山东大学学报(理学版)2018 年 12 月 第 53 卷 第 12 期
Journal of Shandong University (Natural Science), Vol.53, No.12, 2018
© 山东大学科技期刊社版权所有
E-mail:xblxb@ sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel:+86-0531-88366917

文章编号:1671-9352(2018)12-0114-06 DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.504

等级制度下带有白噪声的群集运动

吴晨,金英花*,王世丽
(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要:研究了等级制度下带有白噪声的群集运动。首先提出了等级制度下带有白噪声的模型,然后利用伊藤公式、数学归纳法和数学期望的性质证明了当噪声强度满足一定的条件,时间趋于无穷大时,等级群体可以达到群集运动。最后,通过数值仿真给出了群集受到噪声影响后的状态图和误差图的例子。实验结果证明了结论的正确性。

关键词:群集运动;等级制度;白噪声;数学归纳法
中图分类号:TP13 **文献标志码**:A
引用格式:吴晨,金英花,王世丽.等级制度下带有白噪声的群集运动[J]. 山东大学学报(理学版),2018,53(12):114-119.

Flocking under hierarchical leadership with white noise

WU Chen, JIN Ying-hua*, WANG Shi-li
(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, Jiangsu, China)

Abstract: The flocking under hierarchical leadership with white noise was mainly studied. First we proposed a model with white noise under the hierarchical leadership, and then use the properties of Itô formula, mathematical induction and mathematical expectation function to prove that when the noise intensity satisfies certain conditions and the time tends to infinity, the hierarchical group can reach the flocking. Finally, an example of state diagram and error graph after cluster is affected by noise is given by numerical simulation. The experimental results demonstrate the correctness of the conclusions.

Key words: flocking; hierarchical leadership; white noise; mathematical induction

0 引言

生活中我们会注意到这样一个现象,天上飞的鸟群、水中游的鱼群在一段时间后队形会非常有规律。用数学语言描述就是所有个体的速度大小和方向相同,位移差不变。我们将群体中这种有规律的运动称之为群集运动(flocking)。群集运动不仅广泛存在于自然界中,在无人机飞行和机器人控制等人造系统中也有广泛应用,因此引起了来自生物学、数学、物理学和计算机科学等方向学者的广泛关注[1-13]。Reynolds[14]是最早用计算机程序模拟群集运动的学者,他在 1986 年设计了第一个群集运动仿真程序,并由此提出了群集运动的 3 条基本规则:(1) 聚集规则;(2) 碰撞避免;(3) 速度同步。这 3 条规则也为以后的学者构造自己模型提供了重要的参考依据。1995 年匈牙利物理学家 Vicsek 等[15]提出粒子同步模型,即 Vicsk 模型。他的主要思想是:所有粒子的速度大小相等,每个粒子的速度方向是由其周围邻居运动的平均方向所决定的。在现实世界中,动物运动比这个模型复杂的多,并非只存在短程的速度平均化。2007 年,Cucker 等[16-17]提出了更先进的模型,每个个体初始时刻的速度大小和方向都不相等,受到周围邻居的影响程度用一个权重来表示,这个权重和距离有关,两个个体之间的距离越大,影响就越小。Shen[18]又将 C-S 模型扩展到等级制度存在的情景下。文献[19-20]在 Shen[18]的基础上分析了离散模型并考虑领导者有自由意志的情况。

收稿日期:2017-09-27; **网络出版时间**:2018-11-14 09:10:34
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20181113.1508.006.html
基金项目:江苏省产学研前瞻性联合研究项目(BY2016022-17); 2017 年江苏省研究生科研创新计划项目(KYCX17-1480)
第一作者简介:吴晨(1993—),男,硕士研究生,研究方向为领域多智能体群集运动分析与控制. E-mail:wuchen0303@ foxmail.com
*通信作者简介:金英花(1972—),女,博士,副教授,研究方向为非线性微分方程及其应用. E-mail:jyhmath@ jiangnan.edu.cn

文献[18-20]所研究的模型都是建立在一种理想化的情景中。在现实生活中,群集会受到来自环境中不确定因素的影响,例如鸟群会受到风流的影响,鱼群会受到水流的影响等等,这种不确定的影响很可能会破坏群体中的群集运动,我们将这种不确定因素的影响称之为噪声。本文研究了带有白噪声的群集运动,并证明了在等级制度下,当噪声强度满足一定的条件时,系统能无条件达到群集运动。

1　模型描述

定义 1[18]　我们说一个群体$\{1,\cdots,k\}$具有等级制度,如果对于所有的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d$,邻接矩阵$\boldsymbol{A}_x=(a_{ij}(\boldsymbol{x}))$满足:(ⅰ)$a_{ij}\neq0$暗含$j<i$;(ⅱ)对于所有$i>1$。集合$L(i)=\{j\mid a_{ij}>0\}$是非空的,称$L(i)$为个体$i$的领导集,这样的群体为等级群体。

考虑包含N个智能体的二阶系统,第i个智能体的动态方程为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_i=v_i\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}v_i=-\lambda\sum\limits_{j\in L(i)}a_{ij}(\boldsymbol{x})(v_j-v_i)\mathrm{d}t-\sigma_i\sum a_{ij}(\boldsymbol{x})(v_i-v_j)\mathrm{d}W_i^t。\end{cases}\tag{1}$$

其中,参数$\lambda>0$和$\sigma_i\in\mathbf{R}$分别表示耦合强度和噪声强度;$\mathrm{d}W_i^t$表示独立白噪声标量;$a_{ij}(\boldsymbol{x})$表示个体之间的连接强度,满足定义 1,具体表达形式为$a_{ij}(\boldsymbol{x})=1/(1+\|x_j(t)-x_i(t)\|^2)^{\beta}(\beta\leqslant0.5)$。

定义 2[16]　对于$1\leqslant i,j\leqslant N$,若系统(1)中的状态$x_i$、$v_i$的期望满足:(1)$\lim\limits_{t\to\infty}E\|v_i-v_j\|=0$;(2)$\lim\limits_{0\leqslant t\leqslant\infty}E\|x_i-x_j\|<\infty$,则称系统(1)达到时间渐近群集运动。

2　带有白噪声的群集运动

引理 1　若系统(1)的全局领导者 1 匀速运动,则对任意的$t>0$,有$E\|v_i(t)\|\leqslant D(1\leqslant i\leqslant N)$,其中$D$是一个大于 0 的常数。

证明　用归纳法来证明。首先证明$E\|v_2(t)\|$有界。如果$E\|v_2(t)\|$无界,则存在一个$k(1\leqslant k\leqslant d)$使得$\lim\limits_{t\to\infty}Ev_2^k(t)=\infty$。将方程(1)的第 2 个等式进行积分运算并求期望得$Ev_2^k(t)+\lambda\int_0^t Ea_{21}(v_2^k(s)-v_1^k(0))\mathrm{d}s=v_2^k(0)$。这个等式暗含着$v_2^k(0)=\infty$,与事实矛盾,因此可知$E\|v_2(t)\|$有界。

假设$E\|v_2(t)\|,\cdots,E\|v_{l-1}(t)\|$都是有界的,其中$l-1\geqslant3$。现在证明$E\|v_l(t)\|$也是有界的。如果$E\|v_l(t)\|$无界,则一定存在一个分量$k(1\leqslant k\leqslant d)$使得$\lim\limits_{t\to\infty}Ev_l^k(t)=\infty$。根据系统(1)的第 2 个等式,有

$$Ev_l^k(t)+\lambda\int_0^t\sum_{j\in L(l)}Ea_{lj}(v_j^k(s)-v_l^k(s))\mathrm{d}s=v_l^k(0),$$

与事实矛盾,所以必然存在一个不依赖t的正数D,使得$E\|v_i(t)\|\leqslant D,\ 1\leqslant i\leqslant N$。证毕。

注 1　由引理 1 可知,对任意的$1\leqslant i,j\leqslant N$,必然存在一个常数$D_0$,使得

$$E\|v_i(t)-v_j(t)\|\leqslant D_0(E\|v_i-v_j\|\leqslant E\|v_i\|+E\|v_j\|)。$$

引理 2　假设$\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^d$(考虑两个个体的等级群体,分别对应$x_2-x_1$和$v_2-v_1$)满足下列系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\lambda a(x,t)\boldsymbol{v}\mathrm{d}t-\sigma a(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}\mathrm{d}W+\xi_1\mathrm{d}t+\xi_2\mathrm{d}W。\end{cases}\tag{2}$$

这里$a(\boldsymbol{x},t)\in\mathbf{R}$,$\sigma\in\mathbf{R}$,$\xi_1,\xi_2\in\mathbf{R}^d$满足下列条件:

(1)$1\geqslant a(\boldsymbol{x},t)=(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^{-\beta}>0$,$E\|\boldsymbol{v}\|\leqslant D_0(M,D_0\geqslant0)$;

(2)$E\|\xi_1\|$,$E\|\xi_2\|\leqslant q\mathrm{e}^{-pt}$,其中$p,q>0$;

(3)$\sigma<\sqrt{2\lambda-1}$。

则存在$P,Q\geqslant0$,对所有的$t>0$,有$E\|v(t)\|\leqslant Q\mathrm{e}^{-Pt(1-2\beta)/2}$。

证明　利用伊藤公式,有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}^2=2\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=((-2\lambda a+\sigma^2a^2)\boldsymbol{v}^2+2\boldsymbol{v}\xi_1-2\sigma\boldsymbol{v}\xi_2+\xi_2^2)\mathrm{d}t+(2\boldsymbol{v}\xi_2-2\sigma a\boldsymbol{v}^2)\mathrm{d}W。\tag{3}$$

根据引理 2 的条件,利用期望的性质,有

$$2E(\boldsymbol{v}\xi_1)-2\sigma E(\boldsymbol{v}\xi_2)+E(\xi_2^2)\leqslant 2E\parallel\boldsymbol{v}\parallel E\parallel\xi_1\parallel+2\sigma E\parallel\boldsymbol{v}\parallel E\parallel\xi_2\parallel+E(\parallel\xi_2\parallel^2)$$
$$\leqslant 2D_0q\mathrm{e}^{-pt}+2\sigma D_0q\mathrm{e}^{-pt}+q^2\mathrm{e}^{-2pt}\leqslant c_1\mathrm{e}^{-pt}。\tag{4}$$

其中,$c_1=2D_0q+2\sigma D_0q+q^2$。

因为 $E\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel=\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t E\parallel\boldsymbol{v}(s)\parallel\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{x}(0)+D_0t$,存在 $T_1>0$, $m_1>0$,使得当 $t>T_1$ 时,有

$$[(1+\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel^2)^{-\beta}]\geqslant m_1\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel^{-2\beta},$$

所以 $E[a(t)]=E[(1+\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel^2)^{-\beta}]\geqslant m_1E[\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel^{-2\beta}]\geqslant m_1[\boldsymbol{x}(0)+D_0t]^{-2\beta}$。

当 $t>\boldsymbol{x}(0)/D_0(\boldsymbol{x}(0)<D_0t)$ 时,有 $m_1[\boldsymbol{x}(0)+D_0t]^{-2\beta}>m_1(2D_0t)^{-2\beta}$,则存在 $T_2=\max(T_1,\boldsymbol{x}(0)/D_0)$,当 $t>T_2$ 时,有 $E(a)>m_2t^{-2\beta}$,其中 $m_2=m_1(2D_0)^{-2\beta}$。另外,因为 $a(t)<1$,有 $a^2(t)<a(t)$,所以 $E[a^2(t)]<E[a(t)]$。由条件 $\sigma<\sqrt{2\lambda-1}$,有

$$E(-2\lambda a+\sigma^2a^2)=-2\lambda E(a)+\sigma^2E(a^2)$$
$$<-2\lambda E(a)+\sigma^2E(a)<-2\lambda E(a)+(2\lambda-1)E(a)$$
$$<-E(a)<-m_2t^{-2\beta}:=b(t)。$$

再定义一个 V,满足下面等式:

$$\begin{cases}\mathrm{d}V=(-b(t)V+c_1\mathrm{e}^{-pt})\mathrm{d}t+(2V^{\frac{1}{2}}\xi_2-2\sigma aV)\mathrm{d}W,\\ V(0)=v^2(0)。\end{cases}$$

则 $EV=\boldsymbol{v}^2(0)\mathrm{e}^{-\frac{m_2}{1-2\beta}t^{1-2\beta}}\left(\int c_1\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{e}^{\frac{m_2}{1-2\beta}t^{1-2\beta}}\mathrm{d}t-1\right)$,即存在 P、Q,使得 $E(V)\leqslant Q\mathrm{e}^{-Pt^{1-2\beta}}$。再根据比较定理,当 $t>T$ 时,其中 $T=\max(T_1,T_2)$,有

$$\lim_{t\to\infty}E(\boldsymbol{v}^2)\leqslant\lim_{t\to\infty}E(V)\leqslant Q\mathrm{e}^{-Pt^{1-2\beta}}。\tag{5}$$

证毕。

定理 1 假设 $\{1,2,\cdots,N\}$ 为一个等级群体,其中 1 是全局领导者并以恒定的速度运动。对任意 $t>0$,若 $\beta<1/2$, $\sigma<\sqrt{2\lambda/(N-1)}$,其中 $\sigma=\max\sigma_i(i=1,2,\cdots,N)$,则系统(1)可以达到群集运动。

针对子群体 $\{1,2,\cdots,l\}$ $(l=1,2,\cdots,N)$,用数学归纳法证明定理 1 成立。首先证明结论对子群体 $\{1,2\}$ 成立。由等级群体的定义知 $L(2)=1$,所以 $a_{21}>0$。因为智能体 1 匀速运动,易知系统满足引理 2 的条件,所以存在 $Q,P>0$,不依赖于 t, 使得 $E\parallel v(t)\parallel\leqslant Q\mathrm{e}^{-Pt^{1-2\beta}}$。

假设子群体 $1,2,\cdots,l-1$ 满足引理 2 的条件,其中 $3\leqslant l-1\leqslant k$,则存在常数 $Q_1,P_1>0$,使得

$$\max_{1\leqslant i,\,j\leqslant l-1}E\parallel v_i-v_j\parallel\leqslant Q_1\mathrm{e}^{-P_1t^{(1-2\beta)/2}}。\tag{6}$$

现证明子群体 $1,2,\cdots,l$ 也满足引理 2 的条件。考虑个体 l 的所有领导者的平均速度为

$$\bar{v}_l=\frac{1}{l-1}\sum_{i\in L(l)}v_i。\tag{7}$$

对于每个个体 j, $1\leqslant j\leqslant l-1$,利用式(6),得

$$E\parallel v_j-\bar{v}_l\parallel=\frac{1}{l-1}\Big\|\sum_{i\in L(l)}E(v_j-v_i)\Big\|\leqslant Q_1\mathrm{e}^{-P_1t^{(1-2\beta)/2}}。\tag{8}$$

再定义 $\bar{x}_l=\frac{1}{l-1}\sum_{i\in L(l)}x_i$,令 $\boldsymbol{v}=v_l-\bar{v}_l$, $\boldsymbol{x}=x_l-\bar{x}_l$,则有系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\lambda a\boldsymbol{v}\mathrm{d}t-\sigma_la\boldsymbol{v}\mathrm{d}W_l^t+\xi_1\mathrm{d}t+\xi_2\mathrm{d}W_l^t。\end{cases}\tag{9}$$

其中第 2 个等式成立是因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{v}&=\mathrm{d}v_l-\mathrm{d}\bar{v}_l=\lambda\sum_{j\in L(l)}a_{lj}(\boldsymbol{x})(v_j-v_l)\mathrm{d}t+\sigma_l\sum_{j\in L(l)}a_{lj}(x)(v_j-v_l)\mathrm{d}W_l^t-\mathrm{d}\bar{v}_l\\&=-\lambda\sum_{j\in L(l)}a_{lj}\boldsymbol{v}\mathrm{d}t-\sigma_l\sum_{j\in L(l)}a_{lj}\boldsymbol{v}\mathrm{d}W_l^t+\lambda\sum_{j\in L(l)}a_{lj}(v_j-\bar{v}_l)\mathrm{d}t+\sigma_l\sum_{j\in L(l)}a_{lj}(v_j-\bar{v}_l)\mathrm{d}W_l^t\\&\quad-\frac{\lambda}{l-1}\sum_{i\in L(l)}\sum_{j\in L(i)}a_{ij}(v_j-v_i)\mathrm{d}t-\frac{\sigma_i}{l-1}\sum_{i\in L(l)}\sum_{j\in L(i)}a_{ij}(v_j-v_i)\mathrm{d}W_i^t\\&:=-\lambda a\boldsymbol{v}\mathrm{d}t-\sigma_la\boldsymbol{v}\mathrm{d}W_l^t+\xi_1\mathrm{d}t+\xi_2\mathrm{d}W_l^t。\end{aligned}\tag{10}$$

根据式(6)、(8) 以及 $a_{ij} < 1$,可以得到

$$E\|\xi_1\| \leqslant \lambda \sum_{j\in L(l)} E\|v_j - \bar{v}_l\| + \frac{\lambda}{l-1}\sum_{i\in L(l)}\sum_{j\in L(i)} E\|v_j - v_i\|$$
$$\leqslant \lambda(l-1)q\mathrm{e}^{-pt} + \lambda(l-1)q\mathrm{e}^{-pt} = 2\lambda(l-1)q\mathrm{e}^{-pt},$$

$$E\|\xi_2\| \leqslant \sigma_l \sum_{j\in L(l)} E\|v_j - \bar{v}_l\| + \frac{\sigma_i}{l-1}\sum_{i\in L(l)}\sum_{j\in L(i)} E\|v_j - v_i\|$$
$$\leqslant \sigma_l(l-1)q\mathrm{e}^{-pt} + \sigma_i(l-1)q\mathrm{e}^{-pt} \leqslant 2\sigma(l-1)q\mathrm{e}^{-pt}。$$

又因为 $a = \sum_{j\in L(l)} a_{lj} \leqslant l-1 \leqslant N-1$,系统(9) 满足引理 1 的条件,所以存在 Q_2、P_2,使得

$$E\|\boldsymbol{v}\| = E\|v_l - \bar{v}_l\| \leqslant Q_2\mathrm{e}^{-P_2t^{(1-2\beta)/2}}。\tag{11}$$

利用范数不等式和式(8)、(11),得

$$E\|v_j - v_l\| \leqslant E\|v_j - \bar{v}_l\| + E\|v_l - \bar{v}_l\|$$
$$\leqslant Q_1\mathrm{e}^{-P_1t^{(1-2\beta)/2}} + Q_2\mathrm{e}^{-P_2t^{(1-2\beta)/2}} \leqslant Q\mathrm{e}^{-Pt^{(1-2\beta)/2}},\tag{12}$$

其中,$Q = Q_1 + Q_2$, $P = \min(P_1, P_2)$,因此有

$$\lim_{n\to\infty} E\|v_i - v_j\| = 0,\tag{13}$$

$$\sup_{1\leqslant t<\infty} E\|x_i - x_j\| = \sup_{1\leqslant t<\infty} E\left\|x_i(0) - x_j(0) + \int_0^t (v_i - v_j)\mathrm{d}s\right\|$$
$$\leqslant \|x_i(0) - x_j(0)\| + \int_0^t E\|v_i - v_j\|\mathrm{d}s \leqslant \infty。\tag{14}$$

证毕。

3　仿真

本节用计算机仿真来验证前面的结果。考虑一个等级群体包含 20 个个体,总时间取 20 s,耦合强度取 10,当所有个体之间速度差的范数和小于 10^{-2}时,认为群体达到群集运动。

图 1 表示 4 个个体在等级制度下的连接拓扑图(因 20 个个体的拓扑图比较复杂,本文用 4 个个体简单理解下连接结构)。图 2 表示初始配置,其中起始点表示位置,箭头表示速度。图 3—5 分别表示噪音强度为 1 时的最终状态图、位移误差图和速度误差图。$\sigma = 1$ 满足本文定理的条件,仿真结果验证了结论的正确性。另外本文还给出了 $\sigma = 5$ 时的状态图、位移误差图和速度误差,分别如图 6—8 所示。表明当噪音值过大而不满足定理条件时,群集运动将不会发生,这从侧面验证了本文定理的正性。

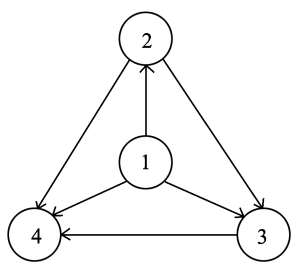


图 1　4 个个体在等级制度下的连接拓扑图
Fig.1　Connectivity topology under hierarchical leadership for 4 individual

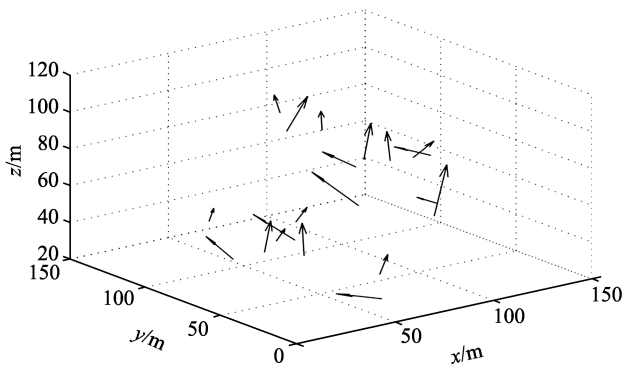


图 2　初始状态
Fig.2　Initial state

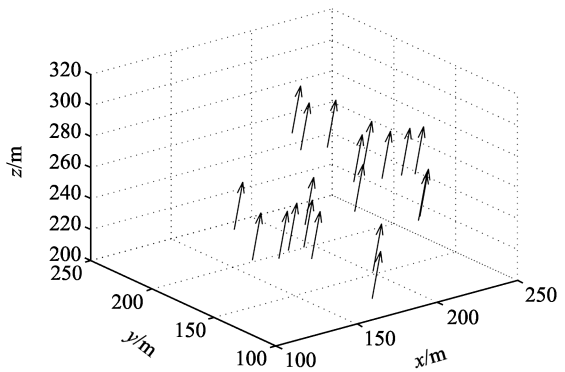


图 3　噪声强度为 1 时的最终状态
Fig.3　Final state for $\sigma = 1$

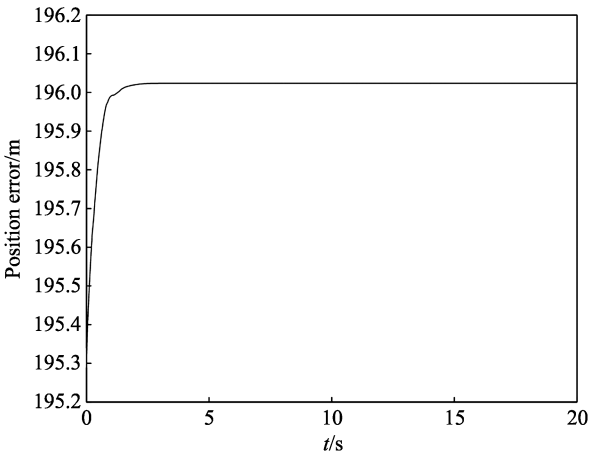


图 4 噪声强度为 1 时的位移误差图

Fig.4 Position error for $\sigma=1$

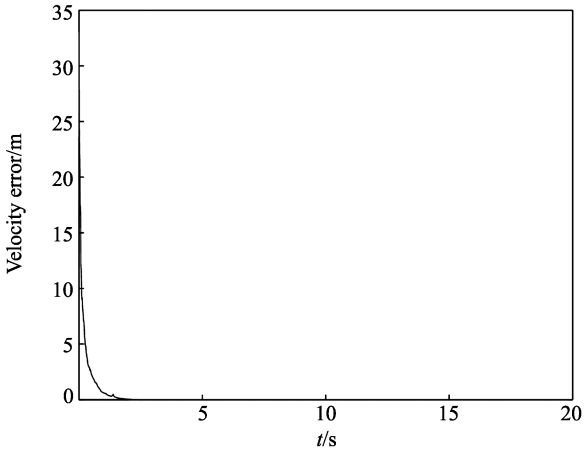


图 5 噪声强度为 1 时的速度误差图

Fig.5 Velocity error for $\sigma=1$

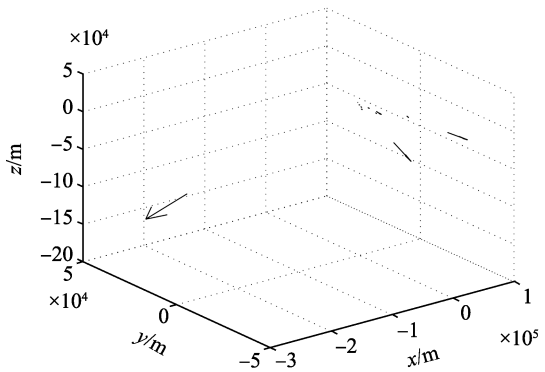


图 6 噪声强度为 5 时的最终状态

Fig.6 Final states for $\sigma=5$

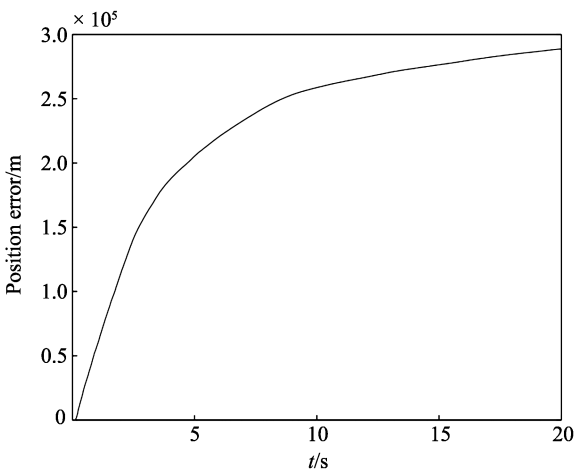


图 7 噪声强度为 5 时的位移误差图

Fig.7 Position error for $\sigma=5$

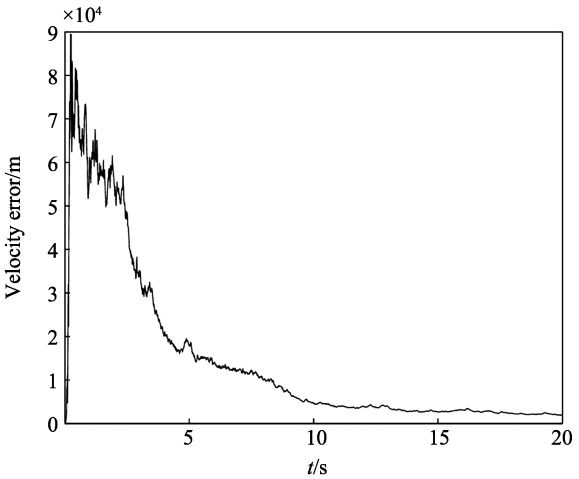


图 8 噪声强度为 5 时的速度误差图

Fig.8 Velocity error for $\sigma=5$

4 结论

本文研究了带有噪声的等级群体,通过伊藤公式、比较定理和数学归纳法,证明了噪声强度足够弱时,群体可以无条件达到群集运动。本文研究的等级群体是基于全局领导者速度是匀速时分析的,对领导者变化速度的情形有待进一步研究。

参考文献:

[1] BREDER C M. Equations descriptive of fish schools and other animal aggregations[J]. Ecology, 1954, 35:361-370.

[2] RU Lining, LI Zhuchun, XUE Xiaoping. Cucker-Smale flocking with randomly failed interactions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(3):1099-1118.

[3] LIU Yicheng, WU Jianhong. Flocking and asymptotic velocity of the Cucker-Smale model with processing delay[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applica-tions, 2014, 415(1):53-61.

[4] AHN S, BAE H-O, HA S-Y, et al. Application of flocking mechanism to the modeling of stochastic volatility[J]. Math Models Methods Appl Sci, 2013, 23(9):1603-1628.

[5] YANG Zhengquan, ZHANG Qing, JIANG Zuolian, et al. Flocking of multi-agents with time delay[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(11):2125-2134.

[6] RU Lining, LI Zhuchun, XUE Xiaoping. Cucker-Smale flocking with randomly failed interactions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(3):1099-1118.

[7] TANNER H, JADBABAIE A, PAPPAS G. Flocking in fixed and switching networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5):863-868.

[8] CUCKER F, MORDECKI E. Flocking in noisy environment[J]. J Math Pures Appl, 2008, 89:278-296.

[9] HA S-Y, LIU J-G. A simple proof of Cucker-Smale focking dynamics and mean field limit[J]. Commun Math Sci, 2009, 7:297-325.

[10] HA S-Y, TADMOR E. From particle to kinetic and hydrodynamic description of flocking[J]. Kinetic Relat Models, 2008, 1(3):415-435.

[11] AHN S, CHOI H, HA S-Y, et al. On the collision avoiding initial configurations to the Cucker-Smale type flocking models[J]. Commun Math Sci, 2012, 10:625-643.

[12] AHN S, HA S-Y. Stochastic flocking dynamics of the Cucker-Smale model with multiplicative white noises[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51:103301.

[13] CHO J, HA S-Y, HUANG F, et al. Emergence of bicluster flocking for agent-based models with unit speed constraint[J]. Analysis and Applications, 2016, 14(1):39-73.

[14] REYNOLDS C W. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model[J]. Computer Graphics, 1987, 21:25-34.

[15] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75:1226-1229.

[16] CUCKER F, SMALE S. Emergent behavior in flocks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5):852-862.

[17] CUCKER F, SMALE S. On the mathematics of emergence[J]. Japanese Journal of Mathematics, 2007, 2(1):197-227.

[18] SHEN J. Cucker-Smale flocking under hierarchical leadership[J]. Appl Math, 2007, 68:694-719.

[19] CUCKER F, DONG J G. A general collision-avoiding flocking framework[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(5):1124-1128.

[20] DONG J. Flocking under hierarchical leadership with a free-will leader[J]. International Journal Robust Non-linear Control, 2013, 23:1891-1898.

(编辑:许力琴)