T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY – TOEPLİTZ VE CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİNİN KHATRİ – RAO VE TRACY – SİNGH ÇARPIMLARININ NORMLARI ÜZERİNE

Hacı CİVCİV

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10 / 01 / 2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....	.....
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
(Üye)	(Üye)

.....
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
(Danışman)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CAUCHY – TOEPLİTZ VE CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİNİN KHATRİ – RAO VE TRACY – SİNGH ÇARPIMLARININ NORMLARI ÜZERİNE

Hacı CİVCİV

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2005, 72 sayfa

Jüri :
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Cauchy – Toeplitz matrislerinin singüler değerleriyle G. Szegö ilgilenmiş ve bununla ilgili bir problem ortaya koymuştur. Daha sonra bu matrisler, C. Möler 'in dikkatini çekmiş ve C. Möler deneysel olarak bu matrislerin singüler değerlerinin çoğunun π'ye yaklaştığını tespit etmiş ama bu analitik olarak S. V. Parter tarafından çözülmüştür. E. E. Tyrtyshnikov $g = 1/2$ ve $h = 1$ özel durumu için, bu matrisin singüler değerleri için bir alt ve üst sınır bulmuştur. Durmuş Bozkurt bu matrisin genel halinin Euclide normu için bir alt ve üst sınır bulmuştur.

Biz bu çalışmada, $g < h$ ve $g, h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, genel Cauchy –Toeplitz matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının ℓ_p normu için bir alt ve üst sınır bulduk ve yine aynı şartlar altında Cauchy –Hankel matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının ℓ_p normu için bir alt ve üst sınır tespit ettik.

ANAHTAR KELİMELER : Matris Normu, Cauchy – Toeplitz Matrisleri, Cauchy – Hankel Matrisleri, Khatri – Rao Çarpımı, Tracy – Singh Çarpımı.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

ON THE NORMS OF KHATRİ – RAO AND TRACY – SİNGH PRODUCTS OF CAUCHY – TOEPLİTZ AND CAUCHY – HANKEL MATRİCES

Hacı CİVCİV

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Ass. Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
2005, 72 pages

Jury :
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

G. Szegö interested in the singuler values of Cauchy – Toeplitz matrix and put forward a problem. Later, these matrices attracted the attention of C. Moler, who had experimentaly discovered that most of their singular values are clustered near π. Recently, S. V. Parter gave an explanation of this phenomenon E. E. Tyrtyshnikov obtained a lower and upper bound for spectral norm of Cauchy – Toeplitz matrix such that h = 1 and g =1/2 . D. Bozkurt, found a lower and upper bound for the general condition of Euclidian norm of Cauchy – Toeplitz matrices.

In this study, we have established a lower and an upper for the ℓ_p norms of Khatri – Rao and Tracy – Singh Products of the Cauchy – Toeplitz matrix such that $g < h$ and $g, h \in \mathbb{R}^+$. Moreover, we have obtained an upper bound for the ℓ_p norms of Cauchy – Hankel matrix such that $g < h$ and $g, h \in \mathbb{R}^+$.

KEYWORDS : Matrix Norm, Cauchy – Toeplitz matrices, Cauchy – Hankel matrices, Khatri – Rao Product, Tracy – Singh Product.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölüm, sonraki bölümler için gerekli olan temel tanımlardan oluşmaktadır. Öncelikle, çalışma boyunca kullanılacak olan polygamma fonksiyonu ve onun özellikleri hakkında kısaca bilgi verelim.

Tanım 2.1. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

olmak üzere,

$$\Psi(x) = Psi(x) = \frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\Gamma(x)\right]\right\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona psi (veya digamma) fonksiyonu denir. Psi fonksiyonunun n. mertebeden türevine de polygamma fonksiyonu denir ve

$$\Psi(n,x) = \frac{d^n}{dx^n} Psi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\ln\left[\Gamma(x)\right]\right]$$

şeklinde gösterilir. Burada $n \geq 0$ dır. Eğer, $n = 0$ ise

$$\Psi(0,x) = Psi(x) = \frac{d}{dx}\left\{ln\left[\Gamma(x)\right]\right\}$$

olur (Kölbig 1972).

Özellik 2.1 $a \in \mathbb{Z}^+$**,** b herhangi bir sayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(a, n+b) = 0$$

dır (Bozkurt 1998).

2.1. Bazı Özel Matris Çarpımları

Tanım 2.1.1. A ve B sırasıyla, $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{kl})_{kl}$ şeklinde $m\times n$ ve $p\times q$ mertebeli herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$A\otimes B = (a_{ij}B)_{ij}$$
$$= ((a_{ij}\, b_{kl})_{kl})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan, $mp\times nq$ boyutlu $A\otimes B$ matrisine, A ve B matrislerinin Kronecker çarpımı denir.

Kronecker çarpıma aynı zamanda, tensör çarpım ya da direkt çarpım da denir.

Tanım 2.1.2. A ve B sırasıyla, $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{kl})_{kl}$ şeklinde $m\times n$ mertebeli herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$A\mathrm{o}B = (a_{ij}b_{ij})_{\mathrm{ij}}$$

şeklinde tanımlanan mxn mertebeli AoB matrisine A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

Tanım 2.1.3 A ve B sırasıyla, $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{kl})_{kl}$ şeklinde $m\times n$, pxq mertebeli herhangi iki kompleks matris ve A_{ij} , B_{kl} de sırasıyla A ve B matrislerinin m_ixn_j ($\sum m_i = m, \sum n_j = n$) , p_kxq_l ($\sum p_k = p, \sum q_l = q$) mertebeli (i, j)-inci ve (k, l)-inci blok alt matrisleri olmak üzere;

$$A\circledcirc B = ((A_{ij}\otimes B_{kl})_{kl})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan mpxnq mertebeli $A\circledcirc B$ matrisine, A ve B matrislerinin *Tracy-Singh çarpımı* denir (Shuangzhe 1999).

Tanım 2.1.4 A ve B sırasıyla, $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{kl})_{kl}$ şeklinde $m \times n$, pxq mertebeli herhangi iki kompleks matris ve A_{ij} , B_{kl} de sırasıyla A ve B matrislerinin, m_ixn_j ($\sum_{i=1}^{s} m_i = m , \sum_{j=1}^{t} n_j = n$) , p_kxq_l ($\sum_{k=1}^{s} p_k = p , \sum_{l=1}^{t} q_l = q$) mertebeli, aynı sayıdaki (i, j)-inci ve (k, l)-inci blok alt matrisleri olmak üzere;

$$A \divideontimes B = (A_{ij} \otimes B_{ij})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $(\sum_{i=1}^{s} m_i p_i) x (\sum_{j=1}^{t} n_j q_j)$ mertebeli $A \divideontimes B$ matrisine, A ve B matrislerinin *Khatri-Rao çarpımı* denir (Shuangzhe 1999).

2.2. Vektör Normları

Tanım 2.2.1 F, reel ya da kompleks sayılar cismi ve V, F cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere;

$$\| . \| : V \to \mathbb{R}^{+} \cup \{ 0 \}$$
$$v \to \| v \|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) Her $v \in V$ için,

i a) $v \neq 0$ ise, $\| v \| > 0$ dır,

i b) $v = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\| v \| = 0$ olmasıdır,

ii) $\alpha \in F$ ve $v \in V$ için, $\| \alpha v \| = | \alpha | \| v \|$ dir,

iii) $u, v \in V$ için, $\| u+v \| \leq \| u \| + \| v \|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\| . \|$ dönüşüme, *vektör normu* denir.

Bu tanım dikkate alınarak, bir çok vektör normu tanımlanabilir.

Bileşenleri kompleks sayılar olan n – mertebeli vektörlerden oluşan $\mathbb{C}^n$ cümlesi, kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzaydır.

Tanım 2.2.2 $\| . \|_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n \ \ (1 \le i \le n)$ için,

$$\| v \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | v_i |$$

şeklinde tanımlanan $\| . \|_1$ dönüşümüne, v vektörünün *toplam normu* denir.

Tanım 2.2.3 $\| . \|_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n \ \ (1 \le i \le n)$ için,

$$\| v \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | v_i |^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan $\| . \|_2$ dönüşümüne, v vektörünün *Euclidean* (veya *Frobenius*) *normu* denir.

Tanım 2.2.4 $\| . \|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n \ \ (1 \le i \le n)$ için,

$$\| v \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | v_i |^p \right)^{1/p} , 1 \le p < \infty$$

şeklinde tanımlanan $\| . \|_p$ dönüşümüne v vektörünün p – *normu* (veya *Holder*) normu denir.

2.3 Matris Normları

Tanım 2.3.1 F, reel ya da kompleks sayılar cismi, $M_n(F)$; bileşenleri F cisminin elemanları olan n - mertebeli karesel matrislerin cümlesi olmak üzere;

$$\| . \| : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$
$$A \to \| A \|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A \in M_{n,}(F)$ için,

i a) $A \neq 0$ ise, $\| A \| > 0$ dır,

i b) $A = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\| A \| = 0$ olmasıdır,

ii) $\alpha \in F$ ve $A \in M_{n,}(F)$ için, $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$ dır,

iii) $A, B \in M_{n,}(F)$ için, $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$ dir,

iv) $A, B \in M_n(F)$ için, $\| AB \| \leq \| A \|\|\| B \|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\| . \|$ dönüşüme, *matris normu* denir.

Tanım 2.3.2 F, reel ya da kompleks sayılar cismi, $M_{n,m}(F)$; bileşenleri F cisminin elemanları olan nxm mertebeli matrislerin cümlesi olmak üzere;

$$\| . \| : M_{n,m}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$
$$A \to \| A \|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A \in M_{n,m}(F)$ için,

i a) $A \neq 0$ ise, $\| A \| > 0$ dır,

i b) $A = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\| A \| = 0$ olmasıdır,

ii) $\alpha \in F$ ve $A \in M_{n,m}(F)$ için, $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$ dır,

iii) $A, B \in M_{n,m}(F)$ için, $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$ dir,

aksiyomlarını sağlayan $\| . \|$ dönüşüme, *genelleştirilmiş matris normu* denir.

Tanım 2.3.3 F, reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\| . \|_2 : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$

ile ifade edilen ve $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ için,

$$\| A \|_2 = (\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan $\| . \|_2$ dönüşümüne, *Euclide normu* denir.

Bazen, bu şekilde tanımlanan norm için, Euclide normu yerine Frobenius norm, Schur norm, Hilbert-Schmidt norm veya ℓ_2 norm ifadeleri de kullanılır.

Tanım 2.3.4 F, reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\| . \|_{g2} : M_{n,m}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$

ile ifade edilen ve $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(F)$ $(1 \leq i \leq n \ , 1 \leq j \leq m)$ için,

$$\| A \|_2 = (\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *genelleştirilmiş - Euclide normu* denir.

Tanım 2.3.5 F, reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\| \, . \, \|_p : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$

ile ifade edilen ve $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ $(1 \le i, j \le n)$ için,

$$\| A \|_p = (\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^p)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan $\| \, . \, \|_p$ dönüşümüne, ℓ_p *matris normu* denir.

Tanım 2.3.6 *F*, reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\| \, . \, \|_p : M_{n,m}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$$

ile ifade edilen ve $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(F)$ $(1 \le i \le n \ , 1 \le j \le m)$ için,

$$\| A \|_p = (\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^p)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *genelleştirilmiş* - ℓ_p *matris normu* denir.

3. CAUCHY – TOEPLİTZ MATRİSLERİ

Tanım 3.1. $x_i \neq y_j$ $(x_i, y_j \in \mathbb{C})$ ve $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere elemanları,

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} \qquad (3.1)$$

ile tanımlı $C = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ matrisine *Cauchy matrisi* denir (Horn ve Kıttaneh 1998, Tyrtyshnikov 1991, Calvetti ve Reichel 1997).

Tanım 3.2. $n \geq 1$ ve t_{i-j} 'ler kompleks sayılar olmak üzere,

$$T_{n-1} = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

şeklindeki matrise *Toeplitz matrisi* denir (Iohvidov 1982).

Tanım 3.3 (*3.1*) ile verilen Cauchy matrisinde, *a* ve *b* keyfi sayılar olmak üzere, $(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z})$ $x_i = a + bi$ ve $y_j = jb$ alınarak elde edilen

$$T_n = \left[\frac{1}{a + (i-j)b}\right]_{i,j=1}^{n}$$

matrisine Cauchy – Toeplitz matrisi denir (Tyrtyshnikov 1991, Trench 1999).

3.1. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının ℓ_p Normları İçin Sınırlar

Teorem 3.1.1 T_n ; (3.1) ile tanımlanan Cauchy matrisinde $x_i = \frac{1}{2} + i$, $y_j = j$ alınması ile elde edilen,

$$T_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + (i - j)} \right]_{i,j=1}^{n} \qquad (3.1.1)$$

şeklinde bir Cauchy-Toeplitz matrisi ve $\zeta(p)$, Riemann – Zeta fonksiyonu olmak üzere, T_n matrisinin ℓ_p ($p \geq 2$) normu için,

$$\left[\left(2^p - 1\right) \zeta(p) \right]^{1/p} \leq n^{-1/p} \, \| T_n \|_p \leq 2^{1/p} \left[\left(2^p - 1\right) \zeta(p) \right]^{1/p} \qquad (3.1.2)$$

şeklinde bir alt ve üst sınır vardır (Bozkurt 1996).

Teorem 3.1.2 T_n **,** (*3.1.1*) ' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \divideontimes T_n$ ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının ℓ_p $(p \geq 2)$ matris normu için,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \leq \left[(n-1) \left(2^{p+1} - 2\right) \zeta(p) \right]^2 + \left[\left(2^p - 1\right) \zeta(p) \right]^2$$

$$+ \left[\left(2^p - 1\right) \zeta(p) - 2^p \right]^2 + 4^p \qquad (3.1.3)$$

şeklinde bir üst sınır,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \geq \left[\left(2^p - 1 \right) \zeta \left(p \right) \right]^2 + 2 \left[\left(2^p - 2 \right) \zeta \left(p - 1 \right) - \left(2^p - 1 \right) \zeta \left(p \right) \right]^2 + 4^p \qquad (3.1.4)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (3.1.1) ile tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisini, $T_n^{(11)} = T_{n-1}$, $T_n^{(12)}$;

$$T_n^{(12)} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + i - n} \right]_{i=1}^{n-1} \qquad (3.1.5)$$

şeklinde (*n*-1) – mertebeli reel sütun vektör, $T_n^{(21)}$;

$$T_n^{(21)} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + n - j} \right]_{j=1}^{n-1} \qquad (3.1.6)$$

şeklinde (*n*-1)- mertebeli reel satır vektör, $T_n^{(22)}$;

$$T_n^{(22)} = (2)_{1x1} \qquad (3.1.7)$$

şeklinde bir matris olmak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \qquad (3.1.8)$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış n- mertebeli ($n \geq 2$) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n \divideontimes T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} \otimes T_{n-1} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $T_n \divideontimes T_n$ matrisidir.

(n-1) - mertebeli ($n \geq 2$) iki T_{n-1} , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i-j\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k-l\right)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan, $(n-1)^2$ - mertebeli karesel reel matris; (n-1) - mertebeli iki $T_n^{(12)}$ vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i-n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k-n\right)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli reel sütun vektör; (n-1) - mertebeli iki $T_n^{(21)}$ vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n-j\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n-l\right)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde (*n-1*)^2 – mertebeli reel satır vektör; 1 – mertebeli reel iki $T_n^{(22)}$ matrisinin Kronecker çarpımı, $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = (4)_{1x1}$ şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan $\ell_p \ (p \geq 2)$ matris normu ve vektörler için tanımlanan *p* - normu tanımlarından,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)} \|_p^p \qquad (3.1.9)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan, $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$, $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$ karesel matrislerin $\ell_p \ (p \geq 2)$ normlarının ve $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$ vektörlerinin *p* – normlarının *p.* kuvvetlerinin ve de (3.1.9) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p = \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^p} \right]^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^p} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^p} \right)^2 + 4^p$$

$$= \left[2^p \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|2i-2j+1|^p} \right]^2 + \left(2^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|2i-2n+1|^p} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|j-n-1+1-\frac{1}{2}\right|^p} \right)^2 + 4^p$$

$$= \left[2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-2k-1}{(2k-1)^p} \right]^2 + \left(2^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|2i-2n+1|^p} \right)^2 + \left(2^p \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|2j-2(n+1)+1|^p} \right)^2 + 4^p$$

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p = \left[2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-2k-1}{(2k-1)^p} \right]^2 + \left(2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + \left(2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} - 2^p \right)^2 + 4^p \qquad (3.1.10)$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p = \| T_{n-1} \|_p^{2p} + \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right) \right)^2$$

$$+ \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p \right)^2 + 4^p \qquad (3.1.11)$$

eşitliği elde edilir. Böylece; (3.1.11) eşitliği ve Teorem 3.1.1 de verilen (3.1.2) eşitsizliğinden,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \le \left[(n-1)\left(2^{p+1} - 2\right)\zeta(p) \right]^2 + \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right) \right)^2$$

$$+ \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p \right)^2 + 4^p$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \le \left[(n-1)\left(2^{p+1} - 2\right)\zeta(p) \right]^2 + \lim_{n\to\infty} \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right) \right)^2$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \left(2^p \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p \right)^2 + 4^p \qquad (3.1.12)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.12) eşitsizliği ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p)$$

eşitliği ile, (3.1.1) ile verilen n – mertebeli iki T_n Cauchy- Toeplitz matrisinin Khatri – Rao çarpımı olan, $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p $(p \ge 2)$ normu için,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \le \left[(n-1)\left(2^{p+1}-2\right)\zeta(p)\right]^2 + \left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^2 + \left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)-2^p\right]^2 + 4^p$$

şeklinde bir üst sınır bulunmuş olunur ve böylece (3.1.3) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

$T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p $(p \ge 2)$ normunun bir alt sınırını bulmak için, (3.1.10) eşitliği olarak bilinen,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p = \left[2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-2k-1}{(2k-1)^p}\right]^2 + \left(2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p}\right)^2 + \left(2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} - 2^p\right)^2 + 4^p$$

eşitliğini göz önüne alalım. Buradan,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p = \|T_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p}\left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p}\right)^2 + 2^{2p}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p}\right)^2 + 4^p$$

$$\ge n^{-2}\|T_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p}\right)^2 + 4^p$$

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \ge \left(n^{-1/p}\|T_{n-1}\|_p\right)^{2p} + 2^{2p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p}\right)^2 + 4^p \qquad (3.1.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece elde edilen (3.1.13) eşitsizliği ve Teorem 3.1.1 de verilen (3.1.2) eşitsizliği ile,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \ge \left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^2 + 2^{2p+1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p}\right)\right]^2 + 4^p \qquad (3.1.14)$$

eşitsizliği yazılır. Böylece, (3.1.14) eşitsizliğinde yer alan $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p}\right)$ teriminin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^{p}}\right)=\frac{(-1)^{p}}{2^{p-1}(p-2)!}\Psi\left(p-2,n+\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1)$$

$$+\frac{(-1)^{p}}{2^{p}(p-1)!}\Psi\left(p-1,n+\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2^{p}}\right)\zeta(p)$$

şeklinde yazıldığı ve ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^{p}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)_{z}\ (p-1)-\left(1-\frac{1}{2^{p}}\right)\zeta(p) \qquad 3.1.15$$

olduğu bilindiğine göre, böylece, (*3.1.14*) eşitsizliği ve (*3.1.15*) eşitliği dikkate alınarak, $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin $\ell_p\ (p \geq 2)$ normu için,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \geq \left[\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^2+2\left[\left(2^p-2\right)\zeta(p-1)-\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^2+4^p$$

şeklinde bir alt sınır bulunmuş olunur ve böylece (*3.1.4*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Teorem 3.1.3 g ve h; $0 < g / h < 1$ olacak şekilde herhangi iki reel sayı olmak üzere,

$$T_n=\left[\frac{1}{g+(i-j)h}\right]_{i,j=1}^{n} \qquad 3.1.16$$

şeklinde tanımlanan T_n, Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) matris normu için,

$$\| T_n \|_p \geq \frac{1}{|h|} \begin{cases} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ tek} \\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ çift} \end{cases} \qquad 3.1.17$$

$$\| T_n \|_p \leq \frac{n^{1/p}}{|h|} \begin{cases} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ tek} \\ \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ çift} \end{cases} \qquad 3.1.18$$

şeklinde alt ve üst sınırlar vardır (Tekin 1996).

Teorem 3.1.4 T_n **,** (*3.1.16*) ' daki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \divideontimes T_n$ ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ matris normu için, *p* tek ise;

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\zeta^2\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.19$$

p çift ise,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\zeta^2\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.20$$

şeklinde bir üst sınır vardır. *p* tek ise,

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(g-h)^{2p}} + \frac{1}{(g+h)^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.21$$

p çift ise,

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(g-h)^{2p}} + \frac{1}{(g+h)^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.22$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*3.1.16*)' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) T_n Cauchy-Toeplitz matrisini; $T_n^{(11)} = T_{n-1}$, $T_n^{(12)}$;

$$T_n^{(12)} = \left[\frac{1}{g + (i-n)h} \right]_{i=1}^{n-1} \qquad 3.1.23$$

şeklinde (*n*-1) – mertebeli dikey reel vektör, $T_n^{(21)}$;

$$T_n^{(21)} = \left[\frac{1}{g + (n-j)h} \right]_{j=1}^{n-1} \qquad 3.1.24$$

şeklinde (*n*-1)- mertebeli satır reel vektör, $T_n^{(22)}$;

$$T_n^{(22)} = \left(\frac{1}{g} \right)_{1x1} \qquad 3.1.25$$

şeklinde bir matris olmak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \qquad 3.1.26$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış n- mertebeli ($n \geq 2$) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n \divideontimes T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} \otimes T_{n-1} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $T_n \divideontimes T_n$ matrisidir.

(n-1) - mertebeli ($n \geq 2$) iki T_{n-1} , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[\left[\frac{1}{(g+(i-j)h)} \frac{1}{(g+(k-l)h)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan, $(n-1)^2$ - mertebeli karesel reel matris; (n-1) – mertebeli dikey iki $T_n^{(12)}$ vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[\left[\frac{1}{(g+(i-n)h)} \frac{1}{(g+(k-n)h)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli dikey reel vektör; (n-1) – mertebeli satır iki $T_n^{(21)}$ vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[\left[\frac{1}{(g+(n-j)h)} \frac{1}{(g+(n-l)h)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde (*n-1*)^2 – mertebeli satır reel vektör; 1 – mertebeli reel iki $T_n^{(22)}$ matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = \left(\frac{1}{(g)^2} \right)_{1x1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ matris normu ve vektörler için tanımlanan *p* - normu tanımlarından,

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)} \|_p^p \qquad 3.1.27$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan, $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$, $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$ karesel matrislerin ℓ_p normlarının ve $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$ vektörlerinin *p* – normlarının *p.* kuvvetlerinin ve de (*3.1.27*) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\|T_n \text{❋} T_n\|_p^p = \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|g+(n-i)h\right|^p} \right]^2$$

$$+ \frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{\left|g-ih\right|^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{\left|g+ih\right|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^p} \right]^2$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-i)h\right|^{p}}\right]^{2}+\frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$=\| T_{n-1}\|_{p}^{2p}+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g-ih\right|^{p}}\right]^{2}+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+ih\right|^{p}}\right]^{2}+\frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_{p}^{p}=\| T_{n-1}\|_{p}^{2p}+\frac{1}{|h|^{2p}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^{p}}\right]^{2}+\frac{1}{|h|^{2p}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+i\right|^{p}}\right]^{2}+\frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_{p}^{p}=\| T_{n-1}\|_{p}^{2p}+\frac{1}{|h|^{2p}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^{p}}\right]^{2}+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+i\right|^{p}}\right]^{2}\right\}+\frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.28$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (*3.1.28*) eşitliğini, p 'nin tek veya çift olma durumlarına göre inceleyelim.

Böylece; (*3.1.28*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.18*) eşitsizliğinden, p tek ise;

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_{p}^{p}\le\frac{(n-1)^{2}}{|h|^{2p}}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^{2}$$

$$+\frac{1}{|h|^{2p}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^{p}}\right]^{2}+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+i\right|^{p}}\right]^{2}\right\}+\frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.29$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Riemann – Zeta (veya Hurwitz – Zeta) fonksiyonu tanımından ve $0<g/h<1$ kabulünden hareketle;

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^{p}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left|i-\frac{g}{h}\right|^{p}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(i-\frac{g}{h}\right)^{p}}\le\zeta(p,-g/h) \qquad 3.1.30$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left|i+\frac{g}{h}\right|^{p}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{g}{h}\right)^{p}}\le\zeta(p,g/h) \qquad 3.1.31$$

eşitsizlikleri yazılır. Böylece, (*3.1.29*) , (*3.1.30*) , (*3.1.31*) eşitsizlikleri ile birlikte p 'nin tek olması durumunda, n – mertebeli iki T_n Cauchy- Toeplitz matrisinin Khatri – Rao çarpımı olan, $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \le \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^2$$

$$+\frac{1}{|h|^{2p}}\left[\zeta^2\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta^2\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]+\frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.1.4 de verilen (*3.1.19*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, (*3.1.28*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.18*) eşitsizliğinden, p çift ise;

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \le \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}}\left[\left(\frac{h}{g}\right)^{p}+\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]^2$$

$$+\frac{1}{|h|^{2p}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^{p}}\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+i\right|^{p}}\right]^2\right\}+\frac{1}{(g)^{2p}} \qquad 3.1.32$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (*3.1.30*) , (*3.1.31*) , (*3.1.32*) eşitsizlikleri ile birlikte p 'nin çift olması durumunda, $T_n \text{❋} T_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p \leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\zeta^2\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.1.4 de verilen (*3.1.20*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $T_n \text{❋} T_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, (*3.1.28*) eşitliğini p 'nin tek veya çift olması durumlarına göre ayrı ayrı ele alalım. Böylece (*3.1.28*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.19*) eşitsizliğinden, p tek ise;

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[-\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[-\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|g-h|^{2p}} + \frac{1}{|g+h|^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde $T_n \text{❋} T_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.1.4 de verilen (*3.1.21*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, (*3.1.28*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.19*) eşitsizliğinden, *p* çift ise;

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|g-h|^{2p}} + \frac{1}{|g+h|^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.1.4 de verilen (*3.1.22*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Teorem 3.1.5 *a* ve *b*; $a < b$ olacak şekilde herhangi iki pozitif reel sayı olmak üzere,

$$T_n = \left[\frac{1}{a + (i-j)b} \right]_{i,j=1}^{n} \qquad 3.1.33$$

şeklinde tanımlanan T_n, Cauchy-Toeplitz matrisinin ℓ_p matris normu için,

$$n^{-1/p} \| T_n \|_p \leq \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!\, b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1 - \frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1, 1 + \frac{a}{b} \right) \right| \right]^{1/p} \qquad 3.1.34$$

$$n^{-1/p} \| T_n \|_p \geq \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right]^{1/p} \qquad 3.1.35$$

şeklinde alt ve üst sınır vardır (Çatak 2001).

Teorem 3.1.6 T_n **,** (*3.1.33*) ' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \divideontimes T_n$ ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının ℓ_p matris normu için,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \leq (n-1)^2 \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right]^2$$

$$+ \left[\frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left(\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right) \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \quad 3.1.36$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \geq \left[\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right]^2 + \frac{1}{(b-a)^{2p}} + \frac{1}{(b+a)^{2p}} + \frac{1}{a^{2p}} \quad 3.1.37$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*3.1.33*)*'* deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) T_n, Cauchy-Toeplitz matrisini; $T_n^{(11)} = T_{n-1}$, $T_n^{(12)}$;

$$T_n^{(12)} = \left[\frac{1}{a+(i-n)b} \right]_{i=1}^{n-1} \quad 3.1.38$$

şeklinde (*n*-1) – mertebeli dikey reel vektör, $T_n^{(21)}$;

$$T_n^{(21)} = \left[\frac{1}{a+(n-j)b} \right]_{j=1}^{n-1} \qquad 3.1.39$$

şeklinde (n-1)- mertebeli satır reel vektör, $T_n^{(22)}$;

$$T_n^{(22)} = \left(\frac{1}{a} \right)_{1x1} \qquad 3.1.40$$

şeklinde bir matris olmak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \qquad 3.1.41$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış n- mertebeli ($n \geq 2$) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n \divideontimes T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} \otimes T_{n-1} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $T_n \divideontimes T_n$ matrisidir.

(n-1) - mertebeli ($n \geq 2$) iki T_{n-1} , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[\left[\frac{1}{(a+(i-j)b)} \frac{1}{(a+(k-l)b)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan, $(n-1)^2$ - mertebeli karesel reel matris; (n-1) - mertebeli iki $T_n^{(12)}$ vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[\left[\frac{1}{\big(a+(i-n)b\big)} \frac{1}{\big(a+(k-n)b\big)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (*n-1*)^2 – mertebeli dikey reel vektör; (*n*-1) - mertebeli iki $T_n^{(21)}$ vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[\left[\frac{1}{\big(a+(n-j)b\big)} \frac{1}{\big(a+(n-l)b\big)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde (*n-1*)^2 – mertebeli satır reel vektör; 1 – mertebeli reel iki $T_n^{(22)}$ matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = \left(\frac{1}{a^2} \right)_{1x1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan ℓ_p matris normu ve vektörler için tanımlanan *p* - normu tanımlarından,

$$\| T_n \text{❋} T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)} \|_p^p \qquad 3.1.42$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan, $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$, $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$ karesel matrislerin ℓ_p normlarının ve $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$ vektörlerinin *p* – normlarının *p.* kuvvetlerinin ve de (*3.1.42*) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\|T_n \text{❋} T_n\|_p^p = \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\big|a+(i-j)b\big|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\big|a+(i-n)b\big|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\big|a+(n-i)b\big|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}}$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p = \left[\frac{n-1}{a^p} + \sum_{i=1}^{n-2} (n-1-i) \left(\frac{1}{|ib-a|^p} + \frac{1}{|ib+a|^p} \right) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-n)b|^p} \right]^2$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-i)b|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}}$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p = \| T_{n-1} \|_p^{2p} + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \qquad 3.1.43$$

eşitliği elde edilir. (3.*1.43*) eşitliği ve Teorem 3.1.5 de verilen (*3.1.34*) eşitsizliği ile,

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \le (n-1)^2 \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right]^2$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}}$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \le (n-1)^2 \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right]^2$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \qquad 3.1.44$$

eşitsizliği elde edilir. (*3.1.44*) eşitsizliğindeki $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right)$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[-\Psi\left(p-1,n-\frac{a}{b} \right) - \Psi\left(p-1,n+\frac{a}{b} \right) \right.$$

$$+\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\Bigg]$$

yazıldığı ve ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{|a-ib|^p}+\frac{1}{|a+ib|^p}\right)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p}\left[\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right] \quad 3.1.45$$

olduğu bilindiğine göre, böylece (*3.1.44*) eşitsizliği ve (*3.1.45*) eşitliğinden, $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p \le (n-1)^2\left[\frac{1}{a^p}+\frac{1}{(p-1)!b^p}\left|\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right|\right]^2$$

$$+\left[\frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p}\left(\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b}\right)\right)\right]^2+\frac{1}{a^{2p}}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki; Teorem 3.1.6 ile verilen (*3.1.36*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $T_n \divideontimes T_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, Teorem 3.1.5 ile verilen (*3.1.35*) eşitsizliğini ve (*3.1.43*) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\|T_n \divideontimes T_n\|_p^p = \|T_{n-1}\|_p^{2p}+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a-ib|^p}\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+ib|^p}\right]^2+\frac{1}{a^{2p}}$$

$$\ge\left[\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{2(b-a)^p}+\frac{1}{2(b+a)^p}\right)\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{2-1}\frac{1}{|a-ib|^p}\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{2-1}\frac{1}{|a+ib|^p}\right]^2+\frac{1}{a^{2p}}$$

$$\| T_n \divideontimes T_n \|_p^p \geq \left[\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right]^2 + \frac{1}{(b-a)^{2p}} + \frac{1}{(b+a)^{2p}} + \frac{1}{a^{2p}}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki; Teorem 3.1.6 ile verilen (*3.1.37*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

3.2. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Tracy – Singh Çarpımlarının ℓ_p Normları İçin Sınırlar

Teorem 3.2.1 T_n**,** (*3.1.1*) ' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının ℓ_p $(p \geq 2)$ matris normu için,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left[n\left(2^{p+1} - 2\right)\zeta(p) \right]^2 \qquad 3.2.1$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left[\left(2^p - 2\right)\zeta(p-1) \right]^2 \qquad 3.2.2$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*3.1.1*)' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) T_n Cauchy-Toeplitz matrisini, $T_n^{(11)} = T_{n-1}$ ve $T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)}$, $T_n^{(22)}$ sırasıyla; (*3.1.5*) , (*3.1.6*) , (*3.1.7*) ' deki gibi tanımlamak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde blok matrislere ayıralım. Böylece; $T_n^{(ij)}$ $(1 \le i, j \le 2)$ matrisleri ile n-mertebeli ($n \ge 2$) T_n, Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \circledcirc T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \; i,j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (3.*1.1*) deki gibi bloklara ayrılmış n – mertebeli iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \circledcirc T_n = (T_n^{(ij)} \circledcirc T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan n^2 - mertebeli reel karesel bir matristir.

Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı göz önüne alınırsa, $T_n \circledcirc T_n$ matrisini oluşturan bloklar, karesel matrisler veya vektörlerin yanısıra, karesel olmayan matrislerden de ibarettir. Bu sebeptendir ki; $\|.\|_{gp}$, Tanım 2.3.6 da verilen genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu olmak üzere, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p $(p \ge 2)$ normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)} \|_{gp}^p \qquad (1 \le i, j, k, l \le 2)$$

olmak üzere,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \Omega(ij,kl) \qquad 3.2.3$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(11,kl)=\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\} \quad 3.2.4$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(12,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\} \quad 3.2.5$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\} \quad 3.2.6$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=2^{p}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\} \quad 3.2.7$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , (3.*2.4*) , (*3.2.5*) , (*3.2.6*) , (*3.2.7*) eşitliklerinden,

$T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p $(p \geq 2)$ normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-j\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\}^{2}$$

$$=\left\{\| T_{n-1} \|_p^p+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+i-n\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}+n-j\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\}^{2}$$

$$=\left\{\| T_{n-1} \|_p^p+\left(2^{p}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|2i-2n+1\right|^{p}}\right)+\left(2^{p}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|2j-2(n+1)+1\right|^{p}}\right)+2^{p}\right\}^{2}$$

$$= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} + 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \left[\left(\sum_{i=1}^{2n-3} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^p} \right) \right] \right\}^2 \qquad 3.2.8$$

eşitliği elde edilir. Böylece; (*3.2.8*) eşitliği ve Teorem 3.1.1 de verilen (*3.1.2*) eşitsizliğinden,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left\{ \left[\left(2^{p+1} - 2\right)(n-1)\zeta(p) \right] + 2^p \left[\left(\sum_{i=1}^{2n-3} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^p} \right) \right] \right\}^2 \qquad 3.2.9$$

eşitsizliği elde edilir. (*3.2.9*) eşitsizliği ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p)$$

eşitliği ile (*3.1.1*) ' deki gibi tanımlanan *n* – mertebeli iki T_n Cauchy- Toeplitz matrisinin Tracy - Singh çarpımı olan, n^2 - mertebeli karesel reel $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin $\ell_p \ (p \ge 2)$ normu için,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left[n\left(2^{p+1} - 2\right)\zeta(p) \right]^2$$

şeklinde bir üst sınır bulunmuş olunur ki; böylece Teorem 3.2.1 'de verilen (*3.2.1*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin $\ell_p \ (p \ge 2)$ normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} + 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^p} \right\}^2$$

eşitliğinden ve Teorem 3.1.1 de verilen (*3.1.2*) eşitsizliğinden yazılan,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \left(2^p - 1\right)\zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \left(2^p - 1\right)\zeta(p) + 2^p \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right) \right\}^2 \qquad 3.2.10$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. (*3.2.10*) eşitsizliğinde yer alan $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$ teriminin Polygamma fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \Psi\left(p-2, n+\frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right)\zeta(p-1)$$

$$+ \frac{(-1)^p}{2^p (p-1)!} \Psi\left(p-1, n+\frac{1}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)\zeta(p)$$

şeklinde yazıldığı ve ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right)\zeta(p-1) - \left(1 - \frac{1}{2^p} \right)\zeta(p) \qquad 3.2.11$$

olduğu bilindiğine göre, böylece, (3.*2.10*) eşitsizliği ve (*3.2.11*) eşitliği dikkate alınarak, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p $(p \geq 2)$ normu için,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left[\left(2^p - 2\right)\zeta(p-1) \right]^2$$

şeklinde bir alt sınır bulunmuş olunur ve böylece (*3.2.2*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Teorem 3.2.2 T_n **,** (*3.1.16*) ' daki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) matris normu için, *p* tek ise;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|h|^p} \left[\zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.12$$

p çift ise,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|h|^p} \left[\zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.13$$

şeklinde bir üst sınır vardır. *p* tek ise,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.14$$

p çift ise,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.15$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*3.1.16*)' daki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisini, $T_n^{(11)} = T_{n-1}$ ve $T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)}$, $T_n^{(22)}$ sırasıyla; (*3.1.23*) , (*3.1.24*) , (*3.1.25*) 'deki gibi tanımlamak üzere, (3.1.26) 'daki gibi blok matrislere ayıralım.

Böylece; $T_n^{(ij)}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ matrisleri ile (3.1.26) 'daki gibi blok matrislere ayrılan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \circledcirc T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i,j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (*3.1.26*) deki gibi bloklara ayrılmış n – mertebeli iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \circledcirc T_n = (T_n^{(ij)} \circledcirc T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan n^2 - mertebeli reel karesel bir matristir.

Buradan, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)} \|_{gp}^p \qquad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \Omega(ij,kl) \qquad 3.2.16$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(11,kl)=\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-j)h\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|g\right|^{p}}\right\} \qquad 3.2.17$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(12,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-j)h\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|g\right|^{p}}\right\} \qquad 3.2.18$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-j)h\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-j)h\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|g\right|^{p}}\right\} \qquad 3.2.19$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(22,kl)=\frac{1}{\left|g\right|^{p}}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-j)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(i-n)h\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|g+(n-j)h\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|g\right|^{p}}\right\} \qquad 3.2.20$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , (*3.2.17*) , (*3.2.18*) , (*3.2.19*) , (*3.2.20*) eşitliklerinden, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p ($1 \le p < \infty$) normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| g + (i-j)h \right|^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| g + (i-n)h \right|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| g + (n-j)h \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| g - ih \right|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| g + jh \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \frac{1}{|h|^p} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right) + \frac{1}{|h|^p} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + j \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.21$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (*3.2.21*) eşitliğini, *p* 'nin tek veya çift olma durumlarına göre inceleyelim.

Böylece; (*3.2.21*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.18*) eşitsizliğinden, *p* tek ise;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[-\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|h|^p} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + j \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \qquad 3.2.22$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Riemann – Zeta (Hurwitz – Zeta) fonksiyonu tanımından ve $0 < g/h < 1$ kabulünden hareketle;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| i - \frac{g}{h} \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i - \frac{g}{h} \right)^p} \le \zeta(p, -g/h) \qquad 3.2.23$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left|i+\frac{g}{h}\right|^{p}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(i+\frac{g}{h}\right)^{p}}\leq\zeta(p,g/h) \qquad 3.2.24$$

eşitsizlikleri yazılır. (*3.2.22*) , (*3.2.23*) , (*3.2.24*) eşitsizlikleri ile birlikte p 'nin tek olması durumunda, (3.*1.16*) da tanımlanan n – mertebeli iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı olan, n^2 - mertebeli karesel reel $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p}\left[-\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]\right.$$

$$\left. +\frac{1}{|h|^p}\left[\zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]+\frac{1}{|g|^p}\right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.2.2 de verilen (*3.1.12*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, (*3.2.21*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.18*) eşitsizliğinden, p çift ise;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p}\left[\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p,-\frac{g}{h}\right)+\zeta\left(p,\frac{g}{h}\right)\right]+\frac{1}{|h|^p}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}-i\right|^p}\right)\right.$$

$$\left. +\frac{1}{|h|^p}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|\frac{g}{h}+j\right|^p}\right)+\frac{1}{|g|^p}\right\}^2 \qquad 3.2.25$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (*3.2.23*) , (*3.2.24*) , (*3.2.25*) eşitsizlikleri ile birlikte p 'nin çift olması durumunda, (*3.1.16*) da tanımlanan n – mertebeli iki T_n Cauchy- Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı olan, n^2 - mertebeli karesel reel $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p ($1 \le p < \infty$) normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|h|^p} \left[\zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.2.2 de verilen (*3.1.13*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p ($1 \le p < \infty$) normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, (*3.2.21*) eşitliğini p 'nin tek veya çift olmasına göre ayrı ayrı ele alalım. Böylece (*3.2.21*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.19*) eşitsizliğinden, p tek ise;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \ge \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[-\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left[\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} + \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \ge \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[-\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.2.2 de verilen (*3.1.14*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, (*3.2.21*) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen (*3.1.19*) eşitsizliğinden, p çift ise;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[\left(\frac{h}{g} \right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, böylece Teorem 3.2.2 de verilen (*3.1.15*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Teorem 3.2.3 T_n **,** (*3.1.33*) ' daki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının ℓ_p matris normu için,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \leq \left\{ (n-1) \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right] \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right] + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad 3.2.26$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \left[\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \frac{1}{(b-a)^p} + \frac{1}{(b+a)^p} + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad 3.2.27$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*3.1.33*)' deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) T_n Cauchy-Toeplitz matrisini, $T_n^{(11)} = T_{n-1}$ ve $T_n^{(12)}$, $T_n^{(21)}$, $T_n^{(22)}$ sırasıyla; (*3.1.38*) , (*3.1.39*) , (*3.1.40*) 'daki gibi tanımlamak üzere, (3.1.41) 'deki gibi blok matrislere ayıralım.

Böylece; $T_n^{(ij)}$ $(1 \le i, j \le 2)$ matrisleri ile (3.1.33) 'deki gibi tanımlanan ve (3.1.41) 'deki gibi blok matrislere ayrılan *n*- mertebeli ($n \ge 2$) T_n, Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \circledcirc T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \; i,j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (3.*1.41*) deki gibi bloklara ayrılmış n – mertebeli iki T_n Cauchy-Toeplitz matrisinin, $T_n \circledcirc T_n$ ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \circledcirc T_n = (T_n^{(ij)} \circledcirc T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan n^2 - mertebeli reel karesel bir matristir.

Buradan, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)} \|_{gp}^p \qquad (1 \le i, j, k, l \le 2)$$

olmak üzere,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \Omega(ij,kl) \qquad 3.2.28$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{2} \Omega(11,kl) = \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-j)b|^p} \right) \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-j)b|^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-n)b|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\} \qquad 3.2.29$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(12,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-n)b|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-j)b|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-n)b|^{p}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(n-j)b|^{p}}\right)+\frac{1}{a^{p}}\right\} \qquad 3.2.30$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(n-j)b|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-j)b|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-n)b|^{p}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(n-j)b|^{p}}\right)+\frac{1}{a^{p}}\right\} \qquad 3.2.31$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\frac{1}{a^{p}}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-j)b|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-n)b|^{p}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(n-j)b|^{p}}\right)+\frac{1}{a^{p}}\right\} \qquad 3.2.32$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , (*3.2.29*) , (*3.2.30*) , (*3.2.31*) , (*3.2.32*) eşitliklerinden, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p=\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-j)b|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(i-n)b|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+(n-j)b|^{p}}\right)+\frac{1}{a^{p}}\right\}^{2}$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p=\left\{\| T_{n-1} \|_p^p+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{|a-ib|^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{|a+jb|^{p}}\right)+\frac{1}{a^{p}}\right\}^{2} \qquad 3.2.33$$

eşitliği elde edilir. (*3.2.33*) eşitliği ve Teorem 3.1.5 de verilen (*3.1.34*) eşitsizliği ile,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left\{ (n-1) \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)! b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right] \right.$$

$$\left. \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \qquad 3.2.34$$

(*3.2.34*) eşitsizliğindeki $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right)$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)! b^p} \left[-\Psi\left(p-1,n-\frac{a}{b} \right) - \Psi\left(p-1,n+\frac{a}{b} \right) \right.$$

$$\left. + \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right]$$

yazıldığı ve ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)! b^p} \left[\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right] \qquad 3.2.35$$

olduğu bilindiğine göre, böylece (*3.2.34*) eşitsizliği ve (*3.2.35*) eşitliğinden, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \le \left\{ (n-1) \left[\frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)! b^p} \left| \Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right| \right] \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^p}{(p-1)! b^p} \left[\Psi\left(p-1,1-\frac{a}{b} \right) + \Psi\left(p-1,1+\frac{a}{b} \right) \right] + \frac{1}{a^p} \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki; Teorem 3.2.3 ile verilen (*3.2.26*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $T_n \circledcirc T_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, Teorem 3.1.5 ile verilen (*3.1.35*) eşitsizliğini ve (*3.2.33*) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2$$

$$\geq \left\{ \left[\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \left(\sum_{j=1}^{2-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \left(\sum_{j=1}^{2-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \circledcirc T_n \|_p^p \geq \left\{ \left[\left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \frac{1}{(b-a)^p} + \frac{1}{(b+a)^p} + \frac{1}{a^p} \right\}^2$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki; Teorem 3.2.3 ile verilen (*3.2.27*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

4. CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİ

Tanım 4.1. (*3.1*) ile verilen Cauchy matrisinde, *a* ve *b* keyfi sayılar olmak üzere, $(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z})$ $x_k = a + bk$ ve $y_j = -jb$ alınarak elde edilen

$$H_n = \left[\frac{1}{a + (k + j)b} \right]_{k,j=1}^{n} \qquad (4.1)$$

matrisine Cauchy – Hankel matrisi denir.

4.1. Cauchy – Hankel Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının ℓ_p Normları İçin Sınırlar

Teorem 4.1.1 H_n, (4.1) matrisinde $a = 1/2$ ve $b = 1$ alınması ile elde edilen,

$$H_n = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + (i + j)} \right]_{i,j=1}^{n} \qquad (4.1.1)$$

şeklindeki Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan H_n ***matrisinin*** ℓ_p ***normu için,***

$$\| H_n \|_p \leq \left[1 + \left(2^{p-1} - 1 \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p) - \ln 2 \right]^{1/p} \qquad (4.1.2)$$

$$\| H_n \|_p \geq \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) \right]^{1/p} \qquad (4.1.3)$$

şeklinde bir alt ve üst sınır vardır (Bozkurt 1996).

Teorem 4.1.2 H_n, (4.1.1) 'deki gibi tanımlanan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) bir Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımının $\ell_p (2 \leq p < \infty)$ matris normu için,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \leq \left[1 - \ln 2 + \left(2^{p-1} - 1\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p)\right]^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(2^p - 2\right)\zeta(p-1) - \left(2^p - 1\right)\zeta(p)\right]^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \qquad (4.1.4)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \geq \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p)\right]^2 + \frac{2^{2p+1}}{7^{2p}} \qquad (4.1.5)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*4.1.1*) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) H_n Cauchy-Hankel matrisini, $H_n^{(11)} = H_{n-1}$, $H_n^{(12)}$;

$$H_n^{(12)} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + i + n}\right]_{i=1}^{n-1} \qquad (4.1.6)$$

şeklinde (*n*-1) – mertebeli reel sütun vektör, $H_n^{(21)}$;

$$H_n^{(21)} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + j + n} \right]_{j=1}^{n-1} \qquad (4.1.7)$$

şeklinde (n-1)- mertebeli reel satır vektör, $H_n^{(22)}$;

$$H_n^{(22)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} \right)_{1x1} \qquad (4.1.8)$$

şeklinde reel matris olmak üzere,

$$H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(11)} & H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \end{bmatrix} \qquad (4.1.9)$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış n- mertebeli ($n \geq 2$) iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$H_n \text{❋} H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} \otimes H_{n-1} & H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde $2((n-1)^2 + 1)$- mertebeli karesel reel $H_n \text{❋} H_n$ matrisidir.

(n-1) - mertebeli ($n \geq 2$) iki H_{n-1} , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_{n-1} \otimes H_{n-1} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + j\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k + l\right)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan, $(n-1)^2$ - mertebeli karesel reel matris; (n-1) - mertebeli iki $H_n^{(12)}$ vektörünün Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k+n\right)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli reel sütun vektör; (n-1) - mertebeli iki $H_n^{(21)}$ vektörünün Kronecker çarpımı;

$$H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} = \left[\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+j+n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+l+n\right)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli yatay reel vektör; 1 – mertebeli reel iki $H_n^{(22)}$ matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^2} \right]_{1x1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan $\ell_p \ (p \geq 2)$ matris normu ve vektörler için tanımlanan p - normu tanımlarından,

$$\| H_n \divideontimes H_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \| H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(ij)} \|_p^p \qquad (4.1.10)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan, $H_n^{(11)} \otimes H_n^{(11)}$, $H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)}$ karesel matrislerin $\ell_p\,(p \geq 2)$ normlarının ve $H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)}$, $H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)}$ vektörlerinin p – normlarının *p.* kuvvetlerinin ve de (4.1.10) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p = \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p}\right]^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+j+n\right)^p}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{2p}}$$

$$= \left[2^p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2i+1)^p} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{n-i}{(2n+2i+1)^p}\right)\right]^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{2p}}$$

$$\leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+4\right)^{2p}}$$

$$= \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2n+2i+1)^p}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p}$$

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2i+1)^p}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p}$$

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p}\right)\right]^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \qquad (4.1.11)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, elde edilen (4.1.11) eşitsizliği ve Teorem 4.1.1 de verilen (4.1.2) eşitsizliği ile,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \le \left[1-\ln 2+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-1}-\frac{1}{2}\right)\zeta(p)\right]^2$$

$$+2^{2p-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^p}\right)\right]^2+\left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \qquad (4.1.12)$$

eşitsizliği yazılır. (4.1.12) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^p}\right)$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^p}\right)=\frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!}\Psi\left(p-2,n+\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1)$$

$$+\frac{(-1)^p}{2^p(p-1)!}\Psi\left(p-1,n+\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(p)$$

şeklinde yazılır ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}}-\frac{1}{(2i+1)^p}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1)-\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(p) \qquad (4.1.13)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece (4.1.13) eşitliği ve (4.1.12) eşitsizliğinden, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \le \left[1-\ln 2+\left(2^{p-1}-1\right)\zeta(p-1)-\left(2^{p-1}-\frac{1}{2}\right)\zeta(p)\right]^2$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(2^p-2\right)\zeta(p-1)-\left(2^p-1\right)\zeta(p)\right]^2+\left(\frac{2}{9}\right)^{2p}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilmiş olunur ki, (4.1.4) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Şimdi de, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p = \| H_{n-1} \|_p^{2p} + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{2p}} \qquad (4.1.14)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Böylece, (4.1.14) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen (4.1.3) eşitsizliği ile, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \geq \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) \right]^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right)^2$$

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \geq \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) \right]^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+2\right)^p} \right)^2$$

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \geq \left[\left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) \right]^2 + \frac{2^{2p+1}}{7^{2p}}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilmiş olunur ki, böylece (*4.1.5*) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Teorem 4.1.3 *c* ve *d, c* < *d* olacak şekildeki herhangi iki pozitif reel sayı olmak üzere,

$$H_n = \left[\frac{1}{c-(i+j)d} \right]_{i,j=1}^{n} \qquad (4.1.15)$$

şeklinde tanımlanan H_n ***Cauchy-Hankel matrisinin*** $\ell_p(3 \le p < \infty)$ ***normu için,***

$$\| H_n \|_p \le \frac{1}{d}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]^{1/p} \qquad (4.1.16)$$

$$\| H_n \|_p \ge \left[\frac{1}{(2d-c)^p}+\frac{2}{(3d-c)^p}+\frac{1}{(4d-c)^p}\right]^{1/p} \qquad (4.1.17)$$

şeklinde üst ve alt sınır vardır (Çatak 2001).

Teorem 4.1.4 H_n**,** (*4.1.15*) ile verilen *n* - mertebeli ($n \ge 2$) bir Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımının $\ell_p(3 \le p < \infty)$ matris normu için,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \le \frac{1}{d^{2p}}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]^2$$

$$+2\left\{\frac{(-1)^p}{(p-2)!d^p}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right\}^2+\frac{1}{(2d-c)^{2p}} \qquad (4.1.18)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \ge \left[\frac{1}{(2d-c)^p}+\frac{2}{(3d-c)^p}+\frac{1}{(4d-c)^p}\right]^2+\frac{2}{(3d-c)^{2p}} \qquad (4.1.19)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (4.1.15) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) H_n Cauchy-Hankel matrisini, $H_n^{(11)} = H_{n-1}$, $H_n^{(12)}$;

$$H_n^{(12)} = \left[\frac{1}{c-(i+n)d} \right]_{i=1}^{n-1} \qquad (4.1.20)$$

şeklinde (*n*-1) – mertebeli reel sütun vektör, $H_n^{(21)}$;

$$H_n^{(21)} = \left[\frac{1}{c-(n+j)d} \right]_{j=1}^{n-1} \qquad (4.1.21)$$

şeklinde (*n*-1)- mertebeli reel satır vektör, $H_n^{(22)}$;

$$H_n^{(22)} = \left(\frac{1}{c-2nd} \right)_{1x1} \qquad (4.1.22)$$

şeklinde reel matris olmak üzere,

$$H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(11)} & H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \end{bmatrix} \qquad (4.1.23)$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış *n*- mertebeli ($n \geq 2$) iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$H_n \text{❋} H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} \otimes H_{n-1} & H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde $2((n-1)^2+1)$- mertebeli karesel reel $H_n \text{❋} H_n$ matrisidir.

(n-1) - mertebeli ($n \geq 2$) iki H_{n-1} Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_{n-1} \otimes H_{n-1} = \left[\left[\frac{1}{(c-(i+j)d)} \frac{1}{(c-(k+l)d)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan, $(n-1)^2$ - mertebeli karesel reel matris; (n-1) - mertebeli iki $H_n^{(12)}$ vektörünün Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} = \left[\left[\frac{1}{(c-(i+n)d)} \frac{1}{(c-(k+n)d)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli reel sütun vektör; (n-1) - mertebeli iki $H_n^{(21)}$ vektörünün Kronecker çarpımı;

$$H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} = \left[\left[\frac{1}{(c-(n+j)d)} \frac{1}{(c-(n+l)d)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde (n-1)^2 – mertebeli reel satır vektör; 1 – mertebeli reel iki $H_n^{(22)}$ matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} = \left[\frac{1}{(c-2nd)^2} \right]_{1x1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan ℓ_p matris normu ve vektörler için tanımlanan p - normu tanımlarından,

$$|| H_n \divideontimes H_n ||_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} || H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(ij)} ||_p^p \qquad (4.1.24)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan, $H_n^{(11)} \otimes H_n^{(11)}$, $H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)}$ karesel matrislerin ℓ_p normlarının ve $H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)}$, $H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)}$ vektörlerinin p – normlarının p. kuvvetlerinin ve de (4.1.24) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$||H_n \divideontimes H_n ||_p^p = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(j+n)d|^p} \right)^2 + \frac{1}{(c-2nd)^{2p}}$$

$$= || H_{n-1} ||_p^{2p} + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{((i+n)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2nd-c)^{2p}}$$

$$||H_n \divideontimes H_n ||_p^p \le || H_{n-1} ||_p^{2p} + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2nd-c)^{2p}} \qquad (4.1.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.1.25) eşitsizliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen (4.1.16) eşitsizliği ile,

$$||H_n \divideontimes H_n ||_p^p \le \frac{1}{d^{2p}} \left[\frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d} \right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d} \right) \right| \right]^2$$

$$+ 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2d-c)^{2p}} \qquad (4.1.26)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.26) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan, $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\left((i+1)d-c\right)^{p}}$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\left((i+1)d-c\right)^{p}}=\left\{\frac{(-1)^{p}(c-d)}{(p-1)!d^{p+1}}\left[-\Psi\left(p-1,n+\frac{d-c}{d}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\Psi\left(p-2,n+\frac{d-c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right\}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\left((i+1)d-c\right)^{p}}=\frac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right.$$

$$\left.-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right] \qquad (4.1.27)$$

dir. Böylece (4.1.27) eşitliği ve (4.1.26) eşitsizliğinden, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\|H_n \divideontimes H_n\|_p^p \le \frac{1}{d^{2p}}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]^2$$

$$+2\left\{\frac{(-1)^{p}}{(p-2)!d^{p}}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right\}^2+\frac{1}{(2d-c)^{2p}}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, (4.1.18) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\| H_n \divideontimes H_n \|_p^p = \| H_{n-1} \|_p^{2p} + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left((i+n)d - c\right)^p} \right)^2 + \frac{1}{\left(2nd - c\right)^{2p}} \qquad (4.1.28)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Buradan, (4.1.28) eşitliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen (4.1.17) eşitsizliği ile, $H_n \divideontimes H_n$ matrisinin ℓ_p normu için

$$\| H_n \divideontimes H_n \|_p^p \geq \left[\frac{1}{\left(2d - c\right)^p} + \frac{2}{\left(3d - c\right)^p} + \frac{1}{\left(4d - c\right)^p} \right]^2 + \frac{2}{\left(3d - c\right)^{2p}}$$

şeklinde bir alt sınır bulunur ki, (4.1.19) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

4.2. Cauchy – Hankel Matrislerinin Tracy – Singh Çarpımlarının ℓ_p Normları İçin Sınırlar

Teorem 4.2.1 H_n, (*4.1.1*) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki H_n Cauchy-Hankel matrisinin, $H_n \circledcirc H_n$ ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının ℓ_p $(p \geq 2)$ matris normu için,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \leq \left\{ 1 - \ln 2 + \left(2^p + 2^{p-1} - 3\right)\zeta(p-1) + \left(2^p - 2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) + \left(\frac{2}{9}\right)^p \right\}^2 \qquad (4.2.1)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) + \frac{2^{p+1}}{7^p} \right\}^2 \qquad (4.2.2)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (4.1.1) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Hankel matrisini, $H_n^{(11)} = H_{n-1}$ ve $H_n^{(12)}$, $H_n^{(21)}$, $H_n^{(22)}$ sırasıyla; (4.1.6) , (4.1.7) , (4.1.8) ' deki gibi tanımlamak üzere, (4.1.9) 'daki gibi blok matrislere ayıralım.

Böylece; $H_n^{(ij)}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ matrisleri ile (4.1.9) 'daki gibi bloklara ayrılan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) H_n, Cauchy-Hankel matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$H_n^{(ij)} \circledcirc H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(11)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix} , \; i,j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (4.1.9) deki gibi bloklara ayrılmış n – mertebeli iki H_n Cauchy-Hankel matrisinin, $H_n \circledcirc H_n$ ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$H_n \circledcirc H_n = (H_n^{(ij)} \circledcirc H_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan n^2 - mertebeli reel karesel bir matristir.

Bu sebeptendir ki; $\|.\|_{gp}$, Tanım 2.3.6 'da verilen genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu olmak üzere, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p $(p \geq 2)$ normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(kl)} \|_{gp}^p \qquad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \Omega(ij,kl) \qquad (4.2.3)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(11,kl)=\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\} \quad (4.2.4)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(12,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\} \quad (4.2.5)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\} \quad (4.2.6)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\} \qquad (4.2.7)$$

eşitlikleri yazılır.

Böylece, (4.2.4) , (4.2.5) , (4.2.6) , (4.2.7) eşitliklerinden, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p $(p \geq 2)$ normu için;

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p = \left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\}^{2}$$

$$=\left\{\| H_{n-1} \|_p^p +2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\}^{2}$$

$$=\left\{\| H_{n-1} \|_p^p +2^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(2n+2i+1)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\}^{2}$$

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \leq \left\{\| H_{n-1} \|_p^p +2^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{(2i+1)^{p}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^{p}}\right\}^{2}$$

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \le \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\}^2 \qquad (4.2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, elde edilen (4.2.8) eşitsizliği ve Teorem 4.1.1 de verilen (4.1.2) eşitsizliği ile,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \le \left\{ 1 - \ln 2 + \left(2^{p-1} - 1\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) \right.$$

$$\left. + 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) + \left(\frac{2}{9}\right)^p \right\}^2 \qquad (4.2.9)$$

eşitsizliği yazılır. (4.2.9) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \Psi\left(p-2, n+\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1)$$

$$+ \frac{(-1)^p}{2^p (p-1)!} \Psi\left(p-1, n+\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p)$$

şeklinde yazıldığı ve ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p) \qquad (4.2.10)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece (4.2.10) eşitliği ve (4.2.9) eşitsizliğinden, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin $\ell_p \ (p \geq 2)$ normu için;

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \leq \left\{ 1 - \ln 2 + \left(2^p + 2^{p-1} - 3 \right) \zeta(p-1) + \left(2^p - 2^{p-1} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p) + \left(\frac{2}{9} \right)^p \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır bulunur ki, böylece (4.2.1) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin $\ell_p \ (p \geq 2)$ normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p = \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2^{p+1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2n+2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n \right)^p} \right\}^2 \qquad (4.2.11)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Böylece, (4.2.11) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen (4.1.3) eşitsizliği ile, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin $\ell_p \ (p \geq 2)$ normu için;

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+2n+1)^p} \right\}^2$$

$$\geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{(2i+5)^p} \right\}^2$$

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) + \frac{2^{p+1}}{7^p} \right\}^2$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, böylece (*4.2.2*) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Teorem 4.2.2 H_n**,** (*4.1.15*) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki H_n Cauchy-Hankel matrisinin, $H_n \circledcirc H_n$ ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının $\ell_p \ (3 \leq p \leq \infty)$ matris normu için,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{1}{d^p} \left[\frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d} \right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d} \right) \right| \right] \right.$$

$$+ 2 \left(\frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[\frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1+\frac{d-c}{d} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \Psi\left(p-2, 1+\frac{d-c}{d} \right) \right] \right) + \frac{1}{(2d-c)^p} \right\}^2 \qquad (4.2.12)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left[\frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{4}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^2 \qquad (4.2.13)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

İspat : (*4.1.15*) ile verilen *n*- mertebeli ($n \geq 2$) Cauchy-Hankel matrisini, $H_n^{(11)} = H_{n-1}$ ve $H_n^{(12)}$, $H_n^{(21)}$, $H_n^{(22)}$ sırasıyla; (4.1.20) , (4.1.21) , (4.1.22) ' deki gibi tanımlamak üzere, (4.1.23) 'deki gibi blok matrislere ayıralım.

Böylece; $H_n^{(ij)} \ (1 \leq i, j \leq 2)$ matrisleri ile (4.1.23) 'de ki gibi bloklara ayrılan *n*- mertebeli ($n \geq 2$) H_n Cauchy-Hankel matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$H_n^{(ij)} \circledcirc H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(11)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix} , \ i,j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, (4.1.23) 'deki gibi bloklara ayrılmış n – mertebeli iki H_n Cauchy-Hankel matrisinin, $H_n \circledcirc H_n$ ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$H_n \circledcirc H_n = (H_n^{(ij)} \circledcirc H_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan n^2 - mertebeli reel karesel bir matristir.

$\|.\|_{gp}$, (*2.3.6*) da tanımlanan genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu olmak üzere,

$H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(kl)} \|_{gp}^p \qquad (1 \le i,j,k,l \le 2)$$

olmak üzere,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{2} \Omega(ij,kl) \qquad (4.2.14)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş - ℓ_p matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{2} \Omega(11,kl) = \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c-2nd|^p} \right\} \qquad (4.2.15)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2} \Omega(12,kl) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c-2nd|^p} \right\} \qquad (4.2.16)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(21,kl)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+n)d\right|^{p}}\right)\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+j)d\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+n)d\right|^{p}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(n+j)d\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|c-2nd\right|^{p}}\right\} \quad (4.2.17)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}\Omega(22,kl)=\frac{1}{\left|c-2nd\right|^{p}}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+j)d\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+n)d\right|^{p}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(n+j)d\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|c-2nd\right|^{p}}\right\} \quad (4.2.18)$$

eşitlikleri yazılır. Böylece , (4.2.15) , (4.2.16) , (4.2.17) , (4.2.18) eşitliklerinden, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p=\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+j)d\right|^{p}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(i+n)d\right|^{p}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\left|c-(n+j)d\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|c-2nd\right|^{p}}\right\}^{2}$$

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p=\left\{\| H_{n-1} \|_p^p+2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\left|(i+n)d-c\right|^{p}}\right)+\frac{1}{\left|2nd-c\right|^{p}}\right\}^{2} \quad (4.2.19)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4.2.19) eşitliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen (4.1.16) eşitsizliği ile,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \le \frac{1}{d^{p}}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]$$
$$+2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{\left((i+1)d-c\right)}\right)^{2}+\frac{1}{(2d-c)^{2p}} \quad (4.2.20)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.20) eşitsizliğinde yer alan, $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{((i+1)d-c)}$ ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{((i+1)d-c)}=\left\{\frac{(-1)^p(c-d)}{(p-1)!d^{p+1}}\left[-\Psi\left(p-1,n+\frac{d-c}{d}\right)+\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^p}{(p-2)!d^p}\left[\Psi\left(p-2,n+\frac{d-c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right\}$$

dir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{((i+1)d-c)}=\frac{(-1)^p}{(p-2)!d^p}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right.$$

$$\left.-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right] \qquad (4.2.21)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece (4.2.21) eşitliği ve (4.2.20) eşitsizliğinden, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p normu için,

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \le \left\{\frac{1}{d^p}\left[\frac{1}{(p-2)!}\left|\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,2-\frac{c}{d}\right)-\Psi\left(p-2,2-\frac{c}{d}\right)\right|\right]\right.$$

$$+2\left(\frac{(-1)^p}{(p-2)!d^p}\left[\frac{c-d}{(p-1)d}\Psi\left(p-1,1+\frac{d-c}{d}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\Psi\left(p-2,1+\frac{d-c}{d}\right)\right]\right)+\frac{1}{(2d-c)^p}\right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır bulunur ki, böylece (*4.2.12*) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p normu için bir alt sınır bulalım. (4.2.19) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen (4.1.3) eşitsizliği ile, $H_n \circledcirc H_n$ matrisinin ℓ_p normu için;

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left[\frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{2}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} + 2\sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{((i+2)d-c)^p} \right]$$

$$\| H_n \circledcirc H_n \|_p^p \geq \left[\frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{4}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^2$$

şeklinde bir alt sınır bulunur ki, böylece (4.2.13) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının ℓ_p normları için alt ve üst sınırlar tespit ettik.

Bu matrislerin, Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının singüler değerleri araştırılabilinir.

6. KAYNAKLAR

Bozkurt, D. 1998. On the ℓ_p norms of Cauchy – Toeplitz matrices, Linear and Multilinear Algebra, 44 : 341 – 346

Bozkurt, D. 1995. Almost Cauchy – Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları Üzerine, VIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Çukurova Üniversitesi, Adana.

Bozkurt, D. 1996. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin ℓ_p Normları Üzerine, Ord. Prof. Dr. Cahit Arf 'ın 85. Doğum Günü Onuruna Matematik Sempozyumu.

Bozkurt, D. 1996. On the ℓ_p norms of Cauchy – Hankel matrices, Journal of Scientific Research Foundation, Vol : 1, No : 2, pp. 27 – 32.

Bozkurt, D. 1996. On the ℓ_p norms of Almost Cauchy – Toeplitz matrices, Tr. J. of Mathematics, 20 : 545 -552, Tübitak.

Calvetti, D. , Reichel L. 1997. Factorizations of Cauchy Matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics, 86 : 103 – 123

Horn, R. A. , Kıttaneh F. 1998. Two Applications of a Bound On The Hadamard Product with a Cauchy Matrix, The Electronic Journal of Linear Algebra, 3 : 4 – 12

Iohvidov, I. S. 1982. Hankel and Toeplitz Matrices and Forms, Birkhauser, Boston.

Kölbig, K. S. 1972. Programs for Computing The Logarithm of The Gamma Function and Digamma Function for Complex Arguments, Computer Phys, Comm., 4 : 221 - 226

Horn, R. A. , Johnson, C. R. 1990. Matrix Analysis, Cambridge University Press.

Bozkurt, D. , Türen, B. 2000. Lineer Cebir, SEL – ÜN Vakfı Yayınları, Konya.

Taşçı, D. 1999. Lineer Cebir, SEL – ÜN Yayınları, Konya.

Tyrtyshnikov, E. E. 1991. Cauchy – Toeplitz Matrices and Some Applications, Linear Algebra and Its Applications, Vol : 149, pp : 1 – 18.

Shuangzhe, L. 1999. Matriz Results On the Khatri – Rao and Tracy – Singh Products, Linear Algebra and Its Applications, 289 : 267 – 277.

Shuangzhe, L. 2002. Several Inequalities Involving Khatri – Rao Products of Positive Semidefinite Matrices, Linear Algebra and Its Applications, 354 : 175 – 186.

Xian Z. , Yang, Z. , Cao, C. 2002. Inequalities Involving Khatri –Rao Products of Positive Semi – definite Matrices, Applied Mathematics E – Notes, 2 : 117 -124.

Çatak, Ö. 2001. Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel Matrislerinin ℓ_p Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Türkmen, R. 1999. Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Tekin, H. 1996. Cauchy – Toeplitz ℓ_p Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.