T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE GRUPLARININ BAZI UYGULAMALARI

YASEMİN IŞIK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet SEZGİN

EDİRNE-2023

YASEMİN IŞIK 'ın hazırladığı "**LIE GRUPLARININ BAZI UYGULAMALARI**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir **Doktora tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Mehmet SEZGİN	.....
Prof. Dr. Şaban AKTAŞ	.....
Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN	.....
Prof. Dr. Ayten PEKİN	.....
Doç. Dr. Yasemen UÇAN	.....

Tez Savunma Tarihi: 20.06.2023

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet SEZGİN .....

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK DOKTORA PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

20.06.2023
Yasemin Işık

İmza

Doktora Tezi
Lie Gruplarının Bazı Uygulamaları
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tezde simetri kavramı vurgulanmış ve grup teorisi metodu yardımıyla bazı özel Lie grupları ile bağlantılı kuantum sistemler incelenmiştir. Tezin ilk bölümünde, simetri kavramı, Lie grupları ve bu gruplar ile ilişkili bazı kuantum sistemler hakkında ön bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, $SL(2,\mathbb{R})$ Lie grubunun homojen uzayında Gram ve genelleştirilmiş Cartan ayrışımları kullanılarak Laplace-Beltrami operatörleri elde edilmiştir. Bu Laplace-Beltrami operatörleri yardımıyla elde edilen kuantum sistemler verilmiş ve bu sistemlerin bağlı ve saçılma durumları elde edilmiştir. Bağlı durumlara karşılık gelen analitik çözümlerin grafikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $SO(3,2)$ Lie grubunun $SO(3,2)/SO(3,1)$ simetrik uzayının küresel ve horiküresel koordinatlardaki parametrizasyonları kullanılarak Casimir operatörleri elde edilmiştir. Bu Casimir operatörler yardımıyla elde edilen kuantum sistemler verilmiş ve sistemlerin analitik çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, $SU(3)$ Lie grubu ile ilişkili bir kuantum kontrol problemi ele alınmıştır. Bir simetri indirgeme tekniği geliştirilerek $G = S^1 \times S^1 \times S^1$ grubu yardımıyla ilgili problem, boyutu orijinal durum uzayının boyutunun yarısı olan bir reel uzayda tanımlı bir probleme indirgenmiştir. Çözümün nümerik olarak hesaplanması için bir yöntem sunulmuş ve yöntem bir örnekle desteklenmiştir.

Yıl	:	2023
Sayfa Sayısı	:	87
Anahtar Kelimeler	:	Simetri, Lie grupları ve cebirleri, Laplace-Beltrami ve Casimir operatörleri, kuantum ve kontrol sistemleri

Doctor of Philosophy (PhD) Thesis
Some Applications of Lie Groups
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

In this thesis, symmetry is emphasized, and quantum systems associated with some special Lie groups are investigated with the help of the group theory method. The first chapter of the thesis gives preliminary information about symmetry, Lie groups, and quantum systems associated with Lie groups.

In the second chapter, Laplace-Beltrami operators are obtained using Gram and generalized Cartan decompositions on the homogeneous space of the Lie group $SL(2,\mathbb{R})$. The quantum systems obtained with the help of the Laplace-Beltrami operators are given, and the bound and scattering states of the systems are obtained. The graphs of the analytical solutions corresponding to the bound states are given.

In the third chapter, Casimir operators are obtained by using the parametrizations in spherical and horispherical coordinates of the symmetric space $SO(3,2)/SO(3,1)$ of the Lie group $SO(3,2)$. The quantum systems obtained by the Casimir operators are given, and the analytical solutions of the systems are obtained.

In the fourth chapter, a quantum control problem associated with the Lie group $SU(3)$ is considered. By developing a symmetry reduction technique, the problem is reduced to one defined in a real space of half the dimension of the original state space with the help of the group $G = S^1 \times S^1 \times S^1$. A method to calculate the solution numerically is presented, which is supported by an example.

Year : 2023

Number of Pages : 87

Keywords : Symmetry, Lie groups and algebras, Laplace-Beltrami and Casimir operators, quantum and control systems

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet SEZGİN'e teşekkürlerimi sunarım. Tez sürecimde yardım ve önerileriyle çalışmamın ilerlemesine katkı sağlayan jüri hocam sayın Prof. Dr. Şaban AKTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmamın son bölümünü TÜBİTAK 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı dahilinde Amerika Birleşik Devletleri Iowa State Üniversitesi Matematik Bölümü'nde gerçekleştirdim. Bu araştırma programı süresince bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan program danışman hocam sayın Prof. Dr. Domenico D'ALESSANDRO'ya ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Son olarak tez çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteklerini gördüğüm Trakya Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma ve hayatımın her anında olduğu gibi çalışmalarım sırasında da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme en içten duygularımla teşekkür ederim.

Yasemin Işık

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

SİMGELER DİZİNİ ix

ŞEKİLLER DİZİNİ xi

ÇİZELGELER DİZİNİ xii

1 GİRİŞ 1

2 SL(2, $\mathbb{R}$) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM SİSTEMLER 11

2.1 SL(2, $\mathbb{R}$) Lie Grubu 12

2.2 Grubun Gram ve Genelleştirilmiş Cartan Ayrışımları 13

2.3 Homojen Uzayda Laplace-Beltrami Operatörlerinin Elde Edilişi 15

2.4 İlgili Kuantum Sistemler ve Çözümleri 15

3 SO(3, 2) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM SİSTEMLER 22

3.1 SO(3, 2) Lie Grubu 22

3.2 Simetrik Uzayda Casimir Operatörlerin Elde Edilişi 24

3.3 İlgili Kuantum Sistemler ve Çözümleri 26

4 SU(3) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM KONTROL PROBLEMİ 32

4.1 Optimal Kontrol Problemi 38

4.2 Simetri İndirgeme ve Reel Duruma İndirgeme 40

4.2.1 Lie Grubu Etkisi 40

4.2.2 Bölüm Uzayındaki Denklemler 43

4.2.3 Reel Duruma İndirgeme 47
4.3 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü 48
4.3.1 Optimal Yörüngelerin Genel Özellikleri 48
4.4 Optimal Kontrolün Nümerik Olarak Hesaplanması 51
4.4.1 $k_0 = 10$ için Optimal Kontrol Problemi Örneği 53

5 SONUÇLAR **56**

KAYNAKLAR **58**

EKLER **63**

A Maliyet Fonksiyonunun Ölçeklendirilmesi **63**

B Maliyet Fonksiyonu İçin Bir Üst Sınır Belirlenmesi **65**

C Reelleştirme İzomorfizması **67**
C.1 $\mathfrak{su}(3)$ ve $\mathfrak{su}^R(3)$ için Taban Belirleme 67

D Optimal Kontrolün Normal Ekstremal Olması **69**

E Dağılımların Rankları **72**
E.1 Δ Kontrol Dağılımının Rankı 72
E.2 $\Delta + V$ Dağılımının Rankı 73

ÖZGEÇMİŞ **74**

TEZ SIRASINDA GERÇEKLEŞTİRİLEN BİLİMSEL FAALİYETLER **75**

SİMGELER DİZİNİ

G, $\mathfrak{g}$	Lie grubu ve cebiri
M	Manifold
M_{in}	Başlangıç alt manifoldu
M_{fin}	Bitiş alt manifoldu
T_xM, TM	Tanjant uzayı ve tanjant demeti
T_x^*M, T^*M	Kotanjant uzayı ve kotanjant demeti
(g_{ij})	Metrik tensör
Δ_{LB}	Laplace-Beltrami operatörü
T(g)	Grubun temsil dönüşümü
J_{ij}	Sonsuz küçük operatörler
C	Casimir operatörü
H	Hamiltonyen operatör
ψ	Dalga fonksiyonu
$V(x)$	Potansiyel enerji fonksiyonu
E	Enerji özdeğeri
$\mathcal{H}$	Hiperboloid
${}_1F_1(a,b;z)$	Konfluent hipergeometrik fonksiyon
${}_2F_1(a,b,c;z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$P_n(x;\nu,N)$	Pseudo-Jacobi polinomu
$J_\nu(z)$	Bessel fonksiyonu
$x(t)$	Durum/yörünge vektör fonksiyonu

$u(t)$	Kontrol vektör fonksiyonu
$\mathbf{J}$	Maliyet fonksiyonu
$\mathbf{J}_{en}$	Enerji tipi maliyet fonksiyonu
$\mathbf{J}_{occ}$	Doluluk tipi maliyet fonksiyonu
L	Lagrangian
λ	Yardımcı durum/yörünge fonksiyonu
$\Delta(x)$	Kontrol dağılımı
π_Q	İzdüşüm dönüşümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. (2.20) denkleminin analitik ve nümerik çözümü 19
Şekil 2.2. (2.35) denkleminin analitik ve nümerik çözümü 21
Şekil 4.1. Kuantum lambda sistemi için enerji seviye diyagramı 35
Şekil 4.2. $0 < \mu < 3.88,\ 0 < \eta < 22.5$ bölgesinde $\hat{\Delta} = 0.1$ adımlı gridde (μ, η)'nın bir fonksiyonu olarak $x(1)$'in grafiği 53
Şekil 4.3. $k_0 = 10$ için (4.48)-(4.49) optimal kontrol probleminin (x, y, z) optimal yörüngesi ve (u_1, u_2) kontrolü 55

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge D.1. $\mathfrak{su}(3)$ Lie cebirinin komütasyon bağıntıları 69

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Herhangi bir nesneye dışarıdan bir işlem (dönüşüm) uygulandığında, nesne bu işlemden önceki halini koruyorsa, yani işlem altında invaryant kalıyorsa bu nesne *simetriye sahiptir* ya da *simetriktir* denir (Feynman, Leighton & Sands, 1965; Weyl, 1952). Örnek olarak eşkenar üçgeni, kareyi ve daireyi ele alalım. Eşkenar üçgen, geometrik merkezi etrafında $\pi/3, 2\pi/3, ...,$ kare ise $\pi/2, \pi, 3\pi/2, ...$ derecelik açılarla döndürüldüğünde başlangıçtaki şekline denk bir hal alır. Daire ise hangi açı ile döndürülürse döndürülsün başlangıçtaki şeklini korur. Bu dönüşümlere, ilgili nesne veya sistemin *simetri dönüşümleri* denir ve böyle dönüşümler altında değişmeden kalan nesne veya sistemlere ise *invaryant sistem* denir.

Bir sistem ne kadar fazla dönüşüm altında invaryant kalıyorsa o kadar simetriktir. Dolayısıyla, $[0, 2\pi)$ aralığındaki dönmeler altında bir kare, bir eşkenar üçgenden, bir çember ise bir kareden daha simetriktir. Simetri dönüşümlerinin bir diğer önemli özelliği ise *kesikli* veya *sürekli* olmalarıdır. Örneğin eşkenar üçgen ve karenin simetri dönüşümleri dikkate alındığında, her iki durum için de dönme açıları yalnızca kesikli değerler aldığından bu iki nesnenin simetri dönüşümleri kesiklidir. Diğer yandan daire için dönme açısı $[0, 2\pi)$ aralığındaki tüm değerleri alabildiğinden dairenin simetri dönüşümleri süreklidir. Fakat asıl ilgi çekici olan doğadaki nesnelerin simetrilerinden ziyade fiziksel dünyanın işleyişini tanımlayan temel yasaların kendisinde var olan simetrilerdir.

Simetri kavramının "simetrik dönüşümlerden oluşan belirli bir küme (ileride göreceğimiz şekliyle simetri grubu) altında invaryant kalma" şeklinde tanımlanması, kavramın geometrik nesnelerin yanında soyut matematiksel ifadeleri ve özellikle dinamik denklemler gibi fiziksel ifadeleri de içeren çok daha geniş bir alana uygulanmasına olanak sağlamıştır. Fizik yasalarını tanımlayan matematiksel denklemleri invaryant bırakan pek

çok farklı dönüşümün varlığı sebebiyle simetri, matematiksel fizikte büyük bir öneme sahiptir. Bu tür dönüşümlere en temel örnek, bir fizik yasasının değişkenlerinin değiştirilmesidir. Öyle ki bu fiziksel yasayı tanımlayan denklemler yeni değişkenler cinsinden ifade edildiklerinde başlangıçtaki tanımlanış biçimlerini korurlar. Böyle bir simetri dönüşümü için Maxwell denklemlerini invaryant bırakan Lorentz dönüşümü örneği verilebilir.

Simetri dönüşümleri, ele alınan sistem hakkında faydalı bilgiler verdiği ve böyle dönüşümlerin matematiksel ifadeleri fiziksel teorilerin yapısını ve tahminlerini kolaylaştırdığı için ilgilenilen sistem için uygun simetri dönüşümlerini belirlemek, modern fiziğin temel konularından biridir. Simetrinin fizik alanındaki tarihsel gelişimi incelenecek olursa, fiziğin matematiksel denklemlerinin invaryantlık özelliklerine ilişkin ilk çalışma, 19. yüzyılın ilk yarısında hareket denklemlerine dönüşümsel yaklaşımın getirilmesiyle olmuştur. C. G. Jacobi, hareket denklemlerinin çözümlerine ulaşmak için W. R. Hamilton'a ait dinamik mekanik denklemlerin formülasyonunu kullanarak Hamiltonyen denklemleri invaryant bırakan değişkenlerin dönüşümlerini uygulama stratejisine dayanan bir prosedür geliştirmiş ve böylece orijinal problemi adım adım daha basit ama tamamen eşdeğer olan yeni problemlere dönüştürmüştür. Jacobi'nin bu stratejisi fiziksel teorilerin dönüşüm özellikleri açısından geniş bir yelpazede incelenebileceği yepyeni bir araştırma sahasının oluşumuna yol açmıştır. 19. yüzyılın ikinci yarısında Poisson braketleri veya Poincaré'nin integral invaryantları gibi kanonik dönüşümler altındaki invaryantların incelenmesi, Sophus Lie'nin sürekli kanonik dönüşümler teorisi ve son olarak fiziksel invaryantların incelenmesi ile gelişen ve dinamik problemlere geometrik yaklaşımın temelini atan invaryantların cebirsel ve geometrik teorisi arasındaki bağlantı Jacobi'nin bu stratejinin sonuçlarıdır.

Klasik fizikte sıkça rastlanan birbirinden farklı simetri türleri vardır. Örneğin, bir fiziksel problem ele alınırken, uzayın homojen olduğu yani uzayın her x noktasında sistemin aynı yapıya sahip olduğu varsayılır. Bu, problemin çözümünün keyfi bir a vektörü için $x' = x + a$ ötelemeleri altında invaryant olduğunu varsaymakla aynı anlama gelir. Gerçekten de böyle bir durumda, herhangi bir noktayı çevreleyen alan bir öteleme yardımıyla keyfi bir noktayı çevreleyen benzer bir alana taşınabilir. Bu duruma öteleme altında invaryant olma denir. Zamanın homojen olması da en az uzayın homojen olması kadar önemlidir. Bu durum, izole sistemlerdeki fizik yasalarının zamandaki öteleme altında invaryant kalması, yani sistemin $t + t_0$ anında t anı ile aynı forma sahip olması demektir. Bir diğer örnek ise çözüm uzayının izotropisi, yani uzayın her yönde aynı yapıya sahip olmasıdır. İzole bir sistem uzayda keyfi bir şekilde döndürülürse, yani R dönme matrisi olmak üzere $r' = Rr$ dönüşümü yapılırsa sistemin hiçbir mekanik özelliği değişmez. Bu ise sistemin uzaydaki dönmeler altında invaryant olduğu anlamına gelir (Vvedensky, 2001).

20. yüzyılın başlarında ise ana figürleri F. Klein, D. Hilbert ve H. Weyl olan bir grup araştırmacının fiziksel teorileri incelemek için grup teorisinin kullanımı üzerine yaptığı sistematik çalışmalar ve daha sonra E. Noether'in simetri ve korunum yasaları arasında derin bir ilişki olduğunu ispatlaması, simetri kavramı üzerine yapılan çalışmalara farklı bir ivme kazandırmıştır ("Symmetry and Symmetry Breaking", 2023). Günümüzde Noether Teoremi olarak bilinen bu teoremin sezgisel bir ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir. Teoremin teknik ifadesi ve ispatı (Noether, 1918) makalesinde bulunabilir.

Teorem 1.1 (Noether Teoremi)**.** *Eğer bir fiziksel sistem sürekli bir simetriye sahip ise, sistemin bu simetriye karşılık gelen bir korunum yasası vardır.*

Noether teoremine örnek olarak, yukarıda verdiğimiz klasik fiziğin simetrilerini ele alalım. Bir sistem zamandan bağımsız olarak aynı sonuçları veriyorsa sistemin Lagrangian'ı zamanda sürekli ötelemeler altında invaryanttır. Gerçekten de bu simetri, sistem enerjisinin korunumu yasasını sonuç verir. Benzer şekilde sistem ötelemeler altında invaryant ise momentumun korunduğu, dönmeler altında invaryant ise açısal momentumun korunduğu anlamına gelir. Noether teoremi günümüzde o kadar önemli hale gelmiştir ki, bugün fizik yasaları olarak kabul ettiğimiz şeylerin hemen hemen hepsi, doğrudan simetrilerden kaynaklanan bu tür korunum yasalarıdır.

Simetri kavramı, gerek sanatta gerekse bilimde başından beri varlığından söz ettirse de özellikle kuantum fiziğinin inşasıyla çok daha büyük önem kazanmıştır. Teorinin kurucuları, yeni mekaniğin formüle edilmesinde yol gösterici bir ilke olarak simetrinin önemini çok iyi fark etmiş ve matematiksel fizik denklemlerindeki simetriyi, tıpkı doğadaki çiçeklerin ve kar tanelerinin simetrikliklerinden kaynaklanan güzelliklerine eş tutmuşlardır (Rau, 2014). Klasik fiziktekine benzer sebeplerle, uzay ve zamanın homojenliği ve uzayın izotropisi kuantum fiziğinde de önemli bir rol oynar. Fakat kuantum fiziği sistemlerinde bunların dışında da farklı simetriler bulunmaktadır. Kuantum fiziksel sistemlerin simetri dönüşümleri için genel olarak şöyle bir ayrım yapılabilir: Sistemin uzay ve zamanda öteleme, yansıma veya uzayda dönme altında invaryant kalmasına karşılık gelen geometrik simetriler ve hidrojen atomunun veya izotropik harmonik osilatörün enerji düzeylerinin dejenere olmasına sebep olan simetriler gibi dinamik simetriler. Bunlar dışında da fiziğin farklı alanlarında farklı simetrilerin varlığından söz edilebilir (Greiner & Müller, 2012). Bu nedenle bir sistemin simetri özellikleri hakkında net yorumlar yapabilmek ve üzerinde disiplinli bir şekilde çalışabilmek için kapsamlı yaklaşımlara ihtiyaç duyulmuştur.

Simetri kavramının sistematik olarak problemlere uygulanabilmesi, cebirsel bir yapı olan grup kavramının geliştirilmesi ve bir nesne veya sistem üzerinde gerçekleştirilen simetri işlemlerinin grup oluşturma koşullarını karşıladığının bulunması ile ger-

çekleşmiştir. Bu sayede, simetrinin yukarıda verilen sezgisel tanımı grup teorik tanımına genelleştirilmiştir. Gerçekten de bir sisteme, sistemi invaryant bırakan iki dönüşüm peş peşe uygulandığında sistem yine invaryant kalır. Dolayısıyla iki simetri dönüşümünün çarpımı yine bir simetri dönüşümü verir. Sisteme hiçbir müdahalede bulunulmadığında sistem ilk halini koruyacağından birim dönüşüm her zaman bir simetri dönüşümü tanımlar. Ayrıca, sistemi invaryant bırakan her dönüşümün tersi de sistemi invaryant bırakacağından her simetri dönüşümünün tersi vardır. Burada çarpma işlemi olarak ifade edilen grup işlemi genellikle bilinen matris çarpımı veya fonksiyonların bileşke işlemidir. Bu sayede grup işleminin birleşmeli olma özelliği garanti altına alınır (Wigner, 2012). Bu nedenle bir sistemin simetri dönüşümlerinden oluşan küme bir grup oluşturur ve bu gruba sistemin *simetri grubu* denir. Grup teorisi sayesinde soyut simetri kavramı somut, matematiksel bir alt yapı kazanmıştır.

Eşkenar üçgen veya kare örneklerinde olduğu gibi, bir sistemin simetri dönüşümünün parametreleri kesikli değerler alıyorsa böyle sistemlerin simetri grupları ayrık gruplarla ifade edilir. Örneğin bu iki örnek için simetri grupları sırasıyla S_3 ve S_4 simetrik gruplarıdır. Tarihsel açıdan bakıldığında, simetri kavramı fizikten önce kristal katılarda atomların dizilişini ve bağlarını ayırt etme ve kristal kafeslerin geometrik yapısı ile ilgilenen bilim dalı olan kristalografide uygulama alanı bulmuştur (Katzir, 2004). Bu alanda karşımıza çıkan kristalografi grupları da ayrık gruplardır. Fakat simetri kavramının modern bilimde bu denli geniş uygulama alanı bulması sürekli gruplar olarak adlandırılan Lie gruplarının bilim insanlarının hizmetine sunulmasıyla gerçekleşmiştir.

Galois'nın 19. yüzyılın başlarında ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden polinom denklemleri çözmek için sonlu grupları kullanması fikri, Norveçli bilim insanı M. Sophus Lie (1842–1899)'yi adi diferansiyel denklemleri çözmek veya en azından denklemleri daha basit hale indirgemek için simetri dönüşümlerden oluşan sürekli grupları kullanma fikrine yöneltmiştir (Gilmore, 2008). 1874 yılında, bu fikrini "Zur Theorie des Integrabilitetsfaktors" isimli makalesinde bir diferansiyel denklemin izotropi grubunu denklemin çözülebilirliği ile ilişkilendiğini bir teoremle taçlandırır. Burada izotropi grubu, simetri grubunun çözüm uzayının bir elemanını invaryant bırakan elemanlarının kümesidir. Bu derin ve özgün çalışma, matematik tarihinde bir mihenk taşı olsa da Lie'nin özünde bir geometrici olması ve çalışmanın analitik bir formülasyona ihtiyaç duyması sebebiyle zamanın matematikçileri arasında yeterli ilgiyi görmemiştir. Fakat ilerleyen yıllarda E. Cartan, W. Killing ve H. Weyl'in çalışmalarıyla teori genişletilmiş ve matematiğin diğer alanlarına uygulanabilir hale getirilmiştir. Lie, teorisini diferansiyel denklemlerin incelenmesinde bir araç olarak tasarlamış olsa da ilerleyen yıllarda Lie grupları ve cebirlerinin genel teorisi dönüşüm grubu olma fikrinden bağımsız olarak kendi başına bir alan haline gelmiş ve başta modern matematik ve matematiksel fiziğin birçok dalına nüfuz etmiştir

(Helgason, 1994).

Lie'nin çalışmalarında dönüşüm grupları olarak adlandırdığı sürekli gruplar, elemanları sürekli olarak bir veya birden fazla reel parametreye bağlı gruplardır. Yukarıda incelediğimiz daire örneğinden, dairenin dönme simetrilerinin θ açısının sürekli değerlerine bağlı olduğunu biliyoruz. Böylece daire için bir simetri grubu, düzlemde dönmeleri ifade eden $SO(2)$ Lie grubudur. Atomlar gibi küresel simetriye sahip sistemlerin Hamiltonyen operatörleri tüm üç boyutlu dönmeler altında invaryant olduğundan fiziksel uygulamalarda sürekli parametrelere dayalı simetri dönüşümleri doğal olarak ortaya çıkar. Örneğin hidrojen atomunun Hamiltonyen'i uzayda dönmeler altında invaryant olduğundan, R böyle bir dönmeyi ifade eden dönüşüm olmak üzere, Hamiltonyen $[\mathcal{H}, R] = 0$ komütasyonunu sağlar. Böyle R dönüşümleri $SO(3)$ ortogonal Lie grubunu oluşturur. Dolayısıyla $SO(3)$ Lie grubu hidrojen atomunun bir simetri grubudur (Lüdeling, 2010).

Lie grupları, grup ve tersi işlemleri analitik fonksiyonlar olan bir grup olmanın yanında analitik bir manifold olma özelliğine sahip özel matematiksel yapılardır. Grup ve manifold gibi birbirinden farklı bu iki matematiksel kavramın birleşimi, hem grup teorisinin cebirsel yöntemlerini hem de diferansiyel geometride kullanılan kavramları bir araya getirir ve grup elemanlarının diferansiyellerini ve integrallerini oluşturmakla ilişkili yeni yapıları ortaya çıkarır. Bu iki yapı, aynı zamanda topolojik grup yapısını da beraberinde getirir. Bu durum araştırmacıya, Lie gruplarını farklı şekillerde tanımlayabilme ve problemin amacına en uygun tanımı seçebilme olanağı sağlar. Dahası Lie grubunun manifold yapısı kullanılarak, birim elemanda tanjant uzayı tanımlanabilir ve bu sayede gruba karşılık gelen sonlu boyutlu bir vektör uzayı oluşturulabilir. Lie grubunun sonsuz küçük üreteci olarak bilinen ve gruba dair hemen hemen her bilgiyi içeren bu uzaya Lie cebiri denir. Bir Lie grubunun etkisi altında invaryant olma durumunun lineer olmayan, soyut koşullarını daha basit, lineer sonsuz küçük koşullara dönüştüren Lie grupları ile cebirleri arasındaki bu ilişki Lie teorisinin en önemli özelliklerinden biridir (Belinfante & Kolman, 1989; Iachello, 2006; Raczka & Barut, 1986; Vvedensky, 2001).

20. yüzyılda fiziksel simetrideki ikinci önemli gelişme, simetri kavramından yararlanmak için 1920'lerin kuantum fiziğine Lie teorisinin ve grup temsillerinin uygulanması ile gerçekleşmiştir. E. P. Wigner ve H. Weyl, simetri gruplarının kuantum fiziğiyle ilişkisini ilk fark eden ve anlamı üzerine çalışanlar arasındadır. 1963 Nobel ödülünün sahibi ünlü bilim insanı Wigner'in de birçok kez vurguladığı gibi kuantum teorisinde invaryant olma ilkelerinin kullanım alanlarındaki artışın temel nedenlerinden biri, bir kuantum fiziksel sistemin durum uzayının üst üste binen kuantum durumlarına karşılık gelen lineer uzay yapısıdır (Wigner, 1967). Bu durum, teorinin diğer birçok avantajının yanı sıra bir simetrinin varlığında sistemin durumunun basit dönüşüm özellikleri yardımıyla tanımlanmasına

olanak sağlar.

Genel manada, eğer G Lie grubu fiziksel bir sistemin bir simetri grubu ise sistemin çözümleri G grubunun bir *temsili* altında birbirlerine dönüşür. Bir başka deyişle grup temsili, grup elemanı olan dönüşümlerin sistemin çözüm uzayının elemanları olan durumları birbirine dönüştüren işlemlerin matematiksel olarak ifade edilişleridir. Kuantum fiziğinde bu işlemler, durum uzayına *etki eden* ve fiziksel gözlemlenebilirlere karşılık gelen operatörler aracılığıyla gerçekleştirilir ve fiziksel bir sistemin çözümü, elementer sistemlerin çözümlerinin üst üste binmesi ile tanımlanabilir. Burada elementer sistemler, çözümleri simetri grubunun *indirgenemez* temsillerine göre dönüşen sistemlerdir. Özel olarak kuantum fiziğinin simetri ilkelerinin uygulanmasına elverişli olma sebebi budur. Sistemin simetrilerinin durum uzayındaki etkisini temsil eden ve bu nedenle sistemin Hamiltonyeni ile komüte olan gözlemlenebilirler, korunan büyüklükler rolünü oynar. Ayrıca simetri grubunun invaryantlarının özdeğer spektrumları, grubun indirgenemez temsillerini sınıflandırmak için kullanılır. Bu sınıflandırma, fiziksel anlamda sistemin kuantum sayılarını verir. Bu sayede, fiziksel sistemleri karakterize eden invaryantlık özelliklerinin değerleri simetri gruplarının indirgenemez temsillerinin etiketleriyle ilişkilendirilir, yani simetri gruplarının indirgenemez temsilleri incelenerek temel fiziksel sistemler sınıflandırılabilir ("Symmetry and Symmetry Breaking", 2023). Geliştirilen grup teorisi metotlarının önemi, aynı hesaplamaları tekrar tekrar yapma gereği olmadan bu prosedürün herhangi bir simetriye sahip her Hamiltonyen için sistematik bir şekilde uygulanabilmesidir.

Kuantum fiziği atom ve atomaltı parçacıklardan oluşan sistemlerin fiziksel davranışlarını tanımlar. Böyle sistemler Heisenberg matris mekaniği, Schrödinger dalga mekaniği veya Feynman yol integral formülasyonu gibi farklı yollarla tanımlanabilir. Schrödinger modelinde n boyutlu bir Euclidean uzayda tek parçacıklı bir kuantum sisteminin dinamiği

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\mathbf{x},t)\right]\psi(\mathbf{x},t)$$

lineer kısmi diferansiyel denklemi ile tanımlanır. Bu denklem sistemin zamana bağlı olarak değişimini ifade eder ve zamana bağlı Schrödinger denklemi olarak adlandırılır. Burada, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ konum vektörü, $\hbar$ Planck sabiti, m parçacığın kütlesi ve Δ Laplace operatörüdür. Riemann uzayında tanımlı bir kuantum sistemi için Δ Laplace operatörünün yerini Δ_{LB} Laplace-Beltrami operatörü alır. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjisinin $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{LB}+V(\mathbf{x},t)$ toplamı, sistemin toplam enerjisine karşılık gelen H Hamiltonyen operatörünü ifade eder. Böyle bir kuantum sisteminin durumu, kompleks bir Hilbert uzayına ait ψ vektörü ile ifade edilir. Bu vektörün normalize olduğu varsayılır, yani $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ Hilbert uzayının iç çarpımını tanımlamak üzere $\langle\psi,\psi\rangle=1$ koşulu sağlanmalıdır. Bu koşulun bir sonucu olarak ψ ve $e^{i\alpha}\psi$ vektörleri bir fiziksel sistemin birbirine denk iki

durumunu temsil eder.

Bazı kuantum sistemlerin H Hamiltonyen operatörü açıkça t değişkenini içermez, yani sistem zamandan bağımsızdır. Kuantum fiziğinde enerjinin korunumu yasası, sistemin durumu belirli bir enerji değerine sahipse bu değerin zaman içinde sabit kalacağını ifade eder. Bu nedenle belirli E_n enerji özdeğerlerine sahip ψ_n durumları

$$H\psi_n(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right]\psi_n = E_n\psi_n(\mathbf{x})$$

zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin çözümleri olan özfonksiyonlardır. Schrödinger denkleminden elde edilen bir çözümün fiziksel olarak anlamlı olması için, çözümün normalize edilebilir olmasının yanında sistemin ilgili sınır koşullarını sağlaması gerekir.

Simetrinin kuantum sistemlerinin matematiksel tanımında nasıl rol oynadığını basit bir örnek ile anlamak için bir parçacığın tek boyuttaki hareketini tanımlayan

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{1.1}$$

zamandan bağımsız Schrödinger denklemini ele alalım. H Hamiltonyen operatörü

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{1.2}$$

olmak üzere (1.1) Schrödinger denklemi $H\psi = E\psi$ formunda yazılabilir. (1.1) gibi bir boyutlu kuantum fiziği problemlerinin enerji özdeğerleri dejenere değildir, yani her enerji özdeğeri tek boyutlu bir özfonksiyon uzayına sahiptir. Fiziksel manada bu, her özdeğerin tek bir özfonksiyona karşılık geldiği anlamına gelir. Şimdi (1.1) denklemindeki $V(x)$ potansiyelinin çift bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Yani $V(x)$ potansiyeli $x \to -x$ ters dönüşümü altında invaryant olsun, yani

$$V(-x) = V(x). \tag{1.3}$$

Simetrik kare potansiyel kuyuları ve harmonik osilatörler bu tür potansiyellere örnektir. (1.3) dönüşümü altında (1.2) Hamiltonyen operatörünün invaryant olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla dönüşüm, Hamiltonyen operatörü için bir simetri dönüşümüdür. (1.3) dönüşümü altında (1.1) denklemi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(-x) = E\psi(-x) \tag{1.4}$$

halini alır. E enerjisi dejenere olmadığından bu enerjiye karşılık gelen yalnızca tek bir özfonksiyon vardır. Bu durumda tek olasılık $\psi(-x)$'in $\psi(x)$ ile lineer bağımlı olmasıdır, yani A keyfi bir sabit olmak üzere $\psi(-x) = A\psi(x)$. Burada x yerine $-x$ yazılırsa

$\psi(x) = A\psi(-x)$ elde edilir. Buradan $\psi(x) = A^2\psi(x)$ elde edilir ki bu $A = 1$ veya $A = -1$ sonucunu doğurur. Dolayısıyla $\psi(-x) = \psi(x)$ veya $\psi(-x) = -\psi(x)$ bulunur. Bu ise ψ özfonksiyonlarının bu simetri dönüşümü altında çift veya tek fonksiyon olduğunu söyler. Gerçekten de kare kuyu potansiyelleri veya harmonik osilatör için Schrödinger denkleminin çözümlerinin çift ve tek özfonksiyonlara sahip olduğunu kuantum fiziği derslerinden biliyoruz. Sonuç olarak ele aldığımız (1.3) simetrisi, özfonksiyonların ilgili dönüşüm altında çift veya tek fonksiyon olmalarına göre sınıflandırılmasını sağlar. Bu örnek, simetrinin Schrödinger denkleminin çözümüne açıkça nasıl etki ettiğini gösterir. Gerçekten de bu tür örnekler ve özellikle (1.1) Noether teoremi üzerine yorumlar geliştirilerek sürekli simetriler ve sistemin enerji özdeğerleri ve dalga özfonksiyonlarını karakterize eden kuantum sayıları arasında genel bir ilişki kurulabilir.

Kuantum sayıları için şu örneği inceleyelim. Tek boyutta m kütleli serbest bir parçacığın

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

zamana bağlı Schrödinger denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümleri, k ve ω, sırasıyla $p = \hbar k$ momentumu ve $E = \hbar\omega$ enerjisi ile ilişkili sabitler olmak üzere

$$\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.6}$$

şeklindeki düzlem dalgalarıdır. Bir başka ifadeyle (1.5) denkleminin çözümlerindeki k ve ω kuantum sayıları, bu denklemin uzay ve zaman ötelemeleri altında invaryant oluşu sebebiyle korunan niceliklere karşılık gelen momentum ve enerjiye karşılık gelir. Kuantum sayıları ile sistemin simetrileri arasındaki ilişki bu şekilde kurulabilir. Benzer şekilde, yukarıda ele aldığımız hidrojen atomunun dönme simetrisine karşılık gelen simetri grubu $SO(3)$ olduğundan, bu bize Hamiltonyen operatörünün özfonksiyonlarının $SO(3)$'ün temsilleri yardımı ile elde edilebileceği sonucunu verir. Grup teorisi, bu temsillerin açısal momentum ve manyetik kuantum sayısı olarak yorumladığımız (l, m) şeklinde iki sayıyla belirlendiğini söyler (Lüdeling, 2010).

Lie grupları ve cebirleri, temsil teorisini de bünyesine katan bu zengin teknik alt yapısı sayesinde matematiğin hem teorik hem de uygulamalı birçok farklı alanıyla etkileşim halindedir. Cebirsel topoloji, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, özel fonksiyonlar, harmonik analiz, cebirsel geometri, Riemann geometrisi ve simetrik uzaylar, değişkenlerine ayırma metodu bunlardan yalnızca birkaçıdır (Gallier & Quaintance, 2020; Klimyk & Vilenkin, 1991, 1993; Olver, 1993; Raczka & Barut, 1986; Samelson, 1952; Vvedensky, 2001). Fizikte ise, temel parçacık fiziği ve nükleer fizik, süreklilik mekaniği, katı hal fiziği, spektroskopi, kozmoloji ve kuantum kontrol teorisi gibi çeşitli alanlarda uygulama alanı bulmaktadır (Belinfante & Kolman, 1989; Gilmore, 2008; Iachello, 2006; Raczka &

Barut, 1986). Teori, bu iki temel alanın dışında, kuantum kimyası ve matematiksel biyoloji gibi temel bilimlerde, bilgisayar ve elektronik mühendisliği, robotik gibi uygulamalı bilimler ile ekonomi ve finans gibi sosyal bilimlerinin matematiksel modellemelerinde dahi kullanılmaktadır (Golubitsky & Stewart, 2015; Hernández, Mateos, Núñez & Tenorio, 2009; Lu & Li, 2020; Selig, 2004; Wybourne, 1973).

Yukarıda verdiğimiz örneklerde olduğu gibi, fizikçilerin doğadaki problemlere yaklaşımı, öncelikle ilgilenilen sistemi tanımlayan matematiksel denklemleri veya ifadeleri elde etmek ve daha sonra bunların simetri özelliklerini inceleyerek sistem hakkında faydalı bilgiler edinmek, sistemin dinamiklerini basitleştirmek ve mümkünse çözümlerine ulaşmaktır. Fakat bu yaklaşımın tersine doğada var olduğu bilinen özel simetrilerle yani bunlara karşılık gelen belirli Lie grupları ile başlayarak bu simetrik özelliklere sahip dinamik denklemler incelenebilir. Başka bir deyişle, belirli dinamik denklemlerden simetriler türetmek yerine fiziksel olarak önemli olduğu varsayılan simetrilerden dinamik denklemlere ulaşılabilir. Bu tez çalışmasının ikinci ve üçüncü bölümünde, bu ikinci yaklaşım ile elde edilen bazı kuantum sistemleri ele alınacaktır. Bölüm 2'de $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun homojen uzayında tanımlanan Laplace-Beltrami operatörü yardımıyla oluşturulan kuantum sistemlerin bağlı ve saçılma durumları incelenecektir. Bölüm 3'te ise $SO(3,2)$ grubunun $SO(3,2)/SO(3,1)$ simetrik uzayında tanımlanan Casimir operatörü yardımıyla oluşturulan kuantum sistemlerin analitik çözümleri verilecektir.

Son yarım asırda, bir yandan Lie teorisi tekniklerinin kuantum fiziğindeki uygulamaları üzerine çalışmalar devam ederken, diğer yandan bilgisayar bilimi ve bilgi kuramındaki gelişmeler doğada bulunan kuantum sistemlerine yalnızca doğada bulundukları halleriyle açıklanması gereken olgular olarak bakmak yerine, bunlara tasarlanabilecek sistemler olarak bakma fikrini doğurmuştur. Bu fikir günümüz kuantum bilgi teorisinin temelini oluşturur. Kuantum sistemlerini kullanarak fiziksel büyüklüklerin nasıl ölçüleceğini inceleyen bilim olan kuantum metrolojisi, kimyasal reaksiyonların kontrolü ve kuantum hesaplama gibi alanlar kuantum bilgi kuramında ortaya çıkan problemleri incelemektedir. Bu alanların birçoğu, kuantum sistemlerinin bir hedef doğrultusunda belirli bir şekilde manipüle edilmesini gerektirir. Dolayısıyla deneylerin somut olarak gerçekleştirilmesi ve aynı zamanda kuantum fiziğinin merkezinde yer alan birkaç teorik soruya yeni bir bakış açısı kazandırması açısından bu bilimlerde kontrol teorisinin kullanılması oldukça önemlidir (Nielsen & Chuang, 2002).

Pek çok deney düzeneğinde bir elektromanyetik alan, dinamikleri kuantum fiziği yasaları ile verilen atom, çekirdek veya elektron gibi bir sistem ile etkileşim halindedir. Son yıllardaki teknolojik gelişmelerle, sistem ile etkileşim halindeki bu elektromanyetik alanı istenildiği gibi şekillendirmek mümkündür. Bu durum araştırmacıları, bu deneyleri

elektromanyetik alanın *kontrol* rolü oynadığı; atom, çekirdek/elektron veya herhangi bir başka kuantum fiziksel sistemin ise *kontrolün hedefi* olduğu kontrol deneyleri olarak düşünmeye yönlendirir (D'Alessandro, 2021).

Bir kontrol probleminde ilgilenilen ilk soru, ilgili sistemin *kontrol edilebilirliği* sorusudur. Bu soru, Lie grupları üzerinde sağ invaryant kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğine ilişkin sonuçlar uygulanarak, özel olarak sistemin ulaşılabilir durumlarının oluşturduğu Lie grubu ile ilişkili *rank koşulu* ile yanıtlanır. Bu temel sonuç, son yıllarda V. Jurdjevic, H. J. Sussmann, R. W. Brockett ve Y. Sachkov gibi birçok bilim insanı tarafından geliştirilen geometrik kontrol teorisinin genel sonuçlarının bir uygulamasıdır. Bu geometrik yorumlar, aynı zamanda Lie grupları ve cebirleri teorisinin sonuçlarını kuantum sistemlerinin analizine ve kontrolüne uygulama olanağı sağlamıştır (Agrachev & Sachkov, 2004; Brockett, 1973; Jurdjevic, 1997; Sussmann, 1999). Bu geometrik gelişmelerden bir diğeri de Lie gruplarının lineer olmayan kontrol problemlerinin veya optimal kontrol problemlerinin boyutunu azaltmak ve optimal kontrolü bulmayı basitleştirmek için kullanılabilecek bazı simetrileri kabul ettiğinin gözlenmesidir. Bu gözlem, ilgili Lie grubunun etkisi altında problemin boyutunun indirgenmesine yarayan *simetri indirgeme* adı verilen bir tekniği ortaya çıkarmıştır. Bu teknik son yıllarda birçok makalede ele alınmıştır (de Leon, Cortes, de Diego & Martinez, 2004; Echeverria-Enriquez, Marin-Solano, Munoz-Lecanda & Roman-Roy, 2003; Grizzle & Marcus, 1984; Grizzle & Marcus, 1985; Nijmeijer & Van der Schaft, 1982; Ohsawa, 2013; Van der Schaft, 1987).

Matematiksel hesaplama tekniklerinin artışı ve bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerin etkisiyle kuantum fiziği üzerine yapılan çalışmalar arasında kuantum hesaplama, kuantum bilgi kuramı ve kuantum bilgisayarları başta olmak üzere kuantum teknolojilerine olan ilgi her geçen gün artmaktadır. Bu alanlardaki kuantum sistemlerinin aktif manipülasyonu ve kontrolü için kullanılan kuantum kontrol teorisi son otuz yılın hızla gelişen bir araştırma alanı haline gelmiştir (D'Alessandro, 2021; D. Dong & Petersen, 2010). Bu durum göz önünde bulundurularak bu tez çalışmasının son bölümü, $SU(3)$ grubunda sol invaryant bir kontrol problemine ayrılmıştır. Bu bölümde kuantum lambda sistemlerinde optimal bir kontrol problemi ele alınacak ve $G = S^1 \times S^1 \times S^1$ Lie grubunun etkisi altında simetri indirgeme metoduyla problem düşük boyutta bir probleme indirgenecektir. Bu problemin çözümünün nümerik olarak hesaplanması için bir yöntem sunulacak ve bu yöntem örneklendirilecektir.

BÖLÜM 2

SL(2, $\mathbb{R}$) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM SİSTEMLER

Simetri ilkelerinin sistemli bir şekilde analiz edilmesi, Lie grupları ve cebirleri teorisinin gelişimi ve temsil teorisinin bu güçlü teoriye dahil olması gibi gelişmeler sayesinde 20. yüzyılın sonlarına gelindiğinde sürekli gruplar kuantum fiziği sistemlerinin birbirinden farklı birçok problemine başarıyla uygulanabilir hale gelmiştir. Çeşitli potansiyel sınıflarına ait kauntum sistemlerinin integrallenebilirliğinin incelenmesi, fiziksel sistemlerin açık çözümlerinin cebirsel olarak elde edilmesi, bağlı ve saçılma durumlarının spektrum incelenmesi, sistemlerin S-matrislerinin bulunması veya Clebsch-Gordan ve Racah katsayılarının elde edilmesi bunlardan yalnızca birkaçıdır (Alhassid, Gürsey & Iachello, 1983a; Iachello, 2006; Klimyk & Vilenkin, 1991, 1993; M. A. Olshanetsky & Perelomov, 1983; Raczka & Barut, 1986; Wigner, 2012).

Bir kuantum sisteminin grup teorik metodu yardımıyla açık çözümü elde edilirken farklı yollar izlenebilir. Giriş bölümünde de belirtildiği üzere, öncelikle ele alınan sistemin simetrileri göz önünde bulundurularak sistemin simetri grubu belirlenebilir ve daha sonra sistem Lie terosinin sunduğu teknikler yardımıyla incelenebilir. Bunun aksine, fizikte önemli simetrileri tanıttığı düşünülen Lie grupları ile başlanarak bu gruplarla ilişkili çeşitli fiziksel sistemlere ulaşmak da mümkündür. Bahsi geçen ikinci yöntem için de, bir Lie grubu ile bir kuantum sistemi ilişkilendirmenin farklı yolları bulunur. Lie grubuna karşılık gelen bir kuantum sistemi elde etmek için kullanılan yaygın tekniklerden birisi, grubun etki ettiği bir homojen uzay üzerinde oluşturulan Laplace-Beltrami operatörü ile sistemin Hamiltonyen'i arasındaki ilişkinin inşasıdır. Bu ilişkinin kilit noktası, ele alınan sistemin Hamiltonyen'i ile homojen uzay üzerinde oluşturulan Laplace-Beltrami operatörü arasında tanımlı basit bir dönüşümünün varlığıdır. Laplace-Beltrami operatörü, homojen uzay üzerinde bir Riemann metriği aracılığıyla tek bir şekilde belirlenir. Bu

ilişki sayesinde Lie teorisinin araçları kullanılarak sistemin çözümü cebirsel bir problem haline dönüştürülür. (M. A. Olshanetsky & Perelomov, 1981, 1983). Literatürde, bu metot yardımıyla çeşitli Lie gruplarına karşılık gelen Hamiltonyen sistemler elde edilmiş ve analitik çözümleri verilmiştir (Isik & Sezgin, 2018; Kalnins, Miller & Pogosyan, 2002; Kerimov, 2003; Sezgin & Verdiyev, 2004). Bu bölümde, Laplace-Beltrami operatörü yardımıyla $SL(2,\mathbb{R})$ grubuna karşılık gelen iki kuantum sistem incelenecektir.

2.1 SL(2, $\mathbb{R}$) Lie Grubu

$\mathbb{R}^n$ uzayında $x' = Ax$ lineer dönüşümlerini ele alalım. A, bu dönüşümün determinantı sıfırdan farklı $n \times n$'lik matrisi olmak üzere bu türden matrisler, matris çarpımı işlemi altında $GL(n,\mathbb{R})$ genel lineer grubunu oluşturur, yani

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in M(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, \det(g) \neq 0 \right\}.$$

$GL(n,\mathbb{R})$ grubunun elemanları arasında determinantı 1 olan matrisler, bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba özel lineer grup denir ve $SL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir, yani

$$SL(n,\mathbb{R}) = \left\{ g \in GL(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, \det(g) = 1 \right\}.$$

$SL(n,\mathbb{R})$ grubu, n^2-1 boyutlu kompakt olmayan bir Lie grubudur. Özel olarak $n = 2$ için $SL(2,\mathbb{R})$ grubu, matematikte ve fizik uygulamalarında en sık kullanılan Lie gruplarından biridir ve

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)^2$$

şeklinde yazılır ve

$$x_1 = \frac{\alpha+\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{\beta-\gamma}{2}, \quad x_3 = \frac{\alpha-\delta}{2}, \quad x_4 = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

seçilirse grubun (2.1) tanımı

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ -x_2+x_4 & x_1-x_3 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1 \right\} \tag{2.2}$$

şeklinde de verilebilir. Manifold yapısı itibariyle $SL(2,\mathbb{R})$ Lie grubu $\mathcal{H} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$, $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4_{2,2}$ hiperboloidi ile tanımlanabilir. Burada $\mathbb{R}^4_{2,2}$ uzayı, $[x,y] = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 = 1$ iç çarpımına sahip 4 boyutlu pseudo-Euclidean

uzayıdır. Her Lie grubu, kendi üzerine geçişli olarak etki ettiğinden böyle gruplar bir homojen uzay ifade eder (Raczka & Barut, 1986). Dolayısıyla $\mathcal{H}$ hiperboloidi bir homojen uzay tanımlar.

2.2 Grubun Gram ve Genelleştirilmiş Cartan Ayrışımları

$\mathcal{H}$ homojen uzayı üzerinde Laplace-Beltrami operatörünü ifade edebilmek için uzayın bir koordinat sisteminde parametrize edilmesi gerekir. Bu nedenle $SL(2,\mathbb{R})$ grubu elemanlarının bir parametrizasyonuna ihtiyaç duyulur.

Bir Lie grubunu parametrize etme yollarından birisi, grup elemanlarını grubun bir parametreli alt gruplarının çarpımı cinsinden yazacak şekilde ayrıştırmaktır. Bu tür ayrışımlara *grup ayrışımı* denir (Robinson, 2012). Literatürde karşımıza çıkan en yaygın Lie grubu ayrışım türleri Gauss, Cartan, Iwasawa gibi ayrışımlardır. Bir grubun farklı ayrışımları kullanılarak farklı kuantum sistemlere ulaşmak mümkündür. $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bahsi geçen ayrışımları kullanılarak ilgili kuantum sistemler incelenmiştir (Baran, Dalgic & Kerimov, 2001; Isik & Sezgin, 2018; Kerimov, 2009; Sezgin, Verdiyev & Verdiyev, 1998). Bu çalışmada $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun Gram ve genelleştirilmiş Cartan ayrışımları ele alınacaktır. Bunun için öncelikle grubun bazı bir parametreli alt gruplarını verelim:

$$K=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}:\ \theta\in[0,2\theta)\right\}, \tag{2.3}$$

$$A=\left\{\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}\right\}, \tag{2.4}$$

$$Z_{+}=\left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}:\ u\in\mathbb{R}\right\}, \tag{2.5}$$

$$Z_{-}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix}:\ v\in\mathbb{R}\right\}, \tag{2.6}$$

$$P=\left\{\begin{pmatrix}\cosh(t/2) & \sinh(t/2)\\ \sinh(t/2) & \cosh(t/2)\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}\right\}. \tag{2.7}$$

Gram Ayrışımı

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun Gram ayrışımı, yukarıda tanımlanan Z_{-}, A ve K alt grupları cinsinden $SL(2,\mathbb{R})=Z_AK$ şeklinde verilebilir (Zhelobenko, 1973). Bu durumda (2.3), (2.4), (2.6) bir parametreli alt grupları yardımıyla grubun bir g elemanı, $-\infty<v,t<\infty$,

$0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere

$$g(v,t,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

çarpımsal formunda verilebilir. $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun (2.2) tanımı ve (2.8) ayrışımı yardımıyla $\mathcal{H}$ hiperboloidinin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} v e^{t/2} \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2)\cosh(t/2), \\ x_2 &= -\frac{1}{2} v e^{t/2} \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\cosh(t/2), \\ x_3 &= \frac{1}{2} v e^{t/2} \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2)\sinh(t/2), \\ x_4 &= \frac{1}{2} v e^{t/2} \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\sinh(t/2), \end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde elde edilir. Bu parametrizasyon yardımıyla (g_{ij}) metrik tensörü

$$(g_{ij}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^t \\ 0 & -1 & 0 \\ e^t & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

olup uzunluk elemanı $ds^2 = \frac{1}{4}(2dvd\theta - dt^2 + d\theta^2)$ şeklinde bulunur.

Genelleştirilmiş Cartan Ayrışımı

Şimdi ise $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun genelleştirilmiş Cartan ayrışımını verelim. Bu ayrışıma göre, (2.3), (2.4), (2.7) bir parametreli alt grupları yardımıyla grubun bir elemanı

$$g(u,t,\theta) = \begin{pmatrix} e^{u/2} & 0 \\ 0 & e^{-u/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t/2) & \sinh(t/2) \\ \sinh(t/2) & \cosh(t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

şeklinde verilebilir (Kerimov, 2003; Raczka & Barut, 1986). Burada $-\infty < u,t < \infty$ ve $0 \leq \theta < 2\pi$'dir. (2.2) tanımı ve (2.11) ayrışımından $\mathcal{H}$ hiperboloidinin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} x_1 &= \cosh(t/2)\cos(\theta/2)\cosh(u/2) - \sinh(t/2)\sin(\theta/2)\sinh(u/2), \\ x_2 &= \cosh(t/2)\sin(\theta/2)\cosh(u/2) - \sinh(t/2)\cos(\theta/2)\sinh(u/2), \\ x_3 &= \cosh(t/2)\cos(\theta/2)\sinh(u/2) - \sinh(t/2)\sin(\theta/2)\cosh(u/2), \\ x_4 &= \cosh(t/2)\sin(\theta/2)\sinh(u/2) - \sinh(t/2)\cos(\theta/2)\cosh(u/2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir. Bu parametrizasyon için metrik tensör

$$(g_{ij}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sinh(t) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sinh(t) & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

olup uzunluk elemanı $ds^2 = \frac{1}{4}(-du^2 + 2\sinh(t)dud\theta - dt^2 + d\theta^2)$ şeklinde bulunur.

2.3 Homojen Uzayda Laplace-Beltrami Operatörlerinin Elde Edilişi

Bir yüzey üzerindeki Δ_{LB} Laplace-Beltrami operatörü, $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ ve $|g| = \det(g_{ij})$ olmak üzere

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial X_j}\right); \qquad i,j = 1,2,3$$

formunda verilir (Helgason, 1984). Gram ayrışımından elde edilen (2.9) parametrizasyonu ve (2.10) metrik tensörü kullanılarak $\mathcal{H}$ hiperboloidi üzerindeki Laplace-Beltrami operatörünün bir ifadesi

$$\Delta_{LB} = -4\left(e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial v \partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.14}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde genelleştirilmiş Cartan ayrışımından elde edilen (2.12) parametrizasyonu ve (2.13) metrik tensörü kullanılarak Laplace-Beltrami operatörünün bir diğer ifadesi

$$\Delta_{LB} = \left[\frac{1}{\cosh^2(t)}\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\sinh(t)\frac{\partial^2}{\partial u \partial \theta}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \tanh^2(t)\frac{\partial}{\partial t}\right] \tag{2.15}$$

olarak elde edilebilir.

2.4 İlgili Kuantum Sistemler ve Çözümleri

Şimdi yukarıda tanımladığımız grup ayrışımlarına göre elde edilen Laplace-Beltrami operatörleri ile oluşturulan kuantum sistemlerinin çözümlerinin bulalım. İlk olarak Gram ayrışımı yardımıyla oluşturulan (2.14) Laplace-Betrami operatörü ile tanımlanan

$$\Delta_{LB} f(v,t,\theta) = -\sigma(\sigma+1)f(v,t,\theta) \tag{2.16}$$

özdeğer özfonksiyon problemini ele alalım. Burada $-\sigma(\sigma+1)$ değeri, $SL(2,\mathbb{R})$ grubu için Laplace-Beltrami operatörünün özdeğeri ve $f(v,t,\theta)$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ hiperboloidi üzerinde tanımlı karesi integrallenebilir bir fonksiyondur (Klimyk & Vilenkin, 1993).

(2.16) özdeğer özfonksiyon problemi, n_1, n_2 tam sayı veya yarı tam sayılar olmak üzere f fonksiyonu

$$f(\nu, t, \theta) = A(t)e^{-in_1\nu}e^{-in_2\theta} \tag{2.17}$$

formunda seçilerek değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülebilir. Klasik Lie grupları için Laplace-Beltrami (veya Casimir) operatörünün özdeğer spektrumunun belirlenmesi ve homojen uzayın dolayısı ile de uzay üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun (2.17)'de olduğu gibi bir ayrışımı, ilgili grubun temsilleri yardımıyla belirlenir. Bu tür spektrum veya homojen uzay sentezleri, grup temsil teorisinin bir uygulama alanı olan harmonik analiz problemleridir. Bu bölümde $SL(2,\mathbb{R})$ grubu için kullandığımız sonuçlar gibi, klasik Lie gruplarının her sınıfı için ilgili sonuçlar bir çok farklı kaynakta sunulmuştur (Iachello, 2006; Klimyk & Vilenkin, 1991, 1993; Raczka & Barut, 1986). Sonuç olarak, (2.17) fonksiyonu kullanılarak (2.16) denklemi

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{dA}{dt} - \left[n_1^2e^{-2t} - 2n_1n_2e^{-t} + \sigma(\sigma+1)\right]A(t) = 0 \tag{2.18}$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemine indirgenir.

(2.14) Laplace-Beltrami operatörü ile elde edilen (2.16) özdeğer özfonksiyon problemi ile bir kuantum sistemi ilişkilendirebilmek için yukarıda elde ettiğimiz (2.18) denkleminde

$$A(t) = e^{-t/2}\psi(t) \tag{2.19}$$

dönüşümü yapalım. Buradan, $\hbar = 2m_0 = 1$ olmak üzere

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left[n_1^2e^{-2t} - 2n_1n_2e^{-t} + \left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^2\right]\psi(t) = 0 \tag{2.20}$$

tek boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemi elde edilir. Burada kuantum sisteminin potansiyeli ve enerji özdeğeri sırasıyla

$$V(t) = n_1^2e^{-2t} - 2n_1n_2e^{-t} \tag{2.21}$$

$$E = -\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.22}$$

şeklindedir. $n_1 = n_2$ seçilirse, (2.21) potansiyeli $D = n_1^2 = n_2^2$ derinliğine sahip Morse potansiyeli ifade eder. Morse potansiyeli, iki atomlu moleküllerin atomlar arası etkileşimini ifade eden uygun bir potansiyel modelidir. Bunun yanında bir atom ile bir yüzey arasındaki etkileşim gibi farklı etkileşimleri modellemek için de kullanılır (Flügge, 1999; Morse, 1929).

Kuantum fiziğinde Lie teorisi uygulamalarının ivme kazandığı ilk yıllarda, kompakt Lie gruplarının çeşitli kuantum sistemlerin bağlı durumlarının tanımlanmasında

kullanılabileceği kanıtlanmıştır. Kompakt grupların üniter temsilleri kesikli serileri sonuç verir ve bu seriler ilgili sistemin enerji spektrumunu negatif bırakır, yani $E < 0$. Bu sayede sistemin bağlı durumları verilebilir. Fakat ilgilenilen sistemlerin çoğunun kesikli spektrumların yanında sürekli spektrumlara da sahip olması, grup teorik metotların saçılma durumları için de kullanılabileceği fikrini doğurmuştur. İçerisinde ünlü Türk bilim adamı Feza Gürsey'in de bulunduğu Yale araştırma grubu, bazı tek boyutlu potansiyellere sahip kuantum sistemlerinin bağlı ve saçılma durumlarının, belirli kompakt Lie grupları ve bunların analitik devamları olan kompakt olmayan gruplarının üniter temsilleri ile ilişkili olduğunu ortaya koymuştur. Kompakt olmayan grupların üniter temsillerinin oluşturduğu sürekli seriler ilgili sistemin $E > 0$ enerji spektrumunu, dolayısıyla da saçılma durumlarını sonuç verir. İlerleyen yıllarda ise karışık spektrumlu sistemleri tanımlayan potansiyel grupları incelenmiştir. (Alhassid, Gürsey vd., 1983a, 1983b; Frank & Wolf, 1984; Wu & Alhassid, 1990).

Literatürde farklı Lie grupları ile ilişkili Morse potansiyeline sahip kuantum sistemler çalışılmış ve bu potansiyel için sistemin bağlı ve saçılma durumları ilgili grupların üniter temsilleri yardımıyla incelenmiştir (Alhassid, Gürsey vd., 1983a; Alhassid, Iachello & Gürsey, 1983; Baran vd., 2001; Sezgin vd., 1998). Kompakt olmayan $SL(2,\mathbb{R})$ Lie grubunun üniter temsillerinin kesikli ve sürekli seriler oluşturduğu bilinmektedir (Klimyk & Vilenkin, 1991). Bu temsillere karşılık gelen enerji spektrumu (Kerimov, 2009) makalesinde incelenmiş ve özel olarak grupla ilişkili farklı potansiyellerin bağlı ve saçılma durumlarının (2.22) enerjisindeki σ'nın hangi değerleri için elde edilebileceği verilmiştir. Şimdi bu sonuçlardan yararlanarak (2.20) Schrödinger denkleminin (2.21) Morse potansiyeli için bağlı ve saçılma durumlarını ayrı ayrı verelim.

Sistemin bağlı durumları için σ,

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, ..., -|n_1|, \quad n_1 \text{ yarı tamsayı ise} \\ \sigma &= -1, -2, ..., -|n_1|, \qquad n_1 \text{ tamsayı ise} \end{aligned} \tag{2.23}$$

değerlerini almalıdır. (2.22) enerji özdeğeri dikkate alındığında, gerçekten de bu değerler için sistemin negatif enerjiye sahip olduğu kolayca görülür. σ ve $-\sigma - 1$ değerleri $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun birbirine denk üniter indirgenemez temsillerini verir. Bu nedenle $-\sigma - 1$'in de yukarıdaki aynı değerler için, yani

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ..., |n_1| - 1, \quad n_1 \text{ yarı tamsayı ise} \\ \sigma &= 0, 1, ..., |n_1| - 1, \qquad n_1 \text{ tamsayı ise} \end{aligned}$$

değerleri için aynı negatif enerji değerlerini sonuç verdiğine dikkat edelim. Bu nedenle

yalnızca (2.23) değerlerini ele almak yeterlidir. Eğer (2.20) denkleminde σ'nın bu kesikli değerleri için sırasıyla $z = e^{-t}$ ve $\psi(z) = z^{\sigma+1/2}e^{-n_1 z}W(z)$ dönüşümleri yapılırsa

$$z\frac{d^2W}{dz^2} + 2\Big[(\sigma+1) - n_1 z\Big]\frac{dW}{dz} - 2n_1(\sigma+1-n_2)W(z) = 0 \tag{2.24}$$

konfluent hipergeometrik denklemine ulaşılır (Abramowitz, Stegun & Romer, 1988). (2.24) denkleminin genel çözümü, N_1 ve N_2 keyfi sabitler olmak üzere konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$W(z) = N_1\,{}_1F_1\big(\sigma+1-n_2;\ 2\sigma+2;\ 2n_1z\big) + N_2\,z^{-2\sigma-1}\,{}_1F_1\big(-\sigma-n_2;\ -2\sigma;\ 2n_1z\big) \tag{2.25}$$

şeklinde verilebilir.

Yapılan $\psi(z) = z^{\sigma+1/2}e^{-n_1 z}W(z)$ dönüşümü ve (2.25) çözümü dikkate alındığında, (2.23) kesikli σ değerleri için dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}\psi(z) = N_1\,z^{\sigma+1/2}e^{-n_1 z}\,{}_1F_1\big(\sigma+1-n_2;\ 2\sigma+2;\ 2n_1z\big)\\ + N_2\,z^{-\sigma-1/2}e^{-n_1 z}\,{}_1F_1\big(-\sigma-n_2;\ -2\sigma;\ 2n_1z\big)\end{aligned} \tag{2.26}$$

olarak elde edilir. Dalga fonksiyonunun $t \to \infty$ yani $z \to 0$ iken $\psi \to 0$ sınır koşulunu sağlanması gerekir. (2.26) fonksiyonunun ilk teriminde ilgili σ değerleri için z değişkeninin kuvveti negatif olduğundan $N_1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda (2.26) fonksiyonu, yani kuantum sisteminin çözümü

$$\psi(z) = N_2\,z^{-\sigma-1/2}e^{-n_1 z}\,{}_1F_1\big(-\sigma-n_2;\ -2\sigma;\ 2n_1z\big) \tag{2.27}$$

halini alır. Özel olarak (2.27) dalga fonksiyonu ve $z = e^{-t}$ dönüşümü yardımıyla (2.20) sisteminin bağlı durumu verilebilir. (2.27) dalga fonksiyonu için normalizasyon sabiti

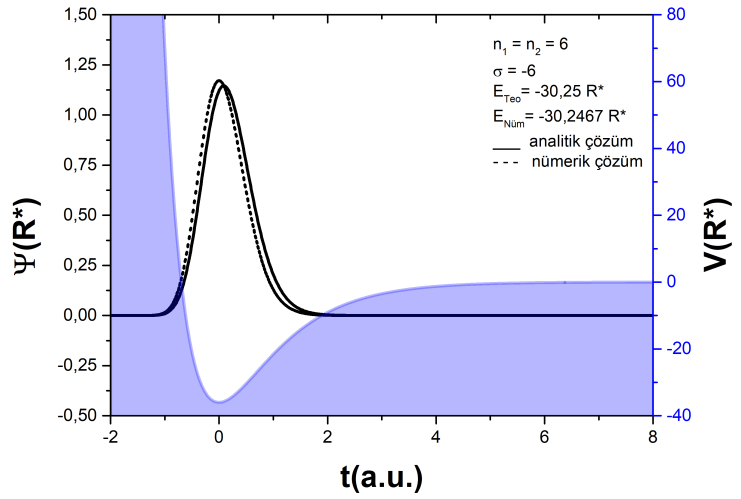
$$N_2 = \sqrt{\frac{(2n_1)^{-2\sigma}(n-\sigma-1)!}{\Gamma(-2\sigma)(-2\sigma-1)!(\sigma+n_2)!}}$$

şeklindedir. Sistemin analitik olarak elde edilen bağlı durum dalga fonksiyonu, nümerik çözümü ve (2.21) potansiyeli Şekil 2.1'de verilmiştir.

Diğer yandan, saçılma durumları için σ değerleri

$$\sigma = -\frac{1}{2} + i\rho, \qquad 0 < \rho < \infty$$

olmalıdır (Flügge, 1999; Kerimov, 2009). Gerçekten de bu değerler için sistemin (2.22) enerjisi sıfırdan büyük olur. Bu durumda sistemin saçılma durumuna karşılık gelen çö-



Şekil 2.1. (2.20) denkleminin analitik ve nümerik çözümü

zümü

$$\psi(z) = N_2^* \, z^{-i\rho} e^{-n_1 z} \, {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - n_2 - i\rho;\ 1 - 2i\rho;\ 2n_1 z\right)$$

fonksiyonu ile verilebilir. Burada N_2^* saçılma durumu için normalizasyon sabitidir.

İkinci olarak genelleştirilmiş Cartan ayrışımı yardımıyla oluşturulan (2.15) Laplace-Betrami operatörü ile tanımlanan (2.16) özdeğer özfonksiyon problemini ele alalım. Bu özdeğer özfonksiyon problemi, bu kez sırasıyla t, u, θ değişkenleri ve n_3, n_4 parametreleri için tanımlı (2.17) özfonksiyonu yardımıyla

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \tanh(t)\frac{dA}{dt} - \left[\frac{n_3^2 - n_4^2 - 2n_3 n_4 \sinh(t)}{\cosh^2(t)} + \sigma(\sigma+1)\right]A(t) = 0 \qquad (2.28)$$

adi diferansiyel denklemine indirgenebilir. (2.28) denkleminde, $k = \frac{-n_4 - in_3}{2}$, $l = \frac{-n_4 + in_3}{2}$ olmak üzere sırasıyla

$$A(t) = \left[1 + i\sinh(t)\right]^k \left[1 - i\sinh(t)\right]^l W(t) \qquad (2.29)$$

ve

$$z = \frac{1}{2}\left[1 - i\sinh(t)\right] \qquad (2.30)$$

dönüşümleri yapılırsa

$$z(z-1)\frac{d^2W}{dz^2} + \left[-n_4 + 1 + in_3 - 2(1-n_4)z\right]\frac{dW}{dz} - (n_4+\sigma)(n_4+\sigma-1)W(z) = 0 \qquad (2.31)$$

formundaki hipergeometrik denklem elde edilir (Abramowitz vd., 1988). Bu denklemin

genel çözümü $a=-n_4-\sigma$, $b=-n_4-\sigma+1$ ve $c=-n_4+1+in_3$ olmak üzere

$$W(z)=N_3\ F(a,b;c;z)+N_4\ z^{1-c}F(1+a-c,1+b-c;2-c;z) \tag{2.32}$$

şeklinde verilir. Burada N_3, N_4 keyfi sabitlerdir. Denklemlerde sadeliği gözeterek bu lineer bağımsız çözümlerden ilkini ele alalım. Yapılan (2.29)-(2.30) dönüşümleri dikkate alınırsa (2.28) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}A(t)=N_3&\Big[1+i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4-in_3}{2}}\Big[1-i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+in_3}{2}}\\&\times F\left(-n_4-\sigma,-n_4-\sigma+1;-n_4+1+in_3;\frac{1}{2}\Big[1-i\sinh(t)\Big]\right)\end{aligned} \tag{2.33}$$

halini alır. Şimdi (2.28) denklemini bir Schrödinger denklemine indirgeyelim. Bu denklemde

$$A(t)=[\cosh(t)]^{-1/2}\psi(t) \tag{2.34}$$

dönüşümü yapılırsa

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2}+\left[\frac{n_3^2-n_4^2+1/4-2n_3n_4\sinh(t)}{\cosh^2(t)}+\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)^2\right]\psi(t)=0 \tag{2.35}$$

bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemi elde edilir. Burada ilgili fiziksel sistemin potansiyeli

$$V(t) \;=\; \frac{n_3^2-n_4^2+1/4-2n_3n_4\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \tag{2.36}$$

hiperbolik Scarf tipi potansiyel olup enerji özdeğeri

$$E \;=\; -\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.37}$$

formundadır. Scarf tipi potansiyeller süper simetrik kuantum mekaniğinin sunduğu tamamen çözülebilir potansiyellerden biridir. Bunun yanında yeni bir potansiyel sınıfı olan deforme potansiyeller üzerine yapılan araştırmalarda da Scarf tipi potansiyeller çalışılmaktadır (Bagrov & Gitman, 1990; Eğrifes, Demirhan & Büyükkılıç, 2000; Wei & Dong, 2011).

(2.36) potansiyeli incelendiğinde, bu fiziksel sistemin de (2.23)'te verilen aynı σ değerleri için hem bağlı hem de saçılma durumlarına sahip olduğu gözlenir. Bu durumda sistemin bağlı durumunu temsil eden çözüm, Schrödinger denklemini çözmeye gerek

kalmadan (2.33) fonksiyonu ve (2.34) dönüşümünden

$$\psi(t) = N_3\Big[1+i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2-in_3}{2}}\Big[1-i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2+in_3}{2}} \times F\left(-n_4-\sigma,-n_4-\sigma+1;-n_4+1+in_3;\frac{1}{2}\Big[1-i\sinh(t)\Big]\right) \tag{2.38}$$

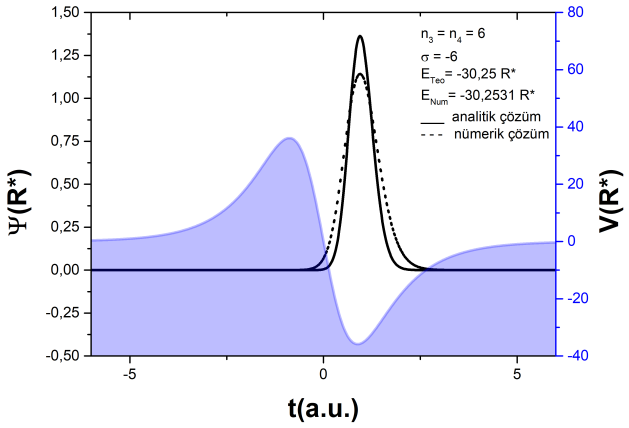
şeklinde elde edilir. N_3 normalizasyon sabitini elde etmek için bu dalga fonksiyonu $P_n(x;\nu,N)$ pseudo-Jacobi polinomları cinsinden

$$\psi(t) = N_3\Big[1+i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2-in_3}{2}}\Big[1-i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2+in_3}{2}} \times P_{n_4+\sigma}(\sinh(t);n_3,n_4-1)$$

şeklinde yazılabilir (Jordaan & Toókos, 2014; Koekoek vd., 2010). Buradan N_3 normalizasyon sabiti

$$N_3 = \sqrt{\frac{2^{2n_4-2}|(1-n_4+in_3)_{n_4+\sigma}|^2\Gamma(n_4-\sigma)|\Gamma(-\sigma+in_3)|^2}{\pi[(1-n_4+\sigma)_{n_4+\sigma}]^2\Gamma(-2\sigma)\Gamma(-2\sigma-1)(n_4+\sigma)!}}$$

olarak bulunabilir. Kuantum sisteminin bağlı durum dalga fonksiyonu, nümerik çözümü ve (2.36) potansiyel fonksiyonunun grafiği Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2. (2.35) denkleminin analitik ve nümerik çözümü

Sistemin saçılma durumuna karşılık gelen çözüm ise, N_3^* normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\psi(t) = N_3^*\Big[1+i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2-in_3}{2}}\Big[1-i\sinh(t)\Big]^{\frac{-n_4+1/2+in_3}{2}} \times P_{n_4-1/2+i\rho}(\sinh(t);n_3,n_4-1)$$

şeklinde verilebilir.

BÖLÜM 3

SO(3, 2) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM SİSTEMLER

$SO(p,q)$ özel pseudo-ortogonal Lie grupları fizikte büyük öneme sahip olup grup teorik metodun kullanıldığı birçok makalenin konusu olmuşlardır (Baran vd., 2001; Kerimov & Seckin-Gorgun, 2002; Kerimov & Sezgin, 1999; Sezgin & Verdiyev, 2004; Sezgin, 2012; Wickramasekara, 1997). Örneğin, $SO(3,1)$ grubu Minkowski uzay-zamanının Lorentz dönüşümleri grubudur. $SO(4,2)$ grubu ise Maxwell denklemlerinin simetri grubudur.

3.1 SO(3, 2) Lie Grubu

Özel olarak $p=3,\ q=2$ olmak üzere de-Sitter grubu olarak adlandırılan $SO(3,2)$ grubu kuantum mekaniğinden yerçekimi teorilerine kadar fiziğin birçok dalında simetri grubu olarak karşımıza çıkar. $SO(4,1)$ ve $SO(3,2)$ olmak üzere iki tane de-Sitter grubu vardır. Bu nedenle $SO(3,2)$ grubuna genellikle $3+2$ de-Sitter grubu denmektedir. Bu grup, $I=\mathtt{diag}(-1,-1,-1,1,1)$ olmak üzere

$$SO(3,2)=\left\{g\in GL(5,\mathbb{R})\;\middle|\; g^{T}Ig=gIg^{T}=I,\ \det(g)=1\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir başka ifadeyle grubun elemanları, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5_{3,2}$ olmak üzere 5 boyutlu pseudo-Euclidean uzayında $[x,x]=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2$ bilineer fomunu invaryant bırakan, yani $x'=gx$ şeklindeki lineer dönüşümlerden oluşur. Öte yandan grubun ilgili $\mathfrak{so}(3,2)$ Lie cebiri

$$\mathfrak{so}(3,2)=\left\{X\in\mathfrak{gl}(5,\mathbb{R})\;\middle|\; X^{T}I+IX=0,\ tr(X)=0\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathfrak{gl}(5,\mathbb{R})$, $GL(5,\mathbb{R})$ grubunun Lie cebiri olup tüm 5×5'lik reel matrislerden oluşur.

$SO(3,2)$ grubunun, adi dönmeler içeren bir parametreli alt gruplarını $1 \leq i < j \leq 3$ veya $4 \leq i < j \leq 5$ olmak üzere $\{g_{ij}(t)\}$ kümesi ve hiperbolik dönmeler içeren bir parametreli alt gruplarını ise $1 \leq i \leq 3 < j \leq 5$ olmak üzere $\{g'_{ij}(t)\}$ kümesi ile ifade edelim. Bu durumda $\theta, \varphi, \psi, \phi \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $g_{12}(\theta),\ g_{13}(\varphi),\ g_{23}(\psi),\ g_{45}(\phi)$ adi dönmeleri ve $\alpha, \beta, \tau, \mu, \nu, t \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $g'_{14}(\alpha),\ g'_{15}(\beta),\ g'_{24}(\tau),\ g'_{25}(\mu),\ g'_{34}(\nu),\ g'_{35}(t)$ hiperbolik dönmeleri ifade eder. Adi ve hiperbolik dönmeleri içeren alt grupların tanjant matrisleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \left.\frac{dg_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0} &= I_{ij} = e_{ij} - e_{ji} \\ \left.\frac{dg'_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0} &= I'_{ij} = e_{ij} + e_{ji} \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde verilir. Burada e_{ij}'ler elemanları $(e_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$ olan matrislerdir. Burada δ_{ij} Kronecker delta sembolüdür. Bu tanjant matrisleri $\mathfrak{so}(3,2)$ Lie cebiri için bir taban oluşturur.

Ele alınan problemin amacına yönelik olarak $SO(p,q)$ pseudo-ortogonal grupları için farklı simetrik uzaylar tanımlamak mümkündür. Rankı bir olan bir simetrik uzay elde etmek için $\mathbb{R}^5_{3,2}$'de $e_5 = (0, ..., 0, 1)$ noktasını seçelim. $SO(3,2)$ grubunun bu noktayı sabit bırakan alt grubu $SO(3,1)$ grubuna izomorftur. Bu nedenle $SO(3,2)/SO(3,1)$ bölüm uzayı, rankı bir olan bir pseudo-Riemann simetrik uzayı oluşturur. Bu uzay, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5_{3,2}$ olmak üzere $\mathcal{H} : -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$ hiperboloidi formunda tanımlanabilir. $\mathcal{H}$ uzayı üzerinde bir invaryant $d\mu(x)$ ölçümü vardır ve $dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 / |x_5|$ ile verilir. Bu ölçüm yardımıyla $\mathcal{H}$ uzayında tanımlı karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayını $L^2(\mathcal{H}, \mu)$ ile ifade edelim. Bu durumda

$$T(g)f(x) = f(xg), \quad g \in SO(3,2),\ x \in \mathcal{H} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan kuasi regüler temsil, $SO(3,2)$ grubunun $L^2(\mathcal{H}, \mu)$ uzayı üzerinde üniter bir temsilini tanımlar. Kuasi regüler temsiller üniter temsiller olduğundan indirgenemez temsillerin direkt toplamları şeklinde yazılabilirler (Klimyk & Vilenkin, 1993; Raczka & Barut, 1986).

Grup temsilleri ile ilişkili tensör operatörleri, özellikle de tensör operatörlerinin en basit formları olan invaryant operatörler kuantum teorisinde önemli bir rol oynar. G, fiziksel bir sistemin bir simetri grubu olmak üzere, G ile ilişkili invaryant operatörlerin spektrumu bu sistemin kuantum sayılarını belirler. Örneğin, açısal momentum, enerji-momentum dörtlü vektörü, spin, alanlar ve akımlar gibi fiziksel nicelikler bu tür operatörlerle tanımlanır. Bu sayede kuantum teorisindeki çoğu fiziksel olayın tanımı, belirli invaryant operatörlerin özelliklerinin analizine indirgenir.

İnvaryant operatörlerin fiziksel uygulamalardaki önemi sebebiyle, bir G grubunun olası tüm invaryant operatörlerinin bilinmesi önemlidir. Bu tür invaryant operatörler, ilgili $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ evrensel enveloping cebirini oluşturur. Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin n boyutlu bir V vektör uzayı üzerindeki bir T temsili, $\mathfrak{g}$'nin tensör cebirinde

$$\tilde{T}(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n) = T(x_1)T(x_2)...T(x_n)$$

şeklinde bir temsil verir. Bu sayede $\mathfrak{g}$'nin evrensel enveloping cebiri için de $\tilde{T}$ temsili ile ilişkili bir $\hat{T}$ bir temsil tanımlanabilir (Raczka & Barut, 1986).

3.2 Simetrik Uzayda Casimir Operatörlerin Elde Edilişi

$\mathbf{C}$ Casimir operatörü ilgili invaryant operatörlerin tümü ile komüte olan bir operatördür. Bu nedenle Casimir operatör $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ evrensel enveloping cebirinin merkezinin bir elemanıdır, yani

$$[\mathbf{C}, U] = 0, \quad \forall U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Bu durum, Casimir operatörün $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin her elemanı ile komüte olması sonucunu doğurur, yani

$$[\mathbf{C}, X] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Grup temsil teorisinde, Casimir operatörleri önemli bir rol oynar. Bu özelliği temsil teorisinin önemli teoremlerinden biri olan Schur Lemma'sından gelir. Lemmanın bir sonucu olarak, eğer T indirgenemez bir temsil ise $\mathbf{C}$ birim operatörün bir katına eşittir, yani $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Bu λ sayısı, hem T temsilinin seçimine hem de $\mathbf{C}$ Casimir operatörüne bağlı olup Casimir operatörün spektrumunu ifade eder. Eğer T temsili indirgenemez değil fakat tamamen indirgenebilir bir temsil ise bu durumda Casimir operatörü T temsilini indirgenemez bileşenlerine ayırmada kullanılır. Bu özelliği sebebiyle, Casmir operatörleri temsillerin sınıflandırılmasında önemli bir yere sahiptir.

Casimir operatörünün simetrik uzaylar üzerinde çeşitli ayrıcalıkları vardır. Eğer S rankı bir olan bir simetrik uzay ise, G-invaryant diferansiyel operatörlerinin cebiri ikinci dereceden Casimir operatörü tarafından üretilebilir. Bu, G grubunun her invaryant operatörünün ikinci dereceden Casimir operatörünün içinde yer aldığı anlamına gelir. Dahası, böyle bir durumda S uzayının uygun bir koordinatında elde edilen Casimir operatörü Laplace-Beltrami operatörüne denktir. Homojen uzaylar üzerindeki bu tür sonuçlar, yukarıda değindiğimiz Casimir operatörün temsil teorisi sonuçları ile birleştirilerek invaryant operatörlerin spektrumun analizi üzerine çalışılmıştır. Harmonik analizin araştırma alanlarından biri olan bu konu, grup temsillerinin kuantum fiziği uygulamalarında ilgi çeken konulardan birisidir. (Klimyk & Vilenkin, 1991, 1993; Raczka & Barut, 1986).

Bölüm 2'de değindiğimiz üzere, bir kuantum sistem ile bir Lie grubu arasında farklı ilişkiler kurulabilir. Bu bölümde ele alacağımız grup teorik yaklaşımda, bu ilişki ilgilenilen sistemin Hamiltonyen'inin Lie grubunun invaryant operatörleri cinsinden ifade edilmesine dayanır ve H sistemin Hamiltonyen'i, $\mathbf{C}$ ilgili Lie grubunun Casimir operatörü olmak üzere

$$H = f(\mathbf{C})|_S$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $|_S$, grubun temsil uzayının bir S alt uzayına kısıtlamasını ifade eder. Ayrıca $\mathbf{C}$ operatörü grubun ikinci dereceden Casimir operatörü ise H genellikle $\mathbf{C}$'nin lineer bir fonksiyonu olur. Böyle bir ilişkinin varlığında, G grubu farklı potansiyellere sahip kuantum sistemleri ailesinin sabit enerji durumlarını tanımlar. Bu nedenle G grubu bazen *potansiyel grubu* (veya ilgili $\mathfrak{g}$ Lie cebiri için ise potansiyel cebiri) olarak da adlandırılır. Potansiyel grubunun Casimir operatörü yardımıyla, birçok kuantum mekaniği problemi cebirsel olarak çözülebilmiştir (Alhassid, Gürsey vd., 1983a; Baran vd., 2001; Frank & Wolf, 1984; Kerimov, 2009; Sezgin, 2012). Bu bölümde Casimir operatörü yardımıyla $SO(3,2)$ Lie grubuna karşılık gelen iki Hamiltonyen sistem inceleyeceğiz.

Casimir operatör, ilgili Lie grubunun bir parametreli alt gruplarının sonsuz küçük operatörleri olan Lie cebiri üreteçleri yardımıyla oluşturulur. Bir parametreli $\{g_{ij}(t)\}$ alt gruplarının bir T temsilinin J_{ij} sonsuz küçük operatörleri

$$J_{ij} = \frac{d}{dt} T\left(g_{ij}(t)\right)\Big|_{t=0} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. $\{g_{ij}(t)\}$ matrisleri kullanılarak (3.2)-(3.3) tanımları yardımıyla $SO(3,2)$ grubunun T temsilinin adi dönme ve hiperbolik dönmelere karşılık gelen sonsuz küçük operatörleri

$$\begin{aligned}
J_{12} &= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad J_{13} = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \\
J_{23} &= -x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad J_{45} = -x_5\frac{\partial}{\partial x_4}, \\
J_{14} &= x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad J_{15} = x_5\frac{\partial}{\partial x_1}, \\
J_{24} &= x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad J_{25} = x_5\frac{\partial}{\partial x_2}, \\
J_{34} &= x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad J_{35} = x_5\frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilir. $i = 1,2,3$ için $I_i := \epsilon_{ijk}J_{jk}$ ve $S_i := J_{i4}$, $j = 1,2,3,4$ için ise $K_j := J_{j5}$

tanımlamaları yapılırsa (3.4) operatörleri

$$\begin{aligned} [I_i, I_j] &= -\epsilon_{ijk} I_k, \qquad [I_i, S_j] = -\epsilon_{ijk} S_k, \qquad [S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} I_k, \\ [I_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} K_k, \qquad [S_i, K_j] = \delta_{ij} K_4, \qquad [S_i, K_4] = K_i \end{aligned} \tag{3.5}$$

komütasyon bağıntılarını sağlar. (3.5)'te belirtilmeyen diğer komütasyon bağıntılarının tümü sıfır olup e_{ijk} Levi-Civita sembolüdür.

$SO(3,2)$ grubunun rankı iki olduğundan biri ikinci dereceden diğeri ise dördüncü dereceden olmak üzere iki farklı Casimir operatörü vardır (Wickramasekara, 1997). $\mathcal{H} = SO(3,2)/SO(3,1)$ uzayının rankı bir olduğundan ikinci dereceden Casimir operatörü $SO(3,2)$ grubunun her invaryant operatörünü içerir. Fiziksel uygulamalardaki önemini gözeterek grubun ikinci dereceden Casimir operatörünü ele alacağız. $SO(3,2)$ grubunun ikinci derceden Casimir operatörü, J_{ij}'ler $\mathfrak{so}(3,2)$ Lie cebirin üreteçleri olmak üzere

$$\mathbf{C} = (J_{12}^2 + J_{13}^2 + J_{23}^2 + J_{45}^2) - (J_{14}^2 + J_{15}^2 + J_{24}^2 + J_{25}^2 + J_{34}^2 + J_{35}^2) \tag{3.6}$$

formunda verilir (Klimyk & Vilenkin, 1993; Sezgin, 2012).

Bir önceki bölümde Laplace-Beltrami operatörü ile yaptığımız gibi, bu bölümde $SO(3,2)$ grubunun (3.6) Casimir operatörünü $\mathcal{H}$ simetrik uzayının uygun koordinatlarında açık bir şekilde elde edip ilgili Hamiltonyen sistemler ile ilişkilendireceğiz. Bunun için $\mathcal{H}$ hiperboloidinin küresel ve horiküresel koordinatlarda olmak üzere iki farklı parametrizasyonunu ele alacağız.

3.3 İlgili Kuantum Sistemler ve Çözümleri

İlk olarak $\mathcal{H}$ hiperboloidinin küresel koordinatlardaki

$$\begin{aligned} x_1 &= \sinh\alpha \cosh\beta \sin\theta \sin\phi, \quad x_2 = \sinh\alpha \cosh\beta \sin\theta \cos\phi, \\ x_3 &= \sinh\alpha \cosh\beta \cos\theta, \quad x_4 = \sinh\alpha \sinh\beta, \quad x_5 = \cosh\alpha \end{aligned} \tag{3.7}$$

parametrizasyonunu ele alalım. Burada $0 < \alpha < \infty$, $-\infty < \beta < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ 'dir. (3.4) sonsuz küçük operatörlerinin (3.7) parametrizasyonuna göre ifadesi

$$
\begin{aligned}
J_{12} &= -\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad J_{13} = -\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi},\\
J_{23} &= -\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad J_{45} = \sinh\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \coth\alpha\cosh\beta\frac{\partial}{\partial\beta},\\
J_{14} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\beta} + \tanh\beta\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\tanh\beta\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\\
J_{15} &= \sin\theta\sin\phi\left(\cosh\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \coth\alpha\sinh\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{\coth\alpha}{\cosh\beta}\left(\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
J_{24} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\beta} + \tanh\beta\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\tanh\beta\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\\
J_{25} &= \sin\theta\cos\phi\left(\cosh\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \coth\alpha\sinh\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{\coth\alpha}{\cosh\beta}\left(\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\
J_{34} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial\beta} - \tanh\beta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta},\\
J_{35} &= \cosh\beta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \coth\alpha\sinh\beta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\coth\alpha\sin\theta}{\cosh\beta}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

olarak elde edilir. Bu sonsuz küçük operatörleri yardımıyla (3.6) Casimir operatörü

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 3\coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} \qquad (3.9)\\
&+\frac{1}{\sinh^2\alpha}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 2\tanh\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{\cosh^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

Schur Lemma'sının bir sonucu olarak, (3.2) kuasi regüler temsili tamamen indirgenebilir olduğundan (3.3) Casimir operatörü birim operatörün kompleks bir katına denktir. Bu sayıya operatörün özdeğeri denir. $SO(3,2)$ grubu için Casimir operatörün özdeğeri $\sigma \in \mathbb{C}$ olmak üzere $-\sigma(\sigma+3)$ formundadır (Klimyk & Vilenkin, 1993). Buradan (3.3) operatörü kullanılarak

$$\mathbf{C}f(x) = -\sigma(\sigma+3)f(x) \tag{3.10}$$

şeklinde bir özdeğer özfonksiyon problemi oluşturulabilir. Bir önceki bölümde olduğu gibi böyle bir problemin çözümü

$$f(\alpha,\beta,\theta,\phi) = A(\alpha)B(\beta)T(\theta)e^{-im\phi} \tag{3.11}$$

formunda bir çözüm önerilerek değişkenlerine ayırma metodu yardımıyla bulunabilir.

Burada m tam sayı veya yarı tamsayı değerler alır. Böylece (3.10) denklemi

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} + 3\coth\alpha\frac{dA}{d\alpha} - \frac{k(k+2)}{\sinh^2\alpha}A = \sigma(\sigma+3)A \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2B}{d\beta^2} + 2\tanh\beta\frac{dB}{d\beta} + \frac{l(l+1)}{\cosh^2\beta}A = k(k+2)B \tag{3.13}$$

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dT}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}T = -l(l+1)T \tag{3.14}$$

formundaki üç adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada $k, l \in \mathbb{C}$ olmak üzere $k(k+2)$ ve $l(l+1)$ ayırma sabitleridir. $SO(3,2) \supset SO(3,1) \supset SO(3)$ alt grup zinciri göz önüne alındığında, bu sabitlerin sırasıyla $SO(3,1)$ ve $SO(3)$ alt gruplarının Casimir operatörlerine karşılık gelen özdeğerler olduğunu not edelim.

Şimdi (3.12) diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemde ilk olarak $A(\alpha) = (\sinh\alpha)^k P(\alpha)$ dönüşümü ve daha sonra ise $z = \cosh^2\alpha$ değişken dönüşümü yapılırsa, denklem

$$z(1-z)\frac{d^2P}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} - \left(k+\frac{5}{2}\right)z\right]\frac{dP}{dz} - \frac{(k-\sigma)(k+\sigma+3)}{4}P(z) = 0 \tag{3.15}$$

hipergeometrik denklemi halini alır. Bu denkleminin genel çözümü, $a = \frac{k-\sigma}{2}$, $b = \frac{k+\sigma+3}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$P(z) = N_1\, F(a,b;c;z) + N_2\, z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z) \tag{3.16}$$

formundadır (Abramowitz vd., 1988). Burada N_1, N_2 keyfi sabitlerdir. Genel çözümü oluşturan iki lineer bağımsız çözüm, bir önceki bölümde yapıldığı gibi ayrı ayrı incelenebilir. İşlemlerde sadelik açısından ilk çözüm seçilirse, yapılan dönüşümler göz önünde bulundurularak (3.12) denkleminin çözümü

$$A(\alpha) = N_1(\sinh\alpha)^k\, F\left(\frac{k-\sigma}{2}, \frac{k+\sigma+3}{2}; \frac{1}{2}; \cosh^2\alpha\right) \tag{3.17}$$

formunda elde edilir.

Şimdi elde edilen (3.3) Casimir operatörünü bir kuantum sistemi ile ilişkilendirmek için (3.12) denkleminde $A(\alpha) = (\sinh\alpha)^{-3/2}\psi(\alpha)$ dönüşümü yapalım. Bu durumda denklem

$$-\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + \left[\frac{(k+1/2)(k+3/2)}{\sinh^2\alpha} + \left(\sigma+\frac{3}{2}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{3.18}$$

formundaki zamandan bağımsız tek boyutlu Schrödinger denklemine indirgenir ($\hbar =$

$2m_0 = 1$). Burada ilgili kuantum sistemin potansiyeli

$$V(\alpha) = \frac{(k+1/2)(k+3/2)}{\sinh^2 \alpha} \tag{3.19}$$

hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli olup enerji özdeğeri

$$E = -\left(\sigma + \frac{3}{2}\right)^2 \tag{3.20}$$

şeklindedir. (3.17) çözümü dikkate alındığında (3.18) Schrödinger denkleminin çözümü, N_1 normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\psi(\alpha) = N_1 \sinh^{k+3/2} \alpha F\left(\frac{k-\sigma}{2}, \frac{k+\sigma+3}{2}; \frac{1}{2}; \cosh^2 \alpha\right)$$

şeklinde bulunur. Trigonometrik, hiperbolik veya modifiye gibi farklı türden Pöschl-Teller potansiyelleri grup teorik metot uygulamalarında en sık karşımıza çıkan potansiyellerdir. Pöschl-Teller potansiyelleri genel olarak çok atomlu moleküllerin salınımını modellemede kullanılırlar (Flügge, 1999; Pöschl & Teller, 1933; Wu & Alhassid, 1990). Burada $SO(3,2)$ grubunun üniter temsillerinin sürekli ve kesikli serileri yardımı ile belirlenen σ değerleri için (3.19) hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli incelenerek (3.18) Schrödinger denkleminin bağlı ve/veya saçılma durumları incelenebilir.

$SO(3,1)$ ve $SO(3)$ alt gruplarına karşılık gelen (3.13) ve (3.14) denklemleri de benzer işlemlerle ilgili kuantum sistemlere indirgenebilir, bağlı ve/veya saçılma durumları incelenebilir. Literatürde bu gruplara dair birçok çalışma olduğundan, bu çalışmada (3.13) ve (3.14) denklemleri ile ilişkili kuantum sistemleri incelenmemiştir (Lüdeling, 2010; Raczka & Barut, 1986; Sezgin, Uysal & Verdiyev, 2001; Vvedensky, 2001).

İkinci olarak grubun $\mathcal{H}$ simetrik uzayının horiküresel koordinatlardaki

$$\begin{gathered} x_1 = \sinh\alpha + \frac{1}{2}t^2 e^{\alpha}, \qquad x_2 = t_1 e^{\alpha}, \qquad x_3 = t_2 e^{\alpha}, \\ x_4 = \cosh\alpha - \frac{1}{2}t^2 e^{\alpha}, \qquad x_5 = t_3 e^{\alpha} \end{gathered} \tag{3.21}$$

parametrizasyonunu ele alalım (Klimyk & Vilenkin, 1993). Burada $-\infty < \alpha, t_1, t_2, t_3 < \infty$ ve $t^2 = -t_1^2 - t_2^2 + t_3^2$ 'tür. (3.4) sonsuz küçük operatörlerinin ifadeleri (3.21) parametrizasyonu cinsinden

$$
\begin{aligned}
J_{12} &= -t_1\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left[e^{-\alpha}\sinh\alpha + \frac{1}{2}\left(t_1^2 - t_2^2 + t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_1} + t_1t_2\frac{\partial}{\partial t_2} + t_1t_3\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{13} &= -t_2\frac{\partial}{\partial\alpha} + t_1t_2\frac{\partial}{\partial t_1} + \left[e^{-\alpha}\sinh\alpha + \frac{1}{2}\left(-t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_2} + t_2t_3\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{23} &= -t_2\frac{\partial}{\partial t_1} + t_1\frac{\partial}{\partial t_2},\\
J_{45} &= -t_3\frac{\partial}{\partial\alpha} + t_1t_3\frac{\partial}{\partial t_1} + t_2t_3\frac{\partial}{\partial t_2} + \left[e^{-\alpha}\cosh\alpha + \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{14} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} - t_1\frac{\partial}{\partial t_1} - t_2\frac{\partial}{\partial t_2} - t_3\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{15} &= t_3\frac{\partial}{\partial\alpha} - t_1t_3\frac{\partial}{\partial t_1} - t_2t_3\frac{\partial}{\partial t_2} + \left[e^{-\alpha}\sinh\alpha - \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{24} &= t_1\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left[e^{-\alpha}\cosh\alpha - \frac{1}{2}\left(t_1^2 - t_2^2 + t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_1} - t_1t_2\frac{\partial}{\partial t_2} - t_1t_3\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{25} &= t_3\frac{\partial}{\partial t_1} + t_1\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{34} &= t_2\frac{\partial}{\partial\alpha} - t_1t_2\frac{\partial}{\partial t_1} + \left[e^{-\alpha}\cosh\alpha + \frac{1}{2}\left(t_1^2 - t_2^2 - t_3^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial t_2} - t_2t_3\frac{\partial}{\partial t_3},\\
J_{35} &= t_3\frac{\partial}{\partial t_2} + t_2\frac{\partial}{\partial t_3}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

olarak elde edilir. Bu sonsuz küçük operatörler yardımıyla, (3.6) Casimir operatörünün ifadesi

$$
\mathbf{C} = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 3\frac{\partial}{\partial\alpha} - e^{-2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_3^2}\right) \tag{3.23}
$$

şeklinde bulunur. Bu Casimir operatörü yardımıyla oluşturulan

$$
\mathbf{C}f(\alpha, t_1, t_2, t_3) = -\sigma(\sigma+3)f(\alpha, t_1, t_2, t_3)
$$

özdeğer özfonksiyon problemini çözelim. Bu denklemi

$$
f(\alpha, t_1, t_2, t_3) = A(\alpha)e^{i\varphi t_1}e^{i\mu t_2}e^{i\eta t_3} \tag{3.24}
$$

formunda bir çözüm önererek değişkenlerine ayırma metodunu yardımıyla çözelim. Bu metoda göre denklem

$$
\frac{d^2A}{d\alpha^2} + 3\frac{dA}{d\alpha} - (\varphi^2 + \mu^2 - \eta^2)e^{-2\alpha}A = \sigma(\sigma+3)A \tag{3.25}
$$

adi diferansiyel denklemine indirgenir. (3.25) denkleminde $A(\alpha) = e^{-3\alpha/2}\psi(\alpha)$ dönüşümü

yapılırsa

$$-\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}+\left[(\varphi^2+\mu^2-\eta^2)e^{-2\alpha}+\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)^2\right]\psi=0 \tag{3.26}$$

zamandan bağımsız tek boyutlu Schrödinger denklemi elde edilir. Burada ilgili kuantum sistemin potansiyeli

$$V(\alpha)=(\varphi^2+\mu^2-\eta^2)e^{-2\alpha} \tag{3.27}$$

formundaki genelleştirilmiş Toda potansiyeli ve sistemin enerji özdeğeri

$$E=-\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)^2 \tag{3.28}$$

formundadır. $V(x)=\frac{a}{b}e^{-bx}+ax$ genel formuna sahip Toda potansiyeli lineer olmayan bir kuvvet altında etkileşen parçacıklar zincirinin titreşimini modeller. Yalnızca eksponensiyel terimi içeren genelleştirilmiş Toda potansiyeline sahip n parçacıklı klasik ve kuantum integrallenebilir sistemler Olshanetsky ve Peremolov tarafından çalışılmıştır (M. Olshanetsky & Perelomov, 1979; M. A. Olshanetsky & Perelomov, 1983; Sezgin vd., 1998). (3.26) denkleminde $z=e^{-\alpha}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$z^2\frac{d^2\psi}{dz^2}+z\frac{d\pi}{dz}+\left[(\eta^2-\varphi^2-\mu^2)z^2-\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)^2\right]\psi=0 \tag{3.29}$$

Bessel denklemi elde edilir (Abramowitz vd., 1988). Bu durumda, $z=e^{-\alpha}$ dönüşümü de dikkate alınır ve (3.26) Schrödinger denkleminin çözümü Bessel fonksiyonu cinsinden yazılırsa, kuantum sistemin çözümü

$$\psi(\alpha)=N_3\,J_{\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)}\left(\sqrt{\eta^2-\varphi^2-\mu^2}e^{-\alpha}\right) \tag{3.30}$$

şeklinde bulunur. Burada N_3 normalizasyon sabitidir. Benzer şekilde bu sistem için de $SO(3,2)$ grubunun üniter temsillerinin sürekli ve kesikli serileri ile belirlenen σ değerleri için (3.27) genelleştirilmiş Toda potansiyeli incelenerek (3.26) Schrödinger denkleminin bağlı ve/veya saçılma durumları incelenebilir.

BÖLÜM 4

SU(3) GRUBU İLE İLİŞKİLİ KUANTUM KONTROL PROBLEMİ

Matematiksel kontrol teorisi, genellikle fizik ve mühendislikte karşılaşılan dinamik sistemlerin altında yatan problem ve teorilerin analiz ve tasarımını ele alan uygulama odaklı bir matematik alanıdır. Bir nesneyi veya sistemi kontrol etmek, istenen bir hedefe ulaşmak için nesne veya sistemin davranışını etkilemek demektir. Kontrol teorisinin temelleri, makineleri, gemileri, uçakları, roketleri veya uyduları kontrol etme amacı ile ortaya çıkmıştır. 1930'larda, Bell Telephone Laboratories'de çalışan araştırmacılar, elektrik devreleri için kararlılık ve uygun yanıtı elde etme amacı ile geri bildirim amplifikatörleri geliştirmiştir. Bilgisayarların yükselişi, kimya ve petrol endüstrilerinde kontrolörlerin uygulanmasına yol açmıştır. 1950'lerde ise kontrol teorisi hem fizik ve mühendislikte hem de matematikte önemli bir çalışma alanı haline gelmiş ve çok değişkenli, zamana bağlı sistemleri ele almada güçlü teknikler sağlamıştır. Kontrol teorisi, gelişen teknoloji ile ilerlemeye devam etmekte ve modern bilimde oldukça gelişmiş bir disiplin haline gelmektedir.

Dinamikleri bir veya birden fazla kontrol fonksiyonuna bağlı olan kuantum sistemlerine kuantum kontrol sistemleri denir. Genelde böyle sistemler için, kontrol nesneleri yüklü parçacıklar olup kontrol fonksiyonları uygun biçimde şekillendirilmiş elektromanyetik alanlar olarak alınır. Bu nedenle, modelleri elde edebilmek için alan-parçacık etkileşimi teorisine başvurulur. Sonlu boyutlu bir kontrol sistemi genellikle t zaman, $x := x(t)$ sistemin durumu ve $u := u(t)$ ise kontrol fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \tag{4.1}$$

adi diferansiyel denklemi ile verilir. Kuantum kontrol sistemi için ise sistemin dinamiklerini tanımlayan ilgili denklem Schrödinger denklemidir. Bu sistemlerin enerjisi kontrol

görevi gören, zamana bağlı bazı fonksiyonlara bağlıdır. Dolayısıyla sistemin Hamiltonyen'i kontroller vasıtasıyla zamana bağlı olup Schrödinger denklemi

$$\frac{d\psi}{dt} = -iH\Big(u(t)\Big)\psi \tag{4.2}$$

şeklinde verilir. Burada $H(u)$, her u değeri için Hermitik bir matris fonksiyonu ve $\hbar = 1$'dir. Ayrıca

$$H(u) = H_0 + \sum_k H_k u_k$$

formunda olduğundan kuantum kontrol sistemleri genel olarak bilineer kontrol sistemleri olarak modellenir (D'Alessandro, 2021). Bu tür kontrol problemleri (faiz oranları, katalizörler, vb.) mühendislik tasarımlarında yaygındır ve aynı zamanda değişken büyüme oranlarına sahip fiziksel olayları modellemede kullanılır. Bilineer kontrol sistemleri üzerine yapılan çalışmalar 1960'ların sonlarında başlamış ve lineer olmayan kontroller için anlaşılması kolay örnekler sunması ve uygulamalardaki önemli ihtiyaçları karşılaması nedeniyle günümüze kadar ulaşmıştır. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda bilineer sistemler, anahtarlama sistemleri, kuantum fiziğinin spin kontrolü ve Lie semigrup teorisi gibi farklı disiplinlerde kullanılmaktadır (S.-H. Dong, Tang & Sun, 2003; Elliott, 2009; Jurdjevic & Sussmann, 1972).

Özel bir kontrol problemi olan optimal kontrol ise belirli bir optimallik kriterine (minimum süre, minimum enerji, minimum mesafe vb.) ulaşmayı hedefleyen bir sistem için uygun bir kontrol yasası bulma problemi ile ilgilenir. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlı x durum fonksiyonlarından oluşan bir $\mathbf{X}$ kümesi ve $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlı u kontrol fonksiyonlarından oluşan bir $\mathbf{U}$ kümesi verilsin. Genel anlamda bir optimal kontrol problemi, $\mathbf{J} : \mathbf{X} \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}$ maliyet fonksiyonunu minimize eden ve (4.1) denklemini sağlayan $x \in \mathbf{X}$ ve $u \in \mathbf{U}$ fonksiyonlarını bulma problemidir. Optimal kontrol teorisi, kuantum sistemlerini manipüle etmeye olanak sağlayan kontrol alanlarının dizayn edilmesinde önemli bir araç olarak kullanılmaktadır (Boscain, Sigalotti & Sugny, 2021). Optimal kontrol problemi farklı disiplinlerle bir araya getirilebilir ve kuantum bilgi teorisinin problemleri dahi optimal kontrol problemleri ile formülize edilebilir (Campos Venuti, D'Alessandro & Lidar, 2021).

Kontrol sistemleri uygulamalarında karşımıza çıkan sonlu boyutlu birçok sistem, u_j'ler elektromanyetik yarı-klasik alanlar ve I birim matris olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x + \sum_{j=1}^{m} B_j x u_j, \qquad x(0) = I$$

bir invaryant bilineer kontrol sistemi olan Schrödinger operatör denklemi ile modellenir

(D'Alessandro, 2021). Burada $x(t)$ üniter matrisi kuantum sistemin durum vektörü, $\hat{A}$ ve B_j matrisleri $\mathfrak{su}(n)$ Lie cebirinin elemanları ve n sistemin enerji seviyesidir. Özel olarak, sistemin en yüksek enerji seviyesinin, dışarıdan bir etki ile diğer tüm $n-1$ tane düşük enerji seviyesine bağlandığı, fakat bu düşük enerji seviyelerinin birbirlerine bağlı olmadığı sisteme n seviyeli kuantum kontrol sistem denir. Böyle sistemler arasında en temel örnek $SU(2)$ grubu ile ilişkili iki seviyeli kuantum kontrol sistemleridir. İki seviyeli sistemler, kuantum bilgi işlemenin devre tabanlı uygulamasında temel yapı taşı oldukları için kuantum fiziği ve kuantum bilgi teorisinin temel ilgi alanlarıdır. Bu nedenlerden dolayı, bu sistemler birçok açıdan incelenmiş, sistemlerin optimal zaman kontrolü birçok makalenin konusu olmuş ve teori hemen hemen tamamlanmıştır (Albertini & D'Alessandro, 2016; Boscain & Mason, 2005, 2006; Garon, Glaser & Sugny, 2013). Diğer yandan üç seviyeli sistemler için de önemli sonuçlar elde edilmekle birlikte böyle sistemler üzerine çalışmalar devam etmekte olup sonuçlar kuantum bilgi işleme alanında kullanılmaktadır (Albertini, D'Alessandro & Sheller, 2019; Boscain, Chambrion & Charlot, 2004; Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002).

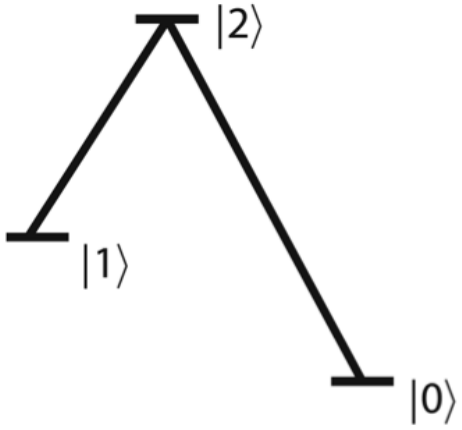
İki seviyeli kuantum sistemleri, kuantum hesaplamanın devre modelinde kuantum bitlerini temsil ederken (Nielsen & Chuang, 2002), kuantum bilgisayarlar gibi üç seviyeli kuantum sistemler ise seviyelerden yalnızca ikisinin bilgi taşıyıcı olarak kullanıldığı kuantum bitlerini temsil edebilir. Üç seviyeli sistemler için tipik bir örnek, en düşük iki seviyenin bir elektromanyetik alan aracılığıyla üçüncü seviyeye bağlandığı ancak düşük seviyelerin birbiri ile bağlantılı olmadığı lambda sistemleridir (bknz. Şekil 4.1). En düşük iki seviye, bir kuantum biti uygulamak için kullanılabilir. Kuantum hesaplamasının yanı sıra lambda yapılandırması ve elektromanyetik olarak indüklenmiş saydamlık da dahil olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır (Boller, Imamoğlu & Harris, 1991).

Bu bölümde, üç seviyeli bir kuantum sistemi olan kuantum lambda sistemleri için optimal nüfus transferini inceleyeceğiz. Böyle bir kuantum sistem, u_1 ve u_2 kompleks kontrol fonksiyonları olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 \\ -u_1^* & 0 & u_2 \\ 0 & -u_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlı Schrödinger denklemi ile ifade edilir ve amaç $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ durum vektörünü $|\psi_3| = 1$ (ve $|\psi_1| = |\psi_2| = 0$) durumundan $|\psi_1| = 1$ (ve $|\psi_2| = |\psi_3| = 0$) durumuna taşımaktır. Burada ψ_2 en yüksek enerji seviyesindeki nüfusu temsil etmekte olup (4.3) denklemi bir kuantum lambda sisteminin (De Seze vd., 2006), sürüklenme (drift) terimi elimine edildikten sonraki dinamiğini tanımlar. Böyle bir sürüklenme terimi,

(4.3) denkleminin sağ tarafında $-iD\vec{\psi}$ şeklinde ekstra bir terim olarak karşımıza çıkar. Burada D matrisi, $\omega_{1,2,3}$ enerji seviyeleri olmak üzere $D := \texttt{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ şeklinde tanımlı köşegen bir matristir. Sürüklenme terimi $\vec{\psi} \to e^{-iDt}\vec{\psi}$ şeklindeki zamana bağlı bir koordinat dönüşümü ile yok edilir (modelin elde edilişi ve fiziksel yorumu için bknz (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002)).



Şekil 4.1. Kuantum lambda sistemi için enerji seviye diyagramı

(4.3) sisteminin optimal kontrol problemi genellikle alt Reimann geometrisinde tanımlanan birçok farklı araştırmanın ana konusu olmuştur (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002; D'Alessandro, Sheller & Zhu, 2020). Böyle bir optimal kontrol problemi için minimize edilecek maliyet fonksiyonu

$$\mathbf{J}_{en} = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{t}} \left(|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2\right) dt \tag{4.4}$$

enerji tipi maliyet fonksiyonu formuna denktir. Öte yandan optimizasyon problemlerinde karşılaşılan en büyük sorunlardan biri, kuantum sistemlerinin genellikle kuantum dinamiğinin temel özelliklerini tahrip eden çevresel etkenlerin varlığına karşı çok duyarlı olmasıdır. Bu duruma uyumsuzluk (de-coherence) denir. En yüksek seviyedeki nüfus, genellikle daha düşük seviyelere düşmeye meyilli olduğundan bozulma olasılığı en fazla olup uyumsuzluğa neden olur. Bu nedenle bu seviyedeki ortalama nüfusun en aza indirilmesi gerekir. Dolayısıyla ikinci seviyedeki ortalama nüfusu minimize edecek

$$\mathbf{J}_{occ} = \int_0^{\bar{t}} |\psi_2(t)|^2 dt, \tag{4.5}$$

şeklindeki bir doluluk (occupancy) tipi maliyeti incelemek büyük öneme sahiptir. Kuantum lambda sistemlerinde bu tip bir maliyet için kullanılan kontrol stratejilerinden birisi STIRAP (STImulated Raman scattering involving Adiabatic Passage) yöntemidir (Bergmann, Theuer & Shore, 1998).

Kontrol fonksiyonunun normu üzerinde herhangi bir sınır koymadan (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002) makalesinde sunulan optimal kontrol stratejisi kullanılarak (4.5)'teki $\mathbf{J}_{occ}$ maliyetinin keyfi olarak azaltılabileceği görülür. Dolayısıyla hem (4.4) enerjisini hem de (4.5) en yüksek seviyedeki doluluğu hesaba katan $k_0 \geq 0$ parametreli

$$\mathbf{J} = \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{1}{2}\left(|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2\right) + k_0|\psi_2|^2 \right] dt \tag{4.6}$$

formundaki daha anlamlı bir maliyet fonksiyonu ele alınabilir. Bu maliyet fonksiyonunda enerji ile ikinci seviyedeki doluluğun minimize edilmesi arasında tercihen doluluğa vurgu yapılmak istenirse k_0'ın daha büyük değerleri seçilebilir. Tüm bu açıklamaların ışığında, bu bölümde ele alacağımız problem (4.3) sistemi için (4.6) maliyet fonksiyonunu minimize eden üçüncü seviyeden birinci seviyeye bir nüfus transferi problemidir.

Üç seviyeli bir kuantum sistemin ψ durum vektörünün normunun bir olması gerekir. Bu nedenle çözüm uzayına $\mathbb{C}^3$'te birim küre veya $\mathbb{R}^6$'da S^5 birim küresi olarak bakılabilir. Böyle bir sistem için kontrol problemi, $SU(3)$ Lie grubunda sol invaryant kontrol problemine denktir (Boscain, Charlot, Gauthier, Guérin & Jauslin, 2002; D'Alessandro vd., 2020). $SU(3)$ Lie grubu

$$SU(3) = \left\{ g \in GL(3,\mathbb{C}) \;\middle|\; gg^\dagger = g^\dagger g = I,\ \det(g) = 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada I matrisi 3×3'lük birim matris olup $g^\dagger$, g matrisinin kompleks eşleniğinin transpozunu ifade eder. $SU(3)$ Lie grubu ile ilişkili Lie cebiri

$$\mathfrak{su}(3) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) \;\middle|\; X + X^\dagger = 0,\ tr(X) = 0 \right\}$$

şeklindedir. Burada $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$, $GL(3,\mathbb{C})$ grubunun Lie cebiri olup tüm 3×3'lik kompleks matrislerden oluşur.

Kontrol problemlerinde, optimal kontrol olma gereklilik koşullarını tanımlayan Pontryagin maksimum ilkesi genellikle reel koordinatlarda verilir. Bu nedenle öncelikle ele aldığımız problemi reel değerler cinsinden yazmamız gerekir. $j = 1,2,3$ için $\psi_j = x_{jR} + ix_{jI}$ ve $j = 1,2$ için $u_j = u_{jR} + iu_{jI}$ olmak üzere durum vektörünü $\vec{x} := (x_{1R}, x_{2R}, x_{3R}, x_{1I}, x_{2I}, x_{3I})^T$ ve kontrolü $\vec{u} := (u_{1R}, u_{2R}, u_{1I}, u_{2I})^T$ şeklinde tanımlayalım. (4.3) dinamiği Ek C'de tanımlanan $R_{12}, R_{23}, I_{12}, I_{23} \in \mathfrak{su}(3)$ matrisleri yardımıyla

$$\frac{d\psi}{dt} = R_{12}\psi u_{1R} + R_{23}\psi u_{2R} + I_{12}\psi u_{1I} + I_{23}\psi u_{2I}, \tag{4.7}$$

veya reel koordinatlarda $\hat{R}_{12}, \hat{R}_{23}, \hat{I}_{12}, \hat{I}_{23} \in \mathfrak{su}^R(3)$ matrisleri yardımıyla

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{R}_{12}\vec{x}u_{1R} + \hat{R}_{23}\vec{x}u_{2R} + \hat{I}_{12}\vec{x}u_{1I} + \hat{I}_{23}\vec{x}u_{2I} \tag{4.8}$$

formunda yazılabilir. Bunlara denk olarak (4.3) denkleminin reel ve sanal kısımları ayrılarak

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B_1 u_{1R} + B_2 u_{2R} + C_1 u_{1I} + C_2 u_{2I}, \tag{4.9}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $k = 1, 2$ için B_k ve C_k'lar vektör alanları olup

$$B_1 = \begin{pmatrix} x_{2R} \\ -x_{1R} \\ 0 \\ x_{2I} \\ -x_{1I} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{3R} \\ -x_{2R} \\ 0 \\ x_{3I} \\ -x_{2I} \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} -x_{2I} \\ -x_{1I} \\ 0 \\ x_{2R} \\ x_{1R} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{3I} \\ -x_{2I} \\ 0 \\ x_{3R} \\ x_{2R} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

formundadırlar. Ek olarak

$$x_1 := x_{1R}^2 + x_{1I}^2, \qquad x_2 := x_{2R}^2 + x_{2I}^2, \qquad x_3 := x_{3R}^2 + x_{3I}^2 \tag{4.11}$$

tanımları yapalım. (4.9) ile ilişkili $\Delta = \mathtt{span}\{B_1, B_2, C_1, C_2\}$ *kontrol dağılımının*, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ olmak üzere rankı 4'tür (bknz. Ek E). Ayrıca $a_{j,k} := Re(\psi_j \bar{\psi}_k)$, $b_{j,k} := Im(\psi_j \bar{\psi}_k)$ olarak tanımlanırsa

$$a_{j,k} := x_{jR}x_{kR} + x_{jI}x_{kI}, \tag{4.12}$$

$$b_{j,k} := -x_{jR}x_{kI} + x_{jI}x_{kR} \tag{4.13}$$

olduğu kolayca görülür. $\{B_1, B_2, C_1, C_2\}$ vektör alanlarının birbirleriyle olan ilişkileri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.1.

$$B_k^T B_k = C_k^T C_k = x_k + x_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \tag{4.14}$$

$$-B_1^T B_2 = C_1^T C_2 = a_{1,3}, \tag{4.15}$$

$$B_1^T C_2 = C_1^T B_2 = -b_{1,3}, \tag{4.16}$$

$$B_k^T C_k = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{4.17}$$

Sonuç olarak, yukarıda genel formunu verdiğimiz optimal kontrol problemi, $\vec{x}$

durum vektörü S^5 manifoldunun bir elemanı olmak üzere

$$\mathbf{J} = \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{u}^{\,T}(t) \vec{u}(t) \right) + k_0 x_2(t) \right] dt \tag{4.18}$$

maliyet fonksiyonunu minimize eden $\vec{x}$ durumunu $x_3 = x_{3R}^2 + x_{3I}^2 = 1$ alt manifoldundan $x_1 = x_{1R}^2 + x_{1I}^2 = 1$ alt manifolduna transfer etme probleme dönüşür. Burada (4.18), (4.6) maliyetinin reel değişkenlerle ifadesidir.

4.1 Optimal Kontrol Problemi

Kontrol teoride, optimallik için temel gerekli koşullar Pontryagin maksimum ilkesi ile verilir (Agrachev & Sachkov, 2004; Boscain vd., 2021). Bu ilkeyi tanımlamak için genel bir optimal kontrol problemi tanımı yapalım. M, m boyutlu bir manifold olsun. $f(x,u)$ fonksiyonu, zamana bağlı $u \in \mathbb{R}^d$ kontrol vektörü ve x durum vektörü ile parametrize edilen bir vektör alanları ailesi olmak üzere

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)\right), \qquad t \in [0, \bar{t}] \tag{4.19}$$

kontrol sistemi olsun. $L : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon (Lagrangian olarak adlandırılır) olmak üzere

$$\mathbf{J} = \int_0^{\bar{t}} L\left(x(t), u(t)\right) dt \tag{4.20}$$

Lagrange formunda verilen maliyet fonksiyonunu ele alalım. M_{in} başlangıç manifoldu ve M_{fin} bitiş manifoldu M manifoldunun iki alt manifoldu olmak üzere

$$x(0) \in M_{in}, \qquad x(\bar{t}) \in M_{fin}, \tag{4.21}$$

ve u kontrolü $[0, \bar{t}]$ aralığında Lebesgue ölçülebilir olmak üzere, optimal kontrol problemi (4.19) sistemini hemen hemen her yerde sağlayan ve (4.20) maliyetini minimize eden $(x,u) = (x(t), u(t))$ fonksiyon ikilisini bulma problemidir. Burada (4.20) maliyeti, minimize edilmek istenilen amaca göre dizayn edilmiş maliyet fonksiyonudur.

T^*M, M manifoldunun kotanjant demetini ifade etsin. $\pi : T^*M \to M$ doğal izdüşümü $\lambda \in T_x^*M$ kotanjant vektörü ile $f(x,u) \in T_xM$ tanjant vektörü arasında doğal bir eşleşme tanımlar. Bu sayede, bir $\mu_0 \leq 0$ sabiti için $H : T^*M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$H(\lambda, u) = \langle \lambda, f(x,u) \rangle + \mu_0 L(x,u) \tag{4.22}$$

şeklinde Hamiltonyen adı verilen bir H fonksiyonu tanımlanabilir (Kuantum sistemlerin Hamiltonyen operatörü ile karıştırmayınız). Optimalliğin temel gereklilik koşulları aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.1 (Pontryagin Maksimum İlkesi)**.** *(x, u^*) ikilisi, yukarıda tanımlı optimal kontrol problemi için bir optimal ikili olsun. $\lambda : [0, \bar{t}] \to T^*M$ bir yörünge olmak üzere, $(\lambda, \mu_0^*) \neq 0$ şeklinde bir ikili vardır öyle ki*

$$H(\lambda, u^*) = \max_u H(\lambda, u) \tag{4.23}$$

eşitliği hemen hemen her yerde sağlanır. λ, $H(\cdot, u^*)$ ile verilen T^*M üzerinde tanımlı fonksiyonla ilişkili Hamiltonyen vektör alanı için bir integral eğridir[1]*. λ^T (satır) vektörleri λ'nın fiber koordinatlarını, x (sütun) vektörü λ'nın taban koordinatlarını ifade etsin. Bu durumda λ'nın bir integral eğri olması koşulu (bknz. (4.19))*

$$\dot{x} = f(x, u^*), \tag{4.24}$$

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T f_x(x, u^*) - \mu_0 L_x \tag{4.25}$$

şeklinde verilir. Ayrıca $H(\lambda, u^*) = H(\lambda(t), u^*(t))$ t'nin bir fonksiyonu olarak optimal yörünge boyunca sabittir.

Son olarak, karşıtlık koşulları

$$\langle \lambda(0), X \rangle = 0, \qquad X \in T_{x(0)} M_{in}, \tag{4.26}$$

$$\langle \lambda(\bar{t}), X \rangle = 0, \qquad X \in T_{x(\bar{t})} M_{fin} \tag{4.27}$$

şeklinde verilir.

Pontraygin maksimum ilkesini sağlayan (x, u^*) ikililerine problemin *ekstremalleri* denir ve optimal olmaya adaydırlar. Optimal kontrol problemleri çözülürken genellikle şu işlem sırası izlenir. Öncelikle problemin tüm ekstremalleri bulunur ve daha sonra içlerinden optimal olanı seçmek için ekstremallere karşılık gelen maliyetlerin değerleri karşılaştırılır. En küçük maliyet değerini veren aday optimaldir. $\mu_0 < 0$ ise, ilgili adaya *normal* ekstremal denir. Bu durumda Hamiltonyen fonksiyon normalize edilebilir ve $\mu_0 = -1$ seçilebilir. $\mu_0 = 0$ ise, bu adaya *anormal* ekstremal denir. Optimal olan anormal ekstremallere, basit optimal kontrol problemlerinde dahi rastlanabilir. Ayrıca, yukarıdaki teoremi hem $\mu_0 = 0$ hem de $\mu_0 \neq 0$ için sağlayan, yani hem normal hem de anormal olan ekstremalleri vardır (Agrachev, Boscain & Barilari, 2020). Ele aldığımız problem için optimal kontrolün normal bir ekstremale karşılık geldiği, bir başka ifadeyle anormal

[1]Burada $\{\lambda_i\}$ fiber koordinatlar, $\{x_i\}$ taban koordinatlar olmak üzere T^*M'nin $\Omega := \sum_{i=1} d\lambda_i \wedge dx_i$ ile verilen simplektik formlu bir simplektik manifold olduğunu ve bir Hamiltonyen fonksiyonu için T^*M üzerinde tanımlı ilgili X_H Hamiltonyen vektör alanının

$$\Omega(X_H, \cdot) = dH$$

olduğunu hatırlatalım.

ekstremalin bu problem için optimal olamayacağı Ek D'de ispatlanmıştır.

4.2 Simetri İndirgeme ve Reel Duruma İndirgeme

Bu alt bölümde, ele aldığımız problemin bir simetri grubuna sahip olduğunu gösterecek ve simetri indirgeme metodu yardımıyla grubun etkisi altında problemi daha basit bir probleme indirgeyeceğiz.

4.2.1 Lie Grubu Etkisi

$G := (S^1)^{\times 3} = \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) | \theta_{1,2,3} \in \mathbb{R}\}$ Lie grubu, $\mathbb{C}^3$ uzayına bilinen matris çarpımı işlemi ile etki eder. Bu grup, S^5'in seçtiğimiz $(x_{1R}, x_{2R}, x_{3R}, x_{1I}, x_{2I}, x_{3I})^T$ koordinatlarında, $SO(2)$ Lie grubunun

$$\begin{pmatrix} x_{jR} \\ x_{jI} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & \sin(\theta_j) \\ -\sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{jR} \\ x_{jI} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3$$

şeklinde tanımlı üç tane etkisi şeklinde etki eder. G Lie grubu hem değişmeli hem de kompakt bir gruptur. Bu nedenle, tanımladığımız etki düzgün bir etkidir. Böylece probleme standart Lie dönüşüm grupları teorisi uygulanabilir (Bredon, 1972). Öte yandan her noktanın izotropi grubu aşikar olmadığından bu etki serbest bir etki değildir. Bu noktalar $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ vektörünün bir veya birden fazla bileşeninin sıfır olduğu noktalardır. Dolayısıyla farklı izotropi türleri tanımlanabilir (Bredon, 1972). G_0 yalnızca birim elemandan oluşan grup, $G_1 := \{(e^{i\theta_1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) | \theta_1 \in \mathbb{R}\}$, $G_2 := \{(\mathbf{1}, e^{i\theta_2}, \mathbf{1}) | \theta_2 \in \mathbb{R}\}$, $G_3 := \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, e^{i\theta_3}) | \theta_3 \in \mathbb{R}\}$, $G_{1,2} := \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \mathbf{1}) | \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\}$, $G_{2,3} := \{(\mathbf{1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) | \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}\}$, $G_{1,3} := \{(e^{i\theta_1}, \mathbf{1}, e^{i\theta_3}) | \theta_1, \theta_3 \in \mathbb{R}\}$, $G_{1,2,3} := G$ olsun. Bu gruplar, kapsamaya göre $G_0 \leq \{G_1, G_2, G_3\}$, $G_1 \leq \{G_{1,3}, G_{1,2}\}$, $G_2 \leq \{G_{1,2}, G_{2,3}\}$, $G_3 \leq \{G_{1,3}, G_{2,3}\}$, $\{G_{1,3}, G_{1,2}, G_{2,3}\} \leq G_{1,2,3} = G$ şeklinde kısmi sıralı olası izotropi gruplarıdır. İzotropi grubu olarak G_0 aşikar grubuna sahip noktalar, S^5 durum uzayının *regüler kısmını* oluşturur. Bunlar, tüm bileşenleri sıfırdan farklı olan $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ noktalarıdır. Sıfıra eşit bir veya birden fazla bileşene sahip noktalar ise S^5'in *singüler kısmını* oluşturur. (4.11)'de $\vec{x}$ kompleks vektörün bileşenlerinin mutlak değerlerinin karelerini x_1, x_2, x_3 ile ifade etmiştik. Durum vektörünün normalize olma özelliğinden $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda S^5/G bölüm uzayının koordinatları x_1, x_2 cinsinden ifade edilebilir. Doğal izdüşümü $\pi_Q : S^5 \to S^5/G$ şeklinde tanımlayalım. Durum uzayının regüler kısmının izdüşümü, Lie dönüşüm grupları teorisi sonuçları ile uyumlu olarak (Bredon, 1972), S^5/G bölüm uzayında bir manifold olan $B := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 1\}$ açık üçgenidir. Singüler kısmın izdüşümü ise bu üçgenin sınırıdır.

$G = (S^1)^{\times 3}$ Lie grubu etkisinin ele aldığımız problem için önemi, G grubunun

problemimiz için bir simetri grubu olarak etki etmesidir (Ohsawa, 2013 ve buradaki referanslar). Bir $g \in G$ elemanı için, grubun M manifoldu üzerindeki ilgili etki dönüşümünü Φ_g ile ifade edelim. Genel bir optimal kontrol problemi için simetri grubu tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.1. *G bir Lie grubu olsun. (4.19)-(4.20) ile verilen bir optimal kontrol problemi için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, G grubu optimal kontrol problemine bir simetri grubu olarak etki eder denir.*

1. Her $g \in G$ için, G'nin kontrol fonksiyonlar uzayı $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir temsili Ψ_g (Woit, 2017) olmak üzere
$$\Phi_{g*} f(x,u) = f\left(\Phi_g x, \Psi_g u\right). \tag{4.28}$$
2. Her $g \in G$ için
$$\int_0^{\bar{t}} L(\Phi_g x(t), \Psi_g u(t))dt = \int_0^{\bar{t}} L(x(t),u(t))dt.$$
3. $x(0) \in M_{in}$ ve $x(\bar{t}) \in M_{fin}$ olmak üzere, her $g \in G$ için
$$\Phi_g M_{in} = M_{in}, \qquad \Phi_g M_{fin} = M_{fin}.$$

G grubu (4.19)-(4.20) ile verilen bir optimal kontrol problemi için bir simetri grubu olsun. Giriş bölümünde de tanımladığımız üzere, simetri kavramı, eğer $(x^*,u^*) := (x^*(t),u^*(t))$ ikilisi x^* yörüngesi ve u^* kontrolünün bir optimal ikilisi ise o zaman $(\Phi_g x^*, \Psi_g u^*)$ ikilisinin de optimal bir ikili olması fikrine dayanır. Bu şekilde tanımlanan bir simetri yardımıyla problem, genellikle daha düşük bir boyuta sahip olan M/G bölüm uzayında optimal kontrolü inceleme problemine indirgenir. Bu durumda optimal adaylar için denklemler bölüm uzayında ifade edilebilir.

İlgilendiğimiz optimal kontrol problemi için yukarıda tanımladığımız $G = (S^1)^{\times 3}$ grubunun bir simetri grubu olarak etki ettiği kolayca gösterilebilir. Gerçekten de (4.7) formundaki durum denklemi soldan $D := \mathtt{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})$ matrisi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_{g*} f &= \left(DR_{12}D^\dagger u_{1R} + DR_{23}D^\dagger u_{2R} + DI_{12}D^\dagger u_{1I} + DI_{23}D^\dagger u_{2I}\right) D\psi \\
&= \big[\, (\cos(\theta_1-\theta_2)R_{12} + \sin(\theta_1-\theta_2)I_{12})\, u_{1R} + (\cos(\theta_2-\theta_3)R_{23} + \sin(\theta_2-\theta_3)I_{23})\, u_{2R} + \\
&\quad (-\sin(\theta_1-\theta_2)R_{12} + \cos(\theta_1-\theta_2)I_{12})\, u_{1I} + (-\sin(\theta_2-\theta_3)R_{23} + \cos(\theta_2-\theta_3)I_{23})\, u_{2I} \big] D\psi \\
&= (R_{12}v_{1R} + I_{12}v_{1I} + R_{23}v_{2R} + I_{23}v_{2I})\, D\psi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} v_{jR} \\ v_{jI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j - \theta_{j+1}) & -\sin(\theta_j - \theta_{j+1}) \\ \sin(\theta_j - \theta_{j+1}) & \cos(\theta_j - \theta_{j+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{jR} \\ u_{jI} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \tag{4.29}$$

Dolayısıyla (4.29), $\mathbb{R}^4$ üzerindeki temsil olmak üzere (4.28) sağlanır. Benzer şekilde maliyet ve sınır değer koşullarının sağlandığı da kolayca görülür.

Standart simetri indirgeme uygulamalarının aksine (örneğin (Ohsawa, 2013)), ele aldığımız problemin S^5/G bölüm uzayı bir manifold değil, daha genel bir geometrik yapı olan stratifiye (stratified) uzay yapısına sahiptir (D'Alessandro vd., 2020). Fakat ele aldığımız problem için optimal yörünge neredeyse tamamen regüler kısım içindedir. Özel olarak, başlangıç ve bitiş anı hariç yörünge her zaman regüler kısım içinde kalır. Bu iddia aşağıdaki teoremin direkt sonucudur.

Teorem 4.2. *M manifoldu üzerinde bir G simetri gruplu, $[0, \bar{t}]$ zaman aralığı için tanımlı bir optimal kontrol problemi ele alalım. M'deki bir q noktasının izotropi grubu G_q olsun. q_0 ve q_1 sırasıyla başlangıç ve bitiş koşulu olmak üzere her $\gamma = \gamma(t)$ optimal yörüngesinin $t \in [0, \bar{t}]$'nin analitik bir fonksiyonu olduğunu varsayalım. Bu durumda her $\gamma = \gamma(t)$ optimal yörüngesi için $G_{\gamma(t)}$, $t \in [0, \bar{t}]$'den bağımsız bir sabittir ve*

$$G_{\gamma(t)} \subseteq G_{q_0} \cap G_{q_1}. \tag{4.30}$$

Kanıt. Öncelikle $t \in (0, \bar{t})$ için

$$G_{\gamma(t)} \subseteq G_{q_1}, \qquad G_{\gamma(t)} \subseteq G_{q_0}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için bu kapsamalardan birincisini ele alalım ve kapsamanın bir $s \in (0, \bar{t})$ için sağlanmadığını varsayalım. Bu durumda G_{q_1}'in elemanı olmayan bir $g \in G_{\gamma(s)}$ vardır. Şimdi γ yörüngesi ile $\gamma(s)$'ye kadar ilgili kontrolünü ve $g\gamma$ yörüngesi ile $g\gamma(s) = \gamma(s)$'den $gq_1 \neq q_1$'e kadar ilgili kontrolünü ele alalım. Bu yörünge γ ile aynı maliyet ve kontrole sahiptir. Dolayısıyla bu yörünge de optimaldir. Fakat bu optimal yörüngelerin analitikliği ile çelişir, çünkü bu yörünge pozitif uzunlukta bir aralıkta γ ile çakışır, ancak q_1 ve gq_1 final noktaları farklı olduğu için γ'ya eşit değildir. Benzer bir tartışma ikinci kapsama için de yapılabilir. Bu kez $g\gamma - \gamma$ eğrisi γ ile karşılaştırılır.

$G_{\gamma(t)}$'nin sabit olduğunu göstermek için $t_1, t_2 \in (0, \bar{t})$ şeklinde iki nokta seçelim. $G_{\gamma(t_1)} = G_{\gamma(t_2)}$ eşitliğini göstermek için yukarıdakine benzer bir tartışma yapılabilir. Şimdi $t_1 < t_2$ olsun ve $g \in G_{\gamma(t_2)}$, $g \notin G_{\gamma(t_1)}$ olacak şekilde bir elemanın olduğunu kabul edelim. Bu durumda, t_2'ye kadar $g\gamma$, t_2'den sonra γ olan eğri optimal olmasına rağmen analitik olmayacaktır. Benzer şekilde eğer $g \in G_{\gamma(t_1)}$ fakat $g \notin G_{\gamma(t_2)}$ şeklinde bir eleman varsa t_1'e kadar γ, t_1'den sonra $g\gamma$ olan eğri optimal iken analitik değildir. ■

Ele aldığımız problem için, optimal yörüngelerin analitikliği Ek D'deki Önerme D.3'ten gelir. Ayrıca

$$G_{q_0} = \left\{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, 1) \,|\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}, \qquad G_{q_1} = \left\{(1, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \,|\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\},$$

olup (4.30)'dan, her $t \in (0, \bar{t})$ için

$$G_{\gamma(t)} \subseteq \{(1, e^{i\theta}, 1) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$$

olarak bulunur. Eğer $G_{\gamma(t)} = \{(1, e^{i\theta}, 1) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ olsaydı, her $t \in (0, \bar{t})$ için $\psi_2 = 0$ olurdu ki bu imkansızdır. Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3. *Bir kuantum lambda sisteminin optimal kontrol problemi için optimal yörünge, başlangıç ve bitiş noktaları hariç tamamen S^5 manifoldunun regüler kısmına (ve dolayısıyla S^5/G'nin regüler kısmına) aittir. Bu ise her $t \in (0, \bar{t})$ için $x_1(t) \neq 0$, $x_2(t) \neq 0$, $x_3(t) \neq 0$ sonucunu verir.*

4.2.2 Bölüm Uzayındaki Denklemler

Bu bölümde problemin durum uzayında tanımlı denklemlerini bölüm uzayına indireceğiz. Şimdi S^5'in $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ olduğu regüler kısmından bir nokta seçelim. Herhangi bir regüler noktada, Lie grubunun etkisi ile ilişkili $V = V(\vec{x})$ *düşey dağılımı* orbitlere teğet vektör alanları ile verilir. Ele aldığımız problem için bu uzay

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_{1I} \\ 0 \\ 0 \\ -x_{1R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2I} \\ 0 \\ 0 \\ -x_{2R} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{3I} \\ 0 \\ 0 \\ -x_{3R} \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

vektörleri tarafından gerilir. Δ, $\{B_1, B_2, C_1, C_2\}$ tarafından gerilen bir kontrol dağılımı olmak üzere, her $\vec{x} \in S^5$ için

$$T_{\vec{x}}M = V(\vec{x}) + \Delta(\vec{x})$$

olduğunu hatırlayalım. Burada $T_{\vec{x}}M$ uzayı geometrik olarak, $\mathbb{R}^6$'da $\vec{x} = (x_{1R}, x_{2R}, x_{3R}, x_{1I}, x_{2I}, x_{3I})^T$ vektörüne dik 5 boyutlu uzaydır. Gerçekten de, $\|\vec{x}\| = 1$ küresi üzerinde $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ noktaları için

$$\mathtt{rank}\,[B_1, B_2, C_1, C_2, A_1, A_2, A_3] = 5$$

bulunur.

Şimdi Δ kontrol dağılımını bir yatay kısım ile bu yatay kısmın tümleyeninden oluşan iki kısma ayıralım. Bu tümleyen ortogonal tümleyen olarak seçilirse, simetri indirgeme teorisinde bu ayırma işlemine *bağlantı (connection)* denir (Ohsawa, 2013).

Önerme 4.2. *Her p regüler noktası için, Δ kontrol dağılımı*

$$\Delta = V_\Delta \oplus H_\Delta$$

ortogonal ayrışımına sahiptir. Burada $V_\Delta(p)$, $\Delta(p)$ ile $V(p)$ yatay dağılımının kesişimi ve $H_\Delta(p)$ ise $V_\Delta(p)$'nin $\Delta(p)$'deki ortogonal tümeleyeni olmak üzere

$$V_j := x_{j+1}A_j + x_jA_{j+1} = b_{j,(j+1)}B_j - a_{j,(j+1)}C_j, \qquad j = 1,2 \tag{4.32}$$

vektörleri V_Δ için bir taban,

$$H_j := a_{j,(j+1)}B_j + b_{j,(j+1)}C_j, \qquad j = 1,2, \tag{4.33}$$

vektörleri ise H_Δ için bir taban oluşturur.

Kanıt. İlk olarak (4.32) formülünü ele alalım. (4.31)'den eşitliğin sol tarafı j, $j+1$, $j+3$ ve $j+1+3$ konumları hariç sıfırdır. Benzer şekilde (4.10)'dan eşitliğin sağ tarafı da aynı satırlarda sıfırdır. Dolayısıyla sadece j, $j+1$, $j+3$ ve $j+1+3$ satırlarını doğrulamamız yeterlidir. j satırında (4.31)'den eşitliğin sol tarafı $x_{j+1}x_{jI}$ bulunur. (4.12), (4.13) ve (4.10)'dan ise eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} b_{j,(j+1)}x_{(j+1)R} + a_{j,(j+1)}x_{(j+1)I} & \\ &= (x_{jI}x_{(j+1)R} - x_{jR}x_{(j+1)I})x_{(j+1)R} + (x_{jR}x_{(j+1)R} + x_{jI}x_{(j+1)I})x_{(j+1)I} \\ &= x_{jI}x_{(j+1)R}^2 + x_{jI}x_{(j+1)I}^2 \\ &= x_{j+1}x_{jI} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer bileşenler de benzer şekilde bulunabilir. $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ koşulu altında $\{A_1, A_2, A_3\}$ lineer bağımsız olduğundan (4.32)'deki V_j, $j = 1,2$ vektörleri de lineer bağımsızdır ve

$$\hat{M} := \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı 2 olmak üzere $[V_1\, V_2] = [A_1, A_2, A_3]\hat{M}$'dır. Şimdi de (4.33)'teki H_j, $j = 1,2$ vektörlerini inceleyelim. Bu vektörlerin $\{V_j\}$, $j = 1,2$ vektörlerine dik olduğunu

göstereceğiz. $j,l=1,2$ için

$$\begin{aligned} H_j^T V_l &= \left(b_{j,j+1}B_j^T - a_{j,j+1}C_j^T\right)\left(a_{l,l+1}B_l + b_{l,l+1}C_l\right) \\ &= b_{j,j+1}a_{l,l+1}B_j^T B_l + b_{j,(j+1)}b_{l,(l+1)}B_j^T C_l - a_{j,j+1}a_{l,l+1}C_j^T B_l - a_{j,j+1}b_{l,l+1}C_j^T C_l \end{aligned} \tag{4.34}$$

bulunur. Şimdi Önerme 4.1'deki ilişkileri kullanalım. $j=l=1,2$ durumu için, (4.14) ve (4.17) formülleri kullanılırsa (4.34) sıfır olarak bulunur. Şimdi ise $j=1$ ve $l=2$ durumunu ele alalım. (4.15) ve (4.16) kullanılarak (4.34)'ten

$$H_1^T V_2 = -a_{1,3}\left(b_{1,2}a_{2,3} + a_{1,2}b_{2,3}\right) + b_{1,3}\left(a_{1,2}a_{2,3} - b_{1,2}b_{2,3}\right)$$

elde edilir. Tanım gereği

$$\begin{aligned} a_{j,j+2} =& Re(\psi_j \bar{\psi}_{j+2}) \\ =& \frac{1}{x_{j+1}} Re\left(\psi_j \bar{\psi}_{j+1}\psi_{j+1}\bar{\psi}_{j+2}\right) \\ =& \frac{1}{x_{j+1}}\left(Re(\psi_j\bar{\psi}_{j+1})Re(\psi_{j+1}\bar{\psi}_{j+2}) - Im(\psi_j\bar{\psi}_{j+1})Im(\psi_{j+1}\bar{\psi}_{j+2})\right) \\ =& \frac{a_{j,j+1}a_{j+1,j+2} - b_{j,j+1}b_{j+1,j+2}}{x_{j+1}} \end{aligned}$$

olur. $j=1$ için $a_{1,3} = \frac{a_{1,2}a_{2,3} - b_{1,2}b_{2,3}}{x_2}$ olup benzer yolla $b_{1,3} = \frac{a_{1,2}b_{2,3} + b_{1,2}a_{2,3}}{x_2}$ olarak elde edilir. Buradan $H_1^T V_2 = 0$ bulunur. $H_2^T V_1 = 0$ olduğu da aynı şekilde gösterilebilir. ■

(4.32)-(4.33) tanımlarından, $I := \texttt{diag}\left(b_{1,2}, b_{2,3}\right)$ ve $R := \texttt{diag}\left(a_{1,2}, a_{2,3}\right)$ şeklinde 2×2'lik köşegen matrislerden oluşan N matrisi

$$N = \begin{pmatrix} I & R \\ -R & I \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

formunda olmak üzere

$$[V_1\, V_2\, H_1\, H_2] = [B_1\, B_2\, C_1\, C_2]N \tag{4.36}$$

yazılabilir. Burada $b_{1,2}^2 + a_{1,2}^2 = |\psi_1\bar{\psi}_2|^2 = x_1x_2 \neq 0$ ve $b_{2,3}^2 + a_{2,3}^2 = |\psi_2\bar{\psi}_3|^2 = x_2x_3 \neq 0$ olduğundan ele aldığımız regüler noktalarda N matrisinin rankı 4'tür.

Şimdi (4.7) diferansiyel denklemini bölüm uzayında yazalım. $\vec{u} = (u_{1R}, u_{2R}, u_{1I}, u_{2I})^T = (\vec{u}_R, \vec{u}_I)^T$ olmak üzere, (4.36) yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = [B_1\, B_2\, C_1\, C_2]\,\vec{u} = [B_1\, B_2\, C_1\, C_2]N\vec{v} = [V_1\, V_2\, H_1\, H_2]\,\vec{v} \tag{4.37}$$

yazılır. Burada $\vec{v}$

$$\vec{v} := N^{-1}\vec{u} \tag{4.38}$$

formundadır. Bölüm uzayında değişkenlerin $x_1 = x_{1R}^2 + x_{1I}^2$ ve $x_2 = x_{2R}^2 + x_{2I}^2$ olduğunu biliyoruz. $\pi_Q : S^5 \to S^5/G$ doğal izdüşüm olmak üzere

$$\pi_{Q*} = 2\begin{pmatrix} x_{1R} & 0 & 0 & x_{1I} & 0 & 0 \\ 0 & x_{2R} & 0 & 0 & x_{2I} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\vec{v} := [\vec{v}_1, \vec{v}_2]^T$ yazalım. π_{Q*} (4.37)'ye uygulanırsa, $\pi_{Q*}[V_1\, V_2] = 0$ eşitliği kullanılarak diferansiyel denklemin bölüm uzayındaki formu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \pi_{Q*}[H_1\, H_2]\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 \\ -x_1x_2 & x_2x_3 \end{pmatrix}\vec{v}_2 \tag{4.39}$$

şeklinde elde edilir. Eğer bölüm uzayında x_1 ve x_2 koordinatları yerine x_1 ve x_3 koordinatları kullanılırsa diferansiyel denklemin daha basit bir hal aldığı görülebilir. Gerçekten de $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ yardımıyla $\dot{x}_3 = -\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ eşitliği kullanılarak (4.39)'dan

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = 2x_2\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & -x_3 \end{pmatrix}\vec{v}_2$$

basit formu elde edilir.

(4.35)'teki N matrisini ele alalım ve $M := I^2 + R^2 = \texttt{diag}(x_1x_2, x_2x_3)$ olmak üzere

$$N^TN = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

matrisini tanımlayalım. (4.38) yardımıyla (4.18) maliyeti

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \int_0^{\bar{t}} \Big(\frac{1}{2}\vec{v}^TN^TN\vec{v} + k_0x_2\Big)dt &= \int_0^{\bar{t}} (\vec{v}_1^TM\vec{v}_1 + \vec{v}_2^TM\vec{v}_2 + k_0x_2)dt \\ &\geq \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{1}{2}\vec{v}_2^TM\vec{v}_2 + k_0x_2\right)dt := \mathbf{J}_m \end{aligned} \tag{4.41}$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{v}_1$ bölüm uzayındaki yörüngeyi etkilemediğinden (4.41)'den regüler kısımdaki maliyeti minimize eden kontrolün $\vec{v}_1 \equiv 0$ formunda olması gerekir. (4.39)'u elde etmek için (4.41)'deki $\vec{v}_2$ vektörü elimine edilebilir ve problem (kontrol fonksiyonunu içermeyen) bir varyasyonlar hesabı problemine dönüştürülebilir. (4.39)'dan

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{x_1x_2x_3}\begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

çekilerek (4.41)'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{J}_m = \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\dot{x}_1^2}{x_1 x_2} + \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{x_2 x_3} \right) + k_0 x_2 \right] dt = \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\dot{x}_1^2}{x_1 x_2} + \frac{\dot{x}_3^2}{x_2 x_3} \right) + k_0 x_2 \right] dt \tag{4.42}$$

elde edilir. Bu ifadeden, optimalliğin gerekli koşulları varyasyon hesabının Euler-Lagrange denklemleri formunda elde edilebilir (Fleming & Rishel, 1975). Burada seçtiğimiz değişkenlerin x_1 ve x_2 olup x_3'ün x_1 ve x_2 cinsinden $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ şeklinde olduğunu hatırlatalım. Bir Lagrange fonksiyonu için (4.42)'deki $\mathbf{J}_m$ maliyeti $\int_0^{\bar{t}} L(x, \dot{x}) dt$ şeklinde yazılabilir ki buradan

$$L = \frac{1}{8} \left(\frac{\dot{x}_1^2}{x_1 x_2} + \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{x_2 x_3} \right) + k_0 x_2$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2$$

şeklinde verilen Euler-Lagrange denklemlerinden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_1}{x_1 x_2} + \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{x_2 x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{x_2 x_3^2} - \frac{\dot{x}_1^2}{x_2 x_1^2} \right), \tag{4.43}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{x_2 x_3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}_1^2}{x_1 x_2^2} + \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 (x_3 - x_2)}{x_2^2 x_3^2} \right) + 4k_0 \tag{4.44}$$

elde edilir. Bu denklemler, $t \in (0, \bar{t})$ için optimal yörüngenin bölüm uzayındaki (regüler kısmındaki) izdüşümleri tarafından sağlanmalıdır.

4.2.3 Reel Duruma İndirgeme

(4.43) ve (4.44) denklemleri $(0, \bar{t})$ aralığında optimal yörüngelerin izdüşümleri tarafından sağlanmalıdır. $\lim_{t \to 0^+} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ ve $\lim_{t \to \bar{t}^-} (x_1(t), x_2(t)) = (1, 0)$ koşulları sebebiyle, bu denklemlerin $t = 0$ ve $t = \bar{t}$'deki integralleri, singülerliğe sahiptir. Bu nedenle Euler-Lagrange denklemlerini kullanmak yerine Pontryagin maksimum ilkesini kullanmak daha uygundur. Bunu yapmadan önce simetri indirgeme yardımıyla problemi reel duruma indirgeyeceğiz.

Teorem 4.4. *(4.18) maliyetini minimize eden (4.9) sistemi için nüfus transferi problemini ele alalım. $\vec{u} = (\vec{u}_R, \vec{u}_I)^T$ optimal kontrol olsun. Böyle bir optimal kontrol problemi için aynı transferi gerçekleştiren ve maliyeti minimize eden tamamen reel bir kontrol vardır, yani $\vec{u}_I \equiv 0$'dır.*

Kanıt. $\vec{u} = (\vec{u}_R, \vec{u}_I)^T$ bir optimal kontrol olsun. Bu durumda bir önceki bölümdeki tartış-

malardan

$$\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\end{pmatrix} = N^{-1}\begin{pmatrix}\vec{u}_R\\ \vec{u}_I,\end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 \equiv 0 \tag{4.45}$$

olur. Ayrıca $\vec{v}_1 \equiv 0$ olan ve aynı $\vec{v}_2 = \vec{v}_2(t) := v^o(t)$'yi veren her kontrol aynı maliyeti verir. Burada ilgili dinamiğin aynı başlangıç koşuluna sahip olup aynı D matrisini veren (4.39) ile aynı dinamik olduğunu gözlemleyiniz. (4.35)'teki N^{-1} hesaplanırsa $\hat{I} := \texttt{diag}\left(\frac{b_{1,2}}{x_1x_2}, \frac{b_{2,3}}{x_2x_3}\right)$, $\hat{R} := \texttt{diag}\left(\frac{a_{1,2}}{x_1x_2}, \frac{a_{2,3}}{x_2x_3}\right)$ olmak üzere

$$N^{-1} = \begin{pmatrix}\hat{I} & -\hat{R}\\ \hat{R} & \hat{I}\end{pmatrix} \tag{4.46}$$

elde edilir.

Şimdi keyfi bir t için $\vec{u}_I \equiv 0$ ve $u_{1R}(t) = x_{1R}x_{2R}v_1^0(t)$, $u_{2R}(t) = x_{2R}x_{3R}v_2^0(t)$ olacak şekilde bir $\vec{u}$ kontrolü seçelim. Bu durumda, (4.45)-(4.46)'dan

$$\vec{v}_1 = \hat{I}\vec{u}_R, \qquad \vec{v}_2 = \hat{R}\vec{u}_R = \hat{R}[x_{1R}x_{2R}v_1^o, x_{2R}x_{3R}v_2^o]^T \tag{4.47}$$

elde edilir. Kontrol tamamen reel olup, başlangıç koşulu da reel kabul edilirse (4.3), (4.7) ve (4.10)'dan $\hat{I} \equiv 0$ olur ki buradan $\vec{v}_1 \equiv 0$ elde edilir. Yörüngenin reel oluşundan $k = 1, 2$ için $x_{kI} = 0$ olup böylece $k = 1, 2$ için $x_{kR}^2 x_{(k+1)R}^2 = x_k x_{k+1}$ bulunur. Bu durumda (4.47)'den $\vec{v}_2(t) = v^o(t)$ istenilen sonucuna ulaşılır. ■

4.3 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü

4.3.1 Optimal Yörüngelerin Genel Özellikleri

Teorem 4.4'de verildiği üzere ele aldığımız problem reel duruma indirgenebilir. Bu durumda (4.7) sistemi ufak bir notasyon değişikliği ile

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 y\\ \dot{y} &= -u_1 x + u_2 z\\ \dot{z} &= -u_2 y\end{aligned} \tag{4.48}$$

halini alır. Böylece problem, (4.48) sisteminin $\vec{x} = (x, y, z)$ durumunu $[0, 1]$ zaman aralığında $(0, 0, \pm 1)^T$ başlangıç durumundan $(\pm 1, 0, 0)^T$ final durumuna taşıyan ve

$$\mathbf{J} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(u_1^2(t) + u_2^2(t)\right) + k_0 y^2(t)\right] dt \tag{4.49}$$

maliyetini (A.4 bakınız) minimize eden optimal kontrol problemine dönüşür. Başlangıç koşulu $(0, 0, 1)^T$ olarak alınabilir. Teorem 4.1'deki Pontryagin maksimum ilkesi bu

probleme uygulanarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.5. *$\vec{x} = (x, y, z)^T$ ve $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ sırasıyla, $[0, 1]$ aralığında sistemin durumunu $(0, 0, 1)^T$ başlangıç durumdan $(\pm 1, 0, 0)^T$ bitiş durumuna taşıyan ve (4.49) maliyetini minimize eden optimal yörünge ve kontrol olsun. Bu durumda μ ve η şeklinde iki sabit sayı vardır öyle ki (4.48) sistemi*

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \eta u_2 - 2k_0 xy \\ \dot{u}_2 &= -\eta u_1 + 2k_0 yz \end{aligned} \tag{4.50}$$

sistemini ve $\vec{u}(0) = (0, \mu)^T$ ve $\vec{u}(1) = (\pm\mu, 0)^T$ sonuçlarını verir.

Kanıt.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

tanımları yapılarak (4.48) sistemi

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}u_1 + B\vec{x}u_2 \tag{4.52}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 4.1'den, λ yardımcı durum olmak üzere, $u_1(t) = \lambda^T A\vec{x}$ ve $u_2(t) = \lambda^T B\vec{x}$ elde edilir. Ele aldığımız problemin optimal kontrolünün normalliğinden (4.25)'de $\mu_0 = -1$ seçilebilir. Buradan λ yardımcı durumu için denklemler

$$\dot{\lambda} = A\lambda u_1 + B\lambda u_2 + 2k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

halini alır. $u_1 = \lambda^T A\vec{x}$ ifadesinin türevi alınırsa, (4.52) ve (4.53) denklemlerinden

$$\dot{u}_1 = u_2 \lambda^T [A, B]\vec{x} + 2k_0 (0, y, 0) A\vec{x}$$

elde edilir ki bu denklem, eğer $\eta := \lambda^T [A, B]\vec{x}$ olarak tanımlanırsa, (4.50) sisteminin ilk denklemini verir. Bu denklem için son olarak (4.51)'i kullanarak η'nın bir sabit olduğunu gösterelim:

$$C := [A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tanımı yapılırsa $\eta := \lambda^T C\vec{x}$ halini alır.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\eta =&\dot{\lambda}^T A\vec{x} + \lambda^T A\frac{d}{dt}\vec{x}\\ =&\left(-u_1\lambda^T A - u_2\lambda^T B + 2k_0(0,y,0)\right)C\vec{x} + \lambda^T C\left(A\vec{x}u_1 + B\vec{x}u_2\right)\\ =&u_1\lambda^T[C,A]\vec{x} + u_2\lambda^T[C,B]\vec{x} = u_1\lambda^T B\vec{x} - u_2\lambda^T A\vec{x} = u_1u_2 - u_2u_1 = 0\end{aligned}$$

olup η sabittir. $u_2 = \lambda^T B\vec{x}$ denklemi için yukarıdakine benzer işlemler yapılırak (4.50)'nin ikinci denklemi de kolaylıkla elde edilebilir.

Ayrıca $t = 0$ anında $\vec{x} = (0,0,1)^T$ olduğundan $u_1(t) = \lambda^T A\vec{x}$ ve $u_2(t) = \lambda^T B\vec{x}$'ten $u_1(0) = 0$ ve $u_2(0) = \lambda_2(0)$ bulunur. $\lambda_2(0) := \mu$ olsun. $t = 1$ anında ise $\vec{x} = (\pm 1,0,0)^T$ olduğundan $u_1(1) = \lambda^T(1)A\vec{x}(1) = \mp\lambda_2(1)$ ve $u_2(1) = \lambda^T(1)B\vec{x}(1) = 0$ bulunur.

Son olarak $u_1(1) = \pm\mu$ olduğunu gösterelim. (4.50) denklemleri sırasıyla u_1 ve u_2 ile çarpılır ve elde edilen denklemler toplanırsa (4.48) yardımıyla

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_1^2 + u_2^2) = 2k_0y(zu_2 - u_1x) = 2k_0y\dot{y} = k_0\frac{d}{dt}y^2 \tag{4.54}$$

denklemi elde edilir. (4.54) denkleminin her iki tarafının 0'dan t'ye integrali alınırsa $y(0) = 0$ koşulundan

$$\frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)(t) - \frac{u_1^2(0) + u_2^2(0)}{2} = k_0y^2(t)$$

elde edilir. $u_1^2(0) = 0$ ve $u_2^2(0) = \mu^2$ koşullarından

$$\left(u_1^2 + u_2^2\right)(t) = \mu^2 + 2k_0y^2$$

olarak elde edilir. Bu ifade (4.49) maaliyeti için

$$\mathbf{J} = \frac{\mu^2}{2} + \int_0^1 2k_0y^2dt \tag{4.55}$$

yeni tanımını verir. Benzer şekilde (4.54)'ün her iki tarafının t'den 1'e integrali alınırsa $y(1) = 0$ koşulundan

$$\frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)(t) - \frac{u_1^2(1) + u_2^2(1)}{2} = k_0y^2(t)$$

elde edilir ki $u_2(1) = 0$ ve yukarıda elde edilen $\left(u_1^2 + u_2^2\right)(t)$ tanımından $u_1^2(1) = \mu^2$ bulunur. ■

Açıklama 4.1. Eğer $\mu = 0$ alınırsa η'nın her değeri için (4.48)-(4.50)'nin özel çözümü

$(u_1, u_2) = (0, 0)$ ve $(x, y, z)^T = (0, 0, 1)^T$ halini alır. Dolayısıyla $\mu = 0$, bu optimal kontrol problemi için geçerli bir değer değildir. Şimdi de $\eta = 0$ durumunu inceleyelim. (4.48)'in ilk denklemi ve (4.50)'nin ilk denklemi sırasıyla $2k_0x$ ve u_1 ile çarpılır ve elde edilen denklemler toplanırsa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u_1^2 + k_0x^2\right) \equiv 0$$

elde edilir, yani $\frac{1}{2}u_1^2 + k_0x^2$ sabittir. Fakat bu ifade $t = 0$'da sıfıra eşit olduğundan ifade sıfıra eşittir. $k_0 \geq 0$ olduğundan $u_1 = 0$ olur ki bu durumda (4.48)'in ilk denkleminden x'in 0'dan ± 1'e taşınması mümkün değildir. Şimdi (μ, η)'nın olası işaret kombinasyonlarını ele alalım. $\mu > 0, \eta < 0$ ise, doğrudan yapılacak bir hesaplamayla, $(-u_1, u_2)^T$ kontrolü ve $(-x, y, z)^T$ yörüngesinin, η yerine $-\eta$ yazıldığında (4.48)-(4.50)'yi sağladığı ve istenilen nüfus transferini aynı maliyetle gerçekleştirdiği görülür. $\mu < 0, \eta > 0$ durumu için de aynı yorum pozitif bir $\mu = u_2(0)$'a karşılık gelen $(-u_1, -u_2)^T$ kontrolü ve $(x, -y, z)^T$ yörüngesi ile yapılabilir. $\mu < 0, \eta < 0$ ve (x, y, z, u_1, u_2) şeklinde bir yörünge-kontrol çifti varsa, bu bir $(-x, -y, z, u_1, -u_2)^T$ ile ve η da $-\eta$ ile değiştirilerek istenilen nüfus transferi aynı maliyetle gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla problem $\mu > 0, \eta > 0$ durumuna indirgenebilir.

Teorem 4.5'ten optimal yörünge ve kontrolü bulmak için istenilen final koşullarını sağlayacak şekilde (4.48)-(4.50) sisteminin $\mu > 0$ ve $\eta > 0$'nın farklı değerleri için simüle edilmesi gerektiği sonucuna varılır. Uygun yörüngeler $(x, y, z, u_1, u_2)(0) = (0, 0, 1, 0, \mu)$ başlangıç koşulunu $(x, y, z, u_1, u_2)(1) = (\pm 1, 0, 0, \pm\mu, 0)$ final koşuluna taşıyan yörüngelerdir.

Açıklama 4.2. (4.48), (4.50) sistemi iki temel özelliğe sahiptir. Bunlar

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ve

$$u_2x + u_1z - \eta y = 0 \tag{4.56}$$

şeklinde verilebilir.

4.4 Optimal Kontrolün Nümerik Olarak Hesaplanması

Bir önceki alt bölümde elde edilen sonuçlara göre, kontrol ve yörüngenin bulunması için $(0, 0, 1, 0, \mu)^T$ başlangıç koşuluna sahip (4.48)-(4.50) sistemi her $\mu, \eta \in (0, \infty)$ için simüle edilmeli ve bunlar arasında $\bar{t} = 1$ anında $(1, 0, 0, \mu, 0)^T$ final koşuluna transferi gerçekleştiren (μ, η) ikilileri seçilmelidir. Optimal kontrol ve yörüngeyi veren (μ, η) ikilisinin bulunması için ise bu ikililer arasından maliyet fonksiyonunun minimum değerini verenler seçilir.

Parametre değerlerinin sonsuz bir aralığı üzerinde bir bilgisayar simülasyonu yapmanın aşikar zorluğu göz önüne alındığında, parametreleri *sonlu* bir aralıkta sınırlayabilmek oldukça önemlidir. Bu nedenle μ ve η'nın olası değerleri üzerinde (kabaca da olsa) üst sınırlar elde edilmesi gerekir. Ele alınana problemin maliyet fonksiyonu için Ek B'de bir $\hat{B}$ üst sınırı belirlenmiştir. Eğer böyle bir $\hat{B}$ varsa, μ ve η için üst sınırlar belirlemek mümkündür. Aşağıdaki önerme, bu $\hat{B}$ üst sınırı yardımıyla μ ve η için nasıl birer üst sınır belirlendiğini vermektedir.

Önerme 4.3. *$\hat{B}$, (4.49) maliyet fonksiyonu için bir üst sınır ise*

$$0 < \mu \leq \sqrt{2\hat{B}}, \qquad 0 < \eta \leq 3\hat{B}. \tag{4.57}$$

Kanıt. (4.55) ve $\hat{B}$ yardımıyla

$$\frac{\mu^2}{2} \leq \frac{\mu^2}{2} + \int_0^1 2k_0 y^2 dt \leq \hat{B}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mu \leq \sqrt{2\hat{B}} \tag{4.58}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (4.56)'dan elde edilen y ifadesi (4.48)'in ilk denkleminde yerine yazılarak

$$\dot{x} = u_1 \frac{(u_2 x + u_1 z)}{\eta} \leq \frac{|u_1|^2 + |u_1 u_2|}{\eta} \leq \frac{u_1^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)}{\eta} \leq \frac{3}{2}\frac{u_1^2 + u_2^2}{\eta} \tag{4.59}$$

elde edilir. Burada $|u_1 u_2| \leq \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$ Young eşitsizliğini kullandık. (4.59)'un 0'dan 1'e integrali alınır ve $x(0) = 0$ ve $x(1) = 1$ kullanılırsa (4.49)'dan

$$1 = \frac{3}{2\eta}\int_0^1 (u_1^2 + u_2^2) dt \leq \frac{3}{\eta}\mathbf{J} \leq \frac{3}{\eta}\hat{B}$$

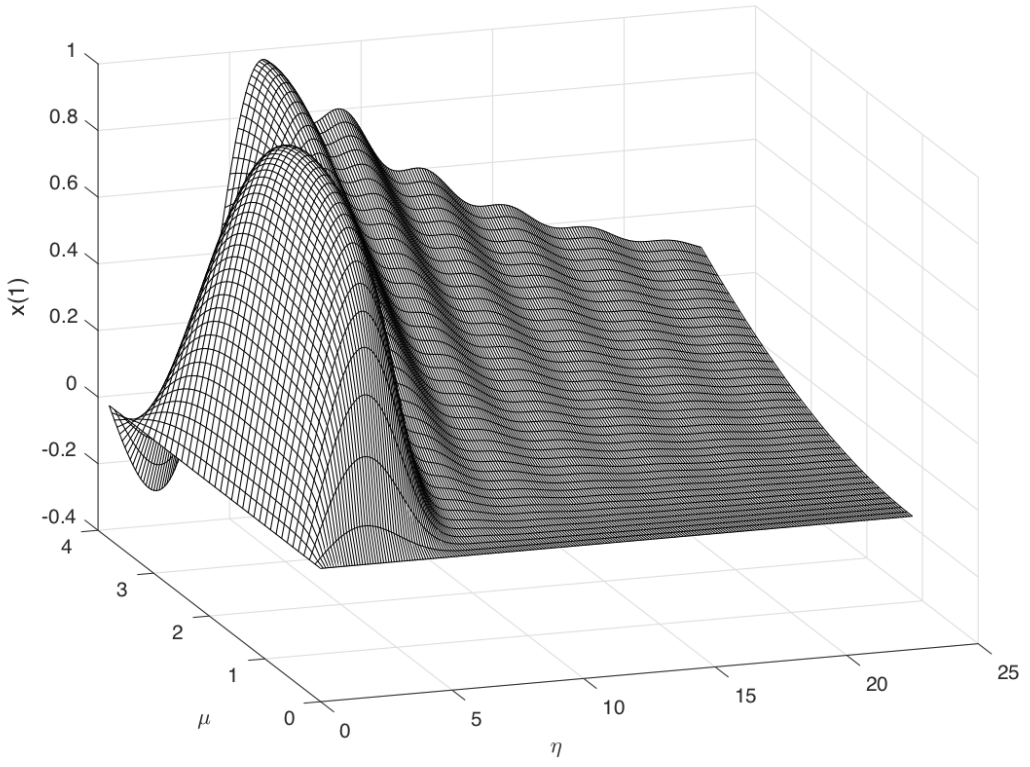
bulunur. Bu ise (4.57)'deki ikinci eşitsizliği verir. ■

Sonuç olarak ele aldığımız optimal kontrol probleminin çözümü için şu şekilde bir strateji izlenebilir: Maliyet fonksiyonunun Ek B'de verilen metotla veya herhangi bir (optimal olmayan) kontrol stratejisi kullanılarak elde edilen bir $\hat{B}$ sınırı varlığında (μ, η) parametreleri uzayında (4.57) sınırları yardımıyla dikdörtgen bir bölge belirlenir ve bu bölgede yeterince hassas bir grid ele alınır. $(0, 0, 1, 0, \mu)^T$ başlangıç koşullu ve η değerli (4.48)-(4.50) sistemi bu gridde her nokta için $[0, 1]$ aralığında simüle edilir. Bu sayede $x(1)$'in değeri (μ, η)'nın bir fonksiyonu olarak bulunur. Bu durumda $x(1) = 1$'e karşılık gelen (μ, η) noktaları seçilir. Seçilen her bir nokta için maliyetin değeri hesaplanır (bu

hesaplamayı basitleştirmek için (4.55) formülünü kullanmak faydalı olabilir) ve bu noktalardan maliyeti minimize edeni seçilir. Bu nokta optimal kontrol ve yörüngeye karşılık gelir.

4.4.1 $k_0 = 10$ için Optimal Kontrol Problemi Örneği

Bu alt bölümde, yukarıdaki tanıttığımız stratejiyi örneklendirmek adına, ele aldığımız problemin $k_0 = 10$ durumu için optimal kontrolünü bulacağız. $k_0 = 10 \leq 2\pi^2$ olduğundan, Ek B'de elde edilen $\hat{B}$ maliyet üst sınırı kullanılabilir. $k_0 = 10$ için bu sınır $\frac{3\pi^2}{8}\left(1 + \frac{10}{\pi^2}\right) < 7.5 = \hat{B}$ olarak bulunur. Böylece (4.57)'nin ilk eşitsizliğinden μ'nün değer aralığı $0 < \mu < \sqrt{2 \times 7.5} < 3.88$ bulunur. η için ise (4.57)'nin ikinci eşitsizliğinden $0 < \eta < 3\hat{B} = 3 \times 7.5 = 22.5$ elde edilir. Bu durumda $0 < \mu < 3.88,\ 0 < \eta < 22.5$ bölgesinde $\hat{\Delta} := 0.1$ adımlı (μ, η) noktalarından oluşan grid kullanılarak (μ, η)'nin değerlerine karşılık gelen $x(1)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon Şekil 4.2'de verilmiştir.

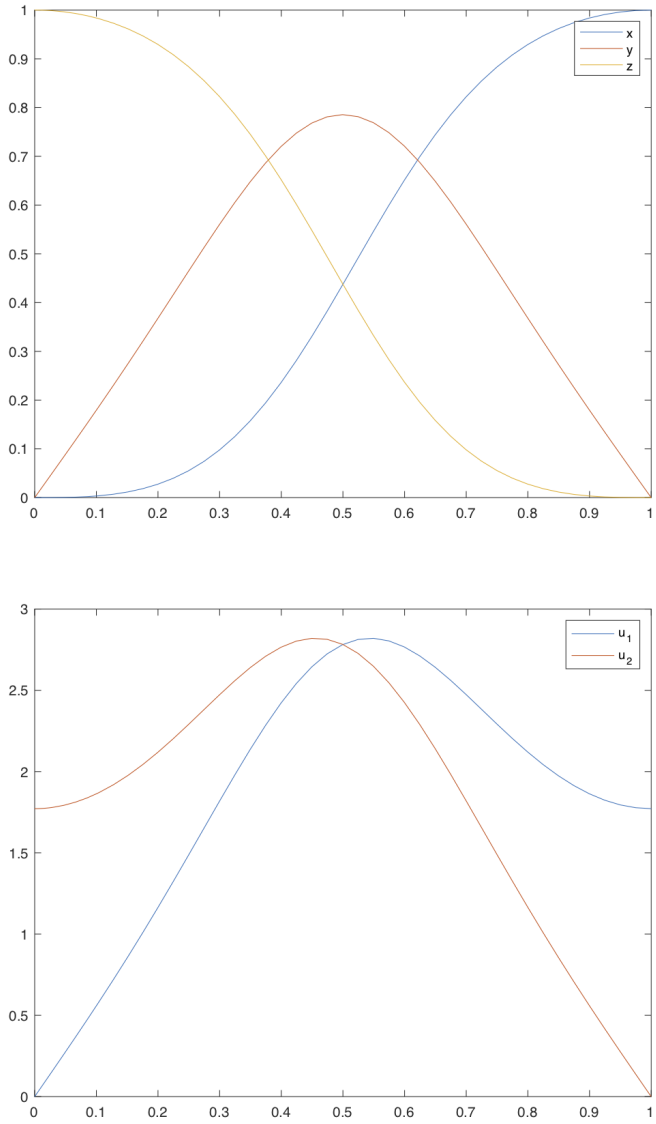


Şekil 4.2. $0 < \mu < 3.88,\ 0 < \eta < 22.5$ bölgesinde $\hat{\Delta} = 0.1$ adımlı gridde (μ, η)'nın bir fonksiyonu olarak $x(1)$'in grafiği

Bu (μ, η) noktalar gridinde, $x(1) = 1$ koşulunu sağlayan $(\mu, \eta) = (1.8, 3.1)$ ve $(\mu, \eta) = (3.7, 5.8)$ şeklinde iki nokta vardır. $\hat{\Delta} = 0.1$ adımıyla yapılan simülasyon μ, η'nın oldukça kaba değerlerini verdiğinden bulunan bu noktalar etrafında daha küçük

bir adımla daha hassas bir grid kullanılarak μ, η'nın daha net değerleri bulunabilir ve $(x, y, z, u_1, u_2)(1) = (1, 0, 0, \mu, 0)$ final koşulunun sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilebilir. Bunun için $\hat{\Delta} := 0.0001$ adımı kullanılırsa $(\mu, \eta) = (3.7, 5.8)$ noktası için $x(1) = 1$ koşulu 1e-4 toleransla $\mu = 3.7143$ ve $\eta = 5.8526$ değerlerinde sağlanır. Fakat bu nokta için final koşulu $(x, y, z, u_1, u_2)(1) = (1, 0, 0, -\mu, 0)$ olup ilgili nokta optimal kontrolü vermez. Gerçekten de bu noktaya karşılık gelen maliyet değeri $\mathbf{J} \approx 10.6590$ olup açıkça belirlenen $\hat{B} = 7.5$ üst sınırından büyüktür.

Diğer yandan, $(\mu, \eta) = (1.8, 3.1)$ noktası için $\mu = 1.7719$ ve $\eta = 3.0998$ değerleri bulunur ki buna karşılık gelen maliyet değeri $\mathbf{J} \approx 6.8081 < \hat{B}$'dir. Bu nokta için $(x, y, z, u_1, u_2)(1) = (1, 0, 0, \mu, 0)$ final koşulu $1e-4$ tolerans ile sağlanır. Dolayısıyla ilgili nokta optimal yörüngeyi ve kontrolü verir. Optimal yörünge ve kontrol grafiği Şekil 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.3. $k_0 = 10$ için (4.48)-(4.49) optimal kontrol probleminin (x, y, z) optimal yörüngesi ve (u_1, u_2) kontrolü

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, simetri kavramı, Lie grupları ve cebirleri hakkında bilgiler verildi. Bazı Lie grupları ile bağlantılı kuantum fiziksel sistemler ve çözümleri ele alındı.

İkinci bölümde $SL(2,\mathbb{R})$ Lie grubu ile ilişkili iki kuantum sistem incelendi. Bunun için öncelikle grubun Gram ve genelleştirilmiş Cartan ayrışımı kullanılarak grubun homojen uzayındaki Laplace-Beltrami operatörlerinin ifadeleri verildi. Laplace-Beltrami operatörü ile fiziksel bir sistemin Hamiltonyen'i arasındaki ilişki yardımıyla, Morse ve genelliştirilmiş Pöschl-Teller potansiyellerine sahip iki kuantum sistem elde edildi ve sistemlerin bağlı ve saçılma durumları verildi.

Üçüncü bölümde ise $SO(3,2)$ Lie grubu ile ilişkili iki farklı kuantum sistem incelendi. Grubun simetrik uzayının iki farklı koordinattaki parametrizasyonlarında Casimir operatörleri ifade edildi. Bir önceki bölüme benzer şekilde bu operatörler yardımıyla grup ile ilişkili iki kuantum sisteme ulaşıldı ve analitik çözümleri verildi.

Bu iki bölümde izlenilen grup teorisi yöntemi, fizikte önemli simetrileri ifade ettiği düşünülen farklı Lie gruplarına uygulanabilir. Ayrıca bu metotla, yüksek boyutlu Lie grupları ve bunlarla ilişkili çok parçacıklı veya konuma bağlı potansiyele sahip sistemler çalışılabilir.

Çalışmanın son bölümünde, $SU(3)$ Lie grubunda sol invaryant bir kontrol problemi ele alındı. Problem, kuantum lambda sistemleri için enerjinin yanında en yüksek seviyedeki ortalama nüfusu (doluluk) da minimize etmeyi hedefleyen nüfus transferi optimal kontrol problemidir. Çalışmanın ana özelliği, problemin boyutunu azaltmaya ve nihayetinde en uygun kontrolü bulmaya izin veren bir simetriye sahip olduğunun gösterilmesidir. Bu sayede problemin denklemleri daha basit denklemlere indirgendi ve çözüm için nümerik hesaplar yapıldı. Doluluk maliyetleri kuantum sistemlerinde dikkate alınması gereken

doğal maliyetlerdir, çünkü uyumsuzluğun etkisinin daha güçlü veya aksine daha zayıf olduğu alt uzaylarda ortalama nüfusun hesaba katılmasına olanak sağlarlar. Bu sebeple ele alınan problemin bir diğer önemli özelliği, uyumsuzluk etkisinin kuvvetine göre (4.6) maliyetindeki k_0 parametresinin büyük veya küçük seçilebilmesidir. Ayrıca, doluluk maliyetine sahip yüksek boyutlu kontrol problemlerinin çoğunda böyle simetriler doğal olarak ortaya çıkar. Bu nedenle bu çalışmada tanımlanan tekniklerin çoğu yararlı olup sonuçların hepsi daha yüksek boyutlu problemler için genelleştirilebilir. Sonuçları yüksek boyutlu problemlere genelleştirmede karşılaşılabilecek ana zorluk, optimal kontrolün normal olduğunun ispatlanmasıdır. Sonuç olarak, üç seviyeli optimal kuantum kontrol problemi için burada verilen tekniklerin yüksek boyutlu daha genel problemlere uygulanmasının ve geliştirilmesinin gelecekte verimli bir araştırma konusu olacağına inanıyoruz.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I. A., & Romer, R. H. (1988). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.

Agrachev, A. A., Boscain, U., & Barilari, D. (2020). *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*. Cambridge University Press.

Agrachev, A. A., & Sachkov, Y. L. (2004). *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. Springer-Verlag.

Albertini, F., & D'Alessandro, D. (2016). Time optimal simultaneous control of two level quantum systems. *Automatica*, *74*, 55–62.

Albertini, F., D'Alessandro, D., & Sheller, B. (2019). Sub-Riemannian Geodesics in $SU(n)/S(U(n-1)\times U(1))$ and Optimal Control of Three Level Quantum Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *65*(3), 1176–1191.

Alhassid, Y., Gürsey, F., & Iachello, F. (1983a). Group theory approach to scattering. *Annals of Physics*, *148*(2), 346–380.

Alhassid, Y., Gürsey, F., & Iachello, F. (1983b). Potential scattering, transfer matrix, and group theory. *Physical Review Letters*, *50*(12), 873.

Alhassid, Y., Iachello, F., & Gürsey, F. (1983). Group theory of the Morse oscillator. *Chemical Physics Letters*, *99*(1), 27–30.

Bagrov, V. G., & Gitman, D. (1990). *Exact solutions of relativistic wave equations* (C. 39). Springer Science & Business Media.

Baran, S., Dalgic, A., & Kerimov, G. (2001). On solvable potentials related to SO (2, 2). *Journal of Mathematical Physics*, *42*(2), 543–561.

Belinfante, J. G., & Kolman, B. (1989). *A survey of Lie groups and Lie algebras with applications and computational methods*. SIAM.

Bergmann, K., Theuer, H., & Shore, B. (1998). Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, *70*(3), 1003.

Boller, K.-J., Imamoğlu, A., & Harris, S. E. (1991). Observation of electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, *66*(20), 2593.

Boscain, U., Chambrion, T., & Charlot, G. (2004). Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy. *arXiv preprint quant-ph/0409022*.

Boscain, U., Chambrion, T., & Gauthier, J.-P. (2002). On the K+ P problem for a three-level quantum system: Optimality implies resonance. *Journal of Dynamical and Control Systems*, *8*(4), 547–572.

Boscain, U., Charlot, G., Gauthier, J.-P., Guérin, S., & Jauslin, H.-R. (2002). Optimal control in laser-induced population transfer for two-and three-level quantum systems. *Journal of Mathematical Physics*, *43*(5), 2107–2132.

Boscain, U., & Mason, P. (2005). Time minimal trajectories for two-level quantum systems with drift. *Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control*, 3188–3193.

Boscain, U., & Mason, P. (2006). Time minimal trajectories for a spin 1/ 2 particle in a magnetic field. *Journal of Mathematical Physics*, *47*(6), 062101.

Boscain, U., Sigalotti, M., & Sugny, D. (2021). Introduction to the Pontryagin maximum principle for quantum optimal control. *PRX Quantum*, *2*(3), 030203.

Bredon, G. E. (1972). *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press.

Brockett, R. W. (1973). Lie algebras and Lie groups in control theory. *Geometric Methods in System Theory: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at London, England, August 27-September 7, 1973*, 43–82.

Campos Venuti, L., D'Alessandro, D., & Lidar, D. A. (2021). Optimal Control for Closed and Open System Quantum Optimization. *arXiv e-prints*, arXiv–2107.

D'Alessandro, D. (2021). *Introduction to quantum control and dynamics*. CRC press.

D'Alessandro, D., Sheller, B. A., & Zhu, Z. (2020). Time-optimal control of quantum lambda systems in the KP configuration. *Journal of Mathematical Physics*, *61*(5), 052107.

De Seze, F., Louchet, A., Crozatier, V., Lorgeré, I., Bretenaker, F., Le Gouët, J.-L., Guillot-Noël, O., & Goldner, P. (2006). Experimental tailoring of a three-level Λ system in Tm 3+: YAG. *Physical Review B*, *73*(8), 085112.

de Leon, M., Cortes, J., de Diego, D. M., & Martinez, S. (2004). General symmetries in optimal control. *Reports on Mathematical Physics*, *53*(1), 55–78.

Dong, D., & Petersen, I. R. (2010). Quantum control theory and applications: a survey. *IET control theory & applications*, *4*(12), 2651–2671.

Dong, S.-H., Tang, Y., & Sun, G.-H. (2003). On the controllability of a quantum system for the Morse potential with a compact group SU (2). *Physics Letters A*, *320*(2-3), 145–153.

Echeverria-Enriquez, A., Marin-Solano, J., Munoz-Lecanda, M., & Roman-Roy, N. (2003). Geometric reduction in optimal control theory with symmetries. *Reports on Mathematical Physics*, *52*(1), 89–113.

Eğrifes, H., Demirhan, D., & Büyükkılıç, F. (2000). Exact solutions of the Schrödinger equation for the deformed hyperbolic potential well and the deformed four-parameter exponential type potential. *Physics Letters A*, *275*(4), 229–237.

Elliott, D. L. (2009). *Bilinear control systems: matrices in action* (C. 169). Springer.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (1965). The feynman lectures on physics; vol. i. *American Journal of Physics*, *33*(9), 750–752.

Fleming, W., & Rishel, R. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag.

Flügge, S. (1999). *Practical quantum mechanics* (C. 177). Springer Science & Business Media.

Frank, A., & Wolf, K. B. (1984). Lie algebras for potential scattering. *Physical review letters*, *52*(20), 1737.

Gallier, J. Q., & Quaintance, J. (2020). *Differential geometry and lie groups* (C. 12). Springer.

Garon, A., Glaser, S., & Sugny, D. (2013). Time-optimal control of SU(2) quantum operations. *Physical Review A*, *88*(4), 043422.

Gilmore, R. (2008). *Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists*. Cambridge University Press.

Golubitsky, M., & Stewart, I. (2015). Symmetry methods in mathematical biology. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, *9*, 1–36.

Greiner, W., & Müller, B. (2012). *Quantum mechanics: symmetries*. Springer Science & Business Media.

Grizzle, J., & Marcus, S. (1984). Optimal control of systems possessing symmetries. *IEEE transactions on automatic control*, *29*(11), 1037–1040.

Grizzle, J., & Marcus, S. (1985). The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *30*(3), 248–258.

Helgason, S. (1984). *Groups and geometric analysis: integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions* (C. 83). American Mathematical Society.

Helgason, S. (1994). Sophus Lie, the mathematician. *Contenido en Proceedings of The Sophus Lie Memorial Conference, Oslo*, 3–21.

Hernández, I., Mateos, C., Núñez, J., & Tenorio, Á. F. (2009). Lie theory: applications to problems in mathematical finance and economics. *Applied Mathematics and Computation*, *208*(2), 446–452.

Iachello, F. (2006). *Lie algebras and applications* (C. 12). Springer.

Isik, Y., & Sezgin, M. (2018). The Gauss decomposition for the group SL (2, $\mathbb{R}$) and Casimir operator. *AIP Conference Proceedings*, *1997*(1), 020080.

Jordaan, K., & Toókos, F. (2014). Orthogonality and asymptotics of Pseudo-Jacobi polynomials for non-classical parameters. *Journal of Approximation Theory*, *178*, 1–12.

Jurdjevic, V. (1997). *Geometric control theory*. Cambridge university press.

Jurdjevic, V., & Sussmann, H. J. (1972). Control systems on Lie groups. *Journal of Differential equations*, *12*(2), 313–329.

Kalnins, E., Miller, W., & Pogosyan, G. (2002). The Coulomb-oscillator relation on n-dimensional spheres and hyperboloids. *Physics of Atomic Nuclei*, *65*, 1086–1094.

Katzir, S. (2004). The emergence of the principle of symmetry in physics. *Historical studies in the physical and biological sciences*, *35*(1), 35–65.

Kerimov, G. (2003). Correspondence between quantum field theory on Riemannian and pseudo-Riemannian space of positive constant curvature. *Physics Letters B*, *567*(1-2), 133–138.

Kerimov, G. (2009). Exactly solvable position-dependent mass Hamiltonians related to non-compact semi-simple Lie groups. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *42*(44), 445210.

Kerimov, G., & Seckin-Gorgun, N. (2002). On scattering systems related to the SO (2, 1) group: II. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *35*(31), 6659.

Kerimov, G., & Sezgin, M. (1999). On scattering systems related to the SO(2, 1) group. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *31*, 7901. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/39/007

Klimyk, A., & Vilenkin, N. Y. (1991). *Representations of Lie groups and special functions* (C. 1). Kluwer Academic Publishers.

Klimyk, A., & Vilenkin, N. Y. (1993). *Representations of Lie groups and special functions* (C. 2). Kluwer Academic Publishers.

Koekoek, R., Lesky, P. A., Swarttouw, R. F., Koekoek, R., Lesky, P. A., & Swarttouw, R. F. (2010). *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-Analogues*. Springer.

Lu, M., & Li, F. (2020). Survey on lie group machine learning. *Big Data Mining and Analytics*, *3*(4), 235–258.

Lüdeling, C. (2010). Group Theory for Physicists. *Lecture Notes, Bonn*, 2010.

Morse, P. M. (1929). Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels. *Physical review*, *34*(1), 57.

Nielsen, M. A., & Chuang, I. (2002). Quantum computation and quantum information.

Nijmeijer, H., & Van der Schaft, A. (1982). Controlled invariance for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *27*(4), 904–914.

Noether, E. (1918). Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, *1918*, 235–257. http://eudml.org/doc/59024

Ohsawa, T. (2013). Symmetry reduction of optimal control systems and principal connections. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *51*(1), 96–120.

Olshanetsky, M., & Perelomov, A. M. (1979). Explicit solutions of classical generalized Toda models. *Inventiones mathematicae*, *54*(3), 261–269.

Olshanetsky, M. A., & Perelomov, A. M. (1981). Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras. *Physics Reports*, *71*(5), 313–400.

Olshanetsky, M. A., & Perelomov, A. M. (1983). Quantum integrable systems related to Lie algebras. *Physics Reports*, *94*(6), 313–404.

Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations* (C. 107). Springer Science & Business Media.

Pöschl, G., & Teller, E. (1933). Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Zeitschrift für Physik*, *83*(3-4), 143–151.

Raczka, R., & Barut, A. O. (1986). *Theory of group representations and applications*. World Scientific Publishing Company.

Rau, A. R. P. (2014). *The Beauty of Physics: Patterns, Principles, and Perspectives*. OUP Oxford.

Robinson, D. J. (2012). *A Course in the Theory of Groups* (C. 80). Springer Science & Business Media.

Samelson, H. (1952). Topology of Lie groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *58*(1), 2–37.

Selig, J. M. (2004). Lie groups and lie algebras in robotics. *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, 101–125.

Sezgin, M., Verdiyev, A., & Verdiyev, Y. (1998). Generalized Pöschl–Teller, Toda, Morse potentials and SL (2, R) group. *Journal of Mathematical Physics*, *39*(4), 1910–1918.

Sezgin, M., & Verdiyev, Y. (2004). Laplace-Beltrami operator on symmetric space X≡ SOo (2, 3)/SO (2)× SO (3) of rank 2 and the related 2-body one dimensional quantum systems. *Reports on Mathematical Physics*, *53*(3), 351–361.

Sezgin, M. (2012). The Casimir Operator of the Group SO (3, 2). *Far East Journal of Applied Mathematics*, *62*, 37–47.

Sezgin, M., Uysal, F., & Verdiyev, Y. (2001). The Casimir operators of the group SO(1,3) for various decompositions. *Hadronic Journal*, *24*.

Sussmann, H. (1999). Geometry and optimal control. *Mathematical control theory*, 140–198.

Symmetry and Symmetry Breaking. (2023). 25 Nisan 2023 tarihinde https://plato.stanford.edu/entries/symmetry-breaking/ adresinden erişildi.

Van der Schaft, A. (1987). Symmetries in optimal control. *SIAM journal on control and optimization*, *25*(2), 245–259.

Vvedensky, D. (2001). *Group Theory Lecture Notes*. https://archive.org/details/grouptheorybyDimitriV/mode/2up

Wei, G.-F., & Dong, S.-H. (2011). Algebraic approach to energy spectra of the Scarf type and generalized Pöschl–Teller potentials. *Canadian Journal of Physics*, *89*(12), 1225–1231.

Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.

Wickramasekara, S. (1997). Interior symmetries of hadrons: SO (3, 2) as a spectrum-generating group. *International Journal of Theoretical Physics*, *36*, 2409–2437.

Wigner, E. P. (1967). *Symmetries and reflections*. Indiana University Press.

Wigner, E. P. (2012). *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra* (C. 5). Elsevier.

Woit, P. (2017). *Quantum Theory, Groups and Representations*. Springer.

Wu, J., & Alhassid, Y. (1990). The potential group approach and hypergeometric differential equations. *Journal of mathematical physics*, *31*(3), 557–562.

Wybourne, B. (1973). Lie algebras in quantum chemistry: Symmetrized orbitals. *International Journal of Quantum Chemistry*, *7*(6), 1117–1137.

Zhelobenko, D. P. (1973). *Compact Lie groups and Their Representations* (C. 40). American Mathematical Soc.

EKLER

EK A

Maliyet Fonksiyonunun Ölçeklendirilmesi

Genel formu

$$\frac{dx}{dt} = \sum_j f_j(x)u_j$$

şeklinde verilen bir kontrol sistemi için

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_R(\bar{t}, Q) = \int_0^{\bar{t}} \left[u^T(t)Ru(t) + x(t)^T Qx(t)\right] dt$$

maliyetini minimize eden ve nüfusu M_{in} başlangıç alt manifoldundan M_{fin} bitiş manifolduna $\bar{t}$ sürede transfer eden kontrol problemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

Önerme A.1. *Pozitif bir α için*

$$\mathbf{J}_R(\bar{t}, Q) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{J}_R(\bar{t}, \alpha^2 Q). \tag{A.1}$$

Kanıt. $u = u(t)$, $[0, \bar{t}]$ aralığında $x = x(t)$ yörüngeli, $\mathbf{J}_R(\bar{t}, Q)$ maliyetli optimal kontrol olsun. Bu durumda $v(t) := \frac{1}{\alpha}u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ bir kontrol ve $y(0) = x(0) \in M_{in}, y(\alpha\bar{t}) = x(\bar{t}) \in M_{fin}$ olmak üzere ilgili yörünge $y(t) := x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ halini alır. Gerçekten de

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\alpha}\frac{dx(s)}{ds}\Big|_{s=\frac{t}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sum_j f_j\left(x\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right)u\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \sum_j f_j(y(t))v_j(t).$$

Buradan ilgili maliyet fonksiyonu

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha\bar{t}} \left[v^T(t)Rv(t) + y^T(t)Qy(t)\right]dt &= \int_0^{\alpha\bar{t}} \left[\frac{1}{\alpha^2}u^T\left(\frac{t}{\alpha}\right)Ru\left(\frac{t}{\alpha}\right) + x^T\left(\frac{t}{\alpha}\right)Qx\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\bar{t}} \left[u^T(s)Ru(s) + x^T(s)\alpha^2 Qx(s)\right]ds \qquad \text{(A.2)}\end{aligned}$$

halini alır. Bu maliyet $[0, \bar{t}]$ aralığında optimal olmak zorundadır. Eğer optimal olmasaydı, $\alpha\bar{t}$ süresinde aynı durum transferini gerçekleştiren bir kontrol ve daha küçük bir maliyet olurdu. Bu durumda bu tartışmayı tersine yapıp $\bar{t}$ anında u'nun maliyetinden daha düşük bir maliyetli bir kontrol bulunabilirdi. Fakat bu durum u'nun optimal kontrol olması ile çelişir. Bu nedenle (A.2) eşitliğinin sol tarafındaki terim $\mathbf{J}_R(\alpha\bar{t}, Q)$'dir. Eşitliğin sağ tarafındaki son integral ise $\mathbf{J}_R(\bar{t}, \alpha^2 Q)$'dir. Sonuç olarak (A.1) eşitliği elde edilir.

(A.1) eşitliğinden $\bar{t} = 1$ için $\mathbf{J}_R(\bar{t}, Q)$ fonksiyonunu ve keyfi Q değerini bilmek yeterlidir. Gerçekten de $\bar{t} = 1$ için (A.1)'den

$$\mathbf{J}_R(\bar{t}, Q) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{J}_R(1, \alpha^2 Q) \qquad \text{(A.3)}$$

elde edilir. ■

Bu formül ele aldığımız probleme uygulanırsa, (4.6)'daki $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\bar{t}, k_0)$ maliyet fonksiyonu için

$$\mathbf{J}(\bar{t}, k_0) = \frac{1}{\bar{t}}\mathbf{J}(1, \bar{t}^2 k_0) \qquad \text{(A.4)}$$

elde edilir. Dolayısıyla problemin çözümünün yapıldığı Bölüm 4.3'te $\bar{t} = 1$ seçilerek işlem yapılabilir.

EK B

Maliyet Fonksiyonu İçin Bir Üst Sınır Belirlenmesi

k_0'ın bir fonksiyonu olarak $\mathbf{J} = \mathbf{J}(1, k_0)$ maliyet fonksiyonunun bir üst sınırını belirlemek için (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002) makalesinde minimum enerji problemi için elde edilen kontrollerden faydalanacağız. Bu makalede ekstremaller yalnızca enerjinin minimize olduğu durumlar için hesaplanmıştır. Bu durum ele aldığımız problemde $k_0 = 0$ olduğu duruma karşılık gelir. Makaledeki formüllerden, kontroller ve yörüngeler (bknz. (4.3))[1] a ve b şeklinde iki parametreye bağlı olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a\sin(bt)\, e^{-i(\theta_1-\theta_2)}, \\ u_2(t) &= a\cos(bt)\, e^{i\theta_1} \end{aligned}$$

ve

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \left[\frac{b}{c}\sin(ct)\cos(bt) - \sin(bt)\cos(ct)\right] e^{i\theta_2} \\ \frac{a}{c}\sin(ct)\, e^{i\theta_1} \\ \frac{b}{c}\sin(bt)\sin(ct) + \cos(bt)\cos(ct) \end{pmatrix}$$

formlarında elde edilir.

Başlangıç ve final koşulları a ve b değerleri üzerinde, k_1 ve k_2 tam sayı olmak üzere

$$b = (2k_1+1)\frac{\pi}{2}, \qquad a^2 + b^2 = k_2^2\pi^2$$

şeklinde kısıtlamalar elde etmemizi sağlar. $k_2 \neq 0$ olduğu açıktır. $k_2 \geq 1$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $a^2 = k_2^2\pi^2 - (2k_1+1)^2\frac{\pi^2}{4} > 0$, yani

$$4k_2^2 - (2k_1+1)^2 > 0$$

[1]Bu çalışmada ele alınan problem için optimal geodezikler (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002) makalesindeki geodezikler gibi arclength ile parametrize edilmediğinden bir yerine iki parametrelidirler. Ayrıca bahsi geçen makalede nüfus transferi 1 durumundan 3 durumuna iken bu çalışmada ele alınan problemde 3 durumundan 1 durumunadır. Dolayısıyla makaleden alınan formüller bu farklılıklara göre yeniden düzenlenmiştir.

olduğu kolayca görülür. Bu durumda, yukarıda ifadeleri verilen kontrol ve yörüngeler yardımıyla bir ekstremale karşılık gelen a, b değerli (4.6) maliyet fonksiyonu

$$\mathbf{J}(a,b) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u^\dagger(t)u(t) + k_0|\psi_2|^2\right]dt = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 k_0}{2(a^2+b^2)}$$

formunu alır. Bu ifade k_1 ve k_2 cinsinden yazılırsa minimum enerji problemi için ekstremallere karşılık gelen maliyet

$$\mathbf{J}(a,b) = \frac{\pi^2}{8}\left(4k_2^2 - (2k_1+1)^2\right)\left(1 + \frac{k_0}{k_2^2\pi^2}\right)$$

şeklinde elde edilir. Uygun bir (k_1, k_2) ikilisi için bu ifade $\mathbf{J}(1, k_0)$ maliyetinin bir üst sınırını verir. Bu üst sınırı olabildiğince küçük elde etmek için bu ifade k_1 ve k_2'ye göre minimize edilebilir. Bunun için bir $\min_{k_2}\min_{k_1}$ yöntemi uygulayabiliriz. Öncelikle k_2 sabitlenirse, bu ifadenin k_1'e göre minimumu $|2k_1+1| = 2k_2 - 1$ değeri için

$$\mathbf{J}(a,b) = \frac{\pi^2}{8}(4k_2 - 1)\left(1 + \frac{k_0}{k_2^2\pi^2}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonun minimumu (yani bu yöntem yardımıyla elde edilebilecek en iyi üst sınır) k_0 değerine bağlı olacaktır. $k_2 = 1$ seçilirse $k_0 \leq 2\pi^2$ için[2] bu değer

$$\hat{B} = \frac{3\pi^2}{8}\left(1 + \frac{k_0}{\pi^2}\right) \tag{B.1}$$

üst sınırını verir. Gerçekten de elde ettiğimiz bu üst sınır (Boscain, Chambrion & Gauthier, 2002) makalesindeki $k_0 = 0$ durumunun gerçek optimal maliyeti ile örtüşmektedir.

[2] $\tilde{k} := \frac{k_0}{\pi^2}$ olmak üzere, $x \geq 1$ için $f(x) = (4x-1)\left(1 + \frac{\tilde{k}}{x^2}\right)$ fonksiyonunu ele alalım. Buradan $\frac{1}{2}x^3 f'(x) = 2x^3 - 2\tilde{k}x + \tilde{k}$ elde ederiz ki bu ifade $\tilde{k} < 2$ ve her $x \geq 1$ için pozitiftir.

EK C

Reelleştirme İzomorfizması

Her $A \in \mathfrak{su}(n)$ matrisi, her ikisi de reel olmak üzere A_R anti simetrik matris ve A_I izi sıfır olan simetrik matrisler yardımıyla $A := A_R + iA_I$ şeklinde yazılabilir.

$$\phi \; : A_R + iA_I \rightarrow \begin{pmatrix} A_R & -A_I \\ A_I & A_R \end{pmatrix}$$

dönüşümü $\mathfrak{su}(n)$ Lie cebirinden $\mathfrak{so}(2n)$ Lie alt cebirine tanımlı bir izomorfizma tanımlar. Burada $\mathfrak{so}(2n)$ cebirini $\mathfrak{su}^R(n)$ ile ifade edeceğiz. Bu izomorfizma yardımıyla $\dot{\psi} = -iH(u)\psi$ kuantum Schrödinger denklemi

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_R \\ \dot{\psi}_I \end{pmatrix} = \Phi\left(-iH(u)\right)\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_I \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

C.1 $\mathfrak{su}(3)$ ve $\mathfrak{su}^R(3)$ için Taban Belirleme

$\mathfrak{su}(3)$ cebiri için bir taban

$$\{R_{12}, R_{13}, R_{23}, I_{12}, I_{13}, I_{23}, D_{12}, D_{13}\}$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$R_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{13} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{23} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{12} := \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{13} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{23} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{12} := \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_{13} := \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Bu durumda yukarıda verilen izomorfizma yardımıyla $\mathfrak{su}^R(3)$ için bir taban

$$\left\{\hat{R}_{12}, \hat{R}_{13}, \hat{R}_{23}, \hat{I}_{12}, \hat{I}_{13}, \hat{I}_{23}, \hat{D}_{12}, \hat{D}_{13}\right\}$$

olmak üzere

$$\hat{R}_{12} = \phi(R_{12}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{13} = \phi(R_{13}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}_{23} = \phi(R_{23}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{I}_{12} = \phi(I_{12}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{I}_{13} = \phi(I_{13}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{I}_{23} = \phi(I_{23}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_{12} := \phi(D_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{D}_{13} := \phi(D_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile verilir.

EK D

Optimal Kontrolün Normal Ekstremal Olması

$\mu_0 = 0$ durumunda, λ yardımcı durum vektörü için verdiğimiz (4.25) denklemi, (4.9) denklemindeki tüm matrisler anti simetrik olduğundan bu denklem ile aynı forma sahiptir, yani

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\hat{R}_{12}u_{1R} + \hat{R}_{23}u_{2R} + \hat{I}_{12}u_{1I} + \hat{I}_{23}u_{2I}\right)\lambda. \tag{D.1}$$

İlerleyen adımlarda kullanılmak üzere $su(3)$ Lie cebirinin komütasyon bağıntıları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge D.1. $\mathfrak{su}(3)$ Lie cebirinin komütasyon bağıntıları

$[\cdot,\cdot]$	R_{13}	I_{13}	D_{12}	D_{13}	R_{12}	I_{12}	R_{23}	I_{23}
R_{13}	0	$2D_{13}$	$-I_{13}$	$-2I_{13}$	R_{23}	$-I_{23}$	$-R_{12}$	I_{12}
I_{13}	$*$	0	R_{13}	$2R_{13}$	I_{23}	R_{23}	$-I_{12}$	$-R_{12}$
D_{12}	$*$	$*$	0	0	$2I_{12}$	$-2R_{12}$	$-I_{23}$	R_{23}
D_{13}	$*$	$*$	$*$	0	I_{12}	$-R_{12}$	I_{23}	$-R_{23}$
R_{12}	$*$	$*$	$*$	$*$	0	$2D_{12}$	R_{13}	I_{13}
I_{12}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	I_{13}	$-R_{13}$
R_{23}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0	$2D_{13}-2D_{12}$
I_{23}	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	0

Şimdi $r_{jk}(t) := \lambda^T(t)\hat{R}_{jk}\vec{x}(t)$, $s_{jk}(t) := \lambda^T(t)\hat{I}_{jk}\vec{x}(t)$ ve $d_{jk}(t) := \lambda^T(t)\hat{D}_{jk}\vec{x}(t)$ tanımları yapalım. Pontryagin maksimum ilkesinden, normal olmayan bir ekstremal boyunca

$$r_{12} = 0, \quad s_{12} = 0, \quad r_{23} = 0, \quad s_{23} = 0 \tag{D.2}$$

elde edilir. $r_{jk}(t), s_{jk}(t)$ ve $d_{jk}(t)$'nin türevleri alınırsa, (4.8) ve (D.1) denklemleri ile D.1

tablosu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{13} &= r_{23}u_1 - s_{23}u_2 - r_{12}u_3 + s_{12}u_4 \\
\dot{s}_{13} &= s_{23}u_1 + r_{23}u_2 - s_{12}u_3 - r_{12}u_4 \\
\dot{d}_{12} &= 2s_{12}u_1 - 2r_{12}u_2 - s_{23}u_3 + r_{23}u_4 \\
\dot{d}_{13} &= s_{12}u_1 - r_{12}u_2 + s_{23}u_3 - r_{23}u_4 \\
\dot{r}_{12} &= 2d_{12}u_2 + r_{13}u_3 + s_{13}u_4 \\
\dot{s}_{12} &= -2d_{12}u_1 + s_{13}u_3 - r_{13}u_4 \\
\dot{r}_{23} &= -r_{13}u_1 - s_{13}u_2 + 2(d_{13} - d_{12})u_4 \\
\dot{s}_{23} &= -s_{13}u_1 + r_{13}u_2 - 2(d_{13} - d_{12})u_3
\end{aligned} \tag{D.3}$$

denklemleri elde edilir. Burada $u_1 := u_{1R}$, $u_2 := u_{1I}$, $u_3 := u_{2R}$, $u_4 := u_{2I}$ notasyonunu kullandık. Buradan (D.2) yardımıyla

$$\dot{r}_{13} = \dot{s}_{13} = \dot{d}_{12} = \dot{d}_{13} = 0,$$

elde edilir. Yani r_{13}, s_{13}, d_{12} ve d_{13} sabit fonksiyonlardır. Ayrıca, başlangıç ve final koşulları sırasıyla $\vec{x}(0) = (0, 0, *, 0, 0, *)^T$ ve $\vec{x}(\bar{t}) = (*, 0, 0, *, 0, 0)^T$ formunda olduğundan $d_{12} = d_{13} = 0$ bulunur. Bunlar (D.3)'ün son dört denkleminde kullanılırsa, (D.2)'den eşitliklerin sağ tarafı sıfır olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} & s_{13} \\ 0 & 0 & s_{13} & -r_{13} \\ -r_{13} & -s_{13} & 0 & 0 \\ -s_{13} & r_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $(r_{13}^2 + s_{13}^2)^2$'ye eşittir. Eğer bu determinant 0'dan farklı ise $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ olmalıdır. Fakat bu durumda başlangıç koşulunun istenilen final koşuluna taşınması imkansız olacağından $r_{13} = s_{13} = 0$ olmalıdır. Bu durumda aşağıdaki önermeye varılır:

Önerme D.1. *Her $A \in su^R(3)$ için, normal olmayan bir ekstremal*

$$\lambda^T(t) A \vec{x}(t) \equiv 0 \tag{D.4}$$

eşitliğini sağlar.

(D.4) koşulunun yanında, λ'nın S^5'in kotanjant demetindeki bir elemanın fiber koordinatını temsil ettiğini hatırlayalım. S^5'in $\vec{x}$ noktasındaki bir tanjant uzayı $\mathbb{R}^6$'da $\vec{x}$'e dik olan vektörler olduğundan her t için $\lambda^T(t)\vec{x}(t) = 0$ olmalıdır. Bu durum (D.4) kısıtlaması ile birleştirilirse $su^R(3)$'ün bir tabanı yardımıyla, her t anında λ'nın $\lambda^T F(\vec{x}) = 0$ homojen sistemini sağlaması gerekir. Burada $F(\vec{x})$, ilk sekiz sütunun $su^R(3)$'ün taban

elemanları ve son sütunun $\vec{x}$ olduğu 6×9'luk matristir, yani

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_{2R} & x_{3R} & 0 & -x_{2I} & -x_{3I} & 0 & -x_{1I} & -x_{1I} & x_{1R} \\ -x_{1R} & 0 & x_{3R} & -x_{1I} & 0 & -x_{3I} & x_{2I} & 0 & x_{2R} \\ 0 & -x_{1R} & -x_{2R} & 0 & -x_{1I} & -x_{2I} & 0 & x_{3I} & x_{3R} \\ x_{2I} & x_{3I} & 0 & x_{2R} & x_{3R} & 0 & x_{1R} & x_{1R} & x_{1I} \\ -x_{1I} & 0 & x_{3I} & x_{1R} & 0 & x_{3R} & -x_{2R} & 0 & x_{2I} \\ 0 & -x_{1I} & -x_{2I} & 0 & x_{1R} & x_{2R} & 0 & -x_{3R} & x_{3I} \end{pmatrix}. \tag{D.5}$$

Bu matrisi $x_{2R} = x_{3R} = x_{2I} = x_{3I} = 0$ and $x_{1R}^2 + x_{1I}^2 = 1$ final noktasında ele alalım. Bu noktada $F(\vec{x})$ matrisinin rankı 6 olup bu $\lambda = 0$ olduğu anlamına gelir. Fakat $\lambda = 0$ ve $\mu_0 = 0$ Pontryagin maksimum ilkesi ile çelişir.

Önerme D.2. *Doluluk maliyetli bir nüfus transferi probleminin optimal kontrolü normal bir ekstremaldir.*

Optimal kontrolün normal bir ekstremal olmasının önemli bir sonucu aşağıdaki önerme ile verilebilir.

Önerme D.3. $(\vec{x}, \vec{u})$ *şeklindeki bir optimal ikili* $[0, \bar{t}]$*'de* t*'nin analitik bir fonksiyonudur.*

Kanıt. Ele aldığımız problem için (4.25) sistemi, $\vec{x}$'in analitik bir Q matris fonksiyonu için $\frac{d}{dt}\vec{x} = Q(\vec{x})\vec{u}$ formunda olup, normal durumda (4.22) Hamiltonyen'i $\vec{x}$'in analitik bir h fonksiyonu için $H = \lambda^T Q(\vec{x}) - \frac{1}{2}u^T u - h(\vec{x})$ formundadır. (4.23) maksimizasyon koşulundan $\vec{u} = Q^T(\vec{x})\lambda$ elde edilir ve (4.25) yardımcı durum denklemleri $\dot{\lambda} = Q(\lambda)u + L_x$ formunu alır. $\vec{u} = Q^T\lambda$ olduğundan $(\vec{x}, \lambda)$ adi bir diferansiyel denklemi sağlar. Dolayısıyla $(\vec{x}, \vec{u})$ analitik fonksiyonlardır.

■

EK E

Dağılımların Rankları

E.1 Δ Kontrol Dağılımının Rankı

Δ kontrol dağılımını üreten (4.10) matrisleri yardımıyla $K := [B_1, C_1, B_2, C_2]$'yi oluşturalım. Önerme 4.1 kullanılarak

$$K^T K = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 0 & -a_{1,3} & -b_{1,3} \\ 0 & x_1+x_2 & -b_{1,3} & a_{1,3} \\ -a_{1,3} & -b_{1,3} & x_2+x_3 & 0 \\ -b_{1,3} & a_{1,3} & 0 & x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Blok matrisler için $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D-CA^{-1}B)$ determinant formülü yardımıyla

$$\det(K^T K) = (x_1+x_2)^2 \det\left(\begin{pmatrix} x_2+x_3 & 0 \\ 0 & x_2+x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{x_1+x_2}\begin{pmatrix} {a_{1,3}}^2+b_{1,3}^2 & 0 \\ 0 & {a_{1,3}}^2+b_{1,3}^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} (x_1+x_2)(x_2+x_3)-({a_{1,3}}^2+b_{1,3}^2) & 0 \\ 0 & (x_1+x_2)(x_2+x_3)-({a_{1,3}}^2+b_{1,3}^2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. $x_j x_k = a_{j,k}^2 + b_{j,k}^2$ ve $x_1+x_2+x_3 = 1$ olduğundan determinant içindeki matrisin köşegen elemanları için

$$x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 = x_2(x_1+x_2+x_3) = x_2 > 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise durum uzayının regüler kısmına ait noktalarda, yani $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ olduğu noktalarda Δ kontrol dağılımının rankının 4 olduğunu gösterir. $K^T K$ matrisinin determinantı x_2^2'dir.

E.2 $\Delta + V$ Dağılımının Rankı

Şimdi ise (4.10) ve (4.31) matrisleri yardımıyla $W := [B_1, C_1, B_2, C_2, A_1, A_2, A_3]$'ü oluşturalım. Bu matrisler kullanılarak kolayca

$$\begin{aligned} A_j^T A_j &= x_j, \quad j = 1,2,3, \\ A_j^T A_k &= 0, \quad j \neq k, \end{aligned} \tag{E.1}$$

ve

$$\begin{gathered} B_1^T A_1 = b_{1,2}, \quad B_1^T A_2 = b_{1,2}, \quad B_1^T A_3 = 0, \\ B_2^T A_1 = 0, \quad B_2^T A_2 = b_{2,3}, \quad B_2^T A_3 = b_{2,3}, \\ C_1^T A_1 = -a_{1,2}, \quad C_1^T A_2 = -a_{1,2}, \quad C_1^T A_3 = 0, \\ C_2^T A_1 = 0, \quad C_2^T A_2 = -a_{2,3}, \quad C_2^T A_3 = -a_{2,3}, \end{gathered}$$

sonuçlarına ulaşılır. Buradan Önerme 4.1 yardımıyla

$$W^T W = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & -a_{1,3} & -b_{1,3} & b_{1,2} & b_{1,2} & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 & -b_{1,3} & a_{1,3} & -a_{1,2} & -a_{1,2} & 0 \\ -a_{1,3} & -b_{1,3} & x_2 + x_3 & 0 & 0 & b_{2,3} & b_{2,3} \\ -b_{1,3} & a_{1,3} & 0 & x_2 + x_3 & 0 & -a_{2,3} & -a_{2,3} \\ b_{1,2} & -a_{1,2} & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ b_{1,2} & -a_{1,2} & b_{2,3} & -a_{2,3} & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,3} & -a_{2,3} & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matrise $R_5 - R_6 + R_7 \to R_5$ elementer satır işlemi uygulanırsa beşinci satır $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_1 \quad -x_2 \quad x_3)$ şeklinde elde edilir. Elde edilen matriste, ilk beş satır ve sütundan oluşan alt matrisin determinantı $x_1 \det(K^T K)$ olur. $\det(K^T K) = x_2^2$ olduğundan bu matrisin determinatı 0'dan farklıdır. Bu ise $\Delta + V$ dağılımının rankının 5 olduğu sonucunu verir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Yasemin Işık

Adres : Trakya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Merkez, Edirne

Eğitim Bilgileri

Lisans : Fatih Üniversitesi - Matematik Bölümü (2010-2014)

Yüksek Lisans : Trakya Üniversitesi - Matematik Bölümü (2015-2017)

Akademik Ünvalar/Görevler

Araştırma Görevlisi : Trakya Üniversitesi, Matematik Bölümü (2015-)

Ziyaretçi Araştırmacı : Iowa State Üniversitesi, Matematik Bölümü (2021-2022)

Yabancı Diller

İngilizce : 125/160 (Advanced) DUOLINGO 2022

Korece : 4/6 (Intermediate) TOPIK 2019

TEZ SIRASINDA GERÇEKLEŞTİRİLEN BİLİMSEL FAALİYETLER

Makale

1. **Y. Isik**, M. Sezgin (2021). Hamiltonian system related to the Casimir operator of the group $SO(3,2)$ for Parabolic Coordinates. *AIP Conference Proceedings, 2325(1)*, 020052.

Konferans Bildirisi

1. The Gram and generalized Cartan decompoitions for the group $SL(2,\mathbb{R})$ and Laplace-Beltrami operator, *International Conference On Mathematical and Related Sciences (ICMRS-2019), Antalya, Turkey, April 27-30, 2019*.

2. Invariant differential operators of the group $SO(3,2)$, *3rd International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM-2020), Van, Turkey, September 3-5, 2019 (webinar)*.

Proje

1. TÜBİTAK 2214-A Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Bursu dahilinde Amerika Birleşik Devletleri Iowa State Üniversitesi'nde 13 Eylül 2021-12 Eylül 2022 tarihleri arasında Prof. Dr. Domenico D'Alessandro danışmanlığında "Kuantum Lambda Sistemlerinin Optimal Kontrolü" konusunda araştırma yapmıştır.