,1579	-0,1200	0,0851	-0,1622	-0,0172	-0,1186	0,0189	0,0725	0,0459	0,0182	0,0702
95/04	-0,0213	-0,0256	-0,2347	0,1869	0,2542	0,4684	0,4750	-0,2409	0,0952	0,3611	0,0377	0,3902
95/03	0,2632	0,3220	0,2727	0,1512	0,2967	0,9453	0,2821	0,5667	0,3125	0,4740	-0,0536	0,1549
95/02	0,0215	0,0727	0,2419	-0,0115	0,2133	0,0323	-0,0824	-0,0710	-0,0943	0,4302	0,0370	0,2456
95/01	-0,1143	0,0577	-0,0606	-0,1300	0,0714	-0,1622	-0,1146	-0,0974	-0,0702	0,0941	-0,2500	-0,1493
94/12	0,3696	-0,0714	0,0645	-0,0698	-0,0278	-0,0513	0,0105	0,0426	0,0556	0,1333	1,1493	-0,0147
94/11	0,1220	0,1429	0,2653	0,0750	0,0588	0,0286	0,0556	0,1059	0,1739	0,1719	0,6341	0,4167
94/10	-0,0682	-0,0200	-0,1695	-0,0476	0,1333	0,0870	-0,2340	0,0897	0,0952	-0,1467	-0,2545	-0,2381
94/09	-0,0833	0,3246	0,1132	0,0563	0,0194	0,2267	-0,2167	-0,0930	-0,1600	0,1719	0,2636	0,5034
94/08	-0,0769	-0,0161	0,2182	0,3636	0,3585	0,1538	0,6000	0,3438	-0,1379	0,1429	0,5714	0,1733
94/07	-0,1186	0,0877	-0,0121	-0,0222	-0,2639	0,2745	0,5464	0,3061	0,2609	0,1915	0,0182	0,4423
94/06	0,5206	0,0364	0,4133	-0,0816	0,8228	0,9615	-0,0300	0,2250	0,5862	0,6207	0,6176	0,1818
94/05	0,1412	-0,0179	0,5000	0,2478	0,0395	-0,1613	-0,2537	-0,0476	0,1939	-0,1471	-0,1905	0,2754
94/04	0,2267	0,8361	0,1364	0,0423	-0,0732	-0,2955	-0,0822	0,3661	0,1136	0,0141	-0,3538	-0,1687
94/03	0,0976	-0,0615	-0,4359	-0,1341	0,1389	0,2969	-0,0519	-0,1078	-0,3231	-0,0897	-0,3229	-0,3197
94/02	-0,0330	-0,0714	-0,1702	-0,0353	-0,5663	-0,5949	-0,3304	-0,1818	0,0656	-0,4091	-0,2941	-0,3511
94/01	0,0600	0,0448	0,1190	0,1039	0,1690	-0,1596	0,0455	-0,2511	-0,1159	0,1037	-0,0685	-0,1607
93/12	0,1628	-0,0429	0,4000	0,0548	-0,1235	0,0805	0,4667	0,0930	0,2545	0,1935	0,3036	-0,0345
93/11	0,0750	0,2281	0,5957	-0,0395	1,1316	0,2429	0,2500	-0,1042	0,1702	0,3053	0,5342	0,2473
93/10	0,0811	-0,1364	0,1605	0,3103	-0,0500	-0,2135	0,0000	0,1707	0,0930	-0,0306	-0,0641	-0,2250
93/09	0,1935	0,3469	0,3729	0,2340	0,7021	0,8351	0,0169	0,2975	0,2647	0,2099	0,3220	0,5789
93/08	0,1071	0,0652	0,3011	0,1463	0,2533	0,1829	0,1132	0,4364	0,0625	0,5000	0,1569	0,3818
93/07	-0,1765	-0,1283	0,0449	-0,0682	-0,1071	0,1549	-0,1311	-0,0179	-0,0725	-0,1940	0,0625	-0,0351
93/06	0,4783	0,3143	0,5085	0,3415	0,7143	0,2241	0,0000	0,2308	0,1500	1,3103	0,3953	1,3056
93/05	-0,1481	-0,0541	0,1346	0,1481	-0,1250	0,0357	0,0714	0,0000	-0,0476	0,0357	0,1194	-0,1100
93/04	0,7705	0,1909	0,1304	0,5064	0,3585	0,5135	1,0714	0,6697	1,1592	0,0237	0,0263	0,7857
93/03	-0,0429	-0,0571	-0,0612	-0,0602	-0,1970	0,2542	0,0980	0,2035	0,0769	-0,0484	-0,2400	0,2174
93/02	0,2069	0,1864	0,3067	0,2969	0,4505	0,3258	0,7000	0,5556	0,1747	0,6316	0,4368	0,2500
93/01	0,3810	0,1346	-0,0625	0,0159	-0,1875	-0,0326	0,1111	0,4211	0,0122	0,1515	-0,0057	-0,1024
92/12	0,1290	0,0400	-0,0123	0,0648	0,0000	0,1220	0,2857	-0,0500	0,0123	-0,0294	0,0000	0,0789
92/11	0,1698	0,0417	-0,1196	-0,0274	-0,0175	-0,0682	0,0000	0,1429	0,0125	-0,0556	-0,1026	-0,0952

92/10	-0,0536	-0,1579	0,0110	-0,1205	-0,1364	-0,1020	-0,0667	0,1290	-0,1667	-0,0526	-0,0250	-0,0870
92/09	0,3023	0,2955	-0,0215	-0,0460	-0,1538	0,2564	-0,1000	0,2917	-0,1830	-0,0256	-0,1304	0,3939
92/08	-0,0444	0,0419	-0,0341	-0,0543	-0,0930	0,3000	0,0000	0,0435	-0,0208	-0,0714	0,0455	-0,1316
92/07	-0,1818	0,2653	-0,1087	-0,0213	-0,0851	-0,2500	-0,0566	0,1795	-0,1724	-0,0870	-0,1242	-0,0732
92/06	0,1000	0,4244	0,3372	0,4030	0,4030	-0,0244	0,6772	0,0833	0,4146	0,0455	0,1379	0,2059
92/05	-0,2188	-0,2000	-0,2522	-0,1744	0,1356	-0,1087	-0,1200	-0,0526	-0,0204	-0,2364	-0,2564	-0,0406
92/04	-0,0154	-0,1231	-0,1321	-0,0933	-0,1519	-0,1154	0,2048	-0,1739	-0,0133	-0,2903	-0,1522	-0,1471
92/03	0,0478	0,1304	0,3802	0,0714	0,0260	0,0833	0,2769	0,0385	0,1905	0,1071	0,0455	0,0000
92/02	-0,1184	-0,1930	-0,4269	-0,2391	-0,2736	-0,1407	-0,2935	-0,1042	-0,3000	-0,2533	-0,3333	-0,1500
92/01	-0,0256	0,1400	0,5581	0,1948	0,0000	0,1368	-0,0109	-0,1273	0,3043	0,3636	0,3200	-0,0909
91/12	-0,0602	0,0417	0,0750	0,1493	-0,0364	0,1728	0,3261	0,2500	0,0299	0,0000	0,2500	0,0732
91/11	0,0641	0,2267	1,0000	0,4889	0,7460	0,3500	0,8852	0,5172	0,4889	0,4103	0,0811	0,2059
91/10	0,0130	0,3393	-0,2444	-0,0426	-0,2025	0,0526	-0,0615	0,1600	-0,0217	0,0000	-0,1591	0,0303
91/09	-0,0375	-0,2696	-0,0426	-0,1132	-0,0366	0,0000	-0,1333	-0,1071	-0,1321	-0,1875	-0,3529	-0,1316
91/08	-0,2000	0,3727	0,0682	0,0192	0,4643	-0,0500	-0,0132	-0,1250	-0,0702	-0,0400	-0,0438	0,1176
91/07	-0,1379	-0,2903	-0,2774	0,0000	0,0566	-0,0323	-0,3244	-0,1795	0,0364	-0,2754	-0,2099	-0,1707
91/06	-0,1077	-0,0882	0,0690	0,1556	-0,0702	0,0508	0,2228	0,0541	0,1208	0,1061	-0,0122	-0,0682
91/05	-0,1333	0,1740	0,0741	0,2094	-0,0656	-0,0923	0,0698	-0,0750	0,0313	-0,1081	0,2059	0,0032
91/04	0,2097	-0,1667	-0,2286	-0,1724	-0,1728	-0,1667	-0,2654	-0,2857	-0,1579	-0,2600	-0,2527	0,3388
91/03	-0,1013	-0,2174	0,0000	-0,0492	-0,1932	-0,2500	0,0400	0,0228	-0,0952	-0,2000	0,0111	-0,1757
91/02	-0,0617	-0,0612	0,2500	0,3864	0,0353	0,7627	-0,0196	0,1707	0,1351	0,0256	0,4063	0,1563
91/01	-0,1296	0,6118	0,4359	0,6604	0,3492	0,0926	0,8478	0,1714	0,4231	0,0263	0,3474	0,1034

EK 2. HAZİNE BONOSU

İhale No	1206
Menkul Kıymet Kodu	TRB170903T17
Enstruman Adı	Hazine Bonosu
İhraç Tarihi	18.06.2003
İtfa Tarihi	17.09.2003
Vadeye Kalan Ay	3
Gelen Teklif Tutarı (Nominal)	2261005075
Kabul Edilen Teklif Tutarı (Nominal)	1723613290
İhale Sonrası İlave Satış (Nominal)	0
Bileşik Faiz (Brüt)	%39,49
Bileşik Faiz (Net)	%39,49
Maksimum Bileşik Faiz (Brüt)	%39,49
Maksimum Bileşik Faiz (Net)	%39,49
Minimum Bileşik Faiz (Brüt)	%39,49
Minimum Bileşik Faiz (Net)	%39,49
Para Birimi	TRL

EK 3. HAREKETLİ ORTALAMALAR

AKBNK	AKSA	ALARK	ARCLK	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	KCHOL	SISE	VESTL	YKBNK
,0313	,0227	,0211	,0446	,0294	,0824	,0235	,0424	,0080	,0437	,0266	,0138
,0395	,0356	,0364	,0654	,0336	,0682	,0308	,0204	,0161	,0420	,0438	-,0261
,0391	,0359	,0281	,0725	,0220	,0520	,0258	,0022	,0172	,0317	,0291	-,0352
,0197	,0069	-,0151	,0410	,0114	,0493	,0081	-,0271	-,0030	,0183	,0138	-,0497
,0559	,0047	-,0013	,0730	,0146	,0606	,0105	,0090	,0268	,0344	,0282	-,0171
,0429	-,0107	-,0158	,0618	,0079	,0178	,0234	-,0130	,0091	,0011	,0096	-,0395
,0278	-,0074	-,0215	,0399	,0045	,0070	,0029	,0058	,0024	-,0044	,0049	-,0618
,0612	,0325	,0222	,0781	,0325	,0363	,0444	,0546	,0316	,0417	,0416	-,0289
,0444	,0248	,0014	,0548	,0149	,0105	,0256	,0352	,0263	,0420	,0203	-,0257
,0574	,0473	,0261	,0957	,0229	-,0022	,0388	,0303	,0511	,0452	,0494	-,0248
,0482	,0299	,0072	,0766	,0313	-,0354	,0173	-,0002	,0315	,0313	,0381	-,0375
,0473	,0382	,0130	,0847	,0457	-,0615	,0181	-,0052	,0356	,0191	,0379	-,0177
,0482	,0241	,0010	,0605	,0178	-,0736	,0140	,0047	,0117	,0026	,0283	-,0380
,0332	,0224	,0024	,0518	,0167	,0196	,0158	,0259	,0050	,0122	,0167	,0207
,0324	,0260	-,0045	,0379	,0171	,0439	,0175	,0313	-,0022	,0015	,0110	,0240
,0705	,1063	,0411	,0892	,0468	,0655	,0701	,0984	,0606	,0239	,0563	,0935
,0543	,1060	,0403	,0728	,0532	,0716	,0765	,0798	,0453	,0255	,0444	,0733
,0472	,1146	,0450	,0642	,0564	,0718	,0455	,0503	,0511	,0279	,0552	,0588
,0635	,1011	,0466	,0910	,0386	,0940	,0513	,0590	,0771	,0360	,0666	,0994
,0691	,0862	,0486	,0588	,0329	,0867	,0266	,0269	,0757	,0182	,0483	,0791
,0332	,0561	,0091	,0128	-,0017	,0363	-,0143	-,0409	,0266	-,0416	,0064	,0236
,0438	,0276	,0139	-,0035	-,0080	,0371	,0091	-,0434	,0313	-,0479	-,0352	,0186
,0396	,0269	,0263	-,0035	-,0127	,0705	,0244	-,0193	,0386	-,0338	-,0088	,0309
,0304	,0108	,0281	-,0131	-,0341	,0872	,0359	-,0194	,0412	-,0276	-,0096	,0185
,0316	-,0059	,0264	-,0197	-,0270	,0980	,0408	-,0208	,0362	-,0161	-,0233	,0311
,0245	-,0040	,0014	-,0116	-,0403	-,0013	,0296	-,0239	,0259	-,0259	-,0242	,0111
,0045	-,0109	,0146	-,0257	-,0433	-,0273	,0219	-,0433	,0206	-,0263	-,0206	-,0012
-,0128	-,0409	-,0037	-,0243	-,0641	-,0484	,0016	-,0769	-,0393	-,0393	-,0498	-,0477
-,0159	-,0212	-,0080	-,0251	-,0542	-,0447	,0085	-,0789	-,0188	-,0340	-,0387	-,0498
-,0102	-,0285	-,0154	-,0111	-,0378	-,0424	,0239	-,0441	-,0148	-,0289	-,0245	-,0140
-,0298	-,0031	,0125	-,0232	-,0265	-,0419	,0347	-,0622	-,0207	-,0161	-,0164	-,0527
,0222	,0444	,0625	,0250	,0164	,0454	,1259	-,0209	,0125	,0765	,0603	,0143
,0527	,1208	,1269	,0896	,0657	,0903	,2081	,0351	,0770	,1297	,1041	,0766
,0354	,1111	,0930	,0716	,0666	,0860	,1801	,0338	,0429	,1177	,0967	,0667
,0620	,1311	,1188	,1293	,1060	,1026	,2127	,0539	,0848	,1378	,1132	,0845
,0535	,1434	,1114	,1194	,1108	,0933	,1903	,0443	,0733	,1378	,0979	,0852
,0762	,1751	,1541	,1767	,1437	,1018	,1815	,0610	,1334	,1421	,1539	,0999
,0715	,1585	,1597	,1775	,1370	,1024	,1795	,0622	,1353	,1357	,1579	,1239
,1015	,1696	,1814	,1827	,1518	,1123	,1839	,0737	,1363	,1736	,1774	,1374
,0842	,1643	,1985	,1568	,1638	,1157	,1542	,0526	,1850	,1697	,1790	,1477
,1093	,1781	,2036	,1919	,1869	,1323	,1743	,0769	,1822	,1892	,1745	,1633
,1708	,2170	,2544	,2254	,2393	,1745	,2079	,1198	,2392	,2412	,2020	,2072
,1760	,1968	,2356	,2002	,2308	,1660	,2324	,1159	,2170	,2090	,1731	,2167
,0994	,1487	,1680	,1644	,1681	,0894	,1429	,1000	,1712	,1329	,0918	,1519

,1299	,0934	,1514	,1616	,1508	,0966	,0934	,1160	,1474	,1120	,0976	,1565
,1301	,0875	,1529	,1460	,1208	,0770	,0831	,1020	,1327	,0799	,0866	,1499
,0964	,0710	,1297	,1094	,0814	,0529	,0534	,0739	,1084	,0511	,0797	,1098
,0827	,0351	,0934	,0936	,0459	,0268	,0306	,0528	,0894	,0166	,0624	,0924
,0613	,0153	,0654	,0480	,0184	,0141	,0316	,0370	,0359	,0124	,0486	,0997
,0761	,0187	,0766	,0488	,0480	,0233	,0359	,0469	,0519	,0305	,0479	,1133
,0634	,0176	,0841	,0438	,0347	,0426	,0267	,0395	,0574	-,0006	,0457	,0928
,0763	,0132	,0777	,0494	,0327	,0662	,0495	,0610	,0449	,0266	,0941	,1008
,0532	-,0094	,0847	,0307	,0078	,0560	,0344	,0512	,0348	-,0057	,1112	,1002
,0098	-,0405	,0365	-,0015	-,0581	,0226	-,0110	,0047	-,0337	-,0479	,0677	,0479
,0102	-,0506	,0257	,0193	-,0533	,0255	-,0566	-,0067	-,0287	-,0300	,0725	,0422
,0434	-,0541	,0341	,0273	-,0174	,0359	-,0431	-,0308	-,0222	-,0408	,0935	,0679
,0069	-,0534	,0307	-,0137	-,0285	,0164	-,0483	-,0670	-,0276	-,0528	,0766	,0410
-,0068	-,0565	,0149	-,0207	-,0131	,0663	-,0342	-,0704	-,0166	-,0014	,0740	,0623
,0341	-,0075	,0720	,0055	,0080	,1048	,0026	-,0200	,0265	,0471	,1038	,1169
,0697	,0273	,1200	,0381	,0449	,1432	,0506	,0244	,0699	,0672	,1474	,1420
,0572	,0294	,1286	,0344	,0536	,1597	,0679	,0279	,0843	,0717	,1497	,1310
,0463	,0462	,1465	,0433	,0661	,1787	,0704	,0163	,0930	,0924	,1346	,1022
,0935	,0595	,1167	,1011	,1161	,1596	,1065	,0764	,1071	,1046	,1429	,1555
,0738	,0126	,0644	,0696	,0667	,1210	,0719	,0394	,0607	,0533	,0819	,1173
,0998	,0109	,0448	,0415	,0452	,0969	,0679	,0175	,0538	,0515	,0776	,1071
,0974	,0251	,0804	,0369	,0534	,1152	,0835	,0404	,0673	,0590	,0773	,1236
,1379	,0600	,1082	,1299	,1079	,1618	,1400	,1105	,1488	,1083	,1398	,1946
,1255	,0644	,1013	,1312	,0800	,1464	,1330	,1082	,1373	,1009	,1356	,1732
,1220	,0718	,0854	,1453	,1152	,1481	,1613	,1073	,1452	,1266	,1467	,1691
,1490	,0554	,1308	,1501	,1292	,1119	,1647	,1185	,1775	,0997	,1717	,1524
,1344	,0431	,0803	,1445	,1424	,1018	,1460	,1117	,1533	,0638	,1405	,1538
,1400	,0370	,0714	,1620	,1412	,0975	,1344	,0901	,1497	,1085	,1398	,1540
,1386	,0285	,0455	,1614	,1207	,0753	,1111	,0615	,1267	,1143	,1174	,1320
,1470	,0324	,0236	,1561	,1078	,0800	,1191	,0939	,1289	,1104	,1421	,1494
,1091	,0243	,0450	,1249	,0718	,0749	,1018	,0366	,1016	,1129	,1281	,1315
,1397	,0454	,0714	,1224	,0902	,0600	,1169	,0854	,1185	,1187	,1286	,1269
,1278	,0438	,0766	,1606	,1160	,0778	,1605	,1099	,1776	,1472	,1370	,1439
,1378	,0360	,0612	,1799	,1300	,1147	,1640	,1011	,1919	,1659	,1630	,1621
,1377	,0479	,0351	,1162	,0988	,0737	,1501	,0429	,1397	,1327	,1422	,1178
,1031	,0643	,0489	,0963	,1083	,0769	,1438	,0627	,1477	,1182	,1431	,0944
,1034	,0543	,0522	,0651	,0685	,0493	,0985	,0421	,1263	,0971	,1093	,0852
,0874	,0953	,0175	,0746	,0585	,0426	,0862	,0592	,1039	,1083	,1131	,1084
,0841	,0782	,0218	,0574	,0260	,0188	,0724	,0215	,0662	,0964	,1035	,0877
,0697	,0660	,0337	,0381	,0191	,0022	,0813	,0074	,0443	,0590	,0965	,0860
,1003	,0809	,0440	,0537	,0548	,0091	,1054	,0391	,0550	,0566	,1040	,0979
,0868	,0620	,0631	,0414	,0391	-,0053	,1171	,0183	,0535	,0304	,0917	,0816
,0895	,0682	,0411	,0404	,0225	,0035	,1048	,0332	,0788	,0332	,0952	,0746
,0603	,0613	,0183	,0622	,0447	,0612	,1410	-,0269	,0848	,0735	,0953	,1117
,0705	,0897	,0470	,0508	,0593	,1301	,1139	,0158	,0564	,0908	,0695	,1091
,0623	,0957	,0572	,0396	,0641	,0911	,1012	,0096	,0377	,1046	,0529	,0980
,0148	,0661	,0504	,0015	,0467	,0647	,0562	-,0047	,0050	,0914	-,0096	,0588
,0566	,0393	,0395	,0034	,0435	,0497	,0595	-,0123	,0096	,1170	,0783	,0778

,0683	,0564	,0596	,0401	,0641	,0715	,0851	,0155	,0367	,1359	,1496	,1184
,0577	,0375	,0454	,0275	,0738	,0791	,0591	-,0027	,0309	,1134	,1087	,0681
,0473	,0621	,0569	,0288	,0842	,1103	,0471	,0054	,0349	,1452	,1336	,1076
,0457	,0757	,0678	,0645	,1198	,1398	,0922	,0639	,0403	,1591	,1840	,1302
,0229	,0766	,0634	,0580	,0759	,1670	,1211	,0872	,0649	,1672	,1795	,1685
,0715	,0891	,0827	,0463	,1479	,2456	,0978	,0997	,0991	,2242	,2324	,1814
,0796	,0744	,1344	,0598	,1647	,2336	,0865	,0942	,1093	,2081	,2150	,1985
,1003	,1462	,1653	,0478	,1374	,1700	,0401	,1447	,1108	,1792	,1824	,1519
,0865	,1143	,1062	,0240	,1243	,1159	,0122	,0885	,0578	,1323	,1600	,1123
,0820	,1023	,0719	,0220	,0593	,0636	-,0084	,0793	,0711	,0623	,1324	,0626
,0965	,1012	,0869	,0415	,0674	,0639	,0049	,0665	,0673	,0631	,1475	,0617
,0792	,1036	,1148	,0519	,0594	,0749	,0429	,0707	,0839	,0681	,0770	,0600
,0753	,1107	,1423	,0424	,1488	,0927	,0591	,0532	,0836	,0793	,0687	,0459
,0878	,1010	,1698	,0722	,1336	,0677	,0786	,0599	,0834	,0889	,0846	,0470
,1108	,1028	,1915	,0870	,1905	,1184	,0981	,0925	,1188	,0921	,0894	,0533
,1262	,1096	,1984	,0689	,1817	,1208	,0575	,1002	,1355	,1219	,0549	,0706
,1213	,0916	,2031	,0651	,1948	,1108	,0011	,0732	,1077	,0897	,0586	,0309
,1178	,1147	,2111	,1003	,1857	,0494	,0036	,0737	,0714	,1472	,0401	,1245
,0937	,1117	,1806	,0920	,1720	,0658	,0307	,0776	,0513	,1624	,0659	,0924
,1390	,0580	,1801	,1307	,2080	,1332	,1268	,1029	,1384	,1632	,0976	,1719
,1273	,0583	,2113	,1368	,1800	,1296	,1393	,1289	,1717	,1667	,1045	,2167
,1473	,0798	,2511	,1645	,2647	,2064	,2252	,1903	,1808	,2534	,1654	,2668
,1741	,0873	,2360	,1572	,2350	,2170	,2306	,2464	,1915	,2574	,1706	,2716
,1712	,0942	,2016	,1580	,2453	,2204	,2156	,2344	,1713	,2388	,1453	,2811
,1791	,0787	,1420	,1590	,1495	,1945	,1947	,2550	,1582	,2087	,0922	,2526
,1679	,0769	,1295	,1231	,1424	,2038	,1892	,2516	,1365	,2069	,0955	,2640
,1770	,0726	,0967	,0998	,0710	,1556	,1794	,2511	,0992	,1873	,0578	,2486
,1644	,0707	,0687	,0831	,0422	,1653	,1700	,2183	,0923	,1397	,0485	,2059
,1639	,1035	,0559	,0870	,0440	,1316	,1762	,2348	,0839	,1486	,0330	,2027
,1324	,1126	,0417	,0921	,0181	,1109	,2326	,2225	,1060	,0432	,0115	,1110
,1265	,1005	,0094	,0652	,0398	,0988	,2167	,2181	,1083	,0205	-,0198	,1168
,0610	,0743	-,0124	,0153	-,0028	,0464	,1445	,1478	,0105	-,0057	-,0347	,0391
,0686	,0899	,0243	,0262	,0158	,0322	,1594	,1341	,0200	,0073	-,0109	,0210
,0415	,0583	-,0368	-,0184	-,0445	-,0067	,0766	,0791	-,0195	-,0665	-,0751	-,0124
,0076	,0588	,0149	-,0035	-,0289	,0074	,0664	,0334	,0048	-,0488	-,0479	-,0114
-,0082	,0589	,0222	,0035	-,0319	,0117	,0698	,0584	,0063	-,0463	-,0271	-,0119
-,0170	,0743	,1155	,0465	,0317	,0465	,1435	,0896	,0460	-,0075	-,0118	,0132
-,0114	,1158	,0942	,0530	,0262	,0594	,1440	,0921	,0581	-,0031	-,0230	,0230
-,0398	,0687	,0925	,0474	,0360	,0380	,1412	,0589	,0623	-,0166	-,0415	-,0208
-,0527	,0962	,1010	,0536	,0824	,0089	,1401	,0449	,0582	-,0140	-,0490	,0000
-,0491	,0499	,0869	,0553	,0942	,0270	,1178	,0150	,0756	-,0297	-,0561	-,0082
-,0664	,0072	,0646	,0347	,0548	,0333	,0799	,0125	,0511	-,0247	-,0686	-,0310
-,0593	,0384	,0918	,0667	,0380	,0346	,0957	,0107	,0554	-,0140	-,0301	-,0274
-,0405	,0348	,0837	,0601	,0363	,0304	,0566	,0013	,0434	-,0114	-,0384	,0131
-,0529	,0058	,0520	,0501	,0180	,0026	,0368	,0000	,0195	-,0370	-,0413	-,0015
-,0482	,0167	,1085	,1022	,0437	,0779	,0596	,0229	,0558	-,0138	,0203	,0240

EK 4. HAREKETLİ ORTALAMALARIN TANIMSAL İSTATİSTİKLERİ VE KOLMOGOROV-SMİRNOV TESTLERİ

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
PMA(R1,12)	138	6,88E-02	5,617E-02	-,0664	,1791
PMA(R2,12)	138	5,97E-02	5,182E-02	-,0565	,2170
PMA(R3,12)	138	7,74E-02	6,509E-02	-,0368	,2544
PMA(R4,12)	138	7,09E-02	5,621E-02	-,0257	,2254
PMA(R5,12)	138	6,75E-02	7,084E-02	-,0641	,2647
PMA(R6,12)	138	7,53E-02	6,23E-02	-,073567	,245617
PMA(R7,12)	138	8,60E-02	6,804E-02	-,0566	,2326
PMA(R8,12)	138	5,54E-02	6,931E-02	-,0789	,2550
PMA(R9,12)	138	7,20E-02	5,903E-02	-,0393	,2392
PMA(R10,12)	138	6,94E-02	7,739E-02	-,0665	,2574
PMA(R11,12)	138	7,24E-02	6,943E-02	-,0751	,2324
PMA(R12,12)	138	8,34E-02	7,847E-02	-,0618	,2811

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

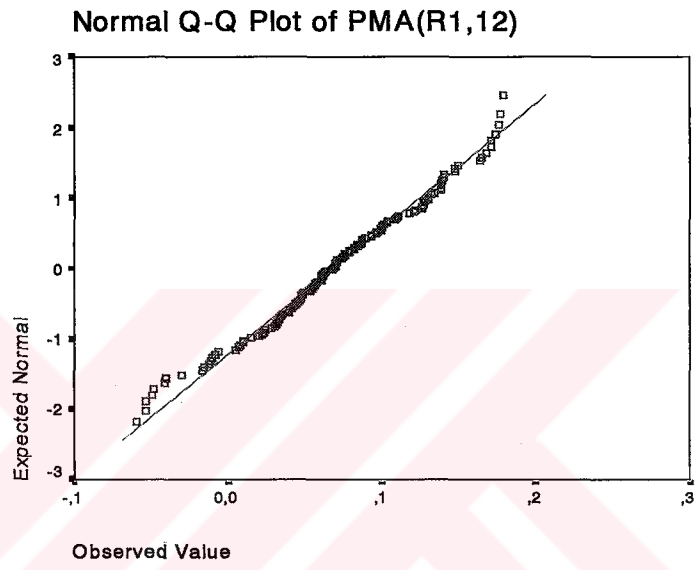
		MA(R1,12)	MA(R2,12)	MA(R3,12)	MA(R4,12)	MA(R5,12)	MA(R6,12)	MA(R7,12)	MA(R8,12)	MA(R9,12)	MA(R10,12)	MA(R11,12)	MA(R12,12)
N		138	138	138	138	138	138	138	138	138	138	138	138
Normal Parameters[a,b]	Mean	88E-02	97E-02	74E-02	09E-02	75E-02	53E-02	60E-02	54E-02	20E-02	94E-02	24E-02	34E-02
	Std. Deviation	62E-02	18E-02	51E-02	62E-02	08E-02	23E-02	80E-02	93E-02	90E-02	74E-02	94E-02	85E-02
Most Extreme Differences	Absolute	,051	,053	,098	,108	,110	,050	,085	,081	,086	,067	,067	,058
	Positive	,034	,053	,098	,108	,110	,050	,085	,081	,086	,067	,067	,058
	Negative	-,051	-,033	-,062	-,066	-,048	-,036	-,059	-,056	-,051	-,050	-,060	-,038
Kolmogorov-Smirnov Z		,599	,619	1,152	1,273	1,295	,587	1,004	,957	1,005	,783	,789	,683
Asymp. Sig. (2-tailed)		,866	,838	,141	,078	,070	,882	,266	,319	,265	,573	,562	,740

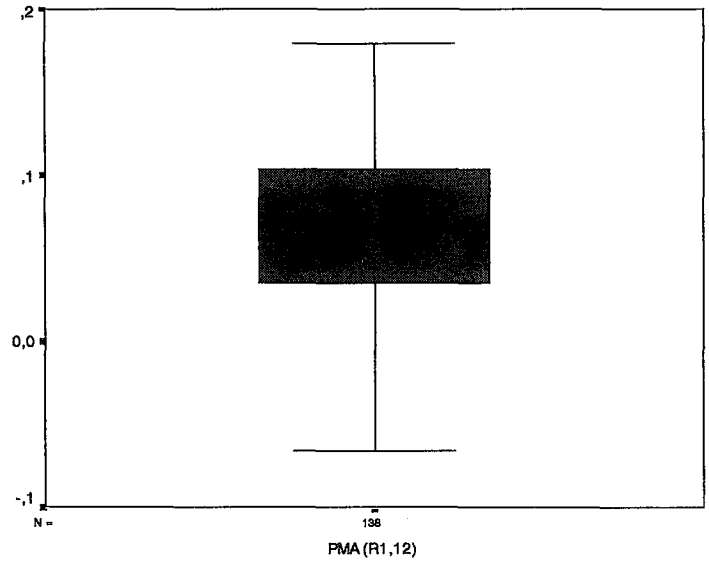
a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

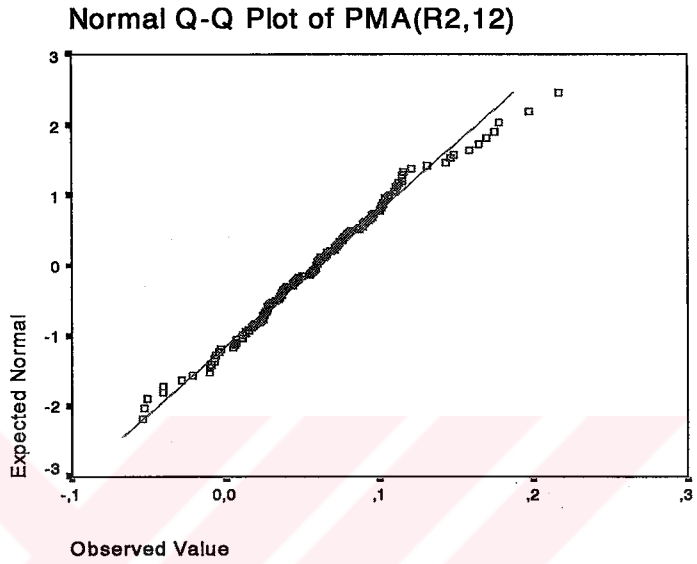
EK 5. HAREKETLİ ORTALAMALARIN Q-Q VE KUTU GRAFİKLERİ

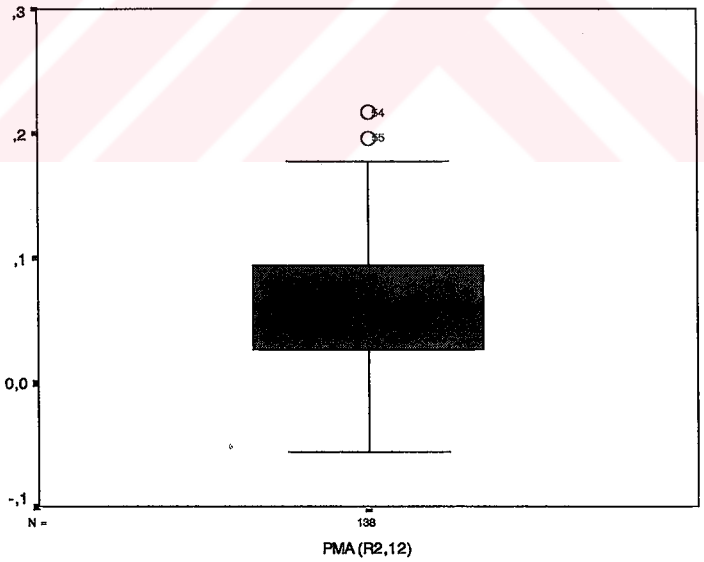
PMA(R1,12)



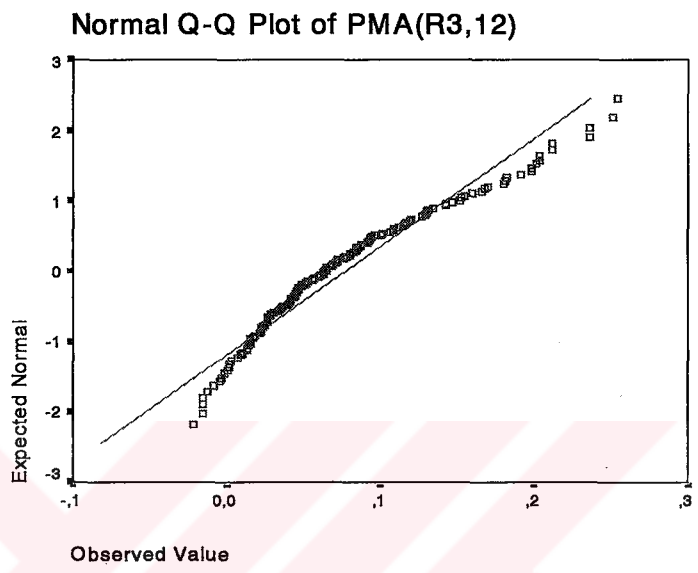


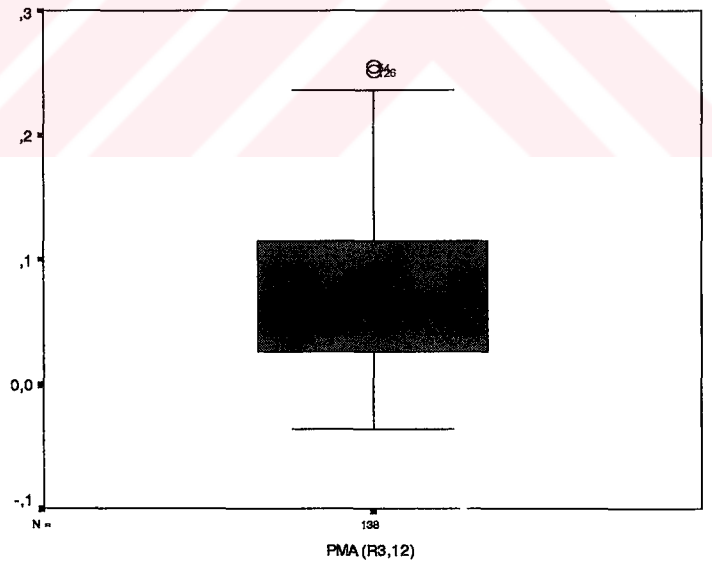
PMA(R2,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R2,12)
Expected Normal
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3
Observed Value

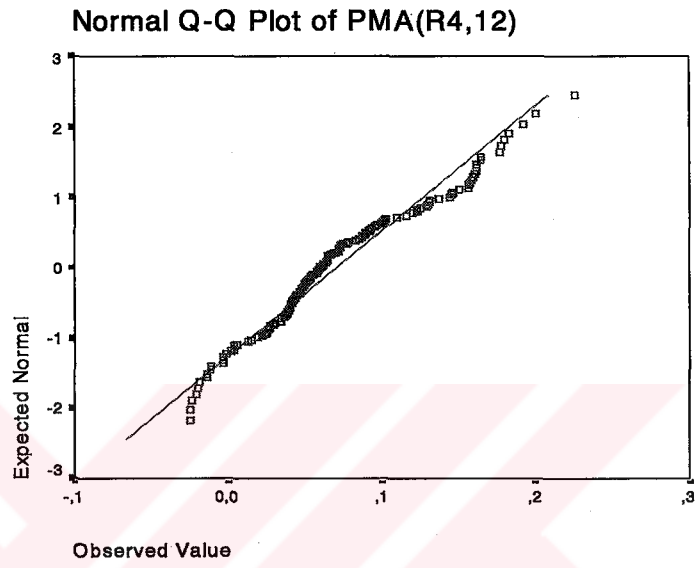

,3
,2
,1
0,0
-,1
54
55
N =
138
PMA(R2,12)

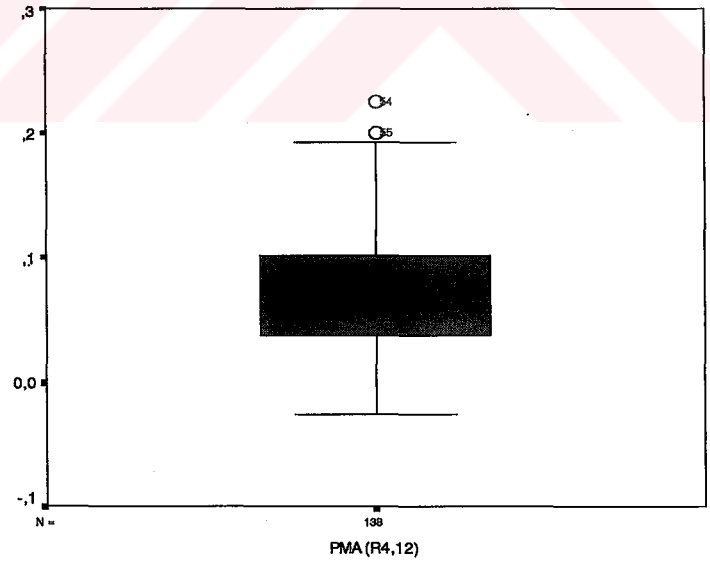
PMA(R3,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R3,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3

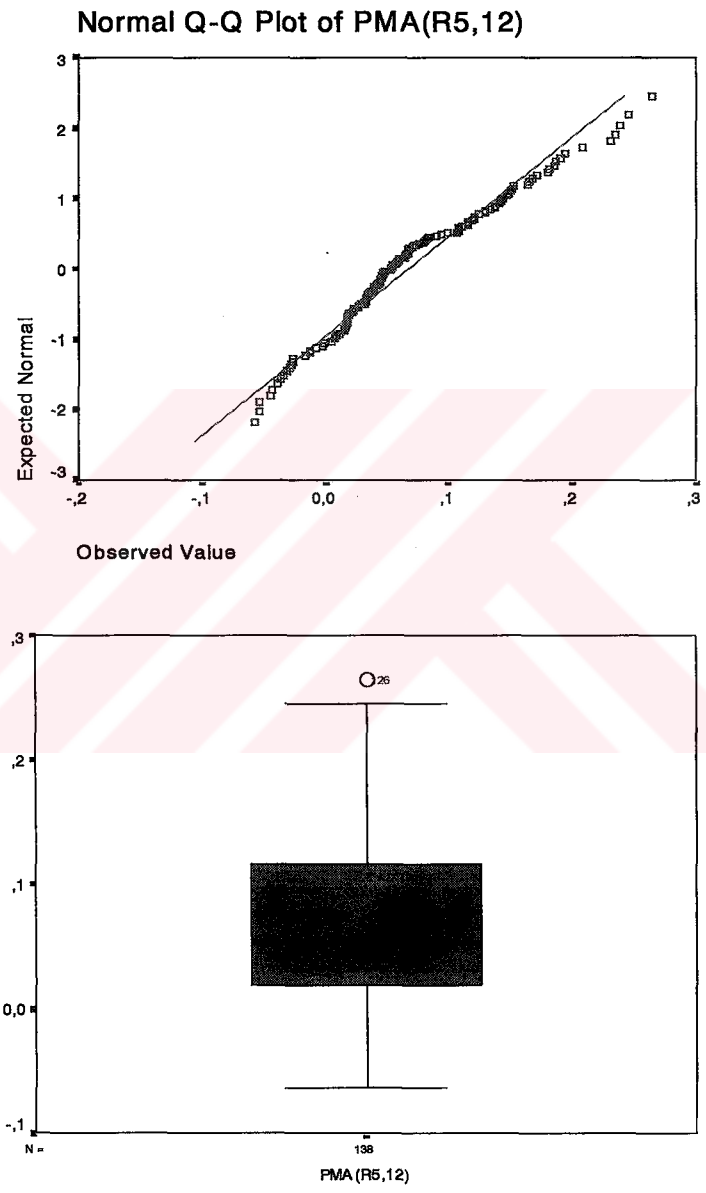

,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA (R3,12)

PMA(R4,12)

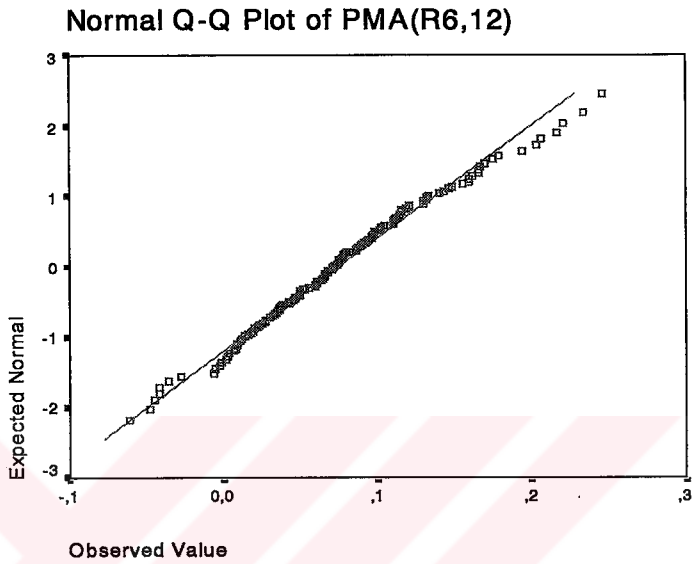

Normal Q-Q Plot of PMA(R4,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3

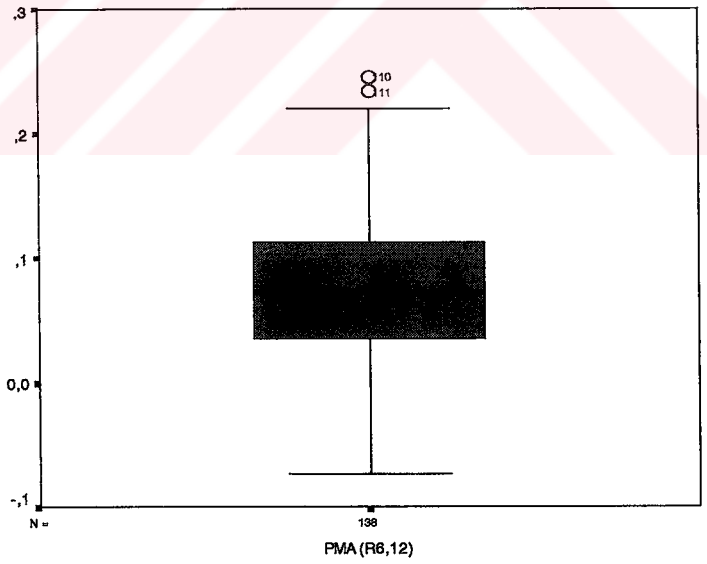

,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA (R4,12)

PMA(R5,12)

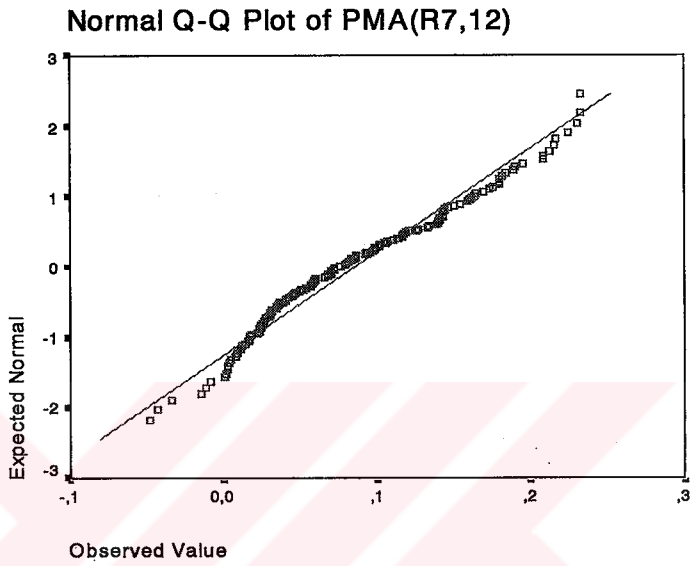

Normal Q-Q Plot of PMA(R5,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,2
-,1
0,0
,1
,2
,3
,3
,2
,1
0,0
-,1
26
N =
138
PMA(R5,12)

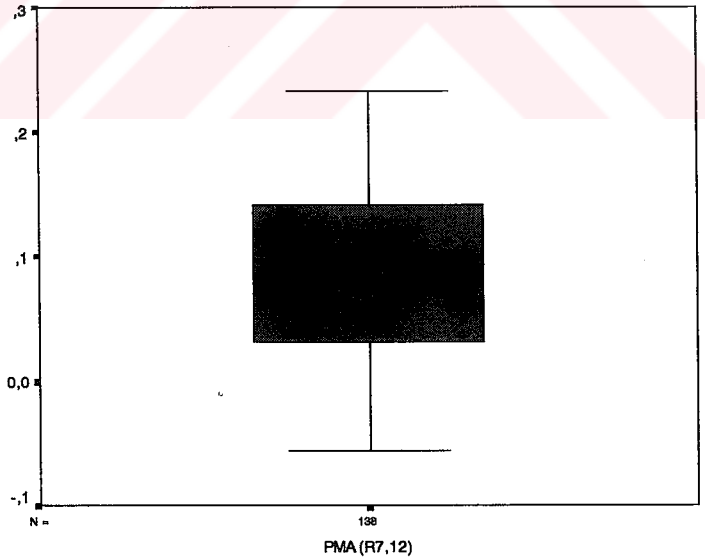
PMA(R6,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R6,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3

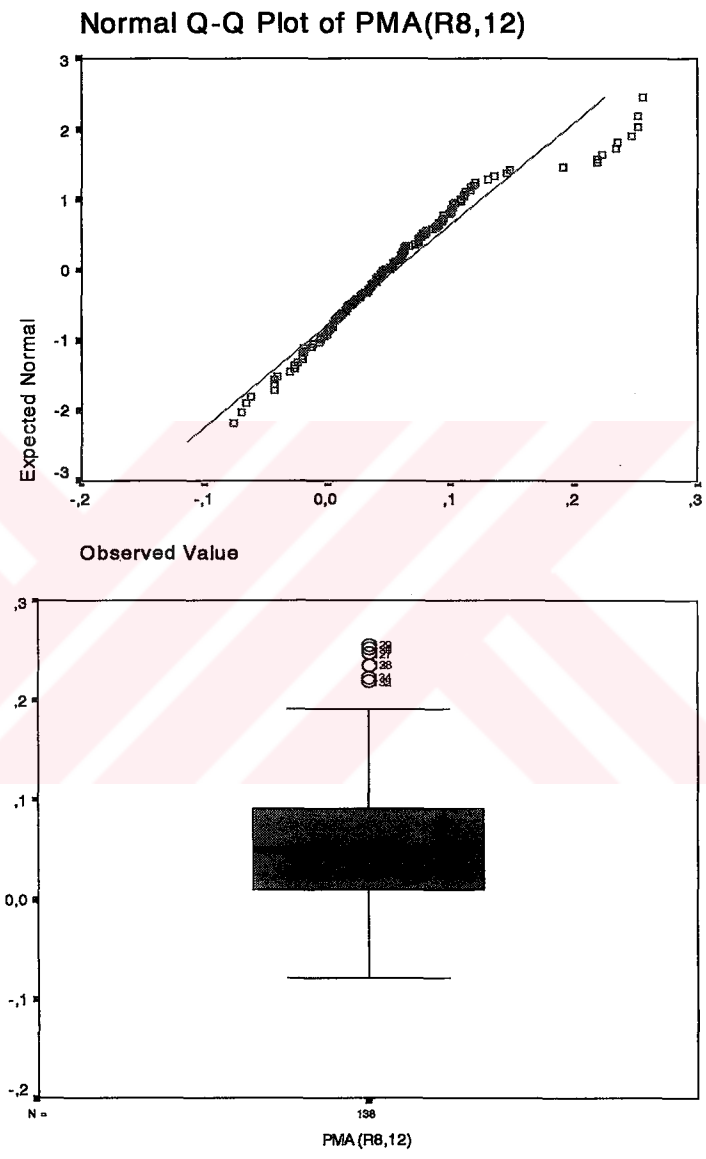

,3
,2
,1
0,0
-,1
10
11
N =
138
PMA (R6,12)

PMA(R7,12)

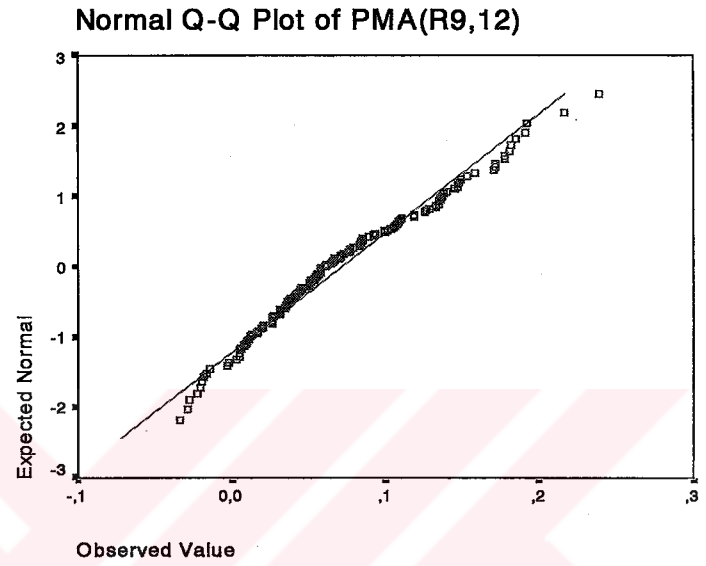

Normal Q-Q Plot of PMA(R7,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3

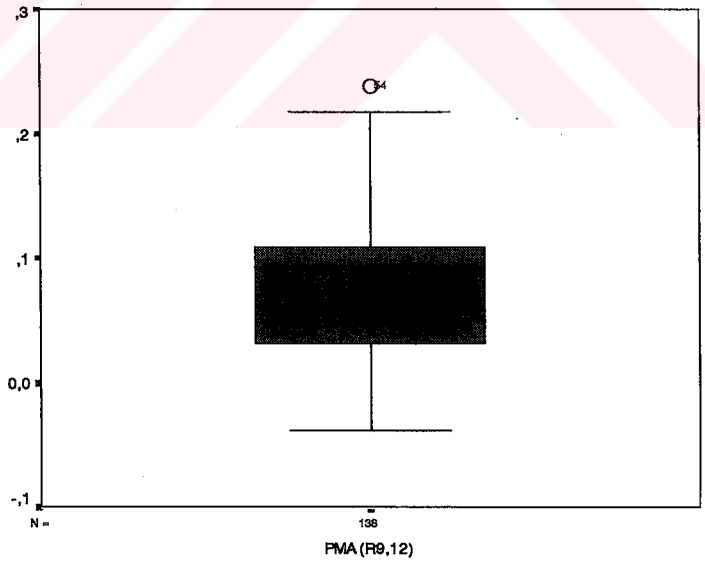

,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA(R7,12)

PMA(R8,12)

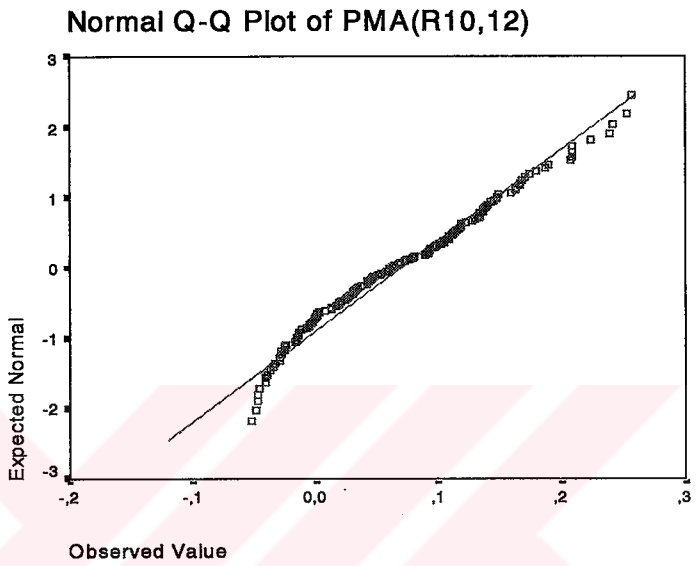

Normal Q-Q Plot of PMA(R8,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,2
-,1
0,0
,1
,2
,3
N =
138
PMA (R8,12)

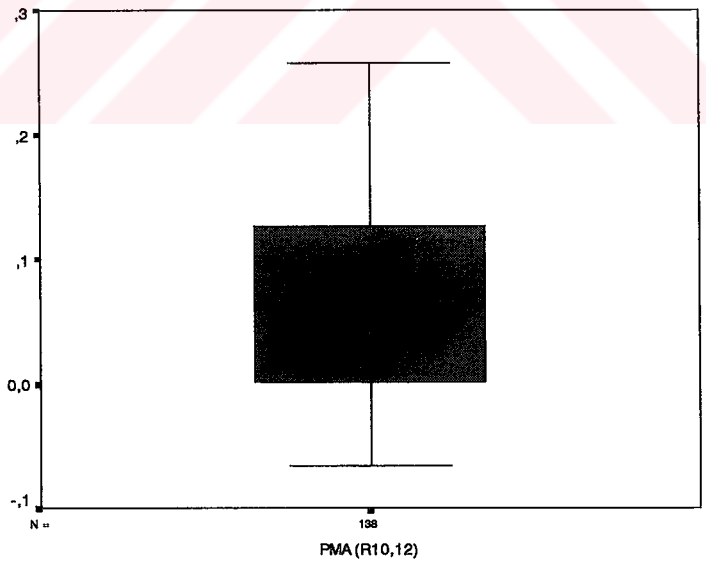
PMA(R9,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R9,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,1
0,0
,1
,2
,3

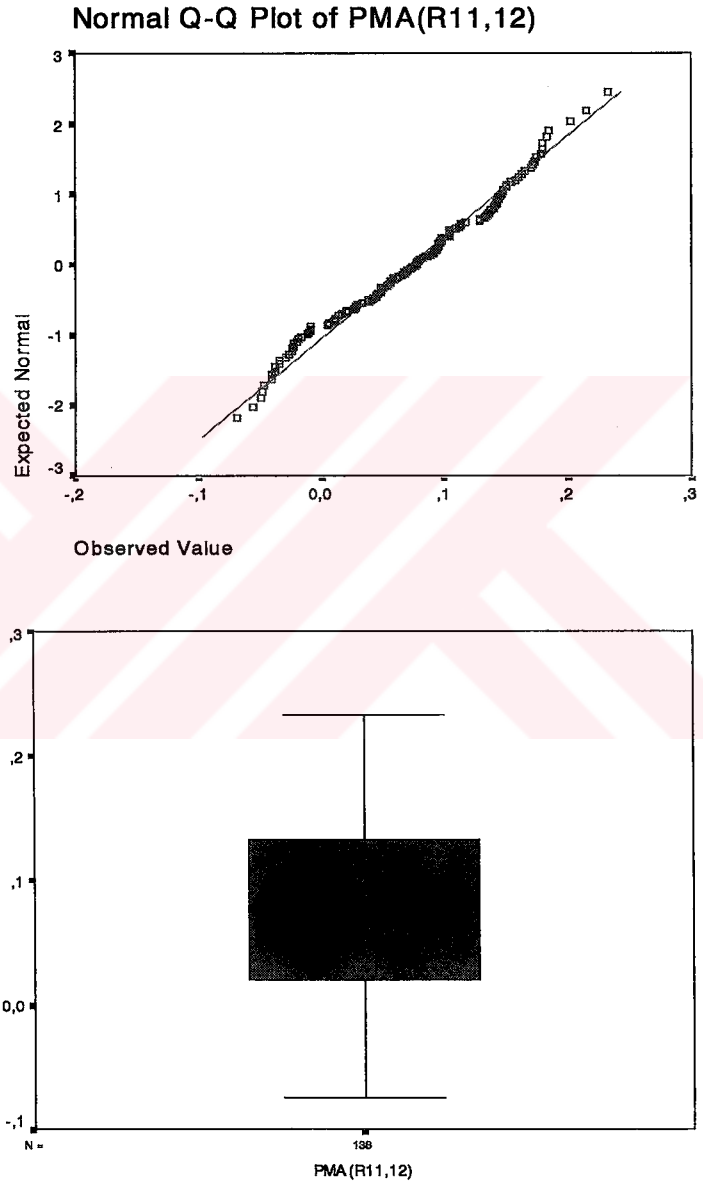

,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA(R9,12)

PMA(R10,12)

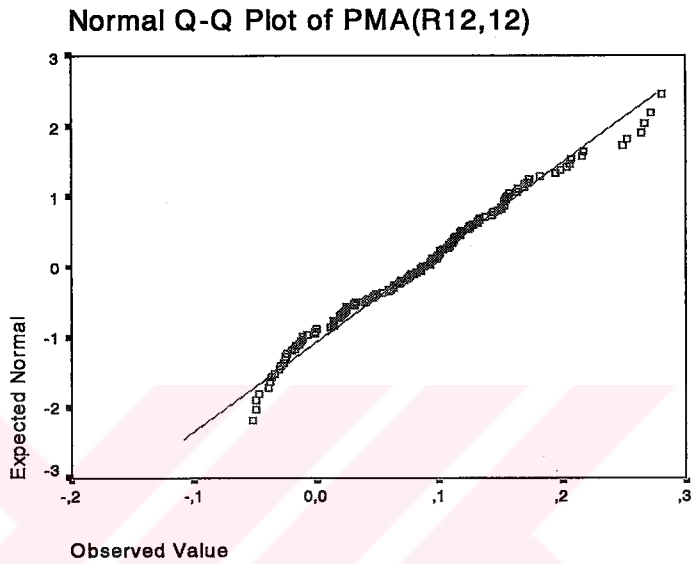

Normal Q-Q Plot of PMA(R10,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,2
-,1
0,0
,1
,2
,3

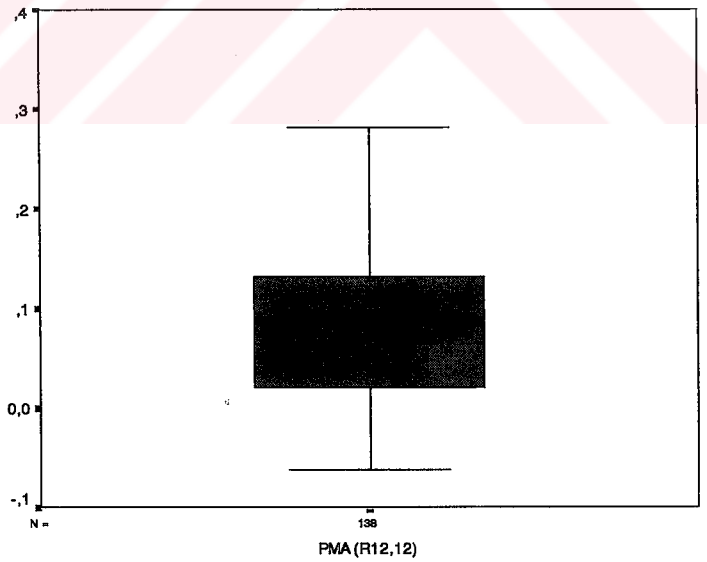

,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA(R10,12)

PMA(R11,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R11,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,2
-,1
0,0
,1
,2
,3
,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA(R11,12)

PMA(R12,12)


Normal Q-Q Plot of PMA(R12,12)
Expected Normal
Observed Value
3
2
1
0
-1
-2
-3
-,2
-,1
0,0
,1
,2
,3


,4
,3
,2
,1
0,0
-,1
N =
138
PMA(R12,12)

BİBLİYOGRAFYA

Ahmed, Shabbir: "Software & Test Sets," (Çevrimiçi) http://www.stoprog.org/index.html?software.html, 3 Eylül 2003.

Akpınar, Haldun: **Excel'de Fonksiyonlar, Veri Analizleri ve Problem Çözme,** İstanbul, Alfa Yayınları, 1996.

Alpar, Reha: **Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1,** 2.baskı, Ankara, Nobel Yayınevi, 2002.

Analiz Menkul Kıymetler, (Çevrimiçi) www.analiz.com, 05.04.2004.

Apostol, Tom M.: **Calculus,** V.II, 2nd edition, Singapore, John Wiley & Sons Inc.,1969.

Argonne National Laboratory, (Çevrimiçi) http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/cgi-bin/neos/Guide/CaseStudies/slp/nph-count.cgi, 3 Eylül 2003.

Bazaraa, Mokhtar S., C.M. Sheety: **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms,** Canada, John Wiley and Sons, 1979.

Beale, E. M. L.: **Mathematical Programming in Practice,** London, Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., 1968.

Birge, John R., François Louveaux: **Introduction to Stochastic Programming,** New York, Springer, 1997.

Blomwall, Jörgen, Per Olov Lindberg: "A Riccati-Based Primal Interior Point Solver for Multistage Stochastic Programming," **European Journal of Operational Research,** No: 143, 2002, ss. 452-461.

Bodily, Samuel E., v.d.: **Quantitative Business Analysis: Text and Cases,** USA, Irwin/McGraw-Hill, 1998.

Bolak, Mehmet: **Sermaye Piyasası, Menkul Kıymetler ve Portföy Analizi,** 2. baskı, İstanbul, Beta Yayınları, 1994.

Bronson, Richard: **Theory and Problems of Operations Research,** Schaum's Outline Series, USA, McGraw-Hill , 1982.

Budnick, Frank S., Richard Mojena, Thomas E. Vollmann: **Principles of Operations Research for Management,** USA, Richard D. Irwin Inc., 1977.

Chen, X.: "Newton-Type Methods for Stochastic Programming," **Mathematical and Computer Modelling,** No:31, 2000, ss. 89-98.

Clapham, Christopher: **Coincise Dictionary of Mathematics,** 2nd Edition, New York, Oxford University Press, 1996.

Cooke, Roger: **The History of Mathematics: A Brief Course,** Canada, John Wiley & Sons Inc., 1997.

Cooper,W.W.,v.d.: "Survey of Mathematical Programming Models in Air Pollution Management," **European Journal of Operational Research,** No: 96, 1996.

Cramér, Harald: **The Elements of Probability Theory,** USA, John Wiley and Sons Inc., 1955.

Curvin, Jon, Roger Slater: **Quantitative Methods for Business Decisions,** 4th edition, London, International Thomson Publishing, 1996.

Dantzig, George B.: **Linear Programming and Extensions,** 2nd Ed., New Jersey, Princeton University Press, 1963.

Deak, Istvan: **"Computing Two-stage Stochastic Programming Problems by Successive Regression Approximations" Stochastic Optimization Techniques: Numerical Methods and Technical Applications,** Ed. Kurt Marti, Berlin, Springer, 2002.

Dentcheva, Darinka, Andras Prekopa, Andrzej Ruszczynski, "Bounds for Probabilistic Integer Programming Problems," **Discrete Applied Mathematics,** No: 124, 2002, ss. 55-65.

Doğan, İbrahim: **Yöneylem Araştırması Teknikleri ve İşletme Uygulamaları,** 2.baskı, İstanbul, Bilim Teknik Yayınevi, 1992.

Doob, J.L.: **Stochastic Processes,** USA, John Wiley & Sons Inc., 1953.

Duffuaa, S.O., K.S. Al-Sultan: "A Stochastic Programming Model for Scheduling Maintenance Personnel," **Applied Mathematical Modelling,** No: 25, 1999, ss. 385-397.

Dupacova, J., K. Sladky: "Comparison of Multistage Stochastic Programs with Recourse and Stochastic Dynamic Programs with Discrete Time," **Mathematical Mech,** No:82, 2002, ss. 753-765.

Dupacova, J., N. Gröwe-Kuska, W. Römisch: "Scenario Reduction in Stochastic Programming: An Approach using Probability Metrics," **Mathematical Programming,** Series A 95, 2003, ss. 493-511.

Dupacova, Jitka: "Applications of Stochastic Programming: Achivements and Questions," **European Journal of Operational Research,** No: 140, 2002.

Elmaghraby, Salah E., Hanijanto Soewandi, Ming-Jong Yao: "Chance-Constrained Programming in Activity Networks: A Critical Evaluation," **European Journal of Operational Research,** No: 131, 2001, ss. 440-458.

Elton, Edwin J., Martin J. Gruber: **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,** 5th Ed., Canada, John Wiley & Sons Inc., 1995.

Feiring, B.R., T. Sastri: "A Stochastic Programming Model for Water Resource Planning," **Mathematical Computation Modelling,** Great Britain, Vol. 27, No:3, 1998, ss. 1-7.

Fleten, Stein-Erik, Kjetil Hoyland, Stein W. Wallace: "The Performance of Stochastic Dynamic and Fixed Mix Portfolio Models," **European Journal of Operational Research,** No: 140, 2002, ss. 37-49.

Frauendorfer, Karl, Michael Schürle: "Management of Non-maturing Deposits by Multistage Stochastic Programming," **European Journal of Operational Research,** No:151, 2003.

Freund, John E.: **Mathematical Statistics,** 5th edition , USA, Prentice-Hall Inc., 1992.

GAMS, "Conic Programming in GAMS," (Çevrimiçi) http://www.gams.com/conic/, 1 Temmuz 2003.

GAMS, "Conic Programming," (Çevrimiçi) http://www.gams.com/ conic/conehtml/ index.html, 1 Temmuz 2003.

Garstska, Stanley J.: **"The Economic Equivalence of Several Stochastic Programming Models," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980.

Gass, Saul I.: "Great Moments in History", **OR/MS Today,** C. V, No: 29, October 2002.

Gottfried, Byron S., Joel Weisman: **Introduction to Optimization Theory,** New Jersey, Prentice Hall Inc.,1973.

Güriş, Selahattin, Ebru Çağlayan: **Ekonometri:Temel Kavramlar,** İstanbul, Der Yayınları, 2000.

Halaç, Osman: **Kantitatif Karar Verme Teknikleri,** 4. baskı, Alfa Basım Yayım, 1995.

Hillier, Frederick S., Gerald J. Lieberman: **Introduction to Operations Research,** 6th Ed., Singapore, McGraw-Hill Inc., 1995.

Holmes, Derek: "What is Stochastic Programming" (Çevrimiçi) http://users. iems. nwu.edu/ ~jrbirge/ html/dholmes/ StoProIntro.html, 8 Eylül 2003.

Howes, Norman R.: **Modern Analysis and Topology,** New York, Springer-Verlag, 1995.

İMKB, (Çevrimiçi), http://www.imkb.gov.tr/sirket/staveriaciklama.htm, 05.04.2004.

İMKB, (Çevrimiçi), http://www.imkb.gov.tr/sirket/staveriler.htm, 05.04.2004.

Inuiguchi, Masahiro, Jaroslav Ramik: "Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Praoramming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem," **Fuzzy Sets and Systems,** No: 111, 2000.

Jaiswal, N. K.: **Military Operations Research: Quantitative Decision Making,** Boston Hardbound, Kluwer Academic Publishers, 1997.

Kall, P.,J. Mayer: **"On Solving Stochastic Linear Programming Problems," Stochastic Programming Methods and Technical Applications: Proceedings of of 3rd GAMM/IFIP-Workshop on Stochastic Optimization; Numerical Methods and Technical Applications,** Ed. Kurt Marti, Peter Kall, Germany, Springer-Verlag, 1998.

Kall, Peter, Stein W. Wallace: **Stochastic Programming,** USA, John Wiley & Sons Inc., 1995.

Kampas, Athanasios, Ben White: "Probabilistic Programming for Nitrate Pollution Control: Comparing Different Probabilistic Constraint Approximations" **European Journal of Operational Research,** No: 147, 2003, ss. 217-228.

Kibzun, Andrey I., Yuri S. Kan: **Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions,** England, John Wiley & Sons Ltd., 1996.

Konno, Hiroshi, Hiroaki Yamazaki: "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market," **Management Science,** Vol:37, No:5, 1991.

Kouwenberg, Roy: "Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management," **European Journal of Operational Research,** No:134, 2001.

Lau, Karen K., Robert S. Womersley: "Multistage Quadratic Stochastic Programming," **Journal of Computational and Applied Mathematics,** No:129, 2001, ss. 105-138.

Lee, Sang M., Laurence J. Moore, Bernard W. Taylor: **Management Science,** 3rd Ed., Needham Heights, Allyn and Bacon, 1990.

Lipschutz, Seymour: **Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability,** Si(metric) Edition, Çev. Hacer Kutluk, New York, McGraw Hill Co., 1974.

Liu, Baoding: "Uncertain Programming:A Unifying Optimization Theory in Various Uncertain Environments," **Applied Mathematics and Computation,** No: 120, 2001, ss. 227-234.

Markowitz, Harry **M.: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,** 2nd Ed., Massachusetts, Basil Blackwell Inc., 1991.

Marti, Kurt, Peter Kall: **Stochastic Programming Methods and Technical Applications: Proceedings of the 3rd GAMM/IFIP-Workshop on Sochastic Optimization; Numerical Methods and Technical Applications,** Germany, Springer-Verlag, 1998.

Mason, Robert D., Douglas A. Lind: **Statistical Techniques in Business and Economics,** 9th Ed., USA, Richard D. Irwin Inc., 1996.

Moyer, R. Charles, James R. McGuigen, William J. Kretlow: **Contemporary Financial Management,** 4th Ed., USA, West Publishing Company, 1990.

Mulvey, John M.: "Introduction to Financial Optimization: Mathematical Programming Special Issue," **Mathematical Programming,** Series B 89, 2001, ss. 205-216.

Nash, Stephen G., Ariela Sofer: **Linear and Nonlinear Programming,** USA, McGraw-Hill Inc., 1996.

Newbold, Paul, **İşletme ve İktisat için İstatistik,** 4. baskı, Çev. Ümit Şenesen, İstanbul, Literatür Yayınları, 1995.

Novak, David C., Cliff T. Ragsdale: "A Decision Support Methodology for Stochastic Multi-criteria Linear Programming using Spreadsheets," **Decision Support Systems,** No:36, 2003.

Optimization Technology Center, (Çevrimiçi) http://www-fp.mcs.anl. gov/otc/Guide/OptWeb/continuous/constrained/stoch.../ index.htm, 10 Eylül 2003.

Oral, Muhittin, S.Subba Rao: **"An Objective Function for Inventory Control Models," Stochastic Programming,** Ed.M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 403-426.

Orhunbilge, Neyran: **Örnekleme Yöntemleri ve Hipotez Testleri,** 2. baskı, İstanbul, İ.Ü. İşletme İktisadı Yayınları, 2000.

Orhunbilge, Neyran: **Tanımsal İstatistik Olasılık ve Olasılık Dağılımları,** İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 2000.

Özdemir, Erhan, İ.Müfit Giresunlu: "The Selection of Risky Stock Portfolios Based on the Risk Aversion Constant," **Azerbaycan Respublikası Tehsil Cemiyyeti Bilgi Dergisi: Fizika, Riyazziyat, Yer Elmleri,** Bakı, No:2 (18), 2004, ss. 61-66.

Öztürk, Ahmet: **Yöneylem Araştırması,** 7. baskı, Bursa, Ekin Kitabevi Yayınları, 2001.

Popova, Elmira, David Morton: **"Adaptive Stochastic Manpower Scheduling," Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference,** Ed. D.J. Medeiros v.d., y.y., y.y., t.y., ss. 661-668.

Poznyak, A.S., K. Najim: **Learning Automata and Stochastic Optimization,** Great Britain, Springer-Verlag, 1997.

Prekopa, Andras, v.d.: **"The STABIL Stochastic Programming Model and its Experimental Application to the Electrical Energy Sector of the Hungarian Economy," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 369-385.

Prékopa, Andras: **Stochastic Programming,** Hungary, Kluwer Academic Publishers, 1995.

Priestley, H.A.: **Introduction to Integration,** Oxford Science Publications, New York, 1997.

Prohorov, Yu.V.,Yu. A. Rozanov: **Probability Theory,** Çev. K. Krickeberg, H. Urmitzer, Berlin, Springer-Verlag, 1969.

Render, Barry, Ralph M. Stair, Jr.: **Quantitative Analysis for Management,** 3rd Ed., USA, Allyn and Bacon Inc., 1988.

Ruszczynski, Andrzej: "Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra," **Mathematical Programming,** Series A 93, 2002, ss. 195-215.

Saraçoğlu, Bedriye, Ferhan Çevik: **Matematiksel İstatistik: Olasılık ve Önemli Dağılımlar,** 2.baskı, Ankara, Gazi Büro Kitabevi, 1995.

Savage, I. Richard: **"Random Variables," Time Series and Statistics,** Ed. John Eatwell, Murray Milgate, Peter Newman, UK, The Macmillan Press Ltd., 1990.

Schultz, Rüdiger: "Stochastic Programming with Integer Variables," **Mathematical Programming,** Series B 97, 2003, ss. 285-309.

Sengupta, Jati K.: **"Stochastic Programming: A Selective Survey of Recent Economic Applications," Stochastic Programming,** Ed. M.A.H. Dempster, New York, Academic Press Inc., 1980, ss. 525-536.

Sengupta, Jati K.: **Decision Models in Stochastic Programming,** New York, Elsevier Science Publishing Inc., 1982.

Sınıksaran, Enis: **Teori ve Uygulamalarıyla İstatistiksel Yöntemler,** İstanbul, Sigma Yayınları, 2000.

Spiegel, Murray R.: **Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics,** SI (Metric) Edition, Singapore, McGraw-Hill Co., 1988.

Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) http://www.stoprog.org, 4 Eylül 2003.

Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) www.stoprog.org/resources.html, 5 Eylül 2003.

Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) www.stoprog.org/ SPIntro/ military. html#1, 5 Eylül 2003.

Stochastic Programming Society, (Çevrimiçi) www.stoprog.org/SPIntro/sport. html#1, 5 Eylül 2003.

Taha, Hamdy A.: **Yöneylem Araştırması,** 6. Baskı, Çev. Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf, İstanbul, Literatür Yayınları, 2000.

Tapiero, Charles S.: **Applied Stochastic Models and Control in Management,** Netherlands, Elseiver Science Publishing Inc., 1988.

TCMB, (Çevrimiçi), http://www.tcmb.gov.tr, 05.04.2004.

Thomasian, Aram J.: **The Structure of Probability Theory with Applications,** USA, Mc-Graw Hill Inc., 1969.

Timor, Mehpare: **Yöneylem Araştırması ve İşletmecilik Uygulamaları,** İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 2001.

Tintner, Gerhard, Jati K. Sengupta: **Stochastic Economics: Stochastic Processes, Control and Programming,** New York, Academic Press Inc., 1972.

Tulunay, Yılmaz: **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları,** 3.baskı, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, 1991.

Ünsal, Fahri M., Bahadtin Rüzgar, Nursel Rüzgar: **İşletme ve Ekonomi için Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Yöntemler,** Cilt 1, İstanbul, Türkmen Kitabevi, 2000.

Williemse, Isabel: **Statistical Methods and Financial Calculations,** 2nd edition, Kenwyn, Juta & Co Ltd., 1994.

Winston, Wayne L., S. Christian Albright: **Practical Management Science,** 2nd Ed., USA, Duxbury Thomson Learning, 2001.

Wismer, David A., R. Chattergy: **Introduction to Nonlinear Optimization: A Problem Solving Approach,** New York, Elsevier North-Holand Inc., 1978.

Yamak, Oygur: **Üretim Yönetimi: Sistemler, İlkeler ve Teknikler,** İstanbul, Alfa Yayınları, 1994.

Yılmaz, Zekâi: **Sayısal Yöntemler,** 3.baskı, Bursa, Uludağ Üniversitesi Vakfı Yayınları, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Arş.Grv. Eyüp ÇETİN, 16.10.1974 tarihinde İstanbul'da doğmuştur. Lise öğrenimini İnönü Teknik Lisesi Elektrik Bölümünden mezun olarak tamamlamıştır. Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi (İngilizce) bölümünden 1998 yılında mezun olmuştur. Yüksek Lisans eğitimi için Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti'ne gitmiştir. 2000 yılında Lefke Avrupa Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi'nden İşletme Yüksek Lisans (MBA) derecesi almıştır. Çalışma hayatına 2001 yılında, Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak başlamıştır. Aynı yıl, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Sayısal Yöntemler Bilim dalında doktora eğitimine başlamıştır. 15.10.2002 tarihinde İ.Ü. İşletme Fakültesi Sayısal Yöntemler Anabilim dalına Araştırma Görevlisi olarak atanmıştır.

Eğitimde Toplam Kalite Yönetimi, Sınıf Yönetimi ve İletişim Becerileri gibi sertifika programlarına katılmıştır. Akademik ilgi alanlarının başında, yöneylem araştırması, matematik programlama ve stokastik optimizasyon konuları yer almaktadır. Halen İ.Ü. İşletme Fakültesi Sayısal Yöntemler Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir erkek çocuk babası olan ÇETİN, iyi derecede İngilizce bilmektedir.