MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

EYÜP ÖMER ÖLÇÜCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Doç. Dr. A.Neşe DERNEK

İSTANBUL, 2014

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE UYGULAMALARI

EYÜP ÖMER ÖLÇÜCÜ

(521111002)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Doç. Dr. A.Neşe DERNEK

İSTANBUL, 2014

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Eyüp Ömer ÖLÇÜCÜ'nün "**Bazı İntegral Dönüşümler ve Uygulamaları**" başlıklı tez çalışması, 7 Temmuz 2014 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. A.Neşe DERNEK (Danışman)
Marmara Üniversitesi ..... (İMZA) .....

Prof.Dr. Ahmet DERNEK (Üye)
Marmara Üniversitesi ..... (İMZA) .....

Yrd.Doç.Dr. Gülseren ÇİÇEK (Üye)
İstanbul Üniversitesi ..... (İMZA) .....

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararı ile Eyüp Ömer ÖLÇÜCÜ'nün Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Abdülkerim KAR

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında her anlamda yardımlarını esirgemeyen sabırla, şefkatle ve titizlikle çalışmalarıma yön veren, matematikle yaşamanın ve keşfetmenin yolunu gösteren değerli hocam Doç.Dr. sayın A.Neşe DERNEK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca manevi desteklerinden dolayı aileme, dostlarıma ve özellikle eşim Melike ÖLÇÜCÜ'ye teşekkürü borç bilirim.

HAZİRAN, 2014 **Eyüp Ömer ÖLÇÜCÜ**

İÇİNDEKİLER SAYFA

TEŞEKKÜR i

İÇİNDEKİLER ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

SEMBOLLER v

BÖLÜM 1: GİRİŞ 1

1.1 İntegral Dönüşümleri 2
1.2 İntegral Dönüşümlerin Tarihsel Gelişimi 3
1.3 Fourier İntegral Dönüşümü 4
1.4 Laplace İntegral Dönüşümü 24
1.5 Mellin İntegral Dönüşümü 44
1.6 Stieltjes İntegral Dönüşümü 49
1.7 Önemli Bazı Özel fonksiyonlar ve İntegral Dönüşümler 55

BÖLÜM 2: METARYAL VE YÖNTEM 59

2.1 Bazı integral Dönüşümlerinin Genelleştirilmesi 59

2.2 Genelleştirilmiş İntegral Dönüşümleri Arasındaki Bağıntılar 60

2.3 İntegral Dönüşümler Üzerine Parseval-Goldstein Tipi Teoremler 62

2.4 Sonuçlar ve Açıklayıcı Örnekler 75

BÖLÜM 3 : BULGULAR VE TARTIŞMA 117

BÖLÜM 4 : SONUÇLAR 132

KAYNAKLAR 137

ÖZGEÇMİŞ 139

ÖZET

İntegral dönüşümleri, uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan bir çok sınır-değer, başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır.Bu bağlamda yeni integral dönüşümleri tanımlanmakta ve var olan integral dönüşüm tabloları sürekli genişletilmeye çalışılmaktadır.

Bu tezin 1. bölümünde integral dönüşümlerin temel mantığından bahsedilerek çalışmanın ana hatları çizilmiştir.İntegral dönüşümün genel tanımı ve genel özellikleri verilmiş, sık kullanılan integral dönüşümlerin kısaca tarihçesine değinilip, tanımları ve bazı önemli özellikleri örneklerle verilmiştir.

2.bölümde bu konuda yazılmış makaleler taranarak integral dönüşümler arasındaki Parseval-Goldstein türü teoremler incelenmiş, integral dönüşümleri birbirine bağlayan önemli özellikler ile son yıllarda tanımlanan potansiyel dönüşümün ve genelleştirilmişi olan $\mathcal{P}_4$ dönüşümü ile Laplace dönüşümünün genelleştirilmişi olan $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4$ dönüşümlerinin mevcut integral dönüşümleri ile bağlantıları verilmiş ve incelenen makalelerdeki sonuçlar örneklerle açıklanmıştır.

3. bölümde $\mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{L}_4$ dönüşümlerin genelleştirmesi olan $\mathcal{L}_{2n}$, $\mathcal{L}_{4n}$,potansiyel dönüşümün bir genelleştirmesi $\mathcal{P}_{4n}$ ve Fourier-sin, Fourier-cos dönüşümlerinin genelleştirmesi olan $\mathcal{F}_{s,2n}$, $\mathcal{F}_{c,2n}$, integral dönüşümleri tanımlanmış, bu integral dönüşümleri ile ilgili Parseval-Goldstein türü bağıntıları içeren temel teoremler verilmiştir.Tanımlanan yeni integral dönüşümlerinin mevcut dönüşümlerle bağlantıları gösterilip,bu bağıntılar örneklerle açıklanmıştır.

4. bölümde bulunan yeni tanımlamalar, bağıntılar ve sonuçlar örnekleriyle derlenmiş, böylece integral dönüşüm tablolarının genişletilebileceği görülmüştür.

Haziran, 2014 **Eyüp Ömer ÖLÇÜCÜ**

ABSTRACT

Integral transformations are used in the solution of boundary-value problems, initial-value problems, differential equations and integral equations, encountered in applied mathematics and engineering fields. In this context, new integral transformations are defined and existing integral transformations tables are constantly trying to be expanded.

In the first chapter of this thesis, the study is outlined. At first, the basic logic of integral transformations is mentioned. General definition and properties of the integral transformation are described. A brief history of frequently used integral transforms and their definitions are given and some important features of them are provided with examples.

In the second chapter, articles written on this subject are scanned and Parseval-Goldstein type theorems,which are used between integral transforms, are examined. Important features, linking integral transforms are mentioned. Connections of Potential transformation, that is described in recent years; $\mathcal{P}_4$ transformation which is a generalization of Potential transformation; and $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_4$ transformations which are generalizations of Laplace transformation, with existing integral transforms are provided. The results in the articles examined are explained with examples.

In the third chapter, $\mathcal{L}_{2n}$Integral transforms, which is a generalization of $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{L}_4$ transformations; $\mathcal{P}_{4n}$ Integral transforms, which is a generalization of Potential transformation; $\mathcal{F}_{s,2n}$ and $\mathcal{F}_{c,2n}$ Integral transforms, which are generalizations of Fourier-sin, and Fourier-cos transformations, respectively; are defined. Fundamental theorems, that encloses relations between Parseval-Goldstein and these integral transformation, are given. Relations between the derived integral transformations and the existing integral transformations are shown and these relations are explained with examples.

In the fourth chapter, derived definitions, relations, and the results have been compiled with examples. In this way, it has been seen that integral transform tables can be expanded.

June, 2014 **Eyüp Ömer ÖLÇÜCÜ**

SEMBOLLER/SYMBOLS

$\beta(x,y)$: Beta fonksiyonu

C(x) : Fresnel integrali

Ci(t) : Cosinüs integrali

Si(t) : Sinüs integrali

$\delta(x-x_o)$:Dirac-delta fonksiyonu

$E_1(x)$: Üstel integral fonksiyonu

erf(x) : Hata fonksiyonu

erfc(x) : Tamamlayıcı hata fonksiyonu

$\mathcal{E}_{4,1}$: Ötelenmiş üstel integral dönüşümü operatörü

$\mathcal{F}$: Fourier integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}$:Fourier-sinüs integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{c}}$:Fourier-cosinüs integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{s,2}}$:$\mathcal{F}_{\mathrm{s,2}}$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{c,2}}$: $\mathcal{F}_{\mathrm{c,2}}$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{s,2n}}$: $\mathcal{F}_{\mathrm{s,2n}}$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{F}_{\mathrm{c,2n}}$:$\mathcal{F}_{\mathrm{c,2n}}$ integral dönüşüm operatörü

${}_mF_n(a_1,\dots,a_m;\gamma_1,\dots,\gamma_n;z)$: Gaus hipergeometrik serisi

$\mathcal{G}$: Glasser integral dönüşüm operatörü

H(x) :Heaviside birim basamak fonksiyonu

$\mathcal{H}_v$:*v.* mertebeden Hankel dönüşüm operatörü

$I_v(z)$: I.tür modifiye Bessel fonksiyonu

$J_v(t)$: *v.* mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu

$\mathbb{J}_v(t)$: Anger-Weber fonksiyonu

$K_v(z)$: v. mertebeden üçüncü tür Bessel fonksiyonu

$\mathcal{K}_v$: v.mertebeden $\mathcal{K}$ dönüşümü öperatörü

$\zeta(p)$: Reiman-zeta fonksiyonu

$L_n^{(\alpha)}(x)$: Laguarre Polinomu

ℓ :Laguarre dönüşümü operatörü

$\mathcal{L}$: Laplace integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{L}_2$: $\mathcal{L}_2$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{L}_4$: $\mathcal{L}_4$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{L}_{2n}$: $\mathcal{L}_{2n}$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{L}_{4n}$: $\mathcal{L}_{4n}$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{M}$:Mellin integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{P}$: Widder-Potansiyel dönüşüm operatörü

$\mathcal{P}_4$: $\mathcal{P}_4$ integral dönüşüm operatörü

$\mathcal{S}$: Stieltjes integral dönüşümü operatörü

$S_{\mu,v}(z)$:Lommel fonksiyonu

$\mathcal{W}_\mu$: μ. mertebeden Weyl dönüşümü operatörü

$\Gamma(z)$:Gama fonksiyonu

$\Gamma(\mu; x)$: Tamamlayıcı gama fonsiyonu

$Y_v(z)$: v. mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu

BÖLÜM 1: GİRİŞ

İntegral dönüşüm temelde reel veya kompleks değerli bir f fonksiyonunu, tek bir matematiksel operasyonla yeni bir $F=\mathcal{J}f$ fonksiyonuna dönüştürme işlemidir. İntegral dönüşümün önemi, zor bir matematik problemini daha kolay çözülebilir bir probleme dönüştürmesidir. Örneğin; diferansiyel denklemler ve başlangıç-sınır değer problemlerinde integral dönüşüm sayesinde diferansiyel operatörlerin yerini, oldukça basit ve F' i içeren cebirsel operatörler alır. Bu adımdan sonra problemin çözümü ters integral dönüşümünün alınması ile tamamlanır. İntegral dönüşümün işlerliği ancak $\mathcal{J}f=F$ den f fonksiyonunun bulunması ile mümkündür. Bu adım zordur ve pek çok değişik yöntemle yapılır. Bu yöntemlerden en sık kullanılanı integral dönüşüm tablolarından faydalanmaktır. Problemin türüne göre kullanılan integral dönüşüm de farklılaşmaktadır. Bu anlamda farklı integral dönüşümlerinin tablolarının zenginliği önem kazanmaktadır.

Uygulamalı matematik fizik ve mühendislik alanlarında kullanılan bazı integral dönüşümler: Laplace, Fourier, Fourier sinüs, Fourier cosinüs, Mellin, Stieltjes, Hankel, Weyl, Laguare, Widder Potansiyel, Üstel integral dönüşümleridir. Bu dönüşümlerden tablosu en gelişmiş olanları Fourier ve Laplace dönüşümleridir.

Bu tezdeki amaç Parseval-Goldstein türü denkliklerle integral dönüşümlerini birbirine bağlayan bağlantıları kurarak, dönüşüm tablosu geniş olan integral dönüşümlerden faydalanıp diğer integral dönüşümlerinin ve yeni integral dönüşümlerinin tablolarının geliştirilmesine katkıda bulunmaktır. Ayrıca çözümü zor bazı genelleştirilmiş integrallerin çözümlerinin verilmesidir.

Bu amaçla önce integral dönüşümün genel bir tanımı verilecek,özelliklerinden bahsedilip tarihsel gelişimi ile yukarıda adı geçen integral dönüşümlerin tanımları, genel özellikleri örneklendirilerek anlatılacaktır. Ardından dönüşümler arsındaki bağıntılar üzerine yapılan farklı çalışmalar bir bütünlük içinde irdelenerek yeni genelleştirmelere ulaşılacaktır.

1.1.İntegral Dönüşümleri

a≤x≤b aralığında tanımlanan bir f(x) fonksiyonunun "integral dönüşümü"

$$\oint\{f(x);k\} = F(k) = \int_a^b K(x,k)f(x)dx \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Burada x değişken, k parametre olmak üzere $K(x,k)$ fonksiyonuna dönüşümün çekirdeği denir. Burada *x* ve *k* reel değerli olabileceği gibi kompleks değerler de alabilir. $\oint$ işlemcisi genellikle "integral dönüşüm işlemcisi" veya "integral operatörü" olarak adlandırılır. İntegral dönüşüm operatörü lineerlik özelliğini sağlar. α, β keyfi sabitleri göstermek üzere,

$$\oint\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}K(x,k)dx$$

$$= \alpha \oint\{f(x)\} + \beta \oint\{g(x)\} \tag{1.2}$$

dir. Bunun yanında verilen bir $F(k) = \oint\{f(x);k\}$ dönüşümünden *f(x)*' i elde etmek için ters dönüşüm şöyle ifade edilir:

$$\oint^{-1}\{F(k)\} = f(x) \tag{1.3}$$

Burada $\oint^{-1}$ operatörü lineerdir.

Bu tür matematiksel dönüşüm teorileri Banach Uzayı özellikleri kullanılarak geliştirilebilir: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n) \in S \subset \mathbb{R}^n$ *olmak üzere,*

$$\oint\{f(x);k\} = F(k) = \int_S K(x,k)f(x)dx \tag{1.4}$$

ile tanımlanan F(k) bir integral dönüşümüdür.

1.2. İntegral Dönüşümlerin Tarihsel Gelişimi

İntegral dönüşümleri, yaklaşık iki yüz yıldır uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik problemlerini çözmede kullanılmaktadır. Tarihsel olarak integral dönüşümleri, P.S. Laplace (1749-1827) ve J.Fourier (1768-1830)'in çalışmalarına dayanır. Bu konudaki ilk eserler, Laplace'ın 1780 de yazdığı kitabı "La Theorie Analytique des Probabilities" ve Fourier'in 1822 de basılan "La Theorie Analytique de la Chaleur" isimli çalışmalarıdır.

Matematikte çok yaygın kullanım alanı bulmuş ve en eski integral dönüşümü olan Laplace dönüşümünün ilk temel tanımı ve uygulamaları Laplace'ın yukarıda adı geçen kitabında verilmiştir. Laplace dönüşümü, pozitif reel eksende Fourier dönüşümünün özel halidir. Öyle ki Laplace dönüşümünün ve kompleks düzlemde bir eğrisel integral aracılığı ile verilen ters Laplace dönüşümünün tanımları modern formda Fourier integral formülünden çıkar.

Fourier, 1822 de basılan eserinde "*Fourier İntegral Teoremi"* olarak bilinen bu çok önemli sonucunda sonlu bir aralıkta tanımlı keyfi bir fonksiyonun trigonometrik seri açılımı ile ilgili bir dizi örnek vermiştir. Böylece yeni bir kavram olan Fourier serisini ortaya koyarak seri açılımını, sınırsız bir aralıkta tanımlı fonksiyonlara uygulamak için bir integral dönüşümü ve bu dönüşümün tersini tanımlamıştır. Fourier'in bu önemli fikri daha önce P.S.Laplace ve A.L.Cauchy(1789-1857) tarafından biliniyordu. Öte yandan S.D.Poisson (1781-1840) bu çalışmalardan bağımsız olarak su dalgalarının yayılımını incelerken integral dönüşümü yöntemini kullanmıştır. G.W Leibnitz (1646-1716) ilk kez sembolik hesap yöntemini oluşturmuştur. Bu yöntemi J.L Lagrange(1736-1813) ve P.S.Laplace operasyonel yöntem olarak bilinen daha anlaşılır hale getirdiler. Fourier integral teoreminin Cauchy tarafından verilen üstel formu,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(ik(x-y)) f(y) dy dk \qquad (1.5)$$

biçimindedir. Cauchy bu çalışmasında *D* operatörünün fonksiyonları için aşağıdaki bağıntıyı vermiştir:

$$\Phi(D)f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(ik) exp\,(ik(x-y)) f(y) dy dk \qquad (1.6)$$

Cauchy'nin bu çalışması operasyonel hesabın modern forma geçişini sağlamıştır.

Laplace ve Fourier'in dönüşümleri 19.yüzyıla kadar biliniyor olsa da İngiliz elektrik mühendisi O.Heaviside (1850-1925) elektrik akımını ve sistemlerini veren bayağı diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümünü kullanarak operasyonel yöntemi geliştirmiş ve bu dönüşümü popüler hale getirmiştir. Operasyonel matematik için detaylı formüllerin 19.yüzyılda verilmesine karşın 17.yüzyılda bu konuda ulaşılan nokta, hayranlık vericiydi.

Daha sonra tarihsel gelişim, integral dönüşümlerin matematiksel oluşumunun incelenmesine yönlenmiştir. Fourier ve Laplace dönüşümleri böylece tekrar gündeme gelerek Mellin dönüşümü, Hankel dönüşümü, Hilbert dönüşümü ve Stieltjes dönüşümü gibi pek çok dönüşüm tanımlanmıştır. Mellin, kendi adıyla anılan dönüşümün tersini tanımlasa da bu dönüşümü asal sayılardaki çalışmasında ünlendiren Reimann olmuştur. H.Hankel(1839-1873), Reimann'ın öğrencisidir. Çekirdeği Bessel fonksiyonu olan Hankel dönüşümünü tanımlamıştır. Bu dönüşümü dairsel simetri koşulu altında iki boyutlu Fourier dönüşümünden türetmiştir. D.Hilbert (1877-1943) ve T.J.Stieltjes'in (1856-1894) kendi adlarıyla anılan dönüşümleri, G.H.Hardy ve E.L.Titchmarsh'ın çalışmaları ile fizik ve mühendislikteki pek çok problemin çözümünde kullanılmıştır.

Sonuç olarak yukarıda bahsi geçen dönüşümler günümüzde de bayağı diferansiyel denklemler, integral denklemler, başlangıç-değer, sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılmaya devam etmektedir.

1.3.Fourier İntegral Dönüşümü

Fourier integral dönüşümü, Fourier integral formülünden yararlanarak tanımlanmıştır. Bu nedenle bu kısımda önce Fourier integral formülü, sonra integral dönüşümü, Fourier ters dönüşümü, Fourier cosinüs ve Fourier sinüs dönüşümleri tanımlanacaktır. Fourier dönüşümünün temel özellikleri incelenip, örneklendirilecektir.

a∈ℝ, $-a < x < a$ olmak üzere eğer *f(x)* aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise *f*'nin Drichlet koşullarını sağladığı söylenir:

i. *f(x)*'in $-a < x < a$ aralığında sonlu sayıda sonlu süreksizliği(sıçraması) vardır.

ii. *f(x)* , $-a < x < a$ aralığında sonlu sayıda maksimum ve minimuma sahiptir.

Her sonlu aralıkta Drichlet koşullarını sağlayan fonksiyonlar kompleks Fourier serisi ile yazılabilirler:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, exp\left(\frac{in\pi x}{a}\right) \tag{1.7}$$

Buradaki a_n seri katsayıları ;

$$a_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(\zeta) \, exp\left(-\frac{in\pi\zeta}{a}\right) d\zeta \tag{1.8}$$

şeklinde olup bu gösterilişleri nedeniyle *f(x)* 'i $2a$ periyotlu bir fonksiyon kılmaktadır. Bu katsayılar $2a$ periyotlu olmazsa *f(x)*, (1.7) biçiminde bir seri ile gösterilemez. Bu nedenle sonlu aralıkta problemler Fourier serileri yardımıyla, (-∞,∞) aralığında ise Fourier integralleri yardımıyla verilir.$-\infty < x < \infty$ için periyodik olmayan *f(x)* fonksiyonunun integral gösterimi aşağıdaki seri gösteriminden yararlanarak elde edilir:

$a \to \infty$ iken $k_n = \frac{n\pi}{a}$ olsun.a büyüdükçe k_n değerleri küçülür.$\delta_k = k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{a}$ ile tanımlansın. Bu değerler (1.7) de yerine yazılırsa ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_k) \left[\int_{-a}^{a} f(\zeta) \, exp(-i\zeta k_n) \, d\zeta \right] exp(ik_n x) \tag{1.9}$$

elde edilir. $a \to \infty$ için limit alınırsa k_n, sürekli bir k değişkenine, δ_k, dk ya dönüşür, sonuç olarak 1.9 toplamı, integrale dönüşür. Böylece (1.9) bağıntısı,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \, exp(-\mathrm{ik}\zeta) \, d\zeta \right] exp(ikx) \, dk \tag{1.10}$$

biçimini alır. (1.10) bağıntısına "*Fourier integral formülü"* denir. Bu gösterim her sonlu aralıkta kısmi türevlere sahip olan ve tüm reel doğruda 'mutlak integrallenebilen' fonksiyonlar için yazılabilir. Bu durumda mutlak integrallenebilirlik tanımını verelim.

Bir *f(x)* fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \tag{1.11}$$

bağıntısını sağlıyor ise "*mutlak integrallenebilirdir"* denir.

En genel anlamda (1.10) bağıntısının sağlandığı teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 1.3.1 ***Fourier İntegral Teoremi***: *f(x)* , (-∞,∞) da her sonlu aralıkta Drichlet koşullarını sağlasın ve bu aralıkta mutlak integrallenebilir olsun.(1.10) Fourier integrali *f(x)* in sonlu bir süreksizlik noktasında $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ değerine yakınsar. Diğer bir değişle teoremin koşulları altında

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\, exp(-\mathrm{i}k\zeta)\, d\zeta\right] exp(ikx)\, dk \tag{1.12}$$

bağıntısı doğrudur.

Eğer *f , x* noktasında sürekli ise o zaman bu noktada (1.12) eşitliğinin sol tarafı *f(x)* olup (1.10) bağıntısına dönüşür.

$e^{ik(x-\zeta)}=cosk(x-\zeta)+isink(x-\zeta)$ olduğu düşünülürse ve cosinüs fonksiyonunun çift, sinüs fonksiyonun tek olduğu göz önüne alınırsa (1.10) bağıntısı;

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\ cosk(x-\zeta)d\zeta \tag{1.13}$$

formuna dönüşür. Burada $\cos(kx-k\zeta) = coskx.cosk\zeta + sinkx.sink\zeta$ özdeşliğinden yararlanılırsa (1.10) bağıntısı ;

$$f(x) = f(-x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(kx)dk \int_{0}^{\infty} f(\zeta)\cos(k\zeta)d\zeta \tag{1.14}$$

biçimini alır.Buna *Fourier cosinüs integral formülü* denir. Benzer olarak *Fourier sinüs integral formülü;*

$$f(x) = -f(-x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin(kx)dk \int_0^\infty f(\zeta)sin(k\zeta)d\zeta \qquad (1.15)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Fourier integral formülünü kullanarak Fourier integral dönüşümünü ve ters Fourier dönüşümünü tanımlayabiliriz.

Tanım 1.3.1 ***Fourier İntegral Dönüşümü:***

Bir *f(x)* fonksiyonunun Fourier integral dönüşümü, $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ ile gösterilir ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-ikx)f(x)dx \qquad (1.16)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Benzer biçimde Ters Fourier Dönüşümü, $\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}=f(x)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp(ikx)F(k)dk \qquad (1.17)$$

şeklinde tanımlanır.

örnek 1.3.1: *f(x)=exp(-ax^2)* fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım.

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{exp(-ax^2)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx - ax^2)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}\right]dx$$

olup burada $y=x+ik/2a$ dönüşümü ile

$$\mathcal{F}\{exp(-ax^2)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\,(\frac{-k^2}{4a}) \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ay^2)dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \tag{1.18}$$

elde edilir.

Örnek1.3.2 a∈ℝ olsun.

$$f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H(1 - \frac{|x|}{a})$$

fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulalım. Burada *H(x)* Heaviside birim basamak fonksiyonu olup tanımı,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{veya daha genel olarak}$$

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > a \end{cases} \tag{1.19}$$

şeklindedir. $H(x-a)$ fonksiyonunun $x=a$ da sonlu bir süreksizliği vardır. Şimdi buna göre Fourier dönüşüm tanımında *f(x)* fonksiyonu yerine yazılırsa;

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} exp\,(-ikx)\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) coskxdx$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-x)\cos(akx)\,dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-x)\frac{d}{dx}\left(\frac{sinakx}{ak}\right) dx$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \frac{\sin\,(akx)}{ak} dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \frac{d}{dx}\left[\frac{sin^2\left(\frac{akx}{2}\right)}{\left(\frac{ak}{2}\right)^2}\right] dx \quad \text{olup buradan}$$

$$\mathcal{F}\left\{\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H(1 - \frac{|x|}{a})\right\} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{sin^2\left(\frac{ak}{2}\right)}{\left(\frac{ak}{2}\right)^2} \tag{1.20}$$

bulunur.

Fourier dönüşümünün varlığı için *f(x)'in* (-∞,∞) aralığında mutlak integrallenebilir olması gerekir. Bu koşul altında (1.16) integralinin yakınsaklığı sağlanır. Ayrıca (1.16) integrali, k değişkenine göre düzgün yakınsaktır.

Fourier dönüşümünün tanımı (-∞,∞) da mutlak integrallenebilir fonksiyonlar sınıfına kısıtlanması birçok elemanter fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplamada sorun yaratır.Örneğin *cosax , sinax , e^{ax} ,x^n.H(x)* fonksiyonlarının Fourier dönüşümünü kolayca tanımlanamaz. Çünkü bu fonksiyonlar için (1.16) integrali yakınsak değildir. Bu sorun (1.16) bağıntısında *f(x)* yerine bir genelleştirilmiş fonksiyon alınarak giderilebilir. *Lighthill(1958) ve Jones(1982)* bu sorunu gidermek için "*iyi fonksiyonlar"* teorisini geliştirmiştir[3]. Şimdi genelleştirilmiş fonksiyon ve iyi fonksiyon kavramlarına değinelim.

Tanım 1.3.2

$\mathbb{R}$ 'de tanımlı $\mathbb{R}$ 'de ya da $\mathbb{C}$ 'de değerler alan sınırsız türetilebilen fonksiyonlar sınıfı, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\mathbb{R})$ sınıfına ait ve $|x| \to \infty$ iken her mertebeden türevi $|x|^{-1}$ in her pozitif kuvvetinden daha hızlı sıfıra giden fonksiyonlara *iyi fonksiyonlar* denir ve bu fonksiyonların topluluğu S ile gösterilir.

g(x) iyi fonksiyon ise $N>0$ ve $n\geq 0$ için

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^N . g^{(n)}(x) = 0 \qquad (1.21)$$

olur. Yakınsaklık, konvolisyon, diferansiyel alma gibi kavramlar bu sınıftaki fonksiyonlar için sorunsuz bir şekilde tanımlanır. İyi fonksiyonların sınırsız türetilebilmesi ve hızla sıfıra gitmesi bu fonksiyonların Fourier dönüşümlerinin de iyi fonksiyon olacağını ortaya koyar. Bu özellik ileride bir teoremle gösterilecektir.

Tanım 1.3.3

$n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\mathbb{R}$ için $\langle f_n(x)\rangle$ iyi fonksiyonlardan oluşan bir dizi , *g(x)* $\in$ S olsun. $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx$ limiti varsa o zaman $\langle f_n(x)\rangle$ dizisine *regülerdir* denir.

Tanım 1.3.4

Bir *genelleştirilmiş fonksiyon* iyi fonksiyonlardan oluşan regüler bir dizinin limiti olarak tanımlanır.Bu tanıma göre iki genelleştirilmiş fonksiyonun denk olabilmesi için onları tanımlayan regüler dizilerin denk olması gerekir.

Öte yandan genelleştirilmiş fonksiyonlar, iyi fonksiyonların integralleri aracılığı ile tanımlanabilir. g, iyi fonksiyon olmak üzere f, genelleştirilmiş fonksiyonunu g, iyi fonksiyonuna bağlayan sayı $\langle f, g \rangle$ ile gösterilir ve

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, g \rangle \tag{1.22}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Teorem 1.3.2

Bir *f(x)* iyi fonksiyonunun Fourier dönüşümü de iyi bir fonksiyondur.

İspat: *f(x)* iyi bir fonksiyon olsun. Tanıma göre

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx) f(x)dx \tag{1.23}$$

dır. F(k) nın k ya göre n defa kısmi türevleri alınırsa;

$$\left|F^{(n)}(k)\right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{(-ik)^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx) \frac{d^N}{dx^N} \{(-ix)^n f(x)\} dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{|k|^N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^N}{dx^N} \{x^n f(x)\} \right| dx \tag{1.24}$$

dir. N>0 için $|k| \to \infty$ iken $F^{(n)}(k) \to 0$ olduğundan F(k) iyi fonksiyondur.

Teorem 1.3.3

f(x), 1.23 deki Fourier dönüşümüne sahip bir iyi fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun ters Fourier dönüşümü;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(ikx)F(k)dk \tag{1.25}$$

dır.

İspat: Her ε>0 için ;

$$\mathcal{F}\{exp\,(-tx^2)F(-x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-ikx - \varepsilon x^2) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} exp(ixt)\, f(t)dt \right\} dx \tag{1.26}$$

dır. *f* iyi fonksiyon olup integrasyon sırası değiştirilebileceğinden,

$$\mathcal{F}\{exp\,(-tx^2)F(-x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-i(k-t)x - \varepsilon x^2)dx \tag{1.27}$$

elde edilir. Örnek 1.3.2 deki benzer hesaplamalardan,

$$\mathcal{F}\{exp\,(-tx^2)F(-x)\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{(k-t)^2}{4\varepsilon}\right] f(t)\ dt \tag{1.28}$$

elde edilir. (1.28) sağındaki integralde k-t=u dönüşümü ile integral hesaplanırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{(k-t)^2}{4\varepsilon}\right] dt = 1 \tag{1.29}$$

değeri bulunur. Bu değer (1.28) de yerine yazılırsa ;

$$\mathcal{F}\{exp\,(-tx^2)F(-x)\} - f(k).1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(k)] exp\left[-\frac{(k-t)^2}{4\varepsilon}\right] dt \tag{1.30}$$

elde edilir. Öte yandan f iyi fonksiyon olduğundan ,

$$\left|\frac{f(t)-f(k)}{t-k}\right| \leq \max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \tag{1.31}$$

eşitsizliği geçerli olup bu eşitsizlik (1.30) da kullanılırsa;

$$|\mathcal{F}\{exp\,(-tx^2)F(-x)\}-f(k)|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\int_{-\infty}^{\infty}|t-k|exp\left[-\frac{(k-t)^2}{4\varepsilon}\right]dt \tag{1.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\alpha=\frac{k-t}{2\sqrt{e}}$ dönüşümü yapılırsa, $\varepsilon\to 0$ için

$$|\mathcal{F}\{exp(-tx^2)\,F(-x)\}-f(k)|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|4\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|exp\,(-\alpha^2)d\alpha\ \to 0 \tag{1.33}$$

elde edilir. Böylece,

$$f(k)=\mathcal{F}\{F(-x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\,(-ikx)F(-x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\,(ikx)F(x)dx \tag{1.34}$$

bulunur. Burada x↔k dönüşümü yapılarak teorem ispatlanmış olur. Fourier dönüşümü -nün temel teoremleri incelendikten sonra bazı temel özellikleri aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 1.3.4. $\mathcal{F}\{f(x)\}=F(k)\ olmak$ üzere aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

a) $\mathcal{F}\{f(x-a)\}=exp\,(-ika)\mathcal{F}\{f(x)\}$ (1.35)

b) $\mathcal{F}\{f(ax)\}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{k}{a}\right)$ (1.36)

c) $\mathcal{F}\{\overline{f(-x)}\}=\overline{\mathcal{F}\{f(x)\}}$ (1.37)

d) $\mathcal{F}\{exp\,(iax)f(x)\}=F(k-a)$ (1.38)

e) $\mathcal{F}\{F(x)\}=f(-k)$ (1.39)

f) $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ *ve* $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(k)$ olmak üzere;

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)g(k)exp\,(ikx)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(\xi - x)d\xi \qquad (1.40)$$

İspat: Burada yalnızca (f) özelliği ispatlanacaktır. Diğer özellikler de Fourier dönüşümünün tanımı ve genelleştirilmiş integrallerin özellikleri kullanarak benzer biçimde gösterilebilir. [2, s. 29]

$$(f) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(k)g(k)exp(ikx)dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)exp\,(ikx)dk.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik\xi)f(\xi)d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-ik(\xi - x))g(k)dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(\xi - x)d\xi \qquad .$$

Özel olarak (1.40) eşitliğinde x=0 alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir;

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)g(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(\xi)d\xi \qquad . \qquad (1.41)$$

Bu özelliklerin dışında belirtmek gerekir ki eğer *f(x)* kısmi sürekli, diferansiyellenebilir ve mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise $-\infty<k<\infty$ için *F(k)* sınırlı ve süreklidir.[3, s. 31] Ayrıca;

$$\lim_{|k|\to\infty} |F(k)| = 0 \qquad (1.42)$$

dır.1.42 bağıntısı *Riemann-Lebesgue Lemması* olarak bilinir.

Teorem 1.3.5 Eğer *f(x)* sürekli türetilebilir ve $|x| \to \infty$ iken $f(x) \to 0$ oluyor ise

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = (ik)\mathcal{F}\{f(x)\} = ikF(k) \qquad (1.43)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: $f'(x)$ fonksiyonu (1.16) eşitliğinde yazılıp kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx)\, f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)exp\,(-ikx)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx)f(x)dx$$

$$= (ik)F(k)$$

elde edilir. Böylece (1.43) bağıntısı gösterilmiş olur. Eğer *f(x),* n-kez sürekli türetilebilirse ve k=1,2,…,(n-1) için $|x| \to 0$ iken $f^{(k)}(x) \to 0$ oluyorsa n. türevin Fourier dönüşümü, matematik indüksiyon ile,

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (ik)^n F(k) \tag{1.44}$$

biçiminde bulunur.

Tanım 1.3.5 ***Konvolüsyon:***

İntegrallenebilir *f(x)* ve *g(x)* fonksiyonlarının konvolisyonu *(f∗g)* ile gösterilir ve

$$(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi \tag{1.45}$$

dir. Konvolisyon, (1.45)'in sağ yanındaki integralin var olması halinde bu bağıntı aracılığı ile tanımlanır. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ çarpanı keyfidir, konvolisyon hesaplanırken değeri etkilemez

Teorem 1.3.6 (*Konvolüsyon Teoremi)*

$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ *ve* $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(k)$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}\{(f(x) * g(x))\} = F(k).G(k) \tag{1.46}$$

veya denk olarak $f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k).G(k)\}$ (1.47)

yazılabilir. (1.47) bağıntısı;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} exp(ikx)\, F(k)G(k)dk \tag{1.48}$$

biçiminde de verilebilir.

İspat: $\big(f(x) * g(x)\big)$ fonksiyonuna Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{F}\{(f(x) * g(x))\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik\xi)g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik(x-\xi))f(x-\xi)dx \quad (1.49)$$

bulunur. (1.49) da $x - \xi = \eta$ dönüşümü ile,

$$\mathcal{F}\big\{\big(f(x) * g(x)\big)\big\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik\xi)g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik\eta)f(\eta)d\eta$$

$$= G(k)F(k)$$

elde edilir.

Ayrıca konvolisyonun cebirsel özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.(bkz[3])

i. $f*g=g*f$ (değişme) (1.50)

ii. $f*(g*h)=(f*g)*h$ (birleşme) (1.51)

iii. $(\alpha.f+\beta.g)*h=\alpha.(f*h)+\beta.(g*h)$ (dağılma) (1.52)

iv. $f*\sqrt{2\pi}\delta = f = \sqrt{2\pi}\delta * f$ (özdeşlik) (1.53)

Burada 1.50 bağıntısı konvolisyon tanımında x-ξ=t değişken dönüşümü ile kolayca görülür. (1.51) ispatı için;

$$[f * (g * h)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)(g * h)(\xi)d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(\,\xi - t)h(t)dt\,d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) g(\xi - t) d\xi \right] h(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t-\eta) g(\eta) d\eta \right] h(t) dt \qquad (\xi - t = \eta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [(f * g)(x-t)] h(t) dt$$

$$= [(f * g) * h](x)$$

elde edilir. Benzer olarak (1.52) bağıntısı için,

$$\alpha(f * h) + \beta(g * h) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \mathrm{h}(\xi) d\xi + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi) h(\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x-\xi) + \beta g(x-\xi)] h(\xi) d\xi$$

$$= [(\alpha f + \beta g) * h](x)$$

elde edilir. Burada önce *Dirac'ın δ fonksiyonun* tanımını,

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \qquad (1.54)$$

ve bu fonksiyonun,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \qquad (1.55)$$

ile verilen özelliğini hatırlattıktan sonra (1.53) bağıntısı gösterilebilir.

$$f * \sqrt{2\pi}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \sqrt{2\pi} \delta(\xi) d\xi = f(x)$$

olup (1.50) bağıntısından (1.53)'ün sağ tarafındaki eşitlik gerçeklenir.(1.50) bağıntısına göre (1.48) eşitliği tüm reel x'ler için;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} exp\,(ikx)F(k)G(k)dk \tag{1.56}$$

olarak ta yazılabilir.(1.56) da x=0 alınırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(k).G(k)dk \tag{1.57}$$

dır.(1.57) de g(x)=$\overline{f(-x)}$ yazılırsa bu bağıntı,

$G(k) = \mathcal{F}\{g(x)\} = \mathcal{F}\{\overline{f(-x)}\} = \overline{\mathcal{F}\{f(x)\}} = \overline{F(k)}$ olup buradan (1.57) bağıntısı

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{F(k)}dk \tag{1.58}$$

biçimini alır. (1.58) bağıntısı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk\,. \tag{1.59}$$

(1.59) a *parseval bağıntısı* denir. Tam integrallenebilir *f(x)* ve *g(x)* fonksiyonları için $\langle f, g\rangle$ iç çarpımı;

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx \tag{1.60}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece $\|f\|_2$ norm tanımı,

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \tag{1.61}$$

bağıntısı ile verilir.$\mathbb{R}$ de tanımlı tüm kompleks değerli ikinci mertebeden kuvvetleri Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı $L^2(\mathbb{R})$, (1.61) normu ile donatıldığında bir tam uzay olur.

Teorem 1.3.7 ***Genel Parseval Bağıntısı:***

$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(k)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{G(k)}dk \quad . \tag{1.62}$$

İspat: Tanımlardan yararlanarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{G(k)}dk = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-iky)f(y)dy\,\overline{\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ikx)g(x)dx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}dx\int_{-\infty}^{\infty} exp(-ik(x-y))dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(x)}dx\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. Burada *f(x)=g(x)* alınırsa (1.62) bağıntısı, (1.58) bağıntısı ile örtüşür.

Örnek1.3.4 a>0 olmak üzere *f(x)=sinbx* ve *g(x)=exp(-a|x|)* fonksiyonlarının *(f*g)(x)* konvolisyonunu hesaplayalım:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} sinb(x-\xi)\,exp\,(-a|\xi|)d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{0} sinb(x-\xi)\,exp(a\,\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} sinb(x-\xi)\,exp(-a\xi)\,d\xi \tag{1.63}$$

(1.63) eşitliğinin ilk integralinde $\xi \to -\xi$ dönüşümü yapılırsa,

$$(f * g)(x) = \int_{0}^{\infty} [sinb(x+\xi) + sinb(x-\xi]\,exp(-a\xi)\,d\xi$$

olur. Burada sinüs toplam formülünden

$$(f * g)(x) = 2Sinbx \int_0^{\infty} cos(b\xi)\, exp(-a\xi)\, d\xi \qquad (1.64)$$

elde edilir. (1.64) eşitliğindeki integrale arka arkaya iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$(f * g)(x) = \frac{2asinbx}{a^2 + b^2}$$

bağıntısı bulunur.

Tanım 1.3.6 ***Fourier Sinüs ve Fourier Cosinüs dönüşümleri:***

Fourier Sinüs ve Fourier Cosinüs dönüşümleri, (1.14) ve (1.15) de verilen Fourier Sinüs ve Fourier Cosinüs integral formüllerinden elde edilmiştir. Ters dönüşümleri ile birlikte tanımları;

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = F_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} coskxf(x)dx \quad , \qquad (1.63)$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_C(k)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} coskxF_C(k)dk \quad , \qquad (1.64)$$

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} sinkxf(x)dx \quad , \qquad (1.65)$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(k)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} sinkxF_s(k)dk \quad . \qquad (1.66)$$

bağıntıları aracılığı ile verilir. Burada $\mathcal{F}_c$ ve $\mathcal{F}_c^{-1}$ sırasıyla Fourier cosinüs dönüşüm operatörü ve ters dönüşüm operatörleridir. Aynı şekilde $\mathcal{F}_s$ ve $\mathcal{F}_s^{-1}$ de Fourier sinüs dönüşümü ve ters dönüşümünün operatörleridir. Bu operatörler aşağıdaki cebirsel özelliklere sahiptir:

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = F_C(k)$, $\mathcal{F}_s\{f(x)\} = F_s(k)$ ve a>0 olmak üzere;

i. $\mathcal{F}_c\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F_c\left(\frac{k}{a}\right)$, (1.67)

ii. $\mathcal{F}_s\{f(ax)\} = \frac{1}{a}F_s\left(\frac{k}{a}\right)$, (1.68)

iii. $\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = kF_s(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$, (1.69)

iv. $\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -k^2F_c(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$, (1.70)

v. $\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -kF_c(k)$, (1.71)

vi. $\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -k^2F_s(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(0)$. (1.72)

Bu özelliklerin ispatı ilgili kaynaklarda ayrıntılı olarak verilmiştir.[2, s. 93]

Teorem 1.3.8 ***Fourier Kosinüs dönüşümü için konvolisyon teoremi:***

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = F_C(k)$ $\mathcal{F}_c\{g(x)\} = G_c(k)$ olmak üzere;

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_C(k)G_c(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\xi)[g(x+\xi) + g(|x-\xi|)]d\xi \tag{1.73}$$

veya denk olarak;

$$\int_0^\infty F_C(k)G_c(k)coskxdk = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(\xi)[g(x+\xi) + g(|x-\xi|)]d\xi \tag{1.74}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Ters Fourier dönüşümü tanımı kullanılırsa,

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_C(k)G_c(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_C(k)G_c(k)coskxdk$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty G_C(k)coskxdk\int_0^\infty f(\xi)cosk\xi d\xi$$

bulunur. Burada integrasyon sırası değiştirilip ters Fourier dönüşümünün tanımı kullanılırsa,

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_C(k)G_c(k)\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty f(\xi)d\xi \int_0^\infty coskxcosk\xi G_c(k)dk$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)d\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [cosk(x+\xi) + cosk(|x-\xi|)]G_c(k)dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\xi)[g(x+\xi) + g(|x-\xi|)]d\xi$$

bulunarak (1.66) ispatı tamamlanır. (1.67) de x=0 alınırsa,

$$\int_0^\infty F_C(k)G_c(k)dk = \int_0^\infty f(\xi)g(\xi)d\xi = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

olup $g(x)=\overline{f(x)}$ alınırsa $G_c(k) = \overline{F_c(k)}$ yerine yazılırsa,

$$\int_\infty^\infty |F_c(k)|^2 dk = \int_\infty^\infty |f(x)|^2 dx \qquad (1.75)$$

bulunur. 1.68 eşitliğine *Fourier Kosinüs dönüşümünün Parseval bağıntısı* denir. Benzer olarak *Fourier Sinüs dönüşümünün Parseval bağıntısı*;

$$\int_\infty^\infty |F_c(k)|^2 dk = \int_\infty^\infty |f(x)|^2 dx \qquad (1.76)$$

biçiminde bulunur.

Örnek 1.3.3 a>0 için

$$\mathcal{F}_c\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{(a^2+k^2)}$$ olduğunu gösterelim:

$f(x) = e^{-ax}$ fonksiyonu 1.56 tanımında yazılırsa

$$\mathcal{F}_c\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}coskxdx \tag{1.77}$$

olur. Burada *coskx* 'in üstel formuna geçilip,integral hesaplanırsa

$$\mathcal{F}_c\{e^{-ax}\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[e^{-(a-ik)x} + e^{-(a+ik)x}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{a-ik} - \frac{1}{a+ik}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{(a^2+k^2)}$$

bulunur. Şimdi de ters Fourier sinüs dönüşümüne bir örnek verelim:

Örnek 1.3.4

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{1}{k}exp\,(-sk)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right) \tag{1.78}$$

olduğunu gösterelim:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}_s^{-1}\{exp\,(-sk)\} = \int_0^\infty exp(-sk)\,sinkxdk = \frac{x}{s^2+x^2} \tag{1.79}$$

olduğu örnek 1.3.3 den söylenebilir. s→∞ için 1.72 bağıntısının her iki yanı integre edilirse,

$$\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-sk}\,ds\right) sinkxdk = \int_s^\infty \frac{x}{s^2+x^2}ds$$

$$\int_0^\infty \left(-\frac{1}{k}e^{-sk}\Big|_s^\infty\right) sinkxdk = \int_s^\infty \frac{x}{s^2+x^2}ds = Arctan\left(\frac{s}{x}\right)\Big|_s^\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-sk}}{k}sinkxdk = \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{s}{x}\right) = Arctan\left(\frac{x}{s}\right) \tag{1.80}$$

olur. Buradan

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{1}{k}exp\ (-sk)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right)$$

dır.

Örnek1.3.5 a>0 için $f(x) = \frac{1}{x}exp\ (-ax)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümünü bulalım:

Önce $\mathcal{F}_s\{exp\ (-ax)\}$ dönüşümünü hesaplayalım,

$$\mathcal{F}_s\{exp\ (-ax)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty exp\ (-ax)\ sinkxdx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}\left[\int_0^\infty exp\ (-(a-ik)x)dx - \int_0^\infty exp\ (-(a+ik)x)dx\right]$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ik} - \frac{1}{a+ik}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{a^2+k^2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty exp(-ax)\ sinkxdx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{a^2+k^2} \qquad (1.81)$$

bulunur. a→∞ için (1.81) eşitliğinin her iki tarafı a değişkenine göre integre edilirse;

$$\int_a^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty exp\ (-ax)\ sinkxdx\right)da = \int_a^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{a^2+k^2}\right)da$$

bulunur. Burada integrasyon sırasını değiştirerek integraller alınırsa;

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_a^\infty exp\ (-ax)da\right)sinkxdx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)da \quad ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{x}exp\,(-ax)\Big|_a^{\infty}\right)sinkxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{\infty}\left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)da \quad ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}exp\,(-ax)\right)sinkxdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{\infty}\left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)da \quad . \qquad (1.82)$$

(1.82) bağıntısının solundaki integral, $\frac{1}{x}exp\,(-ax)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümünün integrali olduğu görülüp sağ tarafındaki integral alınırsa,

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{x}exp\,(-ax)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{\infty}\left(\frac{k}{k^2\left(1+\left(\frac{a}{k}\right)^2\right)}\right)da$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(Arctan\frac{a}{k}\Big|_a^{\infty}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\frac{a}{k}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(Arctan\frac{k}{a}\right) \qquad (1.83)$$

elde edilir.

1.4 Laplace İntegral Dönüşümü

-∞<x<∞ aralığında tanımlı $f_1(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen Fourier integral formülü ile başlayalım. (1.10) dan

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}dk\,f_1(t)dt \qquad (1.84)$$

biçimindedir. Burada -∞<x<0 için $f_1(x)\equiv 0$ ve x>0 için c sabit sayı olmak üzere

$$f_1(x) = e^{-cx} f(x) H(x) = e^{-cx} f(x) \tag{1.85}$$

yazılırsa (1.84) eşitliğinden,

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{0}^{\infty} e^{-t(c+ik)} f(t) dt \tag{1.86}$$

elde edilir. c+ik=s değişken dönüşümü yapılırsa,

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(s-c)x} ds \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{1.87}$$

olur. Böylece *f(t)* nin alışılagelmiş biçimde *Laplace dönüşümü* aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad Re\ s > 0, \tag{1.88}$$

Burada $\mathcal{L}$, Laplace dönüşüm operatörü, e^{-st} dönüşümün çekirdeği ve s kompleks sayısı dönüşümün değişkenidir. *f(t)*'nin en genel hali için $\bar{f}(s)$ dönüşümü, s'nin Re(s) >a yarı düzleminde analitiktir.(1.88) bağıntısından *ters Laplace* dönüşümü;

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s)\, ds\,, \qquad c > 0 \tag{1.89}$$

olarak tanımlanır.Burada $\mathcal{L}^{-1}$ de $\mathcal{L}$ gibi lineer İntegral öperatörüdür.Laplace dönüşümü tanımı kullanılarak bazı fonksiyonların Laplace dönüşümü örnekleri verilebilir:

Tanım 1.4.1 *Hata fonksiyonu* ve *tümleyen hata fonksiyonu* sırasıyla*;*

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-x^2}\, dx \tag{1.90}$$

$$erfc(t) = 1 - erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t}^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{1.91}$$

bağıntıları ile tanımlanır.

Örnek 1.4.1 $erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım:

(1.88) bağıntısında $f(t)= erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2}\,dx$ yerine yazılsın.İntegrallerin mutlak yakınsaklığından integrasyon sırası değiştirilebilir. $x = \frac{a}{2\sqrt{t}}$ veya $t = \frac{a^2}{4x^2}$ dönüşümü ile

$$\mathcal{L}\left\{erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2}\,dx\right]dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{a^2/4x^2} e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\frac{1}{s}\left\{1 - exp\left(\frac{a^2 s}{4x^2}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{s}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx - \int_0^{\infty} exp\left\{-\left(x^2 + \frac{a^2 s}{4x^2}\right)\right\}dx\right] \qquad (1.92)$$

bulunur. (1.92) de ilk integral hata fonksiyonu tanımından

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1.93)$$

dir. İkinci integral için $\alpha = \frac{a\sqrt{s}}{2}$ olmak üzere;

$$\int_0^{\infty} exp\left\{-\left(x^2 + \frac{a^2 s}{4x^2}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{x^2}\right)exp\left[-\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2\alpha\right] + \int_0^{\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{x^2}\right)exp\left[-\left(x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 - 2\alpha\right]\right]dx$$

dır. Burada $y = \left(x \pm \frac{\alpha}{x}\right)$, $dy = \left(1 \mp \frac{\alpha}{x^2}\right) dx$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^\infty exp\left\{-\left(x^2 + \frac{a^2 s}{4x^2}\right)\right\} dx = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha} \tag{1.94}$$

bulunur. (1.93) ve (1.94) eşitlikleri (1.92) de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}\left\{erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{s}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}\right] = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-a\sqrt{s}}\right] \tag{1.95}$$

elde edilir. Tümleyen hata fonksiyonu için ise

$$\mathcal{L}\left\{erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \tag{1.96}$$

bulunur. Şimdi Laplace dönüşümünün hangi koşullarda tanımlı olacağını inceleyelim:

Tanım 1.4.1 Her t>T için

$$|f(t)| \leq K e^{at} \tag{1.97}$$

olacak şekilde bir T sonlu değeri ve bir K pozitif sabiti bulunuyorsa, *f(t)* fonksiyonuna $t \to \infty$ için e^{at} (a>0) mertebedendir denir ve bunu sembolik olarak

$$f(t) = O(e^{at}) \text{ veya denk olarak } \lim_{t\to\infty} e^{at} |f(t)| = 0 \tag{1.98}$$

şeklinde yazılır. Bu özelliğe sahip *f(t)* fonksiyonlarına $t \to \infty$ için e^{at} *üstel mertebeden-dir* denir.Bu fonksiyonlar $t \to \infty$ için K. e^{at} den daha hızlı büyümediği açıktır.

Teorem 1.4.1 Eğer *f(t)* fonksiyonu her sonlu (0,T) aralığında sürekli veya parçalı sürekli ve e^{at} üstel mertebeden ise o zaman Re s>0 eşitsizliğini sağlayan her s için *f(t)* fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır.

İspat: $\bar{f}(s)$ fonksiyonun mutlak yakınsaklığını gösterelim. *Re(s)>a* için

$$\left| \bar{f}(s) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|dt$$

$$\leq K \int_0^\infty e^{-t(s-a)}dt = \frac{K}{s-a} \tag{1.99}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

(1.99) bağıntısından $\lim_{s\to\infty} \left| \bar{f}(s) \right| = 0$, yani $\lim_{s\to\infty} \bar{f}(s) = 0$ olduğu anlaşılır. Bu sonuç Laplace dönüşümünün limit alma özelliği olarak kabul edilebilir. O halde örneğin, $\bar{f}(s) = s$ veya s^2 hiçbir fonksiyonun Laplace dönüşümü değildir zira $s\to\infty$ için $\bar{f}(s)$ sıfıra gitmez.

Ayrıca, $f(t) = exp(at^2), a > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü yoktur, fonksiyon süreklidir fakat üstel mertebeden değildir, çünkü $\lim_{t\to\infty} exp(at^2 - st) = \infty$ dur.

Şimdi Laplace dönüşümünün bazı temel özelliklerini verelim:

Teorem 1.4.2 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ve *a* keyfi bir sabit olmak üzere;

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \bar{f}(s+a) \tag{1.100}$$

dır.

İspat: Laplace dönüşümü tanımından;

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)dt = \bar{f}(s+a)$$

elde edilir.

Teorem 1.4.3 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ve *a*>0 olmak üzere *H(t-a)* 1.19 da tanımlanan Heaviside birim basamak fonksiyonu için;

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\bar{f}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{1.101}$$

ya da denk olarak

$$\mathcal{L}\{f(t)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\} \tag{1.102}$$

dır.

İspat: Laplace dönüşümü tanımından;

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)H(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

bulunur. Burada $t\text{-}a=\tau$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{sa}}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-as}\bar{f}(s)$$

elde edilir. (1.102) bağıntısı da benzer yöntemle ispatlanır. (1.102) bağıntısında $f(t)=1$ alınırsa

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{1}{\mathrm{s}}exp\,(-sa) \tag{1.103}$$

bulunur.

Teorem 1.4.4 *(Periyodik fonksiyonun Laplace dönüşümü)*

f(t), a periyotlu bir fonksiyon ve $\mathcal{L}\{f(t)\}$ mevcut ise,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-as}} \tag{1.104}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Tanımdan

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^a e^{-st}f(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1.105}$$

olur. (1.105) eşitliğinde ikinci integrale $t=\tau+a$ dönüşümü yapılırsa

$$\bar{f}(s) = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau + a)d\tau \qquad (1.106)$$

elde edilir. f , periyodik ve a periyotlu bir fonksiyon olduğundan $f(\tau + a) = f(\tau)$ dur. Bu (1.106) da yerine yazılırsa ve ikinci integralde $\tau \leftrightarrow t$ değişimi yapılırsa

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + e^{-sa} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1.107)$$

olur. (1.107) eşitliğinde aynı sınıra sahip integralleri sol tarafta birleştirirsek

$$[1 - e^{-sa}]. \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st} f(t)dt$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{\int_0^a e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sa}}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 1.4.5 *(Türevlerin Laplace Dönüşümü)*

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathrm{s}\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\bar{f}(s) - f(0) \qquad (1.108)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0) \qquad (1.109)$$

Daha genel olarak,

$r = 0,1, \dots, n-1$ olmak üzere $f^{(r)}(0)$, $f^{(r)}(t)$ nin *t=0* daki değeri olsun.O zaman,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\bar{f}(s) - s^{\mathrm{n}-1}\mathrm{f}(0) - s^{\mathrm{n}-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (1.110)$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat: $f'(t)$ yi Laplace dönüşümü tanımında kullanarak kısmi integrasyona geçilirse,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$= [e^{-st} f(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= s\bar{f}(s) - f(0)$$

benzer olarak aynı işlemler $f''(t)$ için yapılırsa ve (1.108) kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathrm{s}\mathcal{L}\{f'(t)\} - \mathrm{f}'(0)$$

$$= s\left[s\bar{f}(s) - f(0)\right] - f'(0)$$

$$= s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

eşitliğine ulaşılır.

Benzer işlemler kullanılarak matematik indüksiyonla (1.110) eşitliğine ulaşılır.

İki veya daha fazla değişkene sahip fonksiyonların kısmi türevlerine Laplace dönüşümü uygulandığında benzer sonuçların elde edildiği görülür.Örneğin, *u(x,t),*değişkenleri *x* ve t olan iki değişkenli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \mathrm{s}\bar{u}(x,s) - u(x,0) \qquad (1.111)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2\bar{u}(x,s) - su(x,0) - \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0} \qquad (1.112)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d\bar{u}}{dx}\,, \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} \qquad (1.113)$$

elde edilir.(1.108)-(1.113) arasındaki sonuçlar Laplace dönüşümünün diferansiyelleme işlemini cebirsel işlem haline getirdiği anlamına gelir. Bu anlamda Laplace dönüşümü, diferansiyel denklemlerin veya kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabileceği görülmektedir.

Teorem 1.4.6 Eğer $t\to\infty$ için $f(t)=O(e^{at})$ ise o zaman Laplace integrali,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1.114}$$

$s \geq a_1 > a$ olmak şartı ile s'ye bağlı olarak düzgün yakınsaktır.

İspat: Öncelikle bütün $s \geq a_1$ için $|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-t(s-a)} \leq Ke^{-t(a_1-a)}$ ve $\int_0^\infty e^{-t(a_1-a)}dt$ integraline Weierstrass testi uygulanırsa, Laplace integrali $a_1 > a$ da bütün $s > a$ lar için düzgün yakınsaktır. Bu da ispatı tamamlar.

(1.114) ün düzgün yakınsak olması (1.88) in s'ye bağlı diferansiyelinin alınabilmesi için yeter şarttır. Bu nedenle,

$$\frac{d}{ds}\bar{f}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt$$

$$= -\mathcal{L}\{tf(t)\} \tag{1.115}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\frac{d^2}{ds^2}\bar{f}(s) = (-1)^2\mathcal{L}\{t^2f(t)\} \tag{1.116}$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\bar{f}(s) = (-1)^3\mathcal{L}\{t^3f(t)\} \tag{1.117}$$

elde edilir. Daha genel olarak *Laplace dönüşümünün türevi* aşağıdaki sonuç ile verilir:

Sonuç 1.4.1 Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ise o zaman *n=0,1,2...* için

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s) \tag{1.118}$$

dir.

Teorem 1.4.7 *(Laplace dönüşümünün integrali)* Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ise o zaman,

$$\int_s^\infty \bar{f}(s)ds = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \tag{1.119}$$

dir.

İspat: (1.114) 'ün düzgün yakınsaklığından dolayı $\bar{f}(s)$, (s,∞) aralığında s'ye bağlı olarak integrallenebilirdir. O zaman, Laplace dönüşümünün tanımı ve integrallerin düzgün yakınsaklığı nedeniyle,

$$\int_s^\infty \bar{f}(s)ds = \int_s^\infty ds \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_s^\infty e^{-st}ds = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st}dt$$
$$= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

bulunur.

Tanım 1.4.2 $f(t) * g(t)$ 'ye *f(t)* ve *g(t)'* nin *konvolisyonu* denir ve aşağıdaki integral ile tanımlanır,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (1.122)$$

(1.122) teki integral genellikle *konvolisyon integrali* olarak bilinir ve basitçe $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.8 *(Konvolisyon teoremi)* Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(t)\} = \bar{g}(s)$ ise o zaman,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \qquad (1.120)$$

veya denk olarak,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t) \qquad (1.121)$$

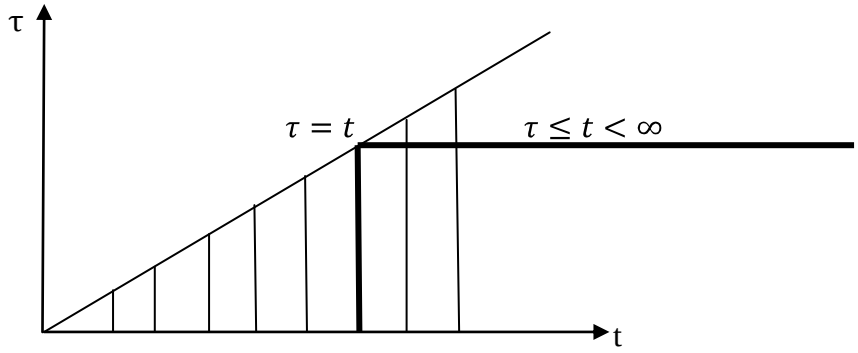
olur.

İspat: (1.122) bağıntısına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (1.123)$$

olur. Burada $\tau - t$ düzlemindeki integrasyon bölgesi şekil 1.1 de gösterilmiştir.(1.123) integrali önce dikey çizgilerin τ ya bağlı olarak, $\tau = 0$ dan τ=t ye kadar işlenmesi ve

sonra t=0 dan sonsuza kadar yatay çizgilerin hareketiyle $\tau = t$ doğrusunun altında kalan bölgeyi kapsar.



Şekil 1.1

Şimdi integralin sırasını değiştirerek önce t=τ dan sonsuza yatay çizgiler boyunca ve sonrada $\tau = 0$ dan yatay çizgilerin dikey olarak yukarı doğru hareketiyle integral alınırsa (1.123) integrali,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_{t=\tau}^\infty e^{-st} f(t-\tau)d\tau$$

biçimini alır. Burada *t*- $\tau = x$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(x+\tau)} f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} g(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \bar{f}(s)\bar{g}(s)$$

olur ve ispat tamamlanır.

a, b, sabit ve $f^{*n} = f * f * \dots f$ ile tanımlanmak üzere, konvolisyon, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $f(t) * \{g(t) * h(t)\} = \{f(t) * g(t)\} * h(t)$, (1.124)

ii. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$, (1.125)

iii. $f(t) * \{ag(t) + bh(t)\} = af(t) * g(t) + bf(t) * h(t)$, (1.126)

iv. $f(t) * \{a.g(t)\} = \{af(t)\} * g(t) = a\{f(t) * g(t)\}$, (1.127)

v. $\mathcal{L}\{f_1 * f_1 * f_3 * \dots f_n\} = \overline{f_1}(s)\overline{f_2}(s) \dots \overline{f_n}(s)$, (1.128)

vi. $\mathcal{L}\{f^{*n}\} = \{\bar{f}(s)\}^n$. (1.129)

(1.124) ve (1.125) özelliğinden dolayı Laplace dönüşümlü bütün fonksiyonların kümesi * işlemine göre yarı grup oluşturur. Grup oluşturamamasının nedeni ise $f * g^{-1}$ işleminin Laplace dönüşümünün her zaman tanımlı olmamasıdır.

Teorem 1.4.9 *(integrallerin Laplace dönüşümü)* $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ ise o zaman,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{\bar{f}(s)}{s} \tag{1.130}$$

dir.

İspat: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ alınırsa $g(0) = 0$ ve Leibnitz teoreminden $g'(t) = f(t)$ bulunur. O halde

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\bar{g}(s) - g(0) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$$

dir. Buradan

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$$

eşitliğine ulaşılır.

Örnek 1.4.2

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}\{(e^{-at} - e^{-bt})\}\right] = \log\left(\frac{s+b}{s+a}\right) \tag{1.131}$$

eşitliğini gösterelim;

$f(t) = (e^{-at} - e^{-bt})$ alınırsa,

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(e^{-at} - e^{-bt})dt = \int_0^\infty e^{-t(s+a)} - e^{-t(s+b)}dt = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

olur. (1.119) dan

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) ds$$

$$= ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)_s^\infty = \lim_{s\to\infty} ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right) - ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$$

$$= ln1 - ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right) = ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right) \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 1.4.3

$\mathcal{L}\left\{2t\int_0^t \frac{e^{-4x}}{x} sin5x dx\right\}$ dönüşümünü ilgili teoremleri kullanarak hesaplayalım;

[3, s. 150, (1)] den,

$$\mathcal{L}\{Sin5t\} = \frac{5}{25+s^2}$$

dir.(1.100) den,

$$\mathcal{L}\{e^{-4t}Sin5t\} = \frac{5}{25+(s+4)^2}$$

bulunur.(1.119) dan,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-4t}Sin5t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{5}{25+(s+4)^2} ds = \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{s+4}{5}\right)$$

olur. Şimdi (1.130) dan,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{-4x}Sin5x}{x} dx\right\} = \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s} Arctan\left(\frac{s+4}{5}\right)$$

bulunur. (1.115)den ve $\mathcal{L}$ operatörünün lineerlik özelliğinden,

$$\mathcal{L}\left\{2t\int_0^t \frac{e^{-4x}Sin5x}{x} dx\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\pi}{s} - \frac{2}{s} Arctan\left(\frac{s+4}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{s^2} - \frac{2}{s^2} Arctan\left(\frac{s+4}{5}\right) + \frac{10}{[25+(s+4)^2].s}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 1.4.4 Si(t) sinüs integrali ,

$$Si(t) = \int_0^t \frac{sinx}{x} dx \qquad (1.132)$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. (1.130) dan yararlanarak Si(at) nin Laplace dönüşümünü hesaplayalım:

önce $f(t) = sinat$ kabul edip edip $\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ olup (1.119) dan

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{sinat}{t}\right\} = a\int_s^\infty \frac{ds}{s^2+a^2} = \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{a}{s}\right) = Arctan\left(\frac{s}{a}\right)$$

bulunur. Buradan (1.130) kullanılarak,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{sinax}{x} dx\right\} = \frac{1}{s} Arctan\left(\frac{s}{a}\right)$$

elde edilir.

Örnek 1.4.5 : $cost * e^{2t}$ konvolisyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$cost * e^{2t} = \int_0^t \cos(t-\tau) e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}\left\{e^{i(t-\tau)} + e^{-i(t-\tau)}\right\} d\tau$$

$$= \left[\frac{e^{i(t-\tau)+2\tau}}{2(2-i)} + \frac{e^{-i(t-\tau)+2\tau}}{2(2+i)}\right] = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}(sint - 2cost)\,.$$

1.4.1 Ters Laplace dönüşümü bulma yöntemleri

Verilen bir *f(t)* fonksiyonunun Laplace dönşümünün, doğrudan integral alma işlemi ve yukarıda bir kısmı verilen teoremlerle Laplace dönüşüm tablosu kullanılarak bulunduğunu biliyoruz. Fakat uygulamada karşılaşılan problemlerde Laplace dönüşümünün yanı sıra ters Laplace dönüşümünün de hesabı oldukça önemlidir. Zira gerek diferansiyel denklemler gerek integral denklemlerde Laplace metoduyla çözümlerde ters Laplace dönüşümü kullanma gereği vardır. Bu nedenle bu kısımda ters Laplace dönüşümünün hesaplama yöntemlerinden bahsedilecektir. Bütün bu metodlardaki ana amaç

bilinmeyen fonksiyon *f(t)* nin verilen Laplace dönüşümü $\bar{f}(s)$ olmak üzere *f(t)* yi hesaplamaktır. Bu esasen $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \bar{f}(s)$ integralinin çözümü ile ilgilidir.Bu karmaşık hesaplar gerektirdiği gibi, basit hallerde ters dönüşümü Laplace dönüşüm tablosundan yararlanarak da bulunabilir. Bununla birlikte (1.89) bağıntısında verilen Ters dönüşüm operatöründen faydalanılabilir.

Genelde ters Laplace dönüşümü aşağıda sıralanan dört yöntemle bulunur;

i. Basit kesirlere ayırma yöntemi
ii. Konvolisyon teoremi
iii. Ters Laplace integralinin kontur integrasyonu
iv. Heaviside'ın genişleme teoremi

(i) Basit kesirlere ayıma yöntemi: Eğer,

$$\bar{f}(s) = \frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}$$

şeklinde iki polinomun bölümü şeklinde ve $der[\bar{p}(s)] \leq der[\bar{q}(s)]$ ise $\bar{f}(s)$ basit kesirlere ayrılarak Laplace dönüşüm tablosundan yararlanarak ters Laplace dönüşümü bulunur.

Örnek 1.4.6 a ve b sabitler olmak üzere,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{sinat}{a} - \frac{sinbt}{b}\right) \qquad (1.133)$$

olduğunu gösterelim.

$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{A}{s^2+a^2} + \frac{B}{s^2+b^2}$ eşitliğinde işlemler yapıldığında A=$\frac{1}{b^2-a^2}$ ve B=$\frac{-1}{b^2-a^2}$

bulunur. Buradan ters Laplace dönüşümüne geçilir ve $\mathcal{L}^{-1}$ operatörünün lineerliği kullanılarak Laplace dönüşüm tablosundan faydalanılırsa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{s^2+b^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{sinat}{a} - \frac{sinbt}{b}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

(ii)Konvolisyon teoremi yöntemi

(1.120) de verilen $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = f(t) * g(t)$ bağıntısını bir örnekle açıklayalım:

Örnek 1.4.7 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}\right\} = erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ eşitiliğini konvolisyon yöntemi ile gösterelim. [2, sf. 153 , ör. 3.6.2. b] den

$$\mathcal{L}\left\{\frac{exp\ (-\frac{a^2}{4t})}{\sqrt{\pi t^3}}\right\} = \frac{2}{a}exp\ (-a\sqrt{s})$$

dir.Ayrıca $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ eşitliğini göz önüne alırsak konvolüsyon teoremi ile,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}\right\} = 1 * \frac{exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)}{\sqrt{\pi t^3}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{exp\left(-\frac{a^2}{4\tau}\right)}{\tau^{3/2}}d\,\tau$$

olur. Burada $\frac{a}{2\sqrt{t}} = x$ dönüşümü yapılırsa ,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} exp(-x^2)\,dx = erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})$$

bulunur.

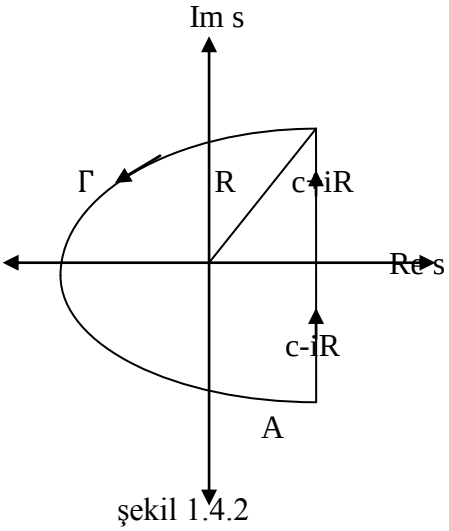
(iii) Ters Laplace integralinin kontur integrasyonu yöntemi:

(1.89) bağıntısında ters Laplace dönüşümü c uygun reel sabit ve $\bar{f}(s)$ sağ yarı düzlem Re(s)>a da kompleks değişkenin analitik fonksiyonu olmak üzere kompleks integral formülü,

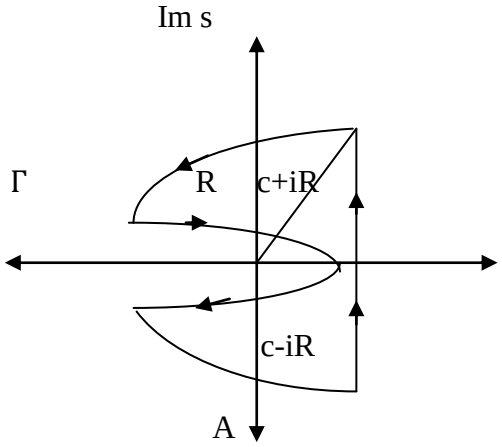
$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\bar{f}(s)\,ds$$

olarak tanımlanmıştı.(1.89)'a değer verilmesi $\bar{f}(s)$'nin singüler noktalarının niteliğine bağlıdır. Genellikle $\bar{f}(s)$ sonlu veya sayılabilir sonsuz kutupsal singüler noktalar ile tek değerli fonksiyondur. Çoğu kez dallanma noktaları vardır.integrasyonun yönü s=c+iR ,

$-\infty<R<\infty$ denklemi ile kompleks s düzleminde L düz doğrusudur(bkz.şekil 1.4.2). Re(s) =c, L doğrusunun solunda kalır. Bu Doğruya *Bromwich konturu(çevresi)* denir. Uygulamada şekil 1.4.2 de gösterildiği gibi *Bromwich çevresi* R yarı çaplı çember yayı ile kapatılmıştır ve integrasyonun eğrisini sonsuza genişletmek için $R\to\infty$ iken limit alınmış böylece $\bar{f}(s)$ nin bütün singüler noktaları integrasyon kontur'unun içine yayılmıştır. $\bar{f}(s)$'nin orijinde dallanma noktası olduğu zaman şekil 1.4.3 de gösterildiği gibi negatif reel eksen boyunca bir kesik ve orijinin etrafını çevreleyen bir γ küçük yarı çemberi oluşturarak değiştirilmiş integrasyon konturunu çizeriz.



şekil 1.4.2



şekil 1.4.3

Her iki durumda da Cauchy rezidü teoremi,

$$\int_L e^{st}\bar{f}(s)ds + \int_\Gamma e^{st}\bar{f}(s)\,ds = \int_C e^{st}\bar{f}(s)\,ds$$

$$= 2\pi i \sum_{\alpha_i} Res\{e^{-st}\bar{f}(s): \alpha_i, \bar{f}(s) \text{ nin kutup noktaları}\} \quad (1.133)$$

integraline değer vermek için kullanılır. $R\to\infty$ alınırsa Γ nın her tarafında integral sıfır olma eğilimindedir ve bu bir çok problem için doğru olur. Sonuç olarak (1.89),

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\bar{f}(s)\,ds$$

$$= 2\pi i \sum_{\alpha_i} Res\{e^{-st}\bar{f}(s): \alpha_i, \bar{f}(s) \text{ nin kutup noktaları}\} \quad (1.134)$$

şekline indirgenir. Şimdi bu yöntemi bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1.4.8 Eğer $\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ ise

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\bar{f}(s)\, ds = cosat$$

olduğunu rezidü yöntemi ile hesaplayalım:

Açıkca, integrallenen fonksiyonun $s=\pm ia$ da iki basit kutubu vardır ve bu kutuplarda kalanlar (rezidüler),

$$R_1 = \{s = ia' \text{da } e^{st}\bar{f}(s)' \text{nin rezidüsü}\}$$

$$= \lim_{s\to ia}(s-ia)\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)} = \frac{1}{2}e^{iat}$$

$$R_2 = \{s = -ia' \text{da } e^{st}\bar{f}(s)' \text{nin rezidüsü}\}$$

$$\lim_{s\to ia}(s+ia)\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)} = \frac{1}{2}e^{-iat}$$

dır.Böylece,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\bar{f}(s)\, ds = R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\left(e^{iat} + e^{-iat}\right) = cosat$$

elde edilir.

(iv) Heaviside'ın Genişleme teoremi:

Maclaurin kuvvet serisine açılımı

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{t^r}{r!} \qquad (1.135)$$

olan *f(t)* fonksiyonunun Laplace dönüşümünün $\bar{f}(s)$ olduğunu kabul edelim. Açılımın Laplace dönüşümünü aldığımızda,bu değer,

$$\bar{f}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{s^{r+1}} \tag{1.136}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan (1.136) açılımından (1.135)'i elde edebiliriz. Bu tür açılımlar küçük çapta, çözümün işleyişini belirlemek açısından kullanışlıdır. Bundan başka Tauberian teoremlerini ispatlamak için alternatif bir yol sağlar.[3, s. 168]

Teorem 1.4.10 *(Heaviside'ın genişleme teoremi)* Eğer $\bar{p}(s)$ ve $\bar{q}(s)$ s'ye bağlı bir polinom ve $\bar{q}(s)$ nin derecesi $\bar{p}(s)$ nin derecesinden yüksek olmak üzere $\bar{f}(s) = \frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}$ ise o zaman a_k lar $\bar{q}(s)$ nin birbirinden farklı kökleri olmak üzere,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{p}(a_k)}{\bar{q}'(a_k)} exp\ (t\, a_k) \tag{1.137}$$

şeklindedir.

İspat: Genelliği bozmadan $\bar{q}(s)$ polinomunun baş katsayısını 1 sayısı olarak alabiliriz. O zaman,

$$\bar{q}(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_k)\dots(s-\alpha_n) \tag{1.138}$$

yazılabilir. Basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılarak, A_k keyfi sabit olmak üzere

$$\bar{f}(s) = \frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(s-\alpha_k)} \tag{1.139}$$

dır. (1.138) den

$$\bar{p}(s) = \sum_{k=1}^{n} A_k(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_{k-1})(s-\alpha_{k+1})\dots(s-\alpha_n)$$

bulunur.$s = \alpha_k$ yerine koyması $k = 1,2,\dots,n$ olmak üzere

$$\bar{p}(\alpha_k) = A_k(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\dots(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n) \tag{1.140}$$

eşitliğini verir. (1.138)'in türevi

$$\bar{q}'(s) = \sum_{1}^{n} (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_{k-1})(s-\alpha_{k+1})\dots(s-\alpha_n)$$

bağıntısı ile verilir. Buradan,

$$\bar{q}'^{(\alpha_k)} = \sum_{1}^{n} (\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n) \quad (1.141)$$

(1.140) ve (1.141) den

$$A_k = \frac{\bar{p}(a_k)}{\bar{q}'(a_k)}$$

bulunur ve böylece

$$\frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{p}(a_k)}{\bar{q}'(a_k)} \frac{1}{(s-a_k)} \quad (1.142)$$

elde edilir. (1.142) nin ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{p}(a_k)}{\bar{q}'(a_k)} exp\,(t\,a_k) \quad .$$

eşitliğine ulaşılır ve ispat biter. Bu teoremle ilgili bir örnek verelim:

Örnek 1.4.9 Heaviside kuvvet serisi açılımı kullanarak $0 < x < 1$ ve $s > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{sinhx\sqrt{s}}{sinh\sqrt{s}}\right\}$$

değerini hesaplayalım;

$$\frac{1}{s}\frac{sinhx\sqrt{s}}{sinh\sqrt{s}} = \frac{1}{s}\frac{e^{x\sqrt{s}} - e^{-x\sqrt{s}}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}$$

$$= \frac{1}{s}\frac{e^{-(1-x)\sqrt{s}} - e^{-(1+x)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\sqrt{s}}}$$

$$= \frac{1}{s}\left[e^{-(1-x)\sqrt{s}} - e^{-(1+x)\sqrt{s}}\right]\left(1 - e^{-2\sqrt{s}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{s}\left[e^{-(1-x)\sqrt{s}} - e^{-(1+x)\sqrt{s}}\right] \sum_{n=0}^{\infty} exp\,(-2n\sqrt{s})$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left[exp\{-(1-x+2n)\sqrt{s}\} - exp\{-(1+x+2n)\sqrt{s}\}\right]$$

bulunur. Buradan örnek 1.4.7 faydalanarak,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{sinhx\sqrt{s}}{sinh\sqrt{s}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left[exp\{-(1-x+2n)\sqrt{s}\} - exp\{-(1+x+2n)\sqrt{s}\}\right]\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[erfc\left(\frac{1-x+2n}{2\sqrt{t}}\right) - erfc\left(\frac{1+x+2n}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

bulunur.

1.5 Mellin İntegral Dönüşümü

Bu kısımda Mellin dönüşümü incelenecektir. İlk olarak Fourier dönüşümünden Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümü elde edilerek birkaç örnek ile temel işlemsel özellikleri verilecektir.

Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümünün elde edileceği Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü (1.16) ve(1.17) de

$$\mathcal{F}\{g(\xi)\} = G(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(-ik\xi)g(\xi)d\xi$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\,(ikx)F(k)dk$$

olarak verilmişti. *c* sabit olamak üzere $exp(\xi) = x$ ve *ik=c-p* dönüşümleri (1.16) ve (1.17) de uygulanırsa

$$G(ip - ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^{p-c-1}\, g(logx)dx \qquad (1.143)$$

$$g(logx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p}\, G(ip - ic)dp \qquad (1.144)$$

elde edilir. O halde $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-c} g(logx) \equiv f(x)$ ve $G(ip - ic) \equiv \tilde{f}(p)$

olarak yazılırsa *f(x)'in Mellin* ve *ters Mellin dönüşümleri* sırasıyla şöyle tanımlanır;

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)dx \quad , \qquad (1.145)$$

$$\mathcal{M}^{-1}\{\tilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p}\, \tilde{f}(p)dp \quad . \qquad (1.146)$$

Burada *f(x)*, (0,∞) aralığında reel değerli bir fonksiyon ve Mellin dönüşümünün değişkeni olan *p* bir kompleks sayıdır. Bazen *f(x)'*in Mellin dönüşümü, $\tilde{f}(p) = \mathcal{M}[f(x), p]$ ile gösterilir.$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^{-1}$ operatörlerinin lineer olduğu açıktır.

Örnek 1.5.1 Gamma fonksiyonu tanımı,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t} dt \qquad (1.147)$$

ve Beta fonksiyonu tanımı ,

$$\beta(m,n) = \int_0^{1} t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt \qquad (1.148)$$

olmak üzere Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasındaki

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad , \qquad (1.149)$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sinp\pi} \qquad (1.150)$$

bağıntıları dikkate alınarak

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \frac{\pi}{sinp\pi} \quad , \quad 0 < Re\, p < 1 \qquad (1.151)$$

olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \tilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\frac{1}{1+x}\,dx$$

integralinde $x = \frac{1}{1-t}$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{x}{1+x}$ olup bu değerler yerine yazılırsa

$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{(1-p)-1}\,dt = \beta(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sinp\pi}$ bulunur.

Örnek 1.5.2 *Re(p) > 1* olmak üzere,

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \tag{1.152}$$

ile tanımlanan *Riemann-zeta fonksiyonu* için eğer

$f(x) = (e^x - 1)^{-1}$ ise $\tilde{f}(p) = \mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\} = \Gamma(p)\zeta(p)$ olduğunu gösterelim:

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{M}\{(e^x-1)^{-1}\} = \int_0^\infty x^{p-1}\frac{1}{e^x-1}\,dx \text{ olup}$$

Burada

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \text{ sonucundan } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x-1} \text{ türetilip kullanılırsa}$$

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p)}{n^p} = \Gamma(p)\zeta(p) \tag{1.153}$$

bulunur.

Mellin dönüşümünün bazı işlemsel özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerin ispatları Fourier ve Laplace dönüşümlerinde uygulanılan tekniklere benzer biçimde kolayca yapılabilir.Bu ispatlar detaylı biçimde $[2, \text{s. } 343-348]$ bulunabilir.

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p) \text{ olmak üzere, aşağıdaki özellikler vardır:}$$

i. *(skaler değişme özelliği)*

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = a^{-p}\tilde{f}(p) \quad , a > 0 \tag{1.154}$$

ii. *(Kaydırma özelliği)*

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\} = \tilde{f}(p+a) \tag{1.155}$$

iii. *(Mellin dönüşümünün türevi)*

$$\mathcal{M}\{f(x^a)\} = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right) \tag{1.156}$$

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\right\} = \tilde{f}(1-p) \tag{1.157}$$

$$\frac{d}{dp^n}\tilde{f}(p) = \mathcal{M}\{(logx)^n f(x)\}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{1.158}$$

iv. *(Türevlerin Mellin dönüşümü)*

$x \to 0$ ve $x \to \infty$ olduğunda $[x^{p-1}f(x)]$ fonksiyonu sıfıra yakınsıyorsa,

$$\mathcal{M}\{f'(x)\} = -(p-1)\tilde{f}(p-1) \tag{1.159}$$

$$\mathcal{M}\{f''(x)\} = (p-1)(p-2)\tilde{f}(p-2) \tag{1.160}$$

dir. Bu bağıntılar n. türev için genelleştirilirse,

$$\mathcal{M}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\mathcal{M}[f(x), p-n] = \tilde{f}(p-n) \tag{1.161}$$

bulunur.Ayrıca ,

$\mathcal{M}\{xf'(x)\} = -p\tilde{f}(p)$ ve $\mathcal{M}\{x^2 f''(x)\} = (-1)^2 p(p+1)\tilde{f}(p)$ ya da

daha genel olarak ,

$$\mathcal{M}\left\{x^n f^{(n)}(x)\right\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p) \quad \text{olur.} \tag{1.162}$$

v. *(Diferansiyel operatörlerin Mellin dönüşümleri)*

$$\mathcal{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\right] = \mathcal{M}[x^2 f''(x) + xf'(x)] = (-1)^2 p^2 \tilde{f}(p)$$

ve daha genel olarak,

$$\mathcal{M}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right] = (-1)^n p^n \tilde{f}(p) \tag{1.163}$$

dir.

vi. *(İntegrallerin Mellin dönüşümü)*

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = -\frac{1}{p}\tilde{f}(p+1)$$

dir. Daha genel olarak,

$$\mathcal{M}\{I_n f(x)\} = \mathcal{M}\left\{\int_0^x I_{n-1} f(t)dt\right\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\tilde{f}(P+n) \tag{1.164}$$

dir. Burada

$$I_n f(x) = \int_0^x I_{n-1} f(t)dt \tag{1.165}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm *f(x)*'in 0'dan *x*'e n defa integre edilmiş halidir.

vii. *(Konvolisyon özelliği)*

$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ve $\mathcal{M}\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{M}\left[\int_0^\infty f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}\right] = \tilde{f}(p)\tilde{g}(p) \tag{1.166}$$

$$\mathcal{M}\{f(x) \circ g(x)\} = \mathcal{M}\left[\int_0^\infty f(x\xi) g(\xi)\, d\xi\right] = \tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p) \tag{1.167}$$

dir. Burada $\circ$ işleminin değişme özelliği yoktur.(1.167) de $x=s$ alınması halinde $\tilde{g}(p) = \Gamma(p)$ seçilirse,

$$\mathcal{M}^{-1}\{\tilde{f}(1-p)\Gamma(p)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) \tag{1.168}$$

sonucuna ulaşılır.

viii. *(Parseval özelliği)*

$\mathcal{M}\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$ ve $\mathcal{M}\{g(x)\} = \tilde{g}(p)$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\,\tilde{g}(p-s)ds \tag{1.169}$$

ya da bir başka ifadeyle

$$\int_0^\infty x^{p-1}f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\,\tilde{g}(p-s)ds \tag{1.170}$$

olup burada *p=1* alınırsa Mellin dönüşümünün Parseval formülünü elde ederiz.

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s)\,\tilde{g}(1-s)ds \tag{1.171}$$

1.6 Stieltjes Dönüşümü

$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ Laplace dönüşümünü, *f(t)*'nin Stieltjes dönüşümünün tanımına göre kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(s)\} = \tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-sz}\bar{f}(s)ds = \int_0^\infty e^{-sz}ds\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1.172}$$

Burada integral sırasını değiştirerek içteki integrali hesaplarsak,

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z}dt \tag{1.173}$$

elde ederiz. $0 \le t < \infty$ da integrallenebilir *f(t)* parçalı sürekli fonksiyonun *Stieltjes dönüşümü* $\tilde{f}(z)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{S}\{f(t)\} = \tilde{f}(z) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z}dt \tag{1.174}$$

ile tanımlanır. Kompleks düzlemde *z=x* ve *x* pozitifse

$$\mathcal{S}\{f(t)\} = \tilde{f}(x) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{t+x}\,dt \qquad (1.175)$$

olur.(1.175)'in *x*'e göre türevi alınırsa ,

$$\frac{d^n}{dx^n}\tilde{f}(x) = (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+x)^{n+1}}\,dt, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (1.176)$$

elde edilir.

Stieltjes dönüşümünün tersi şöyle ifade edilir:

Eğer *f(t),* $0 \le t \le T$ aralığındaki her pozitif T için integrallenebilirse ve (1.175)'deki integral gibi *x>0* için yakınsak ise o zaman $\tilde{f}(z)$ negatif reel eksende olmayan her z karmaşık sayısı için $(z \neq 0)$ için vardır ve bu değer

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\left[\tilde{f}(-x-i\varepsilon) - \tilde{f}(-x+i\varepsilon)\right] = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \qquad (1.177)$$

$f(x+0)$ ve $f(x-0)$ daki her pozitif *x* için vardır.

Örnek 1.6.1 $f(t) = (t+a)^{-1}$ fonksiyonun Stieltjes dönüşümünü bulalım;

Tanımdan

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{(t+a)(t+z)} = \frac{1}{(a-z)}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{t+a} - \frac{1}{t+z}\right)dt\right] = \frac{1}{(a-z)}\,log\left|\frac{a}{z}\right| \qquad (1.178)$$

bulunur.

Örnek 1.6.2 $f(t) = t^{\alpha-1}$ fonksiyonun Stieltjes dönüşümünü bulalım;

$$\tilde{f}(z) = \mathcal{S}\{t^{\alpha-1}\} = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(t+z)}\,dt \text{ olur. Burada } \frac{t}{z} = x \text{ dönüşümü yapılırsa}$$

$$\tilde{f}(z) = z^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)}\,dx = z^{\alpha-1}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+x)}\right\} \text{ olup, örnek 1.5.1 (1.151)den}$$

$$\mathcal{S}\{t^{\alpha-1}\} = z^{\alpha-1}\frac{\pi}{sin\alpha\pi} \tag{1.179}$$

bulunur.

Örnek 1.6.3

$$J_v(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}t\right)^{v+2m}}{m!\,\Gamma(v+m+1)} \tag{1.180}$$

ile tanımlanan *v. mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu* olmak üzere, $J_v^2(t)$'nin Stieltjes dönüşümü,

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} \frac{J_v^2(t)}{t+x}dt \tag{1.181}$$

olup bu dönüşümün

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p}\tilde{f}(p)\,\tilde{g}(1-p)dp \tag{1.182}$$

ile verilen *Parseval bağıntısını* sağladığını gösterelim;

(1.181) bağıntısına $t=ux$, $f(u) = J_v^2(u)$ ve $g(u) = (1+u)^{-1}$ dönüşümleri uygulanırsa

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} f(xu)\,g(u)du \tag{1.183}$$

elde edilir.x'e göre (1.183) bağıntısının Mellin dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{M}\{\tilde{f}(x), p\} = \tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p)$$

bulunur. Öte taraftan $[7, \text{s. } 98]$ den,

$$\tilde{f}(p) = \frac{2^{p-1}\Gamma\left(v+\frac{p}{2}\right)\pi\text{cosec}(\pi\text{p})}{\left\{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)\right\}^2\Gamma\left(1+v-\frac{p}{2}\right)\Gamma(p)}$$

$$\tilde{g}(1-p) = \pi\text{cosec}(\pi\text{p})$$

eşitlikleri yerine yazılıp ters Mellin dönüşümü uygulanırsa (1.182) eşitliği gerçeklenir.

Teorem 1.6.1 Aşağıdaki bağıntılar $\mathcal{S}\{f(t)\} = \tilde{f}(z)$ olması halinde doğrudur:

i. $\mathcal{S}\{f(t+a)\} = \tilde{f}(z-a)$, (1.184)

ii. $\mathcal{S}\{f(at)\} = \tilde{f}(az)$, $a > 0$, (1.185)

iii. sağ taraftaki integralin var olması koşulu ile

$$\mathcal{S}\{tf(t)\} = -z\tilde{f}(z) + \int_0^\infty f(t)dt \,, \tag{1.186}$$

iv. $\mathcal{S}\left\{\frac{f(t)}{t+a}\right\} = \frac{1}{a-z}\left[\tilde{f}(z) - f(a)\right]$, (1.187)

v. $\mathcal{S}\left\{\frac{1}{t}f\left(\frac{a}{t}\right)\right\} = \frac{1}{z}\tilde{f}\left(\frac{a}{z}\right)$, $a > 0$. (1.189)

İspat: İddiaların sol tarafı Stieltjes tanımında yerine yazılırsa,

(i) $\mathcal{S}\{f(t+a)\} = \int_0^\infty \frac{f(t+a)}{t+z}dt$ olup $t + a = \tau$, dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{S}\{f(t+a)\} = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau + (z-a)}d\tau = \tilde{f}(z-a) \quad \text{bulunur.}$$

(ii) $\mathcal{S}\{f(at)\} = \int_0^\infty \frac{f(at)}{t+z}dt$ olup at $= \tau$ dönüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{S}\{f(at)\} = \int_0^\infty \frac{f(at)}{t+z}dt = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau + az}d\tau = \tilde{f}(az) \quad \text{bulunur.}$$

(iii) $\mathcal{S}\{tf(t)\} = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{t+z}dt = \int_0^\infty \frac{(t+z-z)f(t)}{t+z}dt = \int_0^\infty f(t)\,dt - z\int_0^\infty \frac{f(t)}{t+z}dt$

$$= -z\tilde{f}(z) + \int_0^\infty f(t)\,dt \quad \text{bulunur.}$$

(iv) $\mathcal{S}\left\{\frac{f(t)}{t+a}\right\} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+a)(t+z)}dt = \frac{1}{a-z}\int_0^\infty \left[\frac{1}{t+z} - \frac{1}{t+a}\right] f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{a-z}\left[\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)\right] \text{ bulunur.}$$

(v) $\mathcal{S}\left\{\frac{1}{t}f\left(\frac{a}{t}\right)\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{t(t+z)} f\left(\frac{a}{t}\right) dt$ olup $\frac{a}{t} = \tau$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{S}\left\{\frac{1}{t}f\left(\frac{a}{t}\right)\right\} = \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\left(\tau + \frac{a}{z}\right)} d\tau = \frac{1}{z}\tilde{f}\left(\frac{a}{z}\right) \quad \text{bulunur.}$$

Teorem 1.6.2 (*Türevlerin Stieltjes Dönüşümü*) $\mathcal{S}\{f(t)\} = \tilde{f}(z)$ olmak üzere,

$$\mathcal{S}\{f'(t)\} = -\frac{1}{z}f(0) - \frac{d}{dz}\tilde{f}(z) \ , \tag{1.190}$$

$$\mathcal{S}\{f''(t)\} = -\left[\frac{1}{z}f'(0) + \frac{1}{z^2}f(0)\right] - \frac{d^2}{dz^2}\tilde{f}(z) \ . \tag{1.191}$$

dır. Genel halde n. türevin stieltjes dönüşümü,

$$\mathcal{S}\{f^{(n)}(t)\} = -\left[\frac{1}{z}f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{z^2}f^{(n-2)}(0) + \cdots + \frac{1}{z^n}f(0)\right] - \frac{d^n}{dz^n}\tilde{f}(z) \tag{1.192}$$

ile verilir.

İspat: Tanım ve kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\mathcal{S}\{f'(t)\} = \int_0^\infty \frac{f'(t)}{t+z}dt = \left[\frac{f(t)}{t+z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+z)^2}dt = -\frac{1}{z}f(0) - \frac{d}{dz}\tilde{f}(z)$$

bulunur. Benzer olarak (1.191) eşitliğine ulaşılabilir. Matematik indüksiyonla (1.192) eşitliği kolayca gösterilebilir.

Tanım1.6.1 *(Genelleştirilmiş Stieltjes Dönüşümü)*

$|argz| < \pi$ için bir *f(t)* fonksiyonunun genelleştirilmiş Stieltjes dönüşümü;

$$\mathcal{S}_v\{f(t)\} = \tilde{f}(z,v) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+z)^v}dt \tag{1.193}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Örnek 1.6.4 Re a > 0 olmak üzere $f(t) = t^{\alpha-1}$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Stieltjes dönüşümünü bulalım:

(1.193) tanımında *f(t)* fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\mathcal{S}_v\{t^{\alpha-1}\} = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(t+z)^v}dt = z^{-v}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{-v}dt$$

olur. Burada *t=zu* dönüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{S}_v\{t^{\alpha-1}\} = z^{\alpha-v}\int_0^\infty u^{\alpha-1}(1+u)^{-v}du \qquad (1.194)$$

elde edilir. (1.194) integralinde $u = \frac{x}{1-x}$ döünüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{S}_v\{t^{\alpha-1}\} = z^{\alpha-v}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{v-\alpha-1}dx$$

ve (1.148) tanımından da

$$\mathcal{S}_v\{t^{\alpha-1}\} = z^{\alpha-v}\beta(\alpha, v-a) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(v-\alpha)}{\Gamma(v)}z^{\alpha-v} \qquad (1.195)$$

bulunur.

Teorem1.6.3 *(Genelleştirilmiş Stieltjes Dönüşümünün temel özellikleri)*

$\mathcal{S}_v\{f(t)\} = \tilde{f}(z)$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

i. $\mathcal{S}_v\{f(at)\} = a^{v-1}\tilde{f}(az)\ \ , a > 0$ (1.196)

ii. $\mathcal{S}_v\{tf(t)\} = \tilde{f}(z, v-1) - z\tilde{f}(z, v)$, (1.197)

iii. $f(t) \to 0$ iken t $\to \infty$ oluyorsa, $\mathcal{S}_v\{f'(t)\} = v\tilde{f}(z, v+1) - z^{-v}f(0)$ (1.198)

iv. $Re(v) > 1$ olmak üzere, $\mathcal{S}_v\left\{\int_0^\infty f(x)dx\right\} = (v-1)^{-1}\tilde{f}(z, v-1)$ (1.199)

dir.

İspat: (1.193) tanımı kullanılırsa,

(i) $\mathcal{S}_v\{f(at)\} = \int_0^\infty \frac{f(at)}{(t+z)^v}\,dt$ olup, burada $at = x$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{S}_v\{f(at)\} = a^{v-1}\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+az)^v}\,dx = a^{v-1}\tilde{f}(az) \text{ bulunur.}$$

(ii) $\mathcal{S}_v\{tf(t)\} = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{(t+z)^v}\,dt = \int_0^\infty \frac{(t+z-z)f(t)}{(t+z)^v}\,dt$

$$= \int_0^\infty \frac{f(t)dt}{(t+z)^{v-1}} - z\int_0^\infty \frac{f(t)dt}{(t+z)^v} = \tilde{f}(z, v-1) - z\tilde{f}(z,v) \quad \text{bulunur.}$$

(iii) $\mathcal{S}_v\{f'(t)\} = \int_0^\infty \frac{f'(t)}{(t+z)^v}\,dt$ integralinde kısmi integrasyon yapılırsa,

$$\mathcal{S}_v\{f'(t)\} = \left[\frac{f(t)}{(t+z)^v}\right]_0^\infty + v\int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+z)^{v+1}}\,dt$$

$$= v\tilde{f}(z, v+1) - z^{-v}f(0) \text{ bulunur.}$$

(iv) $g(t) = \int_0^\infty f(x)dx$ alınırsa $g'(t) = f(t)$ ve $g(0) = 0$ olup

$$\mathcal{S}_v\{f(t), v\} = \mathcal{S}_v\{g'^{(t)}, v\} \text{ olup (1.198)'den}$$

$$\mathcal{S}_v\{f(t), v\} = v\tilde{g}(z, v+1) - z^{-v}g(0) = v\,\mathcal{S}_v\{g(t), v+1\}$$

bulunur. Burada $v \to v-1$ değişimi ile (1.194) bulunur.

1.7 Önemli Bazı Özel fonksiyonlar ve İntegral Dönüşümler

Bu kısımda önceki kısımlarda bahsedilen Fourier, Fourier sinüs, Fourier kosinüs, Laplace, Mellin, Stieltjes dönüşümleri haricinde uygulamada bunlar kadar sık olmasa da karşılaşılan Hankel, Weyl,κ, Laguare, gibi dönüşümler ve bu dönüşümlerin çekirdeği olarak kullanılan özel fonksiyonların tanımları verilecektir. Bu dönüşümler hakkında ayrıntılı bilgiler [2] de bulunabilir.

Tanım1.7.1 Bir *f(x)* fonksiyonun *v.*mertebeden *Hankel dönüşümü* $\mathcal{H}_v\{f(x), y\}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{H}_v\{f(x), y\} = \int_0^\infty f(x) j_v(xy)(xy)^{1/2} dx \tag{1.200}$$

şeklinde tanımlanır.Burada $j_v(xy)$, (1.180) de tanımlanan *v.*mertebeden 1.tür Bessel fonksiyonudur.

Tanım 1.7.2 *I.tür modifiye Bessel fonksiyonu* $I_v(z)$ ile gösterilir ve

$$I_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{v+2m}}{m!\,\Gamma(v+m+1)} \tag{1.201}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.7.3 *v.*mertebeden *üçüncü tür modifiye bessel fonksiyonu* $K_v(z)$ ile gösterilir ve

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(z) - I_v(z)}{sin\pi v} \tag{1.202}$$

şeklinde tanımlanır. $K_v(z)$ fonksiyunu *Macdonald fonksiyonu* olarak ta bilinir.Ayrıca ([16] 'dan)

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{-1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{1.203}$$

dir.

Tanım 1.7.4 Bir *f(x)* fonksiyonunun $v.mertebeden\ \mathcal{K}$ dönüşümü ,

$$\mathcal{K}_v\{f(x), y\} = \int_0^\infty f(x) K_v(xy)(xy)^{1/2} dx \tag{1.204}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $K_v(x)$ fonksiyonu *v*.mertebeden üçüncü tür modifiye bessel fonksiyonudur.

Tanım 1.7.5 $\Gamma(\mu)$, (1.147) de tanımlanan gamma fonksiyonu olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun μ. mertebeden Weyl dönüşümü $\mathcal{W}_\mu\{f(x), y\}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{W}_\mu\{f(x), y\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty (x-y)^{\mu-1} f(x)dx \tag{1.205}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 1.7.6 Bir *f(x)* fonksiyonun *Laguarre dönüşümü* $\ell\{f(x); n\}$ ile gösterilir ve

$$\ell\{f(x); n\} = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \, L_n^{(\alpha)}(x) f(x)dx \tag{1.206}$$

şeklinde tanımlanır.Burada $L_n^{(\alpha)}(x)$ *Laguarre Polinomu* olup,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{-x}x^\alpha}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}) \quad , n = 0,1,2,\dots, \alpha > -1 \tag{1.207}$$

bağıntısı ile verilir.

Tanım1.7.8 Bir *f(x)* fonksiyonun *Widder potansiyel dönüşümü* $\mathcal{P}\{f(x); y\}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{P}\{f(x); y\} = \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2} dx \tag{1.208}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.7.9 Bir *f(x)* fonksiyonun ötelenmiş üstel integral dönüşümü $\mathcal{E}_{4,1}\{f(x); y\}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{E}_{4,1}\{f(x); y\} = \int_0^\infty x^3 \, exp(x^4y^4) \, E_1(x^4y^4) f(x)dx \tag{1.209}$$

olarak tanımlanır$[4, s.403, (51)]$. Burada $E_1(x)$ üstel integral fonksiyonu olup

$$E_1(x) = -Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \qquad (1.210)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.7.10 Bir *f(x)* fonksiyonunun Glasser dönüşümü $\mathcal{G}\{f(x); y\}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{G}\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx \qquad (1.211)$$

bağıntısı ile ifade edilir.

BÖLÜM 2: METARYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilgili makaleler taranarak son yıllarda tanımlanan, birinci bölümde incelediğimiz bazı integral dönüşümlerin bir anlamda genelleştirilmişi olan $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4, \mathcal{F}_{s,2}$, $\mathcal{F}_{c,2}, \mathcal{P}_4, \mathcal{K}_{v,2}$ ve $\mathcal{H}_{v,2}$ dönüşümlerinin tanımları verilerek bunların genelleştirildiği integral dönüşümler ile bağlantıları gösterilecektir. Son yıllarda tanımlanan bu dönüşümlerin integral tablosunu geliştirme amaçlı Parseval-Goldstein tipi teoremler ispatlanacaktır.

2.1 Bazı integral Dönüşümlerinin Genelleştirilmesi

Tanım 2.1 Laplace dönüşümünün bir nevi genelleştirmesi olan $\mathcal{L}_2$ integral dönüşümü Yürekli ve Sadek tarafından [14];

$$\mathcal{L}_2\{f(x);y\} = \int_0^\infty xf(x)exp(-x^2y^2)dx \tag{2.1}$$

$\mathcal{L}_4$ ve $\mathcal{P}_4$ integral dönüşümleri ise Dernek-Srivastava-Yürekli [4] tarafından

$$\mathcal{L}_4\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^3f(x)exp(-x^4y^4)dx \tag{2.2}$$

biçimindeki integral bağıntıları ile tanımlanmıştır.

Tanım 2.2 Potansiyel dönüşümün bir genelleştirmesi olan $\mathcal{P}_4$ integral dönüşümü [4],

$$\mathcal{P}_4\{f(x);y\} = \int_0^\infty \frac{x^3f(x)}{x^4+y^4}dx \tag{2.3}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3 $\mathcal{F}_s$ ve $\mathcal{F}_c$ dönüşümlerinin genelleştirmesi olan $\mathcal{F}_{s,2}$ ve $\mathcal{F}_{c,2}$ dönüşümleri[4]

$$\mathcal{F}_{s,2}\{f(x),y\} = \int_0^\infty xsin(x^2y^2)f(x)dx \quad , \tag{2.4}$$

$$\mathcal{F}_{c,2}\{f(x);y\} = \int_0^\infty xcos(x^2y^2)f(x)dx \quad . \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4 $\mathcal{K}_v$ dönüşümünün genelleştirmesi olan $\mathcal{K}_{v,2}$ dönüşümü;

$$\mathcal{K}_{v,2}\{f(x);y\} = \int_0^\infty (x^2y)K_v(x^2y^2)f(x)dx \tag{2.6}$$

olarak tanımlanır[4]. Burada $K_v(x)$ fonksiyonu üçüncü tür modifiye Bessel fonksiyonudur.

Tanım 2.5 *v.*mertebeden Hankel dönüşümünün genelleştirmesi olan $\mathcal{H}_{v,2}$ dönüşümü;

$$\mathcal{H}_{v,2}\{f(x);y\} = \int_0^\infty (x^2y)j_v(x^2y^2)f(x)dx \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada dönüşümün çekirdeği olan $j_v(x)$ fonksiyonu *v.* mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur.

2.2 Genelleştirilmiş İntegral Dönüşümleri Arasındaki Bağıntılar:

Bu kısımda yukarıda tanımları verilen $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4, \mathcal{F}_{s,2}, \mathcal{F}_{c,2}, \mathcal{P}_4$ genelleştirilmiş integral dönüşümleri arasında ve Laplace, Fourier sinüs,Fourier cosinüs, potansiyel dönüşümü ve Stieltjes dönüşümlerini birbirlerine bağlayan bağıntılar verilecektir.

Teorem 2.2.1 Bir *f(x)* fonksiyonun Laplace dönüşümü ile $\mathcal{L}_4$ ve $\mathcal{L}_2$ dönüşümleri arasında

i. $\mathcal{L}_4\{f(x);y\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{f\left(x^{1/4}\right);y^4\right\}$, (2.8)

ii. $\mathcal{L}_2\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$, (2.9)

iii. $\mathcal{L}_4\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_2\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$. (2.10)

bağıntıları gerçeklenir.

İspat:İspatların benzerliği sebebiyle sadece (i) 'nin ispatı verilecektir.

(i) $\mathcal{L}_4$ dönüşümü tanımında $x^4 = u$ dönüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{L}_4\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^3 f(x) exp(-x^4y^4)dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty f\left(u^{1/4}\right) ex\,p(-uy^4)\,du$$

olur.Burada tekrar $u \leftrightarrow x$ değişimi ile (1.88) tanımından

$$\mathcal{L}_4\{f(x);y\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{f\left(x^{1/4}\right);y^4\right\} \quad \text{elde edilir.}$$

(ii) ve (iii) için benzer biçimde sırasıyla $\mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{L}_4$ dönüşümlerine $x^2 = u$ dönüşümü yapılarak (2.9) ve (2.10) kolaylıkla bulunur.

Teorem 2.2.2 Bir *f(x)* fonksiyonunun potansiyel dönüşümü ile $\mathcal{P}_4$ ve Stieltjes dönüşümleri arasında

i. $\mathcal{P}_4\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$, (2.11)

ii. $\mathcal{P}\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{S}\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$, (2.12)

iii. $\mathcal{P}_4\{f(x);y\} = \frac{1}{4}\mathcal{S}\left\{f\left(x^{1/4}\right);y^4\right\}$. (2.13)

bağıntıları vardır.

İspat: (i) $\mathcal{P}_4$ dönüşümü tanımında $x^2 = u$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathcal{P}_4\{f(x);y\} = \int_0^\infty \frac{x^3 f(x)}{x^4+y^4}dx = \int_0^\infty \frac{x^2 f(x)xdx}{(x^2)^2+(y^2)^2} = \int_0^\infty \frac{uf\left(u^{1/2}\right)}{u^2+(y^2)^2}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{xf(x^{1/2})}{x^2+(y^2)^2}dx = \frac{1}{2}\mathcal{P}\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$$

bulunur.Benzer işlemlerle (ii) de de $x^2 = u$ dönüşümü, .(iii) de ise $x^4 = u$ dönüşümü yapılarak (2.12) ve (2.13) kolayca gösterilir.

Teorem 2.2.3 Bir *f(x)* fonksiyonunun Fourier sinüs ve Fourier Cosinüs dönüşümleri tanımlı olsun,(2.4) ve (2.5) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{s,2}$ ve $\mathcal{F}_{c,2}$ dönüşümleri arasında;

i. $\mathcal{F}_{s,2}\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_s\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$, (2.14)

ii. $\mathcal{F}_{c,2}\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_c\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\}$. (2.15)

bağıntıları vardır.

İspat: İspatların benzerliği açısından sadece (i) ispatlanacaktır. $\mathcal{F}_{s,2}$ integral dönüşümü tanımında $x^2 = u$ dönüşümü uygulanılırsa;

$$\mathcal{F}_{s,2}\{f(x),y\} = \int_0^\infty xsin(x^2y^2)f(x)dx = \int_0^\infty sin(uy^2)f\left(u^{1/2}\right)\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{F}_s\left\{f\left(x^{1/2}\right);y^2\right\} \text{ bulunur.}$$

2.3.İntegral Dönüşümler Üzerine Parseval-Goldstein Tipi Teoremler

Teorem 2.3.1 $\mathcal{L}\{f(y);x\} = F(x)$, $\mathcal{L}\{g(u);x\} = G(x)$ ve $\mathcal{S}\{g(u);y\} = S(y)$ olsun.Eğer;

$$\int_0^\infty |F(x)G(x)|dx < \infty \quad (2.16)$$

$$\int_0^\infty |e^{-xy}G(x)|dx < \infty \quad (2.17)$$

koşulları sağlanırsa,

$$\int_0^\infty F(x)G(x)dx = \int_0^\infty f(x)\mathcal{S}(x)dx \quad (2.18)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: (2.18) de $\mathcal{L}\{f(y);x\}=F(x)$, $\mathcal{L}\{g(u);x\}=G(x)$ ifadeleri yerine yazılırsa (2.16) ve (2.17) deki mutlak yakınsaklık koşullarından integrasyon sıraları değiştirilebilir. O halde,

$$\int_0^\infty F(x)G(x)dx=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-xy}f(y)dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-xu}g(u)du\right)dx$$

$$=\int_0^\infty f(y)\left[\int_0^\infty e^{-xy}\left(\int_0^\infty e^{-xu}g(u)du\right)dx\right]dy$$

$$=\int_0^\infty f(y)\left[\int_0^\infty g(u)\left(\int_0^\infty e^{-x(y+u)}dx\right)du\right]dy$$

$$=\int_0^\infty f(y)\left(\int_0^\infty \frac{g(u)}{u+y}du\right)dy=\int_0^\infty f(y)(\mathcal{S}\{g(u);y\})dy$$

olur. Burada $y\leftrightarrow x$ değişimi yapılırak,

$$\int_0^\infty F(x)G(x)dx=\int_0^\infty f(x)\mathcal{S}(x)dx \quad \text{eşitliğine ulaşılır.}$$

Teorem 2.3.2 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{f(x);z\};y\}=\frac{1}{2}\mathcal{P}\{f(x);y\} \tag{2.19}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: (2.19) bağıntısında $\mathcal{L}_2$ tanımı kullanılırak integrallerin mutlak yakınsaklığından integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{f(x);z\};y\}=\int_0^\infty ze^{-y^2z^2}\left(\int_0^\infty xe^{-x^2z^2}f(x)dx\right)$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\int_0^\infty ze^{-(x^2+y^2)z^2}dz\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\mathcal{P}\{f(x);y\}$$

bulunur.

Teorem 2.3.3 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile

$$\int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{f(y);x\}\mathcal{L}_2\{g(z);x\}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty yf(y)\,\mathcal{P}\{g(z);y\}dy \qquad (2.20)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: (2.20) bağıntısında $\mathcal{L}_2$ dönüşümü tanımı kullanılıp,integrallerin mutlak yakınsaklığından integrasyon sırası değiştirilirse;

$$\int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{f(y);x\}\mathcal{L}_2\{g(z);x\}\,dx = \int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{g(z);x\}\left(\int_0^\infty ye^{-x^2y^2}f(y)dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty yf(y)\left(\int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{g(z);x\}e^{-x^2y^2}dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty yf(y)\,[\mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{g(z);x\};y\}]dy \qquad (2.21)$$

bulunur. (2.21) de (2.19) bağıntısı kullanılırsa;

$$\int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{f(y);x\}\mathcal{L}_2\{g(z);x\}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty yf(y)\,\mathcal{P}\{g(z);y\}dy$$

eşitliğine ulaşılır.

Lemma 2.3.1 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında uygun bir *f(t)* fonksiyonu için

$$\mathcal{L}\{\mathcal{F}_s\{f(t);u\};x\} = \mathcal{P}\{f(t);x\} \tag{2.22}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: (2.22) eşitliğinde Laplace ve Fourier sinüs integral dönüşümlerinin tanımlarını integrallerin mutlak yakınsaklığı nedeni ile integrasyon sırası değiştirilerek yazılırsa,

$$\mathcal{L}\{\mathcal{F}_s\{f(t);u\};x\} = \int_0^\infty e^{-ux}(\mathcal{F}_s\{f(t);u\})\,du$$

$$= \int_0^\infty e^{-ux}\left(\int_0^\infty sin(ut)f(t)dt\right)du$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty e^{-ux}sin(ut)du\right)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)(\mathcal{L}\{\sin(ut)\,;x\})dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{tf(t)}{t^2+x^2}dt = \mathcal{P}\{f(t);x\}$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 2.3.4 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında aşağıdaki bağıntı gerçeklenir:

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t);x\}\mathcal{F}_s\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty f(x)\mathcal{P}\{g(u);x\}\,dx \tag{2.23}$$

İspat: (2.23) ifadesinde Laplace dönüşüm tanımı yazılırsa ve integrallerin mutlak yakınsaklığı kullanılarak integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t);x\}\mathcal{F}_s\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty \mathcal{F}_s\{g(u);x\}\left(\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt\right)dx$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty e^{-xt}\,\mathcal{F}_s\{g(u);x\}dx\right)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,\mathcal{L}\{\mathcal{F}_s\{g(u);x\};t\}dt$$

bulunur. Burada (2.22) bağıntısından $\mathcal{L}\{\mathcal{F}_s\{g(u);x\};t\} = \mathcal{P}\{g(u);t\}$ olduğu görülür ve (2.23) bağıntısını kullanılarak $t \to x$ değişimi yapılırsa,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t);x\}\mathcal{F}_s\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty f(x)\mathcal{P}\{g(u);x\}\,dx$$

bulunur.

Teorem 2.3.5 $Re\ v > -1$ olmak üzere;

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}f(y);z\right\} = 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\mathcal{L}_2\left\{x^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \qquad (2.24)$$

bağıntısı integrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile sağlanır.

İspat: Teorem 2.3.3 de g fonksiyonunu $g(u) = u^v j_v(zu)$ seçilirse ve yerine koymak üzere $\mathcal{L}_2\{g(u);x\}$ ve $\mathcal{P}\{g(u);y\}$ değerlerini hesaplarsak;

(2.9) eşitliğinden, $\mathcal{L}_2\{g(u);x\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{g\left(u^{1/2}\right);x^2\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{u^{v/2}j_v(zu^{1/2});x^2\}$

olur.[5, s. 185, (30)] dan,

$$\mathcal{L}_2\{g(u);x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^v x^{-2v-2}exp\left(-\frac{z^2}{4x^2}\right) \qquad (2.25)$$

bulunur. $\mathcal{P}\{g(u);y\}$ için (2.19) bağıntısı kullanılırsa,

$$\mathcal{P}\{g(u);y\} = 2\mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{g(u);x\},y\} = 2\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{v} x^{-2v-2} exp\left(-\frac{z^2}{4x^2}\right);y\right\}$$

olur. Burada tekrar (2.9) eşitliğinden faydalanırsak $[5, s.149, (20)]$ den,

$$\mathcal{P}\{g(u);y\} = \left(\frac{z}{2}\right)^{v}\frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{x^{v-1}exp\left(-\frac{z^2}{4x^2}\right);y^2\right\} = y^v K_v(zy) \qquad (2.26)$$

bulunur. (2.25) ve (2.26) eşitlikleri teorem 2.3.3 de yerine yazılırsa,

$$\int_0^{\infty} x\mathcal{L}_2\{f(y);x\}.\left(\frac{z}{2}\right)^{v} x^{-2v-2}exp\left(-\frac{z^2}{4x^2}\right)dx = \int_0^{\infty} yf(y)\,y^v K_v(zy)dy \qquad (2.27)$$

olur.(2.27) eşitliğinin sol tarafındaki integralde $t = \frac{1}{2x}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^{\infty} y^{v+1}f(y)\,K_v(zy)dy = z^v 2^{-v}\int_{\infty}^{0} 2^{2v+1}t^{2v+1}exp\,(-z^2t^2)\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2t}\right\}\left(-\frac{1}{2}t^{-2}dt\right)$$

$$= z^v 2^v \int_0^{\infty} t.exp\,(-z^2t^2)\left(t^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2t}\right\}\right)dt$$

$$= z^v 2^v \mathcal{L}_2\left\{t^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2t}\right\};z\right\}$$

bulunur.Burada her iki taraf $\sqrt{z}$ ile çarpılırsa,

$$\int_0^{\infty} \sqrt{zy}.\,y^{v+\frac{1}{2}}f(y)\,K_v(zy)dy = z^{v+\frac{1}{2}}2^v\mathcal{L}_2\left\{t^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2t}\right\};z\right\} \qquad (2.28)$$

(2.28) eşitliğinin sol tarafı, (1.204)'de verilen $\mathcal{K}_v$ dönüşümünün tanımını sağlar. Sağ tarafta da t→*x* değişimi yapılırsa (2.24) eşitliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.6 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$(i) \qquad \mathcal{L}\{yf(y);z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{x}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \ , \tag{2.29}$$

$$(ii) \qquad \mathcal{L}\{yf(y);z\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{x^3}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \ . \tag{2.30}$$

İspat: (2.24) bağıntısında $v = \frac{1}{2}$ alınırsa ,

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}\{yf(y);z\} = 2^{1/2} z\mathcal{L}_2\left\{x^{-1}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \tag{2.31}$$

elde edilir. (2.31) eşitliğinin sol tarafı (1.204) de göre yazılırsa ,

$$\int_0^\infty \sqrt{\mathrm{zy}}.\, K_{\frac{1}{2}}(zy) yf(y)dy = 2^{1/2} z\mathcal{L}_2\left\{x^{-1}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \tag{2.32}$$

elde edilir. (1.203) eşitliğinden $K_{\frac{1}{2}}(zy) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{zy}}}\, e^{-zy}$ dir. Bu değer (2.32) de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty e^{-zy}\, yf(y)dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{x}\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \tag{2.33}$$

bulunur.(2.33) eşitliğinin sol tarafı Laplace dönüşümü tanımı olduğu görülüp (2.29) eşitliğine ulaşılır.

Teoremin (ii) bağıntısı da (2.24) te $v = -\frac{1}{2}$ alınarak benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.3.7 Teorem 2.3.6 daki şartların sağlanması durumunda aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$(i) \qquad \int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du \ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty g(y)\mathcal{L}\{xf(x);y\}\, dy \quad , \tag{2.34}$$

$$(ii) \qquad \int_0^\infty \frac{1}{u^2}\mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du \ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty g(y)\mathcal{L}\{xf(x);y\}\, dy. \tag{2.35}$$

İspat: (2.34) eşitliğinin sol tarafında (2.1) deki $\mathcal{L}_2$ dönüşümünün tanımı kullanılırsa,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du = \int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\left(\int_0^\infty yexp(-u^2y^2)g(y)dy\right)du$$

bağıntısı yazılabilir. Mutlak yakınsaklıktan integrasyon sırası değiştirilirse ,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du = \int_0^\infty yg(y)\left(\int_0^\infty uexp(-u^2y^2)\frac{1}{u}\mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\right)dy$$

elde edilir. Burada (2.1) tanımı uyarınca,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du = \int_0^\infty yg(y)\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{u}\mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\};y\right\}dy \qquad (2.36)$$

bağıntısı elde edilir. (2.36) eşitliğinin sol tarafındaki integralde (2.29) bağıntısından

$$\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{u}\mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\};y\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y}\mathcal{L}\{xf(x);y\} \qquad (2.37)$$

yazılırsa,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\}\mathcal{L}_2\{g(y);u\}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty g(y)\mathcal{L}\{xf(x);y\}\,dy\,.$$

eşitliğine ulaşılır ve teoremin (i) bağıntısı ispatlanmış olur.

Teoremin (ii) bağıntısı, (2.36) da (2.29) yerine (2.30) kullanılıp benzer işlemler yapılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 2.3.8: İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile aşağıdaki iterasyon bağıntısı doğrudur:

$$\mathcal{L}_4^2\{f(x);y\} = \mathcal{L}_4\{\mathcal{L}_4\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{4}\mathcal{P}_4\{f(x);y\} \quad . \qquad (2.38)$$

İspat: (2.2) de verilen $\mathcal{L}_4$ dönüşümünün tanımını arka arkaya uygulayıp integrallerin mutlak yakınsaklığı kullanılarak integrasyon sırası değiştirilirse (2.3) tanımından,

$$\mathcal{L}_4\{\mathcal{L}_4\{f(x);u\};y\} = \int_0^\infty u^3 exp(-u^4y^4)\left(\int_0^\infty x^3 exp(-u^4x^4)\, f(x)dx\right)du \qquad (2.39)$$

$$= \int_0^\infty x^3\left(\int_0^\infty u^3 exp\left(-u^4(x^4+y^4)\right)du\right)f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x^3\left(\frac{1}{4(x^4+y^4)}\right)f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^3 f(x)dx}{x^4+y^4}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{P}_4\{f(x);y\}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.9 Aşağıdaki Parseval-Goldstein tipi bağıntılar integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında doğrudur:

$$(i) \quad \int_0^\infty y^3\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\mathcal{L}_4\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3 f(x)\,\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx \quad , \qquad (2.40)$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty y^3\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\mathcal{L}_4\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^3 g(u)\,\mathcal{P}_4\{f(x);u\}du \quad , \qquad (2.41)$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty x^3 f(x)\,\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty u^3 g(u)\,\mathcal{P}_4\{f(x);u\}du \quad . \qquad (2.42)$$

İspat: İspatların benzerliğinden yalnızca (i) şıkkını ispatlanacaktır. (2.2)'de verilen $\mathcal{L}_4$ tanımı kullanıp, mutlak yakınsaklıktan integrasyon sıralarını değiştirerek (2.38) bağıntısı kullanılırsa,

$$\int_0^\infty y^3 \mathcal{L}_4\{f(x);y\}\mathcal{L}_4\{g(u);y\}\,dy = \int_0^\infty y^3 \mathcal{L}_4\{g(u);y\}\left(\int_0^\infty x^3 exp(-x^4y^4)\, f(x)dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty x^3\, f(x)\left(\int_0^\infty y^3 exp(-x^4y^4)\, \mathcal{L}_4\{g(u);y\}dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty x^3\, f(x)(\mathcal{L}_4\{\mathcal{L}_4\{g(u);y\};x\})dx$$

$$= \int_0^\infty x^3\, f(x)\left(\frac{1}{4}\mathcal{P}_4\{g(u);x\}\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3 f(x)\, \mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx$$

elde edilir. (2.41) eşitliği de benzer işlemlerle gösterilir. (2.42) eşitliği, (2.40) ve (2.41) eşitliklerinin sol taraflarının eşitliğinden sağ taraflarının eşitlenmesi ile bulunur.

Teorem 2.3.10 $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ sırasıyla $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ fonksiyonlarının Widder potansiyel dönüşümü olsunlar.İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile

$$\int_0^\infty x\, f_1(x)\Phi_2(x)dx = \int_0^\infty x\, f_2(x)\Phi_1(x)dx \qquad (2.43)$$

dir.

İspat: Teoremin varsayımı nedeniyle

$$f_j(x) = \int_0^\infty \frac{t\Phi_j(t)}{x^2+t^2}dt \quad , \qquad j = 1,2$$

yazılabilir. Buradan,

$$\int_0^\infty x\, f_1(x)\Phi_2(x)dx = \int_0^\infty x\, \Phi_2(x)dx.\int_0^\infty \frac{t\Phi_1(t)}{x^2+t^2}dt$$

olup integrallerin mutlak yakınsaklığı kullanılarak integrasyon sırası değiştirilirse;

$$\int_0^\infty x\, f_1(x)\Phi_2(x)dx = \int_0^\infty t\Phi_1(t)dt \int_0^\infty \frac{x\Phi_2(x)}{x^2+t^2}dx = \int_0^\infty t\, f_2(t)\Phi_1(t)dt$$

bulunur ve ispat tamamlanır. (2.43) eşitliği, aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\int_0^\infty xf(x)\,\mathcal{P}\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty ug(u)\,\mathcal{P}\{f(x);u\}du \quad . \tag{2.44}$$

Teorem 2.3.11 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile aşağıdaki Parseval-Goldstein tipi bağıntı doğrudur:

$$\int_0^\infty x\,\mathcal{L}_2\left\{f(y);\sqrt{x^2+y^2}\right\}\mathcal{L}_2\{g(u);x\}dx = \frac{1}{2}\mathcal{L}_2\{f(y)\mathcal{P}\{g(u);y\};z\} \quad . \tag{2.45}$$

İspat: (2.20) bağıntısını notasyona uyumluluk açısından

$$\int_0^\infty x\,\mathcal{L}_2\{h(y);x\}\mathcal{L}_2\{g(u);x\}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty yh(y)\,\mathcal{P}\{g(u);y\}dy \tag{2.46}$$

olarak tekrar yazılır ve burada

$$h(y) = \mathrm{e}^{-y^2z^2} f(y) \quad , \tag{2.47}$$

alınırsa (2.1) tanımından

$$\mathcal{L}_2\{h(y);x\} = \mathcal{L}_2\{exp(-y^2z^2)f(y)\,;x\} = \int_0^\infty ye^{-x^2y^2}e^{-y^2z^2} f(y)dy$$

$$= \int_0^\infty ye^{-y^2(x^2+z^2)} f(y)dy = \int_0^\infty ye^{-y^2\sqrt{x^2+z^2}^2} f(y)dy$$

$$= \mathcal{L}_2\left\{f(y);\sqrt{x^2+z^2}\right\} \tag{2.48}$$

bulunur. (2.47) ve (2.48) eşitlikleri (2.46) da yerine yazılırsa (2.1) tanımından;

$$\int_0^\infty x\,\mathcal{L}_2\left\{f(y);\sqrt{x^2+z^2}\right\}\mathcal{L}_2\{g(u);x\}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty ye^{-y^2z^2}\,f(y)\mathcal{P}\{g(u);y\}dy$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}_2\{f(y)\mathcal{P}\{g(u);y\};z\} \text{ bulunur.}$$

Teorem 2.3.12 Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin var olması durumunda ve mutlak yakınsaklık koşulu altında doğrudur:

$$(i)\ \mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{s,2}\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_4\{f(x);y\} \quad , \tag{2.49}$$

$$(ii)\ \mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{L}_2\{f(x);u\};y\} = \frac{y^2}{2}\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};y\right\} \quad , \tag{2.50}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{c,2}\{f(x);u\};y\} = \frac{y^2}{2}\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};y\right\} \quad , \tag{2.51}$$

$$\text{(iv)}\ \mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{L}_2\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_4\{f(x);y\} \quad , \tag{2.52}$$

$$\text{(v)}\ \mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{s,2}\{f(x);u\};y\} = \mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{L}_2\{f(x);u\};y\} \quad , \tag{2.53}$$

$$\text{(vi)}\ \mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{L}_2\{f(x);u\};y\} = \mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{c,2}\{f(x);u\};y\} \quad . \tag{2.54}$$

İspat: Burada sadece (2.49) bağıntısının ispatı yapılacaktır. (2.50),(2.51) ve (2.52)'nin ispatları benzer yoldan yapılabilir. (2.53) ve (2.54) ise (2.49), (2.50) ve (2.51), (2.52) bağıntılarından çıkmaktadır.(2.49) bağıntısı için $\mathcal{L}_2$ tanımında $\mathcal{F}_{s,2}$ yazılır ve mutlak yakınsaklıktan integrallerin sırası değiştirilip sırasıyla (2.1) tanımı ve (2.9) özelliği kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{s,2}\{f(x);u\};y\} = \int_0^\infty u\,exp(-u^2y^2)\left(\int_0^\infty x\,sin(u^2x^2)f(x)dx\right)du$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\int_0^\infty uexp(-u^2y^2)\,sin(u^2x^2)du\right)dx$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\,(\mathcal{L}_2\{\sin(u^2x^2)\,;y\})dx$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin(ux^2)\,;y^2\}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{(x^4+y^4)}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^3f(x)}{x^4+y^4}dx = \frac{1}{2}\mathcal{P}_4\{f(x);y\}$$

bulunur.

Teorem 2.3.13 İntegrallerin mutlak yakınsak olması koşulu ile aşağıdaki Parseval-Goldstein tipi bağıntılar doğrudur:

$$(i) \quad \int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty xf(x)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx \quad , \qquad (2.55)$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^3g(u)\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du \quad , \qquad (2.56)$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty ug(u)\mathcal{P}_4\{f(x);u\}du \quad , \qquad (2.57)$$

$$(iv) \quad \int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3f(x)\mathcal{P}_4\left\{\frac{g(u)}{u^2};x\right\}dx \quad , \qquad (2.58)$$

$$(v) \quad \int_0^\infty xf(x)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty u^3g(u)\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du \quad . \qquad (2.59)$$

İspat: Yöntemlerinin benzerliğinden dolayı sadece (2.55) ispatlanacaktır. (2.59)'un ispatı (2.55),(2.56) ya da (2.57),(2.58) bağıntılarından çıkmaktadır.

(2.55) için (2.1) deki $\mathcal{L}_2$ dönüşümünün tanımından faydalanıp integrallerin mutlak yakınsaklığından integrasyon sırasını değiştirerek (2.49) bağıntısı kullanılırsa;

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy = \int_0^\infty y\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}\left(\int_0^\infty xexp(-x^2y^2)f(x)dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\int_0^\infty yexp(-x^2y^2)\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\mathcal{L}_2\left\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\};x\right\}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty xf(x)\left(\frac{1}{2}\mathcal{P}_4\{g(u);x\}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty xf(x)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx$$

bulunur.

2.4 Sonuçlar ve Açıklayıcı Örnekler

Bu kısımda önceki bölümde çeşitli makalelerden derlenip ispatlanan Parseval-Goldstein tipi teoremlerin sonuçlarını ve Parseval-Goldstein tipinde olmayan bağıntılarla bu sonuçların ve bağıntıların kullanıldığı, integral dönüşüm tablolarının geliştirilmesine yönelik örnekler verilecektir.

Sonuç 2.4.1 *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olsun.(2.17) nin sağlanması ve (2.60)'ın sol tarafındaki integralin mutlak yakınsak olması durumunda $Re(v) > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{S}_v\{G(x);y\} = \frac{1}{\Gamma(v)}\mathcal{L}\{x^{v-1}S(x);y\} \tag{2.60}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.1'de $f(x) = x^{v-1}e^{-xy}$ alınırsa $([5], sf144-3)$'den

$$F(x) = \mathcal{L}\{f(x); y\} = \Gamma(v)(x+y)^{-v}$$

dir.Bu değerler teorem 2.3.1 (2.18)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\int_0^\infty \Gamma(v)(x+y)^{-v}G(x)dx = \int_0^\infty x^{v-1}e^{-xy}\mathcal{S}(x)dx$$

$$\int_0^\infty \frac{G(x)}{(x+y)^v}dx = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^\infty e^{-xy}[x^{v-1}\mathcal{S}(x)]dx$$

bulunur.(1.193) ve (1.88) tanımlarından,

$$\mathcal{S}_v\{G(x); y\} = \frac{1}{\Gamma(v)}\mathcal{L}\{x^{v-1}S(x); y\}$$

eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.2 $\mathcal{L}\{f_1(x); y\} = F_1(y)$, $\mathcal{L}\{f_2(x); y\} = F_2(y)$ ve *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olsun. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının konvolisyonları $(f_1 * f_2)(x)$ olmak üzere, (2.17)'nin sağlanması durumunda ve (2.61) nin solundaki integralin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\int_0^\infty F_1(x)F_2(x)G(x)dx = \int_0^\infty (f_1 * f_2)(x)\mathcal{S}(x)dx \qquad (2.61)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.1 de $f(x) = (f_1 * f_2)(x)$ alınırsa $F(x) = \mathcal{L}\{f(x); y\} = F_1(x)F_2(x)$ olur. Bu değerler (2.18)'de yerine yazıldığında (2.61) eşitliğine kolaylıkla ulaşılır.

Sonuç 2.4.3 $f_1(x)$ fonksiyonu, *x>0* için *(n-1).* mertebeye kadar türevleri sürekli ve x=0 da $f_1(x)$ ve türevleri bir limite sahip üstel mertebeli bir fonksiyonlar olsun. *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin varlığı ve (2.62)'nin solundaki integralin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\int_0^{\infty} \left(x^n F_1(x) - x^{n-1} f_1(0) - x^{n-2} {f_1}'(0) \dots {f_1}^{(n-1)}(0)\right). G(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} {f_1}^{(n)}(x) \mathcal{S}(x)dx \qquad (2.62)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.1 ,(2.18) de $f(x) = {f_1}^{(n)}(x)$ alınırsa (1.110)'dan

$$F(x) = \mathcal{L}\{{f_1}^{(n)}(x)\}$$
$$= x^n F_1(x) - x^{n-1} f_1(0) - x^{n-2} {f_1}'(0) - \cdots - x{f_1}^{(n-2)}(0) - {f_1}^{(n-1)}(0)$$

olur. $f(x)$ ve $F(x)$, (2.18) de yerine yazıldığında (2.62) bağıntısı elde edilir.

Sonuç 2.4.4 *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin varlığı ve (2.63)'ün solundaki integralin mutlak yakınsaklığı koşulu ile

$$\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^n G(x); 1\} = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \ell_\alpha\{S(x); n\} \ , \qquad n = 0,1, \dots \alpha > -1 \qquad (2.63)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç (2.4.3)'te $f_1(x) = x^{n+\alpha}.e^{-x}$ alınırsa $0 \le k \le n-1$ için ${f_1}^{(k)}(0) = 0$ ve

$F_1(x) = \Gamma(n+\alpha+1)(x+1)^{-(n+\alpha+1)}$ olup bu değerler (2.62) de yerine yazılırsa,

$$\Gamma(n+\alpha+1) \int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+1)^{-(n+\alpha+1)}} G(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}.e^{-x}) S(x)dx \qquad (2.64)$$

bulunur.(2.64) eşitliğinin sağ tarafındaki integralde (1.207) tanımı kullanırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x+1)^{-(n+\alpha+1)}} G(x)dx = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)\, S(x)dx$$

bulunur ve (1.193) ile (1.207) den,

$$\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^n G(x);1\} = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,\ell_\alpha\{S(x);n\}$$

eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.5 $\mathcal{L}\{f_1(x);y\} = F_1(y)$ ve *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin varlığı ile (2.65)'nın solundaki integralin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\int_0^\infty F_1^{(n)}(x)G(x)dx = \int_0^\infty (-x)^n f_1(x)S(x)dx \qquad (2.65)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.1 de $f(x) = (-x)^n f_1(x)$ alınırsa $\mathcal{L}\{f_1(y);x\} = F_1(x)$ olmak üzere,

$F(x) = \mathcal{L}\{f(y);x\} = \mathcal{L}\{(-y)^n f_1(y);x\} = F_1^{(n)}(x)$ bulunur. F(x) ve f(x) (2.18) de yerine yazılırsa (2.65) eşitliğine kolayca ulaşılır.

Sonuç 2.4.6 *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin sağlanması ve (2.66) integralinin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\mathcal{P}\{G(x);y\} = \mathcal{F}_c\{S(x);y\} \qquad (2.66)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.12'de $f(y) = cosxy$ alınırsa $[5, \text{s. } 154, (43)]$ den

$$F(x) = \mathcal{L}\{f(y);x\} = \mathcal{L}\{cosxy;y\} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (2.67)$$

olup.F(x) ve f(x) (2.18) de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+y^2}\,G(x)dx = \int_0^\infty cosxy\,S(x)dx$$

bulunur.(1.208) ve (1.63) de tanımlanan Potansiyel ve Fourier cosinüs integral dönüşümü tanımlarından (2.66) bağıntısı elde edilir

Sonuç 2.4.7 $\mathcal{L}\{f_1(y);x\} = F_1(x)$ ve *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin varlığı ile (2.68)'in solundaki integralin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\int_y^\infty F_1(x)G(x-y)dx = \mathcal{L}\{f_1(x).S(x);y\} \tag{2.68}$$

dir.

İspat: Teorem 2.3.1'de $f(x) = e^{-xy}f_1(x)$ alınırsa (1.100)'den,

$F(x) = \mathcal{L}\{f(t);x\} = \mathcal{L}\{e^{-ty}f_1(t);x\} = F_1(x+y)$ olup bu değerler teorem 2.3.1 de yerine yazılırsa;

$$\int_0^\infty F_1(x+y)G(x)dx = \int_0^\infty e^{-xy}f_1(x)\,S(x)dx$$

bulunur. Burada $x+y=u$ dönüşümü yapılır ve (1.88) tanımı uyarınca sağ taraftaki integralin $f_1(x).S(x)$ 'in Laplace dönüşümü olduğu görülürse,

$$\int_y^\infty F_1(u)G(u-y)du = \mathcal{L}\{f_1(x).S(x);y\}$$

elde edilir. Burada $u \leftrightarrow x$ değişimi yapılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.8: $F_1(x)$ ve $f_1(x)$ sonuç 2.4.7 deki fonksiyonlar olsunlar.$0 < Re(\mu) < 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{x^{-\mu}f_1(x);y\} = \mathcal{W}_\mu\{F_1(x);y\} \tag{2.69}$$

eşitliği (2.69)'un sağındaki integralin mutlak yakınsak olması şartı ile sağlanır.

İspat: Sonuç 2.4.7 de $g(x) = x^{-\mu}$ alınırsa $Re(\mu) < 1$ için [5, s. 137, (1)]den

$$G(x) = \mathcal{L}\{g(t);x\} = \mathcal{L}\{t^{-\mu};x\} = \Gamma(1-\mu)x^{\mu-1} \tag{2.70}$$

ve $$S(x) = \mathcal{S}\{g(t); x\} = \int_0^\infty \frac{g(t)}{t+x}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{-\mu}}{t+x}\,dt \qquad (2.71)$$

bulunur.(2.71)' de $\frac{1}{t+x} = u$ dönüşümü yapılırsa;

$$S(x) = \int_0^{1/x} u^{\mu-1}(1-ux)^{-\mu}\,du \qquad (2.72)$$

olur.(2.72) de $ux =$ v dönüşümü uygulanırsa ,

$$S(x) = x^{-\mu}\int_0^\infty \mathrm{v}^{\mu-1}(1-\mathrm{v})^{(1-\mu)-1}\,d\mathrm{v} \qquad (2.73)$$

olur. Sırasıyla (1.148), (1.149) ve (1.150)'den,

$$S(x) = x^{-\mu}\beta(\mu, 1-\mu) = x^{-\mu}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\mu+1-\mu)} = x^{-\mu}\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) \qquad (2.74)$$

bulunur.*G(x) ,S(x) ve f(x)* sonuç 2.4.7'de yerine yazılırsa ,

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_y^\infty (x-y)^{\mu-1}F_1(x)dx = \mathcal{L}\{x^{-\mu}f_1(x); y\}$$

olup (1.205)'de verilen Weyl dönüşümü tanımından (2.69) bağıntısına ulaşılır.

Sonuç 2.4.9 $\mathcal{L}\{f_1(x); y\} = F_1(y)$ ve *g(x),G(x)* ve *S(x)* teorem 2.3.1 de verilen fonksiyonlar olmak üzere, (2.17)'nin sağlanması durumunda $y > 0$ için,

$$\mathcal{L}\{F_1(x)G(x); y\} = \int_y^\infty f_1(x-y)S(x)dx \qquad (2.75)$$

eşitliği (2.75)'in sağındaki integralin mutlak yakınsaklığı koşulu ile gerçeklenir.

İspat: H(x),(1.19)'da tanımlanan birim basamak fonksiyonu olmak üzere,tearem 2.3.1 de $f(x) = f_1(x-y)H(x-y)$ alınırsa (1.102)'den,

$$F(t) = \mathcal{L}\{f(x), t\} = \mathcal{L}\{f_1(x-y)H(x-y), \mathrm{t}\} = e^{-yt}F_1(t) \qquad (2.76)$$

olup *f(x)* ve *F(x)* teorem 2.3.1'de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty e^{-xy}F_1(x)\,G(x)dx = \int_0^\infty f_1(x-y)H(x-y)S(x)dx \qquad (2.77)$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{L}\{F_1(x)G(x);y\} = \int_y^\infty f_1(x-y)S(x)dx$ eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.10 *g(x),G(x)* ve *S(x)* sonuç 2.4.9'da verilen fonksiyonlar olsun. $Re(\mu) > 0$ ve $y > 0$ için

$$\mathcal{L}\{x^{-\mu}G(x);y\} = \mathcal{W}_\mu\{S(x);y\} \qquad (2.78)$$

bağıntısı (2.17)'nin sağlanması ve (2.78)'in sağındaki integralin mutlak yakınsaklık koşulu ile sağlanır.

İspat: Sonuç 2.4.9'da $f_1(x) = x^{\mu-1}$ alınırsa $[5, \text{s. } 137, (1)]$ den,

$$F_1(x) = \mathcal{L}\{f_1(t), x\} = \Gamma(\mu).x^{-\mu}$$

olup $f_1(x)$ ve $F_1(x)$, (2.75)'de yerine yazılırsa

$$\Gamma(\mu)\mathcal{L}\{x^{-\mu}G(x);y\} = \int_y^\infty (x-y)^{\mu-1}S(x)dx$$

bulunur. Burada (1.205) tanımından yararlanarak (2.78) elde edilir.

Sonuç 2.4.11 $f_1(x)$ ve $F_1(x)$ sonuç 2.4.9 'da verilen fonksiyonlar olsun. $0 < Re(v) < 1$ ve $y > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{x^{v-1}F_1(x);y\} = \Gamma(v)\mathcal{S}_v\{f_1(x);y\} \qquad (2.79)$$

bağıntısı (2.79)'un sağındaki integralin mutlak yakınsak olması durumunda gerçeklenir.

İspat: Sonuç 2.4.9'da $g(x) = x^{-v}$ alınırsa,

$0 < Re(v) < 1$ olmak üzere, $[5, \text{s. } 137, (1)]$ den $G(x) = \mathcal{L}\{t^{-v};x\} = \Gamma(1-v)x^{v-1}$

ve $[6, \text{s. } 216, (5)]$ den $S(x) = \mathcal{S}_v\{t^{-v};x\} = \Gamma(v)\Gamma(1-v)x^{-v}$ bulunur. Bu değerler

(2.75)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}\{\Gamma(1-v)x^{v-1}F_1(x);y\} = \int_y^\infty f_1(x-y)\Gamma(v)\Gamma(1-v)x^{-v}dx \qquad (2.80)$$

bulunur. (2.80)'nin sağ tarafındaki integralde $x-y=u$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{x^{v-1}F_1(x);y\} = \Gamma(v)\int_y^\infty \frac{f_1(u)}{(u+y)^v}dx$$

bulunur. (1.193) Stieljes tanımından (2.79) bağıntısına ulaşılır.

Örnek 2.4.1 $0 < Re(v) < 1$ ve $Re\ (a) > 0$ olmak üzere;

$$\mathcal{M}\{e^{ax}Ei(-ax);v\} = \frac{-\pi\Gamma(v)}{a^v sin\pi v} \qquad (2.81)$$

eşitliğini gösterelim:

Teorem 2.3.1 de $f(x) = x^{-\mu}$ ve $g(x) = e^{-ax}$ alınırsa,

$\mathcal{L}\{f(t);x\} = \Gamma(1-\mu)x^{\mu-1}$, $G(x) = \mathcal{L}\{g(t);x\} = \frac{1}{x+a}$ ve $S(x) = -e^{ax}Ei(-ax)$

bulunur.Bu değerler teorem 2.3.1 de yerine yazılırsa,

$$\Gamma(1-\mu)\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+a}dx = -\int_0^\infty x^{-\mu}e^{ax}Ei(-ax)dx \qquad (2.82)$$

elde edilir.(2.82)'nin solundaki integral için $\frac{1}{x+a} = u$ dönüşümü yapılırsa,

$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+a}dx = \int_0^{1/a} (1-ua)^{\mu-1}u^{-\mu}du$ olup burada da $ua = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x+a}dx = a^{\mu-1}\int_0^1 (1-t)^{\mu-1}t^{(-\mu+1)-1}du$$

$$= a^{\mu-1}\beta(\mu, 1-\mu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\mu+1-\mu)} = a^{\mu-1}\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{a^{\mu-1}\pi}{sin\pi\mu} \qquad (2.83)$$

bulunur.(2.83), (2.82)'de yerine yazılırsa,

$$\Gamma(1-\mu)\frac{a^{\mu-1}\pi}{sin\pi\mu} = -\int_0^\infty x^{-\mu+1-1}e^{ax}Ei(-ax)dx \qquad (2.84)$$

olup (2.84)'de $1-\mu = v$ değişimi yapılırsa,

$$\int_0^\infty x^{v-1}e^{ax}Ei(-ax)dx = -\frac{\pi\Gamma(v)}{a^v sin\pi\mu} \qquad (2.85)$$

(2.85) eşitliğinin sol tarafı Mellin integral dönüşümü tanımına uyar ve (2.81) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.2 $\alpha > -1$, Re $\mu > 0$, $Re(\alpha-\mu) > -1$ ve $n = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere,

$$\ell_\alpha\{x^{\mu-1}; y\} = \frac{\Gamma(n+v)\Gamma(\alpha-\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu)} \qquad (2.86)$$

eşitliğini sonuç 2.4.1 ve sonuç 2.4.4'ü kullanarak gösterelim:

Sonuç 2.4.4,(2.63) eşitliğinde $G(x) = x^{\mu-1}$ alınırsa $S(x) = \Gamma(\mu)x^{-\mu}$ olur.Bu değerler (2.63)'te yerine yazılırsa,

$$\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^n x^{\mu-1}; 1\} = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\ell_\alpha\{\Gamma(\mu)x^{-\mu}; n\}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılıp $\ell_\alpha\{x^{-\mu}; n\}$ yalnız bırakılırsa,

$$\ell_\alpha\{x^{-\mu}; n\} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\mu)}\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^{n+\mu-1}; 1\} \qquad (2.87)$$

bulunur. $\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^{n+\mu-1}; 1\}$ değeri sonuç 2.4.1 'den hesaplanırsa,

$$\mathcal{S}_{n+\alpha+1}\{x^{n+\mu-1}; 1\} = \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\mathcal{L}\{x^{\alpha-\mu}; 1\} = \frac{\Gamma(n+\mu)\Gamma(\alpha+\mu-1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \qquad (2.88)$$

dir.(2.88) eşitliği (2.87)'de yerine yazılırsa (2.86) eşitliğine kolaylıkla ulaşılır.

Örnek 2.4.3 $0 < Re\ (v) < 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{P}\{x^{v-1}; y\} = \frac{1}{2}\pi \sec\left(\frac{1}{2}v\pi\right) y^{v-1} \tag{2.89}$$

eşitliğini gösterelim:

Sonuç 2.4.6'da $G(x) = x^{v-1}$ alınırsa $S(x) = \mathcal{L}\{G(y), x\} = \mathcal{L}\{y^{v-1}; x\}$ olur. $[5, \text{s. } 137, (1)]$'den $S(x) = \Gamma(v)x^{-v}$ olur.G(x) ve S(x) (2.66)'da yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{P}\{x^{v-1}; y\} = \Gamma(v)\mathcal{F}_c\{x^{-v}; y\} \tag{2.90}$$

bulunur. $[1, \text{s. } 10, (1)]$den $0 < Re\ (v) < 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}_c\{x^{-v}; y\} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\Gamma(v)} \sec\left(\frac{1}{2}v\pi\right) y^{v-1} \tag{2.91}$$

olup (2.91), (2.90)'da yerine yazılırsa (2.89) bağıntısına ulaşılır.

Örnek 2.4.4 $Re(a) > 0$, $Re\ (v) > \frac{1}{2}$ ve $Re(x) > Im\ (a)$ olmak üzere,

$$\mathcal{P}\{x^v j_v(ax); y\} = y^v K_v(ay) \tag{2.92}$$

eşitliğini gösterelim:

Sonuç 2.4.6 da $G(x) = x^v j_v(ax)$ alınırsa, $[5, \text{s. } 182, (7)]$ den $Re\ (x) > Im\ (a)$ olmak üzere,

$$S(x) = \mathcal{L}\{G(y), x\} = \mathcal{L}\{y^v j_v(ay)\ ; x\} = 2^v \pi^{-1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) a^v (x^2 + a^2)^{-v-\frac{1}{2}} \tag{2.93}$$

G(x) ve S(x), (2.66)'da yerine yazılırsa,

$$\mathcal{P}\{x^v j_v(ax); y\} = 2^v \pi^{-1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) a^v \mathcal{F}_c\left\{(x^2 + a^2)^{-v-\frac{1}{2}}; y\right\} \tag{2.94}$$

bulunur.$[5, \text{s. } 11, (7)]$ den $Re(a) > 0$, $Re(v) > \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}_c\left\{(x^2+a^2)^{-v-\frac{1}{2}};y\right\} = 2^{-v}y^v a^{-v}\pi^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} K_v(ay) \tag{2.95}$$

olup (2.95), (2.94)'de yerine yazılırsa (2.92) eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.12 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile

$$\int_0^\infty xh(x)\mathcal{L}_2\{f(z);x\}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty yf(y)\,\mathcal{L}_2\{h(x);\}dy \tag{2.96}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.3, (2.20) bağıntısında $\mathcal{L}_2\{g(z);x\} = h(x)$ olarak alınırsa,

$$\int_0^\infty x\mathcal{L}_2\{f(y);x\}h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty yf(y)\,\mathcal{P}\{g(z);y\}dy \tag{2.97}$$

bağıntısı yazılabilir. (2.19)'dan,

$$\frac{1}{2}\mathcal{P}\{g(z);y\} = \mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{g(z);x\};y\} = \mathcal{L}_2\{h(x);y\} \tag{2.98}$$

olup, (2.98) bağıntısı (2.97)'de yazılırsa (2.96) eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.13 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile

$$\mathcal{P}\{\mathcal{L}_2\{g(u);x\};z\} = \mathcal{L}_2\{\mathcal{P}\{g(u);x\};z\} \tag{2.99}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.3'de $f(y) = e^{-z^2y^2}$ alındığında

$$\mathcal{L}_2\{f(y);x\} = \mathcal{L}_2\{exp(-z^2y^2);x\} = \int_0^\infty ye^{-(z^2+x^2)y^2}dy = \frac{1}{2(z^2+x^2)} \tag{2.100}$$

olur. (2.100) eşitliği (2.20)'de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{x}{2(z^2+x^2)}\mathcal{L}_2\{g(z);x\}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty ye^{-z^2y^2}\,\mathcal{P}\{g(z);y\}dy$$

bulunur. Gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapıldığında (2.1) ve (1.208) tanımlarından (2.99) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.5 $Re\,(\rho) > |Re\,(v)| - \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}_v\{y^{\rho-1};z\} = 2^{\rho-\frac{3}{2}}z^{-\rho}\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right) \qquad (2.101)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.5'de (2.24) eşitliğinde yerine yazımak üzere $f(y) = y^{\rho-v-\frac{3}{2}}$ alınırsa,

(2.9) ve $[5, \text{s. } 137, (1)]$ den $Re\,(\rho - v) > \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2x}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{y^{\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}-\frac{3}{4}};\frac{1}{4x^2}\right\} = 2^{\rho-v+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)x^{\rho-v-\frac{1}{2}} \qquad (2.102)$$

bulunur.(2.102), (2.24) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}y^{\rho-v-\frac{3}{2}};z\right\} = 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\mathcal{L}_2\left\{x^{2v-2}2^{\rho-v+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)x^{\rho-v+\frac{1}{2}}\right\}$$

bulunur tekrar (2.103)'de (2.9) kullanılırsa ve (2.104)'te $[5, \text{s. } 137, (1)]$ den,

$$\mathcal{K}_v\{y^{\rho-1};z\} = 2^{\rho+\frac{1}{2}}z^{v+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathcal{L}_2\left\{x^{\rho+v-\frac{3}{2}};z\right\} \qquad (2.103)$$

$$= 2^{\rho-\frac{3}{2}}z^{v+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathcal{L}\left\{x^{\frac{\rho}{2}+\frac{v}{2}-\frac{3}{4}};z^2\right\} \qquad (2.104)$$

$$= 2^{\rho-\frac{3}{2}}z^{-\rho}\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

bağıntısı elde edilir.

Tanım2.4.1 $j_v(z)$, 1.tür Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$Y_v(\mathrm{z}) = cosec(v\pi)[j_v(z)cosv\pi - j_{-v}(z)] \qquad (2.105)$$

fonksiyonuna *2.tür Bessel fonksiyonu* denir.

Tanım 2.4.2 *Genelleştirilmiş Hipergeometrik seriler;*

$$_mF_n(a_1, \dots, a_m; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k, \dots, (a_m)_k}{(\gamma_1)_k, \dots, (\gamma_n)_k} \frac{z^k}{k!} \qquad (2.106)$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 2.4.3 $Re(v) > -2$, $Y_v(\mathrm{z})$ 2.tür , $j_v(z)$ 1.tür Bessel fonksiyonu ve

$s_{\mu,v}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-v+1)(\mu+v+1)}\ {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-v+3}{2}; \frac{\mu+v+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)$ olmak üzere;

$S_{\mu,v}(z) = s_{\mu,v}(z)$

$$+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-v+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+v+1}{2}\right).\left[sin\left(\frac{\mu-v}{2}\pi\right)j_v(z) - cos\left(\frac{\mu-v}{2}\pi\right)Y_v(\mathrm{z})\right] \qquad (2.107)$$

bağıntısı ile tanımlanan $S_{\mu,v}(z)$ fonksiyonuna *Lommel fonksiyonu* denir.

Örnek 2.4.6 $Re(v) > -2$ ve $S_{\mu,v}(z)$ Lommel fonksiyonu olmak üzere,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}sin(ay^2); z\right\} = a^{\frac{3}{2}}(2a)^{-v-3}\Gamma(v+2)z^{v+\frac{3}{2}}S_{-v-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2}{4a}\right) \qquad (2.108)$$

eşitliğini gösterelim:

Teorem 2.3.5 ,(2.24) eşitliğinde yerine konmak üzere $f(y) = sinay^2$ alınırsa, (2.9)'dan

$$\mathcal{L}_2\left\{sin(ay^2); \frac{1}{2x}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{sin(ay); \frac{1}{4x^2}\right\} = \frac{2\alpha x^4}{x^4 + \alpha^2} \qquad (2.109)$$

bulunur. Burada $\alpha = 1/4a$ 'dır.(2.109) ve f(y), (2.24)de yerlerine yazılır ve tekrar (2.9) bağıntısı kullanılırsa $[7, s.54, (1)]$ den

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}sin(ay^2); z\right\} = 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\,\mathcal{L}_2\left\{x^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{sinay^2; \frac{1}{2x}\right\}; \mathrm{z}\right\}$$

$$= 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\,\mathcal{L}_2\left\{x^{2v+2}\frac{2\alpha x^4}{x^4+\alpha^2}; \mathrm{z}\right\} = 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\mathcal{L}\left\{\frac{x^{v+1}\alpha}{x^2+\alpha^2}; z^2\right\}$$

$$= a^{3/2}(2a)^{-v-3}\Gamma(v+2)z^{v+3/2}S_{-v-\frac{3}{2},\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2}{4a}\right)$$

eşitliğine ulaşılır.

Tanım 2.4.4 *Fresnel integralleri* olarak bilinen *C(x) ve S(x)* , aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C(x) = 2^{-1/2}\pi^{-1/2}\int_0^x t^{-1/2}\cos(t)dt \qquad (2.110)$$

$$S(x) = 2^{-1/2}\pi^{-1/2}\int_0^x t^{-1/2}\sin(t)dt \qquad (2.111)$$

Tanım 2.4.5 *v*.mertebeden Anger-Weber fonksiyonu $\mathbb{J}_v(t)$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{J}_v(t) = \pi^{-1}\int_0^\pi \cos(v\theta - tsin\theta)\,d\theta \qquad (2.112)$$

bağıntısıyla tanımlanır.

Örnek 2.4.7 $C(t)$, $S(t)$ Fresnel integralleri ve $t = z^2/4a$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{sin(ay^2); z\} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\left(\frac{1}{2} - C(t)\right)cost + \left(\frac{1}{2} + S(t)\right)\sin(t)\right\} \qquad (2.113)$$

bağıntısını gösterelim:

Örnek 2.4.6, (2.108)'de $v = -\frac{1}{2}$ alınır ve (1.203) ile birlikte düşünülürse,

$$\mathcal{K}_{-\frac{1}{2}}\{sin(ay^2);z\} = a^{\frac{3}{2}}(2a)^{-5/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)z.S_{-1,\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2}{4a}\right) \qquad (2.114)$$

bulunur.$[7, \text{s. } 416]$ dan $j_v(t)$ ve $\mathbb{J}_v(t)$ sırasıyla *v*.mertebeden Bessel ve Anger-Weber fonksiyonları olmak üzere,

$$S_{-1,\frac{1}{2}}(t) = \pi\left[j_{\frac{1}{2}}(t) + j_{-\frac{1}{2}}(t) - \mathbb{J}_{\frac{1}{2}}(t) - \mathbb{J}_{-\frac{1}{2}}(t)\right] \qquad (2.115)$$

bulunur.$[16, s. 306]$,dan

$$j_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}sint \quad \text{ve} \quad j_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}cost \qquad (2.116)$$

ve $[7, s. 415]$ den

$$\mathbb{J}_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\{[C(t) - S(t)]cost + [C(t) + S(t)]sint\} \qquad (2.117)$$

$$\mathbb{J}_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\{[C(t) + S(t)]cost - [C(t) - S(t)]sint\} \qquad (2.118)$$

değerleri (2.115)'te yerine yazılırsa,

$$S_{-1,\frac{1}{2}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z}4\sqrt{a}.\left[\left(1 - 2C(t)\right)sint + (1 - 2C(t)cost\right] \qquad (2.119)$$

bulunur. (2.119), (2.114)'de yerine yazılırsa (2.113) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.8 $-1 < Re\ (v) < 1$, ve $Re\ (a) > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\left\{(x + 4ax^3)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}};z\right\} = 2^v(\pi a)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right)z^{12}exp\left(\frac{z}{8a}\right)K_{\frac{v}{2}}\left(\frac{z}{8a}\right) \qquad (2.120)$$

olduğunu gösterelim:

Teorem 2.3.5 (2.24) eşitliğinde $f(y) = y^{-v-1}\,exp(-ay^2)$ alınırsa,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}y^{-v-1}\,exp(-ay^2)\,;z\right\}$$

$$= 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\mathcal{L}_2\left\{x^{2v-2}\mathcal{L}_2\left\{y^{-v-1}\,exp(-ay^2)\,;\frac{1}{2x}\right\};z\right\} \qquad (2.121)$$

bulunur. Öte yandan (2.9) bağıntısı kullanılırsa $[7, \text{sf } 37, (5.3)]$den,

$$\mathcal{L}_2\left\{y^{-v-1}e^{-ay^2};\frac{1}{2x}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{y^{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}}e^{-ay};\frac{1}{4x^2}\right\}$$

$$= 2^{-v}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}\right)x^{-v}(4ax^2+1)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}} \qquad (2.122)$$

olup (2.122) eşitliği (2.121)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}y^{-v-1}\,exp(-ay^2)\,;z\right\}$$

$$= 2^v z^{v+\frac{1}{2}}\mathcal{L}_2\left\{2^{-v}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}\right)x^{-v}(4ax^2+1)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}};z\right\} \qquad (2.123)$$

$[6, \text{s. } 132, (24)]$ den,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{v+\frac{1}{2}}y^{-v-1}\,exp(-ay^2)\,;z\right\} = \frac{1}{4}sec\left(\frac{v\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi z}{a}\right)^{\frac{1}{2}}K_{\frac{v}{2}}\left(\frac{z^2}{8a}\right) \qquad (2.124)$$

elde edilir. (2.123)'de yerine yazılır ve tekrar (2.9) bağıntısı kullanılırsa (2.120) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.9 *erf(x)* hata fonksiyonu olmak üzere,

$$\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}erf\left(ax^{\frac{1}{2}}\right);z\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{2}}arctan\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (2.125)$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{3}{2}}erf\left(ax^{\frac{1}{2}}\right);z\right\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{2}}arctan\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (2.126)$$

bağıntılarını gösterelim:

Teorem 2.3.6'nın (2.29) bağıntısında $f(y) = y^{-2}sinay$ alınırsa,

$$\mathcal{L}\{y.(y^{-2}\sin(ay); z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{x}\mathcal{L}_2\left\{y^{-2}\sin(ay); \frac{1}{2x}\right\}; \mathrm{z}\right\} \qquad (2.127)$$

bulunur.Burada (2.127) bağıntısında yerine konmak üzere $\mathcal{L}_2\left\{y^{-2}sin(ay); \frac{1}{2x}\right\}$ hesaplanırsa, (2.9) bağıntısı ve $([7, s.66, (7.76)]$ dan,

$$\mathcal{L}_2\left\{y^{-2}sin(ay); \frac{1}{2x}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{y}sin\left(ay^{1/2}\right); \frac{1}{4x^2}\right\} = \frac{\pi}{2}erf(ax) \qquad (2.128)$$

elde edilir.Öte yandan,

$\mathcal{L}\{y.\left(y^{-2}sin(ay)\right); z\} = \mathcal{L}\{y^{-1}sin(ay); z\}$ değeri $([7, \mathrm{s}.54(7.5)]$,den

$$\mathcal{L}\{y^{-1}\sin(ay); z\} = arctan\left(\frac{a}{z}\right) \qquad (2.129)$$

dır. (2.128) ve (2.129) eşitlikleri (2.127)'de yerine yazılırsa tekrar (2.9)'dan

$$arctan\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}erf(ax); \mathrm{z}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} z\mathcal{L}\left\{x^{-\frac{1}{2}}erf\left(ax^{\frac{1}{2}}\right); z\right\} \qquad (2.130)$$

bulunur. (2.130)'da gerekli düzenlemeler yapıldığında (2.125) bağıntısına ulaşılır.

$f(y) = y^{-2}\sin(ay)$ fonksiyonu teorem 2.3.6'nın (2.29) bağıntısı yerine (2.30) bağıntısında yazılırsa benzer işlemlerle (2.126) bağıntısına kolaylıkla ulaşılır.

Tanım 2.4.6 Tamamlayıcı Gama fonksiyonu $\Gamma(\mu; x)$ ile gösterilir ve

$$\Gamma(\mu; x) = \int_x^{\infty} t^{\mu-1}\, e^{-t} dt \qquad (2.131)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.4.7 Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu $E_\mu(x)$ ile gösterilir ve

$$E_\mu(x) = x^{\mu-1}\Gamma(1-\mu;x) \tag{2.132}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4.1 Aşağıdaki eşitlikler integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile doğrudur:

$$(i) \qquad \int_s^\infty u^{-\mu}\mathcal{L}\{f(t);u\}du = \int_0^\infty t^{\mu-1}\Gamma(1-\mu;st)f(t)dt \quad , \tag{2.133}$$

$$(ii) \qquad \int_s^\infty u^{-\mu}\mathcal{L}\{f(t);u\}du = s^{1-\mu}\int_0^\infty E_\mu(st)f(t)dt \quad . \tag{2.134}$$

İspat: (2.133)'de Laplace dönüşümün tanımı kullanılır ve mutlak yakınsaklıktan integrasyon sırası değiştirilirse

$$\int_s^\infty u^{-\mu}\mathcal{L}\{f(t);u\}du = \int_s^\infty u^{-\mu}\left(\int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt\right)du$$

$$= \int_0^\infty f(t)\left(\int_s^\infty u^{-\mu}e^{-ut}du\right)dt \tag{2.135}$$

elde edilir. (2.135)'in sağ tarafında $x = ut$ dönüşümü uygulanırsa (2.131) tanımından

$$\int_s^\infty u^{-\mu}e^{-ut}du = t^{\mu-1}\int_{st}^\infty e^{-x}x^{(-\mu+1)-1}f(t)dt = t^{\mu-1}\Gamma(1-\mu;st) \tag{2.136}$$

bulunur. (2.136), (2.135)'de yerine yazılırsa (2.133) eşitliğine ulaşılır.

Eğer (2.132) tanımı (2.133)'de kullanılırsa (2.134) eşitliğine kolaylıkla ulaşılır.

Sonuç 2.4.14 : $Re\ (\mu) < 1$ olmak üzere**,** integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile

$$\mathcal{M}\{f(t);u\} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^\infty u^{-\mu}\mathcal{L}\{f(t);u\}du \qquad (2.137)$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat: (2.133) eşitliğinde s=0 alınırsa $\Gamma(1-\mu;0) = \Gamma(1-\mu)$ bulunur ve bu değer (2.133)'de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_0^\infty u^{-\mu}\mathcal{L}\{f(t);u\}du = \int_0^\infty t^{\mu-1}f(t)dt \qquad (2.138)$$

bulunur.(2.138)'nın sağ tarafı (1.145) tanımından $\mathcal{M}\{f(t);\mu\}$'ye eşit olup ispat biter.

Sonuç 2.4.15 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$(i) \qquad \int_0^\infty \frac{\mathcal{L}_2\{g(y);u\}}{u^2+a^2}du = \frac{\pi}{2a}\int_0^\infty yg(y)exp(a^2y^2)Erfc(ay)dy \quad , \qquad (2.139)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{P}\left\{\frac{1}{u}\mathcal{L}_2\{g(y);u\};a\right\} = \frac{\pi}{2a}\int_0^\infty yg(y)exp(a^2y^2)Erfc(ay)dy\ . \qquad (2.140)$$

İspat: Teorem 2.3.7'nin (2.35) bağıntısında,

$$f(x) = exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right) \qquad (2.141)$$

alınırsa ([7, s. 43,1.5(5.42)] den

$$\mathcal{L}\{f(x);y\} = \pi^{1/2}aexp(a^2y^2)erfc(ay) \qquad (2.142)$$

dir.(2.9) bağıntısından,

$$\mathcal{L}_2\left\{f(x);\frac{1}{2u}\right\} = \mathcal{L}_2\left\{exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right);\frac{1}{2u}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-\frac{x}{4a^2}};\frac{1}{4u^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x\left(\frac{u^2+a^2}{4u^2a^2}\right)}\,dx = \frac{2u^2a^2}{u^2+a^2} \qquad (2.143)$$

bulunur. (2.142) ve (2.143) eşitlikleri (2.35)'de yerine yazılırsa (2.139) eşitliğine ulaşılır. (2.139) eşitliğinin sol tarafı $\frac{1}{u}.u$ ile çarpılırsa (1.208) tanımından (2.140) eşitliği açıktır.

Sonuç 2.4.16 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu ile aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathcal{L}_2\{f(y);(u^2+b^2)^{1/2}\}}{u^2+a^2}\,du = \frac{\pi}{2a}\int_0^{\infty} yf(y)exp[(a^2-b^2)y^2]erfc(ay)dy \qquad (2.144)$$

veya denk olarak,

$$\mathcal{P}\left\{\frac{1}{u}\mathcal{L}_2\{f(y);(u^2+b^2)^{1/2}\};a\right\} = \frac{\pi}{2a}\mathcal{L}_2\{f(y)exp(a^2y^2)erfc(ay);b\} \qquad (2.145)$$

İspat: (2.139) bağıntısında

$$g(y) = exp(-b^2y^2)f(y) \qquad (2.146)$$

alınırsa,

$$\mathcal{L}_2\{g(y);u\} = \mathcal{L}_2\{exp(-b^2y^2)f(y);u\} = \mathcal{L}_2\{f(y);(u^2+b^2)^{1/2}\} \qquad (2.147)$$

bulunur.(2.146) ve (2.147) eiştlikleri (2.139)'da yerine yazılırsa (2.144) bağıntısına ulaşılır. (2.144)'ün sol tarafı $u.\frac{1}{u}$ ile çarpılırsa (1.208)'den potansiyel dönüşüm tanımı sağlanır. (2.144)'ün sağ tarafında ise (2.1)'den $\mathcal{L}_2$ dönüşümü tanımı mevcut olup (2.145) eşitliğine kolayca ulaşılır.

Örnek 2.4.10 $Re(a^2+b^2) > 0$ olmak üzere aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\mathcal{L}_2\{exp(a^2y^2)erfc(ay);b\} = \frac{1}{2b(a+b)} \qquad (2.148)$$

Çözüm: Sonuç 2.4.16 'nın (2.145) eşitliğinde,

$$f(y) = 1 \tag{2.149}$$

alınırsa,

$$\mathcal{L}_2\{1; (u^2 + b^2)^{1/2}\} = \frac{1}{2(u^2 + b^2)} \tag{2.150}$$

bulunur. (2.149) ve (2.150) eşitlikleri (2.145)'de yerine yazılırsa Potansiyel dönüşüm tanımından,

$$\mathcal{L}_2\{exp(a^2y^2)erfc(ay); b\} = \frac{a}{\pi}\,\mathcal{P}\left\{\frac{1}{u}\frac{1}{(u^2 + b^2)}; a\right\}$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_0^\infty u.\frac{1}{u}\frac{1}{(u^2 + b^2)}\frac{}{a^2 + u^2}\,du$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(u^2 + b^2)(a^2 + u^2)}\,du$$

$$= \frac{a}{\pi}\frac{\pi}{2ab(a + b)} = \frac{1}{2b(a + b)}$$

eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.11 $Re(\mu) > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\{y^{2\mu}exp(a^2y^2)erfc(ay); b\}$$
$$= \frac{\Gamma(\mu + 3/2)}{2\pi^{1/2}(\mu + 1)ab^{2\mu+1}}\ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \mu + 2; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{2.151}$$

dır.

Çözüm: Sonuç 2.4.16'da ,

$$f(y) = y^{2\mu} \tag{2.152}$$

alınırsa $Re(\mu) > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\{f(y);(u^2+b^2)^{1/2}\} = \mathcal{L}_2\{y^{2\mu};(u^2+b^2)^{1/2}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2(u^2+b^2)^{\mu+1}} \qquad (2.153)$$

bulunur. (2.152) ve (2.153) eşitlikleri (2.144)'de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{\frac{\Gamma(\mu+1)}{2(u^2+b^2)^{\mu+1}}}{u^2+a^2}\,du = \frac{\pi}{2a}\int_0^\infty yy^{2\mu}exp[(a^2-b^2)y^2]erfc(ay)dy$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mathcal{L}_2\{y^{2\mu}exp(a^2y^2)erfc(ay);b\} = \frac{a\Gamma(\mu+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)^{\mu+1}} \qquad (2.154)$$

elde edilir. (2.154) eşitliğinin sağ tarafındaki integralde $x = u^2$ dönüşümü yapılırsa ([17, s. 286,3.197(1)] den ve (1.148) , (1.149) özellikleri kullanılarak,

$$\int_0^\infty \frac{du}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{(x+a^2)(x+b^2)^{\mu+1}}$$

$$= \frac{\beta(\frac{1}{2},\mu+\frac{3}{2})}{2a^2b^{2\mu+1}}\ {}_2F_1\left(1,\frac{1}{2};\mu+2;1-\frac{b^2}{a^2}\right) \qquad (2.155)$$

bulunur. (2.155) eşitliği (2.154)'de yerine yazılırsa (2.151) eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.17 Aşağıdaki bağıntı integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile doğrudur:

$$\mathcal{K}_v\{y^{v+1/2}exp(-z^2y^2)f(y);a\} = a^{1/2}\,\mathcal{L}_2\{y^vK_v(ay)f(y);z\} \qquad (2.156)$$

İspat: Önce (1.204)'den $\mathcal{K}_v$ dönüşümünün tanımı uygulanır ardından $\mathcal{L}_2$ dönüşümü tanımı görülürse;

$$\mathcal{K}_v\{y^{v+1/2}exp(-z^2y^2)f(y);a\} = \int_0^\infty y^{v+1/2}exp(-z^2y^2)f(y)K_v(ya)(ya)^{1/2}dy$$

$$= a^{1/2}\int_0^\infty yexp(-z^2y^2)y^vf(y)K_v(ya)dy$$

$$= a^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{L}_2\{y^{v}K_{v}(ay)f(y);z\}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.2 $Re(\mu) > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\{y^{v}K_{v}(ay)f(y);z\}$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{v}\int_0^{\infty} x^{-2v-1}exp\left(-\frac{a^2}{4x^2}\right)\,\mathcal{L}_2\left\{f(y);(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}dx \qquad (2.157)$$

ve

$$\mathcal{K}_{v}\left\{y^{v+1/2}exp(-z^2y^2)f(y);a\right\}$$
$$= 2^{v}a^{v+1/2}\,\mathcal{L}_2\left\{t^{2v-2}\,\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{1}{2t}(1+4z^2t^2)^{1/2}\right\};a\right\} \qquad (2.158)$$

eşitlikleri integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.11'in (2.45) eştliğinde,

$$g(u) = u^{v}J_{v}(au) \qquad (2.159)$$

yazılırsa (2.92) bağıntısından,

$$\mathcal{P}\{\,g(u);y\} = \mathcal{P}\{u^{v}J_{v}(au)\,;y\} = y^{v}K_{v}(ay) \qquad (2.160)$$

bulunur. (2.1) tanımı ve Re (*v*)>-1 olması koşulu ile ([5, s. 185,4.14(30)] dan,

$$\mathcal{L}_2\{g(u);x\} = \mathcal{L}_2\{u^{v}J_{v}(au);x\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{u^{v/2}J_{v}\left(au^{1/2}\right);x^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{v}x^{-2v-2}exp\left(-\frac{a^2}{4x^2}\right) \qquad (2.161)$$

elde edilir. (2.159),(2.160) ve (2.161), (2.45) bağıntısında yerine yazılırsa (2.157) bağıntısına ulaşılır.

(2.158) eşitliği için (2.157) eşitliğinde $x = \frac{1}{2t}$ değişken değişimi yapılarak ve (2.156) kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_2\{y^v K_v(ay) f(y); z\}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^v \int_0^\infty (2t)^{2v+1} exp(-a^2t^2)\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \left(\frac{1}{4t^2} + z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left(-\frac{1}{2t^2}\right) dt$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^v 2^{2v} \int_0^\infty t^{2v-1} exp(-a^2t^2)\left(\mathcal{L}_2\left\{f(y); \left(\frac{1}{4t^2} + z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)\left(-\frac{1}{2t^2}\right) dt$$

$$= a^v 2^v\, \mathcal{L}_2\left\{t^{2v-2}\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \frac{(1+4z^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{2t}\right\}; a\right\} \qquad (2.162)$$

bulunur. (2.162) eşitliğinin sol tarafı (2.156)'dan

$$\mathcal{K}_v\{y^{v+1/2} exp(-z^2y^2) f(y); a\}. a^{-1/2}$$

olduğundan (2.162)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{K}_v\{y^{v+1/2} exp(-z^2y^2) f(y); a\} = a^{v+\frac{1}{2}} 2^v\, \mathcal{L}_2\left\{t^{2v-2}\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \frac{(1+4z^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{2t}\right\}; a\right\}$$

eşitlğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.18: İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} exp\left(-\frac{a^2}{4x^2}\right) \mathcal{L}_2\left\{f(y); (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right\} dx = \frac{\pi^{1/2}}{a} \mathcal{L}_2\{e^{-ay} f(y); z\} \qquad (2.163)$$

$$\int_0^\infty exp\left(-\frac{a^2}{4x^2}\right) \mathcal{L}_2\left\{f(y); (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right\} dx = \frac{\pi^{1/2}}{a} \mathcal{L}_2\{y^{-1} e^{-ay} f(y); z\} \qquad (2.164)$$

bağıntıları gerçeklenir.

İspat: (2.157) eşitliğinde $v = \frac{1}{2}$ alınırsa ve (1.203)'deki $K_{\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{-1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} exp\left(-\frac{a^2}{4x^2}\right) \mathcal{L}_2\left\{f(y); (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right\} dx = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \mathcal{L}_2\{y^{1/2} K_{1/2}(ay) f(y); z\}$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{a} \mathcal{L}_2\{e^{-ay} f(y); z\}$$

eşitliğine ulaşılır.Benzer olarak (2.157) eşitliğinde $v = -\frac{1}{2}$ alınır ve yine (1.203) bağıntısı kullanılırsa (2.164) bağıntısı kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.4.19 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\mathcal{L}_2\{e^{-ay} f(y); z\} = 2a\pi^{-1/2}\, \mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{t}\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \frac{(1+4z^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{2t}\right\}; a\right\} \qquad (2.165)$$

$$\mathcal{L}_2\{y^{-1} e^{-ay} f(y); z\} = \pi^{-1/2}\, \mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{t^3}\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \frac{(1+4z^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{2t}\right\}; a\right\} \qquad (2.166)$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat: (2.158) eşitliğinde $v = \frac{1}{2}$ alınır ve tekrar (1.203) bağıntısı kullanılırsa,

$$\mathcal{K}_{1/2}\{y exp(-z^2y^2) f(y); a\} = 2^{1/2} a\, \mathcal{L}_2\left\{t^{-1}\, \mathcal{L}_2\left\{f(y); \frac{(1+4z^2t^2)^{1/2}}{2t}\right\}; a\right\} \qquad (2.167)$$

bulunur. $\mathcal{K}_{1/2}\{y exp(-z^2y^2) f(y); a\}$ ifadesi (2.156) bağıntısından,

$$\mathcal{K}_{1/2}\{y exp(-z^2y^2) f(y); a\} = a^{1/2}\, \mathcal{L}_2\{y^{1/2} K_{1/2}(ay) f(y); z\} \qquad (2.168)$$

olarak yazılabilir. (2.168) eşitliği (2.167)'de yerine yazılır ve $K_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$ eşitliği kullanılırsa,

$$a^{1/2}\,\mathcal{L}_2\{y^{1/2}K_{1/2}(ay)f(y);z\} = 2^{1/2}a\,\mathcal{L}_2\left\{t^{-1}\,\mathcal{L}_2\left\{f(y);\frac{(1+4z^2t^2)^{1/2}}{2t}\right\};a\right\}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılarak (2.165) eşitliğine ulaşılır.Öte yandan (2.158)'de $v=-\frac{1}{2}$ alınır ve benzer işlemler yapılırsa (2.166) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.12 $-1 < Re(v) < 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}_v\{y^{-1/2}exp(-z^2y^2);a\} = \frac{1}{4z}(\pi a)^{1/2}sec\left(\frac{\pi v}{2}\right)exp\left(\frac{a^2}{8z^2}\right)K_{\frac{v}{2}}\left(\frac{a^2}{8z^2}\right) \qquad (2.169)$$

bağıntısını gösterelim:

Teorem 2.4.2'nin (2.158) eşitliğinde,

$$f(y) = y^{-v-1} \qquad (2.170)$$

alınırsa (2.9)'dan

$$\mathcal{L}_2\left\{y^{-v-1};\frac{1}{2t}(1+4z^2t^2)^{1/2}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{y^{-(v+1)/2};\frac{1}{4t^2}(1+4z^2t^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}z^{v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}\right)t^{-v+1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{(v-1)/2} \qquad (2.171)$$

elde edilir.(2.170) ve (2.171) bağıntıları (2.158)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{K}_v\{y^{-1/2}exp(-z^2y^2);a\}$$

$$= 2^{v-1}a^{v+1/2}\,z^{v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}\right)\mathcal{L}_2\left\{t^{v-1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{(v-1)/2};a\right\} \qquad (2.172)$$

olur. (2.9) bağıntısı ve([7, s. 23, 1.3. (3.16)] dan,

$$\mathcal{L}_2\left\{t^{v-1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{(v-1)/2};a\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(t^2+\frac{t}{4z^2}\right)^{(v-1)/2};a^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(t^2 + \frac{t}{4z^2}\right)^{(v-1)/2}; a^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}(2az)^{-v}\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)exp\left(\frac{a^2}{8z^2}\right)K_{\frac{v}{2}}\left(\frac{a^2}{8z^2}\right) \quad (2.173)$$

bulunur. (2.173) eşitliğini (2.172)'de yerine yazılır ve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right) = sec\left(\frac{\pi v}{2}\right) \quad (2.174)$$

eşitliği kullanılırsa (2.169) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.13 $2Re(\mu) < 1 - |Re(v)|$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{-\frac{1}{2}-\mu}exp(-z^2y^2); a\right\}$$

$$= \frac{1}{2}a^{-1/2}z^{2\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}-\mu\right)exp\left(\frac{a^2}{8z^2}\right)W_{\mu,\frac{v}{2}}\left(\frac{a^2}{4z^2}\right) \quad (2.175)$$

eşitliğini gösterelim:

Teorem 2.4.2'nin (2.158) eşitliğinde,

$$f(y) = y^{-2\mu-v-1} \quad (2.176)$$

alınırsa (2.9)'dan $2Re(\mu) < 1 - |Re(v)|$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\left\{y^{-2\mu-v-1}; \frac{1}{2t}(1+4z^2t^2)^{1/2}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{y^{-\mu-(v+1)/2}; \frac{1}{4t^2}(1+4z^2t^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}-\mu\right)z^{2\mu+v-1}t^{-2\mu-v+1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{\mu+(v-1)/2} \quad (2.177)$$

bulunur.(2.176) ve (2.177) eşitlikleri (2.158)'de yerine yazılırsa

$$\mathcal{K}_v\left\{y^{-\frac{1}{2}-2\mu}exp(-z^2y^2); a\right\}$$

$$= 2^{v-1}a^{v+\frac{1}{2}}z^{2\mu+v-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{v}{2}-\mu\right)\mathcal{L}_2\left\{t^{-2\mu+v-1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{\mu+(v-1)/2};a\right\} \quad (2.178)$$

(2.178)'in sağındaki $\mathcal{L}_2$ dönüşümü için (2.9) özelliği ve ([7, s. 24,3(3.22)] den

$$\mathcal{L}_2\left\{t^{-2\mu+v-1}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{\mu+(v-1)/2};a\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{t^{-\mu+(v-1)/2}\left(t^2+\frac{1}{4z^2}\right)^{\mu+(v-1)/2};a^2\right\}$$

$$= 2^{-v}z^{1-v}a^{-1-v}\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-\mu\right)exp\left(\frac{a^2}{8z^2}\right)W_{\mu,\frac{v}{2}}\left(\frac{a^2}{4z^2}\right) \quad (2.179)$$

bulunur. (2.179) bağıntısı (2.178)'de yerine yazılırsa (2.175) elde edilir.

Örnek 2.4.14 Teorem 2.3.8'i kullanarak aşağıdaki bağıntıları gösterebiliriz:

$$(i) \qquad \mathcal{P}_4\{sin(a^2x^2);y\} = \frac{\pi}{4}exp(-a^2y^2) \quad , \quad (2.180)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{P}_4\{x^{-2}cos(a^2x^2);y\} = \frac{\pi}{4}y^{-2}exp(-a^2y^2) \quad . \quad (2.181)$$

Çözüm: (2.38) bağıntısında

$$f(x) = sin(a^2x^2) \quad (2.182)$$

alınırsa ve (2.10) bağıntısı kullanılırsa [18,3.957 − 1]den

$$\mathcal{L}_4\{sin(a^2x^2);u\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_2\{sin(a^2x);u^2\} = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{8u^6}y^{-2}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right) \quad (2.183)$$

bulunur. (2.183) bağıntısının (2.9) özelliği kullanılarak $\mathcal{L}_4$ dönüşümü hesaplanırsa ([5, s. 146, (28)] den ,

$$\mathcal{L}_4^2\{sin(a^2x^2);y\} = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{8}\,\mathcal{L}_4\left\{u^{-6}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right);y\right\}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{\pi}}{32}\mathcal{L}\left\{u^{-3/2}exp\left(-\frac{a^4}{4u}\right);y^4\right\}$$

$$= \frac{\pi}{16}exp(-a^2y^2) \qquad (2.184)$$

elde edilir.(2.184) bağıntısı (2.38)'de yerine yazılırsa (2.180) bağıntısına ulaşılır.Benzer şekilde (2.38) bağıntısında

$$f(x) = \frac{cos(a^2x^2)}{x^2} \qquad (2.185)$$

alınırsa $[5, s.158]$ den,

$$\mathcal{L}_4\{f(x);u\} = \mathcal{L}_4\left\{\frac{cos(a^2x^2)}{x^2};u\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{4u^2}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right) \qquad (2.186)$$

bulunur. $[5, s.146]$ dan (2.186)'nın bir daha $\mathcal{L}_4$ dönüşümü yapılır ve (2.38) de bunlar yerine yazılırsa (2.181) bağıntısına kolayca ulaşılır.

Örnek 2.4.15 $Re(v) > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{P}_4\{x^{2v}J_v(a^2x^2);y\} = \frac{1}{2}y^{2v}K_v(a^2y^2) \qquad (2.187)$$

bağıntısını gösterelim:

$(2.38)'de$ $$f(x) = x^{2v}J_v(a^2x^2) \qquad (2.188)$$

alınırsa, (2.8) bağıntısı kullanılarak,$[5, s.185, (30)]$ dan,

$$\mathcal{L}_4\{f(x);u\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{x^{v/2}J_v(a^2x^{1/2});u^4\} = \frac{a^{2v}}{2^{v+2}u^{4v+4}}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right) \qquad (2.189)$$

bulunur.(2.189) eşitliğinde tekrar (2.8) bağıntısı kullanılarak$[5, s.146, (29)]$ dan

$$\mathcal{L}_4^2\{f(x);y\} = \mathcal{L}_4\{\mathcal{L}_4\{f(x);u\};y\} = \frac{a^{2v}}{2^{v+2}}\mathcal{L}_4\left\{u^{-4v-4}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right);y^4\right\}$$

$$= \frac{a^{2v}}{2^{v+4}} \mathcal{L}\left\{u^{-v-1} exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right); y^4\right\}$$

$$= \frac{a^{2v}}{2^{v+4}} \frac{2^{v+1}}{a^{2v}} y^{2v} K_v(a^2 y^2) \qquad (2.190)$$

dir.(2.190) eşitliği (2.38) bağıntısında yerine yazılırsa (2.187) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.4.20 Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin var olması koşulu ile gerçeklenir:

$$(i) \qquad \mathcal{P}_4\{\mathcal{L}_4\{f(x); y\}; z\} = \mathcal{L}_4\{\mathcal{P}_4\{f(x); u\}; z\} \quad , \qquad (2.191)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{E}_{4,1}\{f(x); y\} = 4\mathcal{P}_4\{\mathcal{L}_4\{f(x); u\}; z\} \quad . \qquad (2.192)$$

İspat: Teorem 2.3.9'un (2.41) bağıntısında,

$$g(u) = exp(-u^4 z^4) \qquad (2.193)$$

alınırsa (2.2) tanımdan,

$$\mathcal{L}_4\{g(u); y\} = \int_0^\infty u^3 exp\,[-(y^4 + z^4)u^4] du = \frac{1}{4(y^4 + z^4)} \qquad (2.194)$$

bulunur.(2.194) ve (2.193) eşitlikleri (2.41) bağıntısında yazıldığında

$$\int_0^\infty y^3 \mathcal{L}_4\{f(x); y\} \frac{1}{4(y^4 + z^4)} dy = \frac{1}{4} \int_0^\infty u^3 exp(-u^4 z^4)\, \mathcal{P}_4\{f(x); u\} du \qquad (2.195)$$

bulunur. (2.194) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa sol taraftaki $\mathcal{L}_4\{f(x); y\}$, $\mathcal{P}_4$ dönüşümünün çekirdeği; sağ taraftaki $\mathcal{P}_4\{f(x); u\}$, $\mathcal{L}_4$ dönüşümünün çekirdeği olur. Böylece,

$$\int_0^\infty \frac{y^3 \mathcal{L}_4\{f(x); y\}}{(y^4 + z^4)} dy = \int_0^\infty u^3 exp(-u^4 z^4)\, \mathcal{P}_4\{f(x); u\} du$$

bağıntılarından ispat tamamlanır.

(2.192)'nin ispatı için (2.193) ve (2.194) eşitlikleri (2.40) bağıntısında yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{y^3}{y^4+z^4}\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3 f(x)\,\mathcal{P}_4\{exp(-u^4z^4);x\}dx \qquad (2.196)$$

olur. (2.196) bağıntısında $\mathcal{P}_4\{exp(-u^4z^4);x\}$ hesaplanırsa,

$$\mathcal{P}_4\{exp(-u^4z^4);x\} = \int_0^\infty u^3\frac{exp(-u^4z^4)}{(u^4+x^4)}\,du \qquad (2.197)$$

dur. (2.197) eşitliğinde $u^4+x^4=t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{P}_4\{exp(-u^4z^4);x\} = \frac{exp(x^4z^4)}{4}\int_{x^4}^\infty \frac{exp(-tz^4)}{t}\,dt \qquad (2.198)$$

elde edilir. (2.198) eşitliğinde $tz^4=y$ dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{P}_4\{exp(-u^4z^4);x\} = \frac{e^{x^4z^4}}{4}\int_{x^4z^4}^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \frac{e^{x^4z^4}}{4}E_1(x^4z^4) \qquad (2.199)$$

bulunur. (2.199) eşitliği (2.196)'da yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{y^3}{y^4+z^4}\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3\,e^{x^4z^4}E_1(x^4z^4)f(x)dx \qquad (2.200)$$

bağıntısı ile ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.21 Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin varlığı koşulu ile doğrudur :

$$(i) \qquad \mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^2}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\};z\right\} = \frac{\sqrt{2}}{4z^2}\mathcal{L}_2\{x^2f(x);z\} \quad , \qquad (2.201)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^2}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\};z\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}z^2}\mathcal{F}_{s,2}\{u^2\mathcal{P}_4\{f(x);u\};z\} \quad , \qquad (2.202)$$

$$(iii) \qquad \mathcal{L}_2\{x^2f(x);z\} = \frac{4}{\pi}\mathcal{F}_{s,2}\{u^2\mathcal{P}_4\{f(x);u\};z\} \quad . \qquad (2.203)$$

İspat: Teorem 2.3.9'da,

$$g(u) = \sin(z^2u^2) \tag{2.204}$$

alınırsa (2.181) ve (2.183)'den

$$\mathcal{P}_4\{g(u);x\} = \mathcal{P}_4\{sin(z^2u^2);x\} = \frac{\pi}{4}exp(-z^2x^2) \tag{2.205}$$

$$\mathcal{L}_4\{g(u);y\} = \mathcal{L}_4\{sin(z^2u^2);y\} = \frac{a^2\sqrt{\pi}}{8u^6}y^{-2}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right) \tag{2.206}$$

bulunur. (2.204),(2.205),(2.206) eşitlikleri teorem 2.3.9'un (2.40) bağıntısında yerlerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty y^3\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\frac{a^2\sqrt{\pi}}{8u^6}y^{-2}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3f(x)\frac{\pi}{4}exp(-z^2x^2)dx \tag{2.207}$$

bulunur. (2.207)'da gerekli düzenlemeler ile $y = \frac{1}{\sqrt{2}v}$ dönüşümü uygulanırsa (2.1) ve (2.2) tanımlarından (2.201) eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde (2.204),(2.205),(2.206) eşitlikleri teorem 2.3.9'un (2.41) bağıntısında yerlerine yazılırsa (2.198) elde edilir. (2.203) eşitliği ise (2.201) ve (2.202)'in sol taraflarının eşitliğinden sağ taraflarının eşitlenmesi ile elde edilir.

Sonuç 2.4.22 Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin varlığı koşulu ile doğrudur :

$$(i) \qquad \mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^6}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\};z\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{L}_2\{f(x);z\} \quad , \tag{2.208}$$

$$(ii) \qquad \mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^2}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\};z\right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{P}_4\{f(x);u\};z\} \quad , \tag{2.209}$$

$$(iii) \quad \mathcal{L}_2\{f(x);z\} = \frac{4}{\pi}\mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{P}_4\{f(x);u\};z\} \quad . \tag{2.210}$$

İspat: Sonuç 2.4.21'deki ispata benzer şekilde teorem 2.3.9'un (2.40) bağıntısında

$$g(u) = \frac{\cos(z^2u^2)}{u^2} \tag{2.211}$$

alınırsa (2.181) ve (2.186)'dan,

$$\mathcal{P}_4\{g(u);x\} = \mathcal{P}_4\left\{\frac{\cos(z^2u^2)}{u^2};x\right\} = \frac{\pi}{4}x^{-2}exp(-z^2x^2) \tag{2.212}$$

$$\mathcal{L}_4\{g(u);y\} = \mathcal{L}_4\left\{\frac{\cos(z^2u^2)}{u^2};y\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{4y^2}exp\left(-\frac{z^4}{4y^4}\right) \tag{2.213}$$

bulunur.(2.212) ve (2.213) eşitlikleri teorem 2.3.9'un (2.40) bağıntısında yerlerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty y^3\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\frac{\sqrt{\pi}}{4y^2}exp\left(-\frac{z^4}{4y^4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^3f(x)\frac{\pi}{4}x^{-2}exp(-z^2x^2)dx \tag{2.214}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılıp, $y = \frac{1}{\sqrt{2}v}$ dönüşümü uygulanırsa tanım 2.1 ve 2.2 den,

$$\int_0^\infty v^3\frac{1}{v^6}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\}exp(-z^4v^4)dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty xf(x)\,exp(-z^2x^2)dx \tag{2.215}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Benzer şekilde (2.209) için (2.211) ve (2.213) eşitlikleri teorem 2.3.9'un (2.41) bağıntısında yerlerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty y^3\mathcal{L}_4\{f(x);y\}\frac{\sqrt{\pi}}{4y^2}exp\left(-\frac{z^4}{4y^4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty u^3\frac{\cos(z^2u^2)}{u^2}\mathcal{P}_4\{f(x);u\}du \tag{2.216}$$

bulunur. (2.216)'da gerekli düzenlemeler yapılır ve $y = \frac{1}{\sqrt{2}v}$ dönüşümü uygulanırsa (2.2) ve (2.5)'den

$$\int_0^\infty v^3\frac{1}{v^6}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\}exp(-z^4v^4)dv = \frac{2}{c}\int_0^\infty u\cos(z^2u^2)\,\mathcal{P}_4\{f(x);u\}du$$

bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanır. (2.210) eşitliği ise (2.208) ve (2.209)'un sol taraflarının eşitliğinden sağ taraflarının eşitlenmesi ile bulunmaktadır.

Örnek 2.4.16 $Re(v) > -1$ olmak üzere aşağıdaki bağıntı gösterilebilir:

$$\mathcal{P}_4\left\{z^{-4v-4}exp\left(-\frac{a^4}{4z^4}\right);y\right\} = \frac{\Gamma(v+1)}{y^{4v-4}}exp\left(-\frac{a^4}{4y^4}\right)\Gamma\left(-v,\frac{a^4}{4y^4}\right) \quad . \quad (2.217)$$

Çözüm: Sonuç 2.4.20'de,

$$f(x) = x^{2v}J_v(a^2x^2) \quad (2.218)$$

alınırsa (2.189)'dan

$$\mathcal{L}_4\{f(x);u\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{x^{v/2}J_v(a^2x^{1/2});u^4\} = \frac{a^{2v}}{2^{v+2}u^{4v+4}}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right) \quad (2.219)$$

bulunur. Öte yandan $[1,(49)]$ dan,

$$\mathcal{E}_{4,1}\{f(x);y\} = \frac{a^{2v}}{2^{v+2}}\,\Gamma(v+1)y^{-4v-4}exp\left(-\frac{a^4}{4y^4}\right)\Gamma\left(-v,\frac{a^4}{4y^4}\right) \quad (2.220)$$

bulunur. (2.219) ve (2.220) eşitlikleri (2.192)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{P}_4\left\{\frac{a^{2v}}{2^{v+2}u^{4v+4}}exp\left(-\frac{a^4}{4u^4}\right);y\right\} = \frac{1}{4}\frac{a^{2v}}{2^{v+2}}\,\Gamma(v+1)y^{-4v-4}exp\left(-\frac{a^4}{4y^4}\right)\Gamma\left(-v,\frac{a^4}{4y^4}\right)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında (2.217) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.17 $Re(v) > -1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gösterilebilir:

$$\mathcal{L}_2\{x^{2v+2}J_v(a^2x^2);u\} = \frac{2^v}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)\frac{a^{2v}z^2}{(z^4+a^4)^{v+\frac{3}{2}}} \quad , \quad (2.221)$$

$$\mathcal{F}_{s,2}\{x^{2v+2}K_v(a^2x^2);u\} = 2^{v-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)\frac{a^{2v}z^2}{(z^4+a^4)^{v+\frac{3}{2}}} \quad . \quad (2.222)$$

Çözüm: Sonuç 2.4.21'de

$$f(x) = x^{2v}J_v(a^2x^2) \quad (2.223)$$

alınırsa (2.189)'dan

$$\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}u}\right\} = \mathcal{L}_4\left\{x^{2v}J_v(a^2x^2);\frac{1}{\sqrt{2}u}\right\} = 2^v a^{2v}u^{4v+4}exp(-a^4v^4) \quad (2.224)$$

elde edilir. (2.224) eşitliğinin $\mathcal{L}_4$ dönüşümü, (2.8) özelliği ve $[5, s.144, (3)]$'den

$$\mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^2}\mathcal{L}_4\left\{f(x);\frac{1}{\sqrt{2}v}\right\};z\right\} = \mathcal{L}_4\left\{\frac{1}{v^2}2^v a^{2v}u^{4v+4}exp(-a^4v^4);z\right\}$$

$$= 2^{v-2}a^{2v}\mathcal{L}\{v^{v+1/2}exp(-a^4v);z^4\}$$

$$= 2^{v-2}a^{2v}\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)(z^4+a^4)^{-v-\frac{3}{2}} \quad (2.225)$$

elde edilir. (2.225) eşitliği sonuç 2.4.21'in (2.201) bağıntısında yerine yazılırsa (2.221) eşitliğine kolaylıkla ulaşılır. Eğer (2.225) eşitliği aynı sonucun (2.202) eşitliğinde yerine yazılırsa ve örnek 2.4.14'deki (2.187) eşitliği kullanılırsa(2.222) eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4.18 $Re(v) > -1$, $|\arg(a)| < \frac{\pi}{4}$ ve $w = exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ olmak üzere,aşağıdaki bağıntıların doğruluğu gösterilebilir:

(i) $$\mathcal{P}_4\{x^vJ_v(ax);y\} = \frac{1}{2}y^v[w^vK_v(awy) - \overline{w}^vK_v(a\overline{w}y)] \quad , \quad (2.226)$$

(ii) $$\mathcal{P}_4\{x^{v-2}J_v(ax);y\} = \frac{i}{2}y^{v-2}[w^vK_v(awy) - \overline{w}^vK_v(a\overline{w}y)] \quad . \quad (2.227)$$

Çözüm: (2.52) eşitliğinde,

$$f(x) = x^vJ_v(ax) \quad (2.228)$$

seçilirse,

$$\mathcal{P}_4\{x^v J_v(ax); y\} = 2\mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{L}_2\{x^v J_v(ax); u\}; y\} \tag{2.229}$$

olur. $\mathcal{L}_2\{x^v J_v(ax); u\}$ dönüşümü hesaplanırsa (2.9) ve $[5, \text{s. } 185, (30)]$ dan,

$$\mathcal{L}_2\{x^v J_v(ax); u\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{x^{v/2} J_v(ax^{1/2}); u^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^v u^{2v-2} exp(-a^2/4u^2) \tag{2.230}$$

bağıntısı doğrudur.(2.230) eşitliği (2.229)'da yerine yazılırsa,

$$\mathcal{P}_4\{x^v J_v(ax); y\} = \left(\frac{a}{2}\right)^v \mathcal{F}_{c,2}\{u^{2v-2} exp(-a^2/4u^2); y\} \tag{2.231}$$

bulunur.(2.231)'ün sağ tarafı için (2.15) ve $[5, \text{s. } 185, (30)]$ den,

$$\mathcal{F}_{c,2}\{u^{2v-2} exp(-a^2/4u^2); y\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_c\{u^{v-1} exp(-a^2/4u); y^2\}$$

$$= \left(\frac{2}{a}\right)^v y^v [w^v K_v(awy) - \overline{w}^v K_v(a\overline{w}y)] \tag{2.232}$$

dir.(2.232) eşitliği (2.231)'de yerine yazılırsa (2.226) elde edilir.

Benzer olarak (2.228) bağıntısı (2.50) için kullanılırsa,(2.14) özelliğinden ve ([5],sf.75,(21))'den,

$$\mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{L}_2\{f(x); u\}; y\} = \mathcal{F}_{s,2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^v u^{2v-2} exp(-a^2/4u^2); y\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^v \mathcal{F}_s\{u^{v-1} exp(-a^2/4u); y^2\}$$

$$= \frac{i}{4} y^v [w^v K_v(awy) - \overline{w}^v K_v(a\overline{w}y)] \tag{2.233}$$

bulunur. (2.233) bağıntısı (2.50)'de yerine yazılırsa (2.227) eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.4.19 $-1 < Re(v) < \frac{1}{2}$, $|arga| < \frac{\pi}{4}$ ve $w = exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ olmak üzere,aşağıdaki eşitliklerin doğruluğu gösterilebilir:

$$(i)\mathcal{L}_2\left\{u^{-2\nu-2}sin\left(\frac{a^2}{4u^2}-\frac{\nu\pi}{2}\right);y\right\}=\frac{i}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{\nu}y^{\nu}[w^{\nu}K_{\nu}(awy)-\overline{w}^{\nu}K_{\nu}(a\overline{w}y)] \quad (2.234)$$

$$(ii)\mathcal{L}_2\left\{u^{-2\nu-2}sin\left(\frac{a^2}{4u^2}-\frac{\nu\pi}{2}\right);y\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{\nu}y^{\nu}[w^{\nu}K_{\nu}(awy)-\overline{w}^{\nu}K_{\nu}(a\overline{w}y)] \quad (2.235)$$

Çözüm: (2.51) bağıntısında,

$$f(x)=x^{\nu}J_{\nu}(ax) \quad (2.236)$$

seçilirse,(2.15) özelliği ve $[5, s. 54, (26)]$ dan,

$$\mathcal{F}_{c,2}\{x^{\nu}J_{\nu}(ax);u\}=\frac{1}{2}\mathcal{F}_c\{x^{\nu/2}J_{\nu}(ax^{1/2});u^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}u^{-2\nu-2}sin\left(\frac{a^2}{4u^2}-\frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (2.237)$$

bulunur.(2.237) eşitliği (2.51)'de yerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{c,2}\{f(x);u\};y\}=\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}u^{-2\nu-2}sin\left(\frac{a^2}{4u^2}-\frac{\nu\pi}{2}\right);y\right\}$$

$$=\frac{y^2}{2}\mathcal{P}_4\{x^{\nu-2}J_{\nu}(ax);y\}$$

bulunur.(2.227) eşitliğinden,

$$\mathcal{L}_2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu}u^{-2\nu-2}sin\left(\frac{a^2}{4u^2}-\frac{\nu\pi}{2}\right);y\right\}=\frac{y^2}{2}\frac{i}{2}y^{\nu-2}[w^{\nu}K_{\nu}(awy)-\overline{w}^{\nu}K_{\nu}(a\overline{w}y)]$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında (2.234) elde edilir.

Benzer olarak (2.236) eşitliği (2.225) de yazılır ve (2.14) özelliği kullanılırsa $[5, s. 110, (28)]$ den (2.235) eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 2.4.23 Aşağıda $\mathcal{L}_2, \mathcal{P}_4$ ve $\mathcal{F}_{s,2}$ dönüşümleri için verilen bağıntılar doğrudur:

(i) $$\mathcal{P}_4\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\};t\}=\frac{\pi}{4}\mathcal{L}_2\{g(u);t\} \quad , \quad (2.238)$$

(ii) $$\mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{P}_4\{g(u);x\};y\} = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}_2\{g(u);t\} \quad . \tag{2.239}$$

İspat: Teorem 2.3.13'de

$$f(x) = \cos(t^2x^2) \tag{2.240}$$

alınırsa (2.9) özelliği ve $[5, \text{s. } 154, (43)]$den,

$$\mathcal{L}_2\{f(x);y\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{f(x^{1/2});y^2\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(t^2x)\,;y^2\} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{y^4+t^4} \tag{2.241}$$

ve (2.181)'eşitliğinden,

$$\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\} = \mathcal{P}_4\{x^{-2}\cos(t^2x^2)\,;u\} = \frac{\pi}{4}u^{-2}exp(-t^2u^2) \tag{2.242}$$

bulunur. (2.241) ve (2.242) eşitlikleri (2.56)'da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{y}{2}.\frac{y^2}{y^4+t^4}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^3g(u)\frac{\pi}{4}u^{-2}exp(-t^2u^2)du$$

$$\int_0^\infty \frac{y^3\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}}{y^4+t^4}dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty uexp(-t^2u^2)\,g(u)du$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Benzer olarak (2.240) ve (2.242)eşitlikleri (2.59) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty x\cos(t^2x^2)\,\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty uexp(-t^2u^2)g(u)du$$

elde edilir ve (2.239) bağıntısı gösterilmiş olur.

Sonuç 2.4.24 $\mathcal{F}_{c,2}$ ve $\mathcal{F}_{s,2}$ dönüşümleri için aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

$$\mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\};t\} = \frac{\pi}{8}g(t)\,, \tag{2.243}$$

$$\mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{F}_{c,2}\{g(u);y\};t\} = \frac{\pi}{8}g(t)\ . \tag{2.244}$$

İspat: Teorem 2.3.12'de

$$f(x) = \mathcal{F}_{s,2}\{g(u);x\} \tag{2.245}$$

olsun.(2.245) eşitliği teoremin (2.49) eşitliğinde yazılırsa,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);x\};u\};t\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_4\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);x\};t\} \tag{2.246}$$

bulunur.(2.246) ifadesinin sağ tarafında (2.238) eşitliği kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_2\{\mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);x\};u\};t\} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\mathcal{L}_2\{g(u);t\} = \mathcal{L}_2\left\{\frac{\pi}{8}g(u);t\right\}$$

elde edilir ve iç tarafların eşitliğinden (2.243) eşitliğine ulaşılır. Benzer biçimde (2.244) için eşitliği teorem 2.3.12'nin (2.52) eşitliği ve (2.239) bağıntıları kullanılarak elde edilir.

Sonuç 2.4.25 Aşağıdaki bağıntılar $\mathcal{F}_{s,2}$, $\mathcal{F}_{c,2}$ ve $\mathcal{P}_4$ dönüşümlerinin varlık koşulu altında doğrudur.

$$\mathcal{P}_4\{\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\};t\} = \mathcal{F}_{c,2}\{\mathcal{P}_4\{g(u);x\};t\} \quad , \tag{2.247}$$

$$\mathcal{P}_4\left\{\frac{1}{y^2}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\};t\right\} = \frac{1}{t^2}\mathcal{F}_{s,2}\{\mathcal{P}_4\{g(u);x\};t\} \quad , \tag{2.248}$$

$$\mathcal{P}_4\left\{u^2\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\};t\right\} = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_2\{f(x);y\};t\} \quad . \tag{2.249}$$

İspat: (2.247) eşitliği (2.238) ve (2.239) eşitliklerinin sonucudur.

(2.248) için teorem 2.3.13'ün (2.55) bağıntısında,

$$f(x) = \sin(t^2x^2) \tag{2.250}$$

alınırsa,

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{\sin(t^2x^2);y\}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty x\sin(t^2x^2)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx \qquad (2.251)$$

bulunur. (2.9) özelliği ve $[5,\text{s.}150,(1)]$ den,

$$\mathcal{L}_2\{\sin(t^2x^2);y\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin(t^2x);y^2\}=\frac{1}{2}\frac{t^2}{t^4+y^4} \qquad (2.252)$$

ifadesi (2.251)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{y}{2}\frac{t^2}{t^4+y^4}\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty x\sin(t^2x^2)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx$$

$$\int_0^\infty y^3\frac{y^{-2}t^2\mathcal{F}_{s,2}\{g(u);y\}}{t^4+y^4}dy=\int_0^\infty x\sin(t^2x^2)\mathcal{P}_4\{g(u);x\}dx$$

bulunur ve (2.248)'nin ispatı tamamlanır. Benzer biçimde (2.249)'in ispatı için

$$g(u)=\frac{u^2}{u^4+t^4} \qquad (2.253)$$

teoerem 2.3.13'ün (2.56) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2}\left\{\frac{u^2}{u^4+t^4};y\right\}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty u^3\frac{u^2}{u^4+t^4}\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du \qquad (2.254)$$

(2.14) özelliği ve $[5,\text{s.}165,(15)]$ den

$$\mathcal{F}_{s,2}\left\{\frac{u^2}{u^4+t^4};y\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{u}{u^2+t^4};y^2\right\}=\frac{\pi}{4}exp(-t^2y^2) \qquad (2.255)$$

ifadesi (2.254)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\{f(x);y\}\,exp(-t^2y^2)\,dy=\int_0^\infty u^3\,\frac{u^2\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}}{u^4+t^4}\,du$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.4.26 Aşağıdaki bağıntı $\mathcal{H}_{v,2}$ ve $\mathcal{K}_{v,2}$ dönüşümlerinin varlık koşulu altında gerçeklenir:

$$\mathcal{H}_{v,2}\left\{u^{2v+1}\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\};t\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{K}_{v,2}\{x^{2v-1}f(x);t\}\qquad .\qquad (2.256)$$

İspat: Teorem 2.3.13'ün (2.59) bağıntısında,

$$g(u)=u^{2v}J_v(t^2u^2)\qquad (2.257)$$

alınırsa (2.187)'dan,

$$\mathcal{P}_4\{g(u);x\}=\mathcal{P}_4\{u^{2v}J_v(t^2u^2);x\}=\frac{1}{2}x^{2v}K_v(t^2x^2)\qquad (2.258)$$

bulunur. (2.257) ve (2.258) eşitlikleri (2.59)'da yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty xf(x)\mathcal{P}_4\{u^{2v}J_v(t^2u^2);x\}dx=\int_0^\infty u^3u^{2v}J_v(t^2u^2)\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2t)K_v(t^2x^2)x^{2v-1}f(x)dx=\int_0^\infty (u^2t)J_v(t^2u^2)u^{2v+1}\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.4.20 $Re(v)>-1$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}_{s,2}\{x^{2v}K_v(t^2x^2);y\}=\pi^{1/2}2^{v-2}\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)t^{2v}(y^4+t^4)^{-v-1/2}\qquad (2.259)$$

olduğunu gösterelim:

Çözüm: Sonuç 2.4.23'ün (2.239) eşitliğinde,

$$g(u) = u^{2v} J_v(t^2 u^2) \tag{2.260}$$

alınırsa (2.187) ve ([5].sf.182,(7))'den

$$\mathcal{P}_4\{g(u); x\} = \mathcal{P}_4\{u^{2v} J_v(t^2 u^2); x\} = \frac{1}{2} x^{2v} K_v(t^2 x^2) \tag{2.261}$$

$$\mathcal{L}_2\{g(u); y\} = 2^{v-1} \pi^{-1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) t^{2v} (y^4 + t^4)^{-v-1/2} \tag{2.262}$$

bulunur. (2.261) ve (2.262) eşitlikleri (2.239)'de yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{F}_{c,2}\left\{\frac{1}{2} x^{2v} K_v(t^2 x^2); y\right\} = \frac{\pi}{4} 2^{v-1} \pi^{-1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) t^{2v} (y^4 + t^4)^{-v-1/2}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında (2.259) eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4.21 Aşağıdaki eşitliği gösterelim:

$$\mathcal{F}_{c,2}\{e^{-ax} \cos(ax); y\} = a(2\pi)^{1/2} (2y)^{-3} exp\left(-\frac{a^2}{2y^2}\right) \quad . \tag{2.263}$$

Çözüm: Sonuç 2.4.23'ün (2.239) eşitliğinde,

$$g(u) = \sin\left(\sqrt{2}au\right) \tag{2.264}$$

alınırsa $[3{,}727 - 10, s.420, (3)]$ den ve $[5, s.153, (32)]$ den

$$\mathcal{P}_4\{g(u); x\} = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \cos(ax) \tag{2.265}$$

$$\mathcal{L}_2\{g(u); y\} = \frac{a}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} y^{-3} exp\left(-\frac{a^2}{2y^2}\right) \tag{2.266}$$

bulunur. (2.265) ve (2.266) eşitlikleri (2.239)'da yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında (2.263) eşitliğine ulaşılır.

BÖLÜM 3 : BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde Potansiyel dönüşümü, Laplace dönüşümü, $\mathcal{E}_{4,1}$ dönüşümü, Fourier sinüs ve Fourier Cosinüs dönüşümlerinin genelleştirilmesi olan $\mathcal{P}_4$, $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{F}_{c,2}$, $\mathcal{F}_{s,2}$ ve $\varepsilon_{4,1}$ İntegral dönüşümlerinin n. dereceye genelleştirilmiş formları olan $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$, $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$, $\mathcal{F}_{s,2n}$ $\mathcal{F}_{c,2n}$ ve $\varepsilon_{4n,1}$ dönüşümleri tanımlanacak ve bu dönüşümler arasındaki bağıntılar ispatlanacaktır. Ayrıca bu genelleştirilmiş integral döüşümleri için Parseval–Goldstein tipi teoremler ve sonuçları örneklerle pekiştirilerek verilecektir.

Tanım 3.1 Laplace dönüşümünün varlık koşulları altında n∈ ℕ için $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü,

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{4n-1} exp(-x^{4n}y^{4n}) f(x)dx \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2 Potansiyel dönüşümün varlık koşulları altında n∈ℕ için $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü;

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)}{x^{4n}+y^{4n}}dx \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3 $\mathcal{F}_c$ ve $\mathcal{F}_s$ dönüşümlerinin varlık koşulları altında $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{F}_{c,2n}$ ve $\mathcal{F}_{s,2n}$ dönüşümleri,

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{2n-1} cos(x^{2n}y^{2n}) f(x)dx \quad , \tag{3.3}$$

$$\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{2n-1} sin(x^{2n}y^{2n}) f(x)dx \quad . \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.4 $\mathcal{E}_{4,1}$ üstel integral dönüşümünün varlık koşulları altında $\mathcal{E}_{4n,1}$ integral dönüşümü, n∈ ℕ olmak üzere ,

$$\mathcal{E}_{4n,1}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{4n-1} exp(x^{4n}y^{4n}) E_1(x^{4n}y^{4n}) f(x)dx \tag{3.5}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1 $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasında

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{4\mathrm{n}}\,\mathcal{L}\left\{f\left(x^{\frac{1}{4n}}\right);\, \mathrm{y}^{4\mathrm{n}}\right\} \tag{3.6}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat : $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümünün tanımında $x^{4n} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{4n-1}(-x^{4n}y^{4n}) f(x)dx$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{n}} \int_0^\infty e^{-uy^{4n}} f(u^{1/4n})\mathrm{du}$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{n}}\mathcal{L}\left\{f\left(x^{\frac{1}{4n}}\right);\, \mathrm{y}^{4\mathrm{n}}\right\}$$

bulunur.

Sonuç 3.1 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile $\mathcal{L}_2$ dönüşümü arasında

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{2\mathrm{n}}L_2\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, \mathrm{y}^{2\mathrm{n}}\right\} \tag{3.7}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat : (3.6) bağıntısında (2.9) bağıntısı kullanılırsa (3.7) bağıntısına kolaylıkla ulaşılır.

Sonuç 3.2 $\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile $\mathcal{L}_4$ dönüşümü arasında ;

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{\mathrm{n}}.L_4\left\{f\left(x^{\frac{1}{n}}\right);\, y^n\right\} \tag{3.8}$$

bağıntısı gerçeklenir.

Teorem 3.2 $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile potansiyel dönüşüm arasında ;

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{2\mathrm{n}}\,\mathcal{P}\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, \mathrm{y}^{2\mathrm{n}}\right\} \tag{3.9}$$

bağıntısı gerçeklenir.

İspat : $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ tanımında $x^{2n} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa ; (1.208) tanımından ;

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)}{x^{4n}+y^{4n}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{2n}f(x).x^{2n-1}}{(x^{2n})^2+(y^{2n})^2}dx$$

$$= \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{uf(u^{1/2n})}{u^2+(y^{2n})^2}du = \frac{1}{2n}\;\mathcal{P}\left\{f\left(u^{\frac{1}{2n}}\right);\, \mathrm{y}^{2\mathrm{n}}\right\}$$

bulunur.

Sonuç 3.3 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile $\mathcal{P}_4$ dönüşümü arasında

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{\mathrm{n}}.\mathcal{P}_4\;\left\{f\left(x^{\frac{1}{n}}\right);\, \mathrm{y}^{\mathrm{n}}\right\} \tag{3.10}$$

bağıntısı vardır.

İspat : (3.9) bağıntısının sağ tarafında (2.11) eşitliği kullanılırsa (3.10) bağıntısına ulaşılır.

Sonuç 3.4 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü ile Stieltjes dönüşümü arasında

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \frac{1}{4\mathrm{n}}.\mathcal{S}\left\{f\left(x^{\frac{1}{4n}}\right);\, \mathrm{y}^{4\mathrm{n}}\right\} \tag{3.11}$$

bağıntısı vardır.

İspat : (3.10) bağıntısının sağ tarafında (2.13) eşitliği kullanılırsa (3.11) eşitliğine ulaşılır.

Teorem 3.3 Aşağıdaki bağıntılar integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında doğrudur:

$$(i) \qquad \mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{F}_c\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, y^{2n}\right\} \quad , \tag{3.12}$$

$$(ii) \qquad \mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{F}_s\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, y^{2n}\right\} \quad . \tag{3.13}$$

İspat : İspatların benzerliğinden dolayı yalnız *(i)* ispatlanacaktır.

(i) $\mathcal{F}_{c,2n}$ dönüşümünün tanımında $x^{2n} = u$ dönüşümü uygulanırsa (2.5) tanımından ;

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{2n-1}cos(x^{2n}y^{2n})f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(uy^{2n})f(u^{1/2n})\mathrm{du}$$

$$= \frac{1}{2n}\mathcal{F}_s\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, y^{2n}\right\}$$

Örnek 3.1 $f(u) = exp(-u^{4n}z^{4n})$ fonksiyonunun $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümünü bulalım :

$$\mathcal{P}_{4n}\{exp(-u^{4n}z^{4n});x\} = \int_0^\infty u^{4n-1}\frac{e^{-u^{4n}}z^{4n}}{u^{4n}+x^{4n}}du \tag{3.14}$$

(3.14) eşitliğinde $u^{4n} + x^{4n} = t$ dönüşümü yapılırsa;

$$\mathcal{P}_{4n}\{exp(-u^{4n}z^{4n});x\} = \int_{x^{4n}}^\infty \frac{e^{-(t-x^{4n})}z^{4n}}{t.4n}dt = \frac{e^{x^{4n}}z^{4n}}{4n}\int_{x^{4n}}^\infty \frac{e^{-tz^{4n}}}{t}dt \tag{3.15}$$

(3.15) eşitliğinde $tz^{4n} = v$ dönüşümü yapılırsa ;

$$\mathcal{P}_{4n}\{exp\,(-u^{4n}z^{4n}\,);x\} = \frac{e^{x^{4n}z^{4n}}}{4n}E_1(x^{4n}z^{4n}) \qquad (3.16)$$

bulunur.

Teorem 3.4 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile aşağıdaki bağıntı doğrudur.

$$\mathcal{L}^2{}_{4n}\{f(x);y\} = \mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\};y\} = \frac{1}{4n}\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} \qquad (3.17)$$

İspat : $\mathcal{L}_{4n}$ tanımını arka arkaya uygularsak ;

$$\mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\};y\} = \int_0^\infty u^{4n-1}e^{-u^{4n}}y^{4n}\;\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\}du$$

$$= \int_0^\infty u^{4n-1}e^{-u^{4n}}y^{4n}\left(\int_0^\infty x^{4n-1}e^{-x^{4n}}u^{4n}\,f(x)dx\right)du$$

$$= \int_0^\infty x^{4n-1}.f(x)\left(\int_0^\infty x^{4n-1}.e^{-u^{4n}(y^{4n}+x^{4n})}du\right)dx$$

$$= \frac{1}{4n}\int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)}{x^{4n}+y^{4n}}dx = \frac{1}{4n}\,\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\}$$

bulunur.

Örnek 3.2 Teorem (4.4)' ü kullanarak

$$(i) \qquad \mathcal{P}_{4n}\{sin\,(\,a^{2n}x^{2n}\,);y\} = \frac{\pi}{4n}exp(-a^{2n}y^{2n}\,) \quad , \qquad (3.18)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{P}_{4n}\{x^{-2n}cos\,(\,a^{2n}x^{2n}\,);y\} = \frac{\pi}{4n}y^{-2n}\,exp(-a^{2n}y^{2n}\,). \qquad (3.19)$$

bağıntılarını gösterelim :

(i) Teorem (3.4)'te $f(x) = sin(a^{2n}x^{2n})$ alınırsa (3.6) kullanılarak,

$$\mathcal{L}_{4n}\{sin\,(\,a^{2n}x^{2n}\,);u\} = \frac{1}{n}\mathcal{L}_4\{sin\,(a^{2n}x^{2n});u^n\}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{a^{2n}\sqrt{\pi}}{8u^{6n}} exp\left(-\frac{a^{4n}}{4u^{4n}}\right)$$

bulunur. Buradan ,

$$\mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{sin(\ a^{2n}x^{2n}\ );u\};y\} = \mathcal{L}_{4n}\left\{\frac{1}{n}\frac{a^{2n}\sqrt{\pi}}{8u^{6n}} exp\left(-\frac{a^{4n}}{4u^{4n}}\right);y\right\}$$

$$= \frac{a^{2n}\sqrt{\pi}}{8n}\mathcal{L}_{4n}\left\{u^{-6n}\, exp\left(-\frac{a^{4n}}{4u^{4n}}\right);y\right\}$$

$$= \frac{a^{2n}\sqrt{\pi}}{8n}\frac{1}{4n}\mathcal{L}\left\{u^{-3/2}\ exp\left(\frac{-a^{4n}}{4u}\right);y^{4n}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{16n^2} exp(-a^{2n}y^{2n}) \qquad (3.20)$$

elde edilir. *f(x)* ve (3.20) bağıntısı (3.17) de yerine yazılırsa ;

$$\frac{\pi}{16n^2} exp(-a^{2n}y^{2n}) = \frac{1}{4n}\mathcal{P}_{4n}\{sin(a^{2n}x^{2n});y\}$$

den (3.18) eşitliğine ulaşılır.

(i) Teorem (3.4)'de

$$f(x) = \frac{cos(a^{2n}x^{2n})}{x^{2n}} \qquad (3.21)$$

alınırsa;

$$\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\} = \frac{1}{n}\mathcal{L}_4\left\{f(x^{1/n});u^n\right\} = \frac{1}{n}\mathcal{L}_4\left\{\frac{cos(\ a^{2n}x^2\ )}{x^2};u^n\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4nu^{2n}} exp\left(\frac{-a^{4n}}{4u^{4n}}\right)$$

bulunur.

$$\mathcal{L}^2{}_{4n}\{f(x);y\} = \mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\};y\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4n}.\frac{1}{4n}\mathcal{L}\left\{u^{-1/2}\ exp\left(\frac{-a^{4n}}{4u}\right);y^{4n}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{16n^2} y^{-2n}\, exp(-a^{2n}y^{2n}) \qquad (3.22)$$

bulunur. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri (3.17)'de yerine yazılırsa (3.19) eşitliğine kolaylıkla ulaşılır.

Örnek 3.3 $x^{4n} > b$ olmak üzere ; $\left\{x^{-4n}(x^{4n}-b)^{-1/2}; y\right\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm : Teorem (4.4)'de $f(x) = \mathrm{x}^{-4\mathrm{n}}(\mathrm{x}^{4\mathrm{n}} - \mathrm{b})^{-1/2}$ alınsın. O zaman ;

$$\mathcal{L}_{4n}\left\{x^{-4n}(x^{4n}-b)^{-1/2}; u\right\} = \frac{1}{4n}\mathcal{L}\left\{x^{-1}(x-b)^{-1/2}; u^{4n}\right\}$$

$$= \frac{1}{4n}\pi\ b^{-1/2}\, erfc\,(\, b^{-1/2}\, u^{2n})$$

bulunur. $[5, s.136, (26)]$.

$$\mathcal{L}^2{}_{4n}\{f(x); y\} = \mathcal{L}_{4n}\left\{\mathcal{L}_{4n}\left\{x^{-4n}(x^{4n}-b)^{-1/2}; u\right\}; y\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4n}\ b^{-1/2}\ \mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\ \left\{erfc\ \left(\ b^{1/2}\, u^{2n}\right); y\right\}$$

$$= \frac{\pi}{16n^2}\ b^{-1/2}\ \mathcal{L}\left\{erfc\ \left(\ b^{1/2}\, u^{1/2}\right); y^{4n}\right\}$$

$$= \frac{\pi\ b^{-1/2}}{16n^2}\ \mathrm{y}^{-4\mathrm{n}}(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}} + \mathrm{b})^{-1/2}\left[(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}} + \mathrm{b})^{-1/2} - \ b^{-1/2}\right] \qquad (3.23)$$

olur. $[5, s.177, (9)]$

f(x) ve (3.23) eşitlikleri (3.17)'de yerine yazılırsa

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\ \left\{\mathrm{x}^{-4\mathrm{n}}(\mathrm{x}^{4\mathrm{n}} - \mathrm{b})^{-1/2}; \mathrm{y}\right\} = \frac{\pi}{4n^2}\frac{(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}} + \mathrm{b})^{-1/2} - \ b^{-1/2}}{b^{1/2}\mathrm{y}^{4\mathrm{n}}(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}} + \mathrm{b})^{1/2}} \qquad (3.24)$$

bulunur.

Teorem 3.5 : n∈ ℕ olmak üzere; integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında aşağıdaki Parseval – Goldstein tipi bağıntılar doğrudur.

$$(i)\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}dy=\frac{1}{4n}\int_0^\infty x^{4n-1}f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx \quad ,(3.25)$$

$$(ii)\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}dy=\frac{1}{4n}\int_0^\infty u^{4n-1}g(u)\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du\,,(3.26)$$

$$(iii)\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx=\int_0^\infty u^{4n-1}g(u)\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\} \quad . \quad (3.27)$$

İspat : İspatların benzerliğinden sadece (i) ispatlanacaktır. (ii) için (i)'deki ispatın sırası değiştirilir. (iii) ise (i) ve (ii) şıklarından çıkmaktadır.

(i) (4.25)'te $\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}$ (3.1) tanımından açılıp, mutlak yakınsaklıktan integrasyon sırası değiştirilirse (3.17)'den ;

$$\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}dy$$

$$=\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}\left(\int_0^\infty x^{4n-1}(e^{-x^{4n}}y^{4n})f(x)dx\right)dy$$

$$=\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\left(\int_0^\infty y^{4n-1}\,e^{-x^{4n}y^{4n}}\,\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}dy\right)dx$$

$$=\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)(\mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\};x\})dx$$

$$=\frac{1}{4n}\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx$$

bulunur.

Sonuç 3.5 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile aşağıdaki bağıntı doğrudur.

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\};z\} = \mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\};z\} \tag{3.28}$$

İspat : (3.26) eşitliğinde,

$$g(u) = exp(-u^{4n}y^{4n}) \tag{3.29}$$

alınırsa , (3.6) eşitliğinden ve $[5, s.143, (1)]$ den

$$\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\} = \mathcal{L}_{4n}\{exp(-u^{4n}y^{4n});y\}$$

$$= \frac{1}{4n}\mathcal{L}\{exp(-uz^{4n});y^{4n}\}$$

$$= \frac{1}{4n(y^{4n}+z^{4n})} \tag{3.30}$$

bulunur. (3.29) ve (3.30) bağıntıları (3.25)'de yerine yazılırsa;

$$\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\frac{1}{4n(y^{4n}+z^{4n})}dy = \frac{1}{4n}\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\{exp(-uz^{4n});y^{4n})\,;x\}dx$$

$$= \frac{1}{4n(y^{4n}+z^{4n})}$$

(3.2) tanımı integralin iki yanında kullanılırsa mutlak yakınsaklıktan da yararlanarak;

$$\int_0^\infty y^{4n-1}\frac{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}}{y^{4n}+z^{4n}}dx = \int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\left(\int_0^\infty u^{4n-1}\frac{exp(-u^{4n}z^{4n})}{u^{4n}+x^{4n}}du\right)dx$$

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\};z\} = \int_0^\infty u^{4n\text{-}1}\,exp(-u^{4n}z^{4n})\left(\int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)dx}{x^{4n}+u^{4n}}\right)du$$

$$= \int_0^\infty u^{4n\text{-}1}\,exp(-u^{4n}z^{4n})\,\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du$$

bulunur. (3.1) tanımından (3.28) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.6 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\mathcal{E}_{4n,1}\{f(x);y\} = 4n\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\};z\} \tag{3.31}$$

dir.

İspat : Sonuç (3.5) deki (3.29) ve (3.30) bağıntıları, (3.26)'da yerine yazılırsa ;

$$\int_0^\infty y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\frac{1}{4n(y^{4n}+z^{4n})}\,dy$$

$$= \frac{1}{4n}\int_0^\infty u^{4n-1}\,exp(-u^{4n}z^{4n})\,\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du \tag{3.32}$$

bulunur.(3.32)'nin sağ tarafında $\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}$, (3.2) tanımına göre açık yazılıp integrallerin mutlak yakınsaklığı nedeniyle integrasyon sırası değiştirilirse (3.5) eşitliği elde edilir.(3.32)'nin sol tarafında ise tanım (3.2)'den $\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}$ ' nin $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümü olduğu görülür:

$$\int_0^\infty \frac{y^{4n-1}\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}}{y^{4n}+z^{4n}} = \int_0^\infty u^{4n-1}\,exp(-u^{4n}z^{4n})\left(\int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)}{x^{4n}+u^{4n}}\,dx\right)du$$

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\};z\} = \int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\left(\int_0^\infty \frac{u^{4n-1}\,exp(-u^{4n}z^{4n})}{u^{4n}+x^{4n}}\,du\right)dx \tag{3.33}$$

(3.16) bağıntısı uyarınca

$$\mathcal{P}_{4n}\{exp(-uz^{4n};y^{4n})\,;x\} = \frac{exp(x^{4n}z^{4n})}{4n}E_1(x^{4n}z^{4n})$$

bağıntısı (3.33)'de yerine yazılırsa tanım 3.4'den

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\};z\} = \frac{1}{4n}\int_0^\infty x^{4n-1}\,exp(x^{4n}z^{4n})E_1(x^{4n}z^{4n})f(x)dx$$

$$= \tfrac{1}{4n}\,\mathcal{E}_{4n,1}\{f(x);z\}$$

bulunur.

Teorem 3.6 : n∈ ℕ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında doğrudur:

$$(i) \qquad \mathcal{F}_{s,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\};u\} = \frac{u^{2n}}{n}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\} \quad , \qquad (3.34)$$

$$(ii) \qquad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} \quad , \qquad (3.35)$$

$$(iii) \qquad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{y^{2n}}{2n}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};y\right\} \quad , \qquad (3.36)$$

$$(iv) \qquad \mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} \quad , \qquad (3.37)$$

$$(v) \qquad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);u\};y\} = \mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} \quad , \qquad (3.38)$$

$$(vi) \qquad \mathcal{F}_{s,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} = \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);u\};y\} \quad . \qquad (3.39)$$

İspat : Sadece (3.34) ispatlanacaktır. (3.35), (3.36) ve (3.37) ise (3.34)'e benzer metotla ispatlanabilir. (3.38)'in ispatı (3.35)'e ve (3.37)'den (3.39)'un ispatı ise (3.34) ve (3.36)'dan çıkmaktadır.

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} = \int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\,sin(y^{2n}u^{2n})dy$$

$$= \int_0^\infty y^{2n-1}sin(y^{2n}u^{2n})\left(\int_0^\infty x^{2n-1}\,exp(x^{2n}y^{2n})f(x)dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty x^{2n-1}f(x)\left(\int_0^\infty y^{2n-1}\,exp(x^{2n}y^{2n})sin(y^{2n}u^{2n})dy\right)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{2n-1}f(x)\,\mathcal{L}_{2n}\{sin(y^{2n}u^{2n});x\} \qquad (3.40)$$

bulunur. Önce (3.6) kullanılarak ([5], sf 150, (1))' den

$$\mathcal{L}_{2n}\{sin(y^{2n}u^{2n});x\} = \frac{1}{2n}\mathcal{L}\{sin(y.u^{2n});x^{2n}\}$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{u^{2n}}{u^{4n}+x^{4n}} \tag{3.41}$$

bulunur. (3.41) ; (3.40)'da yerine yazılır ve x^{2n} ile çarpılıp bölünürse (3.2) tanımından ;

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\};u\} = \frac{u^{2n}}{2n}\int_0^\infty \frac{x^{4n-1}\left(f(x)/x^{2n}\right)}{u^{4n}+x^{4n}}dx$$

$$= \frac{u^{2n}}{n}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\}$$

elde edilir.

Teorem 3.7 : İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile aşağıdaki Parseval – Goldstein tipi bağıntılar doğrudur.

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{2n-1}f(x)\,\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}\,dx \quad , (3.42)$$

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{2n}\int_0^\infty u^{4n-1}\,g(u)\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\}du \, , (3.43)$$

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2n}\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{2n}\int_0^\infty u^{2n-1}\,\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du \quad , (3.44)$$

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2n}\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{g(u)}{u^{2n}};x\right\}dx \, , (3.45)$$

$$\int_0^\infty x^{4n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx = \int_0^\infty u^{4n-1}\,g(u)\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\}du \ . \tag{3.46}$$

İspat : Sadece (3.42) ispatlanacaktır. (3.43), (3.44) ve (3.45) benzer yöntemle ispatlanır. (3.46) ise (3.42) ve (3.43) bağıntılarından çıkmaktadır.

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy$$

$$= \int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\left(\int_0^\infty x^{2n-1}\,exp(-x^{2n}y^{2n}).f(x)dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty x^{2n-1}\,f(x)(\int_0^\infty y^{2n-1}\,exp(-x^{2n}y^{2n})\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}dy)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{2n-1}\,f(x)\left(\mathcal{L}_{2n}\left\{\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\};x\right\}\right)dx \qquad (3.47)$$

elde edilir. (3.36) bağıntısından

$$\mathcal{L}_{2n}\left\{\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\};x\right\} = \frac{1}{2n}\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\} \qquad (3.48)$$

bulunur. (3.48), (3.47)'de yerine yazılırsa ;

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy = \frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{2n-1}\,f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx$$

elde edilir.

Sonuç 3.6 : Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin varlığı ve mutlak yakınsaklık koşulu ile doğrudur.

$$\mathcal{P}_{4n}\left\{\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\};t\right\} = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\{g(u);t\} \quad , \qquad (3.49)$$

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\};y\} = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{g(u);y\} \quad . \qquad (3.50)$$

İspat : Teorem 4.7'nin (4.43) bağıntısında

$$f(x) = \cos(t^{2n}x^{2n}) \qquad (3.51)$$

alınırsa,

$$\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{L}\left\{f\left(x^{1/2n}\right);y^{2n}\right\} = \frac{1}{2n}\mathcal{L}\{\cos(t^{2n}x);y^{2n}\}$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{y^{2n}}{t^{4n}+y^{4n}} \tag{3.52}$$

olur. Ayrıca (3.19)'dan

$$\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\} = \mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{cos(t^{2n}x^{2n})}{x^{2n}};u\right\} = \frac{\pi}{4}u^{-2n}\,exp(-t^{2n}u^{2n}) \tag{3.53}$$

bulunur. (3.52) ve (3.53), (3.43)'de yerine yazılırsa ;

$$\int_0^\infty y^{2n-1}\frac{1}{2n}\frac{y^{2n}}{t^{4n}+y^{4n}}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}dy$$

$$= \frac{1}{2n}\int_0^\infty u^{4n-1}\ g(u)\frac{\pi}{4}u^{-2n}\,exp(t^{2n}u^{2n})\,du$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{4n-1}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}}{t^{4n}+y^{4n}}dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty u^{2n-1}\,exp(-t^{2n}u^{2n})\,g(u)du$$

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\};t\} = \frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\{g(u);t\}$$

elde edilir. Benzer olarak (3.51) ve (3.53) eşitlikleri (3.46)'da yerine yazılırsa ;

$$\int_0^\infty x^{2n-1}cos(t^{2n}x^{2n})\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx) = \int_0^\infty u^{4n-1}\ g(u)\frac{\pi}{4}u^{-2n}\,exp(-t^{2n}u^{2n})\,du \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.54) eşitliğinin sol tarafı (3.3) tanımından ;

$\mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\};t\}$ olur. Sağ taraf ise (3.1) tanımından $\frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{g(u);y\}$ bulunur ve (3.50) ispatı tamamlanır.

Örnek 3.4 : $\frac{-1}{2} < Re(v) < \frac{1}{2}$ ve $Re(z^n) > |Im\,(a)|$ olmak üzere ;

$$\mathcal{P}_{4n}\left\{(y^{4n}-a^2)^{-v-\frac{1}{2}};z\right\} = \frac{\pi}{\cos(v\pi)}(z^{4n}+a^2)^{-v-\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

eşitliğini gösterelim :

$\frac{-1}{2} < Re(v) < \frac{1}{2}$ olmak üzere ; $g(u) = u^{2nv} J_v(au^{2n})$ olsun.

$$\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u); y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{F}_s\left\{g\left(u^{1/2n}\right); y^{2n}\right\}$$

$$= \frac{1}{2n}\mathcal{F}_s\{u^v J_v(au); y^{2n}\}$$

olur. $[5, s.100, (8)]$ den

$$\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u); y\} = \frac{1}{2n}\sqrt{\pi}2^v a^v \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)\right]^{-1} (y^{4n} - a^2)^{-v-\frac{1}{2}} \tag{3.56}$$

bulunur. Ayrıca $Re(z^n) > |I_m(a)|$ olmak üzere $[5, s.182, (7)]$'den

$$\mathcal{L}_{2n}\{g(u); z\} = \mathcal{L}_{2n}\{u^{2nv} J_v(au^{2n}); z\}$$

$$= \frac{1}{2n}\mathcal{L}\{u^v J_v(au); z^{2n}\}$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{2^v}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)a^v \frac{1}{(z^{4n} + a^2)^{v-\frac{1}{2}}} \tag{3.57}$$

bulunur. (3.56) ve (3.57) bağıntıları (3.49)'da yazılırsa ;

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\frac{(2a)^v}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{1}{(y^{4n} - a^2)^{v+\frac{1}{2}}}; z\right\} = \frac{(2a)^v}{2n\sqrt{\pi}}\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}\frac{1}{(z^{4n} + a^2)^{v+\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Gerekli sadeleşme ve düzenlemeler yapılırsa ;

$$\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{1}{(y^{4n} - a^2)^{v+\frac{1}{2}}}; z\right\} = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - v\right)}{(z^{4n} + a^2)^{v+\frac{1}{2}}} \tag{3.58}$$

bulunur.

$$\Gamma\left(v + \tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2} - v\right) = \frac{\pi}{\sin\left(v+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{\pi}{\cos(v\pi)} \tag{3.59}$$

olduğundan (4.59) eşitliği (4.58)'de yerine yazılırsa (4.55) eşitliğine ulaşılır.

BÖLÜM 4: SONUÇLAR

Bu bölümde, tez çalışması doğrultusunda elde edilen yeni tanımlamalar ve bu tanımlamalar arasındaki bağıntılar, teoremler sıralanacaktır. Bu bağıntılar sayesinde integral dönüşüm tablolarında bulunmayan yeni örnekler gösterilecektir. Buradan bu çalışmaların devamında integral dönüşüm tablolarının geliştirilebileceği görülmektedir. Bu sonuçlar şöyle sıralanabilir:

1) Laplace dönüşümünün varlık koşulları altında n∈ ℕ için $\mathcal{L}_{4n}$ dönüşümü,

$$\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{4n-1} exp(-x^{4n}y^{4n}) f(x)dx$$

olarak tanımlanmıştır.

2) Potansiyel dönüşümün varlık koşulları altında n∈ ℕ için , $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümü,

$$\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty \frac{x^{4n-1}f(x)}{x^{4n}+y^{4n}}dx$$

olarak tanımlanmıştır.

3) $\mathcal{F}_c$ ve $\mathcal{F}_s$ dönüşümlerinin varlık koşulları altında n∈ ℕ için , $\mathcal{F}_{c,2n}$ ve $\mathcal{F}_{s,2n}$ dönüşümleri ,

$$\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{2n-1} cos(x^{2n}y^{2n}) f(x)dx$$

$$\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{2n-1} sin(x^{2n}y^{2n}) f(x)dx$$

olarak tanımlanmıştır.

4) $\mathcal{E}_{4,1}$ üstel integral dönüşümünün varlık koşulları altında $\mathcal{E}_{4n,1}$ integral dönüşümü, n∈ ℕ olmak üzere ,

$$\mathcal{E}_{4n,1}\{f(x);y\} = \int_0^{\infty} x^{4n-1} exp(x^{4n}y^{4n}) E_1(x^{4n}y^{4n}) f(x)dx$$

olarak tanımlanmıştır.

5) $\mathcal{L}_{4n}$ dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasında

$$\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\} = \frac{1}{4n}\,\mathcal{L}\left\{f\left(x^{\frac{1}{4n}}\right);\, y^{4n}\right\} \tag{3.6}$$

bağıntısı gösterilmiştir.

6) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{L}_{4n}$ dönüşümü ile $\mathcal{L}_2$ dönüşümü arasında

$$\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{L}_2\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, y^{2n}\right\}$$

bağıntısının gerçeklendiği gösterilmiştir.

7) $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümü ile potansiyel dönüşüm arasında ;

$$\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2n}\,\mathcal{P}\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, y^{2n}\right\}$$

bağıntısının gerçeklendiği gösterilmiştir.

8) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümü ile $\mathcal{P}_4$ dönüşümü arasında

$$\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} = \frac{1}{n}\mathcal{P}_4\left\{f\left(x^{\frac{1}{n}}\right);\, y^{n}\right\}$$

bağıntısının gerçeklendiği gösterilmiştir.

9) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında $\mathcal{P}_{4n}$ dönüşümü ile Stieltjes dönüşümü arasında,

$$\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\} = \frac{1}{4n}\,\mathcal{S}\left\{f\left(x^{\frac{1}{4n}}\right);\, y^{4n}\right\}$$

bağıntısının gerçeklendiği gösterilmiştir.

10) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

(i) $$\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2\mathrm{n}}\mathcal{F}_c\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, \mathrm{y}^{2\mathrm{n}}\right\} \quad ,$$

(ii) $$\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);y\} = \frac{1}{2\mathrm{n}}\mathcal{F}_s\left\{f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right);\, \mathrm{y}^{2\mathrm{n}}\right\} \quad .$$

bağıntıları elde edilmiştir.

11) $f(u) = exp(-u^{4n}z^{4n})$ fonksiyonunun $\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}$ dönüşümü,

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{exp\,(-u^{4n}z^{4n})\,;x\} = \frac{e^{x^{4n}z^{4n}}}{4n}E_1(x^{4n}z^{4n})$$

olarak bulunmuştur.

12) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\mathcal{L}^2{}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\} = \mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\};y\} = \frac{1}{4n}\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\}$$

bağıntısı bulunmuştur.

13) Aşağıdaki bağıntılar elde edilmiştir:

$$\mathcal{P}_{4n}\{sin\,(a^{2n}x^{2n})\,;y\} = \frac{\pi}{4n}exp(-a^{2n}y^{2n}) \quad ,$$

$$\mathcal{P}_{4n}\{x^{-2n}cos\,(a^{2n}x^{2n})\,;y\} = \frac{\pi}{4n}y^{-2n}\,exp(-a^{2n}y^{2n}) \quad .$$

14) $x^{4n} > b$ olmak üzere ;

$$\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\left\{x^{-4n}(x^{4n}-b)^{-1/2};y\right\} = \frac{\pi}{4n^2}\cdot\frac{(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}}+\mathrm{b})^{-1/2} - b^{-1/2}}{b^{1/2}\mathrm{y}^{4\mathrm{n}}(\mathrm{y}^{4\mathrm{n}}+\mathrm{b})^{1/2}}$$

bağıntısı bulunmuştur.

15) $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ olmak üzere; integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında aşağıdaki Parseval – Goldstein tipi bağıntıların gerçeklendiği gösterilmiştir.

(i) $$\int_0^\infty y^{4\mathrm{n}-1}\,\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{f(x);y\}\mathcal{L}_{4\mathrm{n}}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{4n}\int_0^\infty x^{4\mathrm{n}-1}f(x)\mathcal{P}_{4\mathrm{n}}\{g(u);x\}dx \quad ,$$

$(ii)\ \int_0^{\infty} y^{4n-1}\,\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\}\mathcal{L}_{4n}\{g(u);y\}dy = \frac{1}{4n}\int_0^{\infty} u^{4n-1} g(u)\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du$,

$(iii)\int_0^{\infty} x^{4n-1} f(x)\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx = \int_0^{\infty} u^{4n-1} g(u)\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}$.

16) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);y\};z\} = \mathcal{L}_{4n}\{\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\};z\}$$

bağıntısı gösterilmiştir.

17) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\mathcal{E}_{4n,1}\{f(x);y\} = 4n.\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{L}_{4n}\{f(x);u\};z\} \qquad (3.31)$$

bağıntısı elde edilmiştir.

18) n∈ ℕ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar integrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında elde edimiştir:

$(i)\quad \mathcal{F}_{s,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\};u\} = \frac{u^{2n}}{n}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{f(x)}{x^{2n}};u\right\}$,

$(ii)\quad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{P}_{4n}\{f(x);y\}$,

$(iii)\quad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{y^{2n}}{2n}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x^{2n}}};\mathrm{y}\right\}$,

$(iv)\quad \mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} = \frac{1}{2n}\mathcal{P}_{4n}\{\mathrm{f(x);y}\}$,

$(v)\quad \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{f(x);u\};y\} = \mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\}$,

$(vi)\quad \mathcal{F}_{s,2n}\{\mathcal{L}_{2n}\{f(x);u\};y\} = \mathcal{L}_{2n}\{\mathcal{F}_{c,2n}\{f(x);u\};y\}$.

19) İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu ile aşağıdaki Parseval – Goldstein tipi bağıntılar elde edilmiştir:

(i) $$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy=\frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{2n-1}\mathrm{f(x)}\,\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}\,dx \quad ,$$

(ii) $$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\}\,dy=\frac{1}{2n}\int_0^\infty u^{4n-1}\,\mathrm{g(u)}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x^{2n}}};\mathrm{u}\right\}du \quad ,$$

(iii) $$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2n}\{g(u);y\}\,dy=\frac{1}{2n}\int_0^\infty u^{2n-1}\,\mathcal{P}_{4n}\{f(x);u\}du \quad ,$$

(iv) $$\int_0^\infty y^{2n-1}\mathcal{L}_{2n}\{f(x);y\}\mathcal{F}_{c,2n}\{g(u);y\}\,dy=\frac{1}{2n}\int_0^\infty x^{4n-1}\,\mathrm{f(x)}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{\mathrm{g(u)}}{\mathrm{u^{2n}}};\mathrm{x}\right\}dx \quad ,$$

(v) $$\int_0^\infty x^{4n-1}\,\mathrm{f(x)}\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\}dx=\int_0^\infty u^{4n-1}\,\mathrm{g(u)}\mathcal{P}_{4n}\left\{\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x^{2n}}};\mathrm{u}\right\}du \quad .$$

20) Aşağıdaki bağıntılar dönüşümlerin varlığı ve mutlak yakınsaklık koşulu ile gösterilmiştir.

(i) $$\mathcal{P}_{4n}\{\mathcal{F}_{s,2n}\{g(u);y\};t\}=\frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{\mathrm{f(x);y}\}\{g(u);t\} \quad ,$$

(ii) $$\mathcal{F}_{c,2n}\{\mathcal{P}_{4n}\{g(u);x\};y\}=\frac{\pi}{4}\mathcal{L}_{2n}\{\mathrm{g(u);y}\} \quad .$$

21) $\frac{-1}{2}<Re(v)<\frac{1}{2}$ ve $Re(z^n)>|Im\,(a)|$ olmak üzere ;

$$\mathcal{P}_{4n}\left\{(y^{4n}-a^2)^{-v-\frac{1}{2}};z\right\}=\frac{\pi}{\cos(v\pi)}(z^{4n}+a^2)^{-v-\frac{1}{2}}$$

bağıntısı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[**1**] Brown,D.,Dernek,N.,Yürekli,O.(2006) Identities For The Exponantial Integral and The Complementary Error Transform, Applied Mathematics and Computation,182, 1377-1384

[**2**] Debnath,L.,Bhatta,D.(2007) Integral Transforms and Their Applications,Second Edition.Taylor and Francis Group,LLC.

[**3**] Dernek,N.,Srivastava,H.M.,Yürekli,O.(2008) Parseval-Goldstein Type Identities Involving The $\mathcal{L}_4$ −Transforms, and The $\mathcal{P}_4$ −Transform and Their Applications. Integral Transforms and Special Functions, Vol.18,No:6,397-408

[**4**] Dernek,N.,Srivastava,H.M.,Yürekli,O.(2007) Parseval-Goldstein Type Identities Involving The $\mathcal{F}_{s,2}$ −Transforms, The $\mathcal{F}_{c,2}$ −Transform and the $\mathcal{P}_4$-Transform and Their Applications.Integral Transforms and Special Function,vol.18,No:6,397-408

[**5**] Erdelyi,A.,Magnus,W.,Oberhettinger,F.,Tricomi,F.G.(1954) Table of Integral Trans forms.Vol I,McGraw-Hill,NY-Toronto

[**6**] Erdelyi,A.,Magnus,W.,Oberhettinger,F.,Tricomi,F.G.(1954) Table of Integral Trans forms.Vol II,McGraw-Hill,NY-Toronto

[**7**] Oberhittinger,F.,Badii,K.(1973) Tables of Laplace Transforms.Springer-Verlag,NY.

[**8**] Srivastava,H.M.,Yürekli,O.(1991) A Theorem On Widder's Potantial Transform and Its Applications.Internat Journal of Mathematics Education in Science and Technology.Vol.28,616-621

[**9**] Srivastava,H.M.,Singh,S.P.(1985) A Note On The Widder Transform Related to The Poisson Integral For A Half-Plane.Internat Journal Of Mathematical Education in Science and Technology,16(6),675-677

[**10**] Yürekli,O.(1999)New Identities Involving The Laplace and The $\mathcal{L}_2$-Transforms and Their Applications.Journal Of Applied Math. and Comp.Vol.99,141-151

[**11**] Yürekli,O.(1999)Theorems On $\mathcal{L}_2$-Transform and Its Applications.Journal Of Complex Veriables Theory and Applications.Vol.38,95-107.

[**12**] Yürekli,O.,Saygınsoy,Ö.,(1998) A Theorem On A Laplace Type Integral Transform and Its Applications.Internat. Journal of Math.Edu.in.Sci.And Tech. Vol.29,561-567

[**13**] Yürekli,O.,Graziadio,C.(1997) A Theorem On The Laplace Transformand Its Applications.Internat Journal Of Math.Edu.in Sci.and Tech.Vol.28,616-621

[**14**] Yürekli,O.,Sadek I.(1991) AParseval-Goldstein Type Theorem On The Widder Potantial Transform and Its Applications.Internat.J.Math.& Math. Sci. Vol.14, No:3,517-524

[**15**] Yürekli,O.(1987) A Parseval Type Theorem Applied to Certain Integral Transforms.IMA Journal of Applied Math.,42,241-249.

[**16**] Spanier,J.,Oldham,K.B.(1987) An Atlas of Functions.Hemisphare Publishing Corporation,New York.

[**17**] Gradshteyn,I.S.,Ryzhik,I.M.(1980) Table of Integrals,Series and Products,4th ed.,Acadenic pres,Orlando.

[**18**] Gradshteyn,I.S.,Ryzhik,I.M.(2000) Table of Integrals,Series and Products,6th ed.,Acadenic pres,New York and London.

ÖZGEÇMİŞ

Eyüp Ömer Ölçücü, 1980 yılında İstanbulda doğdu. İlk,orta ve lise öğrenimini İstanbulda tamamladı. 2004 yılında Ankara Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halihazırda İstanbulda özel bir kuruluşta Matematik öğretmenliği yapmakta olup, evli ve bir çocuk babasıdır.