T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

φ-İKİNCİ VE n-YAKLAŞIK İKİNCİ ALT MODÜLLER

Ajlin ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

EDİRNE-2021

Ajlin ÖZKAN'ın hazırladığı "***φ*-İKİNCİ VE n-YAKLAŞIK İKİNCİ ALT MODÜLLER**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **MATEMATİK** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri : İmza

Prof. Dr. Figen ÖKE

Doç. Dr. Serap ÖZCAN

Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

Tez Savunma Tarihi: …/…/2021

Bu tezin Yüksek Lisans olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

24/12/2021

Ajlin ÖZKAN

Yüksek Lisans Tezi

φ-İkinci ve n-Yaklaşık İkinci Alt Modüller

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, φ-ikinci ve n-yaklaşık ikinci alt modüllerin çeşitli cebirsel özellikleri belirlenmiş, bu alt modüllerin literatürde yer alan diğer cebirsel yapılarla olan ilişkileri incelenmiş ve bu alt modül sınıfları vasıtasıyla modül ve halka karakterizasyonları elde edilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

I. Bölümde, asal alt modüller, ikinci alt modüller ve bu kavramların genellemeleri ile ilgili literatür araştırmalarına yer verilmiştir.

II. Bölümde, halka ve modül teori ile ilgili tezde kullanılacak olan ön bilgiler verilmiştir.

III. Bölümde, φ-ikinci alt modüller sınıfı ele alınmış ve bu alt modül sınıfının birtakım cebirsel özellikleri ve karakterizasyonları verilmiştir.

IV. Bölümde, φ-ikinci alt modüllerin özel bir hali olan n-yaklaşık ikinci alt modüller ele alınmış, modül ve halkaların yapısı ile n-yaklaşık ikinci alt modüllerin yapısı ilişkilendirilmiştir. Ayrıca, yaklaşık ikinci radikal ve yaklaşık m^*-sistem kavramları tanımlanmış ve yaklaşık m^*-sistem kümeleri aracılığıyla bir alt modülün yaklaşık ikinci radikalinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

V. Bölümde, III. ve IV. bölümdeki çalışmalar sonrasındaki çıkarımlarımızdan oluşan sonuç ve tartışma bölümü verilmiştir.

Yıl : 2021

Sayfa Sayısı : 66

Anahtar Kelimeler : İkinci alt modül, φ-ikinci alt modül, n-yaklaşık ikinci alt modül,

yaklaşık ikinci radikal, yaklaşık m^*-sistem

Master of Science Thesis

φ-Second and n-Almost Second Submodules

Trakya University Institute of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In this study, various algebraic properties of φ-second and n-almost second submodules were determined, the relations of these submodules with other algebraic e3structures in the literature were examined, and module and ring characterizations were obtained via these submodule classes.

This thesis consists of five chapters.

In Section I, literature researches about prime submodules, second submodules and generalizations of these concepts are given.

In Section II, preliminary information that will be used in the thesis on ring and module theory is given.

In Section III, the class of φ-second submodules is discussed and some algebraic properties and characterizations of this submodule class are given.

In Section IV, n-almost second submodules, which are special case of φ-second submodules, are discussed, the structure of modules and rings and the structure of n-almost second submodules are related. In addition, the concepts of almost second radical and almost m^*-system are defined and a characterization of almost second radical of a submodule is given by means of almost m^*-system sets.

In Section V, the results and discussion section consisting of our conclusions after the studies in Section III and IV are given.

Year : 2021

Number of Pages : 66

Keywords : Second submodule, φ-second submodule, n-almost second submodule, almost second radical, almost m^*-system

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca kendisiyle çalışmaktan onur duyduğum; desteklerinden ve yardımlarından dolayı, çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Seçil ÇEKEN'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Ajlin ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

TEŞEKKÜR ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SEMBOLLER VE KISALTMA DİZİNİ ..... **viii**

BÖLÜM 1 GİRİŞ **1**

BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER **5**

2.1. Sıralı Kümeler ve Halkalar ile İlgili Temel Kavramlar **5**

2.2. Modüller ile İlgili Temel Kavramlar **20**

BÖLÜM 3 φ-İKİNCİ ALT MODÜLLER **34**

BÖLÜM 4 n −YAKLAŞIK İKİNCİ ALT MODÜLLER VE BİR MODÜLÜN YAKLAŞIK İKİNCİ RADİKALİ **41**

BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE TARTIŞMA **52**

KAYNAKLAR **54**

ÖZGEÇMİŞ **58**

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER **59**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subseteq$	Kapsama
$\subsetneq$	Kesin kapsama
$\not\subseteq$	Alt kümesi değil
S^c	S kümesinin tümleyeni
$I \leq R$	I, R'nin bir ideali
$N \leq M$	N, M'nin bir alt modülü
$\text{Çek}(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Gör}(f)$	f homomorfizmasının görüntüsü
$ann_R(M)$	M modülünün, R halkası içindeki sıfırlayanı
$R[x_1, \dots, x_n]$	R halkası üzerinde, $x_1, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı polinomlar halkası
$R[[x_1, \dots, x_n]]$	R halkası üzerinde, $x_1, \dots, x_n$ değişkenlerine bağlı kuvvet serileri halkası
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayıların kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Halka teorisinde bir halkanın tüm öz ideallerinin, bazı özel ideallerin çarpımı ya da arakesiti olarak yazılabilmesi uzun yıllardır ilgi gören önemli bir konudur. Çünkü bu sayede bir öz idealin yapısı çarpımdaki ya da arakesitteki ideallerin elverişli özellikleri yardımıyla daha kolay belirlenebilir. Bu konu üzerindeki araştırmalarda kullanılan en temel araçlar asal idealler ve asal ideallerin çeşitli genellemeleri olmuştur. Örneğin, Dedekind bölgeleri her öz ideali sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak yazılabilen tamlık bölgeleridir ve bu halka sınıfı cebirsel geometri ve cebirsel sayılar teorisindeki birçok çalışmanın temelini oluşturur. Başka bir örnek olarak, her öz ideali, asal ideallerin bir genellemesi olan asalımsı ideallerin sonlu bir arakesiti şeklinde yazılabilen Laskerian halkalar da Noetherian halkaların bir genellemesi olarak değişmeli cebirde önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle, asal ideallerin kapsamını genişletmek ve daha geniş halka sınıflarında çalışabilmek amacıyla asal ideallerin birçok farklı genellemesi yapılmış ve tüm öz idealleri bu genellenmiş asal ideallerin çarpımı ya da arakesiti şeklinde yazılabilen halkalar karakterize edilmeye çalışılmıştır (Anderson ve Smith, 2003; Anderson ve Bataineh, 2008; Bhatwadekar ve Sharma, 2005; Ebrahimpour, 2014; Ebrahimpour ve Nekooei, 2012).

Asal alt modüller Dedekind bölgeleri, Prüfer bölgeleri, aritmetik halkalar gibi önemli halka sınıflarının karakterizasyonlarını verdiği için, değişmeli halka teorisinde önemli bir role sahiptir. Asal alt modül kavramı, ilk olarak 1965 yılında, E. H. Feller ve E. W. Swokowski tarafından tanımlanmıştır (Feller ve Swokowski, 1965). R değişmeli bir halka, M bir R-modül ve N, M'nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ olması $r \in (N:_R M)$ veya $m \in N$ olmasını gerektiriyorsa N'ye M'nin **asal alt modülü** denir (Feller ve Swokowski, 1965). (0), M'nin asal alt modülü ise M'ye **asal modül** denir. Tanım

kullanılarak gösterilebilir ki; *M* asal modüldür ancak ve ancak $M \neq (0)$'dır ve *M*'nin sıfırdan farklı her *K* alt modülü için $ann_R(M) = ann_R(K)$'dır (Feller ve Swokowski, 1965).

Asal alt modüller ile ilgili çalışmalar 1990'lardan itibaren yaygınlaştıktan sonra asal ideallerin genellemelerinin modül teorideki karşılıkları araştırılmaya başlanmış ve bu bağlamda asal alt modüllerin birçok farklı genellemesi yapılmıştır (Atani ve Farzalipour, 2007; Behboodi ve Koohy, 2004; Ebrahimpour ve Nekooei, 2013; Khashan, 2012; Moradi ve Azizi, 2015; Saraç, 2009; Zamani, 2010). Örneğin, Zamani, (2010) makalesinde φ-asal alt modüller ile n-yaklaşık asal alt modüller tanımlanmış ve bu alt modül sınıflarının çeşitli özellikleri araştırılmıştır.

Tez kapsamında asal ideallerin genellemelerinden hafif asal, yaklaşık asal ve ϕ-asal idealler etkin bir biçimde kullanılacaktır. Şimdi bu ideallerin ve bunların modül teorideki alt modül karşılıklarının tanımlarını vererek önemlerini açıklayalım. Değişmeli halkaların hafif asal idealleri 2003 yılında D. Anderson ve E. Smith tarafından Anderson ve Smith, (2003) makalesinde tanımlanmıştır. *R* değişmeli bir halka ve *P*, *R*'nin bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ olmak üzere, $0 \neq ab \in P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa *P*'ye *R*'nin **hafif asal ideali** denir. Anderson ve Smith, (2003) makalesinde hafif asal ideallerin birtakım karakterizasyonları verilmiş ve asal idealler ile olan benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyulmuştur. Ayrıca her öz ideali ve her temel ideali hafif asal ideallerin bir çarpımı olarak yazılabilen değişmeli halkalar tamamen karakterize edilmiştir. Atani ve Farzalipour, (2007) makalesinde S. Atani hafif asal ideal kavramını hafif asal alt modül kavramına genişletmiştir. *R* değişmeli bir halka, *M* bir *R*-modül ve *N*, *M*'nin bir öz alt modülü olsun. Herhangi $r \in R$ ve $m \in M$ için, $0 \neq rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N :_R M)$ olmasını gerektiriyorsa, *N*'ye *M*'nin bir **hafif asal alt modülü** denir (Atani ve Farzalipour, 2007). 2005 yılında S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma, Bhatwadekar ve Sharma, (2005) makalesinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeleri incelemek için yaklaşık asal ideal kavramını tanımlamışlardır: *R* değişmeli bir halka olsun. $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in P \backslash P^2$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa *P*'ye *R*'nin **yaklaşık asal ideali** denir (Bhatwadekar ve Sharma, 2005). Daha genel olarak, $n \geq 2$, $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in P \backslash P^n$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa *P*'ye *R*'nin **n-yaklaşık asal ideali** denir (Anderson ve Bataineh, 2008). Bu tanımlardan anlaşılmaktadır ki: değişmeli bir halkada;

$$Asal\ ideal \Longrightarrow Hafif\ asal\ ideal \Longrightarrow (n+1)-yaklaşık\ asal\ ideal$$
$$\Longrightarrow n-yaklaşık\ asal\ ideal \Longrightarrow Yaklaşık\ asal\ ideal$$

gerektirmeleri doğrudur. Ancak Anderson ve Bataineh, (2008) makalesinde, bu gerektirmelerin tersine çevrilemeyeceği aksi örnekler verilerek gösterilmiştir. Anderson ve Bataineh, (2008) makalesinde asal, hafif asal ve yaklaşık asal idealleri çatısı altına alan ϕ-asal idealler tanımlanarak bu ideal sınıfının birtakım özellikleri ortaya koyulmuş ve her öz ideali yaklaşık asal ideallerin bir çarpımı olan değişmeli halkaların tam bir karakterizasyonu verilmiştir. *R* değişmeli bir halka, *S(R) R*'nin tüm ideallerinin kümesi, $\phi: S(R) \longrightarrow S(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve *I*, *R*'nin bir öz ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in I \backslash \phi(I)$ olması $x \in I$ veya $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa *I*'ya *R*'nin ϕ-asal ideali denir (Anderson ve Bataineh, 2008). Zamani, (2010) makalesinde N. Zamani bu kavramın modül teorideki genellemesi olan ϕ-asal alt modülleri tanımlamıştır: *R* değişmeli bir halka, *M* bir *R*-modül, $\phi: S(M) \rightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve *N*, *M*'nin bir öz alt modülü olsun. $r \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rx \in N \backslash \phi(N)$ olması $r \in (N:_R M)$ veya $x \in N$ olmasını gerektiriyorsa *N*'ye *M*'nin **ϕ-asal alt modülü** denir. Özel olarak, $\phi_0: S(M) \rightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$, $\phi_0(N)=(0)$ $(\forall N \in S(M))$ olarak tanımlanan ϕ_0 fonksiyonu için bir alt modülün ϕ_0-asal olması ile hafif asal olması denktir. Ayrıca $\phi_n: S(M) \rightarrow S(M) \cup \{\emptyset\}$, $\phi_n(N) = (N:_R M)^{n-1}N$ $(\forall N \in S(M))$ olarak tanımlanan ϕ_n fonksiyonu için ϕ_n-asal bir alt modüle **n-yaklaşık asal alt modül** denir. ϕ_2-asal bir alt modüle de kısaca **yaklaşık asal alt modül** denir. Bu tanımlardan, alt modüller için aşağıdaki gerektirmelerin doğru olduğu görülmektedir.

$$Asal\ altmodül \Longrightarrow Hafif\ asal\ altmodül \Longrightarrow (n+1)-\text{yaklaşık asal alt modül}$$
$$\Longrightarrow n-yaklaşık\ asal\ altmodül\ (n \geq 2) \Longrightarrow Yaklaşık\ asal\ altmodül$$

Moradi ve Azizi, (2015) ve Zamani, (2010) makalelerinde bu gerektirmelerin tersine çevrilemeyeceği aksi örnekler verilerek gösterilmiştir.

R değişmeli bir halka, *M* bir *R*-modül ve $(0) \neq N \leq M$ olsun. Her $a \in R$ için $aN = (0)$ veya $aN = N$ ise *N*'ye *M*'nin **ikinci** alt modülü denir (Yassemi, 2001). *N* alt modülü içinde kapsanan tüm ikinci alt modüllerin toplamına *N*'nin ikinci radikali denir ve *sec(N)* ile gösterilir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2013; Çeken, Alkan, Smith, 2013b). Çeken, Alkan ve Smith, (2013b) makalesinde m^*-sistem kavramı tanımlanarak bir alt modülün ikinci radikali m^*-sistem kümeleri vasıtasıyla karakterize edilmiştir. Bu tezde tanımlanacak olan yeni kavramlar sayesinde ikinci radikal ve m^*-sistem kavramlarının bir genellemesi

sunulacak ve ikinci radikaller için elde edilen sonuçlar daha genel bir kapsama genişletilecektir. İkinci alt modüller ve alt modüllerin ikinci radikalleri ile ilgili daha fazla bilgi (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2013; Çeken, Alkan ve Smith, 2013a; Çeken vd., 2013b; Çeken ve Alkan, 2015; Yassemi, 2001) makalelerinde bulunabilir.

Son yıllarda, ikinci alt modüller ile ilgili çalışmaların artması ile birlikte, bu alt modül sınıfının genellemeleri araştırılmaya başlanmış, bunun için asal alt modüllerin genellemelerinin dual kavramları tanımlanmaya çalışılmış ve bu alt modül sınıflarının da ilginç ve önemli cebirsel özelliklere sahip oldukları görülmüştür (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2019; Ansari-Toroghy, Farshadifar ve Maleki-Roudpodhti, 2021; Beyranvand ve Rastgoo, 2016; Çeken ve Alkan, 2016; Çeken, 2019; Farshadifar ve Ansari-Toroghy, 2020).

Tezimizde, Farshadifar ve Ansari-Toroghy, (2020) makalesinde tanımlanan φ-ikinci ve n-yaklaşık ikinci alt modül sınıflarının çeşitli özellikleri araştırılacak, bu yeni alt modül sınıflarının ikinci alt modüller ile olan benzerlikleri ve farklılıkları ortaya konulacak ve böylece ikinci alt modüller için elde edilen sonuçlar daha genel bir kapsama genişletilecektir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1. Sıralı Kümeler ve Halkalar ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. S bir küme ve $\leq$, S üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(S, \leq)$ sistemi

i) Her $a \in S$ için $a \leq a$ (yansıma özelliği)

ii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ (ters simetri özelliği)

iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ iken $a \leq c$ (geçişme özelliği)

özelliklerini sağlıyor ise S'ye **sıralı küme** denir. Eğer $(S, \leq)$ sıralı kümesinde her $a, b \in S$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise bu sıralı kümeye **tam sıralı** denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.2. $(S, \leq)$ sıralı bir küme ve $b \in S$ olsun. S içinde b'den kesin büyük başka bir eleman yoksa b'ye S'nin bir maksimal elemanı denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.3. Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine **zincir** denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Lemma 2.1.4 (Zorn Lemma) Boştan farklı bir S sıralı kümesinin, her zincirinin S de bir üst sınırı varsa S sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.5. R boş olmayan bir küme, $+$ ve $\cdot$ R üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. Eğer

i) $(R, +)$ değişmeli bir grup,

ii) Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (birleşme özelliği)

iii) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (soldan dağılma) ve $(a + b) \cdot c = a \cdot b + a \cdot c$, (sağdan dağılma)

koşulları sağlanıyor ise R kümesine bu ikili işlemlere göre bir **halka** denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir.

Her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulunu sağlıyorsa R'ye **değişmeli halka** denir.

Her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R'ye **birimli halka** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

R bir halka ise $+$ işleminin birimine halkanın **sıfırı** veya **etkisiz elemanı** denir ve 0_R olarak gösterilir. R halkasının $\cdot$ işlemine göre birim elemanı olmayabilir, eğer varsa bu elemana halkanın **birimi** denir ve 1_R ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.6. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkalardır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.17. $2\mathbb{Z} = \{2n | \, n \in \mathbb{Z}\}$ çift tam sayıların kümesi, tam sayılarda bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli bir halkadır. Fakat birimli değildir. Çünkü $6 \in 2\mathbb{Z}$ için $x.6 = 6$ olacak biçimde bir $x \in 2\mathbb{Z}$ elemanı yoktur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.8. R birimli bir halka ve $a \in R$ olsun.

- **i)** Eğer $c.a = 1_R$ olacak şekilde bir $c \in R$ var ise a elemanına **sol tersinir eleman**, c elemanına da a elemanının **sol tersi** denir.
- **ii)** Eğer $a.b = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ var ise a elemanına **sağ tersinir eleman**, b elemanına da a elemanının **sağ tersi** denir.
- **iii)** Eğer bir $a \in R$ elemanı hem sol tersinir hem de sağ tersinir ise a elemanına **tersinir eleman (birimsel eleman)** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.9. R birimli bir halka olsun. R halkasının bir a elemanının hem sağ hem de sol tersi var ise bunlar aynıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

$(R, +, \cdot)$ bir halka, $a \in R$, $n \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in \mathbb{Z}^-$ olsun. Bu durumda

$$na = \begin{cases} \overbrace{a + a + \ldots + a}^{n \, tane} & n \in \mathbb{Z}^+ \\ 0_R & n = 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{-n \, tane} & n \in \mathbb{Z}^- \end{cases},$$

olarak tanımlanır. R halkası birimli ise $a^0 = 1_R$, a elemanının R halkasında çarpmaya göre tersi a^{-1} var ise $a^t = \overbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}^{-t\ tane}$ olur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.10. $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $a \in R$ olsun. O zaman, $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$'dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.11. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun.

i) Her $a, b \in R$ için $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

ii) Her $a, b \in R$ için $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.12. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun.

i) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a, b \in R$ için $(na) \cdot b = a \cdot (nb) = n(a \cdot b)$

ii) Her $a_i, b_i \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j$

eşitlikleri sağlanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Sonuç 2.1.13. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. O zaman her $a, b \in R$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $(mn)(a \cdot b) = (ma) \cdot (nb) = (na) \cdot (mb)$ eşitlikleri sağlanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.14 (Binom Teoremi) $(R, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka, n pozitif bir tamsayı ve $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ olsun. Bu durumda

i) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

ii) $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$ olmak üzere $(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)^n = \sum \frac{n!}{(i_1!)(i_2!)\ldots(i_s!)} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots . a_s^{i_s}$

eşitlikleri sağlanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.15. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. R halkasında sıfırdan farklı bir a elemanı için $a \cdot b = 0_R$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $b \in R$ var ise a elemanına **sol sıfır bölen** denir. Eğer $c \cdot a = 0_R$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in R$ var ise a elemanına **sağ sıfır bölen** denir. Eğer a hem sağ hem de sol sıfır bölen ise a elemanına **sıfır bölen** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.16. $\mathbb{Z}_6$ halkasında $\bar{2} \neq \bar{0}$ ve $\bar{3} \neq \bar{0}$ olmasına rağmen $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ sıfır bölenli halkadır. $\bar{2}$ ve $\bar{3}$, $\mathbb{Z}_6$ halkasının sıfır bölenleridir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.17. Sıfır bölen bulundurmayan bir halkaya **sıfır bölensiz halka** denir. Yani, bir $(R, +, \cdot)$ halkasının sıfır bölensiz olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $a \cdot b = 0_R$ iken $a = 0_R$ veya $b = 0_R$ olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.18. $\mathbb{Z}$ halkası sıfır bölensiz bir halkadır. Çünkü her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a.b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.19. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasında, $\bar{0} \neq \bar{m}$ elemanının sıfır bölen olması için gerek ve yeter koşul $ebob(m, n) \neq 1$ olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.20. p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}_p$ halkasının sıfır bölenlerini araştıralım. p asal sayı olduğundan p, kendisinden küçük olan bütün pozitif tamsayılar ile aralarında asaldır. O halde $\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ halkasının sıfır bölen elemanı yoktur. Sonuç olarak p **asal sayı ise** $\mathbb{Z}_p$ **sıfır bölensiz halkadır** (Aydın ve Kandamar, 2015).

$(R, +, \cdot)$ halkasında "+" işlemine göre kısaltma özelliği vardır. Fakat her halka "$\cdot$" işlemine göre kısaltma özelliğini sağlamaz. Bundan sonra halkada kısaltma, "$\cdot$" işlemine göre kısaltma anlamı taşıyacaktır. Yani, bir $(R, +, \cdot)$ halkasında $0 \neq a \in R$ olmak üzere

$a \cdot b = a \cdot c$ iken $b = c$ soldan kısaltma

$b \cdot a = c \cdot a$ iken $b = c$ sağdan kısaltma

özellikleri sağlanıyor ise R halkasında **kısaltma vardır** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.21. R halkasının sıfır bölensiz olması için gerek ve yeter koşul sağ ve sol kısaltma özelliğinin sağlanmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.22. Sıfır bölensiz, birimli $(1_R \neq 0_R)$ ve değişmeli bir halkaya **tamlık bölgesi** denir. Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise bu halkaya **cisim** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.23. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkaları tamlık bölgeleridir. Hatta $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkaları cisimdir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.24. $\mathbb{Z}_6$ sıfır bölen içerdiğinden tamlık bölgesi değildir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.25. Rasyonel katsayılı polinom halkası $\mathbb{Q}[x]$ bir tamlık bölgesidir. Fakat cisim değildir. Çünkü $1 - x$ polinomunun çarpmaya göre tersi yoktur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.26. Her sonlu tamlık bölgesi cisimdir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.27. Her cisim tamlık bölgesidir (Aydın ve Kandamar, 2015).
Yukarıda verilen tanımlar kullanılarak aşağıdaki özellikler görülebilir.

i) Bir cisimde sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi tektir.

ii) Her tamlık bölgesinin ve cismin en az iki elemanı vardır.

iii) Birimli ve değişmeli bir R halkasının cisim olması için gerek ve yeter koşul R kümesinin sıfırdan farklı elemanlarının kümesinin, çarpma işlemine göre bir grup olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.28. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasının cisim olması için gerek ve yeter koşul n pozitif tam sayısının asal olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.29. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $n.a = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı var ise bu özelliği sağlayan n sayılarının en küçüğüne R halkasının **karakteristiği** denir ve $charR = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n sayısı yok ise R halkasının karakteristiği sıfırdır denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.30. $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasının karakteristiği yani $char\ \mathbb{Z}_n = n$'dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.31. Bir tamlık bölgesinin karakteristiği ya sıfırdır ya da bir asal sayıdır. Özel olarak bir cismin karakteristiği ya sıfırdır ya da bir asal sayıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.32. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cisimlerinin karakteristiği sıfırdır. Eğer p bir asal sayı ise $\mathbb{Z}_p$ karakteristiği p olan bir cisimdir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.33. R birimli bir halka olsun. Buna göre;

i) $n.1_R = 0_R$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı yok ise $charR = 0$ dır.

ii) $n.1_R = 0_R$ eşitliğini sağlayan pozitif n tamsayılarının en küçüğü, R halkasının karakteristiğine eşittir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.34. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S, R halkası üzerindeki işlemlere göre bir halka oluyor ise S kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.35. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S, R'nin alt halkasıdır ancak ve ancak her $a, b \in S$ için $a - b, a.b \in S$ dir.

Tanım 2.1.36. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Her $a, b \in I$ ve her $r \in R$ için

i) $a - b \in I$ ve

ii) $r.a \in I$ $(a.r \in I)$

koşulları sağlanıyorsa I'ya, R'nin **sol (sağ) ideali** denir. Eğer I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise I'ya, R'nin **ideali** denir ve $I \leq R$ yazılır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Açıktır ki; R ve $\{0_R\}$ kümeleri, her zaman R halkasının idealleridir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.37. Bir R halkasının, R ve $\{0_R\}$ ideallerine **aşikar idealler** denir. R'nin kendisinden farklı bir idealine **öz ideal** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.38. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ halkasının bir alt halkasıdır. Fakat ideali değildir. Çünkü $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ve $3 \in \mathbb{Z}$ için $3\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ dir. Diğer taraftan $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ halkasının bir idealidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.39. R birimli bir halka ve I, R halkasının bir sol (ya da sağ) ideali olsun.

$$I = R \Leftrightarrow 1_R \in I$$

dır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.40. I, birimli bir R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. I bir öz idealdir ancak ve ancak I içinde tersinir eleman yoktur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Sonuç 2.1.41. Bir cismin $\{0_R\}$'den başka bir öz ideali yoktur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.42. $\{A_i | i \in I\}$, R halkasının ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman, $\bigcap_{i \in I} A_i$ kümesi de bir R'nin bir idealdir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.43. X, R halkasının bir alt kümesi ve $\{A_i | i \in I\}$, R'nin X'i kapsayan tüm ideallerinin ailesi olsun.

i) $\bigcap_{i\in I} A_i$ idealine ***X* ile üretilen ideal** denir ve (X) ile gösterilir. X kümesinin elemanlarına (X) idealinin **üreteçleri** denir.

ii) Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise (X) ideali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilir ve (X) ideali **sonlu üreteçlidir** denir.

iii) Eğer $X = \{a\}$ ise $(X) = (a)$ idealine **temel ideal** denir.

iv) Her ideali temel ideal olan halkaya **temel ideal halkası** denir.

v) Bir R temel ideal halkası aynı zamanda bir tamlık bölgesi ise R halkasına **temel ideal bölgesi** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.44. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası ve $\mathbb{Q}[x]$ rasyonel katsayılı polinomlar halkası birer temel ideal bölgesidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.45. R bir halka, $a \in R$ ve $X \subseteq R$ olsun.

i) $(a) = \{r.a + a.s + na + \sum_{i=1}^{m} r_i.a.s_i | r, s, r_i, s_i \in R, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir.

ii) Eğer R birimli ise $(a) = \{\sum_{i=1}^{m} r_i.a.s_i | r_i, s_i \in R, m \in \mathbb{N}\}$ dir.

iii) R birimli ve değişmeli halka ise $(a) = \{r.a + na | r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$'dir.

iv) $Ra = \{r.a | r \in R\}$ ($aR = \{a.r | r \in R\}$), R halkasının bir sol (sağ) idealidir. Eğer R birimli ise $a \in Ra$ ve $a \in aR$ dir.

v) R birimli ve değişmeli halka ise $Ra = (a) = aR$ dir.

vi) R birimli ve değişmeli halka ise

vii) $(X) = \{\sum_{i=1}^{m} r_i a_i | r_i \in R, m \in \mathbb{N}, a_i \in X\}$
dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.46. R bir halka ve $\{A_i\}_{i\in I}$, R'nin ideallerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{i\in I} A_i$'nin ürettiği ideale $\{A_i\}_{i\in I}$ ideal ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i\in I} A_i$ ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.47. R bir halka ve $\{A_i\}_{i\in I}$, R'nin ideallerinin bir ailesi olsun.

$$\sum_{i\in I} A_i = \left\{ \sum_{j\in J} a_j \mid a_j \in A_j, J \subseteq I \text{ ve } J \text{ sonlu} \right\}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n | a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n\}$$

olur (Aydın ve Kandamar, 2015).

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$, R halkasının alt kümeleri olsun. Bu durumda

$$A \cdot B = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n | \, n \in \mathbb{N}, a_i \in A, b_i \in B\} = \left\{ \sum_{sonlu} a_i b_i \, | a_i \in A, b_i \in B \right\}$$

ile tanımlanır. Genel olarak,

$$A_1 A_2 \dots A_n = \left\{ \sum_{sonlu} a_1 . a_2 . \dots . a_n | a_i \in A, i = 1,2, \dots, n \right\}$$

yazılır. Eğer her i için $A_i = A$ ise o zaman

$$A_1 A_2 \dots A_n = AA \dots A = A^n$$

ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.48. R bir halka, $I, J \leq R$ olsun. Bu durumda

$$I.J = \left\{ \sum_{sonlu} a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

kümesi, R halkasının bir idealidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.49. $A, A_1, A_2, \dots, A_n, B$ ve C, R halkasının idealleri olsun.

i) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ ve $A_1 A_2 \dots A_n$ kümeleri de R halkasının idealleridir.

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii) $(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$

iv) $B.(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = B.A_1 + B.A_2 + \cdots + B.A_n$ ve $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n).C = A_1.C + A_2.C + \cdots + A_n.C$

eşitlikleri sağlanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

I, R halkasının bir ideali olsun. $(R, +)$ değişmeli grup olduğundan I, R halkasının normal alt grubudur. O halde

$$R/I = \{r + I | \, r \in R\}$$

bölüm grubundan bahsedebiliriz. R/I üzerinde toplama işleminin

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

ile verildiğini anımsayalım. R/I bu toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur. R/I üzerinde

$$(a+I)\cdot(b+I)=(a\cdot b)+I$$

biçiminde bir $\cdot$ işlemi tanımlamak anlamlıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.50. I, R halkasının bir ideali olsun. O zaman R/I toplamsal grubu

$$(a+I)\cdot(b+I)=(a\cdot b)+I$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile bir halka olur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.51. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Teorem 2.1.50'de tanımlanan R/I halkasına **modulo *I* ya göre kalan sınıf halkası** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.52. I, R halkasının bir ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) R değişmeli halka ise R/I değişmelidir.

ii) R birimli halka ise R/I birimli halkadır ve $1_R \in R$ için $1_R + I$, R/I halkasının birimidir.

iii) Birimli bir R halkasında $r \in R$ tersinir (birimsel) eleman ise o zaman $r+I \in R/I$ elemanı da tersinir (birimsel) ve tersi $(r+I)^{-1} = r^{-1} + I$ dır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.53. I ve J bir R halkasının idealleri ve $I \subseteq J$ olsun. J/I, R/I kalan sınıf halkasının bir idealidir. Tersine; K, R/I halkasının bir ideali ise $K=J/I$, $I \subseteq J$ olacak şekilde bir J ideali vardır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.54. $(R,+,\cdot)$ ve $(S,\triangle,\circ)$ iki halka olsun. $f: R \longrightarrow S$ fonksiyonu her $a,b \in R$ için

$$f(a+b)=f(a)\triangle f(b)$$
$$f(a\cdot b)=f(a)\circ(b)$$

koşullarını sağlıyor ise f fonksiyonuna **halka homomorfizması** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.55. f bir halka homomorfizması olsun.

i) f bire-bir ise f homomorfizmasına **halka monomorfizması**,

ii) f örten ise f homomorfizmasına **halka epimorfizması**,

iii) f bire-bir ve örten ise f homomorfizmasına **halka izomorfizması**

adı verilir. $f : R \longrightarrow S$ halka izomorfizması ise R halkası ile S halkası **izomorftur** denir ve $R \cong S$ ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.56. $f : R \longrightarrow R$ homomorfizmasına R halkasının **endomorfizması** ve f izomorfizma ise f fonksiyonuna R halkasının **otomorfizması** denir. R nin tüm endomorfizmalarının kümesi $End(R)$, tüm otomorfizmalarının kümesi $Aut(R)$ ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.57. $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $\varphi(x) = \bar{x}$ ile tanımlanan φ fonksiyonu bir halka epimorfizmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.58. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \triangle, \circ)$ iki halka olmak üzere $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması verilsin.

i) $f(0_R) = 0_S$

ii) $\forall\, r \in R$ için $f(-r) = -f(r)$

eşitlikleri sağlanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.59. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \triangle, \circ)$ birimli iki halka olmak üzere $f : R \longrightarrow S$ halka epimorfizması ise $f(1_R) = 1_S$ dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.60. R, S, T üç halka, $f : R \longrightarrow S$ ve $g : S \longrightarrow T$ iki halka homomorfizması olsun. O zaman $g \circ f : R \longrightarrow T$ bir halka homomorfizmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.61. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

$$\text{Çek}\, f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\} \quad \left(= f^{-1}(\{0\})\right)$$

kümesine f homomorfizmasının **çekirdeği**,

$$Gör\, f = \{f(x) \mid x \in R\} \quad \left(= f(R)\right)$$

kümesine f homomorfizmasının **görüntüsü** (görüntü kümesi) denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.62. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. f bire-bir dönüşümdür ancak ve ancak $\text{Çek}\, f = \{0\}$'dır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.63. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) Çek f, R halkasının bir idealidir.

ii) B, S halkasının bir ideali ise $f^{-1}(B)$ kümesi de R halkasının bir idealidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Önerme 2.1.64. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

i) $Gör\ f$, S halkasının bir alt halkasıdır.

ii) f örten ve A, R halkasının bir ideali ise $f(A)$ kümesi de S halkasının bir idealidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.65. R, birimi 1_R olan bir halka ve $charR = n > 0$ olsun. Buna göre; $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow R,\ \varphi(m) = m.1_R$ ile tanımlanan φ dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır. Ayrıca

$$\text{Çek}\,\varphi = n\mathbb{Z} = \{kn | k \in \mathbb{Z}\}$$

dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.66. $\{R_i |\ i \in I\}$ halkaların boş olmayan bir ailesi olsun. R_i toplamsal değişmeli gruplarının dik çarpımı $\prod R_i$ olsun. Buna göre

i) $\prod_{i\in I} R_i$ bileşensel toplama ve $\{a_i\}_{i\in I} \cdot \{b_i\}_{i\in I} = \{a_i b_i\}_{i\in I}$ çarpma işlemi ile bir halkadır.

ii) Her $i \in I$ için R_i halkasının birimi var ise o zaman $\prod_{i\in I} R_i$ halkası, birimlidir.

iii) Her $k \in I$ için $\pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longrightarrow R_k$, $\{a_i\}_{i\in I} \longrightarrow a_k$ ile tanımlanan doğal izdüşüm dönüşümü, bir halka epimorfizmasıdır.

iv) Her $k \in I$ için $i_k : R_k \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$, $a_k \longrightarrow \{a_i\}$ ($\{a_i\}$ elemanının a_i bileşenleri $i \neq k$ için $a_i = 0$) ile tanımlanan içerme dönüşümü, bir halka homomorfizmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.67. $\{R_i |\ i \in I\}$ halkaların boş olmayan bir ailesi olsun. S bir halka ve $\{\varphi_i : S \longrightarrow R_i \mid i \in I\}$ halka homomorfizmalarının bir ailesi olsun. O zaman her $i \in I$ için $\pi_i \varphi = \varphi_i$ olacak şekilde bir tek

$$\varphi : S \longrightarrow \prod_{i\in I} R_i$$

halka homomofizması vardır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.68. $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ halkaların boş olmayan bir ailesi, $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ve $I \subseteq R$ olsun. I, R'nin bir idealidir ancak ve ancak her $i \in \{1, \dots, n\}$ için I_i, R_i'nin bir ideali olmak üzere $I = \prod_{i=1}^{n} I_i$ biçimindedir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.69. I, R halkasının bir ideali ise o zaman

$$\pi : R \longrightarrow R/I, \quad \pi(r) = r + I$$

ile tanımlanan dönüşüm bir halka epimorfizmasıdır ve $\text{Çek}\,\pi = I$ dır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.70. Teorem 2.1.69'da tanımlanan $\pi : R \longrightarrow R/I$ örten halka homomorfizmasına **doğal halka homomorfizması** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.71. $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması, I, R nin bir ideali ve $I \subseteq \text{Çek}\, f$ olsun. O zaman aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde, yani $\pi\bar{f} = f$ olacak şekilde

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{f}{\rightarrow} & S \\ \pi\downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \bar{f} \\ R/I & & \end{array}$$

teklikle belirli bir $\bar{f}: R/I \longrightarrow S$ halka homomorfizması vardır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Sonuç 2.1.72 (I.İzomorfizma Teoremi) Eğer $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması ise o zaman aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{f}{\rightarrow} & Gör\, f \subseteq S \\ \pi\downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \bar{f} \\ R/\text{Çek}\, f & & \end{array}$$

teklikle belirli bir $\bar{f}$ halka homomorfizması vardır. Yani,

$$R/\text{Çek}\, f \cong Gör\, f$$

olur (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.73. $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. I, R halkasının, J, S halkasının idealleri ve $f(I) \subseteq J$ ise

$$\bar{f} : R/I \longrightarrow S/J, \quad \bar{f}(a + I) = f(a) + J$$

olarak tanımlanan $\bar{f}$ bir halka homomorfizmasıdır. $\bar{f}$ homomorfizmasının bir halka izomomorfizması olması için gerek ve yeter koşul

$$Im\, f + J = S \quad ve \quad f^{-1}(J) \subseteq I$$

olmasıdır. Eğer f, $f(I) = J$ koşulunu sağlayan bir epimorfizma ve $\ker f \subseteq I$ ise $\bar{f}$ bir izomorfizmadır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.74. I ve J, R halkasının idealleri olsun.

i) (**II.İzomorfizma Teoremi**) $I/I \cap J \cong (I + J)/J$ dir.

ii) (**III.İzomorfizma Teoremi**) Eğer $I \subseteq J$ ise J/I, R/I halkasının bir idealidir ve $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.75. (Çin Kalan Teoremi) $n \geq 2$ olmak üzere $I_1, I_2, \dots, I_n$, birimli ve değişmeli bir R halkasının idealleri olsun. Her $i \neq j$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ için $I_i + I_j = R$ ise $r \in R$ olmak üzere:

i) $f(r) = (r + I_1, r + I_2, \dots, r + I_n)$ ile tanımlanan $f: R \longrightarrow {}^{R}/_{I_1} \times {}^{R}/_{I_2} \dots \times {}^{R}/_{I_n}$ homomorfizması örtendir.

ii) $I_1 I_2 \dots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$ ve ${}^{R}/_{I_1 I_2 \dots I_n} \cong {}^{R}/_{I_1} \times {}^{R}/_{I_2} \dots \times {}^{R}/_{I_n}$'dir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.76. P, bir R halkasının öz ideali olsun. R halkasındaki herhangi iki A ve B idealleri için $AB \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P'ye **asal ideal** denir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.77. R bir halka ve P $(P \neq R)$ bir ideal olsun. Her $a, b \in R$ için

$$a.b \in P \Longrightarrow a \in P \text{ veya } b \in P \qquad (*)$$

koşulu sağlanıyorsa P asal idealdir. Tersine P asal ideal ve R birimli ve değişmeli halka ise o zaman P ideali $(*)$ koşulunu sağlar (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.78. Herhangi bir tamlık bölgesinde sıfır ideali (0) asal idealdir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.79. p asal sayı olmak üzere, p ile üretilen ideal (p), $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealidir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.80. R değişmeli bir halka ve $S \subseteq R$ olsun. $1_R \in S$ ve her $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 \in S$ ise S'ye R'nin çarpımsal kapalı alt kümesi denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.1.81. R değişmeli bir halka olsun. P, R'nin bir asal ideali ise $S \coloneqq R \backslash P$, R'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesidir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.1.82. Birimli ve değişmeli bir halkada bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P kalan sınıf halkasının tamlık bölgesi olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.83. M, R halkasının bir öz ideali olsun. $M \subseteq N \subseteq R$ koşulunu sağlayan her N ideali için $N = M$ veya $N = R$ koşulu sağlanıyorsa M idealine R halkasının **maksimal ideali** denir. R halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesi Max(R) ile gösterilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.84. (3) ideali, $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal idealidir. (6) ideali ise $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal ideali değildir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.85. Birimli ve sıfırdan farklı bir R halkasının en az bir maksimal ideali vardır. R halkasının her öz ideali R'nin bir maksimal ideali tarafından kapsanır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.86. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R'nin her maksimal ideali asaldır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Her asal ideal maksimal ideal olmayabilir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Örnek 2.1.87. $\mathbb{Z}$ halkasında (0) ideali asaldır fakat maksimal ideal değildir. Çünkü; $(0) \subsetneq (6) \subsetneq \mathbb{Z}$'dir (Aydın ve Kandamar, 2015).

Teorem 2.1.88. R birimli ve değişmeli bir halka, $0_R \neq 1_R$ ve M, R halkasının bir ideali olsun. O zaman M nin maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/M halkasının cisim olmasıdır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Sonuç 2.1.89. R birimli $(0_R \neq 1_R)$ ve değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R bir cisimdir.

ii) R halkasının (0_R)'den başka öz ideali yoktur.

iii) (0_R), R halkasının maksimal idealidir.

iv) $Her\ 0 \neq f : R \longrightarrow S$ halka homomorfizması, bir monomorfizmadır (Aydın ve Kandamar, 2015).

Tanım 2.1.90. R bir tamlık bölgesi olsun. R'nin her öz ideali sonlu sayıda asal idealin bir çarpımı ise R'ye Dedekind bölgesi denir.

Örnek 2.1.91. Her temel ideal bölgesi Dedekind bölgesidir.

Teorem 2.1.92. R Dedekind bölgesi olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) R'nin her öz ideali asal ideallerin bir sonlu çarpımı olarak, (sıra gözetilmeden) tek türlü yazılabilir.
ii) R Noetherian tamlık bölgesidir.
iii) R'nin sıfırdan farklı her asal ideali maksimaldir.

Tanım 2.1.93. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının tam bir tane maksimal ideali varsa R'ye **yerel (lokal) halka** denir. Maksimal ideali m olan yerel bir halka (R, m) ile gösterilir. R/m cismine **kalıntı (rezüdü) cismi** denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.1.94. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R'nin yerel halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin birimsel olmayan elemanlarının bir ideal oluşturmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.95. Herhangi bir F cismi tek maksimal ideali (0) olan bir yerel halkadır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.96. p bir asal sayı olmak üzere

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} |\ (m,n) = 1\ ve\ p \nmid n\right\}$$

temel ideal bölgesi bir yerel halkadır. Tek maksimal ideali de $p\mathbb{Z}_{(p)}$'dir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.97. R bir halka ve $e \in R$ olsun. $e^2 = e$ ise e'ye idempotent eleman denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.98. Yerel bir halkanın 0 ve 1'den başka idempotent elemanı yoktur (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.99. R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı varsa a'ya nilpotent eleman denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.1.100. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının tek bir asal ideali olması için gerek ve yeter koşul R'deki her elemanın ya birimsel ya da nilpotent olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.101. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine **Jacobson radikali** denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Şu halde

$$J(R) = \bigcap_{M \in Max(R)} M$$

dir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Yerel bir halkanın Jacobson radikali tek maksimal idealidir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.102. $J(\mathbb{Z}) = \cap_{p \in \mathbb{Z}\, asal}(p) = (0)$'dır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.1.103. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $a \in R$ elemanının, Jacobson radikalinde olması için gerek ve yeter koşul, her $r \in R$ için, $1 - ar \in R$ elemanının birimsel olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.104. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $J(R/J(R)) = 0_{R/J(R)}$'dir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.1.105. R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının Jacobson radikali $J(R)$'de sıfırdan farklı idempotent eleman yoktur (Çallıalp ve Tekir, 2009).

2.2. Modüller ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $(M,+)$ değişmeli bir grup ve R bir halka olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan ve skaler çarpım olarak adlandırılan bir $\cdot:\begin{matrix} R\times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r\cdot m \end{matrix}$ fonksiyonu varsa M ye bir **sol R −modül** denir.

i) Her $r,s\in R$ ve $m\in M$ için $(r+s)\cdot m=r\cdot m+s\cdot m$

ii) Her $r\in R$ ve $m,n\in M$ için $r\cdot(m+n)=r\cdot m+r\cdot n$

iii) Her $r,s\in R$ ve $m\in M$ için $(rs)\cdot m=r\cdot(s\cdot m)$

Ek olarak, R birimli bir halka ise

iv) Her $m\in M$ için $1_R\cdot m=m$ (Anderson ve Fuller, 1992).

Benzer şekilde bir sağ R −modül şöyle tanımlanır: $(M,+)$ değişmeli bir grup ve R bir halka olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan ve skaler çarpım olarak adlandırılan bir $\cdot:\begin{matrix} M\times R & \longrightarrow & M \\ (m,r) & \longmapsto & m\cdot r \end{matrix}$ fonksiyonu varsa M ye bir **sağ R −modül** denir.

i) Her $r,s\in R$ ve $m\in M$ için $m\cdot(r+s)=m\cdot r+m\cdot s$

ii) Her $r\in R$ ve $m,n\in M$ için $(m+n)\cdot r=m\cdot r+n\cdot r$

iii) Her $r,s\in R$ ve $m\in M$ için $m\cdot(rs)=(m\cdot r)\cdot s$

Ek olarak R birimli bir halka ise

iv) Her $m\in M$ için $m\cdot 1_R=m$ (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.2. V, bir K cismi üzerinde vektör uzayı ise V bir sol (sağ) K −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Bu kısımdan sonra skaler çarpım $\cdot$ için $r\in R$ ve $m\in M$ olmak üzere $r\cdot m$ yerine kısaca rm yazılacaktır.

Örnek 2.2.3. S bir halka ve R, S' nin bir alt halkası olsun. Bu durumda $\cdot:\begin{matrix} R\times S & \longrightarrow & S \\ (r,s) & \longmapsto & rs \end{matrix}$ skaler çarpımı ile S bir sol R −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.4. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi birer sol (sağ) $\mathbb{Z}$ −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.5. Her R halkası bir sol (sağ) R −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.6. $(R,+,\cdot)$ bir halka ve I, R'nin bir sol (sağ) ideali ise sol (sağ) ideal tanımına göre I bir sol (sağ) R −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.7. R bir halka ve I, R'nin bir sol ideali olsun. O zaman R/I değişmeli grubu, $\cdot : \begin{matrix} R \times R/I & \longrightarrow & R/I \\ (r, a+I) & \mapsto & ra+I \end{matrix}$ şeklinde tanımlanan skaler çarpım ile bir sol $R-$modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.8. Her değişmeli grup bir $\mathbb{Z}-$modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.9. R bir halka ve M bir sol $R-$modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $0_R \cdot m = 0_M$

ii) R birimli ise $(-1_R) \cdot m = -m$

iii) Her $a \in R$ için $a \cdot 0_M = 0_M$ (Anderson ve Fuller, 1992).

Bu kısımdan sonra ele alınan tüm halkalar birimli olacak ve R birimli bir halkayı temsil edecektir. Aksi belirtilmedikçe tüm modüller sol modül olarak alınacak ve sol $R-$modül yerine kısaca $R-$modül ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.2.10. M bir $R-$modül ve N, M'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N, M'deki toplama işlemi ve skaler çarpma ile kendi başına bir $R-$modül ise N'ye M'nin bir alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.11. M bir $R-$modül olmak üzere M ve $\{0_M\}$ her zaman M'nin alt modülleridir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.12. M bir $R-$modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N, M'nin bir alt modülüdür ancak ve ancak

i) $0_M \in N$

ii) Her $a, b \in N$ için $a - b \in N$

iii) Her $r \in R$ ve $a \in N$ için $ra \in N$

koşulları sağlanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.13. M bir $R-$modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in I} N_i$ de M'nin bir alt modülüdür (Anderson ve Fuller, 1992).

Uyarı 2.2.14. İki ya da daha fazla alt modülün birleşimi bir alt modül olmak zorunda değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}$'nin $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$ alt modülleri için $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{Z}$'nin bir alt

modülü değildir. Çünkü, $2,3 \in \mathbb{Z}$ fakat $3+2=5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.15. M bir R −modül ve $X \subseteq M$ olsun. X'in ürettiği alt modül, M'nin X'i kapsayan tüm alt modüllerinin arakesiti olarak tanımlanır ve (X) ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.16. M bir R −modül ve $X \subseteq M$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

i) $X=\emptyset$ ise $(X)=\{0_M\}$

ii) $X \neq \emptyset$ ise $(X)=\{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i \,|r_i \in R, m_i \in X, n \in \mathbb{Z}^+\}$

iii) $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu kümesi için

iv) $(X)=(x_1, x_2, \dots, x_n)=\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,|r_i \in R\}$ (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.17. M bir sol R −modül olsun.

i) $M=(X)$ olacak şekildeki bir X kümesine, M'nin bir **üreteci** denir.

ii) Eğer $M=(m)=\{rm|r \in R\}=Rm$ ise M'ye **devirli modül** denir.

iii) Eğer $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ve $M=(X)=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n$ ise M'ye **sonlu üretilmiş** bir R −modül denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.18. R birimli halkasını sol R −modül olarak düşünürsek $R=R1_R$ olarak yazıldığından R devirli R −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.19. $\mathbb{Q}$ sonlu üretilmiş $\mathbb{Z}$ −modül değildir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.20. R bir halka, I, R'nin bir ideali ve M bir R −modül olsun.

$$IM=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i \,|r_i \in I, m_i \in M, n \in \mathbb{N}\right\}$$

ile gösterelim. O zaman IM, M'nin bir alt modülüdür ve aşağıdakiler sağlanır.

i) I ve J, R'nin iki ideali ise $I(JM)=(IJ)M$ dir.

ii) R değişmeli bir halka ve $I=Ra$ bir temel ideal ise $IM=(Ra)M=aM=\{am|\ m \in M\}$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.21. M bir R −modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{i\in I} N_i$'nin ürettiği alt modüle, $\{N_i\}_{i\in I}$ alt modül ailesinin **toplamı** denir ve $\sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.22. M bir R −modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$$\sum_{i\in I} N_i = \left\{ \sum_{j\in J} a_j \mid J \subseteq I \text{ ve } J \text{ sonlu} \right\}$$

eşitliği sağlanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.23. R bir halka, M bir R −modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun.

$$ann_R(X) = \{r \in R \mid \text{her } x \in X \text{ için } rx = 0_M\}$$

şeklinde tanımlanan küme, R'nin bir sol idealidir. $ann_R(X)$ kümesine X'in R içindeki **sıfırlayanı** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Eğer X, M'nin bir alt modülü ise $ann_R(X)$, R'nin bir idealidir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.24. M bir R −modül olsun. $ann_R(M)$ idealine, M'nin **sıfırlayanı** denir. Eğer $ann_R(M) = \{0\}$ ise M'ye **sadık (faithful) modül** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.25. M bir R −modül, $N \leq M$ ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun.

$$(N:_R X) = \{r \in R \mid rX \subseteq N\} = \{r \in R \mid Her\ x \in X\ için\ rx \in N\}$$

kümesi tanımlanıyor. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $(N:_R X)$, R'nin bir sol idealidir.

ii) $X \leq M$ ise $(N:_R X)$, R'nin bir idealidir.

iii) R değişmeli bir halka ise $(N:_R X) = \big(N:_R (X)\big)$ eşitliği vardır.

iv) I, R halkasının bir ideali ise $I(N:M) = (IN:M)$ eşitliği vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.26. M bir R −modül, $\{N_i\}_{i\in I}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi, $N \leq M$ ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $(\bigcap_{i\in I} N_i :_R X) = \bigcap_{i\in I}(N_i:_R X)$

ii) $(N:_R \sum_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I}(N:_R N_i)$ (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.27. M bir R-modül, $N \leq M$ ve $I \leq R$ olsun.

$$(N:_M I) \coloneqq \{m \in M : Im \subseteq N\}$$

kümesi tanımlanıyor. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $(N:_M I)$, M'nin bir alt modülüdür.

ii) $I \subseteq J$ ise $(N:_M J) \subseteq (N:_M I)$'dır.

iii) $N \leq M$ ve $N \subseteq L$ ise $(N:_M I) \subseteq (L:_M I)$'dır.

iv) $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$, R'nin ideallerinin bir ailesi ise $(N:_M \sum_{i\in\Lambda} A_i) = \bigcap_{i\in\Lambda}(N:_M A_i)$ eşitliği sağlanır.

v) $\{N_i\}_{i\in\Lambda}$, M'nin alt modüllerinin bir ailesi ise $(\bigcap_{i\in\Lambda} N_i:_M I) = \bigcap_{i\in\Lambda}(N_i:_M I)$ eşitliği sağlanır.

vi) R değişmeli halka, J ve K, R'nin idealleri ise $((N:_M J):_M K)) = ((N:_M K):_M J)) = (N:_M JK)$ eşitlikleri sağlanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.28. M bir R −modül ve $N \leq M$ olsun. M/N toplamsal bölüm grubunu göz önüne alalım.

$$M/N = \{m + N \mid m \in M\}$$

grubunda toplama işlemi, her $m + N, m' + N \in M/N$ için

$$(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N \text{ olarak tanımlanır.}$$

$$\cdot : R \times M/N \longrightarrow M/N$$

skaler çarpımını şöyle tanımlayalım; her $r \in R$ ve $m + N \in M/N$ için

$$r \cdot (m + N) = rm + N$$

Bu skaler çarpım ile M/N bir R −modüldür. M/N'ye **bölüm modülü** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.29. M bir R −modül ve I, R'nin bir ideali olsun. $I \subseteq ann_R(M)$ ise

$$\begin{array}{rcl} \cdot : {}^{R}/_{I} \times M & \longrightarrow & M \\ (r + I, m) & \longmapsto & rm \end{array}$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpım ile M bir $({}^{R}/_{I})$ −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.30. M bir R-modül ve $I \leq R$ olsun. M'nin R −alt modülleri ile ${}^{R}/_{I}$ −alt modülleri aynıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.31. M bir R −modül ve $N \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) I, R'nin bir ideali ise $ann_R(R/I) = I$'dır.

ii) M sadık $\left({}^{R}/_{ann_R(M)}\right)$ −modüldür.

iii) M sonlu üretilmiş ise ${}^{M}/_{N}$ de sonlu üretilmiştir.

iv) N ve ${}^{M}/_{N}$ sonlu üretilmiş ise M sonlu üretilmiştir (Anderson ve Fuller, 1992).

Lemma 2.2.32. M bir R −modül ve I, R'nin bir ideali olsun. O zaman,

i) $I \subseteq ann_R({}^{M}/_{IM})$'dir.

ii) ${}^{M}/_{IM}$, ${}^{R}/_{I}$ üzerinde bir modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.33 (Modüler Kural) M bir R −modül ve $K, L, N \leq M$ olsun. $K \subseteq N$ ise $N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$ dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.34 (Genel Determinant Argümanı) R değişmeli bir halka ve $I \leq R$ olsun. M sonlu üretilmiş bir R −modül ve $IM = M$ ise bir $y \in I$ için, $(1 + y)M = 0$'dır (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.35 (Nakayama Lemma) M sonlu üretilmiş bir R −modül, $I \leq R$ ve $I \subseteq J(R)$ olsun. $M = IM$ ise $M = (0)$'dır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.36. M ve N, R −modüller olmak üzere $f : M \longrightarrow N$ bir fonksiyon olsun.

i) Her $a, b \in M$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$

ii) Her $r \in R$ ve $x \in M$ için $f(rx) = rf(x)$

özellikleri sağlanıyorsa f'ye bir ***R* −modül homomorfizması*** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.37. M ve N, R −modüller olmak üzere $f : M \longrightarrow N$ bir R −modül homomorfizması olsun.

i) f örten ise f'ye **epimorfizma**,

ii) f bire-bir ise f'ye **monomorfizma** ve

iii) f bire-bir ve örten ise f'ye **izomorfizma** denir ve $M \cong N$ yazılır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.38. M bir R −modül olsun. $f : M \longrightarrow M$ bir R −modül homomorfizması ise f'ye **endomorfizma** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.39. M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ bir R −modül homomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) $f(0_M) = 0_N$ ve her $m \in M$ için $f(-m) = -f(m)$ dir.

ii) f'nin çekirdeği $\text{Çek}f = \{m \in M | \, f(m) = 0_N\}$ olarak tanımlanır. $\text{Çek}f$, M'nin bir alt modülüdür.

iii) f bire-birdir ancak ve ancak $\text{Çek}f = \{0_M\}$ dir.

iv) $\text{Gör}f = \{f(m) | m \in M\}$ kümesi, f'nin görüntü kümesi olarak adlandırılır. *Görf*, N'nin bir alt modülüdür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.40. R değişmeli bir halka, M bir R −modül ve $a \in R$ olsun. $f_a : M \longrightarrow M$, her $m \in M$ için $f_a(m) = am$ olarak tanımlanan f_a , bir R −modül homomorfizmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.41. M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ bir R −modül homomorfizması olsun.

i) f örten ise $ann_R(M) \subseteq ann_R(N)$ dir.

ii) f bire-bir ise $ann_R(N) \subseteq ann_R(M)$ dir.

iii) f bir izomorfizma ise $ann_R(M) = ann_R(N)$ dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.42 (I.İzomorfizma Teoremi) M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ bir R −modül homomorfizması, $K \leq M$ ve $K \subseteq \text{Çek}f$ olsun. Buna göre $\pi : M \longrightarrow M/K$ doğal homomorfizma olmak üzere $f = f'\pi$ olacak şekilde tek bir $f' : M/K \longrightarrow N$, R −modül homomorfizması vardır. Özel olarak, $K = \text{Çek}f$ alınırsa $M/\text{Çek}f \cong \text{Gör}f = f(M)$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.43. M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ örten bir R −modül homomorfizması ve $L \leq M$ olsun. $\text{Çek}f \subseteq L$ ise $M/L \cong N/f(L)$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.44. M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ örten bir R −modül homomorfizması ve $K \leq N$ olsun. O zaman:

i) $f^{-1}(K)$, M'nin bir alt modülüdür.

ii) $M/f^{-1}(K) \cong N/f(L)$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.45 (II.İzomorfizma Teoremi) M bir R −modül olmak üzere M_1 ve M_2, M'nin iki alt modülü olsuın. O zaman:

$$M_1/M_1 \cap M_2 \cong M_1 + M_2/M_2$$

olur (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.46. M ve N, R −modüller olmak üzere, $f : M \longrightarrow N$ örten bir R −modül homomorfizması, $S'_M = \{L \leq M | Çekf \subseteq L\}$ ve S_N, N'nin tüm alt modüllerinin kümesi olmak üzere:

$\phi : S'_M \longrightarrow S_N$, her $L \in S'_M$ için $\phi(L) = f(L)$ ve

$\varphi : S_N \longrightarrow S'_M$, her $K \in S_N$ için $\varphi(K) = f^{-1}(K)$

olarak tanımlanan fonksiyonlar birbirinin tersidir. Sonuç olarak M'nin $Çekf$'yi kapsayan alt modülleri ile N'nin tüm alt modülleri arasında birebir eşleme vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Sonuç 2.2.47. M bir R −modül ve $N \leq M$ olsun. M/N'nin tüm alt modüllerinin kümesi

$$\{L/N \mid N \leq L \leq M\}$$

olur (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.48 (III.İzomorfizma Teoremi) M bir R −modül olmak üzere M_1 ve M_2 , M'nin alt modülleri olsun. $M_1 \subseteq M_2$ ise

$$\left(M/M_1\right) \Big/ \left(M_2/M_1\right) \cong M/M_2$$

olur (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.49. M bir R −modül ve $m \in M$ olsun. $g_m : R \longrightarrow Rm$, her $r \in R$ için $g_m(r) = rm$ olarak tanımlanan g_m, örten bir R −modül homomorfizmasıdır ve $Çekg_m = ann_R(m)$ dir. Bunun sonucu olarak $R/ann_R(m) \cong Rm$'dir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.50. M bir R −modül olsun. M devirli R −modüldür ancak ve ancak $M \cong R/I$ olacak şekilde bir I sol ideali vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.51. M bir R −modül olsun. M'nin $\{0_M\}$ ve kendisinden başka alt modülü yoksa M'ye **basit modül** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.52. Bir F cismi basit F −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.53. M bir R −modül ve N, M'nin bir öz alt modülü olsun. N'yi kapsayan N'den başka öz alt modül yoksa, N'ye M'nin bir **maksimal alt modülü** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.54. M bir R −modül ve N, M'nin bir öz alt modülü olsun. N, M'nin maksimal alt modülüdür ancak ve ancak M/N basit modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.55. M bir R −modül ve $\{K_i\}_{i\in I}$, M'nin alt modüllerinin bir zinciri olsun. O zaman $\bigcup_{i\in I} K_i$, M'nin bir alt modülüdür (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.56. M sonlu üretilmiş bir R −modül ise M'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.57. M bir R −modül olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) M basit R −modüldür ancak ve ancak her $0 \neq m \in M$ için $M = Rm$'dir.

ii) R değişmeli bir halka ve M basit R −modül ise her $0 \neq m \in M$ için $ann_R(m)$, R'nin bir maksimal idealidir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.58. M bir R-modül olsun. M'nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M'nin **Jacobson radikali** denir ve $J(M)$ ile gösterilir. M'nin maksimal alt modülü yoksa $J(M)=M$ olarak tanımlanır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.59. M modülü basit alt modüllerin bir toplamı şeklinde yazılabiliyorsa M'ye yarı-basit (semisimple) modül denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.60. p ve q asal sayılar olmak üzere, $\mathbb{Z}_{pq}$ yarı-basit $\mathbb{Z}$-modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.61. M bir R-modül olsun. M'nin her öz alt modülü maksimal alt modüllerin bir arakesiti olarak yazılabiliyorsa M'ye eş yarı-basit (co-semisimple) modül denir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.2.62. Her yarı-basit modül eş yarı-basittir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.63. M bir R-modül olsun. M'nin sadece bir tane maksimal alt modülü varsa M'ye **yerel modül** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.64. M bir R −modül olsun. M'nin alt modüllerinin her

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

artan zinciri sonlu bir adımda durursa, yani $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \cdots$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ varsa M'ye **Noetherian modül** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.65. M bir R −modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) M Noetherian modüldür.

ii) M'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.

iii) M'nin alt modüllerinin boştan farklı herhangi bir ailesinin en az bir maksimal elemanı vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.66. Her sonlu R −modül Noetherian modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.67. Her temel ideal bölgesi kendi üzerinde Noetherian modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.68. F bir cisim ve V, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) V sonlu boyutlu bir F −vektör uzayıdır.

ii) V Noetherian F −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.69. $\mathbb{Q}[x]$ Noetherian $\mathbb{Q}$-modül değildir. Çünkü $\mathbb{Q}[x]$ sonlu boyutlu bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayı değildir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.70. M bir R −modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin Noetherian R −modül olması için gerek ve yeter koşul N ve M/N'nin Noetherian R −modül olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.71. M bir R −modül, $I \leq R$ ve $I \subseteq ann_R(M)$ olsun. M Noetherian R −modüldür ancak ve ancak M Noetherian R/I −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.72. R halkası, sol (sağ) $R-$modül olarak Noetherian ise R'ye **sol (sağ) Noetherian halka** denir. R hem sol hem de sağ Noetherian halka ise R'ye **Noetherian halka** denir. R değişmeli halka ise sol ya da sağ kelimeleri kullanılmaz (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.73. R'nin sol (sağ) Noetherian halka olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş sol (sağ) $R-$modülün, Noetherian olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.74. R değişmeli bir halka ve M Noetherian $R-$modül ve ise $R/_{ann_R(M)}$ Noetherian halkadır (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.75 (Krull Arakesit Teoremi) R değişmeli Noetherian bir halka, $I \leq R$ ve $I \subseteq J(R)$ olsun. Bu takdirde, $\bigcap_{i=1}^{\infty} I^i = (0)$'dır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.2.76. M bir $R-$modül olsun. M'nin alt modüllerinin her

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$$

azalan zinciri, sonlu bir adımda duruyorsa yani $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \cdots$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ varsa M'ye **Artinian modül** denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.77. Her sonlu modül Artiniandır (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.78. $\mathbb{Z}$ Artinian $\mathbb{Z}-$modül değildir. Çünkü $2\mathbb{Z} \supsetneq 2^2\mathbb{Z} \supsetneq 2^3\mathbb{Z} \supsetneq \cdots \supsetneq 2^k\mathbb{Z} \supsetneq 2^{k+1}\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$ azalan zinciri durmaz. Aynı zincirden dolayı $\mathbb{Q}$ da Artinian $\mathbb{Z}-$modül değildir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.79. M bir $R-$modül olsun. $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha = (0)$ iken $\bigcap_{\alpha\in\Lambda^*} N_\alpha = (0)$ olacak biçimde sonlu $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ kümesi varsa M'ye **sonlu eş üretilmiş (finitely cogenerated)** modül denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.80. Sonlu eş üretilmiş bir modülün en az bir basit alt modülü vardır (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.81. M yarı-basit R-modül olsun. M sonlu üretilmiştir ancak ve ancak M sonlu eş üretilmiştir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.82. M sonlu eş üretilmiş eş yarı-basit R-modül ise M yarı-basit modüldür (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.783. M bir R −modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) M Artinian R −modüldür.

ii) M'nin alt modüllerinin boştan farklı her ailesinin bir minimal elemanı vardır.

iii) M'nin her bölüm modülü sonlu eş üretilmiştir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.84. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) V sonlu boyutludur.

ii) V Artinian F −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.85. $\mathbb{Q}$ Artinian $\mathbb{Q}$ −modüldür (Anderson ve Fuller, 1992).

Örnek 2.2.86. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı olduğundan $\mathbb{R}$ Artinian $\mathbb{Q}$ −modül değildir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.87. R halkası, sol idealler üzerinde azalan zincir koşulunu sağlıyorsa R'ye **sol Artinian halka** denir. Benzer şekilde sağ Artinian halka, tanımlanabilir. R, hem sol hem de sağ Artinian halka ise R'ye **Artinian halka** denir. R değişmeli halka ise sol ya da sağ kelimeleri kullanılmaz (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.88. Her Artinian tamlık bölgesi cisimdir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.89. M bir R −modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin Artinian olması için gerek ve yeter koşul N ve M/N'nin Artinian olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.2.90. R değişmeli bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R −modül olsun. M Artinian R −modül ise $R/ann_R(M)$ Artinian halkadır (Anderson ve Fuller, 1992).

Uyarı 2.2.91. R değişmeli bir halka olsun. O zaman, $R/ann_R(M)$'nin Artinian R −modül olması ile Artinian halka olması birbirine denktir (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.92. $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ değişmeli halkaların boş olmayan bir ailesi, her $i \in \{1, \dots, n\}$ için M_i bir R_i-modül olmak üzere $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ve $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ olsun. M aşağıdaki toplama işlemi ve skalerle çarpmaya göre bir R-modüldür.

Her $\{a_i\}_{i=1}^{n}, \{b_i\}_{i=1}^{n} \in M$ ve her $\{r_i\}_{i=1}^{n} \in R$ için,

$$\{a_i\}_{i=1}^{n} + \{b_i\}_{i=1}^{n} = \{a_i + b_i\}_{i=1}^{n}$$

$$\{r_i\}_{i=1}^{n}\{a_i\}_{i=1}^{n} = \{r_i a_i\}_{i=1}^{n}$$

Önerme 2.2.93. $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ değişmeli halkaların boş olmayan bir ailesi, her $i \in \{1, \dots, n\}$ için M_i bir R_i-modül olmak üzere $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ve $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ olsun. O zaman, M R-modülünün her N alt modülü, N_i, M_i'nin bir R_i-alt modülü olmak üzere $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ biçimindedir (Anderson ve Fuller, 1992).

BÖLÜM 3

φ-İKİNCİ ALT MODÜLLER

Tezin geri kalan kısmında tüm halkalar birimli ve değişmeli olacak ve *R* böyle bir halkayı temsil edecektir. *R* halkasının tüm ideallerinin kümesi *S(R)* ile, bir *M* modülünün tüm alt modüllerinin kümesi *S(M)* ile gösterilecektir.

Bu bölümde φ-ikinci alt modüller sınıfı ele alınarak bu alt modül sınıfının birtakım cebirsel özellikleri ve karakterizasyonları verilecektir.

Tanım 3.1. *M* bir *R*-modül, $(0) \neq N \leq M$ ve $\varphi: S(M) \to S(M)$ bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $a \in R$ ve $K \leq M$ için, $aN \subseteq K$ ve $a\varphi(N) \nsubseteq K$ olması $N \subseteq K$ veya $a \in ann_R(N)$ olmasını gerektiriyorsa *N*'ye *M*'nin **φ-ikinci** alt modülü denir (Farshadifar ve Ansari-Toroghy,2020).

$\varphi_M: S(M) \to S(M)$ fonksiyonu her $L \in S(M)$ için $\varphi_M(L) = M$ olarak tanımlansın. *M*'nin φ_M-ikinci alt modülüne **zayıf ikinci** alt modül denir. $n \geq 2$ olmak üzere, $\varphi_n: S(M) \to S(M)$ fonksiyonu her $L \in S(M)$ için $\varphi_n(L) = (L:_M ann_R(L)^{n-1})$ olarak tanımlansın. *M*'nin φ_n-ikinci alt modülüne **n-yaklaşık ikinci** alt modül denir. Özel olarak $n = 2$ için *M*'nin 2-yaklaşık ikinci alt modülüne **yaklaşık ikinci** alt modül denir.

Tezin geri kalan kısmında, aksi belirtilmedikçe, $\varphi: S(M) \to S(M)$ bir fonksiyon olacaktır.

M bir *R*-modül ve $N \leq M$ olsun. $\varphi(N)\backslash N = (\varphi(N) \cup N)\backslash N$ olduğundan, genelliği kaybetmeden, tezin geri kalan kısmında $N \subseteq \varphi(N)$ olduğu kabul edilecektir.

Tanımdan açıktır ki; herhangi bir $\varphi: S(M) \to S(M)$ fonksiyonu için *M* modülü kendisinin φ-ikinci alt modülüdür. Ayrıca her ikinci alt modül φ-ikinci alt modüldür ancak

bunun tersi doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$, kendisinin φ-ikinci $\mathbb{Z}$-alt modülüdür ancak ikinci alt modülü değildir.

Teorem 3.2. *M* bir *R*-modül, *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ve $\varphi(N) \nsubseteq \left(N:_M ann_R(N)\right)$ olsun. O zaman, *N*, *M*'nin ikinci alt modülüdür (Farshadifar ve Ansari-Toroghy, 2020).

Kanıt. $a \in R$ ve $K \leq M$ olmak üzere, $aN \subseteq K$ olsun. $a\varphi(N) \nsubseteq K$ ise kanıt biter. O halde, $a\varphi(N) \subseteq K$ olsun. $a\varphi(N) \nsubseteq N$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $aN \subseteq aN$ ve $a\varphi(N) \nsubseteq aN$ olur. *N*, φ-ikinci alt modül olduğundan, $N = aN$ veya $a \in ann_R(N)$'dir. Bu da *N*'nin ikinci alt modül olduğunu gösterir. Şimdi, $a\varphi(N) \subseteq N$ olduğunu kabul edelim. $ann_R(N)\varphi(N) \nsubseteq N$ olduğundan $\left(Ra + ann_R(N)\right)N \subseteq N \cap K$ ve $\left(Ra + ann_R(N)\right)\varphi(N) \nsubseteq N \cap K$'dır. *N*, φ-ikinci alt modül olduğundan $N \subseteq K$ veya $a \in ann_R(N)$ olur. Bu da *N*'nin ikinci alt modül olduğunu gösterir.

Teorem 3.3. *M* bir *R*-modül ve *Q*, *M*'nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- **i)** *Q*, *M*'nin φ-ikinci alt modülüdür.
- **ii)** *M*'nin, $Q \nsubseteq X$ olacak şekildeki her X alt modülü için $(X:_R Q) = ann_R(Q) \cup \left(X:_R \varphi(Q)\right)$ eşitliği sağlanır.
- **iii)** *M*'nin, $Q \nsubseteq X$ olacak şekildeki her X alt modülü için $(X:_R Q) = ann_R(Q)$ veya $(X:_R Q) = \left(X:_R \varphi(Q)\right)$'dur.
- **iv)** *R*'nin bir *I* ideali ve *M*'nin bir *L* alt modülü için $IQ \subseteq L$ ve $I\varphi(Q) \nsubseteq L$ olması $I \subseteq ann_R(Q)$ veya $Q \subseteq L$ olmasını gerektirir.
- **v)** *R*'nin, $I \nsubseteq ann_R(Q)$ olacak şekildeki her *I* ideali için $IQ = Q$ veya $IQ = I\varphi(Q)$'dur (Farshadifar ve Ansari-Toroghy, 2020).

Kanıt. i) $\Longrightarrow$ ***ii***) *X*, *M*'nin bir alt modülü, $Q \nsubseteq X$ ve $a \in (X:_R Q)$ olsun. $a \in ann_R(Q)$ ise kanıt biter. $a \notin ann_R(Q)$ olduğunu kabul edelim. *Q*, φ-ikinci alt modül olduğundan, $a\varphi(Q) \nsubseteq X$ ise $Q \subseteq X$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $a\varphi(Q) \subseteq X$ olmalıdır. Şu halde $a \in \left(X:_R \varphi(Q)\right)$ ve dolayısıyla $(X:_R Q) \subseteq ann_R(Q) \cup \left(X:_R \varphi(Q)\right)$ olur. $Q \subseteq \varphi(Q)$ ve $ann_R(Q) \subseteq (X:_R Q)$ olduğundan ters kapsama her zaman sağlanır. Böylece $(X:_R Q) = ann_R(Q) \cup \left(X:_R \varphi(Q)\right)$ olur.

ii) $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{iii}$) Bir ideal iki idealin birleşimine eşit ise birleşimdeki ideallerden birine eşittir. Buna göre iii) sağlanır.

iii) $\Longrightarrow$ **iv)** $I \leq R$ ve $L \leq M$ olmak üzere $IQ \subseteq L$ ve $I\varphi(Q) \nsubseteq L$ olsun. Aksine, $I \nsubseteq ann_R(Q)$ ve $Q \nsubseteq L$ olduğunu varsayalım. $a \in I$ olsun. $a \notin ann_R(Q)$ ise $(L:_R Q) \neq ann_R(Q)$'dur. iii)'den dolayı $(L:_R Q) = \big(L:_R \varphi(Q)\big)$'dur. Şu halde $a\varphi(Q) \subseteq L$ olur. $a \in ann_R(Q) \cap I$ olsun. $u \in I \backslash ann_R(Q)$ alalım. O zaman, $a + u \in I \backslash ann_R(Q)$ olur. $u\varphi(Q) \subseteq L$ ve $(a + u)\varphi(Q) \subseteq L$'dir. Buradan $a\varphi(Q) \subseteq L$ olduğu görülür. Buna göre, her $a \in I$ için $a\varphi(Q) \subseteq L$ ve dolayısıyla $I\varphi(Q) \subseteq L$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $I \subseteq ann_R(Q)$ veya $Q \subseteq L$ olmalıdır.

iv) $\Longrightarrow$ **v)** $I \leq R$ ve $I \nsubseteq ann_R(Q)$ olsun. Aksine, $IQ \neq Q$ ve $IQ \neq I\varphi(Q)$ olduğunu varsayalım. O zaman, $IQ \subseteq IQ$ ve $I\varphi(Q) \nsubseteq IQ$ olur. iv)'den dolayı $Q = IQ$ veya $I \subseteq ann_R(Q)$ olur ki bu bir çelişkidir.

v) $\Longrightarrow$ **i)** $a \in R$ ve $L \leq M$ olmak üzere $aQ \subseteq L$ ve $a\varphi(Q) \nsubseteq L$ olsun. $a \notin ann_R(Q)$ ise v)'den dolayı $aQ = Q$'dur, buradan $Q \subseteq L$ olur. Böylece Q, M'nin φ-ikinci alt modülüdür.

Teorem 3.4. M bir R-modül ve N, M'nin φ-ikinci alt modülü olsun. $M_1, \dots, M_k$, M'nin alt modülleri ve her bir i $(1 \leq i \leq k)$ için $ann_R(M_i)$, R'nin maksimal ideali olmak üzere $N = M_1 + \cdots + M_k$ olsun. O zaman ya N, M'nin ikinci alt modülüdür ya da $N = \varphi(N)$'dir.

Kanıt. Genelliği kaybetmeden herhangi bir i $(1 \leq i \leq k)$ için $N \nsubseteq \sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j$ olduğunu kabul edebiliriz. Teorem 3.3'den dolayı $\big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\big) = ann_R(N)$ veya $\big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\big) = \big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R \varphi(N)\big)$'dir. Bir i $(1 \leq i \leq k)$ için ilk durum sağlanıyorsa, $ann_R(M_i) \subseteq \big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\big) = ann_R(N)$ ve hipotezden dolayı $ann_R(M_i) = ann_R(N)$ olur. $ann_R(N)$ maksimal ideal olduğundan N, M'nin ikinci alt modülüdür. Şimdi, her bir i $(1 \leq i \leq k)$ için $\big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\big) = \big(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R \varphi(N)\big)$ olduğunu kabul edelim. $ann_R(M_1) \subseteq ann_R(N)$ ise $ann_R(N)$ maksimal ideal olacağından N, M'nin ikinci alt modülü olur. Bu yüzden $ann_R(M_1) \nsubseteq ann_R(N)$ olduğunu kabul edebiliriz. $r \in ann_R(M_1) \backslash ann_R(N)$ alalım. O zaman, bir i $(2 \leq i \leq k)$ için $r \notin ann_R(M_i)$'dir. $ann_R(M_i)$, R'nin maksimal ideali olduğundan $Rr + ann_R(M_i) = R$'dir. Diğer taraftan, $r \in ann_R(M_1) \subseteq (\sum_{j=2}^{k} M_j :_R N) = (\sum_{j=2}^{k} M_j :_R \varphi(N))$'dir. Buradan, $R = (\sum_{j=2}^{k} M_j :_R \varphi(N)) + ann_R(M_i)$'dir. Buna göre, $\varphi(N) \subseteq \sum_{j=2}^{k} M_j + ann_R(M_i)\varphi(N) \subseteq$

$\sum_{j=2}^{k} M_j + (\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N)\varphi(N)$ olur. $\left(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\right) \nsubseteq ann_R(N)$ ve $\left(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\right)N \neq N$ olduğundan Teorem 3.3'den dolayı, $\left(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\right)\varphi(N) = \left(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\right)N$'dir. Buradan, $\varphi(N) \subseteq \sum_{j=2}^{k} M_j + \left(\sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j :_R N\right)N \subseteq \sum_{j=2}^{k} M_j + \sum_{j=1,i\neq j}^{k} M_j = M_1 + \cdots + M_k = N$'dir.

Sonuç 3.5. *M* bir *R*-modül ve *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadelerden biri sağlanırsa ya *N*, *M*'nin ikinci alt modülüdür ya da $N = \varphi(N)$'dir.

i) *M* sonlu üretilmiş yarı-basit *R*-modüldür.

ii) *M* sonlu eş üretilmiş eş yarı-basit *R*-modüldür.

Kanıt. i) *M*'nin her *S* basit alt modülü için $ann_R(S)$, *R*'nin maksimal idealidir. *M* sonlu üretilmiş yarı-basit modül olduğundan $M_1, \ldots, M_k$ basit alt modül olmak üzere $N = M_1 + \cdots + M_k$ biçimindedir. Teorem 3.4'den dolayı ya *N*, *M*'nin ikinci alt modülüdür ya da $N = \varphi(N)$'dir.

ii) Sonlu eş üretilmiş, eş yarı-basit bir modül yarı-basittir. Sonlu eş üretilmiş yarı-basit modül de sonlu üretilmiştir. Böylece istenen sonuç i)'den elde edilir.

Tanım 3.6. *M* bir *R*-modül olsun. *M*'nin her *N* alt modülü için $N = (0:_M I)$ olacak şekilde bir *I* ideali varsa *M*'ye **eş çarpımsal** (comultiplication) modül denir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007a).

Önerme 3.7. *M* bir *R*-modül olsun. *M* eş çarpımsal modüldür ancak ve ancak *M*'nin her *N* alt modülü $N = (0:_M ann_R(N))$ biçimindedir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007a).

Aşağıdaki önermede ψ-asal idealler kullanılarak eş çarpımsal modüllerin φ-ikinci alt modüllerinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Önerme 3.8. $\psi: S(R) \to S(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon, *M* bir *R*-modül ve $(0) \neq N \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) $ann_R(\varphi(N)) \subseteq \psi(ann_R(N))$ ve *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ise $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal idealidir.

ii) *M* eş çarpımsal bir *R*-modül ve $ann_R(\varphi(N)) = \psi(ann_R(N))$ olsun. *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal idealidir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2020).

Kanıt. i) $N \neq (0)$ olduğundan $ann_R(N) \neq R$'dir. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in ann_R(N) \setminus \psi(ann_R(N))$ olsun. $ann_R(\varphi(N)) \subseteq \psi(ann_R(N))$ olduğundan $aN \subseteq (0:_M b)$ ve $a\varphi(N) \nsubseteq (0:_M b)$ elde edilir. *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü olduğundan $a \in ann_R(N)$ veya $N \subseteq (0:_M b)$'dir. Şu halde $a \in ann_R(N)$ veya $b \in ann_R(N)$'dir. Böylece $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal idealidir.

ii) *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ise i)'den dolayı $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal idealidir. Kabul edelim ki; $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal ideali olsun. $a \in R$ ve $K \leq M$ olmak üzere, $aN \subseteq K$ ve $a\varphi(N) \nsubseteq K$ olsun. *M* eş çarpımsal modül olduğundan, *R*'nin bir *I* ideali için $K = (0:_M I)$ biçimindedir. Buna göre, $aIN = (0)$ ve $aI\varphi(N) \neq (0)$'dır. Buradan, $aI \subseteq ann_R(N)$ ve $aI \nsubseteq ann_R(\varphi(N)) = \psi(ann_R(N))$ olur. $ann_R(N)$, *R*'nin ψ-asal ideali olduğundan $a \in ann_R(N)$ veya $I \subseteq ann_R(N)$'dir. Şu halde, $a \in ann_R(N)$ veya $(0:_M ann_R(N)) = N \subseteq (0:_M I) = K$'dır. Böylece *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülüdür.

Tanım 3.9. *M* bir *R*-modül ve $N, K \leq M$ olsun. *N* ve *K*'nın eş çarpımı $(0:_M ann_R(N)ann_R(K))$ olarak tanımlanır ve *C(NK)* ile gösterilir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2007b).

Aşağıdaki önermede eş çarpım kavramı kullanılarak eş çarpımsal modüllerin φ-ikinci alt modüllerinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Önerme 3.10. *M* eş çarpımsal bir *R*-modül ve $(0) \neq N \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülüdür.

ii) *K* ve *L*, *M*'nin alt modülleri olmak üzere $N \subseteq C(KL)$ ve $\varphi(N) \nsubseteq C(KL)$ olması $N \subseteq K$ veya $N \subseteq L$ olmasını gerektirir.

Kanıt. $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$ *K* ve *L*, *M*'nin alt modülleri olmak üzere $N \subseteq C(KL) = (0:_M ann_R(K)ann_R(L))$ ve $\varphi(N) \nsubseteq C(KL)$ olsun. O zaman, $ann_R(L)N \subseteq$

$\left(0:_M ann_R(K)\right) = K$ ve $ann_R(L)\varphi(N) \nsubseteq \left(0:_M ann_R(K)\right) = K$'dır. *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü olduğundan, $ann_R(L) \subseteq ann_R(N)$ veya $N \subseteq K$'dır. Buradan, $\left(0:_M ann_R(N)\right) = N \subseteq \left(0:_M ann_R(L)\right) = L$ veya $N \subseteq K$ olur.

$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$ $I \leq R$ ve $K \leq M$ olmak üzere $IN \subseteq K$ ve $I\varphi(N) \nsubseteq K$ olsun. M eş çarpımsal modül olduğundan, *R*'nin bir *J* ideali için $K = (0:_M J)$ biçimindedir. Buna göre, *IJN=(0)* ve $IJ\varphi(N) \neq (0)$'dır. Buradan, $N \subseteq (0:_M IJ) = C\left((0:_M I)K\right)$ ve $\varphi(N) \nsubseteq C\left((0:_M I)K\right)$. Kabulden dolayı, $N \subseteq (0:_M I)$ veya $N \subseteq K$'dır. Böylece $I \subseteq ann_R(N)$ veya $N \subseteq K$ olur ki bu *N*'nin φ-ikinci alt modül olduğunu gösterir.

Önerme 3.11. *M* bir *R*-modül ve $K \leq M$ olsun. $\varphi^K : S(K) \to S(K)$, her $L \in S(K)$ için $\varphi^K(L) = \varphi(L) \cap K$ şeklinde tanımlı fonksiyon olmak üzere, *K*'nın bir *N* alt modülü için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

- **i)** *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ise *N*, *K*'nın φ^K-ikinci alt modülüdür.
- **ii)** $\varphi(N) \subseteq K$ olsun. *N*, *K*'nın φ^K-ikinci alt modülüdür ancak ve ancak *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülüdür.
- **iii)** $K \subseteq \varphi(N)$ ve *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ise *N*, *K*'nın zayıf ikinci alt modülüdür.
- **iv)** $\varphi(N) \subseteq \varphi(K)$, *K*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü ve *N*, *K*'nın zayıf ikinci alt modülü ise *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modüldür.

Kanıt. i) $a \in R$ ve *L*, *K*'nın bir alt modülü olmak üzere $aN \subseteq L$ ve $a\varphi^K(N) \nsubseteq L$ olsun. O zaman $a(\varphi(N) \cap K) \nsubseteq L$ ve dolayısıyla $a\varphi(N) \nsubseteq L$'dir. *N*, *M*'nin φ-ikinci alt modülü olduğundan $a \in ann_R(N)$ veya $N \subseteq L$'dir. Böylece *N*, *K*'nın φ^K-ikinci alt modülüdür.

ii) $\varphi(N) \subseteq K$ ise $\varphi^K(N) = \varphi(N)$ olur. Kısım i) ve tanım kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

iii) $K \subseteq \varphi(N)$ ise $\varphi^K(N) = K$ olur ve tanım kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

iv) $a \in R$ ve *L*, *M*'nin bir alt modülü olmak üzere $aN \subseteq L$ ve $a\varphi(N) \nsubseteq L$ olsun. O zaman, hipotezden dolayı $a\varphi(K) \nsubseteq L$'dir. $aK \subseteq L$ ise $a \in ann_R(K) \subseteq ann_R(N)$ veya $N \subseteq K \subseteq L$ olur ve kanıt biter. $aK \nsubseteq L$ ise $aK = a\varphi_K(N) \nsubseteq L \cap K$ ve $aN \subseteq L \cap K$ olur. *N*, *K*'nın zayıf

ikinci alt modülü olduğundan $a \in ann_R(N)$ veya $N \subseteq L$ elde edilir. Böylece N, M'nin φ-ikinci alt modüldür.

Önerme 3.12. $r \in \{1,2\}$ için R_i bir halka ve M_i bir R_i-modül olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ ve $M = M_1 \times M_2$ olsun. N_1, M_1'in zayıf ikinci alt modülü ve $\varphi(N_1 \times \{0\}) \subseteq M_1 \times \{0\}$ ise $N_1 \times \{0\}$, M'nin φ-ikinci alt modülüdür.

Kanıt. $N_1 \times \{0\} \neq \{0_M\}$ olduğu açıktır. $(r_1, r_2) \in R$ ve $K_1 \times K_2$, M'nin bir alt modülü olmak üzere $(r_1, r_2)(N_1 \times \{0\}) \subseteq K_1 \times K_2$ ve $(r_1, r_2)\varphi((N_1 \times \{0\})) \nsubseteq K_1 \times K_2$ olsun. Hipotezden dolayı $(r_1, r_2)(M_1 \times \{0\}) \nsubseteq K_1 \times K_2$'dir. Buna göre, $r_1 N_1 \subseteq K_1$ ve $r_1 M_1 \nsubseteq K_1$'dir. N_1, M_1'in zayıf ikinci alt modülü olduğundan $r_1 \in ann_{R_1}(N_1)$ veya $N_1 \subseteq K_1$ elde edilir. Bu durumda $(r_1, r_2) \in ann_{R_1}(N_1) \times R_2 = ann_R(N_1 \times \{0\})$ veya $N_1 \times \{0\} \subseteq K_1 \times K_2$ olur ve kanıt biter.

M bir R-modül olsun. φ_ω fonksiyonu, $\varphi_\omega : S(M) \to S(M)$, her $L \in S(M)$ için $\varphi_\omega(L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} (L :_M ann_R(L)^i)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon olacaktır.

M bir R-modül ve $\varphi, \psi : S(M) \to S(M)$ iki fonksiyon olsun. Her $N \in S(M)$ için $\varphi(N) \subseteq \psi(N)$ ise $\varphi \leq \psi$ yazılacaktır.

Sonuç 3.13. $r \in \{1,2\}$ için R_i bir halka ve M_i bir R_i-modül olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ ve $M = M_1 \times M_2$ olsun. $\varphi : S(M) \to S(M)$, $\varphi \leq \varphi_\omega$ olacak şekilde bir fonksiyon ve N_1, M_1'in zayıf ikinci alt modülü ise $N_1 \times \{0\}$, M'nin φ-ikinci alt modülüdür.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\varphi(N_1 \times \{0\}) &\subseteq \varphi_\omega(N_1 \times \{0\}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} (N_1 \times \{0\} :_M (ann_R(N_1 \times \{0\}))^i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} (N_1 :_{M_1} ann_{R_1}(N_1)^i) \times (0 :_{M_2} R_2) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} (N_1 :_{M_1} ann_{R_1}(N_1)^i) \times \{0_{M_2}\} \subseteq M_1 \times \{0_{M_2}\}
\end{aligned}$$

olur. Önerme 3.12'den dolayı $N_1 \times \{0\}$, M'nin φ-ikinci alt modülüdür.

BÖLÜM 4

n-YAKLAŞIK İKİNCİ ALT MODÜLLER VE BİR MODÜLÜN YAKLAŞIK İKİNCİ RADİKALİ

Bu bölümde *n*-yaklaşık ikinci alt modüllerin çeşitli cebirsel özellikleri araştırılacak ve Çeken, Alkan ve Smith, (2013b) makalesinde tanımlanan ikinci radikal kavramının bir genellemesi verilecektir.

Önerme 4.1. *M* bir asal *R*-modül ve *N*, *M*'nin yaklaşık ikinci bir öz alt modülü olsun. O zaman *N*, *M*'nin bir asal alt modülüdür.

Kanıt. $r \in R, m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ olsun. *M* asal R-modül olduğundan $ann_R(N) = ann_R(M)$'dir.$r \in ann_R(N)$ ise $r \in (N:_R M)$ olur ve kanıt biter. Bu yüzden $r \notin ann_R(N)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, Teorem 3.3'den dolayı $rN = N$ veya $rN = r\big(N:_M ann_R(N)\big) = r\big(N:_M ann_R(M)\big) = rM$ olur. $rN = N$ ise $rm = rn$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. $r(m-n) = 0$ ve *M* asal *R*-modül olduğundan $m - n = 0$, yani $m = n \in N$ elde edilir. $rN = rM$ ise yine $rm \in rN$ olur bir önceki durumda olduğu gibi $m \in N$ elde edilir. Böylece *N*, *M*'nin bir asal alt modülüdür.

Teorem 4.2. *M* bir *R*-modül olsun. $P_1 \cap \ldots \cap P_n \subseteq ann_R(M)$ olacak şekilde $P_1, \ldots, P_n$ maksimal idealleri varsa, *R*'nin herhangi bir *I* ideali için $(0:_M I) = (0)$'dır veya $(0:_M I)$, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Kanıt. $(0:_M I) \neq (0)$ olduğunu kabul edelim. İlk olarak, $(0:_M I) = (0:_M I^2)$ olduğunu göstereceğiz. $(0:_M I) \subseteq (0:_M I^2)$ olduğu açıktır. $m \in (0:_M I^2)$ ve $a \in I$ olsun. Genelliği kaybetmeden, $a \in P_1 \cap \ldots \cap P_t$ ve $a \notin P_{t+1} \cup \ldots \cup P_n$ olacak şekilde bir $t\ (0 \leq t \leq n)$ bulunduğunu söyleyebiliriz. Herhangi bir $i\ (t+1 \leq i \leq n)$ için $R = P_i + Ra$'dır. Buna

göre $1 = x_i + r_i a$ olacak şekilde $x_i \in P_i$, $r_i \in R$ vardır. Böylece, $1 = x_{t+1} \dots x_n + b$ olacak şekilde bir $b \in I$ bulunabilir ve buradan, $a = ax_{t+1} \dots x_n + ab$ elde edilir. $ax_{t+1} \dots x_n \in ann_R(M)$ ve $abm = 0$ olduğundan $am = 0$ bulunur. Böylece, $Im = (0)$ ve dolayısıyla $m \in (0:_M I)$ bulunur. Buna göre $(0:_M I) = (0:_M I^2)$'dir. Açıktır ki; $(0:_M I) \subseteq \big((0:_M I):_M ann_R(0:_M I)\big)$'dır. Diğer taraftan, $\big((0:_M I):_M ann_R(0:_M I)\big) = \big(0:_M Iann_R(0:_M I)\big) \subseteq (0:_M I^2) = (0:_M I)$'dir. Böylece $(0:_M I) = \big((0:_M I):_M ann_R(0:_M I)\big)$ elde edilir ve bu sonuç $(0:_M I)$'nın, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülü olduğunu gösterir.

Teorem 4.3. *M* bir *R*-modül, $a \in R$, $(0:_M a) \neq (0)$ ve $(0:_M a) = aM$ olsun. O zaman, $(0:_M a)$, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $(0:_M a)$, *M*'nin ikinci alt modülüdür.

Kanıt. $(0:_M a)$, *M*'nin ikinci alt modülü ise yaklaşık ikinci alt modül olacağı açıktır. Tersine, $(0:_M a)$'nın, M'nin yaklaşık ikinci alt modülü olduğunu kabul edelim. $b \in R$ ve $K \leq M$ olmak üzere $b(0:_M a) \subseteq K$ olsun. Eğer, $b\big((0:_M a):_M ann_R(0:_M a)\big) = bM \nsubseteq K$ ise kanıt biter. Bu yüzden, $bM \subseteq K$olduğunu kabul edebiliriz. $(b + a)(0:_M a) \subseteq K$'dır. Eğer, $(b + a)M \nsubseteq K$ ise $(0:_M a)$, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülü olduğundan $(0:_M a) \subseteq K$ veya $b \in ann_R(0:_M a)$'dır. Bu yüzden, $(b + a)M \subseteq K$'dır. Buna göre, $bM \subseteq K$ olması $aM = (0:_M a) \subseteq K$ olmasını gerektirir. Böylece $(0:_M a)$, *M*'nin ikinci alt modülüdür.

Tanım 4.4. *M* bir *R*-modül olsun. *M*'nin her *N* alt modülü için $N = C(N^2)$ ise *M*'ye fully coidempotent modül denir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2012).

Ön Teorem 4.5. *M* bir *R*-modül olsun. *M* fully coidempotent modüldür ancak ve ancak *M*'nin her *N* alt modülü ve her *m* pozitif tam sayısı için $N = (N:_M ann_R(N)^m)$'dir.

Kanıt. *M*'nin fully coidempotent *R*-modül olduğunu kabul edelim. *N*, *M*'nin bir alt modülü ve m bir pozitif tam sayı olsun. $N = \big(N:_M ann_R(N)\big)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü daha sonra tümevarım ile $N = (N:_M ann_R(N)^m)$ olduğu görülür. $N = C(N^2) = (0:_M ann_R(N)^2)$'dir. Ayrıca, $N \subseteq \big(0:_M ann_R(N)\big)$ olması $\big(N:_M ann_R(N)\big) \subseteq ((0:_M ann_R(N)):_M ann_R(N)) = (0:_M ann_R(N)^2) = N$ olmasını gerektirir. Yani, $\big(N:_M ann_R(N)\big) \subseteq N$'dir. Diğer kapsama her zaman sağlandığından $\big(N:_M ann_R(N)\big) = N$ olur. Tümevarım ile $N = (N:_M ann_R(N)^m)$ olduğu görülür. Tersine, *M*'nin her *N* alt modülü

ve her m pozitif tam sayısı için $N = (N:_M ann_R(N)^m)$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $N = \big(N:_M ann_R(N)\big)$'dir. Buradan,

$$C(N^2) = (0:_M ann_R(N)^2) \subseteq (N:_M ann_R(N)^2) = \Big(\big(N:_M ann_R(N)\big):_M ann_R(N)\Big)$$
$$= \big(N:_M ann_R(N)\big) = N$$

elde edilir. Böylece, $C(N^2) \subseteq N$ bulunur. Diğer kapsama her zaman sağlandığından $N = C(N^2)$ olur.

Teorem 4.6. $n, m \geq 2, R_1, \dots, R_m$ değişmeli halkalar, her i ($1 \leq i \leq m$) için M_i sıfırdan farklı bir R_i-modül, $R = R_1 \times \dots \times R_m$ ve $M = M_1 \times \dots \times M_m$ olsun. O zaman, *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülü n-yaklaşık ikinci alt modüldür ancak ve ancak *M* fully coidempotent *R*-modüldür.

Kanıt. *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülünün n-yaklaşık ikinci alt modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda, *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülü yaklaşık ikinci alt modüldür. Her $i \in \{1, \dots, m\}$ için M_i modülünün fully coidempotent olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda *M* de fully coidempotent modül olacaktır. Aksine, M_1'in fully coidempotent olmadığını varsayalım. O zaman, Ön Teorem 4.5'den dolayı $\Big(N_1:_{M_1} ann_{R_1}(N_1)\Big) \nsubseteq N_1$ olacak şekilde M_1'nin bir N_1 alt modülü vardır. Buna göre, $(1,0,\dots,0)(N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m) \subseteq N_1 \times 0 \times \dots \times 0$ ve $(1,0,\dots,0)\big(N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m:_M ann_R(N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m)\big) \nsubseteq N_1 \times 0 \times \dots \times 0$'dır. Hipotezden dolayı, $N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür. Bu yüzden $(1,0,\dots,0) \in ann_R(N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m)$ veya $N_1 \times M_2 \times \dots \times M_m \subseteq N_1 \times 0 \times \dots \times 0$'dır. Buradan, $N_1 = (0)$ veya $i \in \{2, \dots, m\}$ için $M_i = (0)$ olur ki bu durumlar birer çelişkidir. O halde M_1 fully coidempotent modüldür. Benzer şekilde her bir $i \in \{2, \dots, m\}$ için M_i modülünün fully coidempotent olduğu gösterilebilir. Böylece *M* fully coidempotent modüldür. Tersine *M* fully coidempotent modül ise Ön Teorem 4.5'den dolayı *M*'nin sıfırdan farklı her *N* alt modülü için $N = (N:_M ann_R(N)^{n-1}) = \varphi_n(N)$'dir ve bu durumda *N*'nin n-yaklaşık ikinci alt modül olacağı açıktır.

Sonuç 4.7. $n, m \geq 2, R_1, \dots, R_m$ değişmeli halkalar, her i ($1 \leq i \leq m$) için M_i sıfırdan farklı bir R_i-modül, $R = R_1 \times \dots \times R_m$ ve $M = M_1 \times \dots \times M_m$ olsun. O zaman, *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülü n-yaklaşık ikinci alt modüldür ancak ve ancak *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülü (n+1)-yaklaşık ikinci alt modüldür.

Kanıt. *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülünün n-yaklaşık ikinci alt modül olduğunu kabul edelim. O zaman, Teorem 4.6'dan dolayı *M* fully coidempotent modüldür. $n+1>2$ olduğundan, yine Teorem 4.6'dan dolayı *M*'nin sıfırdan farklı her alt modülü (n+1)-yaklaşık ikinci alt modüldür. Tanımdan dolayı her (n+1)-yaklaşık ikinci alt modül n-yaklaşık ikinci alt modül olduğundan yeterlilik kısmı açıktır.

Ön Teorem 4.8. *M* bir *R*-modül, $N \leq M$ ve $I \leq R$ olmak üzere $(0:_M I) \neq (N:_M I)$ ve $(N:_M I) \neq N$ olsun. O zaman $K \coloneqq (N:_M I)$, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $K = \big(K:_M ann_R(K)\big)$'dır.

Kanıt. $K = \big(K:_M ann_R(K)\big) = \varphi_2(K)$ ise açıktır ki; *K*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür. Tersine, kabul edelim ki; *K*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülü olsun. $I \subseteq ann_R(K)$ ise $(0:_M I) = (N:_M I)$ olur ki bu bir çelişkidir. Buna göre, $I \nsubseteq ann_R(K)$'dır. Teorem 3.3'den dolayı $IK = K$ veya $IK = I\big(K:_M ann_R(K)\big)$'dır. $IK = K$ ise $K = IK = I(N:_M I) \subseteq N$ ve dolayısıyla $K = (N:_M I) = N$ çelişkisi elde edilir. O halde, $IK = I\big(K:_M ann_R(K)\big) \subseteq N$'dir. Buradan, $\big(K:_M ann_R(K)\big) \subseteq (N:_M I) = K$ olur. Ters kapsama her zaman sağlandığından, $K = \big(K:_M ann_R(K)\big)$ elde edilir.

Teorem 4.9. *M* Artinian *R*-modül, $I \subseteq J(R)$ ve *N*, *M*'nin bir alt modülü olmak üzere $(N:_R M) = (0)$ ve $(0:_M I) \neq (N:_M I)$ olsun. O zaman, herhangi bir $n > 1$ tam sayısı için $(N:_M I)$, *M*'nin n-yaklaşık ikinci alt modülü değildir.

Kanıt. $(N:_M I) = N$ ise Karamzadeh ve Karamzadeh, (2010) makalesindeki Önerme 3.5'e göre *N=M* olur ki bu bir çelişkidir. $(N:_M I) \subseteq \big(N:_M ann_R(N:_M I)\big)$ olduğu açıktır. $(N:_M I)$'nın, *M*'nin n-yaklaşık ikinci alt modülü olduğunu varsayalım. O zaman, $(N:_M I)$ yaklaşık ikinci alt modüldür ve Ön Teorem 4.8'e göre $(N:_M I) = \big((N:_M I):_M ann_R(N:_M I)\big)$'dır. Buradan,

$$(N:_M I^2) = ((N:_M I):_M I) \subseteq \big((N:_M ann_R(N:_M I)\big):_M I) = ((N:_M I):_M ann_R(N:_M I)) = (N:_M I)$$

yani, $(N:_M I^2) \subseteq (N:_M I)$ elde edilir. Diğer kapsama her zaman sağlandığından $(N:_M I^2) = (N:_M I) = ((N:_M I):_M I)$ olur. Karamzadeh ve Karamzadeh, (2010) makalesindeki Önerme

3.5'e göre $(N:_M I) = M$'dir. Buradan $I \subseteq (N:_R M) = (0)$ olur ki; $(0:_M I) \neq (N:_M I)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $(N:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülü değildir.

Ön Teorem 4.10. M bir R-modül ve $I \leq R$ olsun. O zaman, her $n>1$ tam sayısı için $(0:_M (ann_R(0:_M I))^n) = (0:_M I^n)$'dir. Özel olarak, $\left((0:_M I):_M \left(ann_R(0:_M I)\right)^{n-1}\right) = (0:_M I^n)$'dir.

Kanıt. $I \subseteq ann_R(0:_M I)$ olduğundan $I^n \subseteq (ann_R(0:_M I))^n$ ve dolayısıyla $(0:_M (ann_R(0:_M I))^n) \subseteq (0:_M I^n)$'dir. $m \in (0:_M I^n)$ olsun. Her i $(1 \leq i \leq n)$ için $r_i \in ann_R(0:_M I)$ olmak üzere, $r_1 \dots r_n \in (ann_R(0:_M I))^n$ alalım. O zaman, her i $(1 \leq i \leq n)$ için $r_i(0:_M I) = (0)$'dır. $I^{n-1}m \subseteq (0:_M I)$ olduğundan $r_1 I^{n-1}m \subseteq r_1(0:_M I) = (0)$'dır. Böylece, $r_1 m \in (0:_M I^{n-1})$'dir. $I^{n-2}r_1 m \subseteq (0:_M I)$ olduğundan $r_1 r_2 I^{n-2}m \subseteq r_2(0:_M I) = (0)$ ve dolayısıyla $r_1 r_2 m \in (0:_M I^{n-2})$'dir. Bu sürece devam edilerek, $r_1 \dots r_n m \in (0:_M R) = (0)$'dır. Böylece, $(ann_R(0:_M I))^n m = (0)$ ve dolayısıyla $m \in (0:_M (ann_R(0:_M I))^n)$'dır. Şu halde, $(0:_M I^n) \subseteq (0:_M (ann_R(0:_M I))^n)$ olur. Özel olarak,

$$\left((0:_M I):_M \left(ann_R(0:_M I)\right)^{n-1}\right) = \left(\left(0:_M \left(ann_R(0:_M I)\right)^{n-1}\right):_M I\right) = \left((0:_M I^{n-1}):_M I\right)$$
$$= (0:_M I^n)$$

elde edilir.

Her $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa R'ye Von Neumann düzenli halka denir (Anderson ve Fuller, 1992). Değişmeli bir R halkası Von Neumann düzenli halkadır ancak ve ancak R'nin her I ideali için $I^2 = I$'dır (Anderson ve Fuller, 1992). Ön Teorem 4.10'a göre, R Von Neumann düzenli bir halka, M bir R-modül, $I \leq R$ ve $(0:_M I) \neq (0)$ ise $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Tanım 4.11. M bir R-modül olsun. M eş çarpımsal bir modül ve R'nin her I ideali için $ann_R(0:_M I) = I$ ise M'ye güçlü eş çarpımsal modül denir (Ansari-Toroghy ve Farshadifar, 2009).

Önerme 4.12. M güçlü eş çarpımsal bir R-modül ve $I \leq R$ olsun. O zaman I, R'nin n-yaklaşık asal idealidir ancak ve ancak $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Kanıt. Ön Teorem 4.10'dan dolayı $\varphi_n\big((0:_M I)\big) = \Big((0:_M I):_M \big(ann_R(0:_M I)\big)^{n-1}\Big) = (0:_M I^n)$'dir. M güçlü eş çarpımsal modül olduğundan $ann_R(0:_M I^n) = I^n$ ve $ann_R(0:_M I) = I$'dır. Böylece, $ann_R\Big(\varphi_n\big((0:_M I)\big)\Big) = \phi_n\big(ann_R(0:_M I)\big)$'dır. Önerme 3.8-ii)'den dolayı I, R'nin n-yaklaşık asal idealidir ancak ve ancak $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Örnek 4.13. F bir cisim olmak üzere $R = F\big[[X^3, X^4, X^5]\big]$ ve $I = RX^3 + RX^4$ olsun. O zaman I, R'nin yaklaşık asal idealidir fakat 3-yaklaşık asal ideali değildir (Anderson ve Bataineh, 2008). M güçlü eş çarpımsal bir R-modül olsun. Önerme 4.12'den dolayı $(0:_M I)$, M'nin yaklaşık ikinci alt modüldür fakat 3-yaklaşık ikinci alt modülü değildir.

Örnek 4.14. M eş yarıbasit R-modül olsun. Ansari-Toroghy ve Farshadifar (2011) makalesindeki Teorem 4.8 ve Behboodi, Karamzadeh ve Koohy, (2004) makalesindeki Teorem 2.3 birleştirilerek, her $n > 1$ tamsayısı ve R'nin her I ideali için $(0:_M I) = (0:_M I^n)$ olduğu görülür. Bu durumda, Ön Teorem 4.10'a göre her $n > 1$ tamsayısı ve R'nin her I ideali için $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Tanım 4.15. R halkasının her öz ideali asal ideallerin bir çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa R'ye ZPI-halka denir (Larsen ve McCarthy, 1971).

Teorem 4.16. $n > 1$ bir tamsayı, M bir R-modül, $I \leq R$ ve $(0:_M I) \neq (0)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

- **i)** R bir ZPI-halka ve $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülü ise ya $(0:_M I) = (0:_M I^n)$'dir ya da R'nin bir P asal ideali için $(0:_M I) = (0:_M P)$'dir.
- **ii)** R Dedekind bölgesi olsun. O zaman $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $(0:_M I) = (0:_M I^n)$'dir veya $(0:_M I)$, M'nin ikinci alt modülüdür.
- **iii)** *(R,m)* bir yerel ZPI-halka ve $M/(0:_M I)$ sonlu eş üretilmiş olsun. O zaman $(0:_M I)$, M'nin n-yaklaşık ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $(0:_M I) = M$'dir veya $(0:_M I) = (0:_M m)$'dir.

Kanıt. i) R ZPI-halka olduğundan $I = P_1^{t_1} \dots P_k^{t_k}$ olacak şekilde R'nin farklı $P_1, \dots, P_k$ asal idealleri vardır. R'nin her P asal ideali için $(0:_M I) \neq (0:_M P)$ olduğunu kabul edelim.

Genelliği kaybetmeden, $(0:_M I) \neq \left(0:_M P_1^{t_1-1} \ldots . P_k^{t_k}\right)$ ve $(t_1 - 1) + t_2 + \cdots + t_k > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $N := \left(0:_M P_1^{t_1-1} \ldots . P_k^{t_k}\right)$ ve $K \coloneqq (0:_M I)$ olsun. O zaman, $K = (N:_M P_1)$, $K \neq (0:_M P_1)$ ve $K \neq N$'dir. Ön Teorem 4.8'den dolayı $K = (K:_M ann_R(K)^{n-1})$, yani $(0:_M I) = \left((0:_M I):_M \left(ann_R(0:_M I)\right)^{n-1}\right)$'dir. Ön Teorem 4.10'dan dolayı $(0:_M I) = (0:_M I^n)$'dir.

ii) $(0:_M I)$, *M*'nin *n*-yaklaşık ikinci alt modülü olsun. i)'den dolayı ya $(0:_M I) = (0:_M I^n)$'dir ya da *R*'nin bir *P* asal ideali için $(0:_M I) = (0:_M P)$'dir. Bir *P* asal ideali için $(0:_M I) = (0:_M P)$ olsun. *R* Dedekind bölgesi olduğundan *P=(0)*'dır ya da *P*, *R*'nin bir maksimal idealidir. Açıktır ki; *P=(0)* ise $(0:_M 0) = (0:_M I) = M$ ve dolayısıyla $(0:_M I^n) = M$'dir. *P*, *R*'nin maksimal ideali ise $(0:_M I) \neq (0)$ olduğundan $ann_R(0:_M P) = ann_R(0:_M I) = P$'dir. Buna göre $(0:_M I)$, *M*'nin ikinci alt modülüdür. Tersine, $(0:_M I) = (0:_M I^n)$ veya $(0:_M I)$, *M*'nin ikinci alt modülü olsun. İkinci durumda $(0:_M I)$'nın *n*-yaklaşık ikinci alt modül olacağı açıktır. $(0:_M I) = (0:_M I^n)$ ise Ön Teorem 4.10'dan dolayı $(0:_M I)$, *M*'nin *n*-yaklaşık ikinci alt modülüdür.

iii) $(0:_M I) = (0:_M m)$ ise $ann_R(0:_M I) = m$, *R*'nin maksimal ideali olduğundan $(0:_M I)$, *M*'nin ikinci alt modülü ve dolayısıyla *n*-yaklaşık ikinci alt modülüdür. $(0:_M I) = M$ ise $(0:_M I)$'nın *n*-yaklaşık ikinci alt modül olacağı açıktır. Tersine $(0:_M I)$, *M*'nin *n*-yaklaşık ikinci alt modülü olsun. Larsen ve McCarthy, (1971) kitabındaki Teorem 9.10'dan dolayı *R* Noetherian halkadır. $m = m^2$ ise Nakayama Lemma'dan, $m = (0)$ olur ki bu durumda *R* bir cisimdir. Böylece $(0:_M I) = (0:_M 0) = M$'dir. Şimdi $m \neq m^2$ olsun. $a \in m \backslash m^2$ alalım. O zaman, $m^2 \subsetneq m^2 + Ra \subseteq m$'dir. Larsen ve McCarthy, (1971) kaynak kitabındaki Teorem 9.10'a göre *R*'nin, m^2 ile m arasında kesin kapsanan bir ideali yoktur. Bu yüzden, $m^2 + Ra = m$ olur ve Nakayama Lemma'dan $m = Ra$ elde edilir. *P*, *R*'nin sıfırdan farklı bir asal ideali ve $0 \neq b \in P$ olsun. Krull Arakesit Teoreminden dolayı $\bigcap_{i=1}^{\infty} m^i = (0)$'dır. Buna göre, $b \in m^k$ ve $b \notin m^{k+1}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $b \in m^k = Ra^k$ olduğundan $b = ua^k$ olacak şekilde bir $u \in R$ vardır. $b \notin m^{k+1}$ olduğundan $u \notin m$'dir. Buna göre, u, R içinde tersinir elemandır. Şu halde $a^k = u^{-1}b \in P$ ve dolayısıyla $a \in P$'dir. Böylece $m = Ra = P$ olur. Şu halde m, R'nin sıfırdan farklı tek asal idealidir. i)'den dolayı, $(0:_M I) = (0:_M I^n)$ veya $(0:_M I) = (0:_M 0) = M$ veya $(0:_M I) = (0:_M m)$'dir. $(0:_M I) = (0:_M I^n)$ ise

$$\frac{(0:_M I)}{(0:_M I)} = \frac{((0:_M I):_M I^{n-1})}{(0:_M I)} = \left((0:_M I):_{\frac{M}{(0:_M I)}} I^{n-1}\right)$$

olur. Karamzadeh ve Karamzadeh, (2010) makalesindeki Önerme 3.5'den dolayı $(0:_M I) = M$ elde edilir.

Tanım 4.17. *S*, *R*'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi, *P*, *R*'nin bir asal ideali ve $S \cap P = \emptyset$ olsun. $J \nsubseteq P$ olan her *J* ideali için $S \cap J \neq \emptyset$ ise *S*'ye *R*'nin *P*-esas (*P*-essential) çarpımsal kapalı alt kümesi denir (Moradi ve Azizi, 2015).

Teorem 4.18. *M* bir *R*-modül, *N*, *M*'nin *n*-yaklaşık ikinci alt modülü ve $I = ann_R(N)$ olsun. O zaman, *R*'nin her *P* asal ideali için $S = [(R\backslash I) \cup ann_R(N:_M I^{n-1})]\backslash P$ kümesi *R*'nin *P*-esas çarpımsal kapalı alt kümesidir.

Kanıt. İlk olarak, *S*'nin çarpımsal kapalı bir alt küme olduğunu gösterelim. $r, s \in S$ olsun. $r \in ann_R(N:_M I^{n-1})$ veya $s \in ann_R(N:_M I^{n-1})$ ise $rs \in ann_R(N:_M I^{n-1})\backslash P$ ve dolayısıyla $rs \in S$'dir. Bu yüzden $r, s \notin ann_R(N:_M I^{n-1})$ olduğunu kabul edebiliriz. Aksine, $rs \notin S$ olduğunu varsayalım. O zaman, $rs \in I$'dır. Ayrıca, $rs \notin P$'dir. Çünkü $rs \in P$ olsaydı $r \in S \cap P$ veya $s \in S \cap P$ olur ki bu bir çelişkidir. $rs \notin ann_R(N:_M I^{n-1})$ olduğundan $r(N:_M ann_R(N)^{n-1}) \nsubseteq (0:_M s)$ ve $rN \subseteq (0:_M s)$'dir. *N*, n-yaklaşık ikinci alt modül olduğundan $r \in I$ veya $s \in I$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $rs \in S$ ve dolayısıyla *S*, *R*'nin çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. Şimdi, *S*'nin *P*-esas çarpımsal kapalı olduğunu gösterelim. *J*, *R*'nin bir ideali ve $J \nsubseteq P$ olsun. $I \subseteq P$ ise $S = R\backslash P$ olur ki bu durumda *S*'nin *P*-esas çarpımsal kapalı olduğu açıktır. $J \cap S = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $J \cap [(R\backslash I) \cup ann_R(N:_M I^{n-1})] \subseteq P$ ve $J \subseteq I \cup P$ olduğu görülebilir. Buna göre, $J \subseteq I$ olmalıdır. Diğer taraftan, $N \subseteq (0:_M I)$ olması $(N:_M I^{n-1}) \subseteq (0:_M I^n)$ olmasını gerektirir. Buradan, $I^n \subseteq ann_R(0:_M I^n) \subseteq ann_R(N:_M I^{n-1})$ olur. Böylece $J^n \subseteq I^n \cap J \subseteq J \cap ann_R(N:_M I^{n-1}) \subseteq P$ ve dolayısıyla $J \subseteq P$ olur ki bu bir çelişkidir. Şu halde $J \cap S \neq \emptyset$ ve dolayısıyla *S*, *R*'nin *P*-esas çarpımsal kapalı alt kümesidir.

M bir *R*-modül ve $N \leq M$ olsun. *N*'nin tüm ikinci alt modüllerinin toplamı *N*'nin ikinci radikali olarak adlandırılır ve *sec(N)* ile gösterilir. *N*'nin ikinci alt modülü yoksa *sec(N)=(0)* olarak tanımlanır (Çeken vd., 2013b). $S \subsetneq M\backslash\{0\}$ olsun. *R*'nin her *A* ideali ve tüm $K, L \leq M$ alt modülleri için $(0:_{K\cap L} A) \cup S \neq M$ ve $(K \cap L)A \cup S \neq M$ olması $(K \cap$

$L) \cup S \neq M$ olmasını gerektiriyorsa *S*'ye m^*-sistem denir. Çeken, Alkan ve Smith, (2013b) makalesindeki Teorem 2.13'de

$sec(N) = \{x \in N: x \notin S \; ve \; N \cup S = M \; olacak \; şekilde \; bir \; S \; m^* - sistemi \; vardır\}$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Bu kavramların birer genellemesi olarak bir alt modülün yaklaşık ikinci radikali ve yaklaşık m^*-sistemler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.19. *M* bir *R*-modül, *N*, *M*'nin bir alt modülü ve $T \coloneqq \{Q \leq N: Q, M'nin \; yaklaşık \; ikinci \; alt \; modülü \; ve \; (N:_M ann_R(N)) = (Q:_M ann_R(Q))\}$ olsun. *N*'nin yaklaşık ikinci radikali $a - sec(N)$ ile gösterilir ve $T \neq \emptyset$ ise $a - sec(N) := \sum_{Q \in T} Q$ olarak, $T = \emptyset$ ise $a - sec(N) = (0)$ olarak tanımlanır.

Tanım 4.20. *M* bir *R*-modül ve *S*, *M*'nin bir öz alt kümesi olsun. *M*'nin herhangi *K*, *L* alt modülleri ve *R*'nin herhangi bir *I* ideali için $(K \cap L) \cup S \neq M$, $(K \cap (0:_M I)) \cup S \neq M$ ve $(S^c:_M ann_R(S^c)) \nsubseteq (L:_M I)$ olması $(K \cap (L:_M I)) \cup S \neq M$ olmasını gerektiriyorsa *S*'ye yaklaşık m^*-sistem denir.

Önerme 4.21. *M* bir *R*-modül ve $(0) \neq Q \leq M$ olsun. *Q*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür ancak ve ancak $S \coloneqq M \backslash Q$ yaklaşık m^*-sistemdir.

Kanıt. *Q*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülü olsun. $K, L \leq M$ ve $I \leq R$ olmak üzere $(K \cap L) \cup S \neq M$, $(K \cap (0:_M I)) \cup S \neq M$ ve $(S^c:_M ann_R(S^c)) \nsubseteq (L:_M I)$ olsun. $(K \cap (L:_M I)) \cup S = M$ olduğunu varsayalım. O zaman, $Q \subseteq K \cap (L:_M I)$'dır. Buradan, $IQ \subseteq L$ ve $Q \subseteq K$'dır. *Q* yaklaşık ikinci alt modül olduğundan $I \subseteq ann_R(Q)$ veya $Q \subseteq L$'dir. $I \subseteq ann_R(Q)$ ise $Q \subseteq (0:_M I)$ ve dolayısıyla $Q \subseteq K \cap (0:_M I)$ olur ki bu $(K \cap (0:_M I)) \cup S \neq M$ olması ile çelişir. $Q \subseteq L$ ise $Q \subseteq K \cap L$ olur ki bu $(K \cap L) \cup S \neq M$ olması ile çelişir. Şu halde $(K \cap (L:_M I)) \cup S \neq M$ olmalıdır. Böylece, *S* yaklaşık m^*-sistemdir. Tersine, *S*'nin yaklaşık m^*-sistem olduğunu kabul edelim. $K \leq M$ ve $I \leq R$ olmak üzere $IQ \subseteq K$ ve $I(Q:_M ann_R(Q)) \nsubseteq K$ olsun. $Q \nsubseteq K$ ve $I \nsubseteq ann_R(Q)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $K \cup S \neq M$, $(0:_M I) \cup S \neq M$'dir. *S* yaklaşık m^*-sistem olduğundan $(K:_M I) \cup S \neq M$ ve dolayısıyla $Q \nsubseteq (K:_M I)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $Q \subseteq K$ veya $I \subseteq ann_R(Q)$ olmalıdır. Böylece *Q*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Teorem 4.22. *M* bir *R*-modül, *S*, *M* içinde yaklaşık m^*-sistem ve $(0) \neq Q \leq M$ olsun. *Q*, $\{K \leq M : K \cup S = M \; ve \; (K :_M ann_R(K)) = (S^c :_M ann_R(S^c))\}$ kümesinin bir minimal elemanı ise *Q*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Kanıt. $L \leq M$ ve $I \leq R$ olmak üzere $IQ \subseteq L$ ve $I(Q :_M ann_R(Q)) \nsubseteq L$ olsun. $Q \nsubseteq L$ ve $I \nsubseteq ann_R(Q)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $Q \cap L \subsetneq Q$'dur. $(Q \cap L) \cup S \neq M$ olduğunu göstereceğiz. Aksine $(Q \cap L) \cup S = M$ olsaydı, $S^c \subseteq Q \cap L$ ve buradan $(Q \cap L :_M ann_R(Q \cap L)) \subseteq (Q :_M ann_R(Q \cap L)) \subseteq (Q :_M ann_R(Q)) = (S^c :_M ann_R(S^c)) \subseteq (Q \cap L :_M ann_R(S^c)) \subseteq (Q \cap L :_M ann_R(Q \cap L))$ olurdu. Böylece $(Q \cap L :_M ann_R(Q \cap L)) = (S^c :_M ann_R(S^c))$ elde edilirdi ki bu *Q*'nun minimalliği ile çelişirdi. O halde $(Q \cap L) \cup S \neq M$'dir. Benzer şekilde $I \nsubseteq ann_R(Q)$ olduğundan $(Q \cap (0 :_M I)) \cup S \neq M$ elde edilir. *S* yaklaşık m^*-sistem olduğundan $(Q \cap (L :_M I)) \cup S \neq M$'dir. $IQ \subseteq L$ olduğundan $Q \subseteq (L :_M I)$ ve dolayısıyla $Q \cup S \neq M$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $Q \subseteq L$ veya $I \subseteq ann_R(Q)$ olmalıdır. Böylece *Q*, *M*'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür.

Teorem 4.23. *M* bir *R*-modül ve $N \leq M$ olsun. $(N :_M ann_R(N)) = (Q :_M ann_R(Q))$ olacak şekilde bir $Q \leq N$ yaklaşık ikinci alt modülü varsa

$$a - sec(N) = \{x \in N : x \notin S, N \cup S = M \; ve \; (N :_M ann_R(N)) = (S^c :_M ann_R(S^c)) \; olacak \; şekilde \; M \; içinde \; bir \; S \; yaklaşık \; m^* - sistemi \; vardır\}.$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$\{x \in N : x \notin S, N \cup S = M \; ve \; (N :_M ann_R(N)) = (S^c :_M ann_R(S^c)) \; olacak \; şekilde \; M \; içinde \; bir \; S \; m^* - sistemi \; vardır\}$ kümesini $\sqrt[a-s]{N}$ ile gösterelim. $x \in \sqrt[a-s]{N}$ alalım. $\psi = \{Q \leq N : Q \cup S = M, (Q :_M ann_R(Q)) = (S^c :_M ann_R(S^c))\}$ kümesini göz önüne alalım. $N \in \psi$ ve dolayısıyla $\psi \neq \emptyset$'dir. ψ ters kapsamaya göre kısmi sıralı bir kümedir. $\{Q_i\}_{i \in I}$, ψ içinde bir zincir olsun. $(\bigcap_{i \in I} Q_i) \cup S = M$ olduğu açıktır. Ayrıca, $(\bigcap_{i \in I} Q_i :_M ann_R(\bigcap_{i \in I} Q_i)) = \bigcap_{i \in I}(Q_i :_M ann_R(\bigcap_{i \in I} Q_i)) \subseteq \bigcap_{i \in I}(Q_i :_M ann_R(Q_i)) = (S^c :_M ann_R(S^c)) \subseteq (\bigcap_{i \in I} Q_i :_M ann_R(S^c)) \subseteq (\bigcap_{i \in I} Q_i :_M ann_R(\bigcap_{i \in I} Q_i))$ ve dolayısıyla $(S^c :_M ann_R(S^c)) =$

$\left(\bigcap_{i\in I} Q_i :_M ann_R(\bigcap_{i\in I} Q_i)\right)$'dir. Böylece $\bigcap_{i\in I} Q_i \in \psi$'dir ve ayrıca $\bigcap_{i\in I} Q_i$, $\{Q_i\}_{i\in I}$ zincirinin ters kapsamaya göre bir üst sınırıdır. Zorn Lemma'dan dolayı ψ'nin kapsamaya göre bir Q minimal elemanı vardır. Teorem 4.22'den Q, M'nin yaklaşık ikinci alt modülüdür. $x \in Q \subseteq a - sec(N)$ olduğundan $^{a-s}\sqrt{N} \subseteq a - sec(N)$'dir. Şimdi Q, N'nin yaklaşık ikinci alt modülü ve $\left(N:_M ann_R(N)\right) = \left(Q:_M ann_R(Q)\right)$ olsun. Önerme 4.21'den, $S \coloneqq M\backslash Q$ yaklaşık m^*-sistemdir. Ayrıca, $N \cup S = M$ ve her $x \in Q$ için $x \notin S$'dir. Böylece, $Q \subseteq {}^{a-s}\sqrt{N}$ ve dolayısıyla $a - sec(N) \subseteq {}^{a-s}\sqrt{N}$'dir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu tezde φ-ikinci ve n-yaklaşık ikinci alt modüllerin çeşitli cebirsel özellikleri belirlenmiş ve bu alt modül sınıfları vasıtasıyla modül ve halka karakterizasyonları elde edilmiştir.

İkinci alt modül kavramı, son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu alt modül sınıfının modül ve halka karakterizasyonlarının belirlenmesinde önemli bir rol oynadığı anlaşılmıştır. İkinci alt modüller ile ilgili çalışmaların artması ile birlikte, bu alt modüllerin genellemeleri araştırılmaya başlanmış ve bu genellenmiş ikinci alt modüllerin de ilginç ve önemli cebirsel özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Buradan hareketle, tezimizde ikinci alt modüllerin genellemelerinden φ-ikinci ve n-yaklaşık ikinci alt modül kavramları ele alınmış ve bu alt modül sınıfları üzerine araştırmalar yapılmıştır. Ele alınan kavramlara somut örnekler verilmiş ve bu kavramların literatürde yer alan diğer cebirsel yapılarla olan ilişkileri incelenmiştir. Bunun yanı sıra, ikinci radikal kavramının bir genellemesi olarak bir alt modülün yaklaşık ikinci radikali tanımlanmıştır. Yaklaşık m^*-sistem kavramı ortaya atılarak, bir alt modülün yaklaşık ikinci radikali yaklaşık m^*-sistem kümeleri vasıtasıyla karakterize edilmiştir.

Bu tezde ikinci alt modüller, bir φ fonksiyonu vasıtasıyla genellenmiş, temel özellikler ifade edildikten sonra φ fonksiyonu üzerine ek koşullar konularak bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Buradan hareketle, daha sonraki araştırmalarda φ fonksiyonu üzerine tezde konulmayan farklı koşullar konularak farklı sonuçlar elde edilebilir ve yeni çalışmalar yapılabilir. Tezde özel olarak φ_n fonksiyonu ile elde edilen n-yaklaşık ikinci alt modüller üzerine araştırmalar yapılarak halka ve modüller için yeni karakterizasyonlar sunulmuştur. Daha sonraki araştırmalarda özel φ fonksiyonları için başka alt modül sınıfları elde edilebilir, bunların cebirsel özellikleri araştırılabilir ve bu alt modüller kullanılarak modül ve halka karakterizasyonları yapılabilir.

KAYNAKLAR

Anderson, F. W., ve Fuller, K. R. (1992). Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, New York.

Anderson, D., ve Smith, E. (2003). Weakly prime ideals, *Houston J. of Math*, 29, 831–840.

Anderson, D., ve Bataineh, M. (2008). Generalization of prime ideals, *Comm Algebra*, 36, 686–696.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2007). The dual notion of multiplication modules, *Taiwanese J. Math*. 11 (4), 1189–1201.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2007). Product and dual product of submodules, *Far East J. Math. Sci.* 25 (3), 447–455.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2009). Strong comultiplication modules, *CMU. J. Nat. Sci. 8* (1), 105–113.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2011). The dual notions of some generalizations of prime submodules, *Comm. Algebra*, 39 (7), 2396-2416.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2012) Fully idempotent and coidempotent modules, *Bull. Iranian Math. Soc.,* 38 (4), 987-1005.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2013). On the dual notion of prime radicals of submodules, *Asian-Eur. J. Math.*, 6 (2), 1350024.

Ansari-Toroghy, H., ve Farshadifar, F. (2019). Some generalizations of second submodules, *Palestine Journal of Mathematics*, 8 (2), 159168.

Ansari-Toroghy, H., Farshadifar, F., ve Maleki-Roudposhti, S. (2021). n-absorbing and Strongly n-absorbing Second Submodules, *Bol. Soc. Paran. Mat.,* 39 (1), 9–22.

Atani, S. E., ve Farzalipour, F. (2007). On weakly prime submodules, *Tamk. J. Math*., 38 (3), 247–252.

Aydın, N., ve Kandamar, H. (2015). Soyut Cebir, Paradigma Akademi.

Behboodi, M., ve Koohy, H. (2004). Weakly prime submodules, *Vietnam J. Math.* 32 (2), 185-195.

Behboodi, M., Karamzadeh, O. A. S. ve Koohy, H. (2004). Modules Whose Certain Submodules Are Prime, *Vietnam Journal of Mathematics* 32 (3), 303-317.

Beyranvand, R., ve Rastgoo, F. (2016). Weakly second modules over noncommutative rings**,** *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45 (5), 1355-1366.

Bhatwadekar, S. M., ve Sharma, P. K. (2005). Uniqe factorization and birth of almost primes, *Comm. Algebra*, 33, 43–49.

Çallıalp, F., ve Tekir, Ü. (2009). Değişmeli halkalar ve modüller. Birsen Yayınevi.

Çeken, S., Alkan, M., ve Smith, P. F. (2013). Second Modules Over Noncommutative Rings, *Communications in Algebra*, 41 (1), 83-98.

Çeken, S., Alkan, M., ve Smith, P. F. (2013). The dual notion of the prime radical of a module, *Journal of Algebra*, 392, 265-275.

Çeken, S., ve Alkan, M. (2015). On Second Submodules, *Contemporary Mathematics*, 634, 67-77.

Çeken, S., ve Alkan, M. (2016). On the Weakly Second Spectrum of a Module, *Filomat*, 30 (4), 1013-1020.

Çeken, S. (2019). On the interior of a submodule with respect to a set of ideals, *Quaestiones Mathematicae*, 42 (4), 431-446.

Ebrahimpour, M., ve Nekooei, R. (2012). On generalizations of prime ideals, *Comm. Algebra* 40 (4), 1268–1279.

Ebrahimpour, M., ve Nekooei, R. (2013). On generalizations of prime submodules, *Bull. Iranian Math. Soc.* 39 (5), 919–939.

Ebrahimpour, M. (2014). On generalizations of prime ideals (II), *Comm. Algebra* 42 (9), 3861–3875.

Farshadifar, F., ve Ansari-Toroghy, H. (2020). ψ-second submodules of a module, *Beitr Algebra Geom*., 61, 571–578.

Feller, E. H., ve Swokowski, E. W. (1965). Prime modules, *Canad. J. Math*., 17, 1041-1052.

Karamzadeh, N. S., ve Karamzadeh, O. A. S. (2010). On Artinian Modules Over Duo Rings, *Communications in Algebra*, 38, 3521–3531.

Khashan, H. A. (2012). On almost prime submodules, *Acta Math. Sci. B.,* 32 (2), 645–651.

Larsen, M. D., ve McCarthy, P. J. (1971). Multiplicative Theory of Ideals. Pure and Applied Mathematics, Vol. 43. New York/London: Academic Press.

Moradi, S., ve Azizi, A. (2015). Generalizations of prime submodules, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44 (3), 587-595.

Saraç, B. (2009). On semiprime submodules, *Commun. Algebra,* 37 (7), 2485–2495.

Wisbauer, R. (1991). Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research, Algebra, Logic and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, PA.

Yassemi, S. (2001). The dual notion of prime submodules, *Arch. Math (Brno),* 37, 273-278.

Zamani, N. (2010). ϕ-prime submodules, *Glasg. Math. J.* 52 (2), 253-259.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ajlin ÖZKAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Prizren / 14.05.1996

Email : ajlin.03@hotmail.com

Eğitim Bilgileri

Lise : Gjon Buzuku Fen Lisesi 2014

Lisans : Matematik, Trakya Üniversitesi, Edirne 2018

İş Deneyimleri

2019-2021 : Edirne Doğru Cevap Özel Öğretim Kursu, Matematik Öğretmeni

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Çeken, S., Tekir Ü., Koç, S., ve Kelleqi, Ajlin (2020). Generalizations Of Second Submodules, *Filomat*, 34 (12), 3995–4004.