T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL VE LOKAL OLMAYAN KOŞULLU GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMALARI

KORAY TÜRK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

EDİRNE-2023

KORAY TÜRK 'ün hazırladığı "**LOKAL VE LOKAL OLMAYAN KOŞULLU GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN FARK ŞEMALARI**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir **Doktora tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN	.....
Prof. Dr. Mehmet SEZGİN	.....
Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL	.....
Doç. Dr. Vedat TAŞKIN	.....
Doç. Dr. Yasemen UÇAN	.....

Tez Savunma Tarihi: 11.07.2023

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

	İmza
Tez Danışmanı	
Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN	.....
İkinci Tez Danışmanı	
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV	.....

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....
Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK DOKTORA PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

11.07.2023
Koray TÜRK

İmza

Doktora Tezi
Lokal ve Lokal Olmayan Koşullu Gecikmeli Telegraf Denklemi için Fark Şemaları
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bir Hilbert uzayında pozitif tanımlı self-adjoint operatör ile verilen zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç değer problemi çalışılmıştır. Diferansiyel problemin kararlılığı üzerine verilen temel teoremin uygulamaları ele alınmıştır. Bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için Dirichlet koşullu başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin kararlılığı gösterilmiştir.

Zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerinin bulunması için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları incelenmiştir. Bir ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal ve lokal olmayan koşullu başlangıç ve sınır değer problemlerinin fark şemalarının çözümleri için uygulamalar verilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar nümerik örneklerle desteklenmiştir.

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 109

Anahtar Kelimeler : Telegraf denklemi, zaman gecikmeli, fark şemaları

Doctor of Philosophy (PhD) Thesis
Difference Schemes for Delay Telegraph Equation with Local and Nonlocal Conditions
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

The initial value problem for delay telegraph equation in a Hilbert space with a self-adjoint positive definite operator is studied. The applications of the main theorem on the stability of differential problem are considered. Stability of solution of initial value problem for one dimensional delay telegraph equation with nonlocal conditions and for multidimensional delay telegraph equation with Dirichlet condition is presented.

First and second order of accuracy difference schemes for the approximate solution of initial-boundary value problem for delay telegraph equation are investigated. Applications are given for the solutions of these difference schemes for initial-boundary value problems for one and multi dimensional delay telegraph equations with local and nonlocal conditions. Theoretical results are obtained and supported by numerical experiments.

Year : 2023

Number of Pages : 109

Keywords : Telegraph equation, time delay, difference schemes

TEŞEKKÜR

Bana tez konumu ve problemimi veren, çalışmalarım boyunca geniş bilgi ve tecrübeleriyle desteğini hissettiğim, yardımlarını sunan, yol gösteren ve tıkandığım yerde elini uzatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e en içten dileklerimle minnettarlığımı sunar teşekkür ederim. Sadece akademik çalışmalar açısından değil, hayatın getirdiği problemlerde de rehberlik etmesi ve tecrübelerini paylaşması benim için bir ayrıcalık olmuştur. Ayrıca, destekleriyle yanımda hissettiğim, akademik çalışma hayatı içinde her konuda yardımcı olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN'e verdiği tüm emekler ve gösterdiği sabır için teşekkürü borç bilirim.

2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı ile bana sundukları destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Koray TÜRK

İÇİNDEKİLER

ÖZET **iv**

ABSTRACT **v**

TEŞEKKÜR **vi**

ŞEKİLLER DİZİNİ **ix**

ÇİZELGELER DİZİNİ **x**

1 GİRİŞ **1**

2 ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI **18**

2.1 (2.1) Diferansiyel Probleminin Uygulamaları 20

2.2 (2.2) Fark Şemasının Kararlılığı Üzerine Temel Teorem 23

2.3 (2.2) Fark Şemasının Uygulamaları 31

3 ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI **38**

3.1 (3.1) Fark Şemasının Kararlılığı Üzerine Temel Teorem 38

3.2 (3.1) Fark Şemasının Uygulamaları 49

4 SAYISAL SONUÇLAR **53**

4.1 (2.2) Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Sayısal Sonuçlar . 55

4.2 (3.1) İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Sayısal Sonuçlar . . 64

5 SONUÇLAR **74**

KAYNAKLAR **75**

EKLER **77**

A BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN PROGRAMLAMA **77**

B İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN PROGRAMLAMA **87**

ÖZGEÇMİŞ **98**

TEZ SIRASINDA GERÇEKLEŞTİRİLEN BİLİMSEL FAALİYETLER **99**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Telegraf İletim Hattının Temel Şematik Diyagramı 1

ÇİZELGELER DİZİNİ

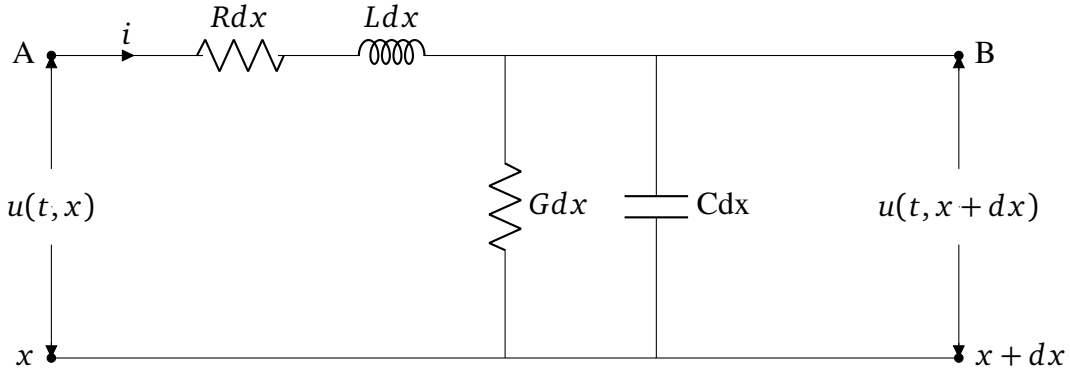
Çizelge 4.1. (4.5) Fark Şemasının Hataları 58
Çizelge 4.2. (4.8) Fark Şemasının Hataları 63
Çizelge 4.3. (4.12) Fark Şemasının Hataları 67
Çizelge 4.4. (4.14) Fark Şemasının Hataları 73

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Telegraf denklemi, bilim ve mühendisliğin birçok alanında kullanılmasına rağmen temelde voltaj ve akım içeren bir iletim hattına dayanmaktadır. Öncelikle telegraf denkleminin Ohm kanunu ile nasıl elde edildiği kısaca verilecektir.

Şekil 1.1 ile gösterildiği gibi, yeterince izole edilememiş bir iletim hattı kablosunun sonsuz küçük bir parçası ele alınsın. Burada, herhangi bir t anında herhangi bir x noktasında voltaj $u(t,x)$ ve akım $i(t,x)$ ile temsil edilsinler. Ayrıca, kablodaki direnç R, indüksiyon L, toprağa iletkenlik G ve sığa C olarak ifade edilsin. Ohm yasasına göre direnç üzerindeki voltaj



Şekil 1.1. Telegraf İletim Hattının Temel Şematik Diyagramı

$$u = iR \tag{1.1}$$

denklemiyle, indüktör üzerindeki voltaj düşüşü

$$u = Li_t \tag{1.2}$$

denklemiyle, kapasitör boyunca voltaj düşüşü

$$u = \frac{1}{C}\int idt \tag{1.3}$$

denklemiyle verilir. (1.1), (1.2), (1.3) denklemleri kullanılarak, B ile A noktaları arasındaki voltaj farkı

$$u(t,x+dx)-u(t,x) = -(Rdx)i-(Ldx)i_t \tag{1.4}$$

ve akım farkı

$$i(t,x+dx)-i(t,x) = -(Gdx)u-(Cdx)u_t \tag{1.5}$$

olarak elde edilir. Buradan $dx \to 0$ için

$$u_x = -Ri - Li_t \tag{1.6}$$

ve

$$i_x = -Gu - Cu_t \tag{1.7}$$

denklemleri elde edilir. (1.6), x değişkenine göre, (1.7), t değişkenine göre türetilirse

$$u_{xx} = -Ri_x - Li_{xt} \tag{1.8}$$

ve

$$i_{xt} = -Gu_t - Cu_{tt} \tag{1.9}$$

elde edilir. (1.7) ile verilen i_x ve (1.9) ile verilen i_{xt} ifadeleri (1.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC+LG)u_t + RGu \tag{1.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC+LG)i_t + RGi \tag{1.11}$$

denklemi de elde edilebilir. (1.10) ve (1.11) denklemleri Telegraf denklemi olarak bilinirler. Bu model ilk olarak 1876 yılında Oliver Heaviside tarafından tanıtılmıştır (Heaviside, 1876). Benzer prosedürler (Biazar Eslami, 2010), (Yosida, 1984), (Lock, Greeff Joubert, 2007), (Srivastava, Awasthi, Chaurasia Tamsir, 2013) çalışmalarında bulunabilir.

Telegraf denklemi esas olarak elektriğin bir tel üzerinde iletilmesine dayanmaktadır. Bu denklem, aynı zamanda temel bilim ve mühendislik alanlarındaki birçok prob-

lemle de ilişkilendirilmektedir. (Malkov Sagdeev, 2015), (Litvinenko Schlickeiser, 2013) çalışmalarında telegraf denkleminin kozmik ışın iletimindeki önemi bulunabilir. Telegraf denklemi rastgele yürüyüş (random walk) teorisinde (Weiss, 2002) ve hayvan davranışlarının daha iyi bir modelini ortaya koymakta da (Sato Terao, 1986), (Tilles Petrovskii, 2018) kullanılmıştır.

Pozitif tanımlı self-adjoint A operatörü ile H Hilbert uzayında, bilinmeyen p parametreli telegraf denklemi için kaynak identifikasyon problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = p + f(t),\ (0 \le t \le T), \\ \\ u(0) = \varphi,\ u'(0) = \psi,\ u(T) = \xi \end{cases}$$

çalışılmıştır (Ashyralyev Çekiç, 2016). Ayrıca (Ashyralyev Modanli, 2015) çalışmasında, pozitif tanımlı self-adjoint A operatörü ile H Hilbert uzayında, telegraf denklemi için Cauchy problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \beta u(t) = f(t),\ (0 \le t \le T), \\ \\ u(0) = \varphi,\ u'(0) = \psi \end{cases}$$

ele alınmıştır. Yazarlar, bu problemin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu kararlı fark şemalarını oluşturmuşlardır.

Literatürde telegraf denklemi üzerine bir çok çalışma bulmak mümkündür ancak bu çalışmaların yalnızca küçük bir kısmında gecikmeli telegraf denklemler ele alınmıştır. Gecikme terimi birçok problemin modellenmesinde ortaya çıkan doğal bir fenomen olmasına rağmen, bu durum problemlerin analizini zorlaştırır. Bu yüzden, gerçeğe daha yakın sonuçlar almak için gecikme terimi hesaba katılmalıdır. Gecikmeli diferansiyel denklemler biyoloji, fizik, mekanik, ekonomi ve kontrol teori içeren birçok alanda ortaya çıkar (Balachandran, Kalmár-Nagy Gilsinn, 2009). Yazarlar, (Ashyralyev Agirseven, 2019) çalışmasında, gecikme terimi içeren hiperbolik diferansiyel ve fark denklemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini incelemişlerdir. Ayrıca gecikmeli parabolik denklemler ve gecikmeli Schrödinger denklemi üzerine de çalışmalar yapmışlardır (Ashyralyev Agirseven, 2014a), (Ashyralyev Agirseven, 2014b), (Ashyralyev Agirseven, 2015) (Ashyralyev Agirseven, 2020). Gecikme terimi, bulaşıcı hastalıkların yayılımının modellenmesinde (Macıas-Dıaz, Ahmed, Jawaz, Rafiq Aziz ur Rehman, 2021) göz önüne alınmıştır. Özellikle son yıllarda, gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar artmaktadır.

Feireisl, (Feireisl, 1991), sönümleme terimi içeren soyut evolüsyon denklemi için (zamana göre) küçük global çözümlerin varlığını kanıtlamış ve elde ettiği sonuçları lineer

olmayan telegraf denklemler ile zaman gecikmeli operatör içeren lineer olmayan denklemlere uygulamıştır. Çift periyodik sınır koşullu gecikmeli lineer olmayan telegraf denklemi için pozitif çift periyodik çözümlerin varlığı (Li Zhang, 2015) çalışmasında kanıtlanmıştır. Zaman gecikmeli telegraf denklemin kararlılığı üzerine temel teorem (Ashyralyev, Agirseven Turk, 2020) çalışmasında verilmiştir. (Ashyralyev, Turk Agirseven, 2020) çalışmasında, zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için fark şemasının kararlılığı üzerine temel teorem verilmiştir. Yazarlar, Neumann koşullu zaman gecikmeli çok boyutlu telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin kararlılık kestirimlerini kurmuşlardır (Ashyralyev, Turk Agirseven, 2021). Dirichlet koşullu zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması çalışılmıştır (Ashyralyev, Agirseven Turk, 2021). Buna rağmen gecikmeli telegraf denklemlerini içeren çalışmalar açısından literatürde bir açık bulunmaktadır. Dolayısıyla bu tezin amacı bu açığın kapatılmasına katkıda bulunmaktır.

Zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer problemlerinin Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü gibi yöntemlerle analitik olarak çözülebildiği bilinmektedir. Bu analitik yöntemlerin farklı problemlere uygulanışı aşağıda verilmektedir.

Problem 1.1. Zaman gecikmeli telegraf denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y)+u_t(t,x,y)-u_{xx}(t,x,y)-u_{yy}(t,x,y)=\frac{1}{4}u_{xx}(t-1,x,y) \\ +\frac{1}{4}u_{yy}(t-1,x,y)+2e^{-t}\sin(x)\cos(y)+\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\sin(x)\cos(y), \\ t>0,\ 0<x,y<\pi, \\ u(t,x,y)=e^{-t}\sin(x)\cos(y),\ 0\le x,y\le\pi,\ -1\le t\le 0, \\ u(t,0,y)=u(t,\pi,y)=0,\ t\ge 0,\ 0\le y\le\pi \\ u_y(t,x,0)=u_y(t,x,\pi)=0,\ t\ge 0,\ 0\le x\le\pi \end{cases} \tag{1.12}$$

başlangıç ve sınır değer probleminin Fourier serileri çözümü ele alınsın.

Çözüm. Bu problemin çözümü için adım-adım ve Fourier serileri yöntemi birlikte

kullanılacaktır. (1.12) probleminin uzay operatörü tarafından üretilen

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < \pi, \\ \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

ve

$$\begin{cases} Y''(y) = \mu Y(y),\ 0 < y < \pi, \\ \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Sturm-Liouville problemleri ele alınsın.

$$\lambda = -n^2,\ X_n(x) = \sin(nx),\ n = 1, 2, 3, ...$$

(1.13) probleminin çözümüdür ve

$$\mu = -m^2,\ Y_m(y) = \cos(my),\ m = 0, 1, 2, ...$$

(1.14) probleminin çözümüdür. Fourier serileri yöntemi kullanarak

$$u(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}(t) \sin(nx) \cos(my) \tag{1.15}$$

biçiminde çözüm aranır. Burada, $T_{m,n}(t),\ m = 0, 1, 2, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ bilinmeyen fonksiyondur. (1.15) çözümü (1.12) probleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[T''_{m,n}(t) + T'_{m,n}(t) + \left(n^2 + m^2\right) T_{m,n}(t) \right] \sin(nx) \cos(my) \\ \\ = \frac{-1}{4} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2 + m^2) T_{m,n}(t-1) \sin(nx) \cos(my) \\ \\ +2e^{-t} \sin(x) \cos(y) + \frac{1}{2} e^{-(t-1)} \sin(x) \cos(y), \\ \\ t > 0,\ 0 \le x, y \le \pi, \\ \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_{m,n}(t) \sin(nx) \cos(my) = e^{-t} \sin(x) \cos(y), \\ \\ 0 \le x, y \le \pi,\ -1 \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

elde edilir.

$m = 0, 1, 2, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ için $\sin(nx)\cos(my)$'lerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, $m, n \neq 1$ için

$$\begin{cases} T''_{m,n}(t) + T'_{m,n}(t) + \left(n^2 + m^2\right) T_{m,n}(t) = 0,\ 0 < t < 1, \\ \\ T_{m,n}(0) = T'_{m,n}(0) = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

ve $m = n = 1$ için

$$\begin{cases} T''_{1,1}(t) + T'_{1,1}(t) + 2T_{1,1}(t) = 2e^{-t},\ 0 < t < 1, \\ \\ T_{1,1}(0) = 1,\ T'_{1,1}(0) = -1 \end{cases} \tag{1.18}$$

başlangıç değer problemleri elde edilir. (1.17) ve (1.18) başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin sırasıyla $m, n \neq 1$ için $T_{m,n}(t) = 0$ ve $T_{1,1}(t) = e^{-t}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, $0 \leq t \leq 1$ için (1.16) probleminin çözümü

$$u(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n} \sin(nx)\cos(my) = e^{-t}\sin(x)\cos(y) \tag{1.19}$$

olarak bulunur.

k herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $k - 1 \leq t \leq k$ için (1.16) probleminin çözümü $u(t, x, y) = e^{-t}\sin(x)\cos(y)$ olsun. Bu çözüm kullanılarak, $k \leq t \leq k + 1$ için (1.16) problemi

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[T''_{m,n}(t) + T'_{m,n}(t) + \left(n^2 + m^2\right) T_{m,n}(t) \right] \sin(nx)\cos(my) \\ \\ = 2e^{-t}\sin(x)\cos(y),\ k < t < k + 1,\ 0 \leq x, y \leq \pi, \\ \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}(k) \sin(nx)\cos(my) = e^{-k}\sin(x)\cos(y),\ 0 \leq x, y \leq \pi \\ \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T'_{m,n}(k) \sin(nx)\cos(my) = -e^{-k}\sin(x)\cos(y),\ 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \tag{1.20}$$

olarak yeniden yazılabilir. $m = 0, 1, 2, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ için $\sin(nx)\cos(my)$'lerin katsayıları sıfıra eşitlenerek, $m, n \neq 1$ için

$$\begin{cases} T''_{m,n}(t) + T'_{m,n}(t) + \left(n^2 + m^2\right) T_{m,n}(t) = 0,\ k < t < k + 1, \\ \\ T_{m,n}(k) = T'_{m,n}(k) = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

ve $m = n = 1$ için

$$\begin{cases} T''_{1,1}(t) + T'_{1,1}(t) + 2T_{1,1}(t) = 2e^{-t},\ k < t < k+1, \\ \\ T_{1,1}(k) = e^{-k},\ T'_{1,1}(k) = -e^{-k} \end{cases} \tag{1.22}$$

elde edilir. Buradan (1.21) probleminin çözümü $T_{m,n}(t) = 0,\ m, n \neq 1$ ve (1.22) probleminin çözümü $T_{1,1}(t) = e^{-t}$ olarak bulunur. O halde, $k \leq t \leq k+1$ için (1.16) probleminin çözümü

$$u(t,x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\sin(nx)\cos(my) = e^{-t}\sin(x)\cos(y) \tag{1.23}$$

olarak bulunur. Böylece, tümevarımdan, (1.12) probleminin her $t > 0$ için çözümü

$$u(t,x,y) = e^{-t}\sin(x)\cos(y)$$

elde edilir.

Problem 1.2. Zaman gecikmeli telegraf denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y) + u_t(t,x,y) - u_{xx}(t,x,y) - u_{yy}(t,x,y) = \frac{1}{4}u_{xx}(t-1,x,y) \\ \\ +\frac{1}{4}u_{yy}(t-1,x,y) + 8e^{-t}\sin(2x)\cos(2y) + 2e^{-(t-1)}\sin(2x)\cos(2y), \\ \\ t > 0,\ 0 < x, y < \pi, \\ \\ u(t,x,y) = e^{-t}\sin(2x)\cos(2y),\ 0 \leq x, y \leq \pi,\ -1 \leq t \leq 0, \\ \\ u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = 0,\ t \geq 0,\ 0 \leq y \leq \pi \\ \\ u(t,x,0) = u(t,x,\pi),\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,\pi),\ t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{1.24}$$

başlangıç ve sınır değer probleminin Fourier serileri çözümü bulunsun.

Çözüm. (1.24) probleminin çözümü için

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < \pi, \\ \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

ve

$$\begin{cases} Y''(y) = \mu Y(y),\ 0 < y < \pi, \\ \\ Y(0) = Y(\pi),\ Y'(0) = Y'(\pi) \end{cases} \tag{1.26}$$

Sturm-Liouville problemleri ele alınsın. (1.25) probleminin çözümü

$$\lambda = -n^2,\ X_n(x) = \sin(nx),\ n = 1, 2, 3, ...$$

ve (1.26) probleminin çözümü

$$\mu = -4m^2,\ Y_m(y) = \cos(2my),\ m = 0, 1, 2, ...,$$

$$\mu = -4m^2,\ Y_m(y) = \sin(2my),\ m = 1, 2, 3, ...$$

olur. Bu durumda, Fourier serileri yöntemi kullanarak

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = &\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(t)\sin(nx)\cos(2my) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t)\sin(nx)\sin(2my) \end{aligned} \tag{1.27}$$

biçiminde çözüm aranır. Burada, $A_{m,n}(t),\ m = 0, 1, 2, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ ve $B_{m,n}(t),\ m = 1, 2, 3, ...,\ n = 1, 2, 3, ...$ bilinmeyen fonksiyonlardır. (1.27) çözümü, (1.24) probleminde

yerine yazılarak

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[A''_{m,n}(t)+A'_{m,n}(t)+\left(n^2+4m^2\right)A_{m,n}(t)\right]\sin(nx)\cos(2my) \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[B''_{m,n}(t)+B'_{m,n}(t)+\left(n^2+4m^2\right)B_{m,n}(t)\right]\sin(nx)\sin(2my) \\ =-\frac{1}{4}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+4m^2)A_{m,n}(t-1)\sin(nx)\cos(2my) \\ -\frac{1}{4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+4m^2)B_{m,n}(t-1)\sin(nx)\sin(2my) \\ +8e^{-t}\sin(2x)\cos(2y)+2e^{-(t-1)}\sin(2x)\cos(2y), \\ t>0,\ 0\le x,y\le\pi, \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{m,n}(t)\sin(nx)\cos(2my)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_{m,n}(t)\sin(nx)\sin(2my) \\ =e^{-t}\sin(2x)\cos(2y),\ 0\le x,y\le\pi,\ -1\le t\le 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

problemi elde edilir. $\sin(nx)\cos(2my)$, $m=0,1,2,...$, $n=1,2,3,...$ ve $\sin(nx)\sin(2my)$, $m,n=1,2,3,...$ için katsayılar sıfıra eşitlendiğinde, $m\neq 1,\ n\neq 2$ için

$$\begin{cases} A''_{m,n}(t)+A'_{m,n}(t)+\left(n^2+4m^2\right)A_{m,n}(t)=0,\ 0<t<1, \\ A_{m,n}(0)=A'_{m,n}(0)=0 \end{cases} \tag{1.29}$$

problemi, $m=1,\ n=2$ için

$$\begin{cases} A''_{1,2}(t)+A'_{1,2}(t)+8A_{1,2}(t)=8e^{-t},\ 0<t<1, \\ A_{1,2}(0)=1,\ A'_{1,2}(0)=-1 \end{cases} \tag{1.30}$$

problemi ve her $m,\ n$ için

$$\begin{cases} B''_{m,n}(t)+B'_{m,n}(t)+\left(n^2+4m^2\right)B_{m,n}(t)=0,\ 0<t<1, \\ B_{m,n}(0)=B'_{m,n}(0)=0 \end{cases} \tag{1.31}$$

problemi elde edilir. (1.29) probleminin çözümü $A_{m,n}(t)=0,\ m\neq 1, n\neq 2$, (1.30)

probleminin çözümü $A_{1,2}(t) = e^{-t}$ ve (1.31) probleminin çözümü her $m,\ n$ için $B_{m,n}(t) = 0$ olarak bulunur. Böylece, $0 \le t \le 1$ için (1.28) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(t,x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(t)\sin(nx)\cos(2my) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(t)\sin(nx)\sin(2my) \\ &= e^{-t}\sin(2x)\cos(2y) \end{aligned} \tag{1.32}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, her $t > 0$ için (1.24) probleminin çözümünün $u(t,x,y) = e^{-t}\sin(2x)\cos(2y)$ olduğu gösterilsin. k herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $k-1 \le t \le k$ için (1.32) çözüm olsun. O halde, $k \le t \le k+1$ için (1.28) problemi

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A''_{m,n}(t) + A'_{m,n}(t) + \left(n^2+4m^2\right)A_{m,n}(t)\right]\sin(nx)\cos(2my) \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B''_{m,n}(t) + B'_{m,n}(t) + \left(n^2+4m^2\right)B_{m,n}(t)\right]\sin(nx)\sin(2my) \\ = 8e^{-t}\sin(2x)\cos(2y),\ k < t < k+1,\ 0 \le x,y \le \pi, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(k)\sin(nx)\cos(2my) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}(k)\sin(nx)\sin(2my) \\ = e^{-k}\sin(2x)\cos(2y),\ 0 \le x,y \le \pi, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A'_{m,n}(k)\sin(nx)\cos(2my) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B'_{m,n}(k)\sin(nx)\sin(2my) \\ = -e^{-k}\sin(2x)\cos(2y),\ 0 \le x,y \le \pi \end{cases} \tag{1.33}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. $\sin(nx)\cos(2my),\ m = 0,1,2,...,\ n = 1,2,3,...$ ve $\sin(nx)\sin(2my),\ m,n = 1,2,3,...$ fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlenerek, $m \neq 1,\ n \neq 2$ için

$$\begin{cases} A''_{m,n}(t) + A'_{m,n}(t) + \left(n^2+4m^2\right)A_{m,n}(t) = 0,\ k < t < k+1, \\ A_{m,n}(k) = A'_{m,n}(k) = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

problemi, $m=1,\ n=2$ için

$$\begin{cases} A''_{1,2}(t)+A'_{1,2}(t)+8A_{1,2}(t)=8e^{-t},\ k<t<k+1, \\ \\ A_{1,2}(k)=e^{-k},\ A'_{1,2}(k)=-e^{-k} \end{cases} \tag{1.35}$$

problemi ve her $m,\ n$ için

$$\begin{cases} B''_{m,n}(t)+B'_{m,n}(t)+\left(n^2+4m^2\right)B_{m,n}(t)=0,\ k<t<k+1, \\ \\ B_{m,n}(k)=B'_{m,n}(k)=0 \end{cases} \tag{1.36}$$

problemi elde edilir. Bu durumda, (1.33) probleminin çözümünün $A_{m,n}(t)=0,\ m\neq 1, n\neq 2$, (1.34) probleminin çözümünün $A_{1,2}(t)=e^{-t}$ ve (1.34) probleminin çözümünün her m,n için $B_{m,n}(t)=0$ olduğu görülebilir. Böylece, $k\leq t\leq k+1$ için (1.33) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(t,x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}(t)\sin(nx)\cos(2my)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{m,n}(t)\sin(nx)\sin(2my) \\ &= e^{-t}\sin(2x)\cos(2y) \end{aligned} \tag{1.37}$$

olarak elde edilir. Tümevarımdan, (1.37) çözümü, her $t>0$ için (1.24) probleminin çözümüdür.

Problem 1.3. Zaman gecikmeli telegraf denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y)+u_t(t,x,y)-u_{xx}(t,x,y)-u_{yy}(t,x,y)=\frac{1}{4}u_{xx}(t-1,x,y) \\ \\ +\frac{1}{4}u_{yy}(t-1,x,y)-2e^{-t-x-y}-\frac{1}{2}e^{-t+1-x-y},\ t>0,\ x,y>0, \\ \\ u(t,x,y)=e^{-t-x-y},\ -1\leq t\leq 0,\ x,y\geq 0, \\ \\ u(t,0,y)=e^{-t-y},\ u_x(t,0,y)=-e^{-t-y},\ t\geq 0,\ y\geq 0, \\ \\ u(t,x,0)=e^{-t-x},\ u(t,x,\infty)=0,\ t\geq 0,\ x\geq 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

başlangıç değer probleminin Laplace dönüşümü ile çözümü bulunsun.

Çözüm. Bu problem için, $u(t,x,y)$'nin t'ye göre Laplace dönüşümü $L\{u(t,x,y)\}=u(\lambda,x,y)$, x'e göre Laplace dönüşümü $L\{u(t,x,y)\}=u(t,s,y)$ ve y'ye göre Laplace dönüşümü $L\{u(t,x,y)\}=u(t,x,\mu)$ olarak gösterilsin. Başlangıç

fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} L\{u(t-1,x,y)\} &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t-1,x,y)dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-\lambda(t+1)}u(t,x,y)dt \\ &= \int_{-1}^0 e^{-\lambda(t+1)}e^{-t-x-y}dt + \int_0^\infty e^{-\lambda(t+1)}u(t,x,y)dt \\ &= \frac{e^{-x-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{\lambda+1} + e^{-\lambda}u(\lambda,x,y) \end{aligned}$$

elde edilebilir. Aynı şekilde,

$$L\{u_{xx}(t-1,x,y)\} = \frac{e^{-x-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{\lambda+1} + e^{-\lambda}u_{xx}(\lambda,x,y)$$

ve

$$L\{u_{yy}(t-1,x,y)\} = \frac{e^{-x-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{\lambda+1} + e^{-\lambda}u_{yy}(\lambda,x,y)$$

bulunur. Başlangıç koşulları kullanılarak ve (1.38) probleminde denklemin her iki yanının t'ye göre Laplace dönüşümü alınarak

$$\begin{cases} \left(\lambda^2+\lambda\right)u(\lambda,x,y) - \lambda e^{-x-y} - u_{xx}(\lambda,x,y) - u_{yy}(\lambda,x,y) \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-x-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{\lambda+1} + e^{-\lambda}u_{xx}(\lambda,x,y)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-x-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{\lambda+1} + e^{-\lambda}u_{yy}(\lambda,x,y)\right) - 2\frac{e^{-x-y}}{\lambda+1} - \frac{1}{2}\frac{e^{1-x-y}}{\lambda+1},\ x,y>0, \\ u(\lambda,0,y) = \frac{e^{-y}}{\lambda+1},\ u_x(\lambda,0,y) = \frac{-e^{-y}}{\lambda+1},\ y\geq 0, \\ u(\lambda,x,0) = \frac{e^{-x}}{\lambda+1},\ u(\lambda,x,\infty) = 0,\ x\geq 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

problemi elde edilir. (1.39) probleminde denklemin her iki yanının x'e göre Laplace

dönüşümü alınırsa

$$\begin{cases} \left(\lambda^2+\lambda\right)u(\lambda,s,y)-\frac{\lambda e^{-y}}{s+1}-s^2u(\lambda,s,y)+s\frac{e^{-y}}{\lambda+1}-\frac{e^{-y}}{\lambda+1} \\ -u_{yy}(\lambda,s,y)=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{(\lambda+1)(s+1)}+e^{-\lambda}\left(s^2u(\lambda,s,y)-s\frac{e^{-y}}{\lambda+1}+\frac{e^{-y}}{\lambda+1}\right)\right) \\ +\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-y}\left(e-e^{-\lambda}\right)}{(\lambda+1)(s+1)}+e^{-\lambda}u_{yy}(\lambda,s,y)\right)-2\frac{e^{-y}}{(\lambda+1)(s+1)}-\frac{1}{2}\frac{e^{1-y}}{(\lambda+1)(s+1)},\ y>0, \\ u(\lambda,s,0)=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)},\ u(\lambda,s,\infty)=0 \end{cases} \tag{1.40}$$

olur. (1.40) probleminin her iki yanının y'ye göre Laplace dönüşümü alındığında

$$\begin{cases} \left(\lambda^2+\lambda-s^2-\mu^2\right)u(\lambda,s,\mu)-\frac{\lambda}{(s+1)(\mu+1)}+\frac{s-1}{(\lambda+1)(\mu+1)}+\frac{\mu}{(\lambda+1)(s+1)} \\ +u_y(\lambda,s,0)=-\frac{e^{-\lambda}}{2(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}+(s^2+\mu^2)\frac{e^{-\lambda}}{4}u(\lambda,s,\mu)-\frac{e^{-\lambda}(s-1)}{4(\lambda+1)(\mu+1)} \\ -\frac{e^{-\lambda}\mu}{4(\lambda+1)(s+1)}-\frac{e^{-\lambda}}{4}u_y(\lambda,s,0)-\frac{2}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)} \end{cases} \tag{1.41}$$

elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklem yeniden düzenlendiğinde $\beta(\lambda,s)=u_y(\lambda,s,0)$ olmak üzere

$$\left(\lambda^2+\lambda-s^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-\mu^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\right)u(\lambda,s,\mu)=\frac{\lambda}{(s+1)(\mu+1)}$$

$$-\frac{s-1}{(\lambda+1)(\mu+1)}-\frac{\mu}{(\lambda+1)(s+1)}-\frac{e^{-\lambda}}{2(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}-\frac{e^{-\lambda}(s-1)}{4(\lambda+1)(\mu+1)}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}\mu}{4(\lambda+1)(s+1)}-\frac{2}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}-\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\beta(\lambda,s),$$

$$\left(\lambda^2+\lambda-s^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-\mu^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\right)u(\lambda,s,\mu)=-\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\beta(\lambda,s)+\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}$$

$$\times\left[\lambda(\lambda+1)-(s-1)(s+1)-\mu(\mu+1)-\frac{e^{-\lambda}}{2}-\frac{e^{-\lambda}}{4}(s-1)(s+1)-\frac{e^{-\lambda}}{4}\mu(\mu+1)-2\right]$$

$$=-\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\beta(\lambda,s)+\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}$$

$$\times\left[\lambda^2+\lambda-s^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-\mu^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-(\mu+1)\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}\left[\lambda^2+\lambda-s^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-\mu^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\right]-\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)\left(\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}+\beta(\lambda,s)\right)$$

bulunur. Böylece

$$u(\lambda,s,\mu)=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}-\frac{1+\frac{e^{-\lambda}}{4}}{\lambda^2+\lambda-s^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)-\mu^2\left(1+\frac{e^{-\lambda}}{4}\right)}\left(\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}+\beta(\lambda,s)\right)$$

elde edilir. $a^2=\frac{\lambda^2+\lambda}{1+\frac{e^{-\lambda}}{4}}-s^2$ alınırsa

$$\begin{aligned}u(\lambda,s,\mu)&=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}-\frac{1}{a^2-\mu^2}\left(\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}+\beta(\lambda,s)\right)\\&=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}+\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{\mu-a}-\frac{1}{\mu+a}\right)\left(\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}+\beta(\lambda,s)\right)\end{aligned}\tag{1.42}$$

bulunur. Şimdi, μ'ye göre ters Laplace dönüşümü alınarak

$$u(\lambda,s,y)=\frac{e^{-y}}{(\lambda+1)(s+1)}+\frac{1}{2a}\left(e^{ay}-e^{-ay}\right)\left(\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}+\beta(\lambda,s)\right)\tag{1.43}$$

elde edilir. $u(\lambda,s,\infty)=0$ koşulu kullanılarak

$$\beta(\lambda,s)=-\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)}$$

olduğu görülür. Böylece

$$u(\lambda,s,\mu)=\frac{1}{(\lambda+1)(s+1)(\mu+1)}$$

bulunur ve ters Laplace dönüşümü alınarak (1.38) probleminin çözümü

$$u(t,x,y)=e^{-t-x-y}$$

olarak elde edilir.

Problem 1.4. Zaman gecikmeli telegraf denklemi için

$$\begin{cases}u_{tt}(t,x,y)+u_t(t,x,y)-u_{xx}(t,x,y)-u_{yy}(t,x,y)\\=\frac{1}{4}u_{xx}(t-1,x,y)+\frac{1}{4}u_{yy}(t-1,x,y)+4\left(1-x^2-y^2\right)e^{-t-x^2-y^2}\\+\left(1-x^2-y^2\right)e^{-t+1-x^2-y^2},\ t>0,\ -\infty<x,y<\infty,\\u(t,x,y)=e^{-t-x^2-y^2},\ -1\le t\le 0,\ -\infty<x,y<\infty\end{cases}\tag{1.44}$$

probleminin Fourier dönüşümü yöntemi ile çözümü bulunsun.

Çözüm. $u(t,x,y)$ fonksiyonunun x'e göre Fourier dönüşümü

$$F\{u(t,x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}u(t,x,y)dx = u(t,s,y)$$

ve y'ye göre Fourier dönüşümü

$$F\{u(t,x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu y}u(t,x,y)dy = u(t,x,\mu)$$

olarak verilsin. Buradan

$$F\{u_{xx}(t,x,y)\} = -s^2u(t,s,y),$$

$$F\{x^2e^{-x^2}\} = -\sqrt{\pi}\left(\frac{s^2}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{s^2}{4}}$$

elde edilir.

Sırasıyla, x ve y değişkenlerine göre Fourier dönüşümü alındığında

$$\begin{cases} u_{tt}(t,s,\mu) + u_t(t,s,\mu) + \left(s^2+\mu^2\right)u(t,s,\mu) \\ \\ = \left(s^2+\mu^2\right)\pi e^{-t-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}},\ 0 < t < 1, \\ \\ u(0,s,\mu) = \pi e^{-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}},\ u_t(0,s,\mu) = -\pi e^{-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}} \end{cases} \tag{1.45}$$

bulunur. (1.45) probleminin çözümünün

$$u(t,s,\mu) = \pi e^{-t-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}} \tag{1.46}$$

olduğu kolayca görülebilir. (1.46) ya ters Fourier dönüşümü uygulandığında, $0 \le t \le 1$ için (1.44) probleminin çözümü

$$u(t,x,y) = e^{-t-x^2-y^2} \tag{1.47}$$

biçiminde elde edilir.

k herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $u(t,x,y) = e^{-t-x^2-y^2}$, $k-1 \le t \le k$ için (1.44) probleminin çözümü olsun. $k \le t \le k+1$ için de (1.44) probleminin çözümünün $u(t,x,y) = e^{-t-x^2-y^2}$ olduğu gösterilecektir. (1.44) problemi $k \le t \le k+1$

için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y)+u_t(t,x,y)-u_{xx}(t,x,y)-u_{yy}(t,x,y) \\ \\ =4\left(1-x^2-y^2\right)e^{-t-x^2-y^2},\ k<t<k+1,\ -\infty<x,y<\infty \\ \\ u(k,x,y)=e^{-k-x^2-y^2},\ u_t(k,x,y)=-e^{-k-x^2-y^2},\ -\infty<x,y<\infty \end{cases} \tag{1.48}$$

olarak yeniden yazılabilir. Sırasıyla, x ve y değişkenlerine göre Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{cases} u_{tt}(t,s,\mu)+u_t(t,s,\mu)+\left(s^2+\mu^2\right)u(t,s,\mu) \\ \\ =\left(s^2+\mu^2\right)e^{-t-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}},\ k<t<k+1, \\ \\ u(k,s,\mu)=\pi e^{-k-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}},\ u_t(k,s,\mu)=-\pi e^{-k-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}} \end{cases} \tag{1.49}$$

başlangıç değer problemi elde edilir. (1.49) probleminin çözümü

$$u(t,s,\mu)=\pi e^{-t-\frac{s^2}{4}-\frac{\mu^2}{4}} \tag{1.50}$$

olarak bulunur. (1.50) ye ters Fourier dönüşümü uygulanırsa (1.48) probleminin $k\le t\le k+1$ için çözümü

$$u(t,x,y)=e^{-t-x^2-y^2} \tag{1.51}$$

elde edilir. Böylece, tümevarımdan her $t>0$ için (1.44) probleminin çözümü $u(t,x,y)=e^{-t-x^2-y^2}$ bulunur.

Fourier serisi yöntemi, Laplace dönüşümü yöntemi ve Fourier dönüşümü yöntemi gibi yukarıda verilen analitik yöntemler yalnızca sabit veya polinom katsayılı lineer diferansiyel denklemler için kullanılır. Bir sayısal yöntem olarak bilinen ve temelde dijital bilgisayar programlarıyla elde edilen sonlu farklar yönteminin, t ve uzay değişkenlerine bağlı katsayılı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için en iyi genel yöntemlerden biri olduğu bilinmektedir.

Bu tezi oluşturan bölümlerin içerikleri kısaca açıklanacaktır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriştir.

İkinci bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. 2.1 Alt Bölümünde, H Hilbert uzayında A pozitif tanımlı self-adjoint operatör olmak üzere zaman gecikmeli telegraf denk-

lemi için

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bAu([t]),\ t > 0, \\ \\ u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü için temel kararlılık teoremi verilmiştir. Burada, φ ve ψ fonksiyonları A operatörünün tanım kümesi $D(A)$'nın elemanları ve $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ ve $0 < b < 1$ olmak üzere $[t]$ en büyük tam sayı fonksiyonudur. Bu diferansiyel problemin çözümü için temel kararlılık teoreminin uygulamaları olarak, lokal olmayan koşullu bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi ve Dirichlet koşullu çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için iki başlangıç ve sınır değer problemi verilmiştir. 2.2 Alt Bölümünde, aynı diferansiyel problemin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2} + \alpha\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau} + Au_{k+1} = bAu_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}, \\ \\ K\tau = 1,\ (p-1)K+1 \le k \le pK-1,\ p = 1,2,..., \\ \\ u_0 = \varphi,\ \left((1+\alpha\tau)I + \tau^2A\right)\frac{u_1-u_0}{\tau} = \psi, \\ \\ \left((1+\alpha\tau)I + \tau^2A\right)\frac{u_{pK+1}-u_{pK}}{\tau} = \frac{u_{pK}-u_{pK-1}}{\tau},\ p = 1,2,... \end{cases}$$

birinci basamaktan doğruluklu kararlı iki adımlı fark şeması çalışılmıştır. Bu fark şemasının kararlılığı üzerine temel teorem kanıtlanmıştır. 2.3 Alt Bölümünde, uygulamalar olarak iki tipte zaman gecikmeli telegraf denklemi için fark şeması çözümlerinin kararlılık kestirimleri kurulmuştur.

Üçüncü bölümde, verilen diferansiyel problemin sayısal çözümü için ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması sunulmuştur. İkinci bölümdeki kararlılık sonuçlarının benzerleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, nümerik sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölüm sonuçtur.

BÖLÜM 2

ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI

Zaman gecikmeli telegraf denklemi için

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bAu([t]),\ t > 0, \\ \\ u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi \end{cases} \tag{2.1}$$

başlangıç değer problemi (Ashyralyev, Agirseven & Turk, 2020) ve (Türk, 2019) çalışmalarında ele alınmıştır. Burada, bir H Hilbert uzayında, $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ için $A \geq \delta I$ olmak üzere, A pozitif tanımlı self-adjoint operatör ve bilinen φ ve ψ fonksiyonları, A operatörünün tanım kümesi $D(A)$'nın elemanlarıdır. $[t]$ en büyük tam sayı fonksiyonu ile gecikme terimi ifade edilmekte olup $0 < b < 1$ koşulu sağlanır. Bu çalışmalarda, (2.1) probleminin sınırlı çözümü için kararlılık kestirimleri üzerine aşağıda verilen temel teorem kurulmuştur.

Teorem 2.1. *(2.1) probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$a = |b| + |1-b|d,\ \ c = |1-b|\frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}},\ \ d = 1 + \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}}$$

olmak üzere;

$$\max_{0\leq t\leq 1} \|u(t)\|_H \leq a\,\|\varphi\|_H + \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2} \psi \right\|_H,$$

$$\max_{0\le t\le 1}\left\|\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2}u'(t)\right\|_H \le c\,\|\varphi\|_H + d\left\|\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2}\psi\right\|_H,$$

$$\max_{n\le t\le n+1}\|u(t)\|_H \le a\max_{n-1\le t\le n}\|u(t)\|_H + \max_{n-1\le t\le n}\left\|\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2}u'(t)\right\|_H,$$
$$n=1,2,...,$$

$$\max_{n\le t\le n+1}\left\|\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2}u'(t)\right\|_H \le c\max_{n-1\le t\le n}\|u(t)\|_H + d\max_{n-1\le t\le n}\left\|\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-1/2}u'(t)\right\|_H,$$
$$n=1,2,....$$

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. 2.1 Alt Bölümünde, (2.1) probleminin çözümü için temel kararlılık Teoremi 2.1'in uygulamaları olarak bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için Dirichlet koşullu başlangıç değer problemleri ele alınmıştır. 2.2 Alt Bölümünde, (2.1) probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}+Au_{k+1}=bAu_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}, \\ \\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\ \\ u_0=\varphi,\ \left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)\frac{u_1-u_0}{\tau}=\psi, \\ \\ \left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)\frac{u_{pK+1}-u_{pK}}{\tau}=\frac{u_{pK}-u_{pK-1}}{\tau},\ p=1,2,... \end{cases} \tag{2.2}$$

birinci basamaktan doğruluklu iki adımlı fark şeması çalışılmıştır. (2.2) fark şemasının kararlılığı üzerine temel teorem verilip kanıtlanmıştır. 2.3 Alt Bölümünde, uygulamalar olarak, bir ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denkleminin iki farklı tipte başlangıç değer problemi için (2.2) fark şemasının çözümlerinin kararlılık kestirimleri kurulmuştur.

2.1 (2.1) Diferansiyel Probleminin Uygulamaları

İlk uygulama olarak, bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)+\alpha u_t(t,x)-(a(x)u_x(t,x))_x+\delta u(t,x) \\ \\ =b\left(-(a(x)u_x([t],x))_x+\delta u([t],x)\right), \\ \\ 0<t<\infty,\ 0<x<l, \\ \\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x),\ 0\le x\le l, \\ \\ u(t,0)=u(t,l),\ u_x(t,0)=u_x(t,l),\ 0\le t<\infty \end{cases} \tag{2.3}$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. $a(x)\ge a_0>0$, $(x\in(0,l))$, $a(0)=a(l)$ ve $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $(x\in[0,l])$ düzgün (smooth) fonksiyonlar, $\delta>0$ ve $0<b<1$ olmak üzere, (2.3) problemi bir düzgün $u(t,x)$ çözümüne sahiptir. $[0,l]$ üzerinde tanımlı integrallenebilir tüm f fonksiyonlarının uzayları olarak $H=L_2[0,l]$ Hilbert ve $W_2^1[0,l]$ Sobolev uzayları verilsin. Bu uzaylar üzerinde, sırasıyla,

$$\|f\|_{L_2[0,l]}=\left(\int_0^l |f(x)|^2dx\right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1[0,l]}=\left(\int_0^l \left(|f(x)|^2+|f'(x)|^2\right)dx\right)^{1/2}$$

normları tanımlıdır. Bu durumda aşağıdaki kararlılık kestirimleri elde edilir.

Teorem 2.2. *(2.3) probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri sağlanır.*

$$\max_{0\le t\le 1}\|u(t,.)\|_{L_2[0,l]}\le M_1\left\{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}+\|\psi\|_{L_2[0,l]}\right\},$$

$$\max_{0\le t\le 1}\|u(t,.)\|_{W_2^1[0,l]}+\max_{0\le t\le 1}\|u_t(t,.)\|_{L_2[0,l]}\le M_2\left\{\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]}+\|\psi\|_{L_2[0,l]}\right\},$$

$$\max_{n\le t\le n+1}\|u(t,.)\|_{L_2[0,l]}$$
$$\le M_3\left\{\max_{n-1\le t\le n}\|u(t,.)\|_{L_2[0,l]}+\max_{n-1\le t\le n}\|u_t(t,.)\|_{L_2[0,l]}\right\},\ n=1,2,...,$$

$$\max_{n\le t\le n+1}\|u(t,.)\|_{W_2^1[0,l]}+\max_{n\le t\le n+1}\|u_t(t,.)\|_{L_2[0,l]}$$
$$\le M_4\left\{\max_{n-1\le t\le n}\|u(t,.)\|_{W_2^1[0,l]}+\max_{n-1\le t\le n}\|u_t(t,.)\|_{L_2[0,l]}\right\},\ n=1,2,....$$

Burada verilen M_1, M_2, M_3 ve M_4 değerleri $\varphi(x)$ veya $\psi(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. Bir $H=L_2[0,l]$ Hilbert uzayında, (2.3) problemi

$$\begin{cases}\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\alpha\frac{du(t)}{dt}+A^xu(t)=bA^xu([t]),\ t>0,\\ u(0)=\varphi,\quad u'(0)=\psi\end{cases}$$

abstract formda yeniden yazılabilir. Burada,

$$A^xu(x)=-(a(x)u_x(x))_x+\delta u(x) \tag{2.4}$$

formülüyle verilen self-adjoint pozitif tanımlı A^x operatörünün tanım kümesi

$$D(A^x)=\{u(x):\ u(x),\ u_x(x),\ (a(x)u_x(x))_x\ \in L_2[0,l],\\ u(0)=u(l),\ u_x(0)=u_x(l)\}$$

biçimindedir. $[0,l]$ üzerinde tanımlı, bilinmeyen $u(t)=u(t,x)$ abstract fonksiyonu değerlerini $H=L_2[0,l]$ uzayında alır. Böylece, Teorem 2.2 ile verilen kararlılık kestirimleri, temel Teorem 2.1 ile verilen kestirimlerin sonucu olarak elde edilir. Böylece Teorem 2.2 kanıtlanmış olur. ■

İkinci uygulama olarak, $\Omega\subset R^n$, S düzgün (smooth) sınırına sahip olan bir açık, sınırlı bölge olmak üzere, $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ olsun. $[0,\infty)\times\Omega$ kümesi üzerinde,

$$\begin{cases}u_{tt}(t,x)+\alpha u_t(t,x)-\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r}(t,x))_{x_r}\\ =b\left(-\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r}([t],x))_{x_r}\right),\\ x=(x_1,...,x_n)\in\Omega,\ 0<t<\infty,\\ u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x),\ x\in\overline{\Omega},\\ u(t,x)=0,\ x\in S,\ 0\le t<\infty\end{cases} \tag{2.5}$$

çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için Dirichlet koşullu başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Burada, $a_r(x)>0$, $0<b<1$ olmak üzere, $x\in\Omega$ için $a_r(x)$ ve

$x \in \overline{\Omega}$ için $\varphi(x),\ \psi(x)$ verilen düzgün fonksiyonlardır. $\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlı integrallenebilir tüm f fonksiyonlarının uzayları olarak $H = L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert ve $W_2^1(\Omega)$ Sobolev uzayları verilsin. Bu uzaylar üzerinde, sırasıyla,

$$\|f\|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left(\int \ldots \int\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/2},$$

$$\|f\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int \ldots \int\limits_{x \in \Omega} \left[|f(x)|^2 + \sum_{r=1}^{n} \left| f_{x_r}(x) \right|^2 \right] dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/2}$$

normları tanımlıdır. Bu durumda aşağıdaki kararlılık kestirimleri elde edilir.

Teorem 2.3. *(2.5) probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$\max_{0 \le t \le 1} \|u(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \le M_5 \left\{ \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\overline{\Omega})} \right\},$$

$$\max_{0 \le t \le 1} \|u(t,.)\|_{W_2^1(\Omega)} + \max_{0 \le t \le 1} \|u_t(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \le M_6 \left\{ \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\overline{\Omega})} \right\},$$

$$\begin{aligned} &\max_{n \le t \le n+1} \|u(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \\ &\le M_7 \left\{ \max_{n-1 \le t \le n} \|u(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{n-1 \le t \le n} \|u_t(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \right\},\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max_{n \le t \le n+1} \|u(t,.)\|_{W_2^1(\Omega)} + \max_{n \le t \le n+1} \|u_t(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \\ &\le M_8 \left\{ \max_{n-1 \le t \le n} \|u(t,.)\|_{W_2^1(\Omega)} + \max_{n-1 \le t \le n} \|u_t(t,.)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \right\},\ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Burada verilen M_5, M_6, M_7 ve M_8 değerleri, $\varphi(x)$ veya $\psi(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. Bir $H = L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayında, (2.5) problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha \frac{du(t)}{dt} + A^x u(t) = bA^x u([t]),\ t > 0, \\ \\ u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi \end{cases}$$

abstract formda yeniden yazılabilir. Burada,

$$A^x u(x) = -\sum_{r=1}^{n} (a_r(x) u_{x_r}(x))_{x_r} \tag{2.6}$$

formülüyle verilen self-adjoint pozitif tanımlı A^x operatörünün tanım kümesi

$$D(A^x) = \left\{u(x) : u(x), u_{x_r}(x), \left(a_r(x)u_{x_r}(x)\right)_{x_r} \in L_2(\overline{\Omega}), 1 \le r \le n,\ u(x) = 0, x \in S\right\}$$

biçimindedir. $\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlı, bilinmeyen abstract fonksiyonu $u(t) = u(t,x)$ değerlerini $H = L_2(\overline{\Omega})$ uzayında alır. Böylece, Teorem 2.3 ile verilen kararlılık kestirimleri, Teorem 2.1 ile verilen kestirimlerden ve aşağıda verilen $L_2(\overline{\Omega})$'deki eliptik diferansiyel problemin çözümü için koersivite eşitsizliği üzerine teoremden (Sobolevskii, 1975) elde edilir. ■

Teorem 2.4.

$$\begin{cases} A^x u(x) = \omega(x),\ x \in \Omega, \\ \\ u(t,x) = 0,\ x \in S \end{cases}$$

eliptik diferansiyel probleminin çözümleri için

$$\sum_{r=1}^{n} \|u_{x_r x_r}\|_{L_2(\overline{\Omega})} \le M_9(\delta)\|\omega\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

koersivite eşitsizliği sağlanır. Burada verilen $M_9(\delta)$ değeri, $\omega(x)$ fonksiyonundan bağımsızdır.

2.2 (2.2) Fark Şemasının Kararlılığı Üzerine Temel Teorem

Bu alt bölümde, (2.1) ile verilen zaman gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü elde etmekte kullanılan (2.2) ile verilen birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının çözümleri için kararlılık teoremi kurulacaktır. Bu teoremin kanıtlanmasında kullanılacak olan aşağıdaki önerme ile (2.2) fark şemasının adım operatörleri için sağlanan kestirimler verilecektir.

Önerme 2.1. *Aşağıdaki kestirimler sağlanır.*

$$\begin{aligned}
\left\|B^{-1/2}\right\|_{H\to H} &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}},\\
\|R_{\pm}\|_{H\to H} &\leq 1,\\
\left\|\tau B^{1/2}R_{\pm}\right\|_{H\to H} &\leq 1,\\
\left\|B^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{4}I+B\right)\right\|_{H\to H} &\leq \frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\\
\left\|B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2}I\pm iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H} &\leq 1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}},\\
\left\|\tau B^{1/2}((1+\alpha\tau)I+\tau^2A)^{-1}\right\|_{H\to H} &\leq 1.
\end{aligned}$$

Burada,

$$R_{\pm}u=\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I\mp i\tau B^{1/2}\right)^{-1}u,$$

$$Bu=\left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)u,\ u\in H$$

ve I birim operatördür.

Önerme 2.1'in kanıtı, Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatörlerin spektral temsiline dayanmaktadır (Ashyralyev Sobolevskii, 2004).

Teorem 2.5. *(2.2) fark probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimler sağlanır.*

$a=|b|+|1-b|d,\ c=|1-b|\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\ d=\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)$ *olmak üzere;*

$$\max_{1\leq k\leq K}\|u_k\|_H\leq a\|\varphi\|_H+\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H, \tag{2.7}$$

$$\max_{1\leq k\leq K}\left\|B^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H\leq c\|\varphi\|_H+d\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\max_{pK+1\leq k\leq(p+1)K}\|u_k\|_H &\leq a\max_{(p-1)K\leq k\leq pK}\|u_k\|_H\\
&+\max_{(p-1)K+1\leq k\leq pK}\left\|B^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H, p=1,2,...,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|B^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \le c\max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k\|_H$$

$$+d\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|B^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H, p=1,2,.... \tag{2.10}$$

Kanıt. (2.2) fark problemi, operatör katsayılı ikinci dereceden fark denklemi için

$$\begin{cases} \left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)u_{k+1}-(2+\alpha\tau)u_k+u_{k-1}=b\tau^2Au_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}, \\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\ u_0=\varphi,\ u_1=\varphi+\tau\left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)^{-1}\psi, \\ u_{pK+1}=u_{pK}+\left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)^{-1}\left(u_{pK}-u_{pK-1}\right),\ p=1,2,... \end{cases} \tag{2.11}$$

denk başlangıç değer problemi olarak yeniden yazılabilir.

$$R_+R_- = \left((1+\alpha\tau)I+\tau^2A\right)^{-1}$$

kullanıldığında

$$u_1 = \varphi+\tau B^{1/2}R_+R_-B^{-1/2}\psi$$

ve

$$B^{-1/2}\frac{u_1-u_0}{\tau} = R_+R_-B^{-1/2}\psi$$

elde edilir. Burada, üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılırsa

$$\|u_1\|_H \le \|\varphi\|_H+\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H$$

ve

$$\left\|B^{-1/2}\frac{u_1-u_0}{\tau}\right\|_H \le \|\varphi\|_H+\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece, (2.7) ve (2.8) kestirimleri $k=1$ için gösterilmiş olur.

$2 \le k \le K$ için (2.11) ikinci dereceden fark denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_k &= R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1} - R_-^{k-1}\right)u_0 + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)u_1 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-j} - R_+^{k-j}\right) b\tau^2 A u_{\left[\frac{j-pK}{K+1}\right]K+pK} \end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilebilir (Ashyralyev Sobolevskii, 2004). (2.12) nin yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} u_k &= R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1} - R_-^{k-1}\right)u_0 + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)u_1 \\ &\quad + R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left[(R_- - R_+) - \left(R_-^k - R_+^k\right) + R_+R_-\left(R_-^{k-1} - R_+^{k-1}\right)\right] \\ &\quad \times (I - R_-)^{-1}(I - R_+)^{-1} b\tau^2 A u_0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada, $u_0 = \varphi,\ u_1 = \varphi + \tau R_+R_-\psi$ koşullarının,

$$(I - R_-)(I - R_+) = \tau^2 A R_-R_+$$

özdeşliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} u_k &= \left[b + (1-b)(R_- - R_+)^{-1}\left((I - R_+)R_-^k - (I - R_-)R_+^k\right)\right]\varphi \\ &\quad + \tau R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)\psi \end{aligned}$$

elde edilir. Yeniden

$$I - R_\pm = \left(\frac{\alpha\tau}{2} I \mp i\tau B^{1/2}\right)R_\pm,$$

ve

$$(R_- - R_+)^{-1} = \left[-2i\tau B^{1/2} R_-R_+\right]^{-1}$$

özdeşliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} u_k &= \left[b + \frac{(1-b)\,i}{2} B^{-1/2}\left(\left(\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2}\right)R_-^{k-1} - \left(\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2}\right)R_+^{k-1}\right)\right]\varphi \\ &\quad + \frac{i}{2}\left(R_-^k - R_+^k\right)B^{-1/2}\psi \end{aligned} \tag{2.13}$$

bulunur. Böylece, (2.13) den, üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılarak

$$\|u_k\|_H \leq \left[|b| + |1-b| \left(1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right) \right] \|\varphi\|_H + \left\| B^{-1/2}\psi \right\|_H \tag{2.14}$$

eşitsizliği bulunur. (2.14) eşitsizliğinden Teorem 2.5'de verilen (2.7) kestirimi elde edilir.

Şimdi, (2.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} B^{-1/2}\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} &= \frac{(1-b)\,i}{2\tau} B^{-1} \Big[\Big(\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2} \Big) \big(I - R_-^{-1} \big) R_-^{k-1} \\ &\quad - \Big(\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2} \Big) \big(I - R_+^{-1} \big) R_+^{k-1} \Big] \varphi \\ &\quad + \frac{i}{2\tau} B^{-1/2} \big(\big(I - R_-^{-1} \big) R_-^{k} - \big(I - R_+^{-1} \big) R_+^{k} \big) B^{-1/2} \psi \end{aligned}$$

elde edilebilir.

$$I - R_\pm^{-1} = \Big(-\frac{\alpha\tau}{2} I \pm i\tau B^{1/2} \Big)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B^{-1/2}\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \frac{(1-b)\,i}{2} B^{-1} \Big[\Big(-\frac{\alpha^2}{4} I - B \Big) R_-^{k-1} - \Big(-\frac{\alpha^2}{4} I - B \Big) R_+^{k-1} \Big] \varphi \\ + \frac{i}{2} B^{-1/2} \Big(\Big(-\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2} \Big) R_-^{k} - \Big(-\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2} \Big) R_+^{k} \Big) B^{-1/2} \psi \end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur. (2.15) den, üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\| B^{-1/2}\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H &\leq \left(|1-b| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}} \right) \|\varphi\|_H \\ &\quad + \left(1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right) \left\| B^{-1/2}\psi \right\|_H \end{aligned} \tag{2.16}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.16) eşitsizliği ile Teorem 2.5'in (2.8) kestirimi gösterilmiş olur.

Şimdi Teorem 2.5'de verilen (2.9) ve (2.10) kestirimleri ispatlanacaktır. $k = pK+1$,

$p = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\begin{aligned} u_{pK+1} &= u_{pK} + \left((1+\alpha\tau)I + \tau^2 A\right)^{-1}\left(u_{pK} - u_{pK-1}\right) \\ &= u_{pK} + \tau B^{1/2} R_+ R_- B^{-1/2}\left(\frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau}\right) \end{aligned}$$

ve

$$B^{-1/2}\frac{u_{pK+1} - u_{pK}}{\tau} = R_+ R_- B^{-1/2}\left(\frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau}\right)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılarak

$$\left\|u_{pK+1}\right\|_H \leq \left\|u_{pK}\right\|_H + \left\|B^{-1/2}\frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau}\right\|_H$$

ve

$$\left\|B^{-1/2}\frac{u_{pK+1} - u_{pK}}{\tau}\right\|_H \leq \left\|u_{pK}\right\|_H + \left\|B^{-1/2}\frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau}\right\|_H$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi, $pK + 2 \leq k \leq (p+1)K$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ için, (2.11) ikinci dereceden fark denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_k &= R_+ R_- (R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-pK-1} - R_-^{k-pK-1}\right)u_{pK} + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right)u_{pK+1} \\ &\quad + \sum_{j=pK+1}^{k-1} R_+ R_- (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-j} - R_+^{k-j}\right) b\tau^2 A u_{\left[\frac{j-pK}{K+1}\right]K+pK} \end{aligned} \tag{2.17}$$

formülüyle elde edilebilir (Ashyralyev & Sobolevskii, 2004).

$u_{pK+1} = u_{pK} + R_+R_-\left(u_{pK} - u_{pK-1}\right)$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
u_k &= R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-pK-1} - R_-^{k-pK-1}\right)u_{pK} \\
&\quad + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right)u_{pK} \\
&\quad + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right)R_+R_-\left(u_{pK} - u_{pK-1}\right) \\
&\quad + R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left[(R_- - R_+) - \left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right) + R_+R_-\left(R_-^{k-pK-1} - R_+^{k-pK-1}\right)\right] \\
&\quad \times (I - R_-)^{-1}(I - R_+)^{-1}\, b\tau^2 A u_{pK}
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$(I - R_-)^{-1}(I - R_+)^{-1} = \left(\tau^2 R_+R_-A\right)^{-1}$$

özdeşliğiyle

$$
\begin{aligned}
u_k &= \left[b + (1-b)(R_- - R_+)^{-1}\left((I - R_+)R_-^{k-pK} - (I - R_-)R_+^{k-pK}\right)\right]u_{pK} \\
&\quad + R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right)\left(u_{pK} - u_{pK-1}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$I - R_\pm = \left(\frac{\alpha\tau}{2}I \mp i\tau B^{1/2}\right)R_\pm$$

ve

$$(R_- - R_+)^{-1} = \left(-2i\tau B^{1/2}R_-R_+\right)^{-1}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
u_k &= \Big[b + (1-b)\left(-2i\tau B^{1/2}R_-R_+\right)^{-1} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{\alpha\tau}{2}I - i\tau B^{1/2}\right)R_+R_-^{k-pK} - \left(\frac{\alpha\tau}{2}I + i\tau B^{1/2}\right)R_-R_+^{k-pK}\right)\Big]u_{pK} \\
&\quad + R_+R_-\left(-2i\tau B^{1/2}R_-R_+\right)^{-1}\left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK}\right)\left(u_{pK} - u_{pK-1}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} u_k &= \left[b + \frac{(1-b)\,i}{2} B^{-1/2} \left(\left(\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2} \right) R_-^{k-pK-1} - \left(\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2} \right) R_+^{k-pK-1} \right) \right] u_{pK} \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(R_-^{k-pK} - R_+^{k-pK} \right) B^{-1/2} \frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau} \end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir. (2.18) den, üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılarak

$$\|u_k\|_H \leq \left[|b| + |1-b| \left(1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right) \right] \left\| u_{pK} \right\|_H + \left\| B^{-1/2} \frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau} \right\|_H \tag{2.19}$$

eşitsizliği bulunur. (2.19) eşitsizliğiyle Teorem 2.5'in (2.9) kestirimi gösterilmiş olur.

(2.18) kullanılarak

$$\begin{aligned} B^{-1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} &= \left[\frac{(1-b)\,i}{2\tau} B^{-1} \left(\left(\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2} \right) \left(I - R_-^{-1} \right) R_-^{k-pK-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2} \right) \left(I - R_+^{-1} \right) R_+^{k-pK-1} \right) \right] u_{pK} \\ &\quad + \frac{iB^{-1/2}}{2\tau} \left[\left(I - R_-^{-1} \right) R_-^{k-pK} - \left(I - R_+^{-1} \right) R_+^{k-pK} \right] B^{-1/2} \frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilebilir.

$$I - R_\pm^{-1} = \left(-\frac{\alpha\tau}{2} I \pm i\tau B^{1/2} \right)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} B^{-1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} &= \left[\frac{(1-b)\,i}{2} B^{-1} \left(-\frac{\alpha^2}{4} I - B \right) \left(R_-^{k-pK-1} - R_+^{k-pK-1} \right) \right] u_{pK} \\ &\quad + \frac{iB^{-1/2}}{2} \left[\left(-\frac{\alpha}{2} I - iB^{1/2} \right) R_-^{k-pK} - \left(-\frac{\alpha}{2} I + iB^{1/2} \right) R_+^{k-pK} \right] \\ &\quad \times B^{-1/2} \frac{u_{pK} - u_{pK-1}}{\tau} \end{aligned} \tag{2.20}$$

bulunur. (2.20) den, üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1 kullanılarak

$$\left\|B^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \leq |1-b|\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}\left\|u_{pK}\right\|_H + \left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)\left\|B^{-1/2}\frac{u_{pK}-u_{pK-1}}{\tau}\right\|_H \tag{2.21}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.21) eşitsizliğiyle Teorem 2.5'in (2.10) kestirimi gösterilmiş olur.

Böylece, Teorem 2.5 kanıtlanmış olur. ■

Teorem 2.5 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 2.6. *(2.2) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.* $a=|b|+|1-b|d,\ c=|1-b|\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\ d=\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)$ *olmak üzere;*

$$\max_{1\leq k\leq K}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H \leq a\left\|B^{1/2}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H, \tag{2.22}$$

$$\max_{1\leq k\leq K}\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \leq c\left\|B^{1/2}\varphi\right\|_H + d\,\|\psi\|_H, \tag{2.23}$$

$$\max_{pK+1\leq k\leq (p+1)K}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H \leq a\max_{(p-1)K\leq k\leq pK}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H + \max_{(p-1)K+1\leq k\leq pK}\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H, p=1,2,..., \tag{2.24}$$

$$\max_{pK+1\leq k\leq (p+1)K}\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \leq c\max_{(p-1)K\leq k\leq pK}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H + d\max_{(p-1)K+1\leq k\leq pK}\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H, p=1,2,.... \tag{2.25}$$

Kanıt. (2.13), (2.15), (2.18) ve (2.20) ye $B^{1/2}$ operatörünün uygulanmasından sonra üçgen eşitsizliği uygulanıp Önerme 2.1'den yararlanarak sırasıyla (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) kestirimleri elde edilir. ■

2.3 (2.2) Fark Şemasının Uygulamaları

Bu bölümde, Teorem 2.5 ve 2.6'nın uygulamaları olarak bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için Dirichlet koşullu başlangıç ve sınır değer problemleri ele alınmıştır.

Bir önceki 2.2 Alt Bölümünde verilen temel teoremlerin ilk uygulaması olarak bir boyutlu lokal olmayan koşullu gecikmeli telegraf denklemi için (2.3) başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmıştır. (2.3) problemi iki adımda kesikli hale getirilir.

Birinci adımda

$$[0,l]_h = \{x = x_n : x_n = nh,\ 0 \le n \le M,\ Mh = l\}$$

ızgara (grid) uzayı tanımlansın. $[0,l]_h$ üzerinde tanımlı $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$ ağ (mesh) fonksiyonlarının $L_{2h} = L_2([0,l]_h)$ Hilbert ve $W_{2h}^1 = W_2^1([0,l]_h)$ Sobolev uzayları verilsin. Bu uzaylar üzerinde, sırasıyla

$$\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x\in[0,l]_h} \left|\varphi^h(x)\right|^2 h\right)^{1/2}$$

ve

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^1} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x\in[0,l]_h} \left|\varphi_{x,j}^h(x)\right|^2 h\right)^{1/2}$$

normları tanımlıdır. (2.3) probleminde tanımlanan A^x diferansiyel operatörünün yardımıyla

$$A_h^x \varphi^h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x,n} + \delta\varphi_n\}_1^{M-1}$$

fark operatörü tanımlanır. A_h^x fark operatörü, $\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$ koşullarını sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$ ağ fonksiyonlarının uzayında etki eder. A_h^x'in self-adjoint pozitif tanımlı operatör olmasıyla, L_{2h} Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2} + \alpha\frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = bA_h^x u^h([t],x), \\ 0 < t < \infty,\ x \in [0,l]_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x),\ u_t^h(0,x) = \psi^h(x),\ x \in [0,l]_h \end{cases} \tag{2.26}$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

İkinci adımda, (2.26) başlangıç değer problemi ile (2.2) birinci basamaktan doğ-

ruluklu fark şeması değiştirilerek

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}^h(x)-u_k^h(x)}{\tau}+A_h^x u_{k+1}^h(x)=bA_h^x u^h_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}(x), \\ t_k=k\tau,\ \ x\in[0,l]_h,\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ \ p=1,2,..., \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x),\ \left((1+\alpha\tau)I_h+\tau^2A_h^x\right)\frac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau}=\psi^h(x),\ x\in[0,l]_h, \\ \left((1+\alpha\tau)I_h+\tau^2A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h(x)-u_{pK}^h(x)}{\tau}=\frac{u_{pK}^h(x)-u_{pK-1}^h(x)}{\tau}, p=1,2,...,\ x\in[0,l]_h. \end{cases} \tag{2.27}$$

fark problemi elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.7. *$\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ olsun. Bu durumda, (2.27) probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$\max_{1\le k\le K}\|u_k^h\|_{L_{2h}}\le M_1\left\{\|\varphi^h\|_{L_{2h}}+\|\psi^h\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{1\le k\le K}\|u_k^h\|_{W_{2h}^1}+\max_{1\le k\le K}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}\le M_2\left\{\|\varphi^h\|_{W_{2h}^1}+\|\psi^h\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\|u_k^h\|_{L_{2h}}$$
$$\le M_3\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k^h\|_{L_{2h}}+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,...,$$

$$\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\|u_k^h\|_{W_{2h}^1}+\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}$$
$$\le M_4\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k^h\|_{W_{2h}^1}+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,....$$

Burada verilen M_1, M_2, M_3 ve M_4 değerleri $\varphi^h(x)$ veya $\psi^h(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. (2.27) fark problemi, L_{2h} Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h}{\tau^2} + \alpha \frac{u_{k+1}^h - u_k^h}{\tau} + A_h^x u_{k+1}^h = bA_h^x u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^h, \\ t_k = k\tau,\ K\tau = 1,\ (p-1)K+1 \le k \le pK-1,\ p = 1,2,..., \\ u_0^h = \varphi^h,\ \left((1+\alpha\tau)I_h + \tau^2 A_h^x\right)\frac{u_1^h - u_0^h}{\tau} = \psi^h, \\ \left((1+\alpha\tau)I_h + \tau^2 A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h - u_{pK}^h}{\tau} = \frac{u_{pK}^h - u_{pK-1}^h}{\tau},\ p = 1,2,... \end{cases}$$

abstract formda yeniden yazılabilir. Burada, $u_k^h = u_k^h(x)$, $[0,l]_h$ kümesinde tanımlı ve $H = L_{2h}$ Hilbert uzayında değer alan bilinmeyen abstract ağ fonksiyonudur. Böylece, Teorem 2.7 ile verilen kestirimler, sırasıyla (2.7), (2.8), (2.9) ve (2.10) kestirimlerinden elde edilir. ■

Bir önceki 2.2 Alt Bölümünde verilen temel teoremlerin ikinci uygulaması olarak, $[0,\infty)\times\Omega$ üzerinde, çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için (2.5) başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. (2.5) probleminin kesikli hale getirilerek incelenmesi iki adımda yapılır.

Birinci adımda, $\overline{\Omega}$ üzerinde

$$\overline{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \cdots, h_n j_n),\ j = (j_1, \cdots, j_n),\ 0 \le j_r \le N_r,\ N_r h_r = 1,\ r = 1, \cdots, n\}$$

ızgara uzayı ve

$$\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega,\ S_h = \overline{\Omega}_h \cap S.$$

tanımlansın. $\overline{\Omega}_h$ üzerinde tanımlı $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 r_1, ..., h_n r_n)\}$ ağ fonksiyonlarının $L_{2h} = L_2(\overline{\Omega}_h)$ Hilbert ve $W_{2h}^1 = W_2^1(\overline{\Omega}_h)$ Sobolev uzayları verilsin. Bu uzaylar üzerinde sırasıyla,

$$\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h} \left|\varphi^h(x)\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2}$$

ve

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^1} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h}\sum_{r=1}^{m} \left|\varphi_{x_r, j_r}^h(x)\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2}$$

normları tanımlıdır. (2.5) probleminde, A^x diferansiyel operatörü yardımıyla

$$A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r}$$

fark operatörü tanımlansın. A_h^x operatörü, L_{2h} uzayında, self-adjoint pozitif tanımlıdır ve her $x \in S_h$ için $u^h(x) = 0$ koşulunu sağlayan $u^h(x)$ ağ fonksiyonlarının uzayında etki eder. A_h^x fark operatörünün yardımıyla,

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^h(t,x)}{dt^2} + \alpha \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = a A_h^x u^h([t],x), \\ 0 < t < \infty,\ x \in \Omega_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x), u_t^h(0,x) = \psi^h(x),\ x \in \overline{\Omega}_h \end{cases} \tag{2.28}$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

İkinci adımda, (2.28) başlangıç değer problemi ile (2.2) birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının değiştirilmesiyle

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + \alpha \frac{u_{k+1}^h(x) - u_k^h(x)}{\tau} + A_h^x u_{k+1}^h(x) = b A_h^x u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^h(x), \\ t_k = k\tau,\ \ x \in \Omega_h,\ K\tau = 1,\ (p-1)K + 1 \le k \le pK - 1,\ \ p = 1, 2, ..., \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x),\ \left((1 + \alpha\tau) I_h + \tau^2 A_h^x \right) \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \psi^h(x),\ x \in \overline{\Omega}_h, \\ \left((1 + \alpha\tau) I_h + \tau^2 A_h^x \right) \frac{u_{pK+1}^h(x) - u_{pK}^h(x)}{\tau} = \frac{u_{pK}^h(x) - u_{pK-1}^h(x)}{\tau},\ x \in \overline{\Omega}_h,\ p = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.29}$$

fark denklemi elde edilir.

Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.8. *$\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ olsun. (2.29) probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$\max_{1 \le k \le K} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \le M_5 \left\{ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} \right\},$$

$$\max_{1 \le k \le K} \|u_k^h\|_{W_{2h}^1} + \max_{1 \le k \le K} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \le M_6 \left\{ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^1} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} \right\},$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}} \le M_7\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\right.$$
$$\left.+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,...,$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}$$
$$\le M_8\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,....$$

Burada verilen M_5, M_6, M_7 ve M_8 değerleri $\varphi^h(x)$ veya $\psi^h(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. (2.29) fark problemi, $L_{2h}=L_2(\overline{\Omega}_h)$ Hilbert uzayında

$$\begin{cases}\frac{u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}^h-u_k^h}{\tau}+A_h^x u_{k+1}^h=bA_h^x u^h_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK},\\ \\ t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ \ p=1,2,...,\\ \\ u_0^h=\varphi^h,\ \left((1+\alpha\tau)I_h+\tau^2A_h^x\right)\frac{u_1^h-u_0^h}{\tau}=\psi^h,\\ \\ \left((1+\alpha\tau)I_h+\tau^2A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h-u_{pK}^h}{\tau}=\frac{u_{pK}^h-u_{pK-1}^h}{\tau},\ p=1,2,...\end{cases}$$

abstract formda yeniden yazılabilir. Burada, $u_k^h=u_k^h(x)$, $\overline{\Omega}_h$ üzerinde tanımlı ve değerlerini $H=L_{2h}$ Hilbert uzayında alan bilinmeyen abstract ağ fonksiyonudur. Böylece, Teorem 2.8 ile verilen kararlılık kestirimleri, sırasıyla (2.7), (2.8), (2.9) ve (2.10) kestirimlerinden ve eliptik fark probleminin çözümü için koersivite eşitsizliği üzerine aşağıda verilen teoremden (Sobolevskii, 1975) elde edilir.

Teorem 2.9.

$$\begin{cases}A_h^x u^h(x)=\omega^h(x),\ x\in\Omega_h,\\ \\ u^h(x)=0,\ x\in S_h\end{cases}$$

eliptik fark probleminin çözümü için

$$\sum_{r=1}^{n} \left\| u^h{}_{x_r \bar{x}_r} \right\|_{L_{2h}} \leq M_9 ||\omega^h||_{L_{2h}},$$

kestirimi sağlanır ve burada verilen M_9, h *ve* ω^h *değerlerine bağlı değildir.*

■

BÖLÜM 3

ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİ İÇİN İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI

Bu bölümde amaç, (2.1) probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+\frac{1}{2}Au_k+\frac{1}{4}A(u_{k+1}+u_{k-1})=bAu_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}, \\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\ u_0=\varphi,\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)\frac{u_1-u_0}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A\varphi+\psi, \\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)\frac{u_{pK+1}-u_{pK}}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}Au_{pK}+\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau},\ p=1,2,... \end{cases} \tag{3.1}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasını çalışmaktır. 3.1 Alt Bölümünde, (3.1) fark şemasının çözümünün kararlılığı üzerine temel teorem verilip kanıtlanacaktır. 3.2 Alt Bölümünde, bu temel teoremin uygulamaları olarak, iki başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için verilen fark şemalarının çözümlerinin kararlılık kestirimleri üzerine teoremler verilip kanıtlanacaktır.

3.1 (3.1) Fark Şemasının Kararlılığı Üzerine Temel Teorem

Temel toeremin kanıtı aşağıdaki önermeye dayanmaktadır.

Önerme 3.1. *Aşağıdaki kestirimler sağlanır.*

$$\begin{aligned}
\|R_{\pm}\|_{H\to H} &\leq 1,\\
\left\|B^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{4}+B\right)\right\|_{H\to H} &\leq \frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\\
\left\|B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}\pm iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H} &\leq 1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}},\\
\left\|\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\mp\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} &\leq 1,\\
\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I\pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\mp\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} &\leq 2.
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
R_{\pm}u &= \left(I-\frac{\tau^2}{4}A\pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}u\\
&= \left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\pm\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\mp\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}u,\\
Bu &= \left(A-\frac{\alpha^2}{4}I\right)u,\ u\in H
\end{aligned}$$

ve I birim operatördür.

Önerme 3.1'in kanıtı, bir H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatörlerin spektral temsiline dayanmaktadır (Ashyralyev Sobolevskii, 2004).

Teorem 3.1. *(3.1) fark probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimler sağlanır.*

$$a=|b|+|1-b|\frac{d}{2},\ c=2|1-b|\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\ d=2\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)$$

olmak üzere

$$\max_{1\leq k\leq K}\|u_k\|_H\leq a\|\varphi\|_H+\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H, \tag{3.2}$$

$$\max_{2\leq k\leq K}\left\|B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H\leq c\|\varphi\|_H+d\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H, \tag{3.3}$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\|u_k\|_H \le a \max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k\|_H$$

$$+\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H,\ p=1,2,..., \tag{3.4}$$

$$\max_{pK+2\le k\le (p+1)K}\left\|B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H \le c\max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k\|_H$$

$$+d\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H,\ p=1,2,.... \tag{3.5}$$

Kanıt. (3.1) fark problemi, operatör katsayılı ikinci dereceden fark denklemleri için

$$\begin{cases} \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)u_{k+1}-\left(2I-\frac{\tau^2}{2}A\right)u_k+\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)u_{k-1} \\ =b\tau^2 A u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}, \\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\ u_0=\varphi,\ u_1=u_0+(b-1)\frac{\tau^2}{2}A\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\varphi \\ +\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\psi, \\ u_{pK+1}=u_{pK}+(b-1)\frac{\tau^2}{2}A\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}u_{pK} \\ +\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\left(\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right),\ p=1,2,... \end{cases} \tag{3.6}$$

başlangıç değer problemi olarak yeniden yazılabilir. $1\le k\le K$ için (3.6) fark denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_k &= R_+R_-(R_--R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1}-R_-^{k-1}\right)u_0+(R_--R_+)^{-1}\left(R_-^k-R_+^k\right)u_1 \\ &\quad +\sum_{j=1}^{k-1}R_+R_-(R_--R_+)^{-1}\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\alpha^2}{4}A\right)^{-1}\left(R_-^{k-j}-R_+^{k-j}\right)b\tau^2Au_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilebilir (Ashyralyev Sobolevskii, 2004). (3.6) fark probleminde verilen u_1 ile ilgili

koşulun düzenlenmesiyle

$$u_1 = \left[b + (1-b)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\right]\varphi$$

$$+\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\psi$$

elde edilir. u_0 ve u_1 eşitlikleri (3.7) de yerine yazılırsa

$$u_k = R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1} - R_-^{k-1}\right)\varphi + b(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k} - R_+^{k}\right)\varphi$$

$$+(1-b)(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k} - R_+^{k}\right)$$

$$\times\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\varphi$$

$$+(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^{k} - R_+^{k}\right)\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\psi$$

$$+R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\alpha^2}{4}A\right)^{-1}$$

$$\times\left[(R_- - R_+) - \left(R_-^{k} - R_+^{k}\right) + R_+R_-\left(R_-^{k-1} - R_+^{k-1}\right)\right](I - R_-)^{-1}(I - R_+)^{-1}\, b\tau^2 A\varphi$$

elde edilir.

$$I - R_\pm = \left(\frac{\alpha\tau}{2}I \mp i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I \mp \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}$$

ve

$$(I - R_-)^{-1}(I - R_+)^{-1} = \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(-\tau^2 A\right)^{-1}$$

özdeşliklerinin, elde edilen u_k ile ilgili son denklemde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} u_k &= R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1} - R_-^{k-1}\right)\varphi + b(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)\varphi \\ &\quad + (1-b)(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right) \\ &\quad \times\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\varphi \\ &\quad + (R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\psi \\ &\quad + bR_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\alpha^2}{4}A\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right) \\ &\quad \times\left[(R_- - R_+) - \left(R_-^k - R_+^k\right) + R_+R_-\left(R_-^{k-1} - R_+^{k-1}\right)\right]\varphi \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$R_+R_- = \left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}$$

özdeşliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} u_k &= b\varphi + (1-b)R_+R_-(R_- - R_+)^{-1}\left(R_+^{k-1} - R_-^{k-1}\right)\varphi \\ &\quad + (1-b)(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right) \\ &\quad \times\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - \frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\varphi \\ &\quad + \tau(R_- - R_+)^{-1}\left(R_-^k - R_+^k\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\psi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$(R_- - R_+)^{-1} = \left(-2i\tau B^{1/2}\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right),$$

$$\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + \frac{\tau^2}{4}A\right)R_\pm = \left(I - \frac{\tau^2}{4}A \pm i\tau B^{1/2}\right)$$

özdeşliklerinin de kullanılmasıyla, $1 \leq k \leq K$ için (3.6) fark şemasının çözümü için

$$\begin{aligned} u_k &= b\varphi + (1-b)\frac{i}{2}\left(B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2} - iB^{1/2}\right)R_-^k - B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2} + iB^{1/2}\right)R_+^k\right)\varphi \\ &\quad + \frac{i}{2}B^{-1/2}\left(R_-^k - R_+^k\right)\psi \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Böylece, (3.8) den üçgen eşitsizliği uygulanıp, Önerme 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u_k\|_H &\leq |b|\,\|\varphi\|_H + |(1-b)|\frac{1}{2}\left[\left\|B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2} - iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\left\|R_-^k\right\|_{H\to H}\right. \\ &+ \left.\left\|B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2} + iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\left\|R_+^k\right\|_{H\to H}\right]\|\varphi\|_H \\ &+ \frac{1}{2}\left(\left\|R_-^k\right\|_{H\to H} + \left\|R_+^k\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H \\ &\leq \left[|b| + |(1-b)|\left(1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)\right]\|\varphi\|_H + \left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H \end{aligned} \tag{3.9}$$

kestirimi bulunur. (3.9) eşitsizliğinden Teorem 3.1'de verilen (3.2) kestirimi elde edilir.

Şimdi, (3.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} B^{-1/2}\frac{3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}}{2\tau} &= (1-b)\frac{iB^{-1}}{4\tau}\left[\left(\frac{\alpha}{2} - iB^{1/2}\right)(3R_- - I)(R_- - I)R_-^{k-2}\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{1/2}\right)(3R_+ - I)(R_+ - I)R_+^{k-2}\right]\varphi \\ &\quad + \frac{iB^{-1/2}}{4\tau}\left[(3R_- - I)(R_- - I)R_-^{k-2}\right. \\ &\quad \left. - (3R_+ - I)(R_+ - I)R_+^{k-2}\right]B^{-1/2}\psi \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$3R_\pm - I = 2\left(\left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right)I \pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1 + \frac{\alpha\tau}{4}\right)I \mp \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(3R_{\pm}-I)(R_{\pm}-I) &= 2\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I \pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I \mp \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1} \\
&\quad \times \left(-\frac{\alpha\tau}{2}I \pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I \mp \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

özdeşliklerinden yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau} &= (1-b)\frac{iB^{-1}}{2}\left(-\frac{\alpha^2}{4}-B\right) \\
&\quad \times \left[\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I + \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2} R_{-}^{k-2}\right. \\
&\quad - \left.\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I - \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2} R_{+}^{k-2}\right]\varphi \\
&\quad + \frac{i}{2}\left[B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I - iB^{1/2}\right)\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I - i\tau B^{1/2}\right)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I + \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2} R_{-}^{k-2}\right. \\
&\quad - B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I + iB^{1/2}\right)\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I + i\tau B^{1/2}\right) \\
&\quad \times \left.\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I - \frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2} R_{+}^{k-2}\right]B^{-1/2}\psi \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanırak

$$\left\| B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H \le \frac{|(1-b)|}{2}\left\|B^{-1}\left(-\frac{\alpha^2}{4}-B\right)\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_-^{k-2}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\left.+\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_+^{k-2}\right\|_{H\to H}\right]\|\varphi\|_H$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left\|B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I-iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_-^{k-2}\right\|_{H\to H}$$
$$+\left\|B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I+iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}$$
$$\left.\times\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_+^{k-2}\right\|_{H\to H}\right]\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H$$

elde edilir ve Önerme 3.1'den

$$\begin{aligned}\left\| B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H &\le |(1-b)|2\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}\|\varphi\|_H \\ &+ 2\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)\left\|B^{-1/2}\psi\right\|_H \qquad (3.11)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (3.11) eşitsizliğinden Teorem 3.1'de verilen (3.3) kestirimi elde edilir.

$pK+1\le k\le(p+1)K,\ p=1,2,3,...$ için (3.6) ikinci dereceden fark denklemin çözümü

$$\begin{aligned}u_k &= R_+R_-(R_--R_+)^{-1}\left(R_+^{k-pK-1}-R_-^{k-pK-1}\right)u_{pK}+(R_--R_+)^{-1}\left(R_-^{k-pK}-R_+^{k-pK}\right)u_{pK+1} \\ &+\sum_{j=pK+1}^{k-1}R_+R_-(R_--R_+)^{-1}\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\left(R_-^{k-j}-R_+^{k-j}\right)b\tau^2Au_{pK} \qquad (3.12)\end{aligned}$$

kullanılarak bulunabilir (Ashyralyev Sobolevskii, 2004). (3.6) fark şemasında verilen

u_{pK+1} ile ilgili koşulun yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} u_{pK+1} &= \left[b+(1-b)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-\frac{\tau^2}{4}A\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\right]u_{pK} \\ &\quad +\tau\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+\frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1}\left(\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) ve (3.7) den

$$\begin{aligned} u_k &= bu_{pK}+(1-b)\frac{i}{2}\left[B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2}-iB^{1/2}\right)R_-^{k-pK}-B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2}+iB^{1/2}\right)R_+^{k-pK}\right]u_{pK} \\ &\quad +\frac{i}{2}B^{-1/2}\left(R_-^{k-pK}-R_+^{k-pK}\right)\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau} \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. Üçgen eşitsizliği kullanılarak ve Önerme 3.1'den

$$\begin{aligned} \left\|u_{pK+1}\right\|_H &\leq |b|\left\|u_{pK}\right\|_H+\frac{(1-b)}{2}\left[\left\|B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2}-iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\left\|R_-^{k-pK}\right\|_{H\to H}\right. \\ &\quad \left.+\left\|B^{-1/2}\left(\frac{\alpha}{2}+iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\left\|R_+^{k-pK}\right\|_{H\to H}\right]\left\|u_{pK}\right\|_H \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\left\|R_-^{k-pK}\right\|_{H\to H}+\left\|R_+^{k-pK}\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1/2}\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right\|_H \\ &\leq \left[|b|+|(1-b)|\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)\right]\left\|u_{pK}\right\|_H \\ &\quad +\left\|B^{-1/2}\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right\|_H \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.14) eşitsizliğinden Teorem 3.1'de verilen (3.4) kestirimi bulunur.

Şimdi, (3.13) ve

$$\begin{aligned} (3R_\pm-I)(R_\pm-I) &= 2\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I\pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\mp\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1} \\ &\quad \times\left(-\frac{\alpha\tau}{2}I\pm i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I\mp\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

özdeşliği kullanılarak

$$B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}=(1-b)\frac{iB^{-1}}{2}\left(-\frac{\alpha^2}{4}-B\right)$$
$$\times\left[\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}R_-^{k-pK-2}\right.$$
$$\left.-\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}R_+^{k-pK-2}\right]u_{pK}$$
$$+\frac{i}{2}\left[B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I-iB^{1/2}\right)\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\right.$$
$$\times\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}R_-^{k-pK-2}$$
$$-B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I+iB^{1/2}\right)\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)$$
$$\left.\times\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}R_+^{k-pK-2}\right]B^{-1/2}\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\qquad(3.15)$$

elde edilir. (3.15) den üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H\le\frac{|(1-b)|}{2}\left\|B^{-1}\left(-\frac{\alpha^2}{4}-B\right)\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_-^{k-pK-2}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\left.+\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_+^{k-pK-2}\right\|_{H\to H}\right]\left\|u_{pK}\right\|_H$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left\|B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I-iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I-i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I+\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_-^{k-pK-2}\right\|_{H\to H}$$
$$+\left\|B^{-1/2}\left(-\frac{\alpha}{2}I+iB^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}$$
$$\left.\times\left\|\left(\left(1-\frac{\alpha\tau}{2}\right)I+i\tau B^{1/2}\right)\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)I-\frac{i\tau}{2}B^{1/2}\right)^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|R_+^{k-pK-2}\right\|_{H\to H}\right]$$
$$\times\left\|B^{-1/2}\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right\|_H$$

olur ve Önerme 3.1'den yararlanılarak

$$\left\| B^{-1/2}\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H \le |(1-b)|2\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}\left\|u_{pK}\right\|_H$$

$$+2\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)\left\|B^{-1/2}\frac{3u_{pK}-4u_{pK-1}+u_{pK-2}}{2\tau}\right\|_H \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.16) eşitsizliğinden Teorem 3.1'de verilen (3.5) kestirimi elde edilir.

Böylece, Teorem 3.1'in kanıtı tamamlanır. ■

Teorem 3.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 3.2. *(3.1) ikinci dereceden fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*
$a=|b|+|1-b|\frac{d}{2},\ c=2|1-b|\frac{\delta}{\delta-\frac{\alpha^2}{4}},\ d=2\left(1+\frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)$ *olmak üzere*

$$\max_{1\le k\le K}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H \le a\left\|B^{1/2}\varphi\right\|_H+\|\psi\|_H, \tag{3.17}$$

$$\max_{2\le k\le K}\left\|\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H \le c\left\|B^{1/2}\varphi\right\|_H+d\|\psi\|_H, \tag{3.18}$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H \le a\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H$$

$$+\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H, p=1,2,..., \tag{3.19}$$

$$\max_{pK+2\le k\le (p+1)K}\left\|\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H \le c\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|B^{1/2}u_k\right\|_H$$

$$+d\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k-4u_{k-1}+u_{k-2}}{2\tau}\right\|_H, p=1,2,.... \tag{3.20}$$

Kanıt. (3.8), (3.10), (3.13) ve (3.15) e $B^{1/2}$ operatörünü uygulayıp üçgen eşitsizliği ve Önerme 3.1'in kullanılmasıyla, sırasıyla, (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) kestirimleri elde edilir. ■

3.2 (3.1) Fark Şemasının Uygulamaları

3.1 Alt Bölümünde verilen temel teoremin uygulaması olarak, bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu başlangıç değer problemi (2.3) çalışılmıştır. (2.3) problemi iki adımda kesikli hale getirilir. Birinci adım 2.3 Alt Bölümünde verilen ile aynıdır. İkinci adımda, (2.26) başlangıç değer problemi ile (3.1) ikinci dereceden fark şeması değiştirilerek

$$
\begin{cases}
\frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{2\tau}+\frac{1}{2}A_h^x u_k^h(x) \\
+\frac{1}{4}A_h^x\left(u_{k+1}^h(x)+u_{k-1}^h(x)\right)=bA_h^x u^h_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}(x),\ x\in(0,l)_h, \\
t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\
u_0^h(x)=\varphi^h(x),\ x\in[0,l]_h, \\
\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x\varphi^h(x)+\psi^h(x), \\
\left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h(x)-u_{pK}^h(x)}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x u_{pK}^h(x) \\
+\frac{3u_{pK}^h(x)-4u_{pK-1}^h(x)+u_{pK-2}^h(x)}{2\tau},\ x\in[0,l]_h,\ p=1,2,...
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

fark problemi elde edilir. Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3. *(3.21) problemin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$
\max_{1\le k\le K}\|u_k^h\|_{L_{2h}}\le M_1\left\{\|\varphi^h\|_{L_{2h}}+\|\psi^h\|_{L_{2h}}\right\},
$$

$$
\max_{1\le k\le K}\|u_k^h\|_{W_{2h}^1}+\max_{2\le k\le K}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\le M_2\left\{\|\varphi^h\|_{W_{2h}^1}+\|\psi^h\|_{L_{2h}}\right\},
$$

$$
\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\|u_k^h\|_{L_{2h}}\le M_3\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\|u_k^h\|_{L_{2h}}+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,...,
$$

$$\max_{pK+1\le k\le (p+1)K}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{pK+2\le k\le (p+1)K}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}$$

$$\le M_4\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$p=1,2,....$$

Burada M_1, M_2, M_3 ve M_4 değerleri $\varphi^h(x)$ ve $\psi^h(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. (3.21) fark problemi, L_{2h} Hilbert uzayında

$$\begin{cases}\frac{u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}^h-u_{k-1}^h}{2\tau}+\frac{1}{2}A_h^x u_k^h+\frac{1}{4}A_h^x\left(u_{k+1}^h+u_{k-1}^h\right)\\ =bA_h^x u^h_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK},\\ t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,...,\\ u_0^h=\varphi^h,\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_1^h-u_0^h}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x\varphi^h+\psi^h,\\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h-u_{pK}^h}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x u_{pK}^h\\ +\frac{3u_{pK}^h-4u_{pK-1}^h+u_{pK-2}^h}{2\tau},\ p=1,2,...\end{cases}$$

abstract formda yazılabilir. Burada, bilinmeyen abstract fonksiyonu $u_k^h=u_k^h(x)$, $[0,l]_h$ kümesi üzerinde tanımlıdır ve L_{2h} Hilbert uzayında değerler alır. Böylece, Teorem 3.3 ile verilen kestirimler, sırasıyla (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) kestirimlerinden elde edilir. ■

Temel teoremin bir başka uygulaması olarak, çok boyutlu durum ele alınmıştır. Çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için (2.5) başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmıştır. (2.5) problemi iki adımda kesikli hale getirilir. Birinci adım, 2.3 Alt Bölümünde uygulananla aynıdır. İkinci adımda, (2.28) başlangıç değer problemi (3.1)

ikinci dereceden fark şemasıyla değiştirilerek

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+\alpha\frac{u_{k+1}^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{2\tau}+\frac{1}{2}A_h^x u_k^h(x) \\ +\frac{1}{4}A_h^x\left(u_{k+1}^h(x)+u_{k-1}^h(x)\right)=bA_h^x u^h_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}(x),\ x\in\Omega_h, \\ t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ (p-1)K+1\le k\le pK-1,\ p=1,2,..., \\ u_0^h(x)=\varphi^h(x),\ x\in\overline{\Omega}_h, \\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x\varphi^h(x)+\psi^h(x), \\ \left(\left(1+\frac{\alpha\tau}{2}\right)I_h+\frac{\tau^2}{4}A_h^x\right)\frac{u_{pK+1}^h(x)-u_{pK}^h(x)}{\tau}=(b-1)\frac{\tau}{2}A_h^x u_{pK}^h(x) \\ +\frac{3u_{pK}^h(x)-4u_{pK-1}^h(x)+u_{pK-2}^h(x)}{2\tau},\ x\in\overline{\Omega}_h,\ p=1,2,... \end{cases} \tag{3.22}$$

fark problemi elde edilir. Şimdi, aşağıdaki kararlılık teoremi verilebilir.

Teorem 3.4. *(3.22) fark probleminin çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.*

$$\max_{1\le k\le K}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M_5\left\{\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{1\le k\le K}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{2\le k\le K}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\le M_6\left\{\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^1}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}\le M_7\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{(p-1)K+1\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},\ p=1,2,...,$$

$$\max_{pK+1\le k\le(p+1)K}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{pK+2\le k\le(p+1)K}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}$$
$$\le M_8\left\{\max_{(p-1)K\le k\le pK}\left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{(p-1)K+2\le k\le pK}\left\|\frac{3u_k^h-4u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2\tau}\right\|_{L_{2h}}\right\},$$
$$p=1,2,....$$

Burada M_5, M_6, M_7 ve M_8 değerleri $\varphi^h(x)$ ve $\psi^h(x)$ fonksiyonlarına bağlı değildir.

Kanıt. (3.22) fark problemi, bir L_{2h} Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h}{\tau^2} + \alpha \frac{u_{k+1}^h - u_{k-1}^h}{2\tau} + \frac{1}{2} A_h^x u_k^h + \frac{1}{4} A_h^x \left(u_{k+1}^h + u_{k-1}^h \right) \\ = b A_h^x u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^h, \\ t_k = k\tau,\ K\tau = 1,\ (p-1)K+1 \le k \le pK-1,\ p = 1,2,..., \\ u_0^h = \varphi^h,\ \left(\left(1 + \frac{\alpha\tau}{2}\right) I_h + \frac{\tau^2}{4} A_h^x \right) \frac{u_1^h - u_0^h}{\tau} = (b-1)\frac{\tau}{2} A_h^x \varphi^h + \psi^h, \\ \left(\left(1 + \frac{\alpha\tau}{2}\right) I_h + \frac{\tau^2}{4} A_h^x \right) \frac{u_{pK+1}^h - u_{pK}^h}{\tau} = (b-1)\frac{\tau}{2} A_h^x u_{pK}^h \\ + \frac{3u_{pK}^h - 4u_{pK-1}^h + u_{pK-2}^h}{2\tau},\ p = 1,2,... \end{cases}$$

abstract formda yeniden yazılabilir. Burada, bilinmeyen abstract fonksiyonu $u_k^h = u_k^h(x)$, $\overline{\Omega}_h$ kümesi üzerinde tanımlıdır ve L_{2h} uzayında değerler alır. Böylece, Teorem 3.4'de verilen kestirimler, sırasıyla (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) kestirimlerinden elde edilir ve L_{2h} uzayında eliptik fark probleminin çözümü için koersivite eşitsizliği üzerine teoremden elde edilir (Sobolevskii, 1975). ■

BÖLÜM 4

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde verilen nümerik yöntemlerin teorik sonuçları sayısal örneklerle desteklenmektedir. Bir boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için lokal olmayan koşullu

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)+2u_t(t,x)-u_{xx}(t,x)+u(t,x)=0.001\left(-u_{xx}([t],x)+u([t],x)\right), \\ 0<t<\infty,\ 0<x<\pi, \\ u(t,x)=e^{-t}\sin(2x),\ -1\le t\le 0,\ 0\le x\le\pi, \\ u(t,0)=u(t,\pi),\ u_x(t,0)=u_x(t,\pi),\ 0\le t<\infty \end{cases} \tag{4.1}$$

başlangıç ve sınır değer problemi ve çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemi için Dirichlet koşullu

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x,y)+2u_t(t,x,y)-u_{xx}(t,x,y)-u_{yy}(t,x,y) \\ =0.001\left(-u_{xx}([t],x,y)-u_{yy}([t],x,y)\right), 0<t<\infty, 0<x,y<\pi, \\ u(0,x,y)=\sin(x)\sin(y),\ u_t(0,x,y)=-\sin(x)\sin(y),\ 0\le x,y\le\pi, \\ u(t,0,y)=u(t,\pi,y)=0, 0\le t<\infty,\ 0\le y\le\pi, \\ u(t,x,0)=u(t,x,\pi)=0, 0\le t<\infty, 0\le x\le\pi \end{cases} \tag{4.2}$$

başlangıç değer problemi sayısal test örnekleri olarak çalışılmıştır. Bu problemlerin tam çözümleri adım-adım ve Fourier serileri yöntemleri kullanılarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned} T_1(t) &= 0.999e^{-t}\cos(2t) - 0.0005e^{-t}\sin(2t) + 0.001, \\ T_{n+1}(t) &= T_n(n)e^{-t}\cos(2t) + \frac{T_n(n) + T_n^{'}(n)}{2}e^{-t}\sin(2t) \\ &\quad +0.0005T_n(n)\left(2 - 2e^{-(t-n)}\cos(2(t-n)) - e^{-(t-n)}\sin(2(t-n))\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, (4.1) probleminin tam çözümü

$$u(t,x) = T_n(t)\sin(2x),\ n-1 \le t \le n,\ n = 1,2,... \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} T_1(t) &= 0.999e^{-t}\cos(t) - 0.001e^{-t}\sin(t) + 0.001, \\ T_{n+1}(t) &= T_n(n)e^{-t}\cos(t) + \left(T_n(n) + T_n'(n)\right)e^{-t}\sin(t) \\ &\quad +0.001T_n(n)\left(-e^{-(t-n)}\cos(t-n) - 0.001e^{-(t-n)}\sin(t-n) + 1\right) \end{aligned}$$

olmak üzere, (4.2) probleminin tam çözümü

$$u(t,x,y) = T_n(t)\sin(x)\sin(y),\ n-1 \le t \le n,\ n = 1,2,3,... \tag{4.4}$$

bulunur.

Bu bölüm, iki alt bölümden oluşmaktadır. 4.1 Alt Bölümünde, (4.1) ve (4.2) problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için (2.2) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması uygulanmıştır. 4.2 Alt Bölümünde, (4.1) ve (4.2) problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için (3.1) ikinci basmaktan doğruluklu fark şeması kullanılmıştır.

4.1 (2.2) Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Sayısal Sonuçlar

(4.1) probleminin yaklaşık çözümü için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilebilir.

$$
\begin{cases}
\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\tau^2} + 2\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\tau} - \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_{k+1}^n + u_{k+1}^{n-1}}{h^2} + u_{k+1}^n \\
= 0.001\left(-\frac{u^{n+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK} - 2u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK} + u^{n-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2} + u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK} \right), \\
t_k = k\tau,\ K\tau = 1,\ pK+1 \le k \le (p+1)K-1,\ p = 0,1,2,..., \\
x_n = nh,\ Mh = \pi,\ 1 \le n \le M-1, \\
u_0^n = \sin(2nh),\ (1+2\tau)\frac{u_1^n - u_0^n}{\tau} + \tau\left(-\frac{u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1}}{h^2} + u_1^n \right) \\
+\tau\left(\frac{u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{h^2} - u_0^n \right) = -\sin(2nh),\ 0 \le n \le M, \\
(1+2\tau)\frac{u_{pK+1}^n - u_{pK}^n}{\tau} + \tau\left(-\frac{u_{pK+1}^{n+1} - 2u_{pK+1}^n + u_{pK+1}^{n-1}}{h^2} + u_{pK+1}^n \right) \\
+\tau\left(\frac{u_{pK}^{n+1} - 2u_{pK}^n + u_{pK}^{n-1}}{h^2} - u_{pK}^n \right) = \frac{u_{pK}^n - u_{pK-1}^n}{\tau},\ 0 \le n \le M,\ \ m = 1,2,..., \\
u_k^0 = u_k^M,\ \ u_k^1 - u_k^0 = u_k^M - u_k^{M-1},\ pK \le k \le (p+1)K,\ p = 0,1,2,....
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

(4.5) sistemi

$$\begin{cases} AU_{k+1} + BU_k + CU_{k-1} = \phi_k, \\ \\ pK+1 \le k \le (p+1)K-1,\ p = 0,1,2,..., \\ \\ U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2h) \\ \sin(4h) \\ \vdots \\ \sin(2(M-2)h) \\ \sin(2(M-1)h) \\ 0 \end{bmatrix},\ U_1 = F^{-1}G \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2h) \\ \sin(4h) \\ \vdots \\ \sin(2(M-2)h) \\ \sin(2(M-1)h) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \\ U_{pK+1} = F^{-1}HU_{pK} - F^{-1}U_{pK-1},\ p = 1,2,..., \end{cases} \tag{4.6}$$

matris formunda yeniden yazılabilir. Burada, aşağıda tanımlandıkları şekilde, A, B, C, F, G ve H matrisleri $(M+1)\times(M+1)$ boyutunda matrisler, ϕ_k ve U_ν, $\nu = k, k\pm1$ vektörleri ise $(M+1)\times 1$ boyutunda sütun vektörleridir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ e & r & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & r & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & r & e \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ e & s & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & s & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & s & e \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ e & g & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & g & e & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & g & e \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi_k=\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_k^1 \\ \varphi_k^2 \\ \vdots \\ \varphi_k^{M-2} \\ \varphi_k^{M-1} \\ 0 \end{bmatrix},\ U_\nu=\begin{bmatrix} u_\nu^0 \\ u_\nu^1 \\ u_\nu^2 \\ \vdots \\ u_\nu^{M-2} \\ u_\nu^{M-1} \\ u_\nu^M \end{bmatrix},\quad \nu=k,k\mp1.$$

Burada her $k=1,2,...,\ p=0,1,2,...,1\le n\le M-1$ için

$$\varphi_k^n=0.001\left(-\frac{u^{n+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2}+u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}\right)$$

olarak tanımlıdır. Bu matrislerin elemanları $a=-\frac{1}{h^2}$, $b=\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}+\frac{2}{h^2}+1$, $c=-\frac{2}{\tau^2}-\frac{2}{\tau}$, $d=\frac{1}{\tau^2}$, $e=-\frac{\tau^2}{h^2}$, $r=1+2\tau+\tau^2+\frac{2\tau^2}{h^2}$, $s=1+\tau+\tau^2+\frac{2\tau^2}{h^2}$ ve $g=2+2\tau+\tau^2+\frac{2\tau^2}{h^2}$ biçimindedir.

Böylece, matris katsayılı ikinci dereceden fark denklemi elde edilmiş olur. K ve M için farklı değerler verilerek sayısal çözümler elde edilebilir. $t\in[0,1]$, $t\in[1,2]$ ve $t\in[2,3]$ aralıklarında, $K=M=40$, $K=M=80$ ve $K=M=160$ değerleri için hatalar

$$E_K^M=\max_{\substack{(p-1)K+1\le k\le pK,p=1,...\\ 0\le n\le M}}\left|u(t_k,x_n)-u_k^n\right| \tag{4.7}$$

formülüyle hesaplanmıştır. Burada, (t_k,x_n) noktasında u_k^n ile fark şemasının sayısal çözümü ve $u(t_k,x_n)$ ile verilen problemin tam çözümü gösterilmektedir. Sayısal sonuçlar Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. (4.5) Fark Şemasının Hataları

	N=M=40	N=M=80	N=M=160
$t \in [0,1]$	4.5895×10^{-2}	2.3073×10^{-2}	1.1568×10^{-2}
$t \in [1,2]$	4.2967×10^{-2}	2.1574×10^{-2}	1.0810×10^{-2}
$t \in [2,3]$	1.9786×10^{-2}	1.0107×10^{-2}	5.1085×10^{-3}

Çizelge 4.1'den de görüldüğü gibi, birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılırken K ve M değerleri iki katına çıkarıldığında hatalar yarıya düşmektedir.

(4.2) probleminin yaklaşık çözünü elde etmek için birinci basamaktan doğruluklu

fark şeması kullanılırsa

$$
\begin{cases}
\frac{u_{k+1}^{n,m}-2u_k^{n,m}+u_{k-1}^{n,m}}{\tau^2}+2\frac{u_{k+1}^{n,m}-u_k^{n,m}}{\tau}-\frac{u_{k+1}^{n+1,m}-2u_{k+1}^{n,m}+u_{k+1}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{k+1}^{n,m+1}-2u_{k+1}^{n,m}+u_{k+1}^{n,m-1}}{r^2} \\
=0.001\left(-\frac{u^{n+1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n-1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2}\right. \\
\left.-\frac{u^{n,m+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n,m-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{r^2}\right), \\
t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ pK+1\le k\le (p+1)K-1,\ p=0,1,2,..., \\
x_n=nh,\ Nh=\pi,\ 1\le n\le N-1,\ y_m=mr,\ Mr=\pi,\ 1\le m\le M-1, \\
u_0^{n,m}=\sin(nh)\sin(mr),\ 0\le n\le N,\ 0\le m\le M, \\
(1+2\tau)\frac{u_1^{n,m}-u_0^{n,m}}{\tau}+\tau\left(-\frac{u_1^{n+1,m}-2u_1^{n,m}+u_1^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_1^{n,m+1}-2u_1^{n,m}+u_1^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
-\tau\left(-\frac{u_0^{n+1,m}-2u_0^{n,m}+u_0^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_0^{n,m+1}-2u_0^{n,m}+u_0^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
=-\sin(nh)\sin(mr),\ 1\le n\le N-1,\ 1\le m\le M-1, \\
(1+2\tau)\frac{u_{pK+1}^{n,m}-u_{pK}^{n,m}}{\tau}+\tau\left(-\frac{u_{pK+1}^{n+1,m}-2u_{pK+1}^{n,m}+u_{pK+1}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{pK+1}^{n,m+1}-2u_{pK+1}^{n,m}+u_{pK+1}^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
-\tau\left(-\frac{u_{pK}^{n+1,m}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{pK}^{n,m+1}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
=\frac{u_{pK}^{n,m}-u_{pK-1}^{n,m}}{\tau},\ 1\le n\le N-1,\ 1\le m\le M-1,\ p=1,2,..., \\
u_k^{0,m}=u_k^{N,m}=0,\ 0\le m\le M,\ \ u_k^{n,0}=u_k^{n,M}=0,\ 0\le n\le N,\ k\ge 0
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

elde edilir. (4.8) sistemi

$$\begin{cases} BU_{k+1}^{m-1} + AU_{k+1}^{m} + BU_{k+1}^{m+1} + CU_{k}^{m} + DU_{k-1}^{m} = \phi_{k}^{m}, \\ \\ pK+1 \le k \le (p+1)K-1,\ p = 0,1,2,...,\ 1 \le m \le M-1, \\ \\ U_0^m = \begin{bmatrix} u_0^{0,m} \\ u_0^{1,m} \\ u_0^{2,m} \\ \vdots \\ u_0^{N-2,m} \\ u_0^{N-1,m} \\ u_0^{N,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(h)\sin(mr) \\ \sin(2h)\sin(mr) \\ \vdots \\ \sin((N-2)h)\sin(mr) \\ \sin((N-1)h)\sin(mr) \\ 0 \end{bmatrix},\ 0 \le m \le M, \\ \\ GU_1^{m-1} + FU_1^m + GU_1^{m+1} = GU_0^{m-1} + FU_0^m + GU_0^{m+1} - \tau U_0^m, \\ \\ GU_{pK+1}^{m-1} + FU_{pK+1}^m + GU_{pK+1}^{m+1} = GU_{pK}^{m-1} + FU_{pK}^m + GU_{pK}^{m+1} + U_{pK}^m - U_{pK-1}^m, \\ \\ 1 \le m \le M-1,\ p = 1,2,... \end{cases} \tag{4.9}$$

matris formunda yazılabilir. (4.9) sisteminde A, B, C, D, G ve F matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ g & l & g & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & l & g & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & l & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(M+1)\times(M+1)$ boyutunda olup, elemanları $a=-\frac{1}{h^2}$, $b=-\frac{1}{r^2}$, $c=\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}+\frac{2}{h^2}+\frac{2}{r^2}$, $d=-\frac{2}{\tau^2}-\frac{2}{\tau}$, $e=\frac{1}{\tau^2}$, $g=-\frac{\tau^2}{h^2}$, $s=-\frac{\tau^2}{r^2}$ ve $l=1+2\tau+\frac{2\tau^2}{h^2}+\frac{2\tau^2}{r^2}$ dir. Ayrıca, $(M+1)\times 1$ boyutunda, $v=k,k\pm1,w=m,m\pm1$ olmak üzere U_v^w ve ϕ_k^m, $(M+1)\times1$ sütun vektörleri

$$U_v^w=\begin{bmatrix} u_v^{0,w} \\ u_v^{1,w} \\ u_v^{2,w} \\ \vdots \\ u_v^{N-2,w} \\ u_v^{N-1,w} \\ u_v^{N,w} \end{bmatrix},\ \phi_k^m=\begin{bmatrix} \phi_k^{0,m} \\ \phi_k^{1,m} \\ \phi_k^{2,m} \\ \vdots \\ \phi_k^{N-2,m} \\ \phi_k^{N-1,m} \\ \phi_k^{N,m} \end{bmatrix},\ 0\le m\le M,\ k\ge 1$$

ve

$$\phi_k^{n,m}=0.001\left(-\frac{u^{n+1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n-1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2}\right.$$
$$\left.-\frac{u^{n,m+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n,m-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{r^2}\right),\ p=0,1,\ldots$$

biçiminde tanımlıdır.

Böylece, (4.9) sistemi

$$\begin{cases} QU_{k+1} + YU_k + ZU_{k-1} = \phi_k,\ k \geq 1, \\ \\ U_0 = \begin{bmatrix} U_0^0 \\ U_0^1 \\ U_0^2 \\ \vdots \\ U_0^{M-2} \\ U_0^{M-1} \\ U_0^{M,} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} VU_1 = VU_0 - \tau U_0, \\ \\ VU_{pK+1} = VU_{pK} + U_{pK} - U_{pK-1}, \\ \\ p = 1, 2, ... \end{matrix} \end{cases} \tag{4.10}$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.10) sisteminde, $(M+1)\times(M+1)$ boyutunda Q, Y, Z ve V matrislerinin elemanları $(M+1)\times(M+1)$ boyutunda matrisler olup

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ G & F & G & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & F & G & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G & F & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca burada, I ile $(M+1)\times(M+1)$ boyutunda birim matris ve 0 ile $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu sıfır matrisi temsil edilmektedir. $(M+1)\times 1$ boyutunda matris

elemanları olan $(M+1)\times 1$ boyutundaki matrisler $U_\nu, \nu = k, k\pm 1$ ve ϕ_k

$$U_\nu = \begin{bmatrix} U_\nu^0 \\ U_\nu^1 \\ U_\nu^2 \\ \vdots \\ U_\nu^{M-2} \\ U_\nu^{M-1} \\ U_\nu^M \end{bmatrix}, \ \phi_k = \begin{bmatrix} \phi_k^0 \\ \phi_k^1 \\ \phi_k^2 \\ \vdots \\ \phi_k^{M-2} \\ \phi_k^{M-1} \\ \phi_k^M \end{bmatrix}, \ k \geq 1$$

olarak tanımlıdır.

(4.10) sistemi matris katsayılı ikinci dereceden fark denklemidir. Farklı K, N ve M değerleri için (4.2) probleminin sayısal çözümleri bulunur. Çizelge 4.2'de verilen, $t \in [0,1]$, $t \in [1,2]$ ve $t \in [2,3]$ aralıklarında, $K = N = M = 20$, $K = N = M = 40$ ve $K = N = M = 80$ değerleri için hesaplanan hatalar

$$pE_K^{N,M} = \max_{\substack{(p-1)K+1\leq k\leq pK, p=1,\ldots \\ 0\leq n\leq N \\ 0\leq m\leq M}} \left| u(t_k, x_n, y_m) - u_k^{n,m} \right|, \tag{4.11}$$

formülüyle bulunabilir. Burada, (t_k, x_n, y_m) noktasında, $u_k^{n,m}$ ile (4.8) fark şemasının sayısal çözümleri ve $u(t_k, x_n, y_m)$ ile de verilen problemin tam çözümü temsil edilmektedir.

Çizelge 4.2. (4.8) Fark Şemasının Hataları

	K=N=M=20	K=N=M=40	K=N=M=80
$t \in [0,1]$	4.5592×10^{-2}	2.2999×10^{-2}	1.1551×10^{-2}
$t \in [1,2]$	4.8186×10^{-2}	2.4073×10^{-2}	1.2033×10^{-2}
$t \in [2,3]$	3.2676×10^{-2}	1.5872×10^{-2}	7.8158×10^{-3}

Çizelge 4.2'de görüldüğü gibi, birinci basamaktan doğruluklu fark şemasında K, N ve M değerleri iki katına çıkartıldığında hatalar yaklaşık olarak yarıya düşmektedir.

4.2 (3.1) İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Sayısal Sonuçlar

(4.1) probleminin yaklaşık çözümü için ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak

$$
\begin{cases}
\frac{u_{k+1}^n-2u_k^n+u_{k-1}^n}{\tau^2}+2\frac{u_{k+1}^n-u_{k-1}^n}{2\tau}-\frac{u_k^{n+1}-2u_k^n+u_k^{n-1}}{2h^2}+\frac{1}{2}u_k^n-\frac{u_{k+1}^{n+1}-2u_{k+1}^n+u_{k+1}^{n-1}}{4h^2}+\frac{1}{4}u_{k+1}^n \\
-\frac{u_{k-1}^{n+1}-2u_{k-1}^n+u_{k-1}^{n-1}}{4h^2}+\frac{1}{4}u_{k-1}^n \\
=0.001\left(-\frac{u^{n+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2}+u^n_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}\right), \\
t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ pK+1\le k\le(p+1)K-1,\ p=0,1,2,..., \\
x_n=nh,\ Mh=\pi,\ 1\le n\le M-1, \\
u_0^n=\sin(2nh),\ (1+\tau)\frac{u_1^n-u_0^n}{\tau}+\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_1^{n+1}-2u_1^n+u_1^{n-1}}{h^2}+u_1^n\right) \\
+\frac{\tau}{4}\left(\frac{u_0^{n+1}-2u_0^n+u_0^{n-1}}{h^2}-u_0^n\right)=0.999\frac{\tau}{2}\left(\frac{u_0^{n+1}-2u_0^n+u_0^{n-1}}{h^2}-u_0^n\right)-u_0^n,\ 0\le n\le M, \\
(1+\tau)\frac{u_{pK+1}^n-u_{pK}^n}{\tau}+\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_{pK+1}^{n+1}-2u_{pK+1}^n+u_{pK+1}^{n-1}}{h^2}+u_{pK+1}^n\right)+\frac{\tau}{4}\left(\frac{u_{pK}^{n+1}-2u_{pK}^n+u_{pK}^{n-1}}{h^2}-u_{pK}^n\right) \\
=0.999\frac{\tau}{2}\left(\frac{u_{pK}^{n+1}-2u_{pK}^n+u_{pK}^{n-1}}{h^2}-u_{pK}^n\right)+\frac{3u_{pK}^n-4u_{pK-1}^n+u_{pK-2}^n}{2\tau},\ 0\le n\le M,\ \ m=1,2,..., \\
u_k^0=u_k^M,\ \ u_k^1-u_k^0=u_k^M-u_k^{M-1},\ pK\le k\le(p+1)K,\ p=0,1,2,...
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

denklem sistemi elde edilir. (4.12) sistemi

$$\begin{cases} AU_{k+1} + BU_k + CU_{k-1} = \phi_k, \\ \\ pK+1 \le k \le (p+1)K-1,\ p = 0,1,2,..., \\ \\ U_0 = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_0^1 \\ u_0^2 \\ \vdots \\ u_0^{M-2} \\ u_0^{M-1} \\ u_0^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(2h) \\ \sin(4h) \\ \vdots \\ \sin(2(M-2)h) \\ \sin(2(M-1)h) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \\ U_1 = D^{-1}EU_0 - 0.999D^{-1}HU_0 - D^{-1}U_0, \\ \\ U_{pK+1} = D^{-1}EU_{pK} - 0.999D^{-1}HU_{pK} \\ \\ +D^{-1}\left(\frac{3U_{pK}-4U_{pK-1}+U_{pK-2}}{2\tau}\right),\ p = 1,2,..., \end{cases} \tag{4.13}$$

matris formunda yeniden yazılabilir. Burada A, B, C, D, E ve H matrisleri $(M+1)\times(M+1)$ boyutunda ve $v = k, k \pm 1$ olmak üzere U_v ve ϕ_k sütun vektörleri $(M+1)\times 1$ boyutunda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & d & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & e & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & e & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & e & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ g & l & g & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & l & g & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & l & g \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ g & l & g & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & l & g & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & l & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r & s & r & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & s & r & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r & s & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi_k=\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_k^1 \\ \varphi_k^2 \\ \vdots \\ \varphi_k^{M-2} \\ \varphi_k^{M-1} \\ 0 \end{bmatrix}, U_\nu=\begin{bmatrix} u_\nu^0 \\ u_\nu^1 \\ u_\nu^2 \\ \vdots \\ u_\nu^{M-2} \\ u_\nu^{M-1} \\ u_\nu^M \end{bmatrix}, \quad \nu=k, k\mp 1,$$

biçiminde tanımlıdır. Burada, $k=1,2,...,\ p=0,1,2,...,1\le n\le M-1$ için

$$\varphi_k^n=0.001\left(-\frac{u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n+1}-2u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n}+u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n-1}}{h^2}+u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n}\right)$$

olur. Ayrıca bu matrislerin elemanları, $a=-\frac{1}{4h^2}$, $b=\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{2h^2}$, $d=-\frac{2}{\tau^2}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{4}$, $g=-\frac{\tau}{4h^2}$, $l=\frac{1}{\tau}+1+\frac{\tau}{2h^2}+\frac{\tau}{4}$, $r=-\frac{\tau}{2h^2}$ ve $s=\frac{\tau}{h^2}+\frac{\tau}{2}$ biçimindedir.

Böylece, (4.13) matris katsayılı ikinci dereceden fark denklem sistemi farklı K ve M değerleri için çözülebilir. (4.1) probleminin sayısal çözümü için hatalar (4.7) formülüyle

hesaplanabilir. Çizelge 4.3'de, $t \in [0,1]$, $t \in [1,2]$ ve $t \in [2,3]$ aralıklarında $K = M = 40$, $K = M = 80$ ve $K = M = 160$ değerleri için hatalar verilmektedir.

Çizelge 4.3. (4.12) Fark Şemasının Hataları

	K=M=40	K=M=80	K=M=160
$t \in [0,1]$	7.7645×10^{-4}	1.9419×10^{-4}	4.8552×10^{-5}
$t \in [1,2]$	6.3438×10^{-4}	1.5850×10^{-4}	3.9619×10^{-5}
$t \in [2,3]$	5.2158×10^{-4}	1.3005×10^{-4}	9.0022×10^{-5}

Çizelge 4.3'de görüldüğü gibi ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanıldığında K ve M değerleri iki katına çıkarılırsa hata neredeyse dörtte birine düşmektedir.

(4.2) probleminin yaklaşık çözümü için (3.1) ikinci basamaktan doğruluklu fark

şeması kullanılarak

$$
\begin{cases}
\frac{u_{k+1}^{n,m}-2u_k^{n,m}+u_{k-1}^{n,m}}{\tau^2}+2\frac{u_{k+1}^{n,m}-u_{k-1}^{n,m}}{2\tau}-\frac{u_k^{n+1,m}-2u_k^{n,m}+u_k^{n-1,m}}{2h^2}-\frac{u_k^{n,m+1}-2u_k^{n,m}+u_k^{n,m-1}}{2r^2} \\
-\frac{u_{k+1}^{n+1,m}-2u_{k+1}^{n,m}+u_{k+1}^{n-1,m}}{4h^2}-\frac{u_{k+1}^{n,m+1}-2u_{k+1}^{n,m}+u_{k+1}^{n,m-1}}{4r^2}-\frac{u_{k-1}^{n+1,m}-2u_{k-1}^{n,m}+u_{k-1}^{n-1,m}}{4h^2}-\frac{u_{k-1}^{n,m+1}-2u_{k-1}^{n,m}+u_{k-1}^{n,m-1}}{4r^2} \\
=0.001\left(-\frac{u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n+1,m}-2u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n,m}+u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n-1,m}}{h^2}\right. \\
\left.-\frac{u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n,m+1}-2u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n,m}+u_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}^{n,m-1}}{r^2}\right), \\
t_k=k\tau,\ K\tau=1,\ pK+1\le k\le(p+1)K-1,\ p=0,1,2,..., \\
x_n=nh,\ Nh=\pi,\ 1\le n\le N-1,\ y_m=mr,\ Mr=\pi,\ 1\le m\le M-1, \\
u_0^{n,m}=\sin(nh)\sin(mr),\ 0\le n\le N,\ 0\le m\le M, \\
(1+\tau)\frac{u_1^{n,m}-u_0^{n,m}}{\tau}+\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_1^{n+1,m}-2u_1^{n,m}+u_1^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_1^{n,m+1}-2u_1^{n,m}+u_1^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
-\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_0^{n+1,m}-2u_0^{n,m}+u_0^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_0^{n,m+1}-2u_0^{n,m}+u_0^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
=-0.999\frac{\tau}{2}\left(-\frac{u_0^{n+1,m}-2u_0^{n,m}+u_0^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_0^{n,m+1}-2u_0^{n,m}+u_0^{n,m-1}}{r^2}\right)-u_0^{n,m}, \\
(1+\tau)\frac{u_{pK+1}^{n,m}-u_{pK}^{n,m}}{\tau}+\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_{pK+1}^{n+1,m}-2u_{pK+1}^{n,m}+u_{pK+1}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{pK+1}^{n,m+1}-2u_{pK+1}^{n,m}+u_{pK+1}^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
-\frac{\tau}{4}\left(-\frac{u_{pK}^{n+1,m}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{pK}^{n,m+1}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n,m-1}}{r^2}\right) \\
=-0.999\frac{\tau}{2}\left(-\frac{u_{pK}^{n+1,m}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n-1,m}}{h^2}-\frac{u_{pK}^{n,m+1}-2u_{pK}^{n,m}+u_{pK}^{n,m-1}}{r^2}\right)+\frac{3u_{pK}^{n,m}-4u_{pK-1}^{n,m}+u_{pK-2}^{n,m}}{2\tau}, \\
1\le n\le N-1,\ 1\le m\le M-1,\ p=1,2,..., \\
u_k^{0,m}=u_k^{N,m}=0,\ 0\le m\le M,\ u_k^{n,0}=u_k^{n,M}=0,\ 0\le n\le N,\ k\ge 0
\end{cases}
\tag{4.14}
$$

elde edilebilir. (4.14) sistemi

$$
\begin{cases}
BU_{k+1}^{m-1}+AU_{k+1}^{m}+BU_{k+1}^{m+1}+CU_{k}^{m-1}+DU_{k}^{m}+CU_{k}^{m+1} \\
+BU_{k-1}^{m-1}+EU_{k-1}^{m}+BU_{k-1}^{m+1}=\phi_{k}^{m}, \\
pK+1\leq k\leq (p+1)K-1,\ p=0,1,2,...,\ 1\leq m\leq M-1, \\
U_0^m=\begin{bmatrix} u_0^{0,m} \\ u_0^{1,m} \\ u_0^{2,m} \\ \vdots \\ u_0^{N-2,m} \\ u_0^{N-1,m} \\ u_0^{N,m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \sin(h)\sin(mr) \\ \sin(2h)\sin(mr) \\ \vdots \\ \sin((N-2)h)\sin(mr) \\ \sin((N-1)h)\sin(mr) \\ 0 \end{bmatrix},\ 0\leq m\leq M, \\
GU_1^{m-1}+FU_1^m+GU_1^{m+1}=GU_0^{m-1}+FU_0^m+GU_0^{m+1} \\
-0.999\left(LU_0^{m-1}+SU_0^m+LU_0^{m+1}\right)-\tau U_0^m, \\
GU_{pK+1}^{m-1}+FU_{pK+1}^m+GU_{pK+1}^{m+1}=GU_{pK}^{m-1}+FU_{pK}^m+GU_{pK}^{m+1} \\
-0.999\left(LU_{pK}^{m-1}+SU_{pK}^m+LU_{pK}^{m+1}\right)+\frac{3U_{pK}^m-4U_{pK-1}^m+U_{pK-2}^m}{2}, \\
1\leq m\leq M-1,\ p=1,2,...
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

matris formunda yeniden yazılabilir. (4.15) sisteminde verilen $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu A, B, C, D, E, G, F, L ve S matrisleri

$$
A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & d & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ g & l & g & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & l & g & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & l & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & f & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & f & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & f & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \nu & q & \nu & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & q & \nu & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu & q & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \mu & \xi & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \mu & \xi & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi & \mu & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada, matris elemanları $a=-\frac{1}{4r^2}, c=-\frac{1}{4h^2}, d=\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2r^2}$,

$e=-\frac{1}{2r^2}$, $g=-\frac{1}{2h^2}$, $f=\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2r^2}$, $s=-\frac{\tau^2}{4r^2}$, $v=-\frac{\tau^2}{4h^2}$, $q=1+\tau+\frac{\tau^2}{2h^2}+\frac{\tau^2}{2r^2}$, $\rho=-\frac{\tau^2}{2r^2}$, $\xi=-\frac{\tau^2}{2h^2}$ ve $\mu=\frac{\tau^2}{h^2}+\frac{\tau^2}{r^2}$ biçimindedir. Ayrıca, $(M+1)\times 1$ boyutlu sütun vektörleri ϕ_k^m ve $\sigma=k,k\pm1$, $w=m,m\pm1$ olmak üzere U_σ^w

$$U_\sigma^w=\begin{bmatrix} u_\sigma^{0,w}\\ u_\sigma^{1,w}\\ u_\sigma^{2,w}\\ \vdots\\ u_\sigma^{N-2,w}\\ u_\sigma^{N-1,w}\\ u_\sigma^{N,w}\end{bmatrix},\ \phi_k^m=\begin{bmatrix} \phi_k^{0,m}\\ \phi_k^{1,m}\\ \phi_k^{2,m}\\ \vdots\\ \phi_k^{N-2,m}\\ \phi_k^{N-1,m}\\ \phi_k^{N,m}\end{bmatrix},\ 0\le m\le M,\ k\ge 1$$

ve

$$\phi_k^{n,m}=0.001\left(-\frac{u^{n+1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n-1,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{h^2}\right.$$
$$\left.-\frac{u^{n,m+1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}-2u^{n,m}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}+u^{n,m-1}_{\left[\frac{k-pK}{K+1}\right]K+pK}}{r^2}\right),\ p=0,1,\dots$$

olarak tanımlıdır.

Böylece, (4.15) sistemi

$$\begin{cases} QU_{k+1}+YU_k+ZU_{k-1}=\phi_k,\ k\ge 1,\\ \\ U_0=\begin{bmatrix} U_0^0\\ U_0^1\\ U_0^2\\ \vdots\\ U_0^{M-2}\\ U_0^{M-1}\\ U_0^{M,}\end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} VU_1=VU_0-0.999RU_0-\tau U_0,\\ VU_{pK+1}=VU_{pK}-0.999RU_{pK}\\ +\frac{3U_{pK}-4U_{pK-1}+U_{pK-2}}{2},\ p=1,2,\dots \end{array}\end{cases} \tag{4.16}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. (4.16) sisteminde verilen, $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu matris

elemanlarına sahip $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu Q, Y, Z, V ve R matrisleri

$$Q=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C & D & C & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & D & C & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C & D & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ B & E & B & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & E & B & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B & E & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ G & F & G & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & F & G & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G & F & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L & S & L & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & S & L & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L & S & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olup, burada, I ve 0 ile $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu birim ve sıfır matrislerini temsil edilmektedir. Ayrıca, elemanları $(M+1)\times 1$ boyutlu matrisler olan $(M+1)\times 1$

boyutlu $U_\sigma, \sigma = k, k \pm 1$ ve ϕ_k matrisleri

$$U_\sigma = \begin{bmatrix} U_\sigma^0 \\ U_\sigma^1 \\ U_\sigma^2 \\ \vdots \\ U_\sigma^{M-2} \\ U_\sigma^{M-1} \\ U_\sigma^M \end{bmatrix}, \ \phi_k = \begin{bmatrix} \phi_k^0 \\ \phi_k^1 \\ \phi_k^2 \\ \vdots \\ \phi_k^{M-2} \\ \phi_k^{M-1} \\ \phi_k^M \end{bmatrix}, \ k \geq 1$$

biçimindedir. (4.16) sistemi matris katsayılı ikinci dereceden fark denklemidir. Farklı K, N ve M değerleri için (4.2) probleminin sayısal çözümleri bulunabilir. Çizelge 4.4 ile verilen, $t \in [0,1]$, $t \in [1,2]$ ve $t \in [2,3]$ aralıklarında $K = N = M = 20, 40, 80$ değerleri için elde edilen hatalar (4.11) formülü ile hesaplanmıştır.

Çizelge 4.4. (4.14) Fark Şemasının Hataları

	K=N=M=20	K=N=M=40	K=N=M=80
$t \in [0,1]$	5.8905×10^{-4}	1.4731×10^{-4}	3.6831×10^{-5}
$t \in [1,2]$	6.2517×10^{-4}	1.5693×10^{-4}	3.9309×10^{-5}
$t \in [2,3]$	3.9272×10^{-4}	9.9032×10^{-5}	2.4871×10^{-5}

Çizelge 4.4'de görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanıldığında K, N ve M değerleri iki katına çıkarken hatalar yaklaşık olarak dörtte birine düşmektedir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu tez, gecikmeli telegraf denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin kararlılığı üzerine çalışmaya adanmıştır. Aşağıda verilen orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Bir Hilbert uzayında, gecikmeli telegraf denklemleri için başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri üzerine temel teorem sunulmuştur ve lokal ve lokal olmayan koşullu iki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Bir Hilbert uzayında, gecikmeli telegraf denklemleri için başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kurulmuştur.

Bu problemin çözümü için bu fark şemalarının kararlılığı üzerine temel teoremler kurulmuştur.

Gecikmeli telegraf denklemleri için iki başlangıç ve sınır değer problemi için fark şemalarının çözümlerinin kararlılık kestirimleri kanıtlanmıştır.

Gecikmeli telgraf denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının Matlab uygulamaları sunulmuştur.

Bu fark şemalarının çözümü için teorik sonuçlar sayısal örneklerle desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2014a). Stability of parabolic equations with unbounded operators acting on delay terms. *Electronic Journal of Differential Equations*, *2014*(160), 1–13.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2014b). Well-posedness of delay parabolic difference equations. *Advances in Difference Equations*, *2014*, 1–20.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2015). Difference Schemes for Delay Parabolic Equations with Periodic Boundary Conditions. *Finite Difference Methods, Theory and Applications: 6th International Conference, FDM 2014, Lozenetz, Bulgaria, Revised Selected Papers 6*, 145–152.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2019). Bounded Solutions of Semilinear Time Delay Hyperbolic Differential and Difference Equations. *Mathematics*, *7*(12). https://doi.org/10.3390/math7121163

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2020). On the stable difference schemes for the Schrödinger equation with time delay. *Computational Methods in Applied Mathematics*, *20*(1), 27–38.

Ashyralyev, A., Agirseven, D., & Turk, K. (2020). On the stability of the telegraph equation with time delay. *Filomat*, *34*(4), 1251–1259.

Ashyralyev, A., Agirseven, D., & Turk, K. (2021). On the stability of second order of accuracy difference scheme for the numerical solution of the time delay telegraph equation. *AIP Conference Proceedings*, *2325*(1), 020032.

Ashyralyev, A., & Çekiç, F. (2016). On Source Identification Problem for Telegraph Differential Equations. *Differential and Difference Equations with Applications*, 39–50.

Ashyralyev, A., & Modanli, M. (2015). An operator method for telegraph partial differential and difference equations. *Boundary Value Problems*, *2015*(41), 1687–2770. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0302-z

Ashyralyev, A., & Sobolevskii, P. E. (2004). *New difference schemes for partial differential equations, operator theory advances and applications* (C. 148). Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

Ashyralyev, A., Turk, K., & Agirseven, D. (2020). On the stable difference scheme for the time delay telegraph equation. *Bullettin of the Karaganda-Mathematics*, *99*(3), 105–119.

Ashyralyev, A., Turk, K., & Agirseven, D. (2021). On the Stability of the Time Delay Telegraph Equation with Neumann Condition. *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications—II*, 201–211.

Balachandran, B., Kalmár-Nagy, T., & Gilsinn, D. E. (2009). *Delay differential equations*. Springer.

Biazar, J., & Eslami, M. (2010). Analytic solution for Telegraph equation by differential transform method. *Physics Letters A*, *374*(29), 2904–2906. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.05.012

Feireisl, E. (1991). Global in time solutions to quasilinear telegraph equations involving operators with time delay. *Applications of Mathematics*, *36*(6), 456–468.

Heaviside, O. (1876). XIX. On the extra current. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *2*(9), 135–145. https://doi.org/10.1080/14786447608639176

Li, Y., & Zhang, H. (2015). Positive doubly periodic solutions of telegraph equations with delays. *Boundary Value Problems*, *2015*(1), 1–12.

Litvinenko, Y. E., & Schlickeiser, R. (2013). The telegraph equation for cosmic-ray transport with weak adiabatic focusing. *Astronomy & Astrophysics*, *554*, A59.

Lock, C. G. J., Greeff, J., & Joubert, S. (2007). *Modelling of telegraph equations in transmission lines* (dok. tezi). Tshwane University of Technology.

Macıas-Dıaz, J. E., Ahmed, N., Jawaz, M., Rafiq, M., & Aziz ur Rehman, M. (2021). Design and analysis of a discrete method for a time-delayed reaction–diffusion epidemic model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *44*(6), 5110–5122.

Malkov, M., & Sagdeev, R. (2015). Cosmic ray transport with magnetic focusing and the "telegraph" model. *The Astrophysical Journal*, *808*(2), 157.

Sato, T., & Terao, K. (1986). An interpretation of the telegraph equation for animal movement near boundary wall. *Japanese journal of applied physics*, *25*(4A), L299.

Sobolevskii, P. (1975). *Difference methods for the approximate solution of differential equations*. Voronezh State University Press, Voronezh, Russia.

Srivastava, V. K., Awasthi, M. K., Chaurasia, R., & Tamsir, M. (2013). The telegraph equation and its solution by reduced differential transform method. *Modelling and Simulation in Engineering*, *2013*, 9–9.

Tilles, P., & Petrovskii, S. (2018). On the consistency of the reaction–telegraph process in finite domains. *J. Math. Biol.*

Türk, K. (2019). *Zaman gecikmeli telgraf denkleminin sınırlı çözümleri* (yük. lis. tezi).

Weiss, G. H. (2002). Some applications of persistent random walks and the telegrapher's equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *311*(3-4), 381–410.

Yosida, K. (1984). Telegraph Equation. *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions*, 124–144. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1118-1_10

EKLER

EK A

BİRİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN PROGRAMLAMA

(4.1) probleminin, (4.5) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri ve hata analizini yapan Matlab programı aşağıda verilmiştir.

```
function nonlocalfirstorder(M,N)

tau=1/M; h=pi/N;
a=(-1/h^2);
b=(1/tau^2+2/tau+2/h^2+1);
c=(-2/(tau^2)-2/tau);
d=(1/(tau^2));
e=(-tau^2/h^2);
t=(1+2*tau+tau^2+2*tau^2/h^2);
g=(2+2*tau+tau^2+2*tau^2/h^2);
s=(1+tau+tau^2+2*tau^2/h^2);

A=zeros(M+1,M+1);
A(1,1)=1; A(1,M+1)=-1;
A(M+1,1)=1; A(M+1,2)=-1;
A(M+1,M)=-1; A(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    A(i,i-1)=a; A(i,i)=b; A(i,i+1)=a;
end;
A;
B=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
```

```
    B(i,i)=c;
end;
B;
C=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    C(i,i)=d;
end;
C;
G=inv(A);

E=zeros(M+1,M+1);
E(1,1)=1; E(1,M+1)=-1;
E(M+1,1)=1; E(M+1,2)=-1;
E(M+1,M)=-1; E(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    E(i,i-1)=e; E(i,i)=t; E(i,i+1)=e;
end;
E;
L=inv(E);
H=zeros(M+1,M+1);
H(1,1)=1; H(1,M+1)=-1;
H(M+1,1)=1; H(M+1,2)=-1;
H(M+1,M)=-1; H(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    H(i,i-1)=e; H(i,i)=g; H(i,i+1)=e;
end;
H;
%fii(j) finding';
fii=zeros(N+1,M+1);
for k=1:M+1;
    for n=2:N;
    fii(n,k)=-0.001*((sin(2*(n)*h))-2*sin(2*((n-1))*h)...
    +sin(2*((n-2)*h)))*(1/(h^2))...
    +0.001*sin(2*(n-1)*h);
    end
end
fii;
F=zeros(M+1,M+1);
F(1,1)=1; F(1,M+1)=-1;
F(M+1,1)=1; F(M+1,2)=-1;
F(M+1,M)=-1; F(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    F(i,i-1)=e; F(i,i)=s; F(i,i+1)=e;
end;
F;
for n=1:N+1;
```

```
    U(n,1)=sin(2*(n-1)*h);
end
U(:,1);
R=U(:,1)-tau*L*U(:,1);
R;
for n=1:N+1;
    U(n,2)=R(n,1);
end
for k=2:M;
    U(:,k+1)=-(G*B)*U(:,k)-(G*C)*U(:,k-1)+G*fii(:,k-1);
end
U;
for k=1:M+1;
    for n=1:N+1;
    es1(n,k)=((999*cos(2*(k-1)*tau)*exp(-(k-1)*tau))/1000...
    -(sin(2*(k-1)*tau)*exp(-(k-1)*tau))/2000...
    + 1/1000)*sin(2*(n-1)*h);
    end
end
es1;
for n=1:N+1;
    for k=1:M+1;
        f(n,k)=abs(es1(n,k)-U(n,k));
    end
end
f;
absdiff1=max(max(f))
 figure; surf(U); title('approximation solution 0<t<1');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
 figure; surf(es1); title('exact solution 0<t<1');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;

fii1=zeros(N+1,M+1);
for k=1:M+1;
    for n=2:N;
    fii1(n,k)=-0.001*(U(n+1,M+1)-2*U(n,M+1)...
    +U(n-1,M+1))/(h^2)+0.001*U(n,M+1);
    end;
end;
fii1;
U(:,M+1);
U(:,M);
K=L*H*U(:,M+1)-L*U(:,M);
for n=1:N+1;
    U2(n,1)=U(n,M+1);
    U2(n,2)=K(n,1);
```

```
end;

for k=2:M;
    U2(:,k+1)=-(G*B)*U2(:,k)-(G*C)*U2(:,k-1)+G*fii1(:,k-1);
end;
U2;
for k=1:M+1;
    for n=1:N+1;
    es2(n,k)=(-(17519094633556468 31*exp(1-(k+M-1)*tau)...
    *cos(2*(k+M-1)*tau-2))/(11529215046068469760)...
    -(7690556404663159151*exp(1-(k+M-1)*tau)...
    *sin(2*(k+M-1)*tau-2))/(230584300921369395 20)...
    -1753663126482129/(11529215046068469760))...
    *sin(2*(n-1)*h);
    end
end;
es2;
for n=1:N+1;
    for k=1:M+1;
        f1(n,k)=((abs(es2(n,k)-U2(n,k))));
    end
end
f1;
absdiff2=max(max(f1))
figure; surf(U2); title('approximation solution 1<t<2');
xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
figure; surf(es2); title('exact solution 1<t<2');
xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;

fii2=zeros(N+1,M+1);
for k=1:M+1;
    for n=2:N;
    fii2(n,k)=-0.001*((U2(n+1,M+1)-2*U2(n,M+1)...
    +U2(n-1,M+1))/(h^2))+0.001*U2(n,M+1);
    end;
end;
fii2;
P=L*H*U2(:,M+1)-L*U2(:,M);
for n=1:N+1;
    U3(n,1)=U2(n,M+1);
    U3(n,2)=P(n,1);
end;
for k=2:M;
    U3(:,k+1)=-(G*B)*U3(:,k)-(G*C)*U3(:,k-1)+G*fii2(:,k-1);
end;
U3;
```

```
for k=1:M+1;
    for n=1:N+1;
    es3(n,k)=((1368679268246599*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *cos(2*(k+2*M-1)*tau-6))/(2882303761517117440 0)...
    -(3263487573189458169187*exp(2-(k+2*M-1)*tau)...
    *cos(2*(k+2*M-1)*tau-4))/(3689348814741910323 2000)...
    -(127008340164094851*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *cos(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(1441151880758558720 00)...
    +(9931638188001557*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *sin(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(3602879701896396800 0)...
    +(75125715107095733828 13*exp(2-(k+2*M-1)*tau)...
    *sin(2*(k+2*M-1)*tau-4))/(7378697629483820646 4000)...
    -(3755154494464433*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *sin(2*(k+2*M-1)*tau-6))/(3602879701896396800 0)...
    +(3755154494464433*(k+2*M-1)*tau*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *cos(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(9007199254740992000)...
    -(1368679268246599*(k+2*M-1)*tau*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
    *sin(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(7205759403792793600)...
    -561172200474281 3/(3689348814741910323 2000))...
    *sin(2*(n-1)*h);
    end
end;
es3;
for n=1:N+1;
    for k=1:M+1;
        f2(n,k)=((abs(es3(n,k)-U3(n,k))));
    end
end
f2;
absdiff3=max(max(f2))
figure; surf(U3); title('approximation solution 2<t<3');
xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
figure; surf(es3); title('exact solution 2<t<3');
xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
```

(4.2) probleminin, (4.8) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri ve hata analizini yapan Matlab programı aşağıda verilmiştir.

```
function twodimfirstorder(N,K,M)

tau=1/K;
h=pi/N;
r=pi/M;
a=-1/h^2;
b=-1/r^2;
c=1/tau^2+2/tau+2/h^2+2/r^2;
d=-2/tau^2-2/tau;
```

```
e=1/tau^2;
g=-tau^2/h^2;
s=-tau^2/r^2;
l=1+2*tau+(2*tau^2)/h^2+(2*tau^2)/r^2;

for n=1:N+1;
    for m=1:M+1;
        U(n,1,m)=sin((n-1)*h)*sin((m-1)*r);
    end
end
U(:,1,:);
G=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    G(i,i)=s;
end
G;
H=zeros(M+1,M+1);
H(1,1)=1;
H(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    H(i,i-1)=g;
    H(i,i)=l;
    H(i,i+1)=g;
end
H;
P=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
for i=1:M+1;
    P((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),1)=U(:,1,i);
end
P;
V=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
V(1:M+1,1:M+1)=eye(M+1);
V(M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1),M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1))=eye(M+1);
for i=2:M;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=G;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=H;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=G;
end
V;
P(:,2)=inv(V)*(V*P(:,1)-tau*P(:,1));
A=zeros(M+1,M+1);
A(1,1)=1;
A(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    A(i,i-1)=a;
    A(i,i)=c;
```

```
    A(i,i+1)=a;
end
A;
B=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    B(i,i)=b;
end
B;
C=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    C(i,i)=d;
end
C;
D=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    D(i,i)=e;
end
D;
Q=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
Q(1:M+1,1:M+1)=eye(M+1);
Q(M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1),M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1))=eye(M+1);
for i=2:M;
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=B;
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=A;
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=B;
end
Q;
Y=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
for i=2:M;
    Y((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=C;
end
Y;
Z=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
for i=2:M;
    Z((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=D;
end
Z;
fiinm=zeros(M+1,1,M+1);
for n=1:N;
    for m=1:M;
    fiinm(n,1,m)=0.001*(-((sin((n-2)*h)-2*sin((n-1)*h)...
    +sin((n)*h))/h^2)*sin((m-1)*r)-((sin((m-2)*r)...
    -2*sin((m-1)*r)+sin((m)*r))/r^2)*sin((n-1)*h));
    end
end
fiinm;
```

```
fii=fiinm(:);
for k=2:M;
    P(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P(:,k)-Z*P(:,k-1)+fii);
end
P;
for k=1:M+1;
    U(:,1:M+1,k)=P((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U;
es=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
    for k=1:K+1;
    for m=1:M+1;
    es(n,k,m)=((999/1000)*exp(-(k-1)*tau)*cos((k-1)*tau)...
    -(1/1000)*exp(-(k-1)*tau)*sin((k-1)*tau)...
    +1/1000)*sin((n-1)*h)*sin((m-1)*r);
    end
    end
end
es;
f=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
    for k=1:M+1;
        for m=1:M+1;
            f(n,k,m)=abs(es(n,k,m)-U(n,k,m));
        end
    end
end
f;
absdiff=max(max(max(f)))

fiinm1=zeros(M+1,1,M+1);
for n=2:N;
    for m=2:M;
    fiinm1(n,1,m)=0.001*(-((U(n-1,K+1,m)-2*U(n,K+1,m)...
    +U(n+1,K+1,m))/(h^2))-((U(n,K+1,m-1)-2*U(n,K+1,m)...
    +U(n,K+1,m+1))/(r^2)));
    end
end
fiinm1;
fii1=fiinm1(:);
P1=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
P1(:,1)=P(:,M+1);
P1(:,2)=inv(V)*(V*P1(:,1)+P1(:,1)-P(:,M));
for k=2:M;
    P1(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P1(:,k)-Z*P1(:,k-1)+fii1);
```

```
end
P1;
for k=1:M+1;
    U1(:,1:M+1,k)=P1((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U1;
es1=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
    for k=1:K+1;
    for m=1:M+1;
    x=(n-1)*h;
    y=(m-1)*r;
    t=(k+K-1)*tau;
    es1(n,k,m)=((exp(1-t)*(7343963390876322991*cos(t-1)...
    +7351314705581905*exp(t-1)...
    -11387113861415637841*sin(t-1)))/36893488147419103232)...
    *sin(x)*sin(y);
    end
    end
end
es1;
f1=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
    for k=1:M+1;
        for m=1:M+1;
            f1(n,k,m)=abs(es1(n,k,m)-U1(n,k,m));
        end
    end
end
f1;
absdiff1=max(max(max(f1)))

fiinm2=zeros(M+1,1,M+1);
for n=2:N;
    for m=2:M;
    fiinm2(n,1,m)=0.001*(-((U1(n-1,K+1,m)-2*U1(n,K+1,m)...
    +U1(n+1,K+1,m))/(h^2))-((U1(n,K+1,m-1)-2*U1(n,K+1,m)...
    +U1(n,K+1,m+1))/(r^2)));
    end
end
fiinm2;
fii2=fiinm2(:);
P2=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
P2(:,1)=P1(:,M+1);
P2(:,2)=inv(V)*(V*P2(:,1)+P2(:,1)-P1(:,M));
for k=2:M;
```

```
    P2(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P2(:,k)-Z*P2(:,k-1)+fii2);
end
P2;
for k=1:M+1;
    U2(:,1:M+1,k)=P2((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U2;
es2=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
    for k=1:K+1;
    for m=1:M+1;
    x=(n-1)*h;
    y=(m-1)*r;
    t=(k+2*K-1)*tau;
    es2(n,k,m)=(-(822341314941032411 1*cos(t-2)...
    *exp(2-t))/(147573952589676412928)...
    -(181094379939274359 19*sin(t-2)...
    *exp(2-t))/(147573952589676412928)...
    -8231644794204529/147573952589676412928)*sin(x)*sin(y);
    end
    end
end
es2;
f2=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
    for k=1:M+1;
        for m=1:M+1;
            f2(n,k,m)=abs(es2(n,k,m)-U2(n,k,m));
        end
    end
end
f2;
absdiff2=max(max(max(f2)))
```

EK B

İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI İÇİN PROGRAMLAMA

(4.1) probleminin, (4.12) ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri ve hata analizini yapan Matlab programı aşağıda verilmiştir.

```
function nonlocalsecondorder(K,M)

tau=1/K; h=pi/M;
a=-1/(4*h^2);
b=((1/(tau^2))+(1/tau)+(1/(2*h^2))+(1/4));
c=-(1/(2*h^2));
d=(-(2/(tau^2))+(1/(h^2))+(1/2));
e=((1/(tau^2))-(1/tau)+(1/(2*h^2))+(1/4));
g=-tau/(4*h^2);
l=(1/tau)+1+(tau/(2*h^2))+(tau/4);
r=(-tau/(2*h^2));
s=(tau/(h^2))+(tau/2);

A=zeros(M+1,M+1);
A(1,1)=1; A(1,M+1)=-1;
A(M+1,1)=1; A(M+1,2)=-1;
A(M+1,M)=-1; A(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    A(i,i-1)=a; A(i,i)=b; A(i,i+1)=a;
end;
A;
B=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    B(i,i-1)=c; B(i,i)=d; B(i,i+1)=c;
end;
B;
C=zeros(M+1,M+1);
```

```
for i=2:M;
    C(i,i-1)=a; C(i,i)=e; C(i,i+1)=a;
end;
C;
G=inv(A);
D=zeros(M+1,M+1);
D(1,1)=1; D(1,M+1)=-1;
D(M+1,1)=1; D(M+1,2)=-1;
D(M+1,M)=-1; D(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    D(i,i-1)=g; D(i,i)=1; D(i,i+1)=g;
end;
D;
E=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    E(i,i-1)=g; E(i,i)=1; E(i,i+1)=g;
end;
E;
H=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    H(i,i-1)=r; H(i,i)=s; H(i,i+1)=r;
end;
H;
F=inv(D);

fii=zeros(M+1,M+1);
for k=1:K+1;
    for n=2:M;
    fii(n,k)=-0.001*((sin(2*(n)*h))-2*sin(2*((n-1))*h)...
    +sin(2*((n-2)*h)))*(1/(h^2))+0.001*sin(2*(n-1)*h);
    end
end
fii;

for n=1:M+1;
    U(n,1)=sin(2*(n-1)*h);
end
U(:,1);

U(:,2)=F*E*U(:,1)-0.999*F*H*U(:,1)-F*U(:,1);
U(:,2);

for k=2:K;
    U(:,k+1)=-G*B*U(:,k)-G*C*U(:,k-1)+G*fii(:,k-1);
end
U;
```

```
for k=1:K+1;
    for n=1:M+1;
    es(n,k)=((999*cos(2*(k-1)*tau)*exp(-(k-1)*tau))/1000...
    -(sin(2*(k-1)*tau)*exp(-(k-1)*tau))/2000...
    + 1/1000)*sin(2*(n-1)*h);
    end
end
es;

for n=1:M+1;
    for k=1:K+1;
        f(n,k)=abs(es(n,k)-U(n,k));
    end
end
f;
absdiff1=max(max(f))

 figure; surf(U); title('approximation solution 0<t<1');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
 figure; surf(es); title('exact solution 0<t<1');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;

fii1=zeros(M+1,M+1);
for k=1:K+1;
    for n=2:M;
    fii1(n,k)=-0.001*(U(n+1,M+1)-2*U(n,M+1)...
    +U(n-1,M+1))/(h^2)+0.001*U(n,M+1);
    end;
end;
fii1;

for n=1:M+1;
    U1(n,1)=U(n,M+1);
end;
U1(:,1);
U1(:,2)=F*(E*U1(:,1)-0.999*H*U1(:,1)...
+1/(2*tau)*(3*U(:,M+1)-4*U(:,M)+U(:,M-1)));

for k=2:M;
    U1(:,k+1)=-(G*B)*U1(:,k)-(G*C)*U1(:,k-1)+G*fii1(:,k-1);
end;
U1;

for k=1:K+1;
    for n=1:M+1;
```

```
      es1(n,k)=(- (17519094633556468 31*exp(1-(k+M-1)*tau)...
      *cos(2*(k+M-1)*tau-2))/(11529215046068469760)...
      -(7690556404663159151*exp(1-(k+M-1)*tau)...
      *sin(2*(k+M-1)*tau-2))/(23058430092136939520)...
      -1753663126482129/(11529215046068469760))...
      *sin(2*(n-1)*h);
      end
end;
es1;

for n=1:M+1;
      for k=1:K+1;
            f1(n,k)=((abs(es1(n,k)-U1(n,k))));
      end
end
f1;
absdiff2=max(max(f1))

 figure; surf(U1); title('approximation solution 1<t<2');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
 figure; surf(es1); title('exact solution 1<t<2');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;

fii2=zeros(K+1,M+1);
for k=1:K+1;
      for n=2:M;
      fii2(n,k)=-0.001*((U1(n+1,M+1)-2*U1(n,M+1)...
      +U1(n-1,M+1))/(h^2))+0.001*U1(n,M+1);
      end;
end;
fii2;

for n=1:M+1;
      U2(n,1)=U1(n,M+1);
end;
U2(:,1);
U2(:,2)=F*(E*U2(:,1)-0.999*H*U2(:,1)...
+1/(2*tau)*(3*U1(:,M+1)-4*U1(:,M)+U1(:,M-1)));

for k=2:K;
      U2(:,k+1)=-(G*B)*U2(:,k)-(G*C)*U2(:,k-1)+G*fii2(:,k-1);
end;
U2;

for k=1:K+1;
      for n=1:M+1;
```

```
      es2(n,k)=((1368679268246599*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *cos(2*(k+2*M-1)*tau-6))/(288230376151711744 00)...
      -(3263487573189458169187*exp(2-(k+2*M-1)*tau)...
      *cos(2*(k+2*M-1)*tau-4))/(3689348814741910323 2000)...
      -(127008340164094851*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *cos(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(1441151880758558720 00)...
      +(9931638188001557*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *sin(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(3602879701896396800 0)...
      +(75125715107095733828 13*exp(2-(k+2*M-1)*tau)...
      *sin(2*(k+2*M-1)*tau-4))/(7378697629483820646 4000)...
      -(3755154494464433*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *sin(2*(k+2*M-1)*tau-6))/(3602879701896396800 0)...
      +(3755154494464433*(k+2*M-1)*tau*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *cos(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(9007199254740992000)...
      -(1368679268246599*(k+2*M-1)*tau*exp(1-(k+2*M-1)*tau)...
      *sin(2*(k+2*M-1)*tau-2))/(7205759403792793600)...
      -561172200474281 3/(3689348814741910323 2000))...
      *sin(2*(n-1)*h);
      end
end;
es2;

for n=1:M+1;
      for k=1:K+1;
            f2(n,k)=((abs(es2(n,k)-U2(n,k))));
      end
end
f2;
absdiff3=max(max(f2))

 figure; surf(U2); title('approximation solution 2<t<3');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
 figure; surf(es2); title('exact solution 2<t<3');
 xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
```

(4.2) probleminin, (4.14) ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri ve hata analizini yapan Matlab programı aşağıda verilmiştir.

```
function twodim2order(N,K,M)

tau=1/K; h=pi/N; r=pi/M;
a=-1/(4*r^2);
c=-1/(4*h^2);
d=1/tau^2+1/tau+1/(2*h^2)+1/(2*r^2);
e=-1/(2*r^2);
g=-1/(2*h^2);
l=-2/tau^2+1/h^2+1/r^2;
```

```
p=1/tau^2-1/tau+1/(2*h^2)+1/(2*r^2);
s=-tau^2/(4*r^2);
v=-tau^2/(4*h^2);
q=1+tau+tau^2/(2*h^2)+tau^2/(2*r^2);
ro=-tau^2/(2*r^2);
ksi=-tau^2/(2*h^2);
mu=tau^2/h^2+tau^2/r^2;

A=zeros(M+1,M+1);
A(1,1)=1; A(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    A(i,i-1)=c;
    A(i,i)=d;
    A(i,i+1)=c;
end
A;
B=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    B(i,i)=a;
end
B;
C=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    C(i,i)=e;
end
C;
D=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    D(i,i-1)=g;
    D(i,i)=1;
    D(i,i+1)=g;
end
D;
E=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    E(i,i-1)=c;
    E(i,i)=p;
    E(i,i+1)=c;
end
E;
Q=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
Q(1:M+1,1:M+1)=eye(M+1);
Q(M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1),M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1))=eye(M+1);
for i=2:M;
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=B;
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=A;
```

```
    Q((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=B;
end
Q;
Y=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
for i=2:M;
    Y((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=C;
    Y((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=D;
    Y((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=C;
end
Y;
Z=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
for i=2:M;
    Z((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=B;
    Z((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=E;
    Z((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=B;
end
Z;
G=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    G(i,i)=s;
end
G;
H=zeros(M+1,M+1);
H(1,1)=1;
H(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    H(i,i-1)=v;
    H(i,i)=q;
    H(i,i+1)=v;
end
H;
S=zeros(M+1,M+1);
S(1,1)=1;  S(M+1,M+1)=1;
for i=2:M;
    S(i,i-1)=ksi;
    S(i,i)=mu;
    S(i,i+1)=ksi;
end
S;
L=zeros(M+1,M+1);
for i=2:M;
    L(i,i)=ro;
end
L;
R=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
for i=2:M;
```

```
    R((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=L;
    R((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=S;
    R((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=L;
end
R;
V=zeros((M+1)*(M+1),(M+1)*(M+1));
V(1:M+1,1:M+1)=eye(M+1);
V(M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1),M*(M+1)+1:(M+1)*(M+1))=eye(M+1);
for i=2:M;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-2)*(M+1)+1:(i-1)*(M+1))=G;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i-1)*(M+1)+1:(i)*(M+1))=H;
    V((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),(i)*(M+1)+1:(i+1)*(M+1))=G;
end
V;
for n=1:N+1;
    for m=1:M+1;
        U(n,1,m)=sin((n-1)*h)*sin((m-1)*r);
    end
end
U(:,1,:);
P=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
for i=1:M+1;
    P((i-1)*(M+1)+1:i*(M+1),1)=U(:,1,i);
end
P;
P(:,2)=inv(V)*(V*P(:,1)-0.999*R*P(:,1)-tau*P(:,1));
fiinm=zeros(M+1,1,M+1);
for n=1:N;
    for m=1:M;
    fiinm(n,1,m)=0.001*(-((sin((n-2)*h)-2*sin((n-1)*h)...
    +sin((n)*h))/h^2)*sin((m-1)*r)-((sin((m-2)*r)...
    -2*sin((m-1)*r)+sin((m)*r))/r^2)*sin((n-1)*h));
    end
end
fiinm;
fii=fiinm(:);
for k=2:M;
    P(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P(:,k)-Z*P(:,k-1)+fii);
end
P;
for k=1:M+1;
    U(:,1:M+1,k)=P((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U;
es=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
```

```
    for k=1:K+1;
    for m=1:M+1;
    es(n,k,m)=((999/1000)*exp(-(k-1)*tau)*cos((k-1)*tau)...
    -(1/1000)*exp(-(k-1)*tau)*sin((k-1)*tau)...
    +1/1000)*sin((n-1)*h)*sin((m-1)*r);
    end
    end
end
es;
f=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
    for k=1:M+1;
        for m=1:M+1;
            f(n,k,m)=abs(es(n,k,m)-U(n,k,m));
        end
    end
end
f;
absdiff=max(max(max(f)))

fiinm1=zeros(M+1,1,M+1);
for n=2:N;
    for m=2:M;
    fiinm1(n,1,m)=0.001*(-((U(n-1,K+1,m)-2*U(n,K+1,m)...
    +U(n+1,K+1,m))/(h^2))-((U(n,K+1,m-1)-2*U(n,K+1,m)...
    +U(n,K+1,m+1))/(r^2)));
    end
end
fiinm1;
fii1=fiinm1(:);
P1=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
P1(:,1)=P(:,M+1);
P1(:,2)=inv(V)*(V*P1(:,1)-0.999*R*P1(:,1)...
+(3*P(:,M+1)-4*P(:,M)+P(:,M-1))/2);
for k=2:M;
   P1(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P1(:,k)-Z*P1(:,k-1)+fii1);
end
P1;
for k=1:M+1;
    U1(:,1:M+1,k)=P1((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U1;
es1=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
    for k=1:K+1;
    for m=1:M+1;
```

```
      x=(n-1)*h;
      y=(m-1)*r;
      t=(k+K-1)*tau;
      es1(n,k,m)=((exp(1-t)*(7343963390876322991*cos(t-1)...
      +7351314705581905*exp(t-1)-11387113861415637841...
      *sin(t-1)))/36893488147419103232)*sin(x)*sin(y);
      end
      end
end
es1;
f1=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
      for k=1:M+1;
            for m=1:M+1;
                  f1(n,k,m)=abs(es1(n,k,m)-U1(n,k,m));
            end
      end
end
f1;
absdiff1=max(max(max(f1)))

fiinm2=zeros(M+1,1,M+1);
for n=2:N;
      for m=2:M;
      fiinm2(n,1,m)=0.001*(-((U1(n-1,K+1,m)-2*U1(n,K+1,m)...
      +U1(n+1,K+1,m))/(h^2))-((U1(n,K+1,m-1)-2*U1(n,K+1,m)...
      +U1(n,K+1,m+1))/(r^2)));
      end
end
fiinm2;
fii2=fiinm2(:);
P2=zeros((M+1)*(M+1),M+1);
P2(:,1)=P1(:,M+1);
P2(:,2)=inv(V)*(V*P2(:,1)-0.999*R*P2(:,1)...
+(3*P1(:,M+1)-4*P1(:,M)+P1(:,M-1))/2);
for k=2:M;
    P2(:,k+1)=inv(Q)*(-Y*P2(:,k)-Z*P2(:,k-1)+fii2);
end
P2;
for k=1:M+1;
      U2(:,1:M+1,k)=P2((k-1)*(M+1)+1:k*(M+1),1:M+1);
end
U2;
es2=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:N+1;
      for k=1:K+1;
```

```
            for m=1:M+1;
            x=(n-1)*h;
            y=(m-1)*r;
            t=(k+2*K-1)*tau;
            es2(n,k,m)=(-(822341314941032411 1*cos(t-2)...
            *exp(2-t))/(14757395258967641292 8)...
            -(181094379939274359 19*sin(t-2)...
            *exp(2-t))/(14757395258967641292 8)...
            -8231644794204529/14757395258967641292 8)...
            *sin(x)*sin(y);
            end
      end
end
es2;
f2=zeros(M+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
      for k=1:M+1;
            for m=1:M+1;
                  f2(n,k,m)=abs(es2(n,k,m)-U2(n,k,m));
            end
      end
end
f2;
absdiff2=max(max(max(f2)))
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Koray TÜRK

Adres: Matematik Bölümü, Trakya Üniversitesi, Merkez, EDİRNE

E-mail: korayturk@trakya.edu.tr, koray.trk.86@gmail.com

ORCİD-İD: https://orcid.org/0000-0002-6955-4920

Scopus Author ID: 57192193426

Web of Science ResearcherID: GHK-9120-2022

Eğitim Bilgileri

Lisans: Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2009-2014)

Yüksek Lisans: Trakya Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı, (2015-2017)

Yabancı Dil: İngilizce, 70/100, YDS, (2014)

Bilgisayar Dilleri: Matlab, Python

Akademik Ünvan: Araştırma Görevlisi (2014-)

TEZ SIRASINDA GERÇEKLEŞTİRİLEN BİLİMSEL FAALİYETLER

Makale

1. Ashyralyev, A., Agirseven, D. & Turk, K., (2021). On the stability of second order of accuracy difference scheme for the numerical solution of the time delay telegraph equation, AIP Conference Proceedings 2325, 020032.

2. Ashyralyev, A., Turk, K. & Agirseven, D., (2021). On the stability of the time delay telegraph equation with Neumann condition, Functional Analysis in Interdisciplinary Applications—II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 351, 201-211.

3. Ashyralyev, A., Turk, K., & Agirseven, D., (2020). On the stable difference scheme for the time delay telegraph equation, BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY-MATHEMATICS, 99(3), 105–119.

Konferans Bildirisi

1. Stability of second order difference scheme for the time delay telegraph equation. Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2022), Antalya, Türkiye, 31 Kasım - 6 Eylül, 2022.

2. On the stable difference scheme for the time delay telegraph equation. Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018), Lefkoşa, KKTC, 6-9 Eylül, 2018.