T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

b-METRİK UZAYLARDA BANACH DARALMA İLKESİ VE ONUN BAZI GENELLEMELERİ

HİLAL GIDIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İlker ŞAHİN

EDİRNE-2019

HİLAL GIDIK' ın hazırladığı "*b*-METRİK UZAYLARDA BANACH DARALMA İLKESİ VE ONUN BAZI GENELLEMELERİ" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvan, Ad, Soyad): İmza

Doç. Dr. Mustafa TELCİ

Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN

Dr. Öğr. Üyesi İlker ŞAHİN

Tez Savunma Tarihi: 25/07/2019

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Dr. Öğr. Üyesi İlker Şahin
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

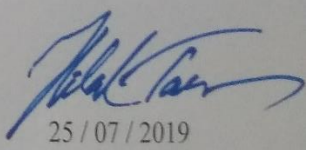
Prof. Dr. Murat Yurtcan
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.



25 / 07 / 2019

Hilal GIDIK

Yüksek Lisans Tezi

b-Metrik Uzaylarda Banach Daralma İlkesi Ve Onun Bazı Genellemeleri

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle metrik uzaydan daha genel olan b-metrik uzay yapısı incelenmiştir. Sonra metrik uzaylarda verilen bazı sabit nokta teoremleri, b-metrik uzaylar için verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

I. Bölümde sabit nokta teorisinin önemi ve tarihsel gelişimi kısaca özetlenmiştir.

II. Bölümde b-metrik uzayların yapısı ve temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca metrik yapısı ile b-metrik yapısı arasındaki ilişkiler ve farklar verilmiştir.

III. Bölümde b-metrik uzaylarda tanımlı olan ve değişik koşulları sağlayan bir dönüşüm için sabit nokta teoremleri verilmiştir. Yine karşılaştırma fonksiyonu ile tanımlanan daraltanlık koşulunu sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

IV. Bölümde b-metrik uzaylarda iki dönüşüm, zayıf bağdaşık dönüşüm çiftleri ve genişleme dönüşümleri için ortak sabit nokta teoremleri verilmiştir.

V. Bölümde ise tezle ilgili genel bilgiler verilerek hedefler ortaya koyulmuştur.

Yıl : 2019

Sayfa Sayısı : 75

Anahtar Kelimeler : b-Metrik Uzaylar, Sabit Nokta, Daraltan Dönüşümler.

Master's Thesis

The Principle of Banach Contraction in b-Metric Spaces and Some Generalizations of Its

T.U. Institute of Science

Mathematics of Department

ABSTRACT

In this work, firstly, the structure of b-metric space which is more general than metric space is investigated. Later, the results of the some fixed point theorems in metric space are given for b-metric space.

The thesis contains of five sections.

In section I, the importance and historical development of the fixed point theory are summarized.

In section II, the structures and basic properties of b-metric spaces are investigated. Moreover the relationships and differences between metric and b-metric are given.

In section III, the fixed point theorems are given for a map which is defined in b-metric spaces and satisfies different conditions. The fixed point theorems are investigated maps which is defined by comparasion function and satisfies contraction condition.

In section IV, the fixed point theorems are given for two maps, weak compatible maps pairs and maps which in expansion type in b-metric spaces.

In section V, the aims are exhibited, by giving knowledges about the thesis.

Year : 2019

Number of Pages : 75

Keywords : b-Metric Spaces, The Fixed Point, Contraction Maps.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonlandırıldığı ana kadar karşılaştığım her türlü sorunun aşılmasında yardımını, hoşgörüsünü, desteğini ve bilgisini eksik etmeyen değerli hocam ve tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi İlker ŞAHİN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yaşamım boyunca her zaman varlıklarını yanımda hissettiğim, varlıkları bana her zaman güç veren babama, anneme, kardeşime ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen eşime sonsuz minnet ve teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

BÖLÜM 1 / GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 / *b*-METRİK UZAYLAR 2

2.1. *b*- Metrik Uzaylar 2

2.2. *b*- Metrik Uzayların Tamlığı 5

2.3. *b*- Metrik Uzaylarda Süreklilik 9

BÖLÜM 3 / *b*-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 11

3.1. Fonksiyonların Sabit Noktaları 11

3.2. Daraltan Dönüşümler İçin Sabit Noktalar 13

3.3. Yörüngesel Tam *b*-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 32

BÖLÜM 4 / *b*-METRİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLERİN ORTAK SABİT NOKTALARI 42

4.1. Daraltan Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri 42

4.2. *b*-(E.A) Özelliğini Sağlayan Dönüşüm Çiftleri İçin Ortak Sabit Noktalar 48

4.3. Genişleme Dönüşümleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri 56

BÖLÜM 5 / SONUÇLAR VE TARTIŞMA 64

KAYNAKLAR 65

ÖZGEÇMİŞ 69

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, Matematiğin en hızlı gelişen dallarından biridir. Fonksiyonların sabit noktalarının varlığı, tekliği ve nasıl bulunacağı problemi birçok Matematikçi' nin çalışmasına konu olmuştur. Bu çalışmalara esin kaynağı olan ve sabit nokta teorisinde kullanışlı ve uygulamaya dönük araştırmaların temeli olan teorem ise 1922' de S. Banach' ın literatürde " Banach Daralma İlkesi " olarak bilinen teoremidir. Banach teoreminde sadece sabit noktanın varlığı ve tekliği değil, nasıl bulunacağı konusunda da bir fikir vermiştir. Günümüze kadar verilen sabit nokta teoremlerinde gerek fonksiyonların sağladığı özellikler gerekse uzay yapısı değiştirilerek önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Klasik metrik tanımındaki üçgen eşitsizliği aksiyomu zayıflatılarak tanımlanmış olan b-metrik kavramı ilk olarak Bourbaki, Bakhtin ve Czerwik tarafından verilmiştir. Metrik uzaylardan daha genel uzaylar olan b-metrik uzayların yapısından dolayı, metrik uzaylardaki birçok sabit nokta teoremi değişik koşullar altında b-metrik uzaylara genişletilebilmektedir. Czerwik de Banach sabit nokta teoremini b-metrik uzaylara uygun koşullar altında genişletmiştir.

Çalışmada temel olacak uzay yapısı b-metrik uzaylar olacağından, ikinci bölümde kullanılacağı kadarıyla b-metrik uzay yapısı ve özellikleri verilecektir. Daha sonraki bölümlerde ise literatürde b-metrik uzaylarda verilmiş olan bazı sabit nokta teoremleri incelenecektir.

BÖLÜM 2

b-METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, metrik olma koşullarından üçgen eşitsizliği koşulu zayıflatılarak elde edilen b-metrik kavramı ve bazı özellikleri incelenecektir.

2.1. b-Metrik Uzaylar

2.1.1. Tanım: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $s \geq 1$ olacak biçimde bir gerçel sayı olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ olmak üzere,

$\boldsymbol{i})$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\boldsymbol{ii})$ $d(x, y) = d(y, x)$

$\boldsymbol{iii})$ $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X' de bir "*b-metrik"* ve (X, d) uzayına da bir "*b-metrik uzay"* denir (Czerwik, 1993, s. 5).

Tezin bundan sonraki kısmında b-metrik uzay kavramı kısaca b-m.u. biçiminde gösterilecektir.

2.1.2. Not: Eğer $s = 1$ alınırsa d fonksiyonu bir metrik olacaktır. Bu durumda, her *metrik* bir *b-metriktir*. Ancak bunun tersi doğru değildir.

2.1.3. Örnek:

$X = \{0,1,2\}$ olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

$d(0,0) = d(1,1) = d(2,2) = 0$

$d(1,2) = d(2,1) = d(0,1) = d(1,0) = 1$

$d(2,0) = d(0,2) = m \geq 2$

biçiminde tanımlansın. d fonksiyonu $s = \frac{m}{2}$ için X üzerinde bir b-metriktir. Ancak $m > 2$ alınırsa üçgen eşitsizliği koşulu sağlanmadığı için d bir metrik olmaz. Çünkü,

$$d(0,2) = m \text{ ve } d(0,1) + d(1,2) = 1 + 1 = 2$$

olup,

$$d(0,2) = m > 2 = d(0,1) + d(1,2)$$

olur (Aydi, Bota, Karapınar ve Mitrovic, 2012, s. 2).

2.1.4. Örnek: (X, d) metrik uzay olmak üzere, $\sigma_d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ olmak üzere $p > 1$ için,

$$\sigma_d(x, y) = [d(x, y)]^p$$

biçiminde tanımlansın. $s = 2^{p-1}$ alınırsa σ_d bir b-metrik olur. Gerçekten, $i)$ ve $ii)$ koşullarının sağlandığı kolayca görülür. Sadece $iii)$ koşulunu göstermek yeterli olacaktır. $1 < p < \infty$ durumunda, her $a, c \in \mathbb{R}_+$ elemanları için,

$$\left(\frac{a + c}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + c^p)$$

olduğundan,

$$(a + c)^p \leq 2^{p-1}(a^p + c^p)$$

olur. Böylece her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned}\sigma_d(x,y) &= [d(x,y)]^p \\ &\leq [d(x,z)+d(z,y)]^p \\ &\leq 2^{p-1}[(d(x,z))^p + (d(z,y))^p] \\ &= 2^{p-1}[\sigma_d(x,z)+\sigma_d(z,y)]\end{aligned}$$

olup iii) koşulu sağlanmış olur (Sintunavarat, 2015, s. 399).

2.1.5. Örnek: $p \in (0,1)$ ve $\ell^p(\mathbb{R}) = \{\, x = \{x_n\} \subset \mathbb{R} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \,\}$ olsun. Bu durumda $x = (x_n),\ y = (y_n) \in \ell^p(\mathbb{R})$ için $d:\ \ell^p(\mathbb{R}) \times \ell^p(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$,

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

fonksiyonu $s = 2^{1/p}$ alınırsa bir *b*-metrik olur (Bota, Molnár ve Varga, 2011, s. 22).

2.1.6. Tanım: (X, d) herhangi bir *b*-m.u. olmak üzere,

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye $x \in X$ merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı "*açık yuvar"* denir.

Metriklerde olduğu gibi *b*-metriklerle de açık yuvarlar yardımıyla X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlanabilir.

(X, d) *b*-metrik uzayında $\{B_d(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ ile X üzerinde üretilen topoloji τ_d ile gösterilir (Karapınar, 2018).

2.1.7. Tanım: Bir b-metrik uzayda,

i) Her elemanı için o eleman merkezli en az bir açık yuvarı kapsayan kümeye *açık küme* denir.

ii) Tümleyeni açık olan kümeye *kapalı küme* denir.

2.1.8. Ön Teorem: (X, d) bir b-m.u. 'ında bir $A \subset X$ alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A' da alınan her yakınsak dizinin limitinin A' da olmasıdır (Hussain ve Shah, 2011, s. 1680)

2.2. b-Metrik Uzayların Tamlığı

2.2.1. Tanım: (X, d) herhangi bir b-m.u. , $\{x_n\} \subseteq X$ biçiminde tanımlanan bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\forall\, n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına *"yakınsaktır"* denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x \ (n \to \infty)$$

ile gösterilir (Boriceanu, 2009, s. 4-5).

2.2.2. Önerme: (X, d) herhangi bir b-m.u. , $\{x_n\} \subseteq X$ biçiminde tanımlanan bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin x elemanına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ olmasıdır (Boriceanu, 2009, s. 5).

2.2.3. Örnek: $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olsun, $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$d(m,n) = \begin{cases} 0 & ; \text{m} = \text{n ise,} \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| & ; (\text{m} \neq \text{n}) \text{ m, n çift ise,} \\ 5 & ; (\text{m} \neq \text{n}) \text{ m, n tek ise,} \\ 2 & ; \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. i), ii) koşullarının sağlandığı kolayca görülür. iii) koşulu için $m, n, p \in X$ ve $s = \frac{5}{2}$ olmak üzere,

$$d(m,p) \leq \frac{5}{2}[d(m,n) + d(n,p)]$$

olacağından (X, d) bir b-metrik uzaydır. $\{x_n\} = \{2n\}$ dizisi için,

$$d(x_n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olup $\{x_n\} \to \infty \ (n \to \infty)$ olur. Ancak, $d(x_n, 1) = 2$ ve $d(\infty, 1) = 5$ olduğundan $d(x_n, 1)$, $d(\infty, 1)$'e yakınsamaz. Yani, d fonksiyonu sürekli değildir (Huang, Deng ve Radenović, 2018, s. 4).

2.2.4. Not: Metrikler sürekli olmasına rağmen b-metrikler sürekli olmayabilir.

2.2.5. Önerme: (X, d) bir b-m.u. olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisi X kümesinde yakınsak bir dizi oluyorsa $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir (Boriceanu, Bota ve Petruşel, 2010, s. 369).

2.2.6. Önerme: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $\{x_n\} \subseteq X$ yakınsak bir dizi ise $\{x_n\}$ dizisinin her alt dizisi de aynı noktaya yakınsak olur.

Kanıt: $x_n \to x \ (n \to \infty)$ olsun. Yani her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \forall\, n \geq n_0$ olmak üzere $d(x_n, x) < \varepsilon$ olur. Herhangi bir $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ bir alt dizisi alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $n_k \geq n$ şartını sağlayan bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece,

$$n \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq n \geq n_0 \ \text{ için } d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

olur. O halde $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$' dır.

2.2.7. Tanım: (X, d) herhangi bir b-m.u. ve $\{x_n\} \subseteq X$ biçiminde tanımlanan dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}$'e X' de "*Cauchy dizisidir*" denir (Boriceanu, 2009, s. 5).

2.2.8. Önerme: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $\{x_n\} \subseteq X$ biçiminde tanımlanan bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ olmasıdır (Boriceanu, 2009, s. 5).

2.2.9. Önerme: (X, d) b-m.u.' ında her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (Boriceanu vd. , 2009, s. 369).

2.2.10. Önerme: (X, d) bir b-m.u. , $\{x_n\} \subseteq X$ Cauchy dizisi ve $x \in X$ olsun. $\{x_n\}$' in x noktasına yakınsayan bir alt dizisi varsa $\{x_n\}$ dizisi de aynı x noktasına yakınsar.

Kanıt: $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi, $\{x_{n_k}\}$ da onun yakınsak bir alt dizisi olsun. $\{x_{n_k}\}$ bir alt dizi olduğundan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ olmak üzere $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$ biçimindedir. $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x$ olsun. d'nin *iii)* özelliğinden,

$$0 \leq d(x_n, x) \leq s\left(d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)\right) \qquad (2.1)$$

bulunur. n ve k yeteri kadar büyük alındığında her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\ni$ her $n, n_k \geq N$ için $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2s}$ ve $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2s}$ olur. (2.1) eşitsizliğinden $d(x_n, x) < s\left(\frac{\varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{2s}\right) = \varepsilon$' dir. Yani $x_n \to x$ $(n \to \infty)$' dir.

2.2.11. Önerme: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere, X kümesindeki her bir Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsak ise (X, d) uzayına "*tam b-m.u.*" denir (Boriceanu, 2009, s. 5).

2.2.12. Önerme: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sırasıyla $x, y \in X$ noktalarına yakınsak olsun. Bu durumda,

$\boldsymbol{i})$ $\frac{1}{s^2} d(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, y_n) \leq s^2 d(x,y)$ olur.

$\boldsymbol{ii})$ Eğer $x = y$ ise, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ olur.

$\boldsymbol{iii})$ Ayrıca her $z \in X$ için,

$$\frac{1}{s} d(x,z) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, z) \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, z) \leq s d(x,z)$$

olur (Aghajani, Abbas ve Roshan, 2014, s. 947).

Kanıt: d bir b-metrik olduğundan,

$$d(x,y) \leq s\left(d(x,x_n) + d(x_n,y)\right)$$

$$= s\, d(x,x_n) + s\, d(x_n,y)$$

$$\leq s\, d(x,x_n) + s\left[s\, d(x,x_n) + s\left[s\left(d(x_n,y_n) + d(x_n,x_n)\right)\right]\right.$$

$$= s\, d(x,x_n) + s^2 d(x_n,y_n) + s^2\, d(y_n,y) \qquad (2.2)$$

olur. Benzer olarak,

$$d(x_n,y_n) \leq s\, d(x_n,x) + s^2\, d(x,y) + s^2\, d(y,y_n) \qquad (2.3)$$

bulunur. (2.2) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için alt limit ve (2.3) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için üst limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y) = 0$$

olacağından,

$$\frac{1}{s^2} d(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, y) \leq \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, y) \leq s d(x,y)$$

olur. $ii)$ ve $iii)$ de benzer biçimde görülür.

2.2.13. Ön Teorem: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ biçiminde tanımlı iki dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = t \in X$ ve $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 0$ oluyorsa,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = t$$

olur (Roshan, Shobkolaei, Sedghi ve Abbas, 2014, s. 615).

Kanıt: b-metrik uzaylardaki üçgen eşitsizliğinden,

$$d(y_n, t) \leq s\big(d(y_n, x_n) + d(x_n, t)\big)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için üst limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \sup d(y_n, t) \leq s\left(\lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \sup d(x_n, t)\right) = 0$$

olacağından, $\lim_{n\to\infty}(y_n, t) = 0$ olur.

2.3. *b*-Metrik Uzaylarda Süreklilik

2.3.1. Tanım: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki b-m.u., $T : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için,

$$d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2\big(T(x), T(x_o)\big) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu "x_0*'da süreklidir"* denir.

T fonksiyonu X kümesindeki her noktada *sürekli* ise T fonksiyonuna *süreklidir* denir.

2.3.2. Teorem: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki b-m.u. olmak üzere $T : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. T'nin $x_0 \in X$' de sürekli olması için gerek ve yeter koşul, X kümesinde x_0'a yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için Y kümesinde $\{T(x_n)\}$ dizisinin $T(x_0)$' a yakınsamasıdır (Boriceanu, 2009).

2.3.3. Örnek: $X = \{1,2,3,\cdots,100\}$ olsun ve $d : X \times X \to [0,+\infty)$ dönüşümü,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \text{x} = \text{y ise,} \\ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & ; \text{x ve y çift x} \neq \text{y ise,} \\ 5 & ; \text{x ve y tek x} \neq \text{y ise,} \\ 2 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $T : X \to X$ olmak üzere,

$$Tx = \begin{cases} 2 & ; x\ tek\ ise, \\ 4 & ; x\ çift\ ise, \end{cases}$$

fonksiyonu süreklidir. Çünkü, X' de $x \in X$ için $x_n \to x\ (n \to \infty)$ olacak biçimde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi alınsın. Bu durumda $d(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$ olması için $\{x_n\}$ dizisinin tüm terimleri x'e eşit yada belirli bir terimden sonraki terimleri x' e eşit olmalıdır.

Böylece $Tx_n = Tx$ olacağından $Tx_n \to Tx\ (n \to \infty)$ olur (Shatanawi, 2016, s. 9-11).

BÖLÜM 3

b-METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Tezin bu bölümünde, metrik uzaylardan daha genel olan b-metrik uzaylarda, Banach sabit nokta teoremlerinin bazı genellemeleri verilecektir.

Bu nedenle ilk olarak fonksiyonların sabit noktaları ve konuyla ilgili bir takım ön bilgiler verilecektir.

3.1. Fonksiyonların Sabit Noktaları

3.1.1. Tanım: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere $T : X \to X$ fonksiyonu verilsin. $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T fonksiyonunun bir "*sabit noktası"* denir.

Diğer bir bakış açısıyla, T fonksiyonunun bir sabit noktası,

$$T(x) = x \quad (x \in X)$$

denkleminin bir çözümüdür.

Çalışırken kolaylık açısından $T(x)$ yerine Tx gösterimi kullanılacaktır.

3.1.2. Örnekler:

1. $T:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + 2$ fonksiyonunun bir sabit noktası yoktur.

2. $T:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2 + 5x + 4$ fonksiyonunun tek sabit noktası $x = -2$' dir.

3. $T:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun sabit noktaları $x = 0$ ve $x = -2$' dir.

Analiz derslerinden " Her $T:[a,b] \to [a,b]$ sürekli fonksiyonunun en azından bir sabit noktası vardır." gerçeği bilinmektedir.

Brouwer bunun $\mathbb{R}^n$' e genellemesini 1912 yılında,

"$\mathbb{R}^n$' in herhangi bir kapalı birim yuvarından aynı kapalı birim yuvarına tanımlı olacak biçimde bütün sürekli dönüşümlerin en az bir sabit noktası var olur."

biçiminde vermiştir.

Yine Schauder 1930 yılında,

" M herhangi bir Banach uzayında kapalı ve konveks bir alt küme olmak üzere her $T: M \to M$ sürekli fonksiyonu için $\overline{T(M)}$ kompaktsa T' nin bir sabit noktası vardır."

teoremini vermiştir.

Ancak Brouwer ve Schauder'ye ait bu teoremler, sabit noktanın nasıl bulunacağından ziyade sabit noktanın varlığı ile ilgili fikir vermektedir.

3.1.3. Tanım: (X,d) herhangi bir metrik uzay ve $T: X \to X$ tanımlanan fonksiyon olmak her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$$

olacak biçimde bir $0 \leq k < 1$ var ise T fonksiyonuna "*daraltan dönüşüm*" denir (Kır ve Kızıltunç, 2013, s. 13)

3.1.4. Tanım: $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olmak üzere $n = 1,2,3, \ldots$ için,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

biçiminde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine "x_0 *başlangıç değerli Picard iterasyon dizisi"* denir (Yıldırım ve Ansari, 2018, s.103).

Literatürde *Banach sabit nokta teoremi* (veya *Banach daralma ilkesi*) olarak bilinen teorem Banach tarafından 1922 yılında aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir:

"(X, d) uzayı herhangi bir *tam metrik* uzay olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan *daraltan bir dönüşüm* ise T' nin *tek bir sabit noktası* vardır ve her $x \in X$ noktası için $\{T^n x\}$ *Picard iterasyon dizisi de bu sabit noktaya yakınsaktır*."

Banach tarafından ifade edilen bu teorem, Brouwer ve Schauder' in teoremlerinin aksine, dönüşümlerin sabit noktalarının nasıl bulunacağı ile ilgili de bir fikir vermektedir.

Banach sabit nokta teoremi esas alınarak, gerek çalışılan uzaylar gerekse fonksiyonlar üzerine değişik koşullar ve özellikler yüklenerek sabit nokta teorisinde yeni önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3.2. Daraltan Dönüşümler İçin Sabit Noktalar

S. Czerwik, Banach' ın sabit nokta teoremini, b-m.u. 'larda aşağıdaki gibi genişletmiştir.

3.2.1. Teorem: (X, d) uzayı herhangi bir tam b-metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir dönüşüm, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ koşulunu sağlayan artan bir fonksiyon ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi\big(d(x, y)\big) \tag{3.1}$$

şartı sağlansın. O halde, T dönüşümünün X kümesinde tek bir u sabit noktası vardır ve bu durumda her $x \in X$ elemanı için,

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n x, u) = 0$$

sağlanır (Czerwik, 1993, s. 5-6).

Kanıt: Herhangi bir $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ alınsın. $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ olduğundan $\varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2s}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $k \in \mathbb{N}$ için $F = T^n$ ve $x_k = F^k(x)$ olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ ve $\alpha = \varphi^n$ için (3.1) eşitsizliğinden,

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq \varphi^n\big(d(x, y)\big) = \alpha\big(d(x, y)\big) \tag{3.2}$$

olur. $k \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{k+1}, x_k) = d\left(F^k\big(F(x)\big), F^k(x)\right) \leq \varphi^{kn}\big(d(F(x), x)\big) = \alpha^k\big(d(F(x), x)\big)$$

olup, $k \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{k\to\infty} d(x_{k+1}, x_k) = 0$ olur.

Böylece,

$$d(x_{k+1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2s}$$

olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman her $z \in K(x_k, \varepsilon) = \{y \in X : d(x_k, y) \leq \varepsilon\}$ için (3.2) eşitsizliğinden,

$$d\big(F(z), F(x_k)\big) \leq \alpha\big(d(x_k, z)\big) \leq \alpha(\varepsilon) = \varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2s}$$

ve

$$d(F(x_k), x_k) = d(x_{k+1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2s}$$

olup buradan,

$$d\big(F(z),F(x_k)\big) \le s\left(d\big(F(z),F(x_k)\big)+d(F(x_k),x_k)\right) < s\left(\frac{\varepsilon}{2s}+\frac{\varepsilon}{2s}\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Yani, $F(z) \in K(x_k,\varepsilon)$ olur. Bu ise $F : K(x_k,\varepsilon) \to K(x_k,\varepsilon)$ olmasını verir. Buradan, her $m,s \ge k$ için $x_m, x_s \in K(x_k,\varepsilon)$ olacağından,

$$d(x_m,x_s) \le s\big(d(x_m,x_k)+d(x_k,x_s)\big) \le 2s\varepsilon$$

olur. O halde $\{x_k\}$ Cauchy dizisi olur. (X,d) herhangi bir tam b-metrik uzay olduğundan $x_k \to u$ $(k \to \infty)$ olacak biçimde bir $u \in X$ vardır.

(3.2) eşitsizliğinden F sürekli olacağından,

$$u=\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty} F(x_{k+1})=F(u)$$

olur. Yani u, F' nin bir sabit noktasıdır.

Her $t>0$ için $\alpha(t)=\varphi^n(t)<t$ olduğundan F' nin sabit noktası tektir.

Çünkü v, F' nin u' dan farklı bir sabit noktası ise (3.2) eşitsizliğinden,

$$d(u,v)=d\big(F(u),F(v)\big) \le \varphi^n\big(d(u,v)\big) < d(u,v)$$

olur. $\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)=0$ olduğundan T sürekli olup,

$$T(u)=\lim_{k\to\infty} T\Big(F^k(x)\Big)=\lim_{k\to\infty} F^k\big(T(x)\big)=u$$

bulunur. Böylece u, T' nin bir sabit noktasıdır. (3.1) eşitsizliğinden T dönüşümünün sabit noktası tek olur. Her $x \in X$ ve her $r=0,1,2,\dots,n-1$ için,

$$T^{nk+r}(x)=F^k[T^r(x)] \to u \ \ (n\to\infty)$$

olduğundan $m \to \infty$ için $T^m(x) \to u$ bulunur.

3.2.2. Ön Teorem: (X,d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ biçiminde tanımlanan dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi de, her $n \in \mathbb{N}$ elemanı için $x_{n+1}=Tx_n$ biçiminde tanımlansın ve $\lambda \in [0,1)$ için,

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \lambda d(x_{n-1},x_n) \qquad (3.3)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir (Huang vd. , 2018, s. 5-6).

Kanıt: Kanıt üç durum için yapılır.

1. Durum: $s > 1$ için $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ yani $\lambda s < 1$ olsun. (3.3) eşitsizliğinden,

$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$ olur.

Buradan, her $n, m \in \mathbb{N}$ için $n > m$ olmak üzere,

$$d(x_m, x_n) \leq s[d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n)]$$

$$\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2[d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n)]$$

$$\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2 d(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^3[d(x_{m+2}, x_{m+3}) + (x_{m+3}, x_n)]$$

$$\leq sd(x_m, x_{m+1}) + s^2 d(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^3 d(x_{m+2}, x_{m+3}) + \cdots + s^{n-m-1} d(x_{n-2}, x_{n-1}) + s^{n-m-1} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq s\lambda^m d(x_0, x_1) + s^2\lambda^{m+1} d(x_0, x_1) + s^3\lambda^{m+2} d(x_0, x_1) + \cdots + s^{n-m-1}\lambda^{n-2} d(x_0, x_1) + s^{n-m-1}\lambda^{n-1} d(x_0, x_1)$$

$$\leq s\lambda^m(1 + s\lambda + s^2\lambda^2 + \cdots + s^{n-m-2}\lambda^{n-m-2} + s^{n-m-1}\lambda^{n-m-1}) d(x_0, x_1)$$

$$\leq s\lambda^m \left[\sum_{i=0}^{\infty} (s\lambda)^i\right] d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{s\lambda^m}{1 - s\lambda} d(x_0, x_1)$$

olup $m \to \infty$ için limit alınırsa $\lambda^m \to 0$ olacağından $\{x_n\}$, bir Cauchy dizisidir. Yani; $\{T^n x_0\}$, bir Cauchy dizisidir.

2. Durum: $s > 1$ için $\lambda \in \left[\frac{1}{s}, 1\right)$ olsun. $\lambda^n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan $\lambda^{n_0} < \frac{1}{s}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece 1. Durumdan,

$$\{(T^{n_0})^n x_0\}_{n=0}^{\infty} = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots, x_{n_0+n}, \dots\}$$

dizisi bir Cauchy dizisi olur. O zaman,

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\} \cup \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots, x_{n_0+n}, \dots\}$$

dizisi X kümesinde Cauchy dizisidir.

3. Durum: $s = 1$ olsun. 1. duruma benzer şekilde kanıtlanır.

3.2.3. Teorem: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun ve $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \mu[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{3.4}$$

koşulu sağlansın. O zaman T dönüşümünün X kümesi üzerinde tek bir sabit noktası vardır (Kır ve Kızıltunç, 2013, s. 15-16).

Kanıt: $x_0 \in X$ olmak üzere $n = 1,2, \ldots$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. (3.4) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \mu[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

olup buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\mu}{1-\mu} d(x_{n-1}, x_n) \tag{3.5}$$

bulunur. $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için $\frac{\mu}{1-\mu} \in [0,1)$ olacağından 3.2.2 Ön Teorem' den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur.

(X, d) tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olacak biçimde $x^* \in X$ vardır. (3.4) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq s[d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx^*)] \\ &\leq sd(x^*, x_n) + s\mu[d(x_{n-1}, x_n) + d(x^*, Tx^*)] \end{aligned}$$

olup buradan,

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{s}{1-s\mu} d(x^*, x_n) + \frac{s\mu}{1-s\mu} d(x_{n-1}, x_n) \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) eşitsizliğinde (3.5) eşitsizliği kullanılırsa,

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{s}{1-s\mu} d(x^*, x_n) + \frac{s\mu}{1-s\mu}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) \qquad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} d(x^*, Tx^*) = 0$$

olur. Böylece $x^* = Tx^*$ yani x^*, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. T dönüşümünün x^* sabit noktasının tek olduğu kolayca görülür.

3.2.4. Teorem: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. $a, b > 0$ için $a + 2bs \leq 1$ ise ve her $x, y \in X$ elemanı için,

$$d(Tx, Ty) \leq a\max\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y)\} + b\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\} \qquad (3.8)$$

koşulu sağlanıyorsa T dönüşümünün sabit noktası vardır ve bu nokta tektir (Agrawal, Qureshi ve Nema, 2016, s. 46-49).

Kanıt: $x_0 \in X$ olsun ve $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad (3.9)$$

biçiminde tanımlansın. (3.8) ve (3.9) kullanılırsa,

$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$

$\leq amax\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, x_n)\} + b\{d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})\}$

$= amax\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\} + b\{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)\}$

$= amax\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} + b\, d(x_{n-1}, x_{n+1})$

$\leq amax\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} + sb\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$

bulunur.

$$M_1 = max\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$$

olarak alınırsa,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq aM_1 + sb\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \tag{3.10}$$

olur. Burada iki durum vardır.

1. **Durum:** $M_1 = d(x_n, x_{n+1})$ olsun. (3.10) eşitsizliğinden,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq ad(x_n, x_{n+1}) + sb\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$$
$$\leq ad(x_n, x_{n+1}) + sb\, d(x_{n-1}, x_n) + sb\, d(x_n, x_{n+1})$$

olup buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{bs}{(1-a-bs)} d(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. $a + 2bs \leq 1$ olduğundan,

$$\frac{bs}{(1-a-bs)} < 1$$

olur. Böylece 3.2.2 Ön Teoreminden $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur.

2. Durum: $M_1 = d(x_{n-1}, x_n)$ olsun. (3.10) eşitsizliğinden,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq ad(x_{n-1}, x_n) + sb\{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$$
$$\leq ad(x_{n-1}, x_n) + sb\, d(x_{n-1}, x_n) + sb\, d(x_n, x_{n+1})$$

olup buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(a+bs)}{(1-bs)} d(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Buradan $a + 2bs \leq 1$ olduğundan $\frac{a+bs}{1-bs} < 1$ olur. Böylece 3.2.2. Ön Teoreminden $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur. (X, d) tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $x^* \in X$ noktasına yakınsar. d' nin *iii)* özelliğinden,

$$d(x^*, Tx^*) \leq s\{d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)\}$$
$$\leq s\, d(x^*, x_{n+1}) + s\, d(Tx_n, Tx^*)$$

olup, (3.8) eşitsizliği kullanılırsa,

$$d(x^*,Tx^*) \le s\,d(x^*,x_{n+1}) + sa\max\{d(x_n,Tx_n), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)$$
$$+ sb\{d(x_n,Tx^*) + d(x^*,Tx_n)\}$$

$$\le s\,d(x^*,x_{n+1}) + sa\max\{d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)$$
$$+ sb\{d(x_n,Tx^*) + d(x^*,x_{n+1})\}$$

$$\le s\,d(x^*,x_{n+1}) + sa\max\{d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)$$
$$+ s^2b\{d(x_n,x^*) + d(x^*,Tx^*)\} + sb\,d(x^*,x_{n+1})\}$$

bulunur. Buradan,

$$(1-s^2b)d(x^*,Tx^*)$$
$$\le s(1+b)d(x^*,x_{n+1}) + sa\,max\{d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)\}$$
$$+ s^2b\,d(x_n,x^*)$$

olur.

$M_2 = max\{d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)\}$ alınırsa,

$$(1-s^2b)d(x^*,Tx^*) \le s(1+b)d(x^*,x_{n+1}) + sa\,M_2 + s^2b\,d(x_n,x^*) \qquad (3.11)$$

elde edilir. Burada üç durum ortaya çıkacaktır.

1. Durum: $M_2 = d(x_n,x_{n+1})$ olsun. (3.11) eşitsizliğinden,

$(1-s^2b)d(x^*,Tx^*)$

$$\le s(1+b)d(x^*,x_{n+1}) + sa\,d(x_n,x_{n+1}) + s^2b\,d(x_n,x^*)$$

$$\le s(1+b)d(x^*,x_{n+1}) + s^2a\,\{d(x_n,x^*) + d(x^*,x_{n+1})\} + s^2b\,d(x_n,x^*)$$

$$\le\ s(1+b+as)d(x^*,x_{n+1}) + s^2(a+b)\,d(x_n,x^*)$$

olup,

$$d(x^*,Tx^*) \le \frac{s(1+b+as)}{(1-s^2b)}d(x^*,x_{n+1}) + \frac{s^2(a+b)}{(1-s^2b)}d(x_n,x^*)$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} d(x^*,Tx^*) = 0$ olur. Buradan, $x^* = Tx^*$' dır.

2. Durum: $M_2 = d(x_n,x^*)$ olsun. (3.11) eşitsizliğinden,

$$(1-s^2b)d(x^*,Tx^*) \le s(1+b)d(x^*,x_{n+1}) + sa\,d(x_n,x^*) + s^2b\,d(x_n,x^*)$$

$$\leq s(1+b)d(x^*, x_{n+1}) + (sa + s^2b)\, d(x_n, x^*)$$

olup,

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{s(1+b)}{(1-s^2b)} d(x^*, x_{n+1}) + \frac{(sa+s^2b)}{(1-s^2b)} d(x_n, x^*)$$

olur.

$n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x^*, Tx^*) = 0$ olur. Buradan, $x^* = Tx^*$' dır.

3. Durum: $M_2 = d(x^*, Tx^*)$ olsun. (3.11) eşitsizliğinden,

$$(1-s^2b)d(x^*, Tx^*) \leq s(1+b)d(x^*, x_{n+1}) + sa\, d(x^*, Tx^*) + s^2b\, d(x_n, x^*)$$

olup,

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{s(1+b)}{(1-sa-s^2b)} d(x^*, x_{n+1}) + \frac{s^2b}{(1-sa-s^2b)} d(x_n, x^*)$$

olur.

$n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x^*, Tx^*) = 0$ olur.

Buradan, $x^* = Tx^*$' dır. Yani, x^*, T' nin bir sabit noktasıdır.

T' nin x^*' dan farklı bir sabit noktası x' olsun. (3.8) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x^*, x') &= d(Tx^*, Tx') \\ &\leq a \max\{d(x^*, Tx^*), d(x', Tx'), d(x^*, x')\} + b\{d(x^*, Tx'), d(x', Tx^*)\} \\ &\leq a \max\{d(x^*, x^*), d(x', x'), d(x^*, x')\} + b\{d(x^*, x'), d(x', x^*)\} \\ &\leq a\, d(x^*, x') + b\{d(x^*, x'), d(x', x^*)\} \\ &\leq a\, d(x^*, x') + 2b\, d(x^*, x') \\ &\leq (a+2b)\, d(x^*, x') \end{aligned}$$

olup $a + 2b < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Buradan $x^* = x'$ olur. Yani T dönüşümünün sabit noktası tektir.

3.2.5. Teorem: (X,d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ ve λ_5 negatif olmayan sabit sayılar, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+s\lambda_4+s\lambda_5<1$ ve $T:X\to X$ tanımlanan dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le\lambda_1 d(x,y)+\lambda_2\frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)}+\lambda_3\frac{d(x,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)}$$
$$+\lambda_4\frac{d(x,Tx)d(x,Ty)}{1+d(x,y)}+\lambda_5\frac{d(y,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)} \qquad (3.12)$$

koşulu sağlanıyorsa T dönüşümünün X kümesi üzerinde sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Ayrıca her $x\in X$ için, $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır (Huang vd. 2018, s. 7-9).

Kanıt: $x_0\in X$ olsun ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x_{n+1}=Tx_n$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Eğer, $x_{n_0}=x_{n_0+1}=Tx_{n_0}$ olacak biçimde $n_0\in\mathbb{N}$ varsa x_{n_0} noktası, T dönüşümün bir sabit noktası olacaktır. Her $n\in\mathbb{N}$ sayısı için, $x_n\neq x_{n+1}$ olsun. (3.12) eşitsizliğinden,

$$d(x_n,x_{n+1})=(Tx_{n-1},Tx_n)$$
$$\le\lambda_1 d(x_{n-1},Tx_n)+\lambda_2\frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_n,Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)}$$
$$+\lambda_3\frac{d(x_{n-1},Tx_n)d(x_n,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}+\lambda_4\frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_{n-1},Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)}$$
$$+\lambda_5\frac{d(x_n,Tx_n)d(x_n,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}$$

$$=\lambda_1 d(x_{n-1},x_n)+\lambda_2\frac{d(x_{n-1},x_{n-1})d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}+\lambda_3\frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)}$$
$$+\lambda_4\frac{d(x_{n-1},Tx_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}+\lambda_5\frac{d(x_n,x_{n+1})d(x_n,x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)}$$

$$\le\lambda_1 d(x_{n-1},x_n)+\lambda_2 d(x_n,x_{n+1})+s\lambda_4[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})]$$

$$(1-\lambda_2-s\lambda_4)d(x_n,x_{n+1})\le(\lambda_1+s\lambda_4)d(x_{n-1},x_n) \qquad (3.13)$$

bulunur. Yine (3.12) eşitsizliği ve d' nin simetri özelliğinden,

$$d(x_n,x_{n+1})=d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})$$

$$\leq \lambda_1 d(x_n, x_{n-1}) + \lambda_2 \frac{d(x_n, Tx_n)d(x_{n-1}, Tx_{n-1})}{1 + d(x_n, x_{n-1})} + \lambda_3 \frac{d(x_n, Tx_{n-1})d(x_{n-1}, Tx_n)}{1 + d(x_n, x_{n-1})}$$
$$+ \lambda_4 \frac{d(x_n, Tx_n)d(x_n, Tx_{n-1})}{1 + d(x_n, x_{n-1})} + \lambda_5 \frac{d(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_{n-1}, Tx_n)}{1 + d(x_n, x_{n-1})}$$

$$= \lambda_1 d(x_n, x_{n-1}) + \lambda_2 \frac{d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n)}{1 + d(x_n, x_{n-1})} + \lambda_3 \frac{d(x_n, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x_{n-1})}$$
$$+ \lambda_4 \frac{d(x_n, x_{n+1})d(x_n, x_n)}{1 + d(x_n, x_{n-1})} + \lambda_5 \frac{d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x_{n-1})}$$

$$\leq \lambda_1 d(x_{n-1}, x_n) + \lambda_2 d(x_n, x_{n+1}) + s\lambda_5[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

$$(1 - \lambda_2 - s\lambda_5)d(x_n, x_{n+1}) \leq (\lambda_1 + s\lambda_5)d(x_{n-1}, x_n) \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2\lambda_1 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5}{2 - 2\lambda_2 - s\lambda_4 - s\lambda_5} d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. $\lambda = \frac{2\lambda_1+2\lambda_4+2\lambda_5}{2-2\lambda_2-s\lambda_4-s\lambda_5}$ alınırsa $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$ olduğundan $0 \leq \lambda < 1$ olur 3.2.2 Ön Teoreminden $\{x_n\} \subseteq X$ bir Cauchy dizisi olacaktır. (X, d) *tam b*-metrik uzay olduğundan olduğunda $x_n \to x^* \in X$ $(n \to \infty)$ elde edilir. (3.12) eşitsizliğinden,

$d(x_{n+1}, Tx^*) = d(Tx_n, Tx^*)$

$$\leq \lambda_1 d(x_n, x^*) + \lambda_2 \frac{d(x_n, Tx_n)d(x^*, Tx^*)}{1 + d(x_n, x^*)} + \lambda_3 \frac{d(x_n, Tx^*)d(x^*, Tx_n)}{1 + d(x_n, x^*)}$$
$$+ \lambda_4 \frac{d(x_n, Tx_n)d(x_n, Tx^*)}{1 + d(x_n, x^*)} + \lambda_5 \frac{d(x^*, Tx^*)d(x^*, Tx_n)}{1 + d(x_n, x^*)}$$
$$= \lambda_1 d(x_n, x^*) + \lambda_2 \frac{d(x_n, Tx_{n+1})d(x^*, Tx^*)}{1 + d(x_n, x^*)} + \lambda_3 \frac{d(x_n, Tx^*)d(x^*, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x^*)}$$
$$+ \lambda_4 \frac{d(x_n, x_{n+1})d(x_n, Tx^*)}{1 + d(x_n, x^*)} + \lambda_5 \frac{d(x^*, Tx^*)d(x^*, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x^*)} \qquad (3.15)$$

bulunur. (3.15) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tx^*) = 0$ olur. Yani $x_n \to Tx^*$ $(n \to \infty)$' dir. Limitin tekliğinden $Tx^* = x^*$ bulunur. x^*, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Son olarak T dönüşümünün tek bir sabit noktasının x^* olduğunu gösterebilmek için farklı bir y^* sabit noktası alınsın. (3.12) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) \\ &\leq \lambda_1 d(x^*, y^*) + \lambda_2 \frac{d(x^*, Tx^*)d(y^*, Ty^*)}{1 + d(x^*, y^*)} + \lambda_3 \frac{d(x^*, Ty^*)d(y^*, Tx^*)}{1 + d(x^*, y^*)} \\ &+ \lambda_4 \frac{d(x^*, Tx^*)d(x^*, Ty^*)}{1 + d(x^*, y^*)} + \lambda_5 \frac{d(y^*, Ty^*)d(y^*, Tx^*)}{1 + d(x^*, y^*)} \\ &= \lambda_1 d(x^*, y^*) + \lambda_3 \frac{d(x^*, y^*)d(x^*, Ty^*)}{1 + d(x^*, y^*)} \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda_3) d(x^*, y^*) \end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. Burada $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$ iken $\lambda_1 + \lambda_3 < 1$ olacağından (3.16)'dan $d(x^*, y^*) = 0$ olup buradan $x^* = y^*$ bulunur. Yani x^*, T' nin tek sabit noktasıdır.

3.2.6. Teorem: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun ve $s\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{3.17}$$

koşulu sağlansın. O zaman T dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır (Kır ve Kızıltunç, 2013, s. 15-16).

Kanıt: $x_0 \in X$ ve X'de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $n = 1,2, \ldots$ olmak üzere $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ biçiminde tanımlansın. (3.17) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda[d(Tx_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \qquad (3.18) \\ &= s\lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \qquad (3.19) \end{aligned}$$

olup,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{s\lambda}{1 - s\lambda} d(x_{n-1}, x_n) \tag{3.20}$$

olur. $s\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $\frac{s\lambda}{1-s\lambda} \in [0,1)$' dir. 3.2.2. Ön Teoremi' nden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy dizisidir. d' nin *iii)* özelliğinden ve (3.17) eşitsizliğinden,

$$d(x^*, Tx^*) \leq s[d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)]$$

$$= sd(x^*, x_{n+1}) + sd(Tx_n, Tx^*)]$$

$$\leq sd(x^*, x_{n+1}) + s\lambda[d(x^*, Tx_n) + d(x_n, Tx^*)] \quad (3.21)$$

olur ve buradan,

$$d(x^*, Tx^*) \leq sd(x^*, x_{n+1}) + s\lambda d(x^*, x_{n+1}) + s\lambda d(x_n, Tx^*) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22)' de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$d(x^*, Tx^*) \leq s\lambda d(x^*, Tx^*) \quad (3.23)$$

bulunur. (3.23) eşitsizliğinden $d(x^*, Tx^*) = 0$ olur. Buradan $x^* = Tx^*$ yani x^*, T' nin sabit noktasıdır. T' nin başka bir sabit noktası $x^* \in X$ olsun. (3.17) eşitsizliğinden,

$$d(x^*, x') = d(Tx^*, Tx') \leq \lambda[d(x^*, Tx') + d(x', Tx^*)] \quad (3.24)$$

olup (3.24)'den,

$$d(x^*, x') \leq 2\lambda d(x^*, x')$$

bulunur. Yani $x' = x_0$' dır. O halde T' nin sabit noktası tektir.

3.2.7. Ön Teorem: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $f : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ elemanı için $\{x_n\}$ dizisi,

$$x_n = f^n x_0 = f x_{n-1} \quad (3.25)$$

biçiminde tanımlansın. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için ve $n < m$ olduğunda,

$$d(x_n, x_{n+1})$$

$$\leq \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + \frac{n}{s}}{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + m} d(x_{n-1}, x_n) \quad (3.26)$$

koşulu sağlansın. O zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir (Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 103).

Kanıt: $\frac{n}{s} < m$ olacağından (3.26) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ ise $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ azalan ve alttan sınırlı bir dizi olacağından r negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere $d(x_{n-1}, x_n) \to r\ (n \to \infty)$' dır. $r = 0$ dır. Eğer $r > 0$ olursa (3.26) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$r \leq \frac{r + r + r + r + \frac{n}{s}}{r + r + r + r + m} r < r$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. $r = 0$ olduğu görülür.

$\lambda \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ olsun. $r = 0$ olduğundan, her $n \geq n(\lambda)$ için,

$$\frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + \frac{n}{s}}{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + m} \leq \lambda$$

olur. Bu ise her $n \geq n(\lambda)$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$$

olmasını verir. 3.2.2. Ön Teorem' den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

3.2.8. Teorem: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $f : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ elemanı için $n < m$ olup her $x, y \in X$ için,

$$sd(fx, fy) \leq \frac{d(x, fy) + d(x, f^2y) + d(y, fx) + d(y, f^2x) + n}{d(x, fx) + d(x, f^2x) + d(y, fy) + d(y, f^2y) + m} d(x, y) \qquad (3.27)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$\boldsymbol{i}$) f' nin bir sabit noktası $z \in X$' dir,

$\boldsymbol{ii}$) (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $z, w \in X$ f' nin farklı iki sabit noktası ise $d(z, w) \geq \frac{ms - n}{4}$ olur

(Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 103-104).

Kanıt: $x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi x_n (3.25)' deki gibi tanımlansın. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n-1}$ olursa x_{n-1}, f dönüşümünün bir sabit noktası olacaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ elemanı için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. (3.27) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa,

$$sd(x_n, x_{n+1})$$

$$\leq \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_{n-1}, x_{n+2}) + d(x_n, x_{n+1}) + n}{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + m} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \frac{s[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+2})] + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + n}{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + m} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \frac{s[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})] + n}{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + m} d(x_{n-1}, x_n)$$

olacağından 3.2.7. Ön Teorem' den $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olur. X herhangi bir tam b-m.u. olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $z \in X$' e yakınsaktır.

(3.27) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = z$ alınırsa,

$$sd(x_{n+1}, fz) = sd(fx_n, fz)$$

$$\leq \frac{d(x_n, fz) + d(x_n, f^2z) + d(z, fx_n) + d(z, f^2x_n) + n}{d(x_n, fx_n) + d(x_n, f^2x_n) + d(z, fz) + d(z, f^2z) + m} d(x_n, z)$$

$$\leq \frac{d(x_n, fz) + d(x_n, f^2z) + d(z, fx_{n+1}) + d(z, x_{n+2}) + n}{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+2}) + d(z, fz) + d(z, f^2z) + m} d(x_n, z) \qquad (3.28)$$

olur. 2.2.12. Önerme iii)' de

$$d(z, fz) \leq \liminf s\, d(x_n, fz) \leq \limsup s\, d(x_n, fz) \leq s^2 d(z, fz) \qquad (3.29)$$

bulunur. (3.28) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için alt limit alınırsa (3.29) eşitsizliğinden,

$$d(z, fz) \leq \liminf s\, d(x_{n+1}, fz) \leq \frac{d(z, fz) + d(z, f^2z) + n}{d(z, fz) + d(z, f^2z) + m} \limsup d(x_n, z) = 0$$

olur. $d(z, fz) = 0$ olacağından $z = fz$' dir. Yani, z, f' nin sabit noktasıdır. i) ve ii) koşulları sağlanmış olur.

Eğer, $w \in X$, f' nin z' den farklı bir sabit noktası ise, (3.27) eşitsizliğinde $x = z$ ve $y = w$ alınırsa,

$$s\,d(z,w) = s\,d(fz,fw)$$

$$\leq \left[\frac{d(z,fw)+d(z,f^2w)+d(w,fz)+d(w,f^2z)+n}{m}\right] d(z,w)$$

$$= \frac{4\,d(z,w)+n}{m}\, d(z,w)$$

olacağından,

$$d(z,w) \geq \frac{ms-n}{4}$$

bulunur ve iii) koşulu sağlanmış olur.

3.2.9. Teorem: (X,d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $f : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm ve her $m,n,L \in \mathbb{N}$ elemanı için $n < m$ olup her $x,y \in X$ için,

$$sd(fx,fy) \leq$$

$$\frac{d(x,fy)+d(x,f^2y)+d(y,fx)+d(y,f^2x)+n}{d(x,fx)+d(x,f^2x)+d(y,fy)+d(y,f^2y)+m}\, d(x,y) + Ld(y,fx) \quad (3.30)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

i) f' nin bir sabit noktası $z \in X$' dir,

ii) (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

iii) Eğer $z,w \in X$, f' nin farklı iki sabit noktası ise $d(z,w) \geq \max\left\{\frac{m(s-L)-n}{4}, 0\right\}$ olur (Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 104-105).

Kanıt: : $x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi (3.25)' deki gibi tanımlansın. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n-1}$ ise x_{n-1}, f dönüşümünün bir sabit noktası olacaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ elemanı için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun.

(3.30) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa,

$$sd(x_n, x_{n+1})$$

$$\leq \left[\frac{d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_{n-1},x_{n+2})+d(x_n,x_{n+1})+n}{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})+m}\right] d(x_{n-1},x_n) + Ld(x_n,x_n)$$

$$\leq \frac{s[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+2})]+d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_{n+1})+n}{d(x_{n-1},x_n)+d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_{n+1})+d(x_n,x_{n+2})+m}\,d(x_{n-1},x_n)$$

$$\leq \frac{s[d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+2})+d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_{n+1})]+n}{d(x_{n-1},x_n)+d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_{n+1})+d(x_n,x_{n+2})+m}\,d(x_{n-1},x_n)$$

olacağından 3.2.7. Ön Teorem' den $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olacaktır. X herhangi bir tam b-m.u. olduğu için $\{x_n\}$ dizisi $z \in X$' e yakınsaktır.

(3.30) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = z$ alınırsa,

$$sd(x_{n+1},fz) = s\,d(fx_n,fz)$$

$$\leq \left[\frac{d(x_n,fz)+d(x_n,f^2z)+d(z,fx_n)+d(z,f^2x_n)+n}{d(x_n,fx_n)+d(x_n,f^2x_n)+d(z,fz)+d(z,f^2z)+m}\right] d(x_n,z)+Ld(z,fx_n)$$

$$\leq \left[\frac{d(x_n,fz)+d(x_n,f^2z)+d(z,x_{n+1})+d(z,x_{n+2})+n}{d(x_n,x_{n+1})+d(x_n,x_{n+2})+d(z,fz)+d(z,f^2z)+m}\right] d(x_n,z)$$

$$+ L\,d(z,x_{n+1}) \qquad (3.31)$$

olur. (3.31) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için alt limit alınırsa,

$$d(z,fz) \leq \liminf s\,d(x_{n+1},fz)$$

$$\leq \frac{s^2\,[d(z,fz)+d(z,f^2z)]+n}{d(z,fz)+d(z,f^2z)+m}\limsup d(x_n,z)+\liminf Ld(z,x_{n+1})=0$$

olur. $d(z,fz)=0$ olacağından $z=fz$' dir. Yani, z, f' nin sabit noktasıdır. $i)$ ve $ii)$ koşulları sağlanmış olur.

Eğer, f' nin z' den farklı sabit noktası $w \in X$ ise, (3.30) eşitsizliğinde $x = z$ ve $y = w$ alınırsa,

$$s\,d(z,w) = s\,d(fz,fw)$$

$$\leq \left[\frac{d(z,fw)+d(w,fz)+d(z,f^2w)+d(w,f^2z)+n}{m}\right] d(z,w)+Ld(w,fz)$$

$$= \left[\frac{4\,d(z,w)+n}{m}\right] d(z,w)+Ld(z,w)$$

olacağından,

$$s \leq \frac{4\,d(z,w)+n}{m}+L$$

bulunur ve $iii)$ koşulu sağlanmış olur. Önceki iki teoremden $n=0$ ve $m=1$ için aşağıdaki sonuçlar bulunur.

3.2.10. Sonuç: (X,d) tam b-m.u. , $f:X\to X$ dönüşüm olsun ve her $x,y\in X$ için,

$$sd(fx,fy)\leq \frac{d(x,fy)+d(x,f^2y)+d(y,fx)+d(y,f^2x)}{d(x,fx)+d(x,f^2x)+d(y,fy)+d(y,f^2y)+1}\,d(x,y)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$\boldsymbol{i})$ f' nin bir sabit noktası $z\in X$' dir,

$\boldsymbol{ii})$ (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

$\boldsymbol{iii})$ Eğer $z,w\in X$ f' in farklı iki sabit noktası ise $d(z,w)\geq \frac{ms-n}{4}$ olur

(Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 105).

3.2.11. Sonuç: (X,d) herhangi bir tam b-m.u. , $f:X\to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. $L\in\mathbb{N}$ ve her $x,y\in X$ için,

$$sd(fx,fy)\leq \frac{d(x,fy)+d(x,f^2y)+d(y,fx)+d(y,f^2x)}{d(x,fx)+d(x,f^2x)+d(y,fy)+d(y,f^2y)+1}\,d(x,y)+Ld(y,fx)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$\boldsymbol{i})$ f' nin bir sabit noktası $z\in X$' dir,

$\boldsymbol{ii})$ (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

$\boldsymbol{iii})$ Eğer $z,w\in X$ f' in farklı iki sabit noktası ise $d(z,w)\geq \max\left\{\frac{m(s-L)-n}{4},0\right\}$ olur

(Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 105-106).

Eğer, (3.2.8) ve (3.2.9) teoremlerinde $\frac{n}{s} < 1$ ve $m = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olur.

3.2.12. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $f : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun ve her $x, y \in X$ için,

$$sd(fx, fy) \leq \frac{d(x, fy) + d(x, f^2y) + d(y, fx) + d(y, f^2x) + n}{d(x, fx) + d(x, f^2x) + d(y, fy) + d(y, f^2y) + 1} d(x, y)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$\boldsymbol{i}$) f' nin bir sabit noktası $z \in X$' dir,

$\boldsymbol{ii}$) (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $z, w \in X$ f' in farklı iki sabit noktası ise $d(z, w) \geq \frac{ms-n}{4}$ olur

(Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 106).

3.2.13. Sonuç: (X, d) herhangi bir b-m.u. olmak üzere $f : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olsun. $L \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in X$ için,

$$sd(fx, fy) \leq \frac{d(x, fy) + d(x, f^2y) + d(y, fx) + d(y, f^2x) + n}{d(x, fx) + d(x, f^2x) + d(y, fy) + d(y, f^2y) + 1} d(x, y) + Ld(y, fx)$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$\boldsymbol{i}$) f' nin bir sabit noktası $z \in X$' dir,

$\boldsymbol{ii}$) (3.25)' de tanımlanan her $\{x_n\}$ dizisi f' nin bir sabit noktasına yakınsar,

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $z, w \in X$ f' in farklı iki sabit noktası ise $d(z, w) \geq \max\left\{\frac{m(s-L)-n}{4}, 0\right\}$ olur

(Yıldırım ve Ansari, 2018, s. 106).

3.3. Yörüngesel Tam *b*-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.3.1. Tanım: (X, d) herhangi bir *b*-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü verilsin.

$\boldsymbol{i}$) $x \in X$ olmak üzere $O(x, \infty) = \{ x, Tx, T^2x, ... \}$ kümesine x' in "T- *yörüngesi"* denir.

$\boldsymbol{ii}$) $z \in X$ olmak üzere $\lim_{i\to\infty} T^{n_i}(x) = z$ olacak biçimdeki her $\{T^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{i\to\infty} T(T^{n_i}(x)) = Tz$ oluyorsa T' ye "*yörüngesel sürekli"* denir.

$\boldsymbol{iii}$) Her $\{T^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi X' de herhangi bir noktaya yakınsak oluyor ise (X, d)' ye "T- *yörüngesel tamdır"* denir (Alsulami, Karapınar, Rakočević, 2017, s. 3149).

3.3.2. Tanım: $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu artan ve ϕ^n, ϕ' nin $n-$*inci* iterasyonu olmak üzere her $t \in [0, \infty)$ için $\phi^{n(t)} \to 0$ $(n \to \infty)$ oluyorsa bu ϕ fonksiyonuna *"karşılaştırma fonksiyonu"* denir (Alsulami, Karapınar, Rakočević, 2017, s. 3149).

3.3.3. Önteorem: Eğer $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ karşılaştırma fonksiyonu ise aşağıdaki koşullar sağlanır.

$\boldsymbol{i}$) $k \geq 1$ için ϕ' nin her ϕ^k iterasyonu karşılaştırma fonksiyonudur,

$\boldsymbol{ii}$) ϕ karşılaştırma fonksiyonu 0' da süreklidir,

$\boldsymbol{iii}$) Her $t > 0$ için $\phi(t) < t$' dır

(Alsulami vd., 2017, s. 3149).

3.3.4. Tanım: $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$\boldsymbol{i}$) ϕ fonksiyonu artan,

$\boldsymbol{ii}$) Her $t > 0$ ve her $k \geq k_0$ için $s^{k+1}\phi^{k+1}(t) \leq as^k\phi^k(t) + v_k$ olacak biçimde $k_0 \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ negatif olmayan yakınsak serisi vardır

koşulları sağlanıyorsa ϕ' ye, "(b)-*karşılaştırma fonksiyonudur"* denir (Alsulami vd., 2017, s. 3149).

Tüm (b)-karşılaştırma fonksiyonlarının ailesi Ψ ile gösterilsin.

3.3.5. Önteorem: $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, (b)-karşılaştırma fonksiyonu olsun. O zaman,

$\boldsymbol{i}$) Her $t \in [0,\infty)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} s^k\phi^k(t)$ serisi yakınsaktır.

$\boldsymbol{ii}$) $b_s : [0,\infty) \to [0 \to \infty)$, $b_s = \sum_{k=0}^{\infty} s^k\phi^k(t)$ fonksiyonu artan olur ve $t = 0$' da süreklidir (Alsulami vd., 2017, s. 3149).

3.3.6. Uyarı: 3.3.5. Önteorem' den her *(b)*-karşılaştırma fonksiyonu bir karşılaştırma fonksiyonu olur. 3.3.3. Önteorem' den her ϕ *(b)*-karşılaştırma fonksiyonu için $t > 0$ oluyor ise $\phi(t) < t$'dir.

3.3.7. Teorem: (X,d) T-yörüngesel tam b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ yörüngesel sürekli dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$\min\{d(Tx,Ty), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \min\{d(x,Ty), d(Tx,y)\} \leq \psi\big(d(x,y)\big) \quad (3.32)$$

olacak biçimde $\psi \in \Psi$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar (Alsulami vd., 2017, s. 3149-3151).

Kanıt: Herhangi bir $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ elemanı için, $x_0 = x$ ve $x_n = Tx_{n-1}$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. Eğer, $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1}$ olursa kanıt tamamlanır. (3.32) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa,

$$\min\{d(Tx_{n-1},Tx_n),d(x_{n-1},Tx_{n-1}),d(x_n,Tx_n)\}$$
$$-\ \min\{d(x_{n-1},Tx_n),d(Tx_{n-1},x_n)\}\le\psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big)$$

olur. Buradan,

$$\min\{d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n-1})\}\le\psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big)$$

bulunur. Her $t>0$ elemanı için $\psi(t)<t$ olduğunda $d(x_n,x_{n-1})\le\psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big)$ olamaz. Yani, $d(x_n,x_{n+1})\le\psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big)$' dır. Böylece,

$$d(x_n,x_{n+1})\le\psi\big(d(x_{n-1},x_n)\big)\le\psi^2\big(d(x_{n-2},x_{n-1})\big)\le\cdots\le\psi^n\big(d(x_0,x_1)\big)\qquad(3.33)$$

olacağından 3.3.5. Ön Teorem' den,

$$\lim_{n\to\infty}d(x_{n+1},x_n)=0$$

bulunur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin.

$k\ge1$ olmak üzere,

$$d(x_n,x_{n+k})\le s[d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+k})]$$
$$\le sd(x_n,x_{n+1})+s\{s[d(x_{n+1},x_{n+2})+d(x_{n+2},x_{n+k})]\}$$
$$=sd(x_n,x_{n+1})+s^2d(x_{n+1},x_{n+2})+s^2d(x_{n+2},x_{n+k})$$
$$\vdots$$
$$\le sd(x_n,x_{n+1})+s^2d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+s^{k-1}d(x_{n+k-2},x_{n+k-1})$$
$$+s^{k-1}d(x_{n+k-1},x_{n+k})$$
$$\le sd(x_n,x_{n+1})+s^2d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+s^{k-1}d(x_{n+k-2},x_{n+k-1})$$
$$+s^kd(x_{n+k-1},x_{n+k})\qquad(3.34)$$

(3.33) eşitsizliğinden,

$$d(x_n,x_{n+k})\le s\,\psi^n\big(d(x_0,x_1)\big)+s^2\psi^{n+1}\big(d(x_0,x_1)\big)+\cdots$$
$$+s^{k-1}\psi^{n+k-2}\big(d(x_0,x_1)\big)+s^k\psi^{n+k-1}\big(d(x_0,x_1)\big)$$

$$= \frac{1}{s^{n-1}}\left[s^n\psi^n\left(d(x_0,x_1)\right) + s^{n+1}\psi^{n+1}\left(d(x_0,x_1)\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + s^{n+k-2}\psi^{n+k-2}\left(d(x_0,x_1)\right) + s^{n+k-1}\psi^{n+k-1}\left(d(x_0,x_1)\right)\right]$$

olur. Buradan, $n \geq 1$ olmak üzere $P_n = \sum_{j=0}^{n} s^j\psi^j(d(x_0,x_1))$ alınırsa $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ için,

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{1}{s^{n-1}}[P_{n+k-1} - P_{n-1}] \tag{3.35}$$

bulunur. 3.3.5. Önteorem' den, $\sum_{j=0}^{n} s^j\psi^j(d(x_0,x_1))$ serisi yakınsak olduğundan (3.35) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+k}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s^{n-1}}[P_{n+k-1} - P_{n-1}] = 0$$

olacağından, $\{x_n\}$, (X,d)' de bir Cauchy dizisi olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_n = T^n x_0$ biçiminde tanımlandığından (X,d), T yörüngesel tam olur. $x_n \to z\ (n \to \infty)$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. T yörüngesel sürekli olduğundan $Tx_n \to Tz\ (n \to \infty)$ yani $x_n \to Tz\ (n \to \infty)$ olur.

Sonuç olarak $z = Tz$' dir.

3.3.8. Sonuç: (X,d) T-yörüngesel tam b-m.u. , $T : X \to X$ tanımlanan yörüngesel sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ elemanı için,

$$\min\{d(Tx,Ty), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \min\{d(x,Ty), d(Tx,y)\} \leq k\ d(x,y)$$

koşulunu sağlayan $k \in [0,1)$ varsa o zaman $x_0 \in X$, $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar. (Alsulami vd., 2017, s. 3149-3151).

3.3.9. Sonuç: (X,d) T-yörüngesel tam metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan yörüngesel sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ elemanı için,

$$\min\{d(Tx,Ty), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \min\{d(x,Ty), d(Tx,y)\} \leq k\ d(x,y)$$

olacak biçimde $k \in [0,1)$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin sabit bir noktasına yakınsar (Ćirić, 1974, s. 52-58).

3.3.10. Teorem: (X,d) T-yörüngesel tam b-m.u. , $T : X \to X$ yörüngesel sürekli bir dönüşüm olsun. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$\boldsymbol{i}) \; 0 \leq \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2} < 1, a_1 + a_2 \neq 0, a_1 + a_2 + a_3 > 0 \; ve \; 0 \leq a_3 - a_5 \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ii}) \; & a_1 d(Tx,Ty) + a_2[\, d(x,Tx) + \, d(y,Ty)] + a_3[\, d(y,Tx) + \, d(x,Ty)] \\ & \leq a_4 d(x,y) + a_5 d(x,T^2x)\end{aligned} \tag{3.37}$$

koşulları sağlanıyorsa T' nin en az bir sabit noktası vardır (Alsulami vd., 2017, s. 3149-3151).

Kanıt: $x_0 \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi $n = 0,1,2,\ldots$ için $x_{n+1} = Tx_n$ biçiminde tanımlansın. (3.37) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}a_1 d(Tx_n, Tx_{n+1}) + a_2[\, d(x_n, Tx_n) + \, d(x_{n+1}, Tx_{n+1})] \\ + a_3[\, d(x_{n+1}, Tx_n) + \, d(x_n, Tx_{n+1})] \\ \leq a_4 d(x_n, x_{n+1}) + a_5 d(x_n, T^2 x_n)\end{aligned} \tag{3.38}$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}a_1 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + a_2[\, d(x_n, x_{n+1}) + \, d(x_{n+1}, x_{n+2})] \\ + a_3[\, d(x_{n+1}, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+2})] \leq a_4 d(x_n, x_{n+1}) + a_5 d(x_n, x_{n+2})\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$(a_1 + a_2) d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (a_3 - a_5) d(x_n, x_{n+2}) \leq (a_4 - a_2) d(x_n, x_{n+1})$$

olup, $k = \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2}$ için,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k d(x_n, x_{n+1}) \tag{3.39}$$

olur. i) koşulundan $0 \leq k < 1$ olduğundan 3.2.2 Ön Teorem' den,

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olur. $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$ ve (X,d), T yörüngesel tam olduğundan $n \to \infty$ için $x_n \to z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Bu durumda, T yörüngesel sürekli olduğundan $Tx_n \to Tz$ $(n \to \infty)$ yani $x_n \to Tz$ olur. Bu ise $z = Tz$ olmasını verir.

3.3.11. Sonuç: (X,d) T-yörüngesel tam herhangi bir metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ tanımlanan yörüngesel sürekli dönüşüm olsun. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için,

$$\boldsymbol{i})\ 0 \le \frac{a_4 - a_2}{a_1 + a_2} < 1, a_1 + a_2 \neq 0, a_1 + a_2 + a_3 > 0\ ve\ 0 \le a_3 - a_5$$

$$\boldsymbol{ii})\ a_1 d(Tx,Ty) + a_2[\, d(x,Tx) + \, d(y,Ty)] + a_3[\, d(y,Tx) + \, d(x,Ty)] \le a_4 d(x,y) + a_5 d(x,T^2x)$$

koşulları sağlanıyorsa T' nin en az bir sabit noktası vardır (Karapınar, 2012, s. 92-97).

3.3.12. Teorem: (X,d) T-yörüngesel tam b-m.u. olmak üzere $T : X \to X$ yörüngesel sürekli herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$P(x,y) = \min\{d(Tx,Ty)d(x,y), d(x,Tx)(y,Ty)\}$$

$$Q(x,y) = \min\{d(x,Tx)d(x,Ty), d(y,Ty)(Tx,y)\}$$

$$R(x,y) = \min\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} \neq 0$$

olmak üzere,

$$\frac{P(x,y) - Q(x,y)}{R(x,y)} \le \psi\big(d(x,y)\big) \tag{3.40}$$

olacak biçimde $\psi \in \Psi$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar (Alsulami vd., 2017, s. 3153).

Kanıt: $x \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_0 = x$ ve $x_n = Tx_{n-1}$ biçiminde tanımlansın ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1}$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. (3.40) eşitsizliği için $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa,

$$P(x_{n-1}, x_n) = \min\{d(Tx_{n-1}, Tx_n)d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_n, Tx_n)\},$$

$$Q(x_{n-1}, x_n) = \min\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_{n-1}, Tx_n), d(x_n, Tx_n)d(Tx_{n-1}, x_n)\},$$

$$R(x_{n-1}, x_n) = \min\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n)\}$$

olmak üzere,

$$\frac{P(x_{n-1}, x_n) - Q(x_{n-1}, x_n)}{R(x_{n-1}, x_n)} \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$$

olur. Buradan,

$$\frac{d(x_n, x_{n+1})d(x_{n-1}, x_n)}{\min\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}} \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \tag{3.41}$$

bulunur. Eğer, $R(x_{n-1}, x_n) = d(x_n, x_{n+1})$ olursa (3.41) eşitsizliğinden,

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) < d(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Ancak her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)$$

olur. Böylece,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \leq \psi^2\big(d(x_{n-2}, x_{n-1})\big) \leq \cdots \leq \psi^n\big(d(x_0, x_1)\big)$$

olup, 3.3.5. Ön Teoremden,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

bulunur. Kanıtın devamı 3.3.7. Teoremin kanıtına benzer biçimde yapılarak istenen elde edilir.

3.3.13. Sonuç: (X, d) T- yörüngesel tam b-m.u. , $T : X \to X$ tanımlanan herhangi bir yörüngesel sürekli dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$P(x, y) = \min\{d(Tx, Ty)d(x, y), d(x, Tx)(y, Ty)\}$$

$$Q(x, y) = \min\{d(x, Tx)d(x, Ty), d(y, Ty)(Tx, y)\}$$

$$R(x,y) = \min\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} \neq 0$$

olsun. Eğer,

$$\frac{P(x,y) - Q(x,y)}{R(x,y)} \leq kd(x,y)$$

olacak biçimde $k \in [0,1)$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar (Alsulami vd., 2017, s. 3154).

3.3.14. Sonuç: (X,d) T-yörüngesel tam metrik uzay, $T : X \to X$ tanımlanan herhangi bir yörüngesel sürekli dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$P(x,y) = \min\{d(Tx,Ty)d(x,y), d(x,Tx)(y,Ty)\}$$

$$Q(x,y) = \min\{d(x,Tx)d(x,Ty), d(y,Ty)(Tx,y)\}$$

$$R(x,y) = \min\{d(x,Tx), d(y,Ty)\} \neq 0$$

olsun. Eğer,

$$\frac{P(x,y) - Q(x,y)}{R(x,y)} \leq kd(x,y)$$

olacak biçimde $k \in [0,1)$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit noktasına yakınsar (Achari, 1976, s. 255-257).

3.3.15. Teorem: (X,d) T-yörüngesel tam b-m.u. , $T : X \to X$ herhangi bir yörüngesel sürekli dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$m(x,y) = min\{[d(Tx,Ty)]^2, d(x,y)d(Tx,Ty), [d(y,Ty)]^2\}$$

$$n(x,y) = \min\{d(x,Tx)d(y,Ty), d(x,Ty)d(y,Tx)\}$$

olduğunda,

$$m(x,y) - n(x,y) \leq k\, d(x,Tx)\, d(y,Ty) \qquad (3.42)$$

olacak biçimde $k \in [0,1)$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin bir sabit bir noktasına yakınsar (Alsulami vd., 2017, s. 3154-3155).

Kanıt: $x \in X$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_0 = x$ ve $x_n = Tx_{n-1}$ biçiminde tanımlansın ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = x_{n-1}$ olursa kanıt tamamlanır. $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınsın.

$$m(x_{n-1}, x_n) = \min\{[d(Tx_{n-1}, Tx_n)]^2, d(x_{n-1}, x_n)\, d(Tx_{n-1}, Tx_n), [d(x_n, Tx_n)]^2\}$$

ve

$$n(x_{n-1}, x_n) = \min\{\, d(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_n, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_n)d(x_n, Tx_{n-1})$$

olup (3.42)' den,

$$m(x_{n-1}, x_n) - n(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, Tx_{n-1})d(x_n, Tx_n)$$

bulunur. Buradan,

$$m(x_{n-1}, x_n) = \min\{[d(x_n, x_{n+1})]^2, d(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, x_{n+1})\}$$

olacağından,

$$m(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \tag{3.43}$$

olur. Eğer, $m(x_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, x_{n+1})$ olursa (3.43) eşitsizliğinden,

$$d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})$$

olup $k < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Böylece,

$$[d(x_n, x_{n+1})]^2 \leq kd(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})$$

olup, buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Bu ise,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$$

olmasını verir. Kanıtın devamı 3.3.10. Teoremin kanıtına benzer biçimde yapılır.

3.3.16. Sonuç: (X, d) T-yörüngesel tam metrik uzay, $T : X \to X$ tanımlanan herhangi bir yörüngesel sürekli dönüşüm olmak üzere, her $x, y \in X$ için,

$$m(x,y) = min\{[d(Tx,Ty)]^2, d(x,y)d(Tx,Ty), [d(y,Ty)]^2\}$$

$$n(x,y) = \min\{d(x,Tx)d(y,Ty), d(x,Ty)d(y,Tx)\}$$

olarak alındığında,

$$m(x,y) - n(x,y) \leq k\ d(x,Tx)\ d(y,Ty)$$

olacak biçimde $k \in [0,1)$ varsa o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi T' nin sabit noktasına yakınsar (Pachpatte, 1979, s. 1039-1043).

BÖLÜM 4

b-METRİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLERİN ORTAK SABİT NOKTALARI

Bu bölümde, değişik koşulları sağlayan iki veya daha fazla dönüşümün ortak sabit noktaları incelenecektir.

4.1. Daraltan Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

4.1.1. Teorem: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olmak üzere $f, g : X \to X$ dönüşümler olsun. a_1 ve a_2 ; $a_1 < \frac{1}{s}$, $a_1 + a_2 \leq \frac{2}{2+s}$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$sd(fx, gy) \leq a_1 d(x, y) + a_2 \frac{d(x, fx)d(y, gy)}{1 + d(fx, gy)} \tag{4.1}$$

koşulu sağlanıyorsa o zaman f ve g dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası vardır ve bu dönüşümlerin ortak sabit noktası tektir (Xie, Wang ve Zhong, 2016, s. 573-576).

Kanıt: Herhangi bir $x_0 \in X$ olmak üzere X' de $\{x_n\}$ dizisi $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{2n+1} = fx_{2n}, \qquad x_{2n+2} = gx_{2n+1}$$

olacak biçimde tanımlansın. $x_n = x_{n+1}$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ var olsun.

Eğer, $n = 2k$ ise $x_{2k} = x_{2k+1}$ olup (4.1) eşitsizliğinde $x = x_{2k}$, $y = x_{2k+1}$ alınırsa,

$$sd(x_{2k+1}, x_{2k+2}) = sd(fx_{2k}, gx_{2k+1})$$

$$\leq a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 \frac{d(x_{2k}, fx_{2k}) d(x_{2k+1}, gx_{2k+1})}{1 + d(fx_{2k}, gx_{2k+1})}$$

$$= a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 \frac{d(x_{2k}, x_{2k+1}) d(x_{2k+1}, x_{2k+2})}{1 + d(x_{2k+1}, x_{2k+2})}$$

$$= 0$$

olur ve $s \geq 1$ olduğundan $d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) = 0$ bulunur. Yani $x_{2k+1} = x_{2k+2}$ olur.

Buradan $x_{2k} = fx_{2k} = x_{2k+1} = x_{2k+2} = gx_{2k+1}$ elde edilir. Bu ise f ve g' nin ortak sabit noktasının x_{2k} olmasını verir.

Eğer, $n = 2k + 1$ ise, f ve g' nin ortak sabit noktasının x_{2k+1} olduğu benzer biçimde gösterilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun.

1. Adım: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \,'dır. \tag{4.2}$$

olduğu gösterilsin.

1. Durum: $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k + 1$ olsun. (4.1) eşitsizliğinde, $x = x_{2k}$, $y = x_{2k+1}$ alınırsa,

$$sd(x_{2k+1}, x_{2k+2}) = sd(fx_{2k}, gx_{2k+1})$$

$$\leq a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 \frac{d(x_{2k}, fx_{2k}) d(x_{2k+1}, gx_{2k+1})}{1 + d(fx_{2k}, gx_{2k+1})}$$

$$= a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 \frac{d(x_{2k}, x_{2k+1}) d(x_{2k+1}, x_{2k+2})}{1 + d(x_{2k+1}, x_{2k+2})}$$

$$\leq a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 \frac{d(x_{2k}, x_{2k+1}) d(x_{2k+1}, gx_{2k+2})}{d(x_{2k+1}, x_{2k+2})}$$

$$= a_1 d(x_{2k}, x_{2k+1}) + a_2 d(x_{2k}, x_{2k+1})$$

$$\leq \frac{2}{2+s} d(x_{2k}, x_{2k+1})$$

olur. Böylece $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k + 1$ olmak üzere

$$sd(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2}{2+s} d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.3}$$

bulunur.

2. Durum: $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ olsun. 1. Durum'a benzer biçimde $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ olmak üzere,

$$sd(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2}{2+s} d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.4}$$

bulunur. Bu durumda (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$sd(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{2}{2+s} d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.5}$$

olur. Böylece, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalandır ve alttan sınırlıdır. Yani, $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r$ olacak biçimde $r \geq 0$ vardır. $r > 0$ ve $s \geq 1$ olmak üzere (4.5) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $s \geq 1$ için,

$$sr \leq \frac{2}{2+s} r$$

olur. Buradan,

$$r \leq sr \leq \frac{2}{2+s} r \leq \frac{2}{3} r$$

olacağından çelişki elde edilir. Yani $r = 0$' dır.

2. Adım: $\{x_n\}$ dizisi (X, d)' de bir Cauchy dizisidir. Bunu görmek için $\{x_{2n}\}$ dizisinin (X, d)' de Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\{x_{2n}\}$ dizisi (X, d)' de Cauchy dizisi olmasın. O zaman $\varepsilon > 0$ için $n(i)$ en küçük indisli olacak biçimde $\{x_{2n}\}$ dizisinin iki alt dizisi $\{x_{2m(i)}\}$ ve $\{x_{2n(i)}\}$ bulunabilir.

$$n(i) > m(i) > i \text{ olmak üzere } d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}) \geq \varepsilon \tag{4.6}$$

için $d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-2}\right) < \varepsilon$ elde edilir. (4.6) eşitsizliği ve *d*' nin *iii)* özelliği kullanılarak,

$$\varepsilon \leq d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}\right) \leq s\left[d\left(x_{2m(i)}, x_{2m(i)+1}\right) + d\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right)\right]$$

bulunur. Son eşitsizlikte $i \to \infty$ için limit alınırsa (4.2) eşitsizliğinden,

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \lim_{i \to +\infty} d\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right) \tag{4.7}$$

bulunur. Tekrar *d*' nin *iii)* özelliği uygulanırsa,

$$d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right) \leq s\left[d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-2}\right) + d\left(x_{2n(i)-2}, x_{2n(i)-1}\right)\right]$$

elde edilir. Burada tekrar $i \to \infty$ için limit alınırsa,

(4.2) eşitsizliğinden,

$$\lim_{i \to +\infty} d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right) < s\varepsilon \tag{4.8}$$

olur. (4.1) eşitsizliğinden,

$$sd\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right) = sd\left(fx_{2m(i)}, gx_{2n(i)-1}\right)$$

$$\leq a_1 d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + a_2 \frac{d\left(x_{2m(i)}, fx_{2m(i)}\right) d\left(x_{2n(i)-1}, gx_{2n(i)-1}\right)}{1 + d\left(fx_{2m(i)}, gx_{2n(i)-1}\right)}$$

$$= a_1 d\left(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-1}\right) + a_2 \frac{d\left(x_{2m(i)}, x_{2m(i)+1}\right) d\left(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}\right)}{1 + d\left(x_{2m(i)+1}, x_{2n(i)}\right)}$$

bulunur. Burada tekrar $i \to \infty$ için limit alınırsa (4.2), (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerinden,

$$\frac{\varepsilon}{s}.s \leq a_1.s.\varepsilon$$

elde edilir. $a_1 < \frac{1}{s}$ olduğundan,

$$\varepsilon \leq a_1 s\varepsilon < \varepsilon$$

olur ki buda bir çelişkidir.

Sonuç olarak $\{x_n\}$, (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi olacaktır. (X, d) herhangi bir tam b-m.u. olduğundan $n \to \infty$ için $x_n \to u$ olacak biçimde $u \in X$ vardır.

3. Adım: u, f ile g dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Yani $fu = gu = u$' dur. Önce $fu = u$ olduğu gösterilsin.

$fu \neq u$ yani $d(u, fu) = z > 0$ olsun. *d*' nin *iii)* özelliği ve (4.1) eşitsizliğinden,

$$z = d(u, fu) \leq s[d(u, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, fu)]$$

$$\leq s[d(u, x_{2n+2}) + d(fu, gx_{2n+1})]$$

$$\leq sd(u, x_{2n+2}) + a_1 d(u, x_{2n+1}) + a_2 \frac{d(u, fu)d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})}{1 + d(fu, gx_{2n+1})}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$z = d(u, fu) \leq 0$$

bulunur ve bu da $z = 0$ olmasını verir. Ancak $z > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani $fu = u$' dur. Benzer biçimde $gu = u$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak u, f ve g dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası olacaktır.

4. Adım: Şimdi f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktasının tek olduğu gösterilsin. u ve v, f ve g' nin faklı iki sabit noktası olsun. (4.1) eşitsizliğinden,

$$sd(u, v) = sd(fu, gv) \leq a_1 d(u, v) + a_2 \frac{d(u, fu)d(v, gv)}{1 + d(fu, gv)}$$

$$= a_1 d(u, v) + a_2 \frac{d(u, u)d(v, v)}{1 + d(u, v)}$$

$$= a_1 d(u, v)$$

bulunur. $a_1 < \frac{1}{s}$ ve $s \geq 1$ olduğundan $d(u, v) = 0$ olur. Sonuç olarak X içinde f ve g dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

4.1.2. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam *b*-m.u. , $f : X \to X$ bir dönüşüm olsun. a_1 ve a_2; $a_1 < \frac{1}{s}$, $a_1 + a_2 < \frac{2}{2+s}$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$sd(fx,fy) \leq a_1 d(x,y) + a_2 \frac{d(x,fx)d(y,fy)}{1+d(fx,fy)} \tag{4.9}$$

koşulu sağlanıyorsa f' nin tek bir sabit noktası vardır (Xie vd., 2016, s. 576).

Kanıt: 4.1.1. Teoremin kanıtında $g = f$ alınarak istenen elde edilir.

4.1.3. Örnek: $X = \{1,2,3\}$ olsun ve her $x, y \in X$ için $d: X \times X \to [0, +\infty)$ dönüşümü,

i) $x = y$ iken $d(x,y) = 0$

ii) $d(1,2) = 1,\ \ d(1,3) = 8,\ \ d(2,3) = 4$

biçiminde tanımlansın. $s = \frac{8}{5}$ için d nin bir b-metrik olduğu kolayca görülür. $f : X \to X$ fonksiyonu,

$$f(1) = f(2) = 1, \qquad f(3) = 2$$

biçiminde tanımlansın. $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{s} = \frac{5}{8}, a_2 = \frac{1}{20}$ ise $a_1 + a_2 = \frac{11}{20} < \frac{2}{2+s} = \frac{5}{9}$ olur. Burada (4.9) eşitsizliği sağlanır.

1. Durum: $d(fx,fy) = 0$ ise (4.9) sağlanır.

2. Durum: $d(fx,fy) = 1$ olsun. Yani, $fx = 1,\ fy = 2$ veya $fx = 2, fy = 1$ olsun. $fx = 1, fy = 2$ olduğunda iki durum vardır.

2.1. Durum: $x = 1, y = 3$ ise $d(x,y) = 8$ olur. Buradan,

$$\frac{8}{5}.1 < 4 = \frac{1}{2}.8 = a_1 d(x,y) \leq a_1 d(x,y) + a_2 \frac{d(x,fx)d(y,fy)}{1+d(fx,fy)}$$

olduğundan (4.9) sağlanır.

2.2. Durum: $x = 2, y = 3$ ise $d(x,y) = 4$ olur. Buradan,

$$\frac{8}{5}.1 < 2\ = \frac{1}{2}.4 = a_1 d(x,y) \leq a_1 d(x,y) + a_2 \frac{d(x,fx)d(y,fy)}{1+d(fx,fy)}$$

olduğundan (4.9) sağlanır. $fx = 2, fy = 1$ olduğunda da iki durum vardır.

2.3. Durum: $x = 3, y = 1$ ise $d(x,y) = 8$ olur. Buradan,

$$\frac{8}{5}.1 < 4 = \frac{1}{2}.8 = a_1 d(x,y) \leq a_1 d(x,y) + a_2 \frac{d(x,fx)d(y,fy)}{1+d(fx,fy)}$$

olduğundan (4.9) sağlanır.

2.4. Durum: $x = 3, y = 2$ ise $d(x,y) = 4$ olur. Buradan,

$$\frac{8}{5}.1 < 2 = \frac{1}{2}.4 = a_1 d(x,y) \leq a_1 d(x,y) + a_2 \frac{d(x,fx)d(y,fy)}{1+d(fx,fy)}$$

olduğundan (4.9) sağlanır.

Böylece 4.1.2. Sonuç' un tüm koşulları sağlanır ve $x = 1$, f fonksiyonunun bir tek sabit noktası olur (Xie vd., 2016, s. 576-578).

4.2. *b*-(E.A) Özelliğini Sağlayan Dönüşüm Çiftleri İçin Ortak Sabit Noktalar

4.2.1. Tanım: (X,d) herhangi bir *b*-m.u. olmak üzere $f, g : X \to X$ tanımlanan dönüşümler için,

$\boldsymbol{i}$) Eğer $t \in X$ için $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varken $\lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$ oluyorsa f ve g' ye "*bağdaşık dönüşümler"* denir (Jungck, 1986, s. 771-779).

$\boldsymbol{ii}$) Eğer, $\boldsymbol{x} \in X$ için $w = fx = gx$ oluyorsa x' e f ve g' nin bir *"çakışık noktasıdır"* denir (Jungck, 1986, s. 771-779).

$\boldsymbol{iii}$) Eğer, f ve g dönüşümleri çakışık noktalarında, değişme özelliğini sağlıyorsa, yani $fx = gx$ koşulunu sağlayan $x \in X$ için $fgx = gfx$ sağlanıyorsa f ve g dönüşümlerine "*zayıf bağdaşık dönüşümler"* denir (Jungck, 1986, s. 771-779).

$\boldsymbol{iv}$) Eğer, $t \in X$ için $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa f ve g' ye "*b-(E.A) özelliğini sağlıyor"* denir (Öztürk ve Türkoğlu, 2015, s. 2).

4.2.2. Örnek: $X = [0,2]$ olsun ve $d : X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü,

$$d(x,y) = (x-y)^2$$

biçiminde tanımlansın. (X,d) bir b-metrik uzaydır. $f, g : X \to X$ dönüşümleri,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x+1}{8}, & x \in (1,2] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x}{4}, & x \in (1,2] \end{cases}$$

olsun. Bu durumda X' de $n = 0, 1, 2,$ ... olmak üzere $x_n = 1 + \frac{1}{n+2}$ olacak biçimde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = \frac{1}{4}$$

olduğundan, f ve g, b- (E.A) özelliğini sağlar. Ancak $\lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = \frac{9}{64} \neq 0$ olduğundan f ve g dönüşümleri bağdaşık değildir (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 3).

4.2.3. Teorem: (X,d) herhangi bir b-m.u. olsun. $f, g, S, T : X \to X$ dönüşümleri; $f(X) \subseteq T(X)$ ve $g(X) \subseteq S(X)$, $\varepsilon > 1$, ve $s > 1$ ve her $x, y \in X$ için,

$$M_s(x,y) = \max\left\{d(Sx,Ty), d(fx,Sx), d(gy,Ty), \frac{d(fx,Ty) + d(Sx,gy)}{2s}\right\}$$

olmak üzere,

$$s^{\varepsilon} d(fx,gy) \leq M_s(x,y) \tag{4.10}$$

koşulunu sağlasın.

Eğer, (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftlerinin herhangi biri b- (E.A) özelliğini sağlıyorsa ve $f(X), g(X), S(X)$ ve $T(X)$ alt uzaylarının herhangi biri X içinde kapalı ise o zaman (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftlerinin bir çakışık noktası var olur.

Ayrıca (f,S) ve (g,T) çiftleri zayıf bağdaşık ise o zaman f, g, S ve T' nin tek bir ortak sabit noktası vardır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 3-6).

Kanıt: Eğer (f,S) dönüşüm çifti b- (E.A) özelliğini sağlıyorsa $q \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = q$$

olacak biçimde X içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. $f(X) \subseteq T(X)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $fx_n = Ty_n$ olacak biçimde X' de $\{y_n\}$ dizisi vardır. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} Ty_n = q$ olur. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} gy_n = q$ olur. Gerçekten,

$$M_s(x_n, y_n)$$

$$= \max\left\{d(Sx_n, Ty_n), d(fx_n, Sx_n), d(Tx_n, gy_n), \frac{d(Sx_n, gy_n) + d(fx_n, Ty_n)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{d(Sx_n, fx_n), d(fx_n, Sx_n), d(fx_n, gy_n), \frac{d(Sx_n, gy_n) + d(fx_n, fx_n)}{2s}\right\}$$

$$\leq \max\left\{d(Sx_n, fx_n), d(fx_n, gy_n), \frac{s[d(Sx_n, fx_n) + d(fx_n, gy_n)]}{2s}\right\}$$

$$= \max\{d(Sx_n, fx_n),\ d(fx_n, gy_n)\}$$

olmak üzere (4.10) eşitsizliğinden,

$$s^{\varepsilon} d(fx_n, gy_n) \leq M_s(x_n, y_n) \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) eşitsizliğinde üst limit alınırsa, 2.2.12. Önerme' den, $n \to \infty$ için $d(Sx_n, fx_n) \to 0$ olacağından,

$$\limsup_{n\to\infty}\ s^{\varepsilon} d(fx_n, gy_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \max\{d(Sx_n, fx_n), d(fx_n, gy_n)\}$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n)$$

bulunur. $s^{\varepsilon} > s > 1$ olduğundan,

$$\limsup_{n\to\infty}\ d(fx_n, gy_n) = 0$$

olur. Yani, $\lim_{n\to\infty} d(fx_n, gy_n) = 0$' dır. Ayrıca, d' nin *iii)* özelliğinden,

$$d(q, gy_n) \leq s\big(d(q, fx_n) + d(fx_n, gy_n)\big)$$

olup bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\frac{1}{s} d(q, gy_n) \leq d(q, fx_n) + d(fx_n, gy_n) \to 0$$

olacağından $gy_n \to q$ $(n \to \infty)$ olur.

Eğer, $T(X)$, X'in kapalı alt uzayı ise 2.1.8. Ön Teoremden $Tr = q$ olacak biçimde bir $r \in X$ vardır. Burada $gr = q$ olur.

Gerçekten,

$$M_s(x_n, r)$$

$$= \max\left\{d(Sx_n, Tr), d(fx_n, Sx_n), d(Tr, gr), \frac{d(fx_n, Tr) + d(Sx_n, gr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{d(Sx_n, q), d(fx_n, Sx_n), d(q, gr), \frac{d(fx_n, q) + d(Sx_n, gr)}{2s}\right\}$$

$$\leq \max\left\{d(Sx_n, q), d(fx_n, Sx_n), d(q, gr), \frac{d(fx_n, q) + sd(Sx_n, q) + d(q, gr)}{2s}\right\}$$

olmak üzere, (4.10) eşitsizliğinden ve d' nin *iii)* özelliğinden,

$$\frac{1}{s}d(q, gr) \leq d(q, fx_n) + d(fx_n, g_r)$$

$$\leq d(q, fx_n) + \frac{1}{s^{\varepsilon}}M_s(x_n, r) \qquad (4.12)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} M_s(x_n, r) \leq \max\left\{0, 0, d(q, gr), \frac{d(q, gr)}{2}\right\} = d(q, gr)$$

olacağından (4.12) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{s}d(q, gr) \leq 0 + \frac{1}{s^{\varepsilon}}d(q, gr)$$

bulunur. $s^{\varepsilon} > s$ olduğundan $d(q, gr) = 0$ olur. Bu durumda, $q = gr = Tr$ yani, r, (g, T) dönüşüm çiftinin çakışık noktasıdır.

$g(X) \subseteq S(X)$ olduğundan $q = Sz$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda $Sz = fz$ olur.

$$M_s(z, r) = \max\left\{d(Sz, Tr), d(fz, Sz), d(Tr, gr), \frac{d(fz, Tr) + d(Sz, gr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{0, d(fz,q), 0, \frac{d(fz,q)+0}{2s}\right\}$$

$$= d(fz,q)$$

olduğundan (4.10) eşitsizliğinden

$$s^{\varepsilon} d(fz,gr) \leq M_s(z,r) \tag{4.13}$$

olur. (4.13) eşitsizliğinden,

$$s^{\varepsilon} d(fz,gr) \leq d(fz,q) = d(fz,gr)$$

olacağından $d(fz,gr) = 0$ olur. Bu nedenle, $Sz = fz = q$ yani z, (f,S) dönüşüm çiftinin bir çakışık noktasıdır. Böylece, $fz = Sz = gr = Tr = q$ olup (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşık olduğundan $fq = Sq$ ve $gq = Tq$ elde edilir. Buradan q; f, g, S ve T dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası olur. Çünkü,

$$M_s(q,r) = \max\left\{d(Sq,Tr), d(fq,Sq), d(Tr,gr), \frac{d(fq,Tr)+d(Sq,gr)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{d(fq,q), d(fq,fq), d(q,q), \frac{d(fq,q)+d(fq,q)}{2s}\right\}$$

$$= d(fq,q)$$

olmak üzere, (4.10) eşitsizliğinden,

$$s^{\varepsilon} d(fq,q) = s^{\varepsilon} d(fq,gr) \leq M_s(q,r) = d(fq,q)$$

elde edilir.

$s^{\varepsilon} > s > 1$ olduğundan $d(fq,q) = 0$ olur. Yani, $fq = Sq = q$' dır. Benzer biçimde $gq = Tq = q$ olduğu da gösterilebilir.

f, g, S ve T' nin q'dan farklı bir sabit noktası p olsun.

$$M_s(q,p) = \max\left\{d(Sq,Tp), d(fq,Sq), d(Tp,gp), \frac{d(fq,Tp)+d(Sq,gp)}{2s}\right\}$$

$$= \max\left\{d(q,p), d(q,q), d(p,p), \frac{d(q,p)+d(q,p)}{2s}\right\}$$

$$= d(q,p)$$

olmak üzere, (4.10) eşitsizliğinden,

$$s^{\varepsilon} d(q,p) = s^{\varepsilon} d(fq,gp) \leq M_s(q,p) = d(q,p)$$

elde edilir. Buradan $d(q,p) = 0$ olacağından $q = p$ olur. Yani f, g, S ve T' nin ortak sabit noktası tektir.

4.2.4. Sonuç: (X,d) herhangi bir b-m.u. , $f, T : X \to X$ dönüşümler, $\varepsilon > 1$, $s > 1$ olsun ve her $x, y \in X$ için,

$$M_s(x,y) = \max\left\{d(Tx,Ty), d(fx,Tx), d(fy,Ty), \frac{d(fx,Ty) + d(Tx,fy)}{2s}\right\}$$

olmak üzere,

$$s^{\varepsilon} d(fx,fy) \leq M_s(x,y)$$

koşulu sağlansın.

Eğer, (f,T) dönüşüm çifti b- (E.A) özelliğini sağlıyorsa ve $T(X)$ alt uzayı X içinde kapalı ise o zaman (f,T) dönüşüm çiftinin bir çakışık noktası vardır.

Ayrıca (f,T) dönüşüm çifti zayıf bağdaşık ise f ve T dönüşümlerinin tek bir ortak bir sabit noktası vardır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 6).

4.2.5. Sonuç: (X,d) herhangi bir b-m.u. olsun. $f, T : X \to X$ tanımlanan dönüşümler her $x, y \in X$ için,

$$M_s(x,y) = \max\left\{d(Tx,Ty), d(fx,Tx), d(fy,Ty), \frac{d(fx,Ty) + d(Tx,fy)}{2s}\right\}$$

olmak üzere,

$$s^2 d(fx,fy) \leq M_s(x,y)$$

koşulunu sağlansın.

Eğer, (f,T) dönüşüm çifti b-(E.A) özelliğini sağlıyorsa ve $T(X)$ alt uzayı X içinde kapalı ise o zaman (f,T) dönüşüm çiftinin bir çakışık noktası vardır.

Ayrıca (f,T) dönüşüm çifti zayıf bağdaşık ise f ve T dönüşümlerinin tek bir ortak bir sabit noktası vardır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 6).

4.2.6. Örnek: $X = [0,1]$ olsun ve $d: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ (x+y)^2, & x \neq y \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $s = 2$ olmak üzere (X,d) bir b-m.u. olur. $f,g,S,T : X \to X$ dönüşümleri,

$$f(x) = \frac{x}{4}, \qquad S(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & ; x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = 0, \qquad T(x) = x$$

biçiminde tanımlansın. $g(X)$, X uzayının kapalı bir alt uzayıdır. $f(X) \subseteq T(X)$ ve $g(X) \subseteq S(X)$ olduğu açıktır. X' de her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ olacak biçimde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \frac{1}{8}$ olur. Böylece (f,S) dönüşüm çifti b-(E.A) özelliğini sağlar. Fakat (f,S) dönüşüm çifti bağdaşık değildir. Çünkü $\lim_{n\to\infty} d(fSx_n, Sfx_n) \neq 0$' dır. Her $x,y \in X$ ve $\varepsilon = 2$ için, (4.10) eşitsizliğinin sağlanır. Çünkü,

$\boldsymbol{i}$) Eğer $x = 0$ ise (4.10) eşitsizliği sağlanır.

$\boldsymbol{ii}$) Eğer $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ise,

$$s^{\varepsilon} d(fx,gy) = 2^2 \left(\frac{x}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{9x}{4}\right)^2 = d(fx,Sx) \leq M_s(x,y)$$

$\boldsymbol{iii}$) Eğer $x = \frac{1}{2}$ ise,

$$s^{\varepsilon}d(fx,gy) = 2^2\left(\frac{1}{8}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{8}+1\right)^2 = d(fx,Sx) \leq M_s(x,y)$$

$\boldsymbol{iv}$) Eğer $x \in \left(\frac{1}{2},1\right]$ ise,

$$s^{\varepsilon}d(fx,gy) = 2^2\left(\frac{x}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\right)^2 = d(fx,Sx) \leq M_s(x,y)$$

olur. Yine, (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşıktır. Böylece, 4.2.3. Teoremden f,g,S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası tektir ve bu nokta 0' dır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 7).

4.2.7. Teorem: (X,d) herhangi bir b-m.u. , $f,g,S,T : X \to X$ dönüşümler $f(X) \subseteq T(X)$ ve $g(X) \subseteq S(X)$, $\varepsilon > 1$, $s > 1$ olsun ve her $x,y \in X$ için,

$$M_s(x,y) = \max\left\{d(Sx,Ty), \frac{d(fx,Sx),d(gy,Ty)}{2s}, \frac{d(fx,Ty)+d(Sx,gy)}{2s}\right\}$$

olmak üzere,

$$s^{\varepsilon}d(fx,gy) \leq M_s(x,y)$$

koşulu sağlansın.

Eğer, (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftlerinin herhangi biri b-(E.A) özelliğini sağlıyorsa ve $f(X),g(X),S(X),T(X)$ alt uzaylarının herhangi biri X içinde kapalı ise o zaman (f,S) ve (g,T) dönüşüm çiftlerinin bir çakışık noktası var olur.

Ayrıca, (f,S) ve (g,T) çiftleri zayıf bağdaşıksalar f,g,S ve T dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktası vardır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 7-8).

4.2.8. Teorem: (X,d) herhangi bir b-m.u. , $f,g,S,T : X \to X$ tanımlanan dönüşümler, $f(X) \subseteq T(X)$ ve $g(X) \subseteq S(X)$, $\varepsilon > 1$, $s > 1$ olsun ve her $x,y \in X$ için,

$$M_s(x,y) = \max\{d(Sx,Ty), d(fx,Sx), d(gy,Ty), d(fx,Ty), d(Sx,gy)\}$$

olmak üzere,

$$s^{\varepsilon} d(fx, gy) \leq M_s(x, y)$$

koşulu sağlansın.

Eğer, (f, S) ve (g, T) dönüşüm çiftlerinin herhangi biri b- (E.A) özelliğini sağlıyorsa ve $f(X), g(X), S(X)$ ve $T(X)$ alt uzaylarından herhangi biri X içinde kapalı ise o zaman (f, S) ve (g, T) dönüşüm çiftlerinin bir çakışık noktası var olur.

Ayrıca (f, S) ve (g, T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşıksalar f, g, S ve T dönüşümlerinin tek bir ortak sabit noktası vardır (Öztürk ve Radenovic, 2016, s. 8).

4.3. Genişleme Dönüşümleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri

4.3.1. Tanım: (X, d) herhangi bir b-m.u. , $T : X \to X$ tanımlanan bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \geq kd(x, y)$$

olacak biçimde bir $k > s$ reel sabiti varsa o zaman T' ye "*genişleme dönüşümü"* denir (Mohanta, 2016, s. 104).

4.3.2. Önteorem: f ve g, X üzerinde zayıf bağdaşık dönüşümler olsun. Eğer f ve g dönüşümlerinin $x \in X$ için $\omega = fx = gx$ olacak biçimde tek bir x çakışık noktası varsa o zaman ω, f ve s' nin tek ortak sabit noktası olur (Abbas ve Jungck, 2008, s. 417).

Kanıt: $\omega = fx = gx$ ve f ile g zayıf bağdaşık dönüşümler olduklarından $f\omega = fgx = gfx = g\omega$ yani ω, f ve g dönüşümlerinin bir çakışık noktası olur. Ancak f ile g' nin tek bir çakışık noktası x olduğundan $\omega = x$ olur. Bu ise $\omega = f\omega = g\omega$ olmasını verir.

Ayrıca f ve g' nin ω' dan farklı bir sabit noktası z yani $z = fz = gz$ ise z bir çakışık nokta olup, çakışık noktanın tekliğinden $\omega = z$ olur. Yani, ω, f ile g' nin tek ortak sabit noktasıdır.

4.3.3. Teorem: (X,d) bir b-m.u. , $f,g:X\to X$ dönüşümler $\alpha,\beta,\gamma;\ \alpha+\beta+\gamma>s$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olmak üzere her $x,y\in X$ için,

$$d(fx,fy)\geq \alpha d(gx,gy)+\beta d(fx,gx)+\gamma d(fy,gy) \qquad (4.14)$$

koşulu sağlansın ve

$(\boldsymbol{i})$ $\beta<1$ ve $\alpha\neq 0$ $(\boldsymbol{ii})$ $g(X)\subseteq f(X)$ $(\boldsymbol{iii})$ $f(X)$ veya $g(X)$ tam olsun. O zaman f ve g dönüşümlerinin X içinde bir çakışık noktası vardır. Eğer $\alpha>1$ ise bu çakışık nokta tektir. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşık dönüşümler ve $\alpha>1$ ise f ve g dönüşümlerinin X içinde tek bir ortak sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 104).

Kanıt: Herhangi bir $x_0\in X$ için $g(X)\subseteq f(X)$ olduğundan $gx_0=fx_1$ olacak biçimde $x_1\in X$ vardır. Bu biçimde devam edilerek her $n\geq 1$ için $fx_n=gx_{n-1}$ olacak biçimde X' de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. (4.14) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(gx_{n-1},gx_n)&=d(fx_n,fx_{n+1})\\ &\geq \alpha d(gx_n,gx_{n+1})+\beta d(fx_n,gx_n)+\gamma d(fx_{n+1},gx_{n+1})\\ &=\alpha d(gx_n,gx_{n+1})+\beta d(gx_{n-1},gx_n)+\gamma d(gx_n,gx_{n+1}) \end{aligned}$$

olur. $\lambda=\frac{1-\beta}{\alpha+\gamma}$ için,

$$d(gx_n,gx_{n+1})\leq \lambda d(gx_{n-1},gx_n) \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

bulunur. $\lambda\in\left(0,\frac{1}{s}\right)$ olacağından, 3.2.2. Önteorem' den, $\{gx_n\}$, $g(X)$ içinde bir Cauchy dizisi olacaktır. $g(X)$, X' in tam alt uzayı olsun. Bu durumda, $gx_n\to y$ ve $fx_n\to y$ sağlayan bir $y\in g(X)\subseteq f(X)$ vardır. Yine, $f(X)$ tam olursa da aynı biçimde $y\in f(X)$ vardır. Böylece $fu=y$ olacak biçimde bir $u\in X$ vardır. (4.14) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(gx_{n-1},fu)&=d(fx_n,fu)\\ &\geq \alpha d(gx_n,gu)+\beta d(fx_n,gx_n)+\gamma d(fu,gu)\\ &\geq \alpha d(gx_n,gu) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha\neq 0$ olduğundan,

$$d(gx_n, gu) \leq \frac{1}{\alpha} d(gx_{n-1}, fu)$$

olur. Buradan, d' nin *iii)* özelliğinden,

$$d(y, gu) \leq s[d(y, gx_n) + d(gx_n, gu)]$$

$$\leq s\left[d(y, gx_n) + \frac{1}{\alpha} d(gx_{n-1}, fu)\right]$$

$$= s\left[d(y, gx_n) + \frac{1}{\alpha} d(fx_n, fu)\right]$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(y, gu) = 0$ olur. Buradan $gu = y$' dir. Yani, $fu = gu = y$' dir. Bu durumda u, f ve g' nin çakışık noktasıdır. $\alpha > 1$ olmak üzere f ve g' nin u' dan farklı bir çakışık noktası v olsun. Buradan $x \in X$ için $fx = gx = v$ olur. O zaman, (4.14) eşitsizliğinden,

$$d(y, v) = d(fu, fx) \geq \alpha d(gu, gx) + \beta d(fu, gu) + \gamma d(fx, gx) = \alpha d(y, v)$$

olacağından,

$$d(y, v) \leq \frac{1}{\alpha} d(y, v)$$

olur. $\alpha > 1$ olduğundan bu eşitsizliğin sağlanması için $d(v, y) = 0$ olmalıdır. Yani, $v = y$' dir. Sonuç olarak, f ve g dönüşümlerinin X uzayı içinde tek bir çakışık noktası vardır.

Eğer f ve g zayıf bağdaşık olursa, 4.3.2. Önteorem' den f ve g dönüşümlerinin X uzayı içinde tek bir ortak sabit noktası vardır.

4.3.4. Sonuç: (X, d) herhangi bir b-m.u. , $f, g : X \to X$ dönüşümleri, $\alpha > s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \geq \alpha d(gx, gy)$$

koşulunu sağlasın. Eğer $g(X) \subseteq f(X)$ ve $f(X)$ veya $g(X)$ tam ise o zaman f ve g dönüşümlerinin X içinde tek bir çakışık noktası vardır. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşık dönüşümler ise f ve g dönüşümlerinin X içinde tek bir ortak bir sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 106).

Kanıt: 4.3.3. Teorem' de $\beta = \gamma = 0$ alınırsa kanıt tamamlanmış olur.

4.3.5. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. , $g : X \to X$ tanımlanan örten bir dönüşüm $\lambda \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(gx, gy) \leq \lambda d(x, y)$$

koşulu sağlansın. O zaman, g dönüşümünün X içinde tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca $\{g^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır (Mohanta, 2016, s. 106).

Kanıt: 4.3.3. Teorem' de $\beta = \gamma = 0$ ve $f = I$ alınarak bulunur.

4.3.6. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. , $f : X \to X$ tanımlanan dönüşüm, $\alpha > s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \geq \alpha d(x, y)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda f dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 106).

Kanıt: 4.3.3. Teorem' de $\beta = \gamma = 0$ ve $g = I$ alınarak bulunur.

4.3.7. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. , $f : X \to X$ tanımlanan örten bir dönüşüm, $\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha \neq 0, \ \beta < 1, \ \alpha + \beta + \gamma > s$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(fx, fy) \geq \alpha d(x, y) + \beta d(fx, x) + \gamma d(fy, y)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda f dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Ayrıca, $\alpha > 1$ olursa bu sabit nokta tektir (Mohanta, 2016, s. 107).

Kanıt: 4.3.3. Teorem' de $g = I$ alınarak elde edilir.

4.3.8. Teorem: (X,d) herhangi bir tam b-m.u., $S,T:X\to X$ dönüşümler ve α,β,k; $\alpha > s+(1+s)k$ ve $\beta > s+(1+s)k$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olsun ve her $x,y\in X$ için,

$$d(T(Sx),Sx)+\frac{k}{s}d(T(Sx),x)\geq \alpha d(Sx,x) \tag{4.15}$$

ve

$$d(S(Tx),Tx)+\frac{k}{s}d(S(Tx),x)\geq \beta d(Tx,x) \tag{4.16}$$

koşulları sağlansın. Eğer, S ve T sürekli ve örten dönüşümler ise S ve T' nin X' de ortak sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 107).

Kanıt: Herhangi bir $x_0\in X$ noktası alınsın. T dönüşümü örten olduğundan $x_0=Tx_1$ olacak biçimde $x_1\in X$ vardır. Yine S örten olduğundan $x_1=Sx_2$ olacak biçimde $x_2\in X$ vardır. Bu biçimde devam edilerek her $n\in\mathbb{N}$ için $x_{2n}=Tx_{2n+1}$ ve $x_{2n-1}=Sx_{2n}$ olacak biçimde X' de $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Her $n=0,1,2,3,\ldots$ için

(4.15) eşitsizliğinden,

$$d(T(Sx_{2n+2}),Sx_{2n+2})+\frac{k}{s}d(T(Sx_{2n+2}),x_{2n+2})\geq \alpha d(Sx_{2n+2},x_{2n+2})$$

olmak üzere,

$$d(x_{2n},x_{2n+1})+\frac{k}{s}d(x_{2n},x_{2n+2})\geq \alpha d(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

bulunur. Buradan, d' nin *iii)* özelliğinden,

$$\alpha d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leq d(x_{2n},x_{2n+1})+kd(x_{2n},x_{2n+1})+kd(x_{2n+1},x_{2n+2})$$

olup,

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2})\leq \frac{1+k}{\alpha-k}d(x_{2n},x_{2n+1}) \tag{4.17}$$

olur. Benzer biçimde (4.16) eşitsizliğinden,

$$d(x_{2n},x_{2n+1})\leq \frac{1+k}{\beta-k}d(x_{2n-1},x_{2n}) \tag{4.18}$$

bulunur. $\lambda = \max\left\{\frac{1+k}{\alpha-k}, \frac{1+k}{\beta-k}\right\}$ alınırsa, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{s}\right)$ olacağından. (4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri kullanılarak her $n \geq 1$ için,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.19}$$

olur.

3.2.2. Önteorem' den, X tam olduğundan $n \to \infty$ için $x_n \to u$ olacak biçimde bir $u \in X$ vardır. Bu durumda $n \to \infty$ için $x_{2n+1} \to u$ ve $x_{2n} \to u$ olur. S ve T dönüşümleri sürekli olduklarından $Tx_{2n+1} \to Tu$ ve $Sx_{2n} \to Su$ bulunur. Yani, $x_{2n} \to Tu$ ve $x_{2n-1} \to Su$ $(n \to \infty)$ olur. Limitin tekliğinden $u = Su = Tu$ bulunur. Böylece u, S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

4.3.9. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. , $T : X \to X$ sürekli ve örten bir dönüşüm, $\alpha, \beta, k,\ \alpha > s + (1+s)k$ olacak biçimde negatif olmayan reel sayılar olsun ve her $x, y \in X$ için,

$$d(T^2x, Tx) + \frac{k}{s} d(T^2x, x) \geq \alpha d(Tx, x)$$

koşulu sağlansın. O zaman T dönüşümünün X üzerinde bir sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 108).

Kanıt: 4.3.8. Teorem' de $S = T$ ve $\beta = \alpha$ alınarak bulunur.

4.3.10. Sonuç: (X, d) herhangi bir tam b-m.u. , $T : X \to X$ sürekli ve örten bir dönüşüm olsun ve $\alpha > s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$d(T^2x, Tx) \geq \alpha d(Tx, x)$$

koşulu sağlansın. O zaman T dönüşümünün X üzerinde bir sabit noktası vardır (Mohanta, 2016, s. 108).

Kanıt: 4.3.8. Teorem' de $S = T$ ve $\beta = \alpha,\ k = 0$ alınarak elde edilir.

4.3.11. Örnek: $X = [0,1]$ ve $p > 1$ olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ elemanı için,

$$d(x, y) = |x - y|^p$$

biçiminde tanımlansın. $s = 2^{p-1}$ için (X, d) bir b-m.u.'dır. $f, g : X \to X$ dönüşümleri her $x \in X$ elemanı için $fx = \frac{x}{3}$ ve $gx = \frac{x}{9} - \frac{x^2}{27}$ biçiminde tanımlansın. O zaman $\alpha = 3^p$, $\beta = \gamma = 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için bir $d(fx, fy) \geq 3^p d(gx, gy)$ yani (4.14) koşulu sağlanır. Böylece 4.3.3. Teorem' in tüm koşulları sağlanır ve $0 \in X$, f ve g' nin tek ortak sabit noktası olur (Mohanta, 2016, s. 108).

4.3.12. Örnek: $X = [0, \infty)$ olsun ve $d : X \times X \to [0, \infty)$ dönüşümü her $x, y \in X$ elemanı için,

$$d(x, y) = |x - y|^2$$

biçiminde tanımlansın. $s = 2$ için (X, d) bir tam b-m.u.'dır. $S, T : X \to X$ dönüşümleri her $x \in X$ elemanı için $Sx = 3x$ ve $Tx = 4x$ biçiminde tanımlansın. O zaman k negatif olmayan bir reel sayı ve $\alpha = \beta = 3 + 3k > s + (1 + s)k$ olmak üzere (4.15) ve (4.16) koşulları sağlanır. Bu durumda 4.3.8. Teorem' in tüm koşulları sağlanır ve $0 \in X$, S ve T' nin ortak sabit noktası olur (Mohanta, 2016, s. 109).

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Literatürde metrik uzaylarda verilen birçok sabit nokta teoremi, değişik koşullar altında *b*-metrik uzaylara genelleştirilmiştir. Verilen bu teoremlerin bazıları incelenip derlenerek bu çalışma oluşturulmuştur.

Sonraki süreçte ise bu tezde incelenen teoremler temel alınarak, *b*-metrik uzaylarda daha önce verilen sabit nokta teoremleri genelleştirilerek yeni sonuçların elde edilmesi hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

Abbas, M., & Jungck, G. (2008). Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341*, 416-420, doi: 10.1016/j.jmaa.2007.09.070.

Achari, J., (1976). On Ciric's non-unique fixed points, *Matematički Vesnik, 13*(28), 255-257.

Aghajani, A., Abbas, M., & Roshan, J. R. (2014). Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. *Mathematica Slovaca 64*(4), 941-960.

Agrawal, S., Qureshi, K., & Nema, J. (2016). A fixed point Theorem for b-metric space. *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. 9*(1), 45-50.

Almazel, S., Ansari, Q. H., & Khamsi, M. A. (2014). *Topics in Fixed Point Theory.* Switzerland: Springer.

Alsulami, H. H., Karapınar, E., & Rakočević, V. (2017). Ćirić type nonunique fixed point theorems on b-metric spaces. *Filomat 31*(11), 3147-3156, doi: 10.2298/FIL1711147A.

Aydi, H., Bota, M. F., Karapınar, E., & Mitrović, S. (2012). A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications, 88*, 1-8.

Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points.* Switzerland: Springer.

Boriceanu, M. (2009). Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics. *Studia Universıtatis "Babeş-Bolyai", Mathematica, LIV*(3), 3-5.

Boriceanu, M., Bota, M., & Petruşel, A. (2010). Multivalued fractals in b-metric spaces. *Central European Journal of Mathematics, 8*(2), 367-377, doi: 10.2478/s11533-010-0009-4.

Bota, M., Molnár, A. & Varga, C. (2011). On Ekeland's variational principle in b-metric spaces. *Fixed Point Theory, 12*(2), 21-28.

Chen, C., Dong, J., & Zhu C. (2015). Some fixed point theorems in b-metric-like spaces. *Fixed Point Theory and Applications, 122*, 1-10, doi: 10.1186/s13663-015-0369-3.

Ciric, L. B., (1974). One some maps with a nonunique fixed point. *Publications de l'Institut Mathématique, 17,* 52-58.

Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1,* 5-11.

Huang, H., Deng, G., & Radenović, S. (2018). Fixed point theorems in b-metric spaces with applications to differential equations. *Journal of Fixed Point Theory Applications, 20*(52), doi: 10.1007/s11784-08-0491-z.

Hussain N. & Shah M. H. (2011). KKM mappings in cone b-metric spaces. *Computers and Mathematics with Applications 62,* 1677-1684.

Jungck G. (1986). Compatible mappings and common fixed points. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 9*(4), 771-779.

Karapınar, E. (2012). A new non-unique fixed point theorem. *Journal of Applied Functional Analysis, 7*(1-2), 92-97.

Karapınar, E. (2018). A short survey on the recent fixed point results on b-metric spaces. *Constructive Mathematical Analysis 1*(1), 15-44.

Kır, M., & Kızıltunç, H. (2013). On some well known fixed point Theorems in b-metric spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 1*(1), 13-16, doi:10.12691/tjant-1-1-4.

Kirk, W., Shahzad, N. (2014). *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Switzerland: Springer.

Mohanta, S. K. (2016). Coincidence points and common fixed points for expansive type mappings in b-metric spaces. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics. 11*(1), 101-113, doi: 10.7508/ijmsi.2016.01.009.

Öztürk, V. & Radenović, S. (2016). Some remarks on b-(E.A)-property in b-metric spaces. *Springer Plus* 5(544), 1-10 doi: 10.1186/s40064-016-216333-z.

Öztürk, V. & Türkoğlu D. (2015). Common Fixed Point Theorems For Mappings Satisfying (E.A)-Property In *b*-Metric Spaces, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications 8*(1), 1127-1133.

Pachpatte, B. G. (1979). On Ciric type maps with a nonunique fixed point, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 10*(8), 1039-1043.

Roshan, J. R., Shobkolaei N., Sedghi S., & Abbas, M. (2014). Common fixed point of four maps in b-metric spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 43*(4), 613-624.

Shatanawi, W. (2016). Fixed and common fixed point for mappings satisfying some nonlinear contractions in b-metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis, 7*(4), 1-12.

Singh, S. L., & Prasad, B. (2008). Some coincidence theorems and stability of iterative procedures. *An International Journal Computers & Mathematics with Applications, 55*(11), 2512-2520, doi: 10.1016/j.camwa.2007.10.026.

Singhal, A., Sharma, R. K., & Agrawal, A. (2018). Generalized common fixed point theorem for four self mappings in b-metric space. *İnternational Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences. 5*(4), 218-225.

Sintunavarat, W. (2016). Nonlinear integral equations with new admissibility types in b-metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications, 18,* 397-416.

Tiwari., S. K., & Kumar C. (2018). Some fixed point results in b-metric spaces. *International Journal of Mathematics Trends and Technology,* 55(1), 42-47.

Xie, S., Wang, Y. & Zhong L. (2016). Some fixed point theorems in b-metric spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 110*(4), 571-580, doi: 10.12732/ijpam.v110i4.1.

Yıldırım, İ., & Ansari, A. H. (2018). Some new fixed point results in b-metric spaces. *Topology Algebra Applications, 6*, 102-106, doi: 10.1515/taa-2018-0009.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hilal GIDIK

Doğum Yeri ve Tarihi : Edirne / 1991

e-mail : hilalgdkk@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Lise	: 80. Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Edirne	2009
Lisans	: Matematik, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyonkarahisar	2013
Y. Lisans	: Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne	2019

İş Deneyimleri

2015 - … : Gençlik ve Spor Bakanlığı, Edirne Kız Yurdu, Yurt Yönetim Personeli

Yabancı Diller

İngilizce