**T.C.**

**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BRANCİARİ TİPİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

**GÜZİN TAŞKIN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hakan KARAYILAN**

**EDİRNE 2019**

Güzin TAŞKIN' ın hazırladığı " Branciari Tipinde Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri — İmza

Doç. Dr. Mustafa TELCİ

Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN

Dr. Öğr. Üyesi Hakan KARAYILAN

Tez Savunma Tarihi:
25 / 07 / 2019

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Hakan KARAYILAN

Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onay

Prof. Dr. Murat Yurtcan

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

25 / 07 / 2019

Güzin TAŞKIN

Yüksek Lisans Tezi

Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

# ÖZET


Dört bölümden oluşan bu çalışmada,

İlk bölümde, dönüşümlerin sabit noktaları ve bunlarla ilgili tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş metrik uzaylar incelenmiştir ve daha sonra üçüncü bölümde kullanacağımız bazı tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde çalışma ile ilgili bilgiler verilerek hedefler ortaya konulmuştur.



Yıl: 2019

Sayfa Sayısı : 78

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Genelleştirilmiş Metrik Uzay.

Master's Theis

Fixed Point Theorem in Generalized Metric Spaces

Trakya University Institute of Natural Sciences

Mathematics of Department

# ABSTRACT

In this study which consists of four chapters,

In the first chapter , the fixed points of mappings and some definitions about the fixed points are given,

In the second chapter, the generalized metric space is researched and some definitions which we will use in chapter 3 are given.

In the third chapter, some fixed point theorems in the generalized metric spaces are researched.

In the last chapter, the objective are given by giving information about this study.

Year : 2019

Number of Pages : 78

Keywords : Fixed point, Generalized Metric Spaces.

# ÖNSÖZ

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren bana her zaman yardımcı olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hakan KARAYILAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca her zaman yanımda olan desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Güzin Taşkın

# İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

BÖLÜM I / GİRİŞ VE ÖNBİLGİLER 1

1.1 Dönüşümlerin Sabit Noktaları 1

1.2 Sabit Nokta Teorisine Giriş 4

BÖLÜM II / GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR 8

2.1 Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar 8

BÖLÜM III / GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 26

3.1 Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Tek Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri 26

3.2 Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Bağdaşık Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri 46

BÖLÜM IV / TARTIŞMA VE SONUÇLAR 67

KAYNAKLAR 68

ÖZGEÇMİŞ 70

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ VE ÖNBİLGİLER

## 1.1 Dönüşümlerin Sabit Noktaları

**1.1.1 Tanım :** $X \neq \emptyset$ bir küme, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in$ X noktasına *T* ' nin **sabit noktası** denir.

**1.1.2 Tanım :** $X \neq \emptyset$ bir küme, *F* ve *G, X '* den *X* 'e tanımlı iki dönüşüm olsun. Eğer $F(x) = G(x)$ ise $x \in X$ noktasına *F* ve *G* ' nin **çakışık noktası** ve $F(x) = G(x) = x$ ise $x$ 'e *F* ve *G* ' nin **ortak sabit noktası** denir.

**1.1.3 Örnekler :**

**1)** $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **,** $T(x) = x + a \quad (a \neq 0)$ dönüşümü verilsin. Bu durumda *T* sabit noktaya sahip değildir.

**2)** $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $T(x) = x^2 + 3x + 1$ dönüşümü verilsin. Bu dönüşümün tek sabit noktası vardır ve bu nokta -1 ' dir.

**3)** $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $T(x) = x^2 - 6$ dönüşümü verilsin. $T$ ' nin sabit noktaları -2 ve 3' tür.

**4)** $X \neq \emptyset$ olmak üzere

$\mathrm{I} : X \to X$ , $\mathrm{I}(x) = x$ özdeşlik dönüşümü verilsin. Bu biçimde verilen özdeşlik dönüşümünün tanım kümesindeki bütün elemanlar sabit noktası olur.

**5)** $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $H(x) = x^2 - 2x$

ve

$K: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $K(x) = x^2 - x - 3$

verilsin. *H* dönüşümünün sabit noktaları 0 ve 3, *K* dönüşümünün sabit noktaları -1 ve 3 tür. Böylece $x = 3$, *H* ve *K* ' nın ortak sabit noktasıdır.

**1.1.4 Tanım :** $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

Herhangi bir $x \in X$ için

$$T(x) = x \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } T^n(x) = \underbrace{(T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T)(x)}_{n-kez}$$

biçiminde tanımlanan $T^n(x)$' e $x$ 'in $T$ altındaki ***n.* iterasyonu** denir. Burada $T(x)$ yerine $Tx$ kullanılacaktır.

Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad (n = 1,2, \ldots)$$

biçiminde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine, $x_0$ başlangıç değeriyle oluşturulmuş **Picard iterasyon dizisi** denir.

### 1.1.5 Not :

Bir $T$ fonksiyonun sabit noktalarının kümesi $F_T$ ile gösterilsin. O zaman

Bir $T : X \to X$ dönüşümü verildiğinde

**i)** $F_T \subset F_{T^n}$ $(n = 2,3, \dots)$ dir.

**ii)** Eğer $F_{T^n} = \{x\}$ ise (i)' nin tersi doğrudur. Yani $F_T = F_{T^n} = \{x\}$ dir.

Gerçekten, $T^n(x) = x$ olsun.

$T^n(Tx) = T(T^n x) = Tx$ olup $Tx$, $T^n$' nin bir sabit noktasıdır. $F_{T^n} = \{x\}$ olduğundan $Tx = x$ olur.

$F_{T^n}$' nin eleman sayısı birden fazla ise (i) nin tersi genelde doğru değildir.

Örneğin;

$T : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü için $T(a) = c$ , $T(b) = b$ ve $T(c) = a$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_{T^2} = \{a, b, c\}$ olmasına karşın $F_T = \{b\}$ dir.

## 1.2 Sabit Nokta Teorisine Giriş

Sabit nokta teorisi özellikle analizdeki varlık ve teklik problemlerinin çözümünde önemli bir yere sahiptir.

Örnek 1.1.3' te verildiği gibi bazı dönüşümlerin hiçbir sabit noktası yoktur. Bazı dönüşümlerin ise sabit noktaları var ve bunların sayıları birden fazladır.

Bir dönüşüm verildiğinde onun karakteristik özellikleri ve tanım kümesi üzerindeki koşullar dönüşümünün sabit noktalarının varlığını garanti etmede rol oynayabilirler. Aşağıdaki koşullar sabit nokta araştırılırken dikkate alınmalıdır.

**(i)** $T$'nin en az bir sabit noktasının olması için $T$ hangi koşulları sağlamalıdır?

**(ii)** $T$' nin tek bir sabit noktası olması için $T$ 'nin sağlaması gereken koşullar nelerdir?

**(iii)** $T$ 'nin bir sabit noktasının varlığını garanti etmek için $T$' nin tanımlı olduğu kümeye hangi ek koşullar getirilebilir?

**(iv)** Bir dönüşüm ile oluşturulan iterasyon dizisinin yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir?

İlk olarak sabit nokta teorisi 1912 yılında Brouwer tarafından başlatılmıştır. Bu teoremde ( Brouwer, 1912) '' $\mathbb{R}^n$ deki kapalı bir yuvarın yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan her sürekli fonksiyonun bir sabit noktasının varlığı '' gösterilmiştir. Bu teorem aslında analiz derslerinde bilinen '' $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ her sürekli dönüşümün bir sabit noktası vardır '' önermesinin bir genellemesidir.

**1.2.1 Tanım :** $(X, d)$bir metrik uzay ve $T$ de $X'$ den $X'$ e bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \geq 0$ sayısı varsa $T$' ye **Lipschitz** koşulunu sağlar denir. Burada $0 \leq k < 1$ ise $T$' ye **daraltan**, $k = 1$ ise **genişleme olmayan** dönüşüm denir. Eğer her $x, y \in X$ için $(x \neq y)$

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise $T$' ye **kesin daraltan** dönüşüm denir.

S. Banach'ın (1922) verdiği ve literatüre de **Banach Sabit Nokta Teoremi** ya da **Banach Daralma İlkesi** olarak geçen aşağıdaki teorem,

" $(X, d)$ tam metrik uzay, $T: X \to X$ daraltan dönüşüm olsun. O zaman $T$' nin bir sabit noktası vardır ve tektir. '' dir.

Brower'ın teoreminde fonksiyonun sadece sabit noktasının varlığından söz edilirken Banach sabit nokta teoreminde fonksiyonun sabit noktasının varlığının yanı sıra onun nasıl bulunacağı ile ilgili bir yöntem de verilmektedir. Yani $x_0$, $X$' de herhangi bir nokta olmak üzere $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi $T$' nin sabit noktasına yakınsar.

Banach sabit nokta teoremi genişleme olmayan dönüşümler için geçerli değildir. Ayrıca genişleme olmayan dönüşümler ile yapılan iterasyon dizileri de yakınsak olmayabilir. Örnek olarak 1.1.3' te örnek 1' deki

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; Tx = x + a \qquad (a \neq 0)$$

dönüşümü; $\mathbb{R}$' deki mutlak değer metriği göz önüne alındığında;

$$|Tx - Ty| = |(x + a) - (y + a)| = |x - y|$$

olup genişleme olmayan bir dönüşümdür ve hiçbir sabit noktası yoktur. Herhangi bir $x \epsilon X$ için, bu dönüşüm yardımıyla,

$$T^2x = T(Tx) = T(x+a) = (x+a) + a = x + 2a \ ,$$

$$T^3x = T(T^2x) = T(x+2a) = x + 3a,$$

$$\vdots$$

$$T^nx = x + na$$

olup $T^n$ iterasyon dizisi yakınsak değildir.

**Not:** $T$ daraltan dönüşümü süreklidir.

O halde $T$ sürekli değilse kesinlikle daraltan dönüşüm de değildir.

Buna karşın Bryant (1968) $T$ ' nin herhangi bir n. iterasyonu için aşağıdaki teoremi elde etmiştir,

" Bir $n \geq 2$ için $T^n$, bir $(X, d)$ tam metrik uzayında daraltan dönüşüm ise $T$' nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. ''

Buna göre $T$ daraltan olmasa bile $T^n$ nin daraltan olması $T$' nin sabit noktasının olmasını garanti etmektedir.

Örneğin ;

$T: [1,3] \to [1,3]$ olmak üzere $Tx = \begin{cases} 1 & ; [1,2] \\ 2 & ; (2,3] \end{cases}$ biçiminde tanımlansın.

$x = 2$ de sürekli olmadığından $T$ bir daraltan dönüşüm değildir. Öte yandan $T^2$, $[1,3]$ de bir daraltan dönüşüm olup 1, $T$' nin tek bir sabit noktasıdır.

Eldelstein (1962), Reich (1971), Bianchini (1972) ve daha birçok yazar sabit nokta teoremleri ile ilgili literatürlere de geçen önemli çalışmalar yapmıştır.

Değişik uzaklık fonksiyonları kullanılarak oluşturulan uzaylar için de farklı bir takım daraltanlık koşulları altında dönüşümlerin sabit noktaları araştırılmıştır. Örneğin; Nadler (1969) Hausdorff metrik uzaylarda, Branciari (2000) genelleştirilmiş metrik uzaylarda, Mustafa ve Sims (2003) G-metrik uzaylarda, Czerwik (1993) $b-$ metrik uzaylarda ve bunun gibi birçok matematikçi sabit nokta teoremlerini değişik uzaylara genişletmişlerdir.

Bu çalışmada genelleştirilmiş metrik uzaylar göz önüne alınarak farklı koşullar altında dönüşümlerin sabit noktaları incelenmiştir.

# BÖLÜM 2

# GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, genelleştirilmiş metrik uzaylar incelenecek uzaya has bazı tanım ve özelliklerle birlikte ilgili örnekler verilecektir.

## 2.1. Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

2000 yılında A.Branciari tarafından metrik uzaydaki iki terimli üçgen eşitsizliği yerine üç terimli eşitsizlik kullanılıp genelleştirilmiş metrik uzay kavramı verilmiştir.

**2.1.1 Tanım:** X$\neq \emptyset$ bir kümesi ile $d: X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ ve $u \neq v$ olmak üzere $x, y$'den farklı her $u, v \in X$ için,

**(i)** $d(x, y) = 0 \iff x = y$

**(ii)** $d(x, y) = d(y, x)$

**(iii)** $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$

koşulları sağlanıyorsa $(X, d)$' ye genelleştirilmiş metrik uzay (g.m.u.) denir. (Branciari, 2000 )

Her metrik uzay genelleştirilmiş metrik uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

### 2.1.2 Örnekler :

**1)** $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$ ve $B=\left[\frac{3}{4},\infty\right)$ olmak üzere $X=A\cup B$ olsun. Her $x,y\in A$ için $d(x,y)=d(y,x)$ olmak üzere

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5},\ d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2},\ d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)=0$$

ve $\begin{cases}x\in B,y\in A\\ x\in A,y\in B\\ x,y\in B\end{cases}$ için $d(x,y)=|x-y|$

biçiminde tanımlanan d genelleştirilmiş metriktir. (Hassen, Karapınar & Lakzain, 2012)

Gerçekten,

(i) ve (ii) olduğu açıktır.

(iii) her $x,y\in X$ ve $u\neq v$ olmak üzere $x,y$'den farklı her $u,v\in X$ için,

$d(x,y)\leq d(x,u)+d(u,v)+d(v,y)$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

- $x,y\in A$ ise,
  - $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{5}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)+d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)+d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)$$

- $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$$

- $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$$

- $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{4}$

$$d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

- $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$$

- $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)$$

- $x \in A,\ y \in B$ ise,

  - $x = \frac{1}{2} \qquad y \in B$

$$d\left(\frac{1}{2},y\right) = \left|\frac{1}{2} - y\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \left|\frac{1}{4} - y\right| = d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4},y\right)$$

  - $x = \frac{1}{3}, \quad y \in B$

$$d\left(\frac{1}{3},y\right) = \left|\frac{1}{3} - y\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{4} - y\right| = d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4},y\right)$$

- $x = \frac{1}{4}, \quad y \in B$

$$d\left(\frac{1}{4}, y\right) = \left|\frac{1}{4} - y\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{5} - y\right| = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, y\right)$$

- $x = \frac{1}{5}, \quad y \in B$

$$d\left(\frac{1}{5}, y\right) = \left|\frac{1}{5} - y\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \left|\frac{1}{3} - y\right| = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, y\right)$$

- $x, y \in B$ ise,

$$d(x, y) = |x - y| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{5} + \left|\frac{1}{3} - y\right| = d\left(x, \frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, y\right)$$

eşitsizlikleri sağlandığından $(X, d)$ genelleştirilmiş metrik uzaydır.

$(X, d)$ g.m.u.'ın metrik uzay olmadığını gösterelim. Üçgen eşitsizliği koşulunu inceleyelim; özel olarak $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{3}$ alınırsa;

$$d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \not\leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

eşitsizlik doğrulanmadığından $(X, d)$ metrik uzay değildir.

**2)** $d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için;

$$d(n+1, n) = d(n, n+1) = \frac{1}{2^n} d(n, n) = 0$$

$$m > n, \ \ m - n \quad çift \quad için \quad d(n, m) = d(m, n) = 1$$

$$m > n, \quad m - n \quad tek \ \ için \ \ d(n, m) = d(m, n) = \sum_{i=n}^{m} d(i, i+1)$$

olmak üzere $(X, d)$ genelleştirilmiş metrik uzaydır. (Kirk & Shahzad , 2014)

Gerçekten,

(i) ve (ii) olduğu açıktır.

(iii) her $n, m \in X$ ve $p \neq q$ olmak üzere $n, m$'den farklı her $p, q \in X$ için,

$$d(n,m) \leq d(n,p) + d(p,q) + d(q,m)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

- $|n-p|, |p-q|$ $ve$ $|q-m|$ çift ise eşitsizlik sağlanır

$$1 \leq 1 + 1 + 1$$

$$1 \leq 3$$

- $(m-q)$, $(q-p)$, $(p-n)$ tek ise 4 durum vardır;
  - $n < p < q < m$ ise,

$$d(n,m) = \sum_{i=n}^{m} d(i, i+1) = \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^q} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$= \sum_{i=n}^{p} d(i, i+1) + \sum_{i=p}^{q} d(i, i+1) + \sum_{i=q}^{m} d(i, i+1)$$

$$= d(n,p) + d(p,q) + d(q,m)$$

- $p < n < q < m$ ise,

$$d(n,m) = \sum_{i=n}^{m} d(i,i+1) = d(n,n+1) + d(q,q+1) + d(m,m+1)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^m}$$

$$\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^m}$$

$$= d(p,p+1) + d(n,n+1) + d(p,p+1)$$
$$+ d(n,n+1) + d(q,q+1) + d(q,q+1)$$
$$+ d(m,m+1)$$

$$= \sum_{i=p}^{n} d(i,i+1) + \sum_{i=p}^{q} d(i,i+1) \quad + \sum_{i=q}^{m} d(i,i+1)$$

$$= d(n,p) + d(p,q) + d(q,m)$$

- $n < p < m < q$ ise,

$$d(n,m) = \sum_{i=n}^{m} d(i,i+1) \ = d(n,n+1) + d(p,p+1) + d(m,m+1)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^m}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^q}$$

$$= d(n,n+1) + d(p,p+1) + d(p,p+1) +$$
$$d(m,m+1) \ + d(q,q+1) + d(m,m+1) +$$
$$d(q,q+1)$$

$$= \ \sum_{i=n}^{p} d(i,i+1) + \sum_{i=p}^{q} d(i,i+1) + \sum_{i=m}^{q} d(i,i+1)$$

$$= d(n,p) + d(p,q) + d(q,m)$$

- $p < n < m < q$ ise,

$$d(n,m) = \sum_{i=n}^{m} d(i,i+1) = d(n,n+1) + d(m,m+1) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}$$
$$\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^q}$$
$$= d(p,p+1) + d(n,n+1) + d(p,p+1)$$
$$+ d(n,n+1) + d(m,m+1) + d(q,q+1)$$
$$+ d(m,m+1) + d(q,q+1)$$
$$= \sum_{i=p}^{n} d(i,i+1) + \sum_{i=p}^{q} d(i,i+1) + \sum_{i=m}^{q} d(i,i+1)$$
$$= d(n,p) + d(p,q) + d(q,m)$$

tüm eşitsizlikler sağlandığından $(X,d)$ genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Şimdi bu genelleştirilmiş metrik uzayın metrik uzay olmadığını gösterelim. Üçgen eşitsizliği koşulu incelenirse;

$m,n,p \in X$ olmak üzere $(m-n)$ çift, $(n-p)$ ve $(p-m)$ tek olacak biçimde alınırsa,

$n < p < m$ için

$$d(n,m) = 1 \nleq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^m} = d(n,n+1) + d(p,p+1) + d(m,m+1)$$
$$= \sum_{i=n}^{p} d(i,i+1) + \sum_{i=p}^{m} d(i,i+1) = d(n,p) + d(p,m)$$

eşitsizlik gerçeklenmediğinden $(X,d)$ metrik uzay değildir.

**3)** $X = \left\{1 - \frac{1}{n}; n = 1,2, \ldots\right\} \cup \{1,2\}$ olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ \frac{1}{n}; & x \in \{1,2\}\ ve\ y = 1 - \frac{1}{n}\ x \neq y, \quad x = 1 - \frac{1}{n}\ ve\ y \in \{1,2\}, x \neq y \\ 1; & diğer\ durumlar \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $d$ genelleştirilmiş metriktir. (Kikina L. & Kikina K., 2012)

Gerçekten,

(i) ve (ii) olduğu açıktır.

(iii) her $x, y \in X$ ve $z \neq w$ olmak üzere $x, y$ 'den farklı her $z, w \in X$ için

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

- $x \in \{1,2\}$ , $y = 1 - \frac{1}{n}$ ise,
  - $z \neq x \in \{1,2\}$ ve $w = 1 - \frac{1}{m}$ $(\ y \neq w)$

$$d\left(x, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{m} + 1 = d(x,z) + d\left(z, 1 - \frac{1}{m}\right) + d\left(1 - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

  - $z = 1 - \frac{1}{m}$ $(\ y \neq z)$ $ve$ $w \neq x \in \{1,2\}$

$$d\left(x, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = d\left(x, 1 - \frac{1}{m}\right) + d\left(1 - \frac{1}{m}, w\right) + d\left(w, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

- $z = 1 - \frac{1}{m}$ $ve$ $w = 1 - \frac{1}{k}$ $(\ y \neq z \neq w)$

$$d\left(x, 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + 1 + 1$$
$$= d\left(x, 1 - \frac{1}{m}\right) + d\left(1 - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{k}\right) + d\left(1 - \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

- $x, y \in \{1,2\}$ , $z = 1 - \frac{1}{k}$ ve $w = 1 - \frac{1}{m}$ $(\ z \neq w)$ ise,

$$d(1,2) = 1 \leq \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{m} = d\left(1,1 - \frac{1}{k}\right) + d\left(1 - \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{m}\right) + d\left(1 - \frac{1}{m}, 2\right)$$

tüm koşullar sağlandığı için $d$, genelleştirilmiş metriktir.

$d$'nin metrik olmadığını gösterelim:

Üçgen eşitsizliği için özel olarak $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = 1$ alınırsa;

$$d(x,y) = d\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = 1 \nleq \frac{5}{6} = d\left(\frac{1}{2}, 1\right) + d\left(1, \frac{2}{3}\right) = d(x,z) + d(z,y)$$

eşitsizlik gerçeklenmediğinden $d$ metrik değildir.

**4)** $A = \{0,2\},\ B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ve $X = A \cup B$ olmak üzere

$$d: X \times X \to [0, +\infty)\ , \qquad d(x,y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ 1; & x \neq y \ \ ve\ \{x,y\} \subset A\ \ veya\ \{x,y\} \subset B \\ y; & x \in A, y \in B \\ x; & x \in B,\ \ y \in A \end{cases}$$

için $(X, d)$ genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Gerçekten;

(i) ve (ii) olduğu açıktır.

(iii) her $x, y \in X$ ve $z \neq w$ olmak üzere $x, y$ 'den farklı her $z, w \in X$ için

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

- $\{x,y\} \subset A$ ve $z = \frac{1}{n} \neq w = \frac{1}{m} \in B$ ise,

$$d(0,2) = 1 \leq \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{m} = d\left(0, \frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) + d\left(\frac{1}{m}, 2\right)$$

- $\{x,y\} \subset B$ , $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$ ( $x \neq y$) ise,

  - $z \neq w \in A$

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 1 \leq \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{m} = d\left(\frac{1}{n}, 0\right) + d(0,2) + d\left(2, \frac{1}{m}\right)$$

  - $z \in A$ , $w = \frac{1}{k} \in B$ ( $x \neq y \neq w$)

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + 1 = d\left(\frac{1}{n}, 0\right) + d\left(0, \frac{1}{k}\right) + d\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right)$$

  - $z = \frac{1}{k} \neq w = \frac{1}{t} \in B$ ( $x \neq y \neq z \neq w$)

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = 1 \leq 1 + 1 + 1 = d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right) + d\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{t}\right) + d\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{m}\right)$$

- $x \in A, y \in B$ ise,

  - $z \in A\ (z \neq x)$, $w = \frac{1}{m} \in B$ ( $y \neq w$)

$$d(x,y) = y \leq 1 + \frac{1}{m} + 1 = d(x,z) + d\left(z, \frac{1}{m}\right) + d\left(\frac{1}{m}, y\right)$$

- $z = \frac{1}{n} \in B \ \ (\ y \neq z)\ \ ,\ w \in A\ \ (w \neq x)$

$$d(x,y) = y \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + y = d\left(x, \frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{1}{n}, w\right) + d(w,y)$$

- $z = \frac{1}{n} \neq w = \frac{1}{m} \in B \quad (\ y \neq z \neq w)$

$$d(x,y) = y \leq \frac{1}{n} + 1 + 1 = d\left(x, \frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) + d\left(\frac{1}{m}, y\right)$$

- $x \in B, y \in A$ ise,

  - $z \in A\ (z \neq y)\ \ ve\ w = \frac{1}{n} (\ x \neq w)$

$$d(x,y) = x \leq x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = d(x,z) + d\left(z, \frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{1}{n}, y\right)$$

  - $z = \frac{1}{n} \in B\ \ (\ x \neq z)\ , w \in A\ \ (\ y \neq w)$

$$d(x,y) = x \leq 1 + \frac{1}{n} + 1 = d\left(x, \frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{1}{n}, w\right) + d(w,y)$$

  - $z = \frac{1}{k} \neq w = \frac{1}{t} \in B \quad (\ x \neq z \neq w)$

$$d(x,y) = x \leq 1 + 1 + \frac{1}{t} = d\left(x, \frac{1}{k}\right) + d\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{t}\right) + d\left(\frac{1}{t}, y\right)$$

eşitsizlikleri sağlandığı için$(X,d)$ genelleştirilmiş metrik uzaydır.

Şimdi $(X,d)$ nin metrik uzay olmadığını gösterelim:

$x, y, z \in X$ olmak üzere $x = \frac{1}{3},\quad y = \frac{1}{4},\ \ z = 0$ alınırsa,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = 1 \not\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = d\left(\frac{1}{3}, 0\right) + d\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

eşitsizliği sağlanmadığı için $(X, d)$ metrik uzay değildir.

**5)** $X = A \cup B$ , $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ ve $B = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ olmak üzere her $x, y \in A$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$$d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}, \quad d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}, d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

ve $\begin{cases} x \in B, \quad y \in A \\ x \in A, \quad y \in B \\ x, y \in B \end{cases}$ için $d(x, y) = |x - y|$

biçiminde tanımlanan $d$ , genelleştirilmiş metriktir. (Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

Gerçekten;

(i) ve (ii) olduğu açıktır.

(iii) her $x, y \in X$ ve $z \neq w$ olmak üzere $x, y$ 'den farklı her $z, w \in X$ için

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

- $x, y, z, w \in A \quad (x \neq y \neq z \neq w)$ ise,
  - $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$
  - $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$
  - $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$

- $d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)+d\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)+d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
- $d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)+d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)+d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$
- $d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)+d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)+d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)$

- $x,z,w\in A\ \ ve\ \ y\in B$ ise,
  - $x=\frac{1}{2}\quad z=\frac{1}{3}\quad w=\frac{1}{4}$

    $$d\left(\frac{1}{2},y\right)=\left|\frac{1}{2}-y\right|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left|\frac{1}{4}-y\right|=d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)+d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)+d\left(\frac{1}{4},y\right)$$
  - $x=\frac{1}{2}\quad z=\frac{1}{3}\quad w=\frac{1}{5}$

    $$d\left(\frac{1}{2},y\right)=\left|\frac{1}{2}-y\right|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\left|\frac{1}{5}-y\right|=d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)+d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)+d\left(\frac{1}{5},y\right)$$
  - $x=\frac{1}{2}\quad z=\frac{1}{4}\quad w=\frac{1}{5}$

    $$d\left(\frac{1}{2},y\right)=\left|\frac{1}{2}-y\right|\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\left|\frac{1}{5}-y\right|=d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)+d\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)+d\left(\frac{1}{5},y\right)$$
  - $x=\frac{1}{3}\quad z=\frac{1}{2}\quad w=\frac{1}{4}$

    $$d\left(\frac{1}{3},y\right)=\left|\frac{1}{3}-y\right|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left|\frac{1}{4}-y\right|=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)+d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)+d\left(\frac{1}{4},y\right)$$
  - $x=\frac{1}{3}\quad z=\frac{1}{2}\quad w=\frac{1}{5}$

    $$d\left(\frac{1}{3},y\right)=\left|\frac{1}{3}-y\right|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\left|\frac{1}{5}-y\right|=d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)+d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)+d\left(\frac{1}{5},y\right)$$

- $x = \frac{1}{3} \quad z = \frac{1}{4} \quad w = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{3}, y\right) = \left|\frac{1}{3} - y\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \left|\frac{1}{5} - y\right| = d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) + d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, y\right)$$

- $x = \frac{1}{4} \quad z = \frac{1}{3} \quad w = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{4}, y\right) = \left|\frac{1}{4} - y\right| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \left|\frac{1}{5} - y\right| = d\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, y\right)$$

- $x = \frac{1}{5} \quad z = \frac{1}{3} \quad w = \frac{1}{2}$

$$d\left(\frac{1}{5}, y\right) = \left|\frac{1}{5} - y\right| \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - y\right| = d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) + d\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}, y\right)$$

- $x \in A \quad y, z, w \in B \ (y \neq z \neq w)$ ise,

  - $x = \frac{1}{2}$

$$d\left(\frac{1}{2}, y\right) = \left|\frac{1}{2} - y\right| \leq \left|\frac{1}{2} - z\right| + |z - w| + |w - y| = d\left(\frac{1}{2}, z\right) + d(z, w) + d(w, y)$$

  - $x = \frac{1}{3}$

$$d\left(\frac{1}{3}, y\right) = \left|\frac{1}{3} - y\right| \leq \left|\frac{1}{3} - z\right| + |z - w| + |w - y| = d\left(\frac{1}{3}, z\right) + d(z, w) + d(w, y)$$

  - $x = \frac{1}{4}$

$$d\left(\frac{1}{4}, y\right) = \left|\frac{1}{4} - y\right| \leq \left|\frac{1}{4} - z\right| + |z - w| + |w - y| = d\left(\frac{1}{4}, z\right) + d(z, w) + d(w, y)$$

  - $x = \frac{1}{5}$

$$d\left(\frac{1}{5}, y\right) = \left|\frac{1}{5} - y\right| \leq \left|\frac{1}{5} - z\right| + |z - w| + |w - y| = d\left(\frac{1}{5}, z\right) + d(z, w) + d(w, y)$$

- $x, y, z, w \in B \ \ (x \neq y \neq z \neq w)$ ise,

$$d(x,y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-w| + |w-y| = d(x,z) + d(z,w) + d(w,y)$$

eşitsizlikleri sağlandığı için *d* genelleştirilmiş metriktir.

Şimdi $d$ nin metrik olmadığını gösterelim:

$x = \frac{1}{2} \ \ y = \frac{1}{3} \ \ z = \frac{1}{5}$ olmak üzere;

$$d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \not\leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) + d\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

eşitsizliği sağlanmadığı için *d* metrik değildir.

Şimdi bir sonraki bölümde kullanacağımız Branciari, Aydi Hassen, Kannan, G. Jungck ve Ali Fora, Azzeddine Bellour ve Adnan Al-Bsoul tarafından verilen tanımları vereceğiz.

**2.1.3 Ön teorem:** $(X, d)$, g.m.u ve $1 \leq i \leq n, \ n \geq 3$ için $x_i \in X, x_{i-1} \neq x_i$ ve $x_n = y$ olsun. O zaman

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$$

ya da

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n-2} d(x_{i-1}, x_i) + d(x_{n-2}, y)$$

dir.

**Kanıt:** G.m.u. (iii) özelliği kullanıldığında $k$ üzerinde tümevarım ile her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve her $0 \leq i \leq 2k+3$ için $t_i \neq t_{i+1}$ olmak üzere $t_i \in X$ için

$$d(t_0, t_{2k+3}) \leq \sum_{i=1}^{2k+3} d(t_{i-1}, t_i) \qquad (2.1)$$

bulunur.

Her $i = 1, \ldots, n$ ve $n \geq 3$ için $x_{i-1} \neq x_i$ olmak üzere $x_i \in X$, $x_0 = x, x_n = y$ olsun.

Eğer $n-3$ çift ise $n = 2k+3$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. böylece (2.1)'den

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$$

olur.

Eğer $n-3$ tek ise o zaman $n-1 = 2k+3$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vardır. Böylece (2.1)'den

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n-2} d(x_{i-1}, x_i) + d(x_{n-2}, y)$$

bulunur.

**2.1.4 Tanım :** $(X, d)$, g.m.u. ve $\{x_n\}$, $X$'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. $\{x_n\}$' nin g.m.u.' da $x$'e yakınsak bir dizi olması için gerekli ve yeterli koşul $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ olmasıdır. Kısaca $x_n \to x$ biçiminde gösterebiliriz. ( Branciari ,2000)

**2.1.5 Tanım :** $(X, d)$ bir g.m.u. ve $\{x_n\}$ 'de $X$'de bir dizi olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > m > N$ koşulunu sağlayan her$n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine $(X, d)$ g.m.u.'da bir Cauchy dizisi denir. (Branciari ,2000)

**2.1.6 Tanım :** $(X,d)$, g.m.u. olsun. $(X,d)$'deki her Cauchy dizisi$(X,d)$'de yakınsak ise $(X,d)$'ye tam g.m.u. denir. . ( Branciari ,2000)

**2.1.7 Tanım :** $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $(X,d)$ bir g.m.u. olsun. Bir $x \in X$ için

$$O(x) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$$

kümesine $x$' in $T$- yörüngesi denir.

Eğer $O(x)$'teki her Cauchy dizisi $(X,d)$ g.m.u yakınsak ise $(X,d)$ g.m.u. 'na yörüngesel tamdır denir.

**2.1.8 Tanım :** $X \neq \emptyset$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $p \geq 1$ olmak üzere $u = T^p u$ eşitliğini sağlayan $u \in X$'e, $T$'nin periyodik noktası denir.

**2.1.9 Tanım :** $(X,d)$ ve $S, F: X \to X$ dönüşümleri verilsin. $\lim_{n\to\infty} d(Fx_n, Sx_n) = 0$ koşulunu sağlayan $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} d(SFx_n, FSx_n) = 0$ oluyorsa $S$ ve $F$ bağdaşıktır denir. ( Jungck, 1986 )

$\Phi$ ile $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ koşulunu sağlayan bütün azalmayan fonksiyonların sınıfı gösterilsin.

**2.1.10 Ön Teorem :** $(X,d)$ g.m.u ve $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, her $t > 0$ için $\{\varphi^n(t)\}$ dizisi 0' a yakınsak olacak biçimde azalmayan bir dizi olsun. O zaman;

(i) Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$

(ii) $\varphi(0) = 0$ dır.

(Fora, Bellour & Al-Bsoul,2009)

**Kanıt : (i)** Bir an için (i) nin gerçekleşmediği var sayılsın. O zaman $\varphi(t) \geq t$ olacak biçimde bir $t > 0$ vardır. $\varphi$ azalmayan olduğundan $\varphi^2(t) \geq \varphi(t) \geq t$ olur. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi^n(t) \geq t$ bulunur ki bu durumda $\{\varphi n\,(t)\}$, 0' a yakınsamaz. Bu ise hipotezle çelişir.

**(ii)** Eğer $\varphi(0) > 0$ ise $\varphi$ azalmayan olduğundan $\varphi(0) \leq \varphi^2(0)$ olur. (i)'den $\varphi^2(0) = \varphi\big(\varphi(0)\big) < \varphi(0)$ olduğundan çelişki elde edilir. Şu halde $\varphi(0) = 0$ dır.

# BÖLÜM 3

# GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

## 3.1 Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Tek Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Banach daralma prensibinin, nonlineer analizde çok faydalı ve klasik bir yöntem olduğu bilinmektedir. Buna paralel olarak değişik bir takım yöntemlerle farklı uzay yapılarında fonksiyonların sabit noktaları ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bölüme Branciari tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş metrik uzaylarda bir fonksiyonun sabit noktaları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

**3.1.1. Teorem :** $(X, d)$ tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

eşitsizliği sağlıyorsa $T$ ' nin $X$ ' de bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

( Kannan, 1968)

Mihet, genelleştirilmiş metrik uzaylar için Kannan teoreminin genellemesi olan aşağıdaki teoremi vermiştir.

**3.1.2 Teorem :** $(X, d)$ T-yörüngesel g.m.u. ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa $T$ 'nin $X$'de tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. ( Mihet D, (2009)

Tam metrik uzaylarda önemli bir sabit nokta teoremi Choudhury (2009), tarafından kanıtlanmıştır.

**3.1.3 Teorem :** $(X, d)$ tam metrik uzay olsun.

$$\phi: [0, \infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$$

(i) sürekli

(ii) $\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big) - \phi\big(d(x, Tx), d(y, Ty)\big)$$

eşitsizliği sağlasın. Bu durumda $T$'nin sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Choudhury, 2009)

Birçok makalede, klasik metrik uzaylarda verilmiş olan sabit nokta teoremleri genelleştirilmiş metrik uzaylara genişletilmeye ve genelleştirilmeye çalışılmıştır. Fakat

bunların çoğunda Branciari tarafından verilmiş olan bazı yanlış özellikler kullanıldığından birçoğu hatalı hatta geçersiz kalmıştır. Bu hatalar genellikle genelleştririlmiş metrik uzay Hausdorff özelliğini sağlamamasından kaynaklanmaktadır. Samet (2010) ve Sharma (2009) tarafından fark edilen son derece kritik bu hata daha sonraki makalelerde genelleştirilmiş metrik uzaylara Hausdorff özelliği eklenerek düzeltilmeye çalışılmıştır.

Bu bölümde özel olarak $(X, d)$ 'nin Hausdorff olduğu varsayılarak tam genelleştirilmiş metrik uzaylarda zayıf daraltan dönüşümünler için sabit nokta teoremleri incelenecektir. Bu teoremin sonucu olarak, bu tip uzaylarda Kannan tipi sabit nokta teoremi elde edilecektir. Ayrıca elde edilen bu sonuçlarla ilgili bazı örnekler verilecektir.

**3.1.4 Teorem :** $(X, d)$ Hausdorff ve tam genelleştirilmiş metrik uzay olsun.

$$\phi: [0, \infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$$

(i) sürekli

(ii) $\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big) - \phi(d(x, Tx), d(y, Ty) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlasın. Bu durumda $T$'nin sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

(Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

**Kanıt:** Herhangi bir $x_0 \in X$ noktası alınsın.

$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_0$ olmak üzere $n = 0,1,2,3, \ldots$ için

$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0 \tag{3.2}$$

olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın.

Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise $x_n$ 'nin , $T$ ' nin bir sabit noktası olduğu açıktır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun.

**1.Adım:** $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olduğunu gösterelim. (3.3)

(3.1)'de $x = x_n$ ve $y = x_{n-1}$ alındığında $\phi$'nin (ii) özelliğinden

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(d(x_n, Tx_n) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - \phi\big(d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\big) \qquad (3.4)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_n)\big)$$

olur.

Böylece her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Bu nedenle $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ monoton artmayan ve alttan sınırlı bir dizidir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$$

olacak biçimde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$'nin bir $r \geq 0$ limiti vardır. $\phi$' nin süreklilik özelliği kullanıldığında (3.1)'den $n \to \infty$ için limite geçildiğinde $r \leq \frac{1}{2}(r + r) - \phi(r, r)$ elde edilir ve buradan $\phi(r, r) \leq 0$ bulunur. $\phi(x, y) \geq 0$ olduğundan $\phi(r, r) \geq 0$ olup $\phi(r, r) = 0$ olur. (ii)'den $r = 0$ dır.

**2.Adım:** $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+2}) = 0$ dır. (3.5)

(3.1)'den

$$d(x_{n+2}, x_n) = d(Tx_{n+1}, Tx_{n-1})$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\big) - \phi\big(d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n-1}, x_n)\big) - \phi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(x_{n-1}, x_n)\big)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n-1}, x_n)\big) \quad (3.6)$$

elde edilir.

(3.6)'da $n \to \infty$ için limite geçildiğinde (3.3)'ten

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_{n+2}, x_n) \leq 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+2}, x_n) = 0$$

bulunur.

**3.Adım:** $T$ 'nin periyodik noktaya sahip olduğunu gösterelim.

$T$, periyodik noktaya sahip olmasın. O zaman $\{x_n\}$ her $m \neq n$ için $x_m \neq x_n$ olacak biçimde bir dizi olur. Bu durumda $\{x_n\}$ g.m.u. da Cauchy dizisidir.

Gerçekten; eğer $\{x_n\}$ g.m.u.'da bir Cauchy dizisi olmasaydı en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her $k > 0$ için $m(k) > n(k) > k$ olmak üzere

$$d\big(x_{n(k)}, x_{m(k)}\big) > \varepsilon \quad (3.7)$$

özelliğini sağlayan $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır.

Her $k$ tamsayısı için $m(k)$,

$$d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}\right) \leq \varepsilon \tag{3.8}$$

olacak biçimde $n(k)$'dan büyük en küçük pozitif tamsayı olsun.

(3.7), (3.8) ve g.m.u.'ın (iii) koşulunu kullanarak;

$$\varepsilon < d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq d\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-2}\right) + d\left(x_{m(k)-2}, x_{m(k)-1}\right) + d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right)$$

$$\leq d\left(x_{m(k)}, x_{m(k)-2}\right) + d\left(x_{m(k)-2}, x_{m(k)-1}\right) + \varepsilon \quad \text{olur.}$$

(3.3) ve (3.5) kullanılırsa;

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n(k)}, x_{m(k)}\right) = \varepsilon \tag{3.9}$$

olup $x = x_{m(k)-1}$ ve $y = x_{n(k)-1}$ ile (3.1) eşitsizliğinden;

$$d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) = d\left(Tx_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(d\left(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}\right) + d\left(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\right)\right)$$

$$- \phi\left(d\left(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}\right), d\left(x_{n(k)-1}, Tx_{n(k)-1}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(d\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right) + d\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right)\right)$$

$$- \phi\left(d\left(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}\right), d\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right)\right)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanında $k \to \infty$ için limite geçildiğinde (3.3) ve (3.9) kullanılarak;

$$\varepsilon \leq 0 - \phi(0,0) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Bu nedenle $\{x_n\}$ g.m.u.'da Cauchy dizisidir. $(X,d)$ tam g.m.u. olduğundan $\lim_{k\to\infty} x_n = u$ olacak biçimde $u \in X$ vardır.

(3.1)'de $x = x_n$ ve $y = u$ alındığında,

$$d(x_{n+1}, Tu) = d(Tx_n, Tu)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(d(x_n, Tx_n) + d(u, Tu)\big) - \phi\big(d(x_n, Tx_n), d(u, Tu)\big)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(u, Tu)\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1}), d(u, Tu)\big) \qquad (3.10)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(u, Tu)\big)$$

bulunur.

(3.3) kullanılarak;

$$\lim_{n\to\infty} sup d(x_{n+1}, Tu) \leq \tfrac{1}{2} d(u, Tu) \qquad (3.11)$$

elde edilir.

Aşağıda verilen iki durum için T'nin periyodik noktaya sahip olmaması ile ilgili çelişkiyi gösterelim.

- Eğer her $n \geq 2$, $x_n \neq u$ ve $x_n \neq Tu$ ise g.m.u.'ın (iii) koşulundan;

$$d(u, Tu) \leq d(u, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tu)$$

bulunur. Her iki taraftan $n \to \infty$ için limite geçildiğinde ve (3.3) kullanılarak;

$$d(u, Tu) \leq \lim_{n\to\infty} \sup(x_{n+1}, Tu) \qquad (3.12)$$

elde edilir.

(3.11) ve (3.12) eşitsizliklerini kullanarak;

$$d(u,Tu) \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_{n+1},Tu) \leq \frac{1}{2} d(u,Tu) \qquad (3.13)$$

olur ki bu ancak $d(u,Tu)=0$ olduğunda geçerlidir. Bu durumda $Tu=u$ olur, yani $u,T$'nin sabit noktasıdır. Dolayısıyla $u,T$'nin periyodik noktasıdır. Bu $T$'nin periyodik noktaya sahip olmamasıyla çelişmektedir.

- Eğer bir $q \geq 2$ için$x_q = u$ veya $x_q = Tu$ ise $T$ periyodik noktaya sahip olmadığından $u \neq x_0$dır. Gerçekten eğer $x_q = u = x_0$ yani $T^q x_0 = x_0$ ise $x_0, T$'nin periyodik noktasıdır.

Diğer taraftan $x_q = Tu$ ve $x_0 = u$ ise $Tx_0 = Tu = x_q = T^q x_0 = T^{q-1}(Tx_0)$ olup $Tx_0, T$'nin bir periyodik noktasıdır.

Her $n \geq 1$ için

$$d(T^n u, u) = d\big(T^n x_q, u\big) = d\big(x_{n+q}, u\big)$$

veya

$$d(T^n u, u) = d(T^{n-1}Tu, u) = d\big(T^{n-1}x_q, u\big) = d\big(x_{n+q-1}, u\big)$$

bulunur.

$\{x_{n+q}\}$ ve $\{x_{n+q-1}\}$ dizileri $\{x_n\}$'nin alt dizileridir.$\{x_n\}$, g.m.u.'da $u$'ya yakınsak ve $(X,d)$ Hausdorff olduğundan bu iki dizi g.m.u. da $u$' ya yakınsar, yani;

$$\lim_{n\to\infty} d\big(x_{n+q}, u\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_{n+q-1}, u\big) = 0 \text{ dır.}$$

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n u, u) = 0 \qquad (3.14)$$

elde edilir.

$(X,d)$ Hausdorff ve (3.14) eşitsizliğinden;

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+2}u, u) = 0 \qquad (3.15)$$

bulunur. Diğer yandan $T$ periyodik noktaya sahip olmadığından herhangi bir $s, r \in \mathbb{N}$, $s \neq r$ için

$$T^s u \neq T^r u \text{ dir.} \qquad (3.16)$$

(3.16) ve g.m.u.'ın (iii) eşitsizliği kullanılarak;

$$|d(T^{n+1}u, Tu) - d(u, Tu)| \leq d(T^{n+1}u, T^{n+2}u) + d(T^{n+2}u, u)$$

elde edilir.

Eşitsizliğin her iki tarafından $n \to \infty$ için limite geçildiğinde, (3.3) ve (3.15)'i kullanarak;

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}u, Tu) = d(u, Tu) \qquad (3.17)$$

dir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n}u, Tu) = d(u, Tu) \qquad (3.18)$$

bulunur.

(3.1)'den

$$d(T^{n+1}u, Tu) \leq \frac{1}{2}\big(d(T^n u, Tu) + d(u, Tu)\big) - \phi\big(d(T^n u, Tu), d(u, Tu)\big) \qquad (3.19)$$

olup (3.19)'da her iki taraftan $n \to \infty$ için limite geçildiğinde, (3.17) ve (3.18) kullanılarak;

$$d(u, Tu) \leq d(u, Tu) - \phi\big(d(Tu, u), d(u, Tu)\big)$$

elde edilir.

$d(u,Tu)=0$ olacağından $Tu=u$ dur. Dolayısıyla $u,T$'nin periyodik noktasıdır. Bu $T$'nin periyodik noktası olmamasıyla çelişir.

Sonuç olarak, $p\geq 1$ için $u=T^{p}u$ olacak biçimde $u\in X$ vardır.

**4.Adım:** $T$ 'nin sabit noktasının varlığını gösterelim.

$p=1$ ise $u=Tu$ olur ki $u,T$'nin sabit noktasıdır. $p>1$ olduğunu varsayalım. Burada $a=T^{p-1}u$'nun $T$'nin sabit noktası olduğunu gösterelim. $T^{p-1}u\neq T^{p}u$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$d(T^{p-1}u,T^{p}u)>0 \text{ ve } \phi\big(d(T^{p-1}u,T^{p}u),d(T^{p-1}u,T^{p}u)\big)>0$$

dır. (3.1) eşitsizliğini kullanarak,

$$d(u,Tu)=d(T^{p}u,T^{p+1}u)=d\big(T(T^{p-1}u),T(T^{p}u)\big)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\Big(d(T^{p-1}u,T^{p}u)+d\big(T^{p}u,T(T^{p}u)\big)\Big)$$

$$-\phi\Big(d(T^{p-1}u,T^{p}u),d\big(T^{p}u,T(T^{p}u)\big)\Big)$$

$$<\tfrac{1}{2}\big(d(T^{p-1}u,T^{p}u)+d(u,Tu)\big)$$

bulunur. Buradan

$$d(u,Tu)<d(T^{p-1}u,T^{p}u) \tag{3.20}$$

elde edilir.

(3.1)'den;

$$d(T^{p-1}u,T^{p}u)=d\big(T(T^{p-2}u),T(T^{p-1}u)\big)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\big(d(T^{p-2}u,T^{p-1}u)+d(T^{p-1}u,T^{p}u)\big)$$

$$-\phi\big(d(T^{p-2}u, T^{p-1}u), d(T^{p-1}u, T^{p}u)\big)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(d(T^{p-2}u, T^{p-1}u) + d(T^{p-1}u, T^{p}u)\big)$$

olur. Böylece;

$$d(T^{p-1}u, T^{p}u) \leq d(T^{p-2}u, T^{p-1}u) \tag{3.21}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(3.20) ve (3.21)'de olduğu gibi devam ederek;

$$d(u, Tu) < d(T^{p-1}u, T^{p}u) \leq d(T^{p-2}u, T^{p-1}u) \leq \cdots \leq d(u, Tu)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $a = T^{p-1}u$'nun $T$'nin sabit noktası olduğu görülür.

**5.Adım:**$T$'nin sabit noktasının tekliğini gösterelim.

$b, c \in X$, $T$'nin iki sabit noktası olsun, $Tb = b$ ve $Tc = c$ dir.

(3.1)'den;

$$d(b, c) = d(Tb, Tc) \leq \frac{1}{2}\big(d(b, b) + d(c, c)\big) - \phi(0,0) = 0$$

olduğundan $b = c$ dir.Yani $T$'nin tek bir sabit noktası vardır.

**3.1.5 Sonuç :** $(X, d)$ Hausdorff ve tam genelleştirilmiş metrik uzay olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{k}{2}\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big) \tag{3.22}$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in [0, 1)$ sayısı var ise $T$'nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

**Kanıt:** Teorem 3.1.4'te $t = d(x,Tx),\ s = d(y,Ty)$ olmak üzere $\phi(t,s) = \frac{1-k}{2}(t+s)$ alındığında Sonuç 3.1.5 gerçeklenir.

**3.1.6 Sonuç :** $(X,d)$ Hausdorff ve tam genelleştirilmiş metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ , $\psi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}\big(d(x,Tx) + d(y,Ty)\big) - \psi\left(\frac{1}{2}\big(d(x,Tx) + d(y,Ty)\big)\right) \qquad (3.23)$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa $T$'nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

**Kanıt**: $\phi(t,s) = \psi\left(\frac{1}{2}(t+s)\right)$ alınırsa Sonuç 3.1.6 gösterilmiş olur.

**3.1.7.Örnekler :**

**1. Örnek:** $X = \{1,2,3,4\}$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü;

$$d(1,2) = d(2,1) = 3$$

$$d(2,3) = d(3,2) = d(1,3) = d(3,1) = 1$$

$$d(1,4) = d(4,1) = d(2,4) = d(4,2) = d(3,4) = d(4,3) = 4$$

$$d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = d(4,4) = d(5,5) = 0$$

olarak tanımlansın. $(X,d)$ tam genelleştirilmiş metrik uzaydır ancak metrik uzay değildir. Gerçekten;

$$3 = d(1,2) > d(1,3) + d(3,2) = 1 + 1 = 2$$

Üçgen eşitsizliği sağlanmadığı için $(X, d)$ metrik uzay değildir.

$T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 3; & x \neq 4 \\ 1; & x = 4 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Her $a, b \geq 0$ için $\phi(a, b) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}b$ olmak üzere Teorem 3.1.4'teki hipotezler kolayca sağlanır ve $u = 3,\ T$'nin sabit noktasıdır.

Diğer taraftan Banach Sabit Nokta Teoremi geçerli değildir. Her $x, y \in X$ için $d_0(x, y) = |x - y|$ dir. Gerçekten $x = 2$ ve $y = 4$ alınırsa herhangi bir $k \in [0, 1)$ için

$$d_0(T2, T4) = 2 > 2k = kd_0(2,4)$$

Ayrıca Teorem 3.1.3 uygulanmaz. Örneğin $x = 3$ ve $y = 4$ alındığında her $\phi$ için

$$d_0(T3, T4) = 2 > \frac{3}{2} - \phi(2,1) = \frac{1}{2}\big(d_0(3, T4) + d_0(4, T3)\big) - \phi\big(d_0(3, T4), d_0(4, T3)\big)$$

bulunur. (Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

**2. Örnek :** Örnekler 2.1.2-5'deki *d* genelleştirilmiş metriği göz önüne alınsın.

$$T: X \to X,\ Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\ \frac{1}{5}, & x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\} \\ \frac{1}{3}, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $\phi(a, b) = \frac{1}{15}(a + b)$ olarak alınırsa $T$, Teorem 3.1.4'ün koşullarını sağlar. $u = \frac{1}{5}$, $T$'nin sabit noktasıdır.

Özel olarak $x = \frac{1}{2}$ ve $y = \frac{1}{3}$ alındığında Banach Sabit Nokta Teoreminin geçerli olmadığı görülür. Ayrıca $x = \frac{1}{2}$ ve $y = \frac{1}{3}$ alınırsa Teorem 3.1.3 sağlanmaz.

(Aydi, Karapınar & Lakzain ,2012)

**3.1.8 Teorem :** $(X, d)$ Hausdorff g.m.u. ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi \in \Phi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(y, Tx)\}) \tag{3.24}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer bir $x \in X$ için $O(x)$ yörüngesel tam ise $T$ ' nin $X$ ' de bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. ( Fora , Bellour & Al-Bsoul ,2009)

**Kanıt:** $\{x_n\}$ dizi, $x_0 = x,\ n \geq 1$ için $x_n = Tx_{n-1}$ biçiminde tanımlansın. (3.24) eşitsizliğinden ve Ön teorem 2.1.10'dan

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq \varphi(\max\{d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^n x, T^{n+1} x), d(T^n x, T^n x)\})$$

$$= \varphi(\max\{d(T^{n-1} x, T^n x), d(T^n x, T^{n+1} x)\})$$

$$= \varphi\big(d(T^{n-1} x, T^n x)\big)$$

olur. Buradan

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq \varphi\big(d(T^{n-1} x, T^n x)\big)$$

bulunur.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq \varphi^n\big(d(x, Tx)\big) \tag{3.25}$$

elde edilir.

Eğer $x_n = x_m$ olacak biçimde $n < m$ varsa $y = T^n x$ alındığında $k = m - n$ olmak üzere $T^k y = y$ dir. $k \geq 1$ olduğundan

$$d(y,Ty) = d(T^k y, T^{k+1} y) \leq \varphi^k\big(d(y,Ty)\big)$$

olur. Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğundan

$$d(y,Ty) \leq \varphi^k\big(d(y,Ty)\big) < d(y,Ty)$$

dir. O halde $d(y,Ty) = 0$ dır. Dolayısıyla y, $T$ ' nin sabit noktasıdır.

Her $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ olduğunu varsayalım. Böylece

$$d(Tx,T^3x) \leq \varphi(\max\{d(x,T^2x), d(x,Tx), d(T^2x,T^3x), d(T^2x,Tx)\})$$

bulunur. Buradan $M = \max\{d(x,T^2x), d(x,Tx)\}$ olmak üzere

$$d(Tx,T^3x) \leq \varphi(M)$$

olur.

Genel olarak, n pozitif tam sayı ise

$$d(T^n x, T^{n+2}x) \leq \varphi(M) \tag{3.26}$$

elde edilir.

O halde her $m \geq n+3$ için Ön teorem 2.1.3'ten ya

$$d(T^n x, T^m x) \leq d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) + \cdots + d(T^{m-1}x, T^m x)$$

ya da

$$d(T^n x, T^m x) \leq d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) + \cdots + d(T^{m-2}x, T^m x)$$

biçimindedir.

Buradan,

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k\big(d(x,Tx)\big) \tag{3.27}$$

veya

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-3} \varphi^k\big(d(x, Tx)\big) + \varphi^{m-2}(M) \qquad (3.28)$$

bulunur.

Böylece (3.25), (3.26), (3.27) ve (3.28) den her $m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n$ için,

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(M) \quad \text{elde edilir.}$$

Bu nedenle,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(M) \ = 0$$

olur ki $\{x_n\}$ Cauchy dizisidir.

Gerçekten,

$\forall\, \varepsilon > 0$ ve $\forall\, t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ olduğundan yeterince büyük $m \in \mathbb{N}$ alındığında

$\sum_{k=m}^{\infty} \varphi^k(M) < \varepsilon$ olacağından her $m > n > \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^m x) = d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ olacaktır.}$$

$(X, d)$, $O(x)$ yörüngesel tam olduğundan $\{x_n\}$ ,bir $p \in X$ noktasına yakınsar.

$p$ noktası $T$ ' nin sabit noktasıdır. Bunun için iki durum incelemek gerekir.

**1.Durum:** $\{x_n\}$ , $Tp$' ye yakınsamasın. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \neq Tp$ olacak biçimde $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla

$$d(p, Tp) \leq d\big(p, x_{n_{k-1}}\big) + d\big(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}\big) + d\big(x_{n_k}, Tp\big)$$

olup $k \to \infty$ için limit uygulanırsa;

$$d(p, Tp) \leq \lim_{k\to\infty} \sup d\big(x_{n_k}, Tp\big) \qquad (3.29)$$

olur. Diğer taraftan (3.24) ten

$$d(x_n, Tp) = d(Tx_{n-1}, Tp)$$

$$\leq \varphi(max\{d(x_{n-1}, p), d(x_{n-1}, x_n), d(p, Tp), d(p, x_n)\})$$

bulunur. $n \to \infty$ için her iki tarafta limit uygulanırsa,

$$\lim_{k\to\infty} \sup d(x_n, Tp) \leq \varphi\big(d(p, Tp)\big) \tag{3.30}$$

elde edilir. Böylece (3.29) ve (3.30) dan $d(p, Tp) = 0$ ve $p = Tp$ bulunur.

**2. Durum:** $\{x_n\}$, $Tp$ ye yakınsasın.$p \neq Tp$ olduğunu varsayalım. Öyle ki $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in X - \{p, Tp\}$ olacak biçimde $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla,

$$d(p, Tp) \leq d\big(p, x_{n_k}\big) + d\big(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\big) + d\big(x_{n_{k+1}}, Tp\big) \tag{3.31}$$

olup $k \to \infty$ için limit uygulandığında $p = Tp$ bulunur. Bu bir çelişkidir.

O halde her durumda $p$ noktası *T*' nin sabit noktasıdır.

Bu noktanın tek olduğunu göstermek için $w \neq p$ olmak üzere *w* noktasının *T* nin sabit noktası olduğunu varsayalım. (3.24) ten

$$d(p, w) = d(Tp, Tw) \leq \varphi(\max\{d(p, w), d(p, Tp), d(w, Tw), d(w, Tp)\})$$

buradan

$$d(p, w) \leq \varphi\big(d(p, w)\big)$$

bulunur. Dolayısıyla $w = p$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $p$ noktası *T*' nin tek sabit noktasıdır.

**3.1.9 Sonuç :** $(X, d)$ Hausdorff g.m.u. ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0 \leq q < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq q\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(y,Tx)\}$$

koşulu sağlıyorsa ve bir $x \in X$, $(X,d)$ g.m.u. $O(x)$ yörüngesel tam ise $T$ ' nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. ( Fora , Bellour & Al-Bsoul ,2009)

**Kanıt:** Teorem 3.1.8 de $\varphi(t) = qt$ alınırsa istenen elde edilir.

$\Psi$ ile $\psi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ her $t \geq 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ koşulunu sağlayan bütün azalmayan fonksiyonların sınıfı gösterilsin.

**3.1.10 Teorem :** $(X,d)$ Hausdorff g.m.u. ve $T: X \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq \psi\big(d(x,Tx)\big)\,; \qquad d(Tx,T^3x) \leq \psi\big(d(x,T^2x)\big) \tag{3.32}$$

koşulları sağlanıyor ve bir $x \in X$ için $(X,d)$ g.m.u $O(x)$ yörüngesel tam ise $T$ 'nin $X$ 'de sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Fora, Bellour & Al-Bsoul ,2009)

**Kanıt:** $\{x_n\}$ dizi, $x_0 = x$ ve $n \geq 1$ için $x_n = Tx_{n-1}$ biçiminde tanımlansın.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^nx,T^{n+1}x) \leq \psi^n\big(d(x,Tx)\big) \tag{3.33}$$

dir. Bir $m > n$ için $x_n = x_m$ oluyorsa $T^nx$ , $T$ nin sabit noktasıdır.

Her $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^nx,T^{n+2}x) \leq \psi^n\big(d(x,T^2x)\big) \tag{3.34}$$

elde edilir. Buradan her $m \geq n+3$ için ya

$$d(T^nx,T^mx) \leq d(T^nx,T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x,T^{n+2}x) + \cdots + d(T^{m-1}x,T^mx)$$

ya da

$$d(T^n x, T^m x) \leq d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) + \cdots + d(T^{m-2}x, T^m x)$$

olur.

Bu durumda ya

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k\big(d(x, Tx)\big) \tag{3.35}$$

ya da

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-3} \psi^k\big(d(x, Tx)\big) + \psi^{m-2}\big(d(x, T^2 x)\big) \tag{3.36}$$

bulunur. Böylece (3.33), (3.34), (3.35) ve (3.36) dan her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$R = \max\{d(x, Tx), d(x, T^2 x)\}$$

olmak üzere

$$d(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(R)$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(R) < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olup $(X, d)$ g.m.u. $O(x)$ $T$-yörüngesel tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir $p \in X$' e yakınsar. $T$ nin sürekli olduğundan

$$p = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T \lim_{n\to\infty} (x_n) = Tp.$$

Bu nedenle $p$ noktası $T$ nin sabit noktasıdır.

**3.1.11 Sonuç :** $(X, d)$ Hausdorff g.m.u. ve $T: X \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\min\big\{d(Tx, Ty), \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}\big\} \leq \psi\big(d(x, y)\big)$$

ve (3.37)

$$d(x, T^2 x) \leq d(x, Tx)$$

koşulları sağlanıyor ve bir $x \in X$ için $(X, d)$ g.m.u $O(x)$ yörüngesel tam ise $T$ 'nin $X$ 'de sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. (Fora, Bellour & Al-Bsoul ,2009)

**Kanıt:** (3.37) de $y = Tx$ alındığında

$$\min\{d(Tx, T^2x), \max\{d(x, Tx), d(Tx, T^2x)\}\} \leq \psi\big(d(x, Tx)\big)$$

bulunur. Böylece her $x \in X$ için $d(Tx, T^2x) \leq \psi\big(d(x, Tx)\big)$ olur.

Benzer biçimde (3.37) de $y = T^2x$ alınırsa

$$\min\{d(Tx, T^3x), \max\{d(x, Tx), d(T^2x, T^3x)\}\} \leq \psi\big(d(x, T^2x)\big)$$

bulunur. Dolayısıyla her $x \in X$ için

$$\min\{d(Tx, T^3x), d(x, Tx)\} \leq \psi\big(d(x, T^2x)\big)$$

olur. Buradan her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^3x) \leq \psi\big(d(x, T^2x)\big)$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1.10 dan $T$ ' nin sabit noktasının varlığı elde edilmiş olur.

## 3.2 Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Bağdaşık Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde bağdaşık dönüşüm kavramını için iki farklı ortak sabit nokta teoremleri kanıtlanacaktır.

Bunun içinde aşağıdaki tanım ve ön teoremlere ihtiyaç vardır.

**3.2.1 Tanım:** Bir $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

**(i)** her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ ve $\varphi(0) = 0$,

**(ii)** her $t > 0$ için $\lim_{t_{n \to t}} \inf \varphi(t_n) < t$

koşullarını sağlıyorsa $\varphi$ ye $\omega -$ fonksiyonu denir. (Chen, Chi-Ming, 2012)

**3.2.2 Ön teorem :** $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir $\omega -$ fonksiyonu olsun. O zaman $\varphi^n(t)$ , $\varphi$' nin n. iterasyonu olmak üzere her $t > 0$ için $\lim_{n \to \infty} \varphi^n(t) = 0$ dır.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**Kanıt:** $t > 0$ olmak üzere, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\varphi^{n_0}(t) = 0$ oluyorsa

$$\varphi^{n_0+1}(t) = \varphi\left(\varphi^{n_0}(t)\right) = \varphi(0) = 0 \tag{3.38}$$

olur. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $\varphi^{n_0+k}(t) = 0$ olur. Bu nedenle $\lim_{n \to \infty} \varphi^n(t) = 0$ dır.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi^n(t) > 0$ ise $\alpha_n = \varphi^n(t)$ alındığında

$$\alpha_{n+1} = \varphi^{n+1}(t) = \varphi\left(\varphi^{n}(t)\right) = \varphi(\alpha_n) \tag{3.39}$$

olur $\varphi$ bir $\omega -$ fonksiyonu olduğundan $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n) < \alpha_n$ dir. Dolayısıyla $\{\alpha_n\}$ dizisi kesin azalan ve alttan sınırlıdır. Böylece olacak biçimde $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma,\ \gamma \geq 0$ vardır.

$\gamma = 0$ dır. Gerçekten eğer $\gamma > 0$ olsaydı, o zaman $\omega -$ fonksiyonun 2. özelliği kullanılarak;

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(\alpha_n) = \lim_{\alpha_n \to \gamma^+} \inf \varphi(\alpha_n) < \gamma \tag{3.40}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\gamma = 0$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ dır.

**3.2.3 Teorem :** $(X, d)$ Hausdorff ve tam g.m.u. $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$bir $\omega -$ fonksiyonu olsun. $S, T, F, G: X \to X$;

(i)$T(X) \subset F(X)$ , $S(X) \subset G(X)$,

(ii) $\{S, F\}$ , $\{T, G\}$ çiftleri bağdaşık özelliklerini sağlayan ve

(iii) her $x, y \in X$ için

$$d(Sx, Ty) \leq \varphi(\max\{d(Fx, Gy), d(Fx, Sx), d(Gy, Ty)\}) \tag{3.41}$$

eşitsizliğini sağlayan tek değişkenli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $F$ veya $G$ sürekli ise $S, T, F, G$ $X$ ' de ortak bir sabit noktaya sahiptir ve bu nokta tektir.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**Kanıt:** Herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın. $\{x_n\}$ dizisi;

$$Gx_{2n+1} = Sx_{2n} = z_{2n}\ , \qquad Fx_{2n+2} = Tx_{2n+1} = z_{2n+1} \tag{3.42}$$

biçiminde tanımlansın.

**1. Adım:** $\lim_{n\to\infty} d(z_n, z_{n+1}) = 0$ olduğunu görelim (3.43)

(3.41) i kullanarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(z_{2n}, z_{2n+1}) = d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})$$

$$\leq \varphi(\max\{d(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}), d(Fx_{2n}, Sx_{2n}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\})$$

$$= \varphi(\max\{d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\})$$

$$= \varphi(\max\{d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\}) \quad (3.44)$$

olup buradan

$$d(z_{2n}, z_{2n+1}) \leq \varphi\big(d(z_{2n-1}, z_{2n})\big) \quad (3.45)$$

bulunur. Benzer biçimde

$$d(z_{2n+1}, z_{2n+2}) = d(Tx_{2n+1}, Sx_{2n+2}) = d(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1})$$

$$\leq \varphi(\max\{d(Fx_{2n+2}, Gx_{2n+1}), d(Fx_{2n+2}, Sx_{2n+2}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\})$$

$$= \varphi(\max\{d(z_{2n+1}, z_{2n}), d(z_{2n+1}, z_{2n+2}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\})$$

$$= \varphi(\max\{d(z_{2n}, z_{2n+1}), d(z_{2n+1}, z_{2n+2})\})$$

ve buradan

$$d(z_{2n+1}, z_{2n+2}) \leq \varphi\big(d(z_{2n}, z_{2n+1})\big) \quad (3.46)$$

olur. Genel olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(z_n, z_{n+1}) \leq \varphi\big(d(z_{n-1}, z_n)\big) \quad (3.47)$$

dir. Tümevarım ile

$$0 \leq d(z_n, z_{n+1}) \leq \varphi\big(d(z_{n-1}, z_n)\big)$$

$$\leq \varphi\left(\varphi\left(d(z_{n-2}, z_{n-1})\right)\right)$$

$$= \varphi^2\left(d(z_{n-2}, z_{n-1})\right)$$

$$\leq \varphi^3\left(d(z_{n-3}, z_{n-2})\right)$$

$$\vdots$$

$$\leq \varphi^n\left(d(z_0, z_1)\right) \tag{3.48}$$

olur. Her iki yana limit uyguladığımızda Ön teorem 3.2.2'den

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, z_{n+1}) = 0$$

elde edilir.

**2. Adım:** $\{z_n\}$ dizisinin g.m.u. da Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Bunun için herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m, n \geq n_0$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(z_m, z_n) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$'ın var olduğunu göstermek yetecektir.

Bir an için bunun tersi olduğu var sayılsın. O zaman en az bir $\varepsilon > 0$ vardır, öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $m_k \geq n_k \geq k$ olacak biçimde $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ sayıları vardır.

(a) $m_k$ çift ve $n_k$ tek
(b) $d\left(z_{m_k}, z_{n_k}\right) \geq \varepsilon$
(c) $m_k$ , ( b) yi sağlayan en küçük çift sayı

( b) ve ( c) kullanıldığında

$$\varepsilon \leq d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right)$$

$$\leq d\left(z_{n_k}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) + d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right) \tag{3.49}$$

$$\leq \varepsilon + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) + d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right)$$

bulunur. $k \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) \leq \varepsilon + 0 + 0 \text{ olur. Yani}$$

$$\lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) = \varepsilon \tag{3.50}$$

elde edilir.

Benzer biçimde

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right) \\ &\leq d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-3}}\right) + d\left(z_{m_{k-3}}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) \quad (3.51) \\ &\leq \varepsilon + d\left(z_{m_{k-3}}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right) = \varepsilon \tag{3.52}$$

elde edilir.

(3.41) , (3.50) ve (3.52) kullanıldığında

$$\begin{aligned} d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) &= d\left(Sx_{n_k}, Tx_{m_k}\right) \\ &\leq \varphi\left(\max\left\{d\left(Fx_{n_k}, Gx_{m_k}\right), d\left(Fx_{n_k}, Sx_{n_k}\right), d\left(Gx_{n_k}, Tx_{n_k}\right)\right\}\right) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right), d\left(z_{n_{k-1}}, z_{n_k}\right), d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right)\right\}\right) \quad (3.53) \\ &= \varphi\left(\max\left\{d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right), c_{n_{k-1}}, c_{m_{k-1}}\right\}\right) \end{aligned}$$

Burada $c_{n_{k-1}} = d\left(z_{n_{k-1}}, z_{n_k}\right)$ ve $c_{m_{k-1}} = d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right)$ dir.

Her iki yana $\lim_{k\to\infty}\inf$ alınırsa $\varepsilon < \varepsilon$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\{z_n\}$ g.m.u. da Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Böylece $n \to \infty$ için

$$d(Fx_{2n}, z) \to 0\,,\ d(Gx_{2n+1}, z) \to 0\,,\ d(Sx_{2n}, z) \to 0\,,\ d(Tx_{2n+1}, z) \to 0 \qquad (3.54)$$

bulunur.

**3.Adım:** $S, T, F$ ve $G$ nin ortak sabit noktasının $z$ olduğunu gösterelim:

$F$ nin sürekli olduğu varsayılsın. O zaman $n \to \infty$ için

$$d(F^2x_{2n}, Fz) \to 0\,,\quad d(FSx_{2n}, Fz) \to 0 \qquad (3.55)$$

olup dörtgen eşitsizliğinden

$$d(SFx_{2n}, Fz) \le d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + d(F^2x_{2n}, Fz) \qquad (3.56)$$

olur.

$S$ , $F$ bağdaşık dönüşümler ve $n \to \infty$ için $d(Sx_{2n}, Fx_{2n}) \to 0$ olduğundan

$$d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) \to 0 \qquad (3.57)$$

elde edilir.

(3.55) , (3.56) ve (3.57) kullanıldığında,

$$0 \le d(SFx_{2n}, Fz) \le d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + d(F^2x_{2n}, Fz)$$

olup $n \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{n\to\infty} d(SFx_{2n}, Fz) \le \lim_{n\to\infty} d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + \lim_{n\to\infty} d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + \lim_{n\to\infty} d(F^2x_{2n}, Fz)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} d(FSx_{2n}, F^2x_{2n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} d(Fz_{2n}, Fz_{2n-1}) = 0$$

olup buradan

$$d(SFx_{2n}, Fz) \to 0 \tag{3.58}$$

bulunur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.41) eşitsizliğinden

$d(SFx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq \varphi(\max\{d(F^2x_{2n}, Gx_{2n+1}), d(F^2x_{2n}, SFx_{2n}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\})$

olur. (3.59)

$n \to \infty$ için (3.54) , (3.55) , (3.56) , (3.57) ve (3.58) kullanıldığında;

$$d(Fz, z) \leq \varphi(\max\{d(Fz, z), d(Fz, Fz), d(z, z)\})$$

$$= \varphi(\max\{d(Fz, z), 0,0\}) = \varphi\big(d(Fz, z)\big)$$

$$< d(Fz, z) \tag{3.60}$$

olur ki bu da $d(Fz, z) = 0$ dışında bir çelişki olur. Dolayısıyla $Fz = z$ olur.

Benzer bir yol izlendiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Sz, Tx_{2n+1}) \leq \varphi(\max\{d(Fz, Gx_{2n+1}), d(Fz, Sz), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\}) \tag{3.61}$$

olup $n \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{n\to\infty} d(Sz, Tx_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(Sz, z_{2n+1})$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} [\varphi(\max\{d(Fz, z_{2n}), d(Fz, Sz), d(z_{2n}, z_{2n+1})\})]$$

ve buradan

$$d(Sz, z) \leq \varphi(\max\{d(z, z), d(z, Sz), d(z, z)\}) = \varphi(\max\{0, d(z, Sz), 0\})$$

$$= \varphi\big(d(z, Sz)\big)$$

$$< d(z, Sz) \tag{3.62}$$

bulunur. Bu da $d(z, Sz) = 0$ olması dışında bir çelişkidir. Bu nedenle $Sz = z$ dir.

$S(X) \subset G(X)$ olduğundan $Gz' = z = Sz$ olacak biçimde bir $z' \in X$ vardır. $TGz' = Tz$ olur. (3.41) kullanıldığında,

$$d(z, Tz') = d(Sz, Tz')$$

$$\leq \varphi(\max\{d(Fz, Gz'), d(Fz, Sz), d(Gz', Tz')\})$$

$$\leq \varphi(\max\{d(z, z), d(z, z), d(z, Tz')\})$$

$$= \varphi\big(d(z, Tz')\big)$$

$$< d(z, Tz') \tag{3.63}$$

olur ki bu da $d(z, Tz') = 0$ olması dışında bir çelişki olur. Bu durumda $Tz' = z$ dir. Buradan $d(Tz', Gz') = d(z, z) = 0$ dır.

$T$ ve $G$ bağdaşık ve $d(Tz', Gz') = 0$ olduğundan;

$$d(Tz, Gz) = d(TGz', GTz') = 0 \tag{3.64}$$

olur. O halde $Tz = Gz$ bulunur.

(3.41) kullanıldığında;

$$d(z, Tz) = d(Sz, Tz)$$

$$\leq \varphi(\max\{d(Fz, Gz), d(Fz, Sz), d(Gz, Tz)\})$$

$$= \varphi(\max\{d(z, Tz), d(z, z), d(Tz, Tz)\})$$

$$= \varphi\big(d(z, Tz)\big) \tag{3.65}$$

$$< d(z, Tz)$$

olur ki bu da $d(z, Tz) = 0$ olması dışında bir çelişki olur. Böylece $Tz = z$ dir.

Sonuç olarak $Sz = Tz = z = Fz = Gz$ elde edilir. Dolayısıyla $z; S, T, F$ ve $G$'nin ortak sabit noktasıdır.

**4.Adım:** Son olarak $S, T, F$ ve $G$'nin ortak sabit noktasının tek olduğunu gösterelim.

$y; S, T, F$ ve $G$'nin $z$ 'den farklı başka bir ortak noktası olsun. O zaman (3.41) den

$$\begin{aligned} d(y, z) &= d(Sy, Tz) \\ &\leq \varphi(\max\{d(Fy, Gz), d(Fy, Sy), d(Gz, Tz)\}) \\ &= \varphi(\max\{d(y, z), d(y, y), d(z, z)\}) \\ &= \varphi\big(d(y, z)\big) \\ &< d(y, z) \end{aligned} \tag{3.66}$$

bulunur ki bu da $d(y, z) = 0$ olması dışında bir çelişki oluşturur. Buradan $y = z$ elde edilir.

O halde $z$; $X$' te $S, T, F$ ve $G$'nin tek ortak sabit noktasıdır.

$G = F = I$ birim dönüşüm ve $S = T$ alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

**3.2.4 Teorem :** $(X, d)$ Hausdorff ve tam g.m.u. ve $T: X \to X$ tek değerli bir fonksiyon olsun $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir $\omega -$fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\}) \tag{3.67}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $T$' nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**3.2.5 Tanım :** Bir $\phi: \mathbb{R}^{+^3} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu;

(i) Her bir bileşene göre $\phi$ fonksiyonu sürekli ve kesin artan

(ii) Her $t > 0$ için

$$\phi(t,t,t) < t, \phi(t,0,0) < t, \ \ \phi(0,t,0) < t \ \text{ ve } \ \phi(0,0,t) < t$$

koşullarını sağlıyorsa $\phi$ 'ye $\mathcal{S}-$fonksiyonu denir.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**3.2.6 Örnek :** $\phi: \mathbb{R}^{+^3} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $k \in (0,1)$ için

$$\phi(t_1, t_2, t_3) = k.\max\{t_1, t_2, t_3\}$$

biçiminde tanımlansın o zaman $\phi$ bir $\mathcal{S}-$fonksiyonudur. (Chen, Chi-Ming, 2012)

**3.2.7 Teorem :** $(X,d)$ Hausdorff ve tam g.m.u. ve $\phi: \mathbb{R}^{+^3} \to \mathbb{R}^+$ bir $\mathcal{S}-$fonksiyonu olsun. $S,T,F,G: X \to X$

(i) $T(X) \subset F(X)$ , $S(X) \subset G(X)$

(ii) $\{S,F\}$ , $\{T,G\}$ çiftleri bağdaşık özelliklerini sağlayan ve

(iii) her $x, y \in X$ için

$$d(Sx,Ty) \leq \phi\big(d(Fx,Gy), d(Fx,Sx), d(Gy,Ty)\big) \qquad (3.68)$$

eşitsizliğini sağlayan tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $F$ veya $G$ sürekli ise $S,T,F,G$ nin $X$ ' de ortak bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**Kanıt:** Herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın. $\{x_n\}$ dizisi

$$Gx_{2n+1} = Sx_{2n} = z_{2n}\ , \qquad Fx_{2n+2} = Tx_{2n+1} = z_{2n+1} \tag{3.69}$$

biçiminde tanımlansın.

**1. Adım:** $\lim_{n\to\infty} d(z_n, z_{n+1}) = 0$ (3.70)

olduğunu gösterelim.

(3.68) ve $\mathcal{S}$ −fonksiyonun tanımı kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(z_{2n}, z_{2n+1}) &= d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) \\ &\leq \phi\big(d(Fx_{2n}, Gx_{2n+1}), d(Fx_{2n}, Sx_{2n}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\big) \\ &= \phi\big(d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\big) \end{aligned} \tag{3.71}$$

olur. Eğer $d(z_{2n}, z_{2n+1}) \geq d(z_{2n-1}, z_{2n})$ olsaydı (3.71) den

$$d(z_{2n}, z_{2n+1}) \leq \phi\big(d(z_{2n}, z_{2n+1}), d(z_{2n}, z_{2n+1}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\big) < d(z_{2n}, z_{2n+1})$$

çelişkisi elde edilir. Şu halde $d(z_{2n}, z_{2n+1}) \leq d(z_{2n-1}, z_{2n})$ olup (3.71) den

$$d(z_{2n}, z_{2n+1}) \leq \phi\big(d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n-1}, z_{2n}), d(z_{2n-1}, z_{2n})\big) < d(z_{2n-1}, z_{2n}) \tag{3.72}$$

elde edilir.

Benzer biçimde

$$\begin{aligned} d(z_{2n+1}, z_{2n+2}) &\leq \phi\big(d(Fx_{2n+2}, Gx_{2n+1}), d(Fx_{2n+2}, Sx_{2n+2}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\big) \\ &= \phi\big(d(z_{2n+1}, z_{2n}), d(z_{2n+1}, z_{2n+2}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\big) \\ &\leq \phi\big(d(z_{2n}, z_{2n+1}), d(z_{2n}, z_{2n+1}), d(z_{2n}, z_{2n+1})\big) < d(z_{2n}, z_{2n+1}) \end{aligned} \tag{3.73}$$

bulunur.

Genel olarak her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(z_n, z_{n+1}) \leq \phi\big(d(z_{n-1}, z_n), d(z_{n-1}, z_n), d(z_{n-1}, z_n)\big) < d(z_{n-1}, z_n) \qquad (3.74)$$

elde edilir.

Her $m \in \mathbb{N}$ için $c_m = d(z_m, z_{m+1})$ diyelim. O zaman $\{c_m\}$ kesin azalan alttan sınırlı bir dizi olup bir $c \geq 0$ sayısına yakınsar. Eğer $c > 0$ olsaydı o zaman

$$c \leq c_{m+1} = d(z_{m+1}, z_{m+2}) \leq \phi\big(d(z_m, z_{m+1}), d(z_m, z_{m+1}), d(z_m, z_{m+1})\big)$$

$$= \phi(c_m, c_m, c_m) \qquad (3.75)$$

olur ki $m \to \infty$ için limite geçildiğinde $c \leq c \leq \phi(c, c, c) < c$ elde edilir. Bu da bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $c = 0$ dır.

**2. Adım:** $\{z_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Bunun için herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m, n \geq n_0$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(z_m, z_n) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$'ın var olduğunu göstermek yetecektir.

Bir an için bunun tersi olduğu var sayılsın. O zaman en az bir $\varepsilon > 0$ vardır, öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $m_k \geq n_k \geq k$ olacak biçimde $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ sayıları vardır.

(a) $m_k$ çift ve $n_k$ tek
(b) $d\big(z_{m_k}, z_{n_k}\big) \geq \varepsilon$
(c) $m_k$ , ( b) yi sağlayan en küçük çift sayıdır.

( b) ve ( c) yi kullanıldığında;

$$\varepsilon \leq d\big(z_{n_k}, z_{m_k}\big)$$

$$\leq d\left(z_{n_k}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) + d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right) \qquad (3.76)$$

$$\leq \varepsilon + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) + d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right)$$

olup $k \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) \leq \varepsilon + 0 + 0$$

olur. Yani

$$\lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) = \varepsilon \qquad (3.77)$$

elde edilir.

Böylece

$$\varepsilon \leq d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right)$$

$$\leq d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-3}}\right) + d\left(z_{m_{k-3}}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right) \qquad (3.78)$$

$$\leq \varepsilon + d\left(z_{m_{k-3}}, z_{m_{k-2}}\right) + d\left(z_{m_{k-2}}, z_{m_{k-1}}\right)$$

olur. $k \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{k\to\infty} d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right) = \varepsilon \qquad (3.79)$$

elde edilir.

(3.68) , (3.77) ve (3.79) kullanıldığında;

$$d\left(z_{n_k}, z_{m_k}\right) = d\left(Sx_{n_k}, Tx_{m_k}\right)$$

$$\leq \phi\left(d\left(Fx_{n_k}, Gx_{m_k}\right), d\left(Fx_{n_k}, Sx_{n_k}\right), d\left(Gx_{n_k}, Tx_{n_k}\right)\right)$$

$$= \phi\left(d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right), d\left(z_{n_{k-1}}, z_{n_k}\right), d\left(z_{m_{k-1}}, z_{m_k}\right)\right) \qquad (3.80)$$

$$= \phi\left(d\left(z_{n_{k-1}}, z_{m_{k-1}}\right), c_{n_{k-1}}, c_{m_{k-1}}\right)$$

bulunur. Her iki taraftan $k \to \infty$ için limite geçildiğnde

$$\varepsilon \leq \phi(\varepsilon, 0,0) < \varepsilon$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\{z_n\}$ g.m.u. da bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır.Böylece $n \to \infty$ için

$$d(Fx_{2n}, z) \to 0\,,\ d(Gx_{2n+1}, z) \to 0\,,\ d(Sx_{2n}, z) \to 0\,,\ d(Tx_{2n+1}, z) \to 0 \qquad (3.81)$$

dir.

**3. Adım:** $z$' nin $S, T, F$ ve $G$ nin ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

$F$ nin sürekli olduğunu varsayılsın. O zaman $n \to \infty$ için

$$d(F^2x_{2n}, Fz) \to 0\,, \quad d(FSx_{2n}, Fz) \to 0 \qquad (3.82)$$

dır. Dörtgen eşitsizliği kullanıldığında,

$$d(SFx_{2n}, Fz) \leq d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + d(F^2x_{2n}, Fz) \qquad (3.83)$$

olup $S$ , $F$ bağdaşık ve $n \to \infty$ için $d(Sx_{2n}, Fx_{2n}) \to 0$ olduğundan

$$d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) \to 0 \qquad (3.84)$$

olur.

(3.82), (3.83) ve (3.84) kullanıldığında,

$$0 \leq d(SFx_{2n}, Fz) \leq d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + d(F^2x_{2n}, Fz)$$

olup buradan $n \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{n\to\infty} d(SFx_{2n}, Fz) \leq \lim_{n\to\infty} d(SFx_{2n}, FSx_{2n}) + \lim_{n\to\infty} d(FSx_{2n}, F^2x_{2n}) + \lim_{n\to\infty} d(F^2x_{2n}, Fz)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} d(FSx_{2n}, F^2x_{2n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} d(Fz_{2n}, Fz_{2n-1}) = 0$$

ve

$$d(SFx_{2n}, Fz) \to 0 \tag{3.85}$$

bulunur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(SFx_{2n}, Tx_{2n+1}) \leq \phi\big(d(F^2x_{2n}, Gx_{2n+1}), d(F^2x_{2n}, SFx_{2n}), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\big) \tag{3.86}$$

olduğundan $n \to \infty$ için (3.81) , (3.82) , (3.83) , (3.84) ve (3.85) kullanıldığında

$$d(Fz, z) \leq \phi\big(d(Fz, z), d(Fz, Fz), d(z, z)\big)$$

$$= \phi(d(Fz, z), 0, 0)$$

$$< d(Fz, z) \tag{3.87}$$

elde edilir ki bu da $d(Fz, z) = 0$ olması dışında bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $Fz = z$ olur.

Benzer şekilde;

$$d(Sz, Tx_{2n+1}) \leq \phi\big(d(Fz, Gx_{2n+1}), d(Fz, Sz), d(Gx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\big) \tag{3.88}$$

olup $n \to \infty$ için limite geçildiğinde;

$$\lim_{n\to\infty} d(Sz, Tx_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(Sz, z_{2n+1})$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \big[\phi\big(d(Fz, z_{2n}), d(Fz, Sz), d(z_{2n}, z_{2n+1})\big)\big]$$

$$d(Sz, z) \leq \phi\big(\mathrm{d}(z, z), d(z, Sz), d(z, z)\big) = \phi(0, d(z, Sz), 0) < d(z, Sz) \tag{3.89}$$

Bulunur ki bu da $d(z,Sz)=0$ olması dışında bir çelişki oluşturur. Bu nedenle $Sz=z$ dir.

$S(X)\subset G(X)$ olduğundan $Gz'=z=Sz$ olacak biçimde bir $z'\in X$ vardır. O zaman $TGz'=Tz$ olup (3.68) kullanıldığında

$$\begin{aligned} d(z,Tz') &= d(Sz,Tz') \\ &\leq \phi\big(d(Fz,Gz'),d(Fz,Sz),d(Gz',Tz')\big) \\ &= \phi\big(d(z,z),d(z,z),d(z,Tz')\big) \\ &< d(z,Tz') \end{aligned} \tag{3.90}$$

olur ki $d(z,Tz')=0$ olması dışında bir çelişki oluşturur. Bu durumda $Tz'=z$ dir. Buradan $d(Tz',Gz')=d(z,z)=0$ dır.

$T$ ve $G$ bağdaşık ve $d(Tz',Gz')=0$ olduğundan;

$$d(Tz,Gz)=d(TGz',GTz')=0 \tag{3.91}$$

bulunur ki bu da $Tz=Gz$ olmasını gerektirir.

(3.68) kullanıldığında;

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &= d(Sz,Tz) \\ &\leq \phi\big((Fz,Gz),d(Fz,Sz),d(Gz,Tz)\big) \\ &= \phi\big(d(z,Tz),d(z,z),d(Tz,Tz)\big) < d(z,Tz) \end{aligned} \tag{3.92}$$

olur ki bu da $d(z,Tz)=0$ olması dışında bir çelişki oluşturur. Bu durumda $Tz=z$ dir. Böylece

$$Sz=Tz=z=Fz=Gz \tag{3.93}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $z; S, T, F$ ve $G$'nin ortak bir sabit noktasıdır.

**4.Adım:** Son olarak $S, T, F$ ve $G$'nin ortak sabit noktasının tek olduğunu gösterelim.

$y$; $S, T, F$ ve $G$'nin $z$' den farklı başka bir ortak sabit noktası olsun. O zaman (3.68) den

$$\begin{aligned} d(y,z) &= d(Sy,Tz) \\ &\leq \phi\big(d(Fy,Gz), d(Fy,Sy), d(Gz,Tz)\big) \\ &= \phi\big(d(y,z), d(y,y), d(z,z)\big) \\ &< d(y,z) \end{aligned} \tag{3.94}$$

Bulunur ki bu da $d(y,z) = 0$ olmazı dışında bir çelişki oluşturur. O halde $y = z$ dir.

Sonuç olarak $z$; $X$' te $S, T, F$ ve $G$'nin tek bir ortak sabit noktasıdır.

$G = F = I$ birim dönüşüm ve $S = T$ alınırsa aşağıdaki sabit nokta teoremi kolayca elde edilir.

**3.2.8 Teorem :** $(X, d)$ Hausdorff ve tam g.m.u. ve $T: X \to X$ tek değerli bir fonksiyon olsun. $\phi: \mathbb{R}^{+^3} \to \mathbb{R}^+$ bir $\mathcal{S}$ −fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \phi\big(d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\big) \tag{3.95}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $T$' nin $X$' de tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.
(Chen, Chi-Ming, 2012)

**3.2.9 Örnek:**

$t > 0$ sabit olmak üzere $X = \{t, 2t, 3t, 4t, 5t\}$ kümesi verilsin. Yine $\gamma > 0$ bir sabit olmak üzere olmak üzere $d: X \times X \to [0, \infty)$ genelleştirilmiş metriği aşağıdaki biçimde tanımlansın.

(i) Her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$

(ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(t, 2t) = 3\gamma$

(iv) $d(t, 3t) = d(2t, 3t) = \gamma$

(v) $d(t, 4t) = d(2t, 4t) = d(3t, 4t) = 2\gamma$

(vi) $d(t, 5t) = d(3t, 5t) = \gamma$ ve $d(2t, 5t) = d(4t, 5t) = 2\gamma$

$\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = (4/5)\, t$ biçiminde tanımlanan $\varphi$ bir $\omega$ −fonksiyonudur.

$S, T, F, G : X \to X$ dönüşümleri

$$S(x) = \begin{cases} 3t\,, & x \neq 4t \\ 5t\,, & x = 4t \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 3t\,, & x \neq 4t \\ t\,, & x = 4t \end{cases}$$

$G(x) = I(x)$ birim dönüşüm

$$F(x) = \begin{cases} 3t\,, & x = 3t \\ t\,, & x = t, 2t, 5t \\ 2t\,, & x = 4t \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $S, T, F, G$ $\varphi(t) = (4/5)\, t$ ile birlikte (3.41) eşitsizliğini sağlarlar.

Gerçekten,

- $x = t\,,\ y = 2t$

$$d(St, T2t) \leq \varphi(\max\{d(Ft, G2t), d(Ft, St), d(G2t, T2t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(t, 2t), d(t, 3t), d(2t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{3\gamma, \gamma, \gamma\})$$

$$0 \leq \varphi(3\gamma) = \frac{4}{5}.3\gamma$$

- $x = t\ ,\ y = 3t$

$$d(St, T3t) \leq \varphi(\max\{d(Ft, G3t), d(Ft, St), d(G3t, T3t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(t, 3t), d(t, 3t), d(3t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{\gamma, \gamma, 0\})$$

$$0 \leq \varphi(\gamma) = \frac{4}{5}\gamma$$

- $x = t\ ,\ y = 4t$

$$d(St, T4t) \leq \varphi(\max\{d(Ft, G4t), d(Ft, St), d(G4t, T4t)\})$$

$$d(3t, t) \leq \varphi(\max\{d(t, 4t), d(t, 3t), d(2t, t)\})$$

$$\gamma \leq \varphi(\max\{2\gamma, \gamma, 3\gamma\})$$

$$\gamma \leq \varphi(3\gamma) = \frac{4}{5}.3\gamma$$

- $x = t\ ,\ y = 5t$

$$d(St, T5t) \leq \varphi(\max\{d(Ft, G5t), d(Ft, S5t), d(G5t, T5t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(t, 5t), d(t, 3t), d(5t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{\gamma, \gamma, \gamma\})$$

$$0 \leq \varphi(\gamma) = \frac{4}{5}\gamma$$

- $x = 2t\ ,\ y = 3t$

$$d(S2t, T3t) \leq \varphi(\max\{d(F2t, G3t), d(F2t, S2t), d(G3t, T3t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(t, 3t), d(t, 3t), d(3t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{\gamma, \gamma, 0\})$$

$$0 \leq \varphi(\gamma) = \frac{4}{5}\gamma$$

- $x = 2t\ ,\ y = 4t$

$$d(S2t, T4t) \leq \varphi(\max\{d(F2t, G4t), d(F2t, S2t), d(G4t, T4t)\})$$

$$d(3t, t) \leq \varphi(\max\{d(t, 4t), d(t, 3t), d(4t, t)\})$$

$$\gamma \leq \varphi(\max\{2\gamma, \gamma, 2\gamma\})$$

$$\gamma \leq \varphi(2\gamma) = \frac{4}{5}.2\gamma$$

- $x = 2t\ ,\ y = 5t$

$$d(S2t, T5t) \leq \varphi(\max\{d(F2t, G5t), d(F2t, S2t), d(G5t, T5t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(t, 5t), d(t, 3t), d(5t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{\gamma, \gamma, \gamma\})$$

$$0 \leq \varphi(\gamma) = \frac{4}{5}\gamma$$

- $x = 3t\ ,\ y = 4t$

$$d(S3t, T4t) \leq \varphi(\max\{d(F3t, G4t), d(F3t, S3t), d(G4t, T4t)\})$$

$$d(3t, t) \leq \varphi(\max\{d(3t, 4t), d(3t, 3t), d(4t, t)\})$$

$$\gamma \leq \varphi(\max\{2\gamma, 0, 2\gamma\})$$

$$\gamma \leq \varphi(2\gamma) = \frac{4}{5}.2\gamma$$

- $x = 3t\ ,\ y = 5t$

$$d(S3t, T5t) \leq \varphi(\max\{d(F3t, G5t), d(F3t, S3t), d(G5t, T5t)\})$$

$$d(3t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(3t, 5t), d(3t, 3t), d(5t, 3t)\})$$

$$0 \leq \varphi(\max\{\gamma, 0, \gamma\})$$

$$0 \leq \varphi(\gamma) = \frac{4}{5}\gamma$$

- $x = 4t\ ,\ y = 5t$

$$d(S4t, T5t) \leq \varphi(\max\{d(F4t, G5t), d(F4t, S4t), d(G5t, T5t)\})$$

$$d(5t, 3t) \leq \varphi(\max\{d(2t, 5t), d(2t, 5t), d(5t, 3t)\})$$

$$\gamma \leq \varphi(\max\{2\gamma, 2\gamma, \gamma\})$$

$$\gamma \leq \varphi(2\gamma) = \frac{4}{5}.2\gamma$$

olup böylece (3.41) eşitsizlikleri sağlanır.

Sonuç olarak Teorem 3.2.3'ün tüm koşulları sağlanır ve $3t\ , S, T, F$ ve $G$ ' nin tek bir ortak sabit noktasıdır.

Ayrıca $\phi: \mathbb{R}^{+^3} \to \mathbb{R}^+,\quad \phi(t_1, t_2, t_3) = (8/9).\max\{t_1, t_2, t_3\}$ biçiminde tanımlanan $\phi$ bir $\mathcal{S}-$ fonksiyonu olup $S, T, F, G,\quad \phi(t_1, t_2, t_3) = (8/9).\max\{t_1, t_2, t_3\}$ ile birlikte Teorem 3.2.7' nin tüm özelliklerini sağlarlar.

(Chen, Chi-Ming, 2012)

# BÖLÜM 4

# TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Metrik uzaylardan daha genel bir yapıya sahip olan Branciari tipindeki genelleştirilmiş metrik uzaylarda birçok sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bu çalışmada bu teoremlerin bazıları incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda ise genelleştirilmiş metrik uzayın yapısı da göz önüne alınarak uzaya has daha genel sabit nokta teoremleri verilebilir.

# KAYNAKLAR


Aydi H., Karapınar E., Lakzain H. (2012). Fixed point results on a class of generalized metric spaces, *Mathematical Sciences, 6*(46), 1-6.

Branciari A. (2000). A fixed point theorem of Banach – Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces, *Publishing Mathematics Debrecen, 57,* 31-37.

Brouwer, L. E. J. (1912). Uber Abbidungen Von Manniqfaltigkeiten, *Mathematische Annalen, 71*, 77-115.

Chi- Ming C. (2012). Common fixed point theorems in complete generalized metric spaces, *Journal of Applied Mathematics,* 1-14.

Choudhury, Binayak, S. (2009). Unique fixed point theorem for weakly C-contractive mappings. *Kathmandu Univ J. Science Engineering and Technology*, *5*(1), 6-12.

Fora A., Bellour A., Al-Bsoul A. (2009). Some results in fixed point theory concerning generalized metric spaces, *Mathematichki Vesnilc*, *61*(3), 203-208.

Fora A., Bellour A., Al-Bsoul A. (2010). Some properties of generalized metric spaces and fixed point theory, *Matematychni Studii.*, *33*(1), 85-91.

Jungck G. (1986). Compatible mappings and common fixed points, *İnternational Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *9*(4), 771-779.

Kannan R. (1968). Some results on fixed points, *Bulletin Calcutta Mathematical Society*, *60*, 71-76

Kikina J., Kikina K. (2012). Fixed point theorems on generalized metrics spaces for mappings in a class of almost φ-Contractions., *Demonstratıo Mathematıca*, *48*(3), 440-451.

Kirk William A., Shahzad N. (2013). Generalized metrics and Caristi's theorem, *Fixed Point Theory and Applications,* (129),1-9.

Kirk William A., Shahzad N. (2014). Generalized metrics and Caristi's theorem, *Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Switzerland. Springer İnternational Publishing.

Mihet, D. (2009), On Kannan fixed point principle in generalized metric spaces, *The Journal of Nonlinear Science and Applications, 2*(2), 92-96.

# ÖZ GEÇMİŞ

**Ad Soyad** **:** Güzin Taşkın

**Doğum Yeri ve Tarihi :**Kırklareli 30.04.1989

**E-Posta** **:** gzntskn@gmail.com

**ÖĞRENİM DURUMU:**

- **Lisans** **:** 2013, Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü