T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLAR TEORİSİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİNE UYGULAMALARI

EMİNE ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. MUSTAFA TELCİ

EDİRNE - 2019

Emine ÖZ' ün hazırladığı "MODÜLER METRİK UZAYLAR TEORİSİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİNE UYGULAMALARI" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Doç. Dr. Mustafa TELCİ	
Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN	
Dr. Öğr. Üyesi İlker ŞAHİN	

Tez Savunma Tarihi: 25/07/2019

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Doç. Dr. Mustafa TELCİ
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

25 / 07 / 2019

Emine ÖZ



Yüksek Lisans Tezi

Modüler Metrik Uzaylar Teorisi ve Sabit Nokta Teoremlerine Uygulamaları

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu çalışmada Chistyakov tarafından tanımlanmış ve geliştirilmiş olan Modüler metrik uzaylar teorisi incelenmiştir.

Birinci bölümde, klasik modülerler ile ilgili bilgi verilmiş ve konunun matematikteki yeri tarihsel gelişimiyle birlikte özetlenmiştir.

İkinci bölümde, her hangi bir küme üzerindeki bir metrikten bir modüler kavramına geçiş incelenmiş, modüler metrik tanımlanmış, örneklerle birlikte bazı önemli özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, modüler uzaylar tanımlanmış ve modüler uzaylar üzerindeki temel metriklerle birlikte bazı önemli özellikleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, metrik yakınsama ile birlikte modüler yakınsama tanımlanmış ve arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca kısa olarak metrik topolojiye değinilmiştir.

Beşinci bölümde, modüler uzaylardaki sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Bu amaçla Lipschitzian dönüşümlerinin modüler versiyonları verilmiş, modüler uzaylara uygun olarak Banach'ın sabit nokta teoremi incelenmiş ve Caristi'nin teoreminin bir versiyonu modüler uzaylara uyarlanmıştır.

Altıncı bölümde, teorinin elde edilen sonuçlara kısaca değinilerek teorinin önemi vurgulanmıştır.

Yıl : 2019

Sayfa Sayısı : 58

Anahtar Kelimeler :Modüler uzaylar, modüler metrik, modüler yakınsama, sabit nokta.

Master's Thesis
Modular Metric Spaces Theory and Applications to Fixed Point Theorems
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

In this work, comprised of six sections, defined and developped by Chistyakov modular metric spaces theory is analyzed.

In the first section, information is given about calssical modular and along with its historical development, position of the subject in mathematies is summarised.

In the second section, passing from a metric on any set to a modular concept is analyzed, modular metric is defined, together with the examples, some important features are researched.

In the third section, modular spaces are described, along with the basic metrics on modular spaces, some significant characteristics are investigated.

In the fourth section, together with metric convergence, modular convergence is identified and relations between are studied. Also, metric topology is mentioned briefly.

In the fifth section, fixed point theorems on modular spaces are analyzed. For that purpose, modular versions of Lischitzian transformations are given, in accordance with the modular spaces, Banach's fixed point theory is surveyed and a version of Caristi's theory is adapted to modular spaces.

In the sixth section, touching upon the results of the theory shortly, significance of the theory is emphasized.

Year : 2019

Number of Pages : 58

Keywords : Modular spaces, modular metric, modular convergence, fixed point

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde üç buçuk yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana değerli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Doç. Dr. Mustafa TELCİ' ye teşekkürü borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Bu zorlu süreçte en büyük şanslarım olan ve daima desteklerini esirgemeyen aileme, eşim Fevzi ÖZ ve biricik kızım Eslem ÖZ' e sonsuz teşekkürler.

Emine ÖZ

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI……...……..i
DOĞRULUK BEYANI……ii
ÖZET……iii
ABSTRACT……iv
ÖNSÖZ…….....v
İÇİNDEKİLER……vi
SİMGELER VE KISALTMALAR……..……..viii

1.BÖLÜM GİRİŞ…….1

1.1.TANIM (Orlicz,1988)…….1

2.BÖLÜM / MODÜLER METRİKLER…….3

2.1. Metrikten Modülerlere Geçiş…….3
2.2. Modüler Metrik……..6
2.3. Örnekler……..9

3.BÖLÜM / MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE METRİKLER.....16

3.1.Modüler Uzaylar……16
3.2. Temel Metrik……..…..17

4.BÖLÜM / METRİK YAKINSAMA, MODÜLER YAKINSAMA ve METRİK TOPOLOJİ……..24

4.1. Metrik Yakınsama……24
4.2. Metrik Topoloji……27
4.3. Modüler Yakınsama……29

5.BÖLÜM / MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ..35

5.1. Modüler Lipschitzian Dönüşümler……...35
5.2. Fonksiyonların Sabit Noktaları ve Daraltan Dönüşümler……....39
5.3. Modüler Uzaylarda Sabit Nokta Teoreminin Bir Örneği…….45
5.4. Modüler Metrik Uzaylarda Caristi Tipinde Bir Sabit Nokta Teoremi…….50

6.BÖLÜM / SONUÇLAR VE TARTIŞMA……...54

KAYNAKLAR……55

ÖZGEÇMİŞ…….58

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	Reel sayıların kapalı aralığı
(a, b)	Reel sayıların açık aralığı
$(0, \infty)$	Pozitif reel sayılar kümesi
$[0, \infty)$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$[0, \infty]$	Genişletilmiş negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$\equiv$	Tanımların eşitliği, denklik
$\not\equiv$	Tanımların eşitsizliği, denk değil
$\Leftrightarrow$	Çift taraflı gerektirme (gerekli ve yeterli koşul)
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
w	Bir modüler için genel gösterim
ρ	Klasik modüler
d	Metrik gösterimi
w_{+0} , w_{-0}	w nin sağ ve sol limitleri
X_w	$X_w(x_0) = \left\{x \in X: \lim_{t\to\infty} w_t(x, x_0) = 0\right\}$
X_w^*	$X_w^*(x_0) = \{x \in X: \exists\ t > 0 \ni\ w_t(x, x_0) < \infty\}$

$d_w^0(x,y)$	$\inf\{t>0:\ w_t(x,y)\le t\}$
$d_w^*(x,y)$	$\inf\ \{t>0:\ w_t(x,y)\le 1\}$
$B(x:r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$B[x:r]$	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
A°	A kümesinin içi.
$\tau(d_w^0)$	X_w^* üzerine indirgenen metrik topoloji
$\bar{A}$	A nın kapanışı
$x_n \overset{w}{\to} x$	Modüler limit $(w-\text{limit})$
$w-$ Cauchy	Modüler Cauchy
$k_w(T)$	T nin en küçük modüler Lipschitz sabiti
T^n	T dönüşümünün n. iterasyonu
$w-$ daraltan	Modüler daraltan
$O_T(x,\infty)$	x in yörüngesi
$T\circ S$	T ve S dönüşümlerinin bileşkesi
$w-$ a. y. s.	Modüler yörüngesel alttan yarı sürekli.
$[\![x]\!]$	x reel sayısının tam değeri

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fonksiyonel Analizdeki Modüler kavramı bir lineer uzay üzerindeki norm kavramının bir genişlemesidir. Modüler lineer uzayının genel teorisi ilk olarak 1950 de Nakano (1950) tarafından verilmiştir. Bu, Orlicz uzayları teorisi ile yakından ilgilidir. Her iki teori 1950'li yılların sonundan itibaren Maligranda (1989), Musielak (1983), Orlicz (1961) ve Krasnosel'skiĭ, Rutickiĭ (1958) tarafından geniş ölçüde çalışılarak genişletilmiştir. Bu sayede Orlicz uzaylar ve modüler lineer uzaylar modern nonlineer fonksiyonel analizin klasik araçları olmuşlardır.

1.1.Tanım (Orlicz,1988)

X bir lineer uzay olsun. Eğer $\rho: X \to [0, \infty]$ fonksiyoneli :

($\rho.1$) $\rho(0) = 0$

($\rho.2$) Bir $x \in X$ verildiğinde her $\alpha > 0$ için $\rho(\alpha x) = 0$ ise $x = 0$

($\rho.3$) Her $x \in X$ için $\rho(-x) = \rho(x)$,

($\rho.4$) Her $x, y \in X$ ve $\alpha + \beta = 1$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y) \ ,$$

koşullarını sağlıyorsa ρ ' ya X üzerinde (klasik) *modüler* denir.

Eğer ($\rho.4$) teki eşitsizlik yerine ,

($\rho.5$) $\quad \rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$,

eşitsizliği alınırsa, o zaman ρ fonksiyoneline X üzerinde (klasik) *konveks modüler* denir.

Bir X reel lineer uzayı üzerinde tanımlı $\|.\|: X \to [0, \infty)$ normu, X üzerindeki konveks modülere bir örnektir.

X in lineer yapısından gelen bazı kısıtlamalara karşın modüler lineer uzaylar ve Orlicz uzaylar teorisi geniş uygulamalara sahiptir. (Adams,1975), (Lindenstrauss, Tzafriri, 1979), (Maligranda, 1989), (Musielak, 1983), (Rao, Ren, 2002).

Bu çalışmada genel olarak ;

i) Bir lineer uzay üzerindeki klasik modüler kavramının herhangi bir küme üzerindeki bir modüler kavramına genişletilmesi incelenecek,

ii) Modülerler yardımı ile metrik tanımlanacak,

iii) Modüler yakınsama gibi yeni bir yakınsama biçimi çalışılacak,

iv) Modüler Lipschitzian dönüşümler incelenecek,

v) Banach Daralma ilkesi, modüler uzaylara genişletilecek,

vi) Modüler uzaylarda sabit nokta teoremi ile ilgili bir örnek verilecek,

vii) Caristi'nin sabit nokta teoreminin bir versiyonu modüler uzaylara genişletilecektir.

BÖLÜM 2

MODÜLER METRİKLER

2.1. Metrikten Modülerlere Geçiş

Bir küme üzerindeki modüler kavramını daha iyi anlayabilmek için önce bir X kümesi üzerinde tanımlı metrik kavramını hatırlatalım.

$X \neq \emptyset$ olan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d, her $x, y, z \in X$ için ;

$(d.1)$ $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$,

$(d.2)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$(d.3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

koşullarını sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir *metrik* , (X,d) ikilisine de *metrik uzay* denir.

Eğer $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(d.2)$, $(d.3)$ ve

$(d.1')$ Her $x \in X$ için $d(x,x) = 0$

özelliklerini sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir *pseudometrik* denir.

Bir (X,d) metrik uzayı tüm elemanları arasındaki uzaklığın belirlenmiş olduğu uzaydır. Bir d metriğinin negatif değerler almadığı açıktır ve sonlu değerler alır. Yani; $x, y \in X$ için x ile y arasındaki uzaklık

$$0 \leq d(x,y) < \infty$$

dır.

Eğer X en az iki elemana sahipse $X \times X$ üzerinde $d \not\equiv 0$ dır.

$(d.1) - (d.3)$ özelliklerini sağlayan d metriği eğer sonsuz değerler alıyorsa d ye X üzerinde *genişletilmiş metrik* ve (X,d) ikilisine de *genişletilmiş metrik uzay* denir.

Bir X kümesi üzerindeki modüler kavramı, özel olarak fiziksel terimlerle doğal olarak aşağıdaki biçimde yorumlanabilir.

Sezgisel olarak bir küme üzerindeki metrik, küme üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki negatif olmayan sonlu uzaklığı temsil ederken bir küme üzerindeki bir w modüleri de her hangi bir $t > 0$ parametresi için t zaman olarak düşünüldüğünde $x, y \in X$ için

$$0 \leq w_t(x,y) \leq \infty$$

olmak üzere t zamanında x ile y arasındaki hız olarak yorumlanabilir.

Bunu daha fazla detaylandırmak için;

$d(x,y) \geq 0$, x ve y noktaları arasındaki uzaklık ve $t > 0$ zaman olmak üzere

$$w_t(x,y) = \frac{d(x,y)}{t} \tag{2.1}$$

örneği göz önüne alındığında w_t, $d(x,y)$ uzaklığında t zamanında x den y ye hareket edildiğinde ortalama hızı verecektir. Buradan aşağıdaki sonuçlar çıkartılabilir.

1. X deki iki x ve y noktasının eşit olması ($d(x,y) = 0$) için gerek ve yeterli koşul herhangi bir $t > 0$ zamanında x den y ye hareketin hızı $w_t(x,y) = 0$ olmasıdır. (Yani herhangi bir t zamanında hareket yoktur.) Bunu; $x, y \in X$ verildiğnde

$$x = y \Leftrightarrow \text{her } t > 0 \text{ için } w_t(x,y) = 0 \tag{2.2}$$

ile gösterebiliriz.

2. x ile y arasındaki uzaklık eşit olacağından ($d(x,y) = d(y,x)$) herhangi bir $t > 0$ zamanı için x noktasından y ye hareket esnasındaki ortalama hız ile ters yöndeki ortalama hız değişmeyecektir. Yani $x, y \in X$ verildiğinde

$$\text{her } t > 0 \text{ için } w_t(x,y) = w_t(y,x) \tag{2.3}$$

olur.

3. Hız için üçgen eşitsizliğine karşılık gelen (2.1) eşitliğinin üçüncü özelliği önemlidir. x den y ye hareketin iki şekilde yapıldığı varsayılsın, fakat her iki durumda da zaman aynı olsun.

a) x den y ye hareket ederken üçüncü bir $z \in X$ noktasından geçilsin.

b)Direk x den y ye hareket edilsin.

x den z ye harekette ihtiyaç duyulan zaman t ve z den y ye harekette ihtiyaç duyulan zaman s ise bunlara karşılık gelen ortalama hızlar sırasıyla $w_t(x,z)$ ve $w_s(z,y)$ ye eşittir. (a) durumundaki hareket esnasında geçen toplam zaman $t+s$ ye eşittir. Her iki durumda da x den y ye hareketteki zamanlar aynı olduğundan (b) durumundaki ortalama hız $w_{t+s}(x,y)$ dir. x ile y arasındaki uzaklık x ile z ve z ile y arasındaki uzaklıklar toplamını aşamayacağından

($d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$) $w_{t+s}(x,y)$ hızı $w_t(x,z)$ veya $w_s(z,y)$ hızlarından en az birini aşamayacaktır. Bu durum özel olarak $x,y,z \in X$ ve $t,s>0$ için

$$w_{t+s}(x,y) \leq \max\{w_t(x,z), w_s(z,y)\} \leq w_t(x,z)+w_s(z,y) \qquad (2.4)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Bu eşitsizlik kabaca (2.1) örneği göz önüne alındığında aşağıdaki biçimde doğrulanabilir.

Eğer (2.4) eşitsizliğin tam tersi doğru olsaydı; yani

$w_t(x,z) < w_{t+s}(x,y)$ ve $w_s(z,y) < w_{t+s}(x,y)$

o zaman (2.1) eşitliğinden

$d(x,z) = tw_t(x,z) < tw_{t+s}(x,y)$ ve $d(z,y) = sw_s(z,y) < sw_{t+s}(x,y)$

olup buradan

$$d(x,z) + d(z,y) < (t+s)w_{t+s}(x,y) = d(x,y)$$

bulunur ki bu da d metriğinin üçgen eşitsizliği ile çelişir.

(2.2)- (2.4) sağlayan genelleştirilmiş hızın bir örneği olarak;

d, X üzerinde bir metrik olmak üzere verilen $t>0$ ve $x,y \in X$ için

$$w_t(x,y) = \begin{cases} \infty; & t < d(x,y) \\ 0; & t \geq d(x,y) \end{cases}$$

düşünülebilir.

Bir X kümesi üzerindeki modüler (1)-(2)-(3) özelliklerini sağlayan $X \times X$ den $[0,\infty]$ aralığına tanımlı w_t fonksiyonunun bir parametreli $w = \{w_t\}_{t>0}$ ailesidir. (2.1) eşitliği ile verilen aile, bir (X,d) metrik uzayı üzerinde doğal modüler olup ortalama hızın bir alanı olarak yorumlanabilir.

Bir küme üzerindeki metrik ve modüler arasındaki farkın, modülerin bir t pozitif parametresine bağlı olması ve sonsuz değerler alabileceği olarak gösterilebilir. Modülerin $w_t(x,y) = \infty$ sonsuz değer alma olasılığı, x den y ye bir t zamanında hareketin imkansız olması durumunda gerçekleşecektir. Ayrıca $w_t(x,y), \quad t > 0$ zamanının bir fonksiyon olarak artmayandır. Her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için $w_t(x,y)$ ortalama hızı bilmek , x ve y arasındaki $d(x,y)$ uzaklığından daha fazla bilgi verir.

$$d(x,y) = \inf\{t > 0 : w_t(x,y) \leq 1\}$$

formülü yardımı ile x ve y arasındaki uzaklık $d(x,y)$ limit durumu ile düzenlenebilir.

2.2. Modüler Metrik

2.2.1. Tanım: (Chistyakov 2006, Chistyakov 2010) X boştan farklı bir küme olmak üzere bir $w: (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu verilsin. Eğer w her $x, y, z \in X$ için;

(i) $x = y \Leftrightarrow$ Her $t > 0$ için $w_t(x,y) = 0$,

(ii) Her $t > 0$ için $w_t(x,y) = w_t(y,x)$,

(iii) Her $t, s > 0$ için $w_{t+s}(x,y) \leq w_t(x,z) + w_s(z,y)$,

özelliklerini sağlıyorsa w ye X üzerinde *modüler metrik* (basitçe *modüler*) denir.

$t > 0$ ve $x, y \in X$ için modüler metrik $w_t(x,y) = w(t,x,y)$ biçiminde gösterilir.

(i) yerine w fonksiyonu;

(i') Her $t > 0$ ve $x \in X$ için $w_t(x,x) = 0$,

özelliğini sağlıyorsa w ye X üzerinde *pseudomodüler* (metrik) denir.

Eğer w fonksiyonu (i) nin daha zayıf versiyonu olan

"$x = y \Leftrightarrow$ bir $t > 0$ için $w_t(x,y) = 0$ "

özelliğini sağlıyorsa w ye X üzerinde *düzenlidir* denir.

(i'') Her $t > 0$ ve $(x \neq y)\ x, y \in X$ için $w_t(x,y) > 0$ ise w ye X üzerinde *mutlak modüler* denir.

Eğer w fonksiyonu (iii) özelliği yerine

(iv) Her $t, s > 0$ ve $x, y, z \in X$ için

$$w_{t+s}(x,y) \leq \frac{t}{t+s} w_t(x,z) + \frac{s}{t+s} w_s(z,y) \tag{2.5}$$

özelliğini sağlıyorsa w ye *konvekstir* denir.

Not 1. Eğer w, X üzerinde bir modüler ise her $x, z \in X$ ve $t > 0$ için $w_t(x,z) \geq 0$ dır.

Gerçekten w nin (iii) özelliğinde $x = y$ ve $t = s > 0$ alındığında (i) özelliğinden her $x, z \in X$ için

$$0 = w_{2t}(x,x) \leq 2w_t(x,z)$$

olup buradan $w_t(x,z) \geq 0$ bulunur.

2. Eğer w konveks modüler ise her zaman (iii) özelliği sağlandığı açıktır.

Ayrıca (2.5) eşitsizliği

$$(t+s)w_{t+s}(x,y) \leq tw_t(x,z) + sw_s(z,y)$$

eşitsizliğine denktir.

2.2.2. Önerme (Modülerin temel özelliği)**:** (Chistyakov, 2010) w , X üzerinde bir modüler (pseudomodüler) olsun.

(a) Herhangi $x, y \in X$ için $t \to w_t(x, y)$, (0, ∞) dan [0, ∞] artmayan bir fonksiyondur.

(b) Sağdan limit $w_{t+0}(x, y)$ ve soldan limit $w_{t-0}(x, y)$ vardır ve

$$w_{t+0}(x, y) \leq w_t(x, y) \leq w_{t-0}(x, y)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt: (a) $0 < s < t$ olsun. Sırasıyla (iii),(i) özellikleri kullanıldığında

$$w_t(x, y) = w_{(t-s)+s}(x, y) \leq w_{t-s}(x, x) + w_s(x, y) = w_s(x, y)$$

bulunur.

(b) $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$w_{t+0}(x, y) = \lim_{s \to t+0} w_s(x, y) = \sup\{w_s(x, y): s > t\}$ ve

$w_{t-0}(x, y) = \lim_{s \to t-0} w_s(x, y) = \inf\{w_s(x, y): 0 < s < t\}$

olur. w, t ye göre artmayan olduğundan (b) deki eşitsizlik sağlanır.

2.2.3. Önerme: (Chistyakov, 2010) w , X üzerinde bir modüler olsun.

(a) $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\widehat{w}_t$, $\widehat{w}_t(x, y) = tw_t(x, y)$ biçiminde tanımlansın. O zaman

(i) $\widehat{w}_t$, t ye göre $(0, \infty)$ üzerinde artmayan bir fonksiyondur.

(ii) w nin konveks modüler olması için gerekli ve yeterli koşul $\widehat{w}_t$ nin modüler olmasıdır.

(b) w, X üzerinde konveks modüler ise $x, y \in X$ ve $t \geq s > 0$ için

$$w_t(x, y) \leq \frac{s}{t} w_s(x, y) \leq w_s(x, y)$$

eşitsizliği doğrudur.

(c) w konveks modüler ve en az bir $t > 0$ için $w_t(x, y)$ sonlu ise

$t \to \infty$ iken $w_t(x, y) \to 0$ ve $t \to 0_+$ iken $w_t(x, y) \to \infty$ dir.

(d) w konveks modüler ise (iv) koşulu her $\lambda, t, s > 0$, $t + s \leq \lambda$ ve $x, y, z \in X$ için

(iv') $$w_{\lambda}(x, y) \leq \frac{t}{\lambda} w_t(x, z) + \frac{s}{\lambda} w_s(y, z)$$

eşitsizliğine denktir.

Kanıt: (a) w ve $\widehat{w}_t$ nin tanımından kolayca gösterilir.

(b) $\widehat{w}_t$ artmayan olduğundan $t \geq s > 0$ için

$$tw_t(x, y) \leq sw_s(x, y) \Longrightarrow w_t(x, y) \leq \frac{s}{t} w_s(x, y) \leq w_s(x, y)$$

olur.

(c) w konveks modüler olduğundan (b) den $x, y \in X$ ve $t > s$ için

$$w_t(x, y) \leq \frac{s}{t} w_s(x, y)$$

olur. s, $w_s(x, y)$ sonlu olacak biçimde seçilsin. $t \to \infty$ için yukarıdaki eşitsizlikten

$w_t(x, y) \to 0$ olur. Bu sefer t, $w_t(x, y)$ sonlu olacak biçimde seçildiğinde $s \to 0_+$ için $w_s(x, y) \to \infty$ olur.

(d) (a) şıkkındaki $\widehat{w}_t$ modülerinin tanımından kolayca kanıtlanır.

2.3. Örnekler:

1. (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $t > 0$ için w,

$$w_t(x,y) = d(x,y)$$

biçiminde tanımlansın. w nin modüler metrik olduğu açıktır. Fakat (2.5) eşitsizliğinde $z = y$ ve $s = t$ alındığında w nin konveks modüler olmadığı anlaşılır.

2. (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için w,

$$w_t(x,y) = \frac{d(x,\ y)}{t}$$

biçiminde tanımlansın. w nin (i) ve (ii) özelliklerini sağladığı açıktır.

$t,s > 0$ ve $x,y,z \in X$ için d metriğinin üçgen eşitsizliği özelliği kullanıldığında

$$w_{t+s}(x,y) = \frac{d(x,\ y)}{t+s} \leq \frac{d(x,\ z)}{t+s} + \frac{d(z,\ y)}{t+s}$$

$$\leq \frac{d(x,\ z)}{t} + \frac{d(z,\ y)}{s} = w_t(x,z) + w_s(y,z)$$

elde edilir. Bu da w nin X üzerinde bir modüler metrik olduğunu gösterir. Benzer biçimde

$$w_{t+s}(x,y) \leq \frac{d(x,\ z)}{t+s} + \frac{d(z,\ y)}{t+s} = \frac{t}{t+s}\frac{d(x,z)}{t} + \frac{s}{t+s}\frac{d(z,\ y)}{s}$$
$$\leq \frac{t}{t+s}w_t(x,z) + \frac{s}{t+s}w_s(y,z)$$

olduğundan w konveks modülerdir.

Burada $w_t(x,y)$ nin t zamanında x den y ye ortalama hızı temsil ettiği düşünülebilir. Bu w ye X üzerindeki *doğal* modüler denir.

Ayrıca $0 \leq p < \infty$ olmak üzere Her $x,y \in X$ ve $t > 0$ için

$$w_t(x,y) = \frac{d(x,\ y)}{t^p}$$

biçiminde tanımlanan w, X üzerinde bir modülerdir. Eğer $p \geq 1$ ise w bir konveks modülerdir.

Gerçekten; $t, s > 0$ ve $x, y, z \in X$ için

$$w_{t+s}(x,y) \leq \frac{d(x,\ z)}{(t+s)^p} + \frac{d(z,\ y)}{(t+s)^p} = \frac{t}{(t+s)^p}\frac{d(x,z)}{t} + \frac{s}{(t+s)^p}\frac{d(z,\ y)}{s}$$
$$= \frac{t}{(t+s)(t+s)^{p-1}}\frac{d(x,z)}{t} + \frac{s}{(t+s)(t+s)^{p-1}}\frac{d(z,\ y)}{s}$$
$$\leq \frac{t}{(t+s)}\frac{d(x,z)}{t^p} + \frac{s}{(t+s)}\frac{d(z,\ y)}{s^p} = \frac{t}{t+s}w_t(x,z) + \frac{s}{t+s}w_s(y,z)$$

olur.

3. (X, d) bir metrik uzay olsun. $t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$w_t(x,y) = \begin{cases} \infty & : \quad t < d(x,y), \\ 0 & : \quad t \geq d(x,y), \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan w, X üzerinde konveks modülerdir.

Gerçekten;

$x = y$ ise $d(x,y) = 0 < t$ olduğundan $w_t(x,y) = 0$ olur.

Tersine $w_t(x,y) = 0$ olsun. Bu durumda her $t > 0$ için $t \geq d(x,y)$ olur. Bu ise ancak $d(x,y) = 0$ olması ile mümkündür. d metrik olduğundan $x = y$ olur.

Her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için $w_t(x,y) = w_t(y,x)$ olduğu açıktır.

Son olarak w nin konveks olduğunu gösterelim. $t, s > 0$ ve $x, y, z \in X$ olsun.

Eğer $w_t(x,y) = \infty$ ise w nin tanımından $t + s < d(x,y)$ olur. Metriğin üçgen eşitsizliği özelliği kullanıldığında

$$t + s < d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

bulunur. Bu durumda $t < d(x,z)$ ve ya $s < d(z,y)$. Gerçekten $t \geq d(x,z)$ ise yukarıdaki eşitsizlikten

$$d(x,z) + s < d(x,z) + d(z,y) \Longrightarrow s < d(z,y)$$

olur. Bu durumda $w_s(z,y) = \infty$ olur. Benzer durum diğeri içinde yapılabilir. Böylece (2.5) eşitsizliği sağlanır.

Eğer $w_t(x,y) = 0$ ise (2.5) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Böylece w nin X üzerinde konveks modüler olduğu anlaşılır.

4. X reel bir lineer uzay ve $\rho: X \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$w_t(x,y) = \rho\left(\frac{x-y}{t}\right) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan w nin X kümesi üzerinde bir (*konveks*) modüler olması için gerek ve yeterli koşul ρ nun bir klasik (*konveks*) modüler olmasıdır.

Kanıt: w, X üzerinde konveks modüler olsun.

$(\rho.1)$ $\rho(0) = \rho\left(\frac{x-x}{t}\right) = w_t(x,x) = 0.$

$(\rho.2)$ Herhangi bir $x \in X$ verilsin ve her $\alpha > 0$ için $\rho(\alpha x) = 0$ olsun. $x = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. : w nin (i) özelliğinden

$$\rho(\alpha x) = \rho\left(\frac{x-0}{\frac{1}{\alpha}}\right) = w_{\frac{1}{\alpha}}(x,0) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

bulunur.

$(\rho.3)$ Her $x \in X$ için, w nin (ii) özelliğinden

$\rho(-x) = \rho(-x-0) = w_1(-x,0) = w_1(0,-x) = \rho\big(-(-x)\big) = \rho(x)$ olur.

$(\rho.5)$ $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $\alpha + \beta = 1$ olsun. $x, y \in X$ için w nin (iv) özelliği kullanıldığında

$$\rho(\alpha x + \beta y) = \rho\left(\frac{\alpha x - (-\beta y)}{\alpha + \beta}\right) = w_{\alpha+\beta}(\alpha x, -\beta y)$$

$$\leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} w_\alpha(\alpha x, 0) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} w_\alpha(0, -\beta y)$$

$$= \alpha\rho\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) + \beta\rho\left(\frac{\beta x}{\beta}\right) = \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$$

olur. Bu ise ρ nun X lineer uzayı üzerinde bir klasik konveks modüler olduğunu gösterir.

Tersine; ρ, X üzerinde klasik konveks modüler olsun.w nin konveks modüler olduğunu gösterelim:

(i) $x, y \in X$ ve $x = y$ olsun. ρ nun $(\rho.1)$ özelliğinden

$$w_t(x, y) = w_t(x, x) = \rho\left(\frac{x-x}{t}\right) = \rho(0) = 0$$

olur. Tersine, her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$w_t(x, y) = \rho\left(\frac{x-y}{t}\right) = 0$$

olsun. O halde ρ nun $(\rho.2)$ özelliğinden $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

(ii) Her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için $(\rho.3)$ özelliğinden

$$w_t(x, y) = \rho\left(\frac{x-y}{t}\right) = \rho\left(\frac{-(y-x)}{t}\right) = \rho\left(\frac{y-x}{t}\right) = w_t(y, x)$$

bulunur.

(iv) Herhangi bir $t, s > 0$ ve $x, y, z \in X$ verilsin.

$\alpha = \frac{t}{t+s}$, $\beta = \frac{s}{t+s}$ diyelim. O zaman , $\alpha + \beta = 1$ olurç

. $x' = \frac{x-z}{t}$, $y' = \frac{z-y}{s}$ olarak alınırsa, o zaman

$$\frac{x-y}{t+s} = \frac{t}{t+s} \cdot \frac{x-z}{t} + \frac{s}{t+s} \cdot \frac{z-y}{s} = \alpha x' + \beta y',$$

olur.

ρ nin $(\rho.5)$ özelliğinden

$$w_{t+s}(x,y) = \rho\left(\frac{x-y}{t+s}\right) = \rho(\alpha x' + \beta y') \leq \alpha\rho(x') + \beta\,\rho(y')$$

$$= \frac{t}{t+s} w_\lambda(x,y) + \frac{s}{t+s} w_\mu(x,y).$$

Bu ise w nin X üzerinde konveks modüler olduğunu gösterir.

5. d, X üzerinde ayrık metrik olmak üzere w aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$w_t(x,y) = \infty \cdot d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \infty, & x \neq y \end{cases}$$

w, X üzerinde bir modüler olup buna sonsuz modüler denir.

2.3.1. Önerme (Chistyakov, 2015) X bir lineer uzay olmak üzere $w{:}(0,\infty) \times X \times X \longrightarrow [0,\infty]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

(I) Her $t > 0$ ve $x, y, z \in X$ için $w_t(x+z, y+z) = w_t(x,y)$.

(II) Her $t, s > 0$ ve $x \in X$ için $w_t(sx, 0) = w_{\frac{t}{s}}(x, 0)$.

Verilen $x \in X$ için $\rho(x) = w_1(x,0)$ olsun. O zaman

(a) (2.6) eşitliği doğrudur.

(b) w nin X kümesi üzerinde (konveks) modüler olması için gerek ve yeterli koşul ρ nun X reel lineer uzayı üzerinde bir klasik (konveks) modüler olmasıdır.

Kanıt:(a) (I) ve (II) özellikleri sağlansın. O zaman

$$w_t(x,y) = w_{\frac{1}{1/t}}(x-y, y-y) = w_1\left(\frac{x-y}{t}, 0\right) = \rho\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

(b) Diğer özellikleri Örnek 2.3. (4) teki gibi kolayca kanıtlanabileceğinden sadece (iv)⇔ $(\rho.5)$ özelliğinin gösterilmesi kanıt için yeterli olacaktır.

(iv)⇒($\rho.5$) w, X kümesi üzerinde (konveks) modüler olsun. ρ nun X reel lineer uzayı üzerinde bir klasik (konveks) modüler olduğunu gösterelim.

Verilen $t,s>0$ için $t+s=1$ ve $x,y\in X$ için (2.6) eşitliği I-II ve (iv) özelliklerinden

$$\rho(tx+sy)=w_1(tx+sy,0)=w_1(tx+sy-sy,-sy)$$

$$=w_1(tx,-sy)=w_{t+s}(tx,-sy)$$

$$\leq\frac{t}{t+s}w_t(tx,0)+\frac{s}{t+s}w_s(0,-sy)$$

$$=tw_{\frac{t}{t}}(x,0)+sw_{\frac{s}{s}}(y,0)=t\rho(x)+s\rho(y).$$

($\rho.5$) ⇒ (iv) Örnek 2.3 (4) ün kanıtındaki gibi benzer şekilde yapılır.

BÖLÜM 3

MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE METRİKLER

3.1.Modüler Uzaylar

3.1.1.Tanım: (Chistyakov 2006, Chistyakov 2010) w, X kümesi üzerinde bir modüler metrik ve $x_0 \in X$ olsun. O zaman

$$X_w \equiv X_w(x_0) = \{x \in X : t \to \infty \text{ iken } w_t(x, x_0) \to 0\}$$

ve

$$X_w^* \equiv X_w^*(x_0) = \{x \in X : \exists\, t > 0 \ni\ w_t(x, x_0) < \infty\}$$

kümelerine x_0 komşuluğundaki *modüler uzaylar* denir.

Not: Genelde $X_w(x_0) \subset X_w^*(x_0)$ olduğu açıktır. İki uzayın eşit olmadığı durumlar da vardır.

Örneğin; Örnek 2.3.(1) örneğindeki $w_t(x, y) = d(x, y)$ modüleri göz önüne alındığında

$$X_w(x_0) = \{x_0\} \subset X = X_w^*(x_0)$$

olur. Buna karşın w konveks modüler ise $X_w = X_w^*$ dir.

3.1.2. Önerme: (Chistyakov 2010) w konveks modüler ise $X_w = X_w^*$ dir.

Kanıt: $X_w(x_0) \subset X_w^*(x_0)$ olduğu açıktır.

Tersine her hangi bir $x \in X_w^*(x_0)$ alınsın. O zaman $w_s(x, x_0) < \infty$ olacak bir $s > 0$ sayısı vardır. Önerme 2.2.3.(c) den herhangi $t > s$ için $t \to \infty$ iken

$$w_t(x, x_0) \to 0$$

olur. Bu ise $x \in X_w(x_0)$ olduğunu gösterir. Yani $X_w \supset X_w^*$ dir. Böylece $X_w = X_w^*$ olur.

3.2. Temel Metrik

w, X kümesi üzerinde bir modüler olsun. O zaman X_w^* modüler uzayı üzerinde w modüleri tarafından üretilen bir d_w^0 metriği tanımlanabilir. Bu durumda (X_w^* , d_w^0) ikilisine *modüler metrik uzay* denir. (Chistyakov , 2010)

3.2.1. Önerme: (Chistyakov , 2010) w, X kümesi üzerinde bir (pseudo) modüler olsun. O zaman $x, y \in X_w^*$ için

$$d_w^0(x, y) = \inf\{t > 0:\ w_t(x, y) \leq t\}$$

biçiminde tanımlanan d_w^0, X_w^* üzerinde bir (pseudo) metriktir.

Kanıt: w, X üzerinde bir (pseudo) modüler olsun.

d_w^0, X_w^* üzerinde iyi tanımlıdır. Gerçekten;

$x, y \in X_w^*$ ise $w_\lambda(x, y) \leq \infty$ ve $w_\mu(x, y) \leq \infty$ olacak biçimde birer $\lambda, \mu > 0$ sayıları vardır. O zaman

$$w_{\lambda+\mu}(x,y) \leq w_\lambda(x,x_0) + w_\mu(y,x_0) < \infty$$

olur. Bu durumda $s = \lambda + \mu > 0$ için $w_s(x,y) < \infty$ olur. Böylece $t = max\{s, w_s(x,y)\}$ dersek $t \geq s$ olup w nin artmayan olduğundan

$w_t(x,y) \leq w_s(x,y) \leq t$ olup d_w^0'ın tanımından $d_w^0(x,y) \leq t < \infty$ olur. Bu da d_w^0'ın X_w^* üzerinde iyi tanımlı olduğunu gösterir.

(d.1) Herhangi bir $x \in X_w^*$verilsin. (i') özelliğinden her $t > 0$ için $w_t(x,x) = 0 < t$ olacağından $d_w^0(x,x) = 0$ olur. Tersine herhangi $x, y \in X_w^*$ için $d_w^0(x,y) = 0$ olsun. O zaman d_w^0 ın tanımından her $s > 0$ için $w_s(x,y) \leq s$ olur. w artmayan olduğundan $0 < s < t$ koşulunu sağlayan her $t > 0$ için

$$w_t(x,y) \leq w_s(x,y) \leq s$$

olur. $s \to 0_+$ alındığında her $t > 0$ için $w_t(x,y) = 0$ olur. w nin (i) özelliğinden $x = y$ bulunur.

(d.2) d_w^0 ın tanımından ve w nin (ii) özelliğinden her $x, y \in X_w^*$ için

$$d_w^0(x,y) = d_w^0(y,x)$$

kolayca görülür.

(d.3) Şimdi her $x, y, z \in X_w^*$ için $d_w^0(x,y) \leq d_w^0(x,z) + d_w^0(z,y)$ olduğunu gösterelim.

d_w^0 ın tanımından $d_w^0(x,z) < t$ ve $d_w^0(z,y) < s$ $(t, s > 0)$ ise $w_t(x,z) \leq t$ ve $w_s(z,y) \leq s$ olur. w nin (iii) özelliğinden

$$w_{t+s}(x,y) \leq w_t(x,z) + w_s(z,y) \leq t + s$$

bulunur. d_w^0 ın tanımından

$d_w^0(x,y) \leq t + s$ olup t ve s keyfi olduğundan d_w^0 ın üçgen eşitsizliği gerçeklenir.

3.2.2.Not: ρ, bir lineer uzayı üzerinde Tanım.1.1. de ki gibi bir klasik modüler olsun.

$$X_\rho = \left\{x \in X: \lim_{\alpha \to 0^+} \rho(\alpha x) = 0\right\}$$

kümesine *sıfır merkezli modüler uzay* denir. Bu durumda X_ρ modüler uzayı X lineer uzayının bir alt uzayıdır.

$x \in X_\rho$ için $|x|_\rho = \inf\left\{\varepsilon > 0:\ \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq\ \varepsilon\right\}$ biçiminde tanımlanan

$|\cdot|_\rho : X_\rho \to [0, \infty)$ fonksiyoneli X_ρ üzerinde *F*-normdur.

Yani; $|x|_\rho$, her $x, y \in X$ için;

(F.1) $|x|_\rho = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(F.2) $|-x|_\rho = |x|_\rho$

(F.3) $|x + y|_\rho \leq |x|_\rho + |y|_\rho$

(F.4) $\{x_n\} \subset X_\rho$ ve $\mathbb{R}$ de $c_n \to c$ olamak üzere $|x_n - x|_\rho \to 0$ iken $|c_n x_n - cx|_\rho \to 0$

koşullarını sağlar.

Önerme 2.3.1. koşulları altında

$\rho(x) = w_1(x, 0)$ ve $X_\rho = X_w(0)$ olup $x \in X_\rho$ için $|x|_\rho = d_w^0(x, 0),\ X_\rho$ üzerinde bir *F*-normdur.

w, X kümesi üzerinde bir *konveks* modüler ise aşağıdaki durum geçerlidir.

3.2.3. Önerme: (Chistyakov , 2010) w, X kümesi üzerinde bir *konveks* (pseudo) modüler olsun. O zaman $x, y \in X_w^*$ için

$$d_w^*(x, y) = \inf\{t > 0:\ w_t(x, y) \leq 1\}$$

biçiminde tanımlanan d_w^*, X_w^* üzerinde bir (pseudo) metriktir.

Kanıt: w, X üzerinde bir konveks (pseudo) modüler olsun.

d_w^*, X_w^* üzerinde iyi tanımlıdır. Gerçekten; $x, y \in X_w^*$ ise $w_\lambda(x, y) < \infty$ ve $w_\mu(x, y) < \infty$ olacak biçimde birer $\lambda, \mu > 0$ sayıları vardır. O zaman w konveks olduğundan (iv') özelliğinde $z = x_0$ alındığında

$$w_\lambda(x,y) \le \frac{t}{\lambda} w_t(x,x_0) + \frac{s}{\lambda} w_s(y,x_0)$$

olur ve buradan $\lim_{\lambda\to\infty} w_\lambda(x,y) = 0$ bulunur. O halde $\lambda \ge \lambda_0$ iken $w_\lambda(x,y) \le 1$ olacak biçimde bir $\lambda_0 > 0$ vardır. d_w^* ın tanımından $d_w^*(x,y) \le \lambda_0 < \infty$ olur.

(d.1) Herhangi $x, y \in X_w^*$ için $d_w^*(x,y) = 0$ olsun. O zaman her $s > 0$ için $w_s(x,y) \le 1$ olur. Önerme 2.2.3.(b) den $0 < s < t$ koşulunu sağlayan her $t > 0$ için

$$w_t(x,y) \le \frac{s}{t} w_s(x,y) \le \frac{s}{t}$$

bulunur. O zaman $s \to 0_+$ alındığında her $t > 0$ için $w_t(x,y) = 0$ olur. w nin (i) özelliğinden $x = y$ dir. Tersine $x = y$ ise w nin (i) özelliğinden $w_t(x,x) = 0 \le 1$ olup d_w^* ın tanımından $d_w^*(x,x) = 0$ olduğu görülür.

(d.2) w nin simetri özelliğinden her $x, y \in X_w^*$ için $d_w^*(x,y) = d_w^*(y,x)$ olduğu açıktır.

(d.3) Herhangi $x, y, z \in X_w^*$ alınsın. Eğer $d_w^*(x,z) < t$ ve $d_w^*(z,y) < s$ $(t, s > 0)$ ise $w_t(x,z) \le 1$ ve $w_s(z,y) \le 1$ olur. w nin konveks özelliğinden

$$w_{t+s}(x,y) \le \frac{t}{t+s} w_t(x,z) + \frac{s}{t+s} w_s(z,y) \le \frac{t}{t+s} + \frac{s}{t+s} = 1$$

olup buradan $d_w^*(x,y) \le s + t$ olduğu görülür. t ve s keyfi olduğundan

$$d_w^*(x,y) \le d_w^*(x,z) + d_w^*(z,y)$$

eşitsizliği doğrudur.

3.2.4. Örnekler: (Chistyakov, 2010)

1. w , Örnek 2.3.(5) deki modüler olsun. O zaman $X_w(x_0) = X_w^*(x_0) = \{x_0\}$ olup $d_w^0(x,y) = 0$ dır.

2. Örnek 2.3.(2) deki $w_t(x,y) = \frac{d(x,y)}{t^p}$ modülerini göz önüne alalım.

Eğer $p \ge 1$ ise w konveks olduğundan Önerme 3.1.2 den

$X_w(x_0) = X_w^*(x_0) = X$ olup $d_w^*(x,y) = \inf\{t > 0:\ w_t(x,y) \le 1\} = (d(x,y))^{1/p}$ dir.

Eğer $p = 1$ ise $d_w^*(x,y) = d(x,y)$ olur.

$0 \le p < 1$ ise w, konveks modüler değildir. $X_w(x_0) = X_w^*(x_0) = X$ olup

$d_w^0(x,y) = \inf\{t > 0:\ w_t(x,y) \le t\} = (d(x,y))^{\frac{1}{p+1}}$ dir.

3. Örnek 2.3.(3) deki $w_t(x,y) = \begin{cases} \infty & : \quad t < d(x,y), \\ 0 & : \quad t \ge d(x,y), \end{cases}$ konveks modülerini göz önüne alalım. O zaman $X_w^* = X_w$ olup $d_w^* = d_w^0 = d$ olur.

w konveks bir modüler ise d_w^0 ve d_w^* metrikleri arasında özel bir denklik vardır.

3.2.5. Önteorem: (Chistyakov, 2010**)** w bir X kümesi üzerinde konveks modüler olsun. O zaman $t > 0$ ve $x, y \in X_w^*$ için

a) $d_w^*(x,y) < t$ ise $w_t(x,y) \le d_w^*(x,y)/t < 1$,

b) $w_t(x,y) = 1$ ise $d_w^*(x,y) = t$ dir.

Kanıt: a) $d_w^*(x,y) < s < t$ olacak biçimde herhangi bir s verilsin. O zaman d_w^* ın tanımından ve Önerme 2.2.3.(b) eşitsizliğinden $w_s(x,y) \le 1$ ve

$$w_t(x,y) \le \frac{s}{t} w_s(x,y) \le \frac{s}{t} < 1$$

olup $w_t(x,y) \le d_w^*(x,y)/t < 1$ bulunur.

b) $w_t(x,y) = 1$ olsun. O zaman d_w^* in tanımından $d_w^*(x,y) \le t$ olduğu açıktır. Eğer $d_w^*(x,y) < t$ ise (a) şıkkından $w_t(x,y) < 1$ bulunur ki bu da $w_t(x,y) = 1$ olması ile çelişir. Şu halde $d_w^*(x,y) = t$ dir.

3.2.6.Önerme: (Chistyakov, 2010) w bir X kümesi üzerinde konveks modüler olsun. O zaman verilen her $x, y \in X_w^*$ için

a) $d_w^0(x,y) < 1$ ve $d_w^*(x,y) < 1$ denktir ve

bunlardan en az biri doğru ise $d_w^*(x,y) \leq d_w^0(x,y) \leq \sqrt{d_w^*(x,y)}$ dir.

b) $d_w^0(x,y) \geq 1$ ve $d_w^*(x,y) \geq 1$ denktir ve

bunlardan en az biri doğru ise $\sqrt{d_w^*(x,y)} \leq d_w^0(x,y) \leq d_w^*(x,y)$ dir.

Kanıt: 1.Adım: İlk olarak $d_w^0(x,y) < 1$ doğru ise $d_w^*(x,y) \leq d_w^0(x,y)$ olduğunu gösterelim.

$d_w^0(x,y) < t < 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir t için d_w^0 ın tanımından

$w_t(x,y) \leq t < 1$ olup d_w^* ın tanımından $d_w^*(x,y) \leq t$ bulunur. Bu durumda

$t \to d_w^0(x,y)$ alındığında istenen eşitsizlik elde edilir.

2.Adım: $d_w^*(x,y) < 1$ doğru ise $d_w^0(x,y) \leq \sqrt{d_w^*(x,y)}$ olduğunu gösterelim. $\sqrt{d_w^*(x,y)} < 1$ ise $d_w^*(x,y) \leq \sqrt{d_w^*(x,y)} < 1$ olduğu açıktır. Böylece Önteorem 3.2.4. (a) dan $\sqrt{d_w^*(x,y)} < t < 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir t için

$$w_t(x,y) \leq d_w^*(x,y)/t < t$$

bulunur. d_w^0 ın tanımından $d_w^0(x,y) \leq t$ olup buradan $t \to \sqrt{d_w^*(x,y)}$ alındığında istenilen eşitsizlik gerçekleşir.

Böylece 1. ve 2. adımlardan arzu edinilen eşitsizlikler elde edilir ve bu da $d_w^0(x,y) < 1$ ve $d_w^*(x,y) < 1$ denk olduğunu gösterir.

Benzer biçimde $d_w^0(x,y) \geq 1$ de iken $d_w^0(x,y) \leq d_w^*(x,y)$ ve $d_w^*(x,y) \geq 1$ de iken $\sqrt{d_w^*(x,y)} \leq d_w^0(x,y)$ eşitsizliklerinin doğru olduğu gösterilirse

$d_w^0(x,y) \geq 1$ ve $d_w^*(x,y) \geq 1$ eşitsizliklerinin denk oldukları gösterilmiş olur.

3.Adım: $d_w^*(x,y) \geq 1$ olsun. O zaman d_w^* nin tanımından $w_t(x,y) < 1$ koşulunu sağlayan her t için $t > d_w^*(x,y)$ olur. Fakat $d_w^*(x,y) \geq 1$ olduğundan $t > 1$ olup buradan $w_t(x,y) < t$ bulunur. Böylece d_w^0 ın tanımından $d_w^0(x,y) \leq t$ olur. Buradan $d_w^0(x,y) \leq d_w^*(x,y)$ olur.

4.Adım: $d_w^0(x,y) \geq 1$ olsun. Eğer $t > d_w^0(x,y)$ ise $w_t(x,y) \leq t$ olur. $t > 1$ olduğundan $t^2 > t > 1$ dir. Önerme 2.2.3.(b) den

$$w_{t^2}(x,y) \leq \frac{t}{t^2} w_t(x,y) \leq \frac{t}{t^2}.t = 1$$

bulunur. Buradan $d_w^*(x,y) \leq t^2$ olup $t \to d_w^0(x,y)$ alındığında

$d_w^*(x,y) \leq (d_w^0(x,y))^2$ ve buradan $\sqrt{d_w^*(x,y)} \leq d_w^0(x,y)$ elde edilir.

BÖLÜM 4

METRİK YAKINSAMA, MODÜLER YAKINSAMA ve METRİK TOPOLOJİ

Bu bölümde lineer uzaylar üzerindeki modülerin klasik teorisinde bilinen modüler yakınsama, modüler limit ve modüler tamlık gibi bir takım kavramlar incelenecektir. Bu bağlamda kısaca metrik topolojiye değinilecek ve modüler uzaylarda iki tür yakınsama tanımlanacak olup aralarındaki ilişki araştırılacaktır.

4.1.Metrik Yakınsama

4.1.1. Tanım: (Chistyakov, 2015) w bir X_w kümesi üzerinde modüler, $\{x_n\} \subset X_w$ bir dizi ve $x \in X_w$ olsun.

a) Eğer $\lim_{n\to\infty} d_w^0(x_n, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e metrik yakınsar denir ve $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ biçiminde gösterilir.

b) Eğer $\lim_{n,m\to\infty} d_w^0(x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine X_w da Cauchy dizisi denir.

c) $A \subset X_w$ olsun. Eğer $x_n \to x$ biçimindeki her $\{x_n\} \subset A$ dizisi için $x \in A$ ise A ya *metrik yakınsamaya göre kapalıdır* denir.

Bu tanımlar X_w^* modüler uzayı içinde geçerlidir.

Yukarıdaki tanımları w nin terimleri ile de karakterize edilebilir.

4.1.2. Önteorem: (Chistyakov, 2015) w, X üzerinde bir modüler , $x, y \in X_w$ ve $t > 0$ olsun. O zaman

a) $d_w^0(x,y) < t$ ise $w_t(x,y) \leq d_w^0(x,y) < t$.

b) $w_t(x,y) = t$ ise $d_w^0(x,y) = t$ dir.

Kanıt: a) $d_w^0(x,y) < s < t$ olacak biçimde herhangi bir $s > 0$ alınsın. d_w^0 ın tanımından ve w nin artmayanlığından $w_s(x,y) \leq s$ ve $w_t(x,y) \leq w_s(x,y)$ bulunur. Buradan $w_t(x,y) \leq s$ dir. Bu durumda $s \to d_w^0(x,y)$ alındığında istenilen eşitsizlik elde edilir.

b) d_w^0 ın tanımından $d_w^0(x,y) \leq t$ dir. $d_w^0(x,y) < t$ olsaydı o zaman Önteorem'in (a) şıkkından $t = w_t(x,y) \leq d_w^0(x,y) < t$ olurdu. Böylece $d_w^0(x,y) = t$ bulunur.

4.1.3. Teorem: (Chistyakov, 2015) w, X üzerinde modüler, $\{x_n\} \subset X_w$ bir dizi ve $x \in X_w$ olsun.

a) $\lim_{n\to\infty} d_w^0(x_n, x) = 0 \iff$ her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n, x) = 0$ olmasıdır.

Eğer w konveks ise yukarıdaki gerekli ve yeterli koşul $\lim_{n\to\infty} d_w^*(x_n, x) = 0$ olması ile denktir. Bu durumda x limiti *tektir*.

b) ($\{x_n\}$ dizisinin d_w^0 ' a göre Cauchy)

$\lim_{n,m\to\infty} d_w^0(x_n, x_m) = 0 \Leftrightarrow$ her $t > 0$ için $\lim_{n,m\to\infty} w_t(x_n, x_m) = 0$ olmasıdır.

Eğer w konveks ise yukarıdaki gerekli ve yeterli koşul

$\lim_{n,m\to\infty} d_w^*(x_n, x_m) = 0$ olması ile denktir.

c) $X_w(x_0)$, $X_w^*(x_0)$ modüler uzayları metrik yakınsamaya göre kapalı uzaylardır.

Kanıt: a) $x_n \to x$ olsun. O zaman $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall$ n$\geq n_0$ için $d_w^0(x_n, x) < \varepsilon$ dır. Teorem 2.2.2.(b) ve Teorem 2.2.11 (a) dan her n$\geq n_0$ için$w_\varepsilon(x_n, x) < \varepsilon$ olur. Böylece $t > 0$ için $n \geq n_0(\min\{\varepsilon, t\})$ olarak alındığında w nin artmayan özelliğinden

$$w_t(x_n, x) \leq w_{min\{\varepsilon,t\}}(x_n, x) < min\{\varepsilon, t\} \leq \varepsilon$$

olur ki bu da $w_t(x_n, x) \to 0$ olduğunu gösterir.

Tersine; herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $w_\varepsilon(x_n, x) \to 0$ olduğundan

$\exists\, n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ her n $\geq n_1(\varepsilon)$ için $w_\varepsilon(x_n, x) \leq \varepsilon$ dir. d_w^0 ın tanımından $\forall$ n$\geq n_1(\varepsilon)$ için $d_w^0(x_n, x) \leq \varepsilon$ olacağından $d_w^0(x_n, x) \to 0$ dır.

Eğer w konveks ise Önerme 3.2.6.(a) daki

$$d_w^*(x, y) \leq d_w^0(x, y) \leq \sqrt{d_w^*(x, y)}$$

eşitsizliğinden kolayca görülür.

w, X üzerinde bir modüler olsun. O zaman d_w^0 (d_w^*) , X_w^* üzerinde metrik olduğundan x limiti tektir.

b) (a) da ki gibi benzer şekilde kanıtlanır.

c) $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ ve $x_n \to x$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde Teorem 4.1.3.(a) ve (iii) aksiyomundan $\lambda_0 > 0$ ise $n_0 = n_0(\varepsilon)$ için

$$w_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) \leq w_\varepsilon(x, x_{n_0}) + w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) \leq \varepsilon + w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0)$$

olur.

Eğer $\{x_n\} \subset X_w^*$ ise $x_{n_0} \in X_w^*$ dır. Böylece $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) < \varepsilon$ olacak şekilde $\lambda_0 > 0$ vardır. Yukarıdaki eşitsizlikten $w_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) < \infty$ olup buradan $x \in X_w^*$olduğu görülür. Şu halde $X_w^*(x_0)$ modüler uzayı metrik yakınsamaya göre kapalı uzaydır.

$\{x_n\} \subset X_w^0$olsun. O zaman $x_{n_0} \in X_w^0$ olup $\lambda \to \infty$ iken $w_\lambda(x_{n_0}, x^0) \to 0$ dir. Böylece $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x^0) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$ vardır. w artmayan olduğundan ve yukarıdaki eşitsizlikten her $\lambda \geq \varepsilon + \lambda_0$ için

$$w_\lambda(x, x^0) \leq w_{\varepsilon+\lambda_0}(x, x^0) < 2\varepsilon$$

olur. Buradan $\lambda \to \infty$ iken $w_\lambda(x, x^0) \to 0$ olur. Bu da $x \in X_w^0$ olduğunu gösterir. Şu halde $X_w^0(x_0)$ modüler uzayı metrik yakınsamaya göre kapalı uzaydır.

4.2.Metrik Topoloji

4.2.1.Tanımlar : (Chistyakov, 2015)) w, X üzerinde bir modüler olsun.

i) Açık Kümeler:

$x \in X_w^*$ ve $r > 0$ verilsin.

$$B(x:r) = B^{d_w^0}(x:r) = \{y \in X : d_w^0(x, y) < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* denir.

$U \subset X$ verilsin. Eğer her $x \in U$ için $B(x:r) \subset U$ olacak biçimde bir

$r = r(x) > 0$ sayısı var ise U ya *açık küme* denir.

Not: Eğer $x \in X_w^*(x_0)$ ise her $r > 0$ için $B(x:r) \subset X_w^*(x_0)$ olduğu açıktır. Böylece bu $U \subset X$ açık olması için gerek ve yeterli koşul her $x_0 \in X$ için U$\cap X_w^*(x_0)$ açık olmasıdır.

X_w^* daki her açık yuvar, boş küme ve X_w^* ın kendisi açık kümelere örneklerdir.

$A \subset X_w^*$ verilsin. A tarafından kapsanan en geniş açık kümeye A nın *içi* denir ve A° ile gösterilir.

$A^\circ = \{x \in A : \text{bir r} > 0 \text{ için } B(x:r) \subset A\}$, $A^\circ \subset A$ ve " A açık $\Leftrightarrow A^\circ = A$" olduğu açıktır.

X_w^* üzerindeki bütün açık alt kümelerinin ailesine d_w^0 tarafından X_w^* üzerine indirgenen *metrik topoloji* denir ve $\tau(d_w^0)$ ile gösterilir.

ii) Kapalı Kümeler:

Bir $A \subset X_w^*$ verilsin. Eğer $A^c = X_w^* \backslash A$ açık ise diğer bir deyişle $(A^c)^\circ = A^c$ ise A ya *kapalı kümedir* denir. (Yani A metrik yakınsamaya göre kapalıdır.)

$x \in X_w^*$ ve $r > 0$ verilsin.

$$B[x:r] = \{y \in X_w^* : d_w^0(x,y) \leq r\} = \{y \in X_w^* : w_{r+0}(x,y) \leq r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar* denir.

Boş küme, kapalı yuvarlar, X_w^* ve X_w^0 kapalı kümelere birer örnektir.

A yı kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın *kapanışı* denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

$\bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$ kapalı, $A \subset \bar{A}$ ve

" A kapalı $\Leftrightarrow \bar{A} = A$" olduğu açıktır.

Not: $\overline{B(x:r)} \subset B[x:r]$ ve $B(x:r) \subset (B[x:r])^\circ$ dir.

4.2.2. Önerme: (Chistyakov, 2015) Eğer $\emptyset \neq A \subset X_w^*$ ve $x \in X_w^*$ ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $x \in \bar{A}$.

(b) Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır.

(c) Her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x_n(\lambda), x) \to 0$ olacak biçimde bir $\{x_n(\lambda)\} \subset A$ dizisi vardır.

Kanıt:

(a)⇔(b): (a) nın doğru olması için gerekli ve yeterli koşul $d_w^0(x_n, x) \to 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisinin var olmasıdır. 4.1.3.Teoremden

$d_w^0(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow$ her $t > 0$ için $w_t(x_n, x) \to 0$ olmasıdır.

(b)⇔(c): (b) nin (c) yi gerektirdiği açıktır.

(c) doğru olsun. Herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ verildiğinde $n \to \infty$ iken $w_{\frac{1}{k}}(x_n(1/k), x) \to 0$ olacak biçimde bir $\{x_n(1/k)\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ dizisi vardır. $w_1(x_{n_1}(1), x) < 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Yine $n_2 > n_1$ ve $w_{\frac{1}{2}}\left(x_n\left(\frac{1}{2}\right), x\right) < \frac{1}{2}$ olacak biçimde $n_2 \in \mathbb{N}$ seçilsin.

Böylece tümevarımsal olarak $k \geq 3$ için $n_k > n_{k-1}$ ve $w_{\frac{1}{k}}(x_n(1/k), x) < \frac{1}{k}$ olacak biçimde $n_k \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $y_k = x_{n_k}(\frac{1}{k})$ olarak tanımlansın. O zaman $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ olup her $\lambda > 0$ için $k \to \infty$ iken $w_\lambda(y_k, x) \to 0$ dir.

Gerçekten; her $\lambda > 0$ için $k_0 > 1/\lambda$ olacak biçimde $k_0 = k_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ alındığında her $k \geq k_0$ için $1/k < \lambda$ olacağından (w nin artmayanlığından)

$$w_\lambda(y_k, x) \leq w_{\frac{1}{k}}(y_k, x) < \frac{1}{k}$$

olur. Böylece her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(y_k, x) \to 0$ $(k \to \infty)$ dır.

4.3. Modüler Yakınsama

Teorem 4.1.3. te görüldüğü gibi X_w^* deki metrik yakınsama her $t > 0$ için w modülerdeki yakınsamaya denktir. Modülerdeki yakınsama bir $t > 0$ için tanımlanırsa daha genel bir yakınsama türü ortaya çıkar.

4.3.1. Tanım: (Chistyakov, 2010) w, X üzerinde bir modüler ve $\{x_n\}$, X_w^* üzerinde bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} w_{t_0}(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $t_0 > 0$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$'e $w-$*yakınsak* (*modüler yakınsak*) denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir. x'e de $\{x_n\}$ nin $w-$ $limiti$ (*modüler limit*) denir.

Not: w nin monoton özelliğinden her $t > t_0$ için $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n, x) = 0$ dir.

Metrik yakınsamanın modüler yakınsamayı gerektirdiği açıktır. Fakat modüler yakınsama metrik yakınsamayı gerektirmeyebilir.

4.3.2.Örnek:

1. Örnek 2.3.(2) deki $p > 0$ olmak üzere $w_t(x, y) = \frac{d(x,y)}{t^p}$ modülerini göz önüne alalım. Örnek 3.2.4.(2) den $X_w^* = X$ ve $d_w^0(x, y) = (d(x, y))^{\frac{1}{p+1}}$ olduğundan X_w^* daki modüler yakınsama ile X de ki d-yakınsama denktir.

2. Örnek 2.3.(3) teki $w_t(x, y) = \begin{cases} \infty : & t < d(x, y), \\ 0 : & t \geq d(x, y), \end{cases}$ modülerini göz önüne alalım. O zaman $X_w^* = X_w = X$ ve $d_w^* = d_w^0 = d$ dir.

$\{x_n\}$, X_w^* de $d_w^* = d$ metriğine göre yakınsak ise (X, d) metrik uzayında sınırlı olduğu açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. Diğer taraftan X_w^* da $\{x_n\}$ nin $w-$ yakınsaması (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ nin sınırlı olmasına denktir.

Gerçekten; $x_n \xrightarrow{w} x$ ise bir $t_0 > 0$ için $\lim_{n\to\infty} w_{t_0}(x_n, x) = 0$ dır. O halde özel olarak $\varepsilon = 1$ alındığında her $n > n_0$ için $w_{t_0}(x_n, x) < 1$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise $t_0 \geq d(x_n, x)$ olmasına denktir. Böylece $r_0 = max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x), t_0\}$ olmak üzere $\{x_n\} \subset B[x, r_0]$. Yani $\{x_n\}$, (X, d) metrik uzayında sınırlı bir dizidir.

Tersine $\{x_n\}$, (X, d) üzerinde sınırlı bir dizi olsun. O zaman bir $x \in X$ ve $r > 0$ için $\{x_n\} \subset B[x, r_0]$ dur. O zaman her bir $y \in X$ için $x_n \xrightarrow{w} y$ olur. Gerçekten;

$t_0 = r + d(x,y)$ alındığında üçgen eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x,y) \leq t_0$$

olur. Böylece w nin tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $w_{t_0}(x_n, y) = 0$ bulunur. Bu da $x_n \overset{w}{\to} y$ olduğunu gösterir.

4.3.3.Tanım: (Chistyakov, 2010) w, X üzerinde bir modüler ve $A \subset X$ olsun. Eğer $x_n \overset{w}{\to} x$ olacak biçimdeki her $\{x_n\} \subset A$ dizisi için $x \in A$ ise A ya modüler yakınsamaya göre *kapalıdır* denir.

4.3.4.Teorem: (Chistyakov, 2010) w, X üzerinde bir modüler olsun.

(a) $X_w(x_0)$, $X_w^*(x_0)$ modüler uzayları modüler yakınsamaya göre kapalı uzaylardır.

(b) Eğer w, X üzerinde mutlak modüler ise modüler limit varsa tektir.

Kanıt: (a) $\{x_n\} \subset X$ ve $x_n \overset{w}{\to} x \in X$ olsun. O zaman bir $t_0 > 0$ için $w_{t_0}(x_n, x) \to 0$ dır. Yani; herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her n$\geq n_0$ için $w_{t_0}(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. (iii) aksiyomundan eğer $t_1 > 0$ ise

$$w_{t_0+t_1}(x, x_0) \leq w_{t_0}(x, x_{n_0}) + w_{t_1}(x_{n_0}, x_0) < \varepsilon + w_{t_1}(x_{n_0}, x_0) \qquad (4.1)$$

bulunur.

Eğer $\{x_n\} \subset X_w^*$ ise $x_{n_0} \in X_w^*$ olduğundan bir $t_1 > 0$ için $w_{t_1}(x_{n_0}, x_0) < \infty$ olur. O zaman (4.1) eşitsizliğinden $w_{t_0+t_1}(x, x_0) < \infty$ olacağından $x \in X_w^*$ bulunur.

Eğer $\{x_n\} \subset X_w$ ise $x_{n_0} \in X_w$ olduğundan $t \to \infty$ iken $w_t(x_{n_0}, x_0) \to 0$ dir. $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ $w_{t_1}(x_{n_0}, x_0) < \varepsilon$ biçiminde seçilirse $t > t_0 + t_1$ için (4.1) eşitsizliğinden

$$w_t(x_{n_0}, x_0) \leq w_{t_0+t_1}(x, x_0) < 2\varepsilon$$

Böylece $t \to \infty$ iken $w_t(x, x_0) \to 0$ olur ki bu da $x \in X_w$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $X_w(x_0)$ ve $X_w^*(x_0)$ modüler uzayları modüler yakınsamaya göre kapalı uzaylardır.

(b) $\{x_n\} \subset X_w^*$, $x_n \overset{w}{\to} x \in X$ ve $x_n \overset{w}{\to} y \in X$ olsun. Modüler yakınsamanın tanımından $n \to \infty$ iken $w_t(x_n, x) \to 0$ ve $w_s(x_n, y) \to 0$ olacak biçimde $t, s > 0$ sayıları vardır. Modülerin tanımındaki (ii) ve (iii) aksiyomlarından $n \to \infty$ iken

$$w_{t+s}(x, y) \leq w_t(x, x_n) + w_s(y, x_n) \to 0$$

olup buradan $w_{t+s}(x, y) = 0$ bulunur. w mutlak modüler olduğundan $x = y$ olur ve limit tektir.

4.3.5. Tanım: (Chistyakov, 2010) w, X üzerinde bir modüler olsun.$\{x_n\} \subset X_w^*$ ve $x \in X_w^*$ verilsin. Eğer bir $t > 0$ için $w_t(x_n, x) \to 0$ iken $w_{t/2}(x_n, x) \to 0$ oluyor ise w ye X üzerinde Δ_2 −koşulunu sağlar denir.

4.3.6. Teorem: (Chistyakov, 2010) w, X üzerinde bir modüler olsun. X_w^* üzerindeki metrik yakınsamanın modüler yakınsamaya denk olması için gerekli ve yeterli koşul w nin X_w^* üzerinde Δ_2 −koşulunu sağlamasıdır.

Kanıt: (⇒)$\{x_n\} \subset X_w^*$, $x \in X_w^*$ ve bir $t_0 > 0$ için $x_n \overset{w}{\to} x$ olsun. Hipotezden metrik yakınsama modüler yakınsamaya denk olduğundan $\lim_{n\to\infty} d_w^0(x_n, x) = 0$ olur. O zaman Teorem 4.1.3.(a) dan $\lim_{n\to\infty} w_{t/2}(x_n, x) = 0$ bulunur. Yani X üzerinde Δ_2 −koşulu sağlanır.

(⇐) X_w^* üzerindeki metrik yakınsama modüler yakınsamayı gerektirdiğinden, sadece modüler yakınsamanın metrik yakınsamayı gerektirdiğini göstermek yeterli olacaktır. $\{x_n\} \subset X_w^*$ ve $x_n \overset{w}{\to} x \in X_w^*$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} w_{t_0}(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $t_0 > 0$ vardır. Δ_2 −koşulu sağlandığından $\lim_{n\to\infty} w_{t_0/2}(x_n, x) = 0$ olur. Bu şekilde devam

edildiğinde, her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} w_{t_0/2^k}(x_n, x) = 0$ bulunur. Herhangi bir $t_0 > 0$ verildiğinde $t > t_0/2^k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. w nin monotonluğundan $n \longrightarrow \infty$ için $w_t(x_n, x) \leq w_{t_0/2^k}(x_n, x) \to 0$ olur. Yani her $t > 0$ için $w_t(x_n, x) \to 0$ bulunur.

4.3.7. Tanım: (Chistyakov, 2013) w, X üzerinde bir modüler ve $\{x_n\} \subset X_w^*$ olsun.$n, m \to \infty$ iken $w_t(x_n, x_m) \to 0$ olacak biçimde bit $t > 0$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine modüler *Cauchy* (veya $w -$ Cauchy) denir. Yani;

"$\{x_n\}$ $w -$ Cauchy $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni$ her $n, m > n_0$ için $w_t(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $t > 0$ vardır."

4.3.8.Not:

(a) Teorem 4.1.3. (b) den eğer $\{x_n\}$, X_w^* üzerinde d_w^0 veya d_w^* a göre Cauchy ise modüler Cauchy olduğu açıktır.

(b) Modüler yakınsak dizi modüler Cauchy' dir.

Kanıt (b): $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. O zaman $n \longrightarrow \infty$ iken $w_t(x_n, x) \to 0$ olacak şekilde bir $t > 0$ vardır. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \geq n_0$ için $w_t(x_n, x) \leq \varepsilon/2$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. w nin monotonluğundan her $n, m > n_0$ için

$$w_{2t}(x_n, x) \leq w_t(x_n, x) + w_t(x_m, x) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin modüler Cauchy olduğunu gösterir.

4.3.9.Tanım: (Chistyakov, 2013) w, X üzerinde bir modüler olsun. Eğer X_w^* üzerindeki her modüler Cauchy dizisi X_w^* içindeki bir noktaya modüler yakınsak ise X_w^* modüler uzayına modüler *tamdır* denir. Yani eğer $\{x_n\} \subset X_w^*$ ve $\lim_{n,m\to\infty} w_t(x_n, x_n) = 0$ olacak biçimde bir $t > 0$ varsa o zaman $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $x \in X_w^*$ vardır.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $w_t(x, y) = \frac{d(x,y)}{t}$ doğal modülerine göre $X_w^* = X$ de ki modüler tamlık, X' in metrik ($d_w^* = d$) tamlığına denktir.

BÖLÜM 5

MODÜLER UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde 1922 de S.Banach'ın daraltan dönüşümler için vermiş olduğu teoremin (Banach Daralma İlkesi olarakta bilinir.) modüler uzaylara genişletilmesi ele alınacaktır. Bunun için modüler Lipschitzian dönüşümleri de incelemekte fayda vardır.

5.1. Modüler Lipschitzian Dönüşümler

Lipschitzian dönüşümün modüler versiyonunu tanımlamak için öncelikle w modülerinin terimlerinde d_w^* metriğine göre $T: X_w^* \to X_w^*$ Lipschitzian dönüşümleri belirleyelim.

5.1.1.Teorem: (Chistyakov, 2013) w, X üzerinde konveks bir modüler, $k > 0$ bir sabit ve $T: X_w^* \to X_w^*$ bir dönüşümü olsun. O zaman her $x, y \in X_w^*$ için

$$d_w^*(Tx, Ty) \leq k d_w^*(x, y)$$

Lipschitz koşulu aşağıdaki ifadeye denktir.

Her $t > 0$ için $w_t(x, y) \leq 1$ koşulunu sağlayan $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{kt+0}(Tx, Ty) \leq 1$$

dir.

Kanıt: Bir $c > 0$ verildiğinde $t > 0, x, y \in X_w^*$ için $\overline{w}_t(x,y) = w_{ct}(x,y)$ biçiminde tanımlanan $\overline{w}$, X üzerinde konveks modülerdir ve $d_{\overline{w}}^* = \frac{1}{c} d_w^*$.

Gerçekten; $x, y \in X_{\overline{w}}^* = X_w^*$ için

$$d_{\overline{w}}^*(x,y) = \inf\{t > 0 : w_{ct}(x,y) \le 1\} = \inf\left\{\frac{\lambda}{c} > 0 : w_\lambda(x,y) \le 1\right\} = \frac{1}{c} d_w^*(x,y) \qquad (5.1)$$

olur.

($\Rightarrow$) $x \neq y$ olmak üzere herhangi $c > k$ alınsın. Hipotezden

$d_w^*(Tx,Ty) \le k d_w^*(x,y) < c d_w^*(x,y)$ ve buradan $d_w^*(Tx,Ty)/c < d_w^*(x,y)$ bulunur.

Bir $t > 0$ için eğer $w_t(x,y) \le 1$ ise d_w^* tanımından $d_w^*(x,y) \le t$ olup (5.1) eşitliğinden

$$t > \frac{1}{c} d_w^*(Tx,Ty) = \inf\{\lambda > 0 : w_{c\lambda}(Tx,Ty) \le 1\}$$

olur ve buradan $w_{ct}(Tx,Ty) \le 1$ olur. $c \to k + 0$ limiti alındığında $w_{kt}(Tx,Ty) \le 1$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\{t > 0 : w_\lambda(x,y) \le 1\}$ kümesi $\{t > 0 : w_{kt}^+(Tx,Ty) = w_{kt+0}(Tx,Ty) \le 1\}$ kümesini kapsar. d_w^* tanımı ve (5.1) eşitliğinden $d_{w^+}^* = d_w^*$ olup ve buradan

$$d_w^*(x,y) \ge \frac{1}{k} d_{w^+}^*(Tx,Ty) = \frac{1}{k} d_w^*(Tx,Ty)$$

olur. Yani T, Lipschitz koşulunu sağlar.

5.1.2. Not:

1- Özel olarak (X,d) bir metrik uzay olmak üzere X üzerindeki

$$w_t(x,y) = d(x,y)/t$$

doğal modüleri göz önüne alınsın ve bir $T : X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü verilsin. O zaman her $t > 0$ için ($x, y \in X$)

$$w_t(x,y) = d(x,y)/t \le 1$$

olmak üzere

$$w_{kt+0}(Tx, Ty) = \frac{d(Tx, Ty)}{kt} \leq 1$$

olur. Böylece $x \neq y$ olmak üzere $t = d(x, y)$ alındığında

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

elde edilir. Bu da (X, d) metrik uzayı üzerindeki Lipschitz koşulunu verir.

2- Teorem 5.1.1 den $k > 0$ bir sabit olmak üzere $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümü her $t > 0$ ve $x, y \in X_w^*$ için $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ koşulunu sağlıyorsa $d_w^*(Tx, Ty) \leq kd_w^*(x, y)$ eşitsizliği doğrudur. Yani T bir d_w^*- Lipschitzian dönüşümüdür.

Yerel $t > 0$ için Lipschitz koşulu aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

5.1.3. Tanım: (Chistyakov, 2015) w, X üzerinde bir modüler ve $T: X_w^* \to X_w^*$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X_w^*$ ve $0 < t < t_0$ koşulunu sağlayan her t için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$$

olacak biçimde bir $t_0 > 0$ ve $k > 0$ sabiti varsa T ye *modüler Lipschitzian* ($w-$ Lipschitzian) dönüşüm denir.

$$k_w(T) = \inf\{k > 0: \exists t_0 > 0 \ \ni \text{her } x, y \in X_w^* \text{ ve her } 0 < t < t_0 \text{ için}$$

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)\}$$

sayısına T nin *en küçük modüler Lipschitz sabiti* denir.

5.1.4. Teorem: (Chistyakov, 2015) w, X üzerinde bir modüler ve $S, T: X_w^* \to X_w^*$ iki modüler Lipschitzian dönüşümler olsun. O zaman

(a) $T \circ S$, T ve S nin bileşkesi olmak üzere $k_w(T \circ S) \leq k_w(T) \cdot k_w(S)$ dir.

(b) T^n, T dönüşümünün n. iterasyonu olmak üzere

$$k_w^{\infty}(T) = \lim_{n\to\infty}(k_w(T^n))^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}}(k_w(T^n))^{1/n} \leq k_w(T)$$

dir.

Kanıt: (a) $k_w(T)$ ve $k_w(S)$ sonlu olduklarından, $l > k_w(S)$ ve $k > k_w(T)$ olacak biçimde $k, l > 0$ sayıları vardır. En küçük modüler Lipschitz sabiti tanımından her $0 < t \leq t_0$, $0 < s \leq s_0$ ve $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y) \quad \text{ve} \quad w_{ls}(Sx, Sy) \leq w_s(x, y)$$

olacak biçimde $t_0 > 0$ ve $s_0 > 0$ sayıları vardır.$t_1 = \left\{\frac{t_0}{l}, s_0\right\}$ olarak alınırsa her $0 < t \leq t_1$ için $lt \leq t_0$ ve $t \leq s_0$ olup her $x, y \in X_w^*$ için

$$\begin{aligned} w_{klt}\big((T\circ S)x, (T\circ S)y\big) &= w_{k(lt)}\big(T(Sx), T(Sy)\big) \\ &\leq w_{lt}(Sx, Sy) \\ &\leq w_t(x, y) \end{aligned}$$

olur.

$k_w(T\circ S)$ nin tanımından $k_w(T\circ S) \leq kl$ bulunur.$k \to k_w(T)$ ve $l \to k_w(S)$ alındığında $k_w(T\circ S) \leq k_w(T)\cdot k_w(S)$ elde edilir.

(b) $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere (a) şıkkından $k_w(T^{n+m}) \leq k_w(T^n)\cdot k_w(T^m)$ olur. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için eğer $k_w(T^{n_0}) = 0$ ise her $n > n_0$ için

$$k_w(T^n) \leq k_w(T^{n-n_0})\cdot k_w(T^{n_0}) = 0$$

olup $k_w^{\infty}(T) = 0$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $k_w(T^n) > 0$ olsun. $a_n = \log k_w(T^n)$ alındığında her $n, m \in \mathbb{N}$ için $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ olur ve buradan

$$a \equiv \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n}{n} \in \{-\infty\}\cup\mathbb{R}$$

olacak biçimde (genişletilmiş reel değerli) limiti vardır. Üstel fonksiyonların sürekliliğinden

$$\lim_{n\to\infty}(k_w(T^n))^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}}(k_w(T^n))^{\frac{1}{n}} = e^a$$

olur.

Ayrıca (a) şıkkından

$$k_w(T^n) \le \underbrace{k_w(T)\cdot k_w(T)\cdot\cdots\cdot k_w(T)}_{\text{n-kez}} = \big(k_w(T)\big)^n$$

olup buradan $k_w^{\infty}(T) \le k_w(T)$ bulunur.

5.2. Fonksiyonların Sabit Noktaları ve Daraltan Dönüşümler

5.2.1.Tanım: $X \neq \emptyset$ olan bir küme ve bir $T: X \to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer $T(x) = x$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa, x' e T nin bir *sabit noktası* denir.

Diğer bir deyişle $T(x) = x$ eşitliğini sağlayan her bir $x \in X$, T nin bir sabit noktasıdır.

Bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabileceği gibi hiçbir sabit noktası da olmayabilir.

5.2.2.Örnek:

1. $X \neq \emptyset$ olmak üzere X in her bir elemanı $I: X \to X,\ I(x) = x$ birim dönüşümü için bir sabit noktadır.

2. X bir vektör uzayı ve $a \in X$ $(a \neq 0)$ sabit olmak üzere

$$T: X \to X, \qquad T(x) = x + a$$

dönüşümün sabit noktası yoktur.

3. $X = [0,1]$ olmak üzere

$$T: X \to X, \qquad T(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

dönüşümü için $x = 0$ T nin tek bir sabit noktasıdır.

Örnek 5.2.2 de bazı dönüşümlerin sabit noktasının olmadığı görüldüğü gibi bazılarının da sabit noktalarının var ve hatta bunların birden fazla olduğu görülmektedir.

Varlık ve teklik problemlerinin çözümlerinde, sabit nokta teorisi önemli rol oynamaktadır.

Bir dönüşüm verildiğinde, dönüşümün özellikleri ve onun tanım kümesinin karakteristlik yapısı, onun sabit noktasının varlığını garanti etmede önemli rol oynarlar. Bu da sabit nokta teorisinin, verilen dönüşüm özelliklerinin yanı sıra dönüşümün tanımlı olduğu kümenin yapısının üzerindeki koşullarla da yakından ilgili olduğunu gösterir.

Sabit nokta teorisindeki en önemli sonuçlardan biri S.Banach'ın (1922) vermiş olduğu ve literatürde *Banach Daralma İlkesi* (veya *Banach Sabit Nokta Teoremi*) olarak bilinen teoremdir. Bu teoremde S.Banach ,

"(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ her $x, y \in X$ için $0 \leq k < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun.(Bu tür dönüşümlere ***daraltan dönüşüm*** denir.) O zaman T' nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. " sonucunu vermiştir.

S.Banach'ın vermiş olduğu bu sonuç, sabit noktanın varlığını ve tekliğini verdiği gibi kanıtında da sabit noktanın nasıl elde edileceği hakkında da yol göstermiştir.

Bu kesimde Chistyakov 'un (Chistyakov, 2013) Banach sabit nokta teoremini modüler metrik uzaylara genelleştirmiş olduğu daraltan dönüşümler için sabit nokta teoremleri incelenecektir.

Chistyakov modüler metrik uzaylarda daraltan dönüşümler için iki tanım vermiştir.

5.2.3.Tanım: w, X kümesi üzerinde bir modüler ve $T: X_w^* \to X_w^*$ bir dönüşüm olsun.$0 < k < 1$ olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ ve her $0 < t \leq t_0$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$$

olacak biçimde $t_0 > 0$ sayısı varsa T ye *modüler daraltan* (veya $w - daraltan$) denir.

5.2.4.Tanım: w, X kümesi üzerinde bir modüler ve $T: X_w^* \to X_w^*$ bir dönüşüm olsun.$0 < k < 1$ olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ ve her $0 < t \leq t_0$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) \leq kw_t(x, y)$$

olacak biçimde $t_0 > 0$ sayısı varsa T ye *kuvvetli modüler daraltan* (veya $kuvvetli\ w - daraltan$) denir.

H. Abobaker ve R.A.Ryan (2017), Chistyakov 'un modüler daraltan ve kuvvetli modüler daraltan dönüşümler için vermiş olduğu sabit nokta teoreminin kanıtını R.Palais (2007) ın sabit nokta teoremleri için kullanmış olduğu yöntemi temel alarak değişik bir yaklaşım ile yeniden kanıtlamıştır.

R.Palais (2007) ın metrik uzaylardaki yöntemi, adına *Temel Daralma Eşitsizliği* dediği aşağıdaki eşitsizliğe dayanmaktadır.

"T (X, d) metrik uzayında k sabitli bir daraltan dönüşüm olsun. X in üçgen eşitsizliği ve T nin daraltanlığı kullanıldığında

$$d(x, y) \leq \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{1 - k}$$

eşitsizliği elde edilir.

R.Palais (2007) ın eşitsizliği modüler daraltan dönüşümler için aşağıdaki biçimdedir.

5.2.5.Ön Teorem: (Abobaker ve Ryan, 2017) w, X kümesi üzerinde konveks modüler ve $T: X_w^* \to X_w^*$, her $0 < t \leq t_0$ için $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ biçiminde bir modüler daraltan dönüşüm olsun.

$0 < t \leq t_0$ olmak üzere $t_1, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 = (1-k)t$ alınırsa her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_t(x, y) \leq \frac{t_1 w_{t_1}(x, Tx) + t_2 w_{t_2}(y, Ty)}{t(1-k)}$$

dir.

Kanıt: w nin konveksliği kullanılarak $t = t_1 + kt + t_2$ olarak alındığında

$t_1 + t_2 = (1-k)t$ olur. w nin konveksliği kullanıldığında

$$w_{t_1+kt+t_2}(x, y) \leq \frac{t_1}{t} w_{t_1}(x, Tx) + k w_{kt}(Tx, Ty) + \frac{t_2}{t} w_{t_2}(y, Ty)$$

bulunur. T nin $w_{kt}(Tx, Ty) \leq w_t(x, y)$ daraltan özelliği kullanıldığında

$$w_t(x, y) \leq \frac{t_1}{t} w_{t_1}(x, Tx) + k w_t(x, y) + \frac{t_2}{t} w_{t_2}(y, Ty)$$

elde edilir. O halde

$$w_t(x, y) \leq \frac{t_1 w_{t_1}(x, Tx) + t_2 w_{t_2}(y, Ty)}{t(1-k)}$$

bulunur.

Temel Daralma Eşitsizliği kullanılarak modüler uzaylarda Chistyakov'un birinci sabit nokta teoremi aşağıdaki biçimde kanıtlanabilir.

5.2.6.Teorem: (Chistyakov, 2013), (Abobaker ve Ryan, 2017)

w, X kümesi üzerinde mutlak konveks modüler, X_w^* $w-$ tam modüler uzay ve $T: X_w^* \to X_w^*$ de her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var koşulunu sağlayan $w-$daraltan bir dönüşüm olsun. O zaman T nin X_w^* de bir x_* sabit noktası vardır.

Eğer w modüleri X_w^* üzerinde sonlu değerler alırsa; o zaman

(a) $w_t(x, Tx) < \infty$ koşuluna gerek yoktur.

(b) T nin x_* sabit noktası tektir.

(c) Her bir $x_0 \in X_w^*$ için $\{T^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi x_*'a modüler yakınsar.

Kanıt: Ön Teorem 5.2.5 ten T için modüler temel daralma eşitsizliği kullanıldığında

$$w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \leq \frac{t_1 w_{t_1}\big(T(T^n(x_0), T^n(x_0)\big) + t_2 w_{t_2}\big(T(T^m(x_0), T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$= \frac{t_1 w_{t_1}\big(T^n(T(x_0), T^n(x_0)\big) + t_2 w_{t_2}\big(T^m(T(x_0), T^m(x_0)\big)}{1-k}$$

$$\leq \frac{t_1 w_{k^{-n}t_1}\big(T(x_0, x_0)\big) + t_2 w_{k^{-m}t_2}\big(T(x_0, x_0)\big)}{1-k}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $\frac{t}{k^n} \to \infty$ olacağından yeteri kadar büyük $n \in \mathbb{N}$ için $k^{-n}t_1 > t$ olur. Benzer biçimde yeteri kadar büyük $m \in \mathbb{N}$ için $k^{-m}t_2 > t$ dir. w_t artmayan ve $0 < k < 1$ olduğundan

$$w_{k^{-m}t_2}\big(T(x_0), x_0\big) \leq w_t(T(x_0), x_0) < \infty \text{ ve}$$

$$w_{k^{-n}t_1}\big(T(x_0), x_0\big) \leq w_t(T(x_0), x_0) < \infty$$

olur. Önerme 2.2.3.(c) den $n \to \infty$ için

$$w_{k^{-m}t_2}\big(T(x_0), x_0\big) \to 0 \text{ ve } w_{k^{-n}t_1}\big(T(x_0), x_0\big) \to 0$$

olur. Buradan da $n, m \to \infty$ için $w_t\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \to 0$ bulunur. $t < t_0$olup w nin artmayan özelliğinden $w_{t_0}\big(T^n(x_0), T^m(x_0)\big) \to 0$ olur. Bu da $\{T^n(x_0)\}$ ın bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

X_w^*, $w-$tam olduğundan $n \to \infty$ iken $w_{t_0}(T^n(x_0), x_*) \to 0$ olacak biçimde $x_* \in X_w^*$ vardır. $w-$mutlak modüler olduğundan Teorem 4.3.4.(b) den $\{T^n(x_0)\}$ dizisinin x_* modüler limiti tektir. Bu durumda x_*, T nin bir sabit noktası olur.

Gerçekten, w nin (iii) ve T nin daraltanlık özelliğinden

$$w_{(k+1)t_0}(Tx_*, x_*) \leq w_{kt_0}(Tx_*, T^n x_0) + w_{t_0}(x_*, T^n x_0)$$

$$\leq w_{t_0}(x_*, T^{n-1}x_0) + w_{t_0}(x_*, T^n x_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olup buradan $w_{(k+1)t_0}(Tx_*, x_*) = 0$ olur. w −mutlak olduğundan $Tx_* = x_*$ bulunur. Yani x_*, T nin bir sabit noktasıdır.

Son olarak w, X_w^* üzerinde sonlu değerler alsın. T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim.

$Tx_* = x_*$ ve $Ty_* = y_*$ olacak biçimde $x_*, y_* \in X_w^*$ var olsun. w nin konvekslik, T nin daraltanlık özelliği ve Önerme 2.2.3.(b) de $kt_0 < t_0$ eşitsizliği kullanıldığında

$$w_{t_0}(x_*, y_*) \leq \frac{kt_0}{t_0} w_{kt_0}(x_*, y_*) = k w_{kt_0}(Tx_*, Ty_*) \leq k w_{kt_0}(x_*, y_*)$$

olur. $w_{t_0}(x_*, y_*)$ sonlu olduğundan $(1-k)w_{t_0}(x_*, y_*) \leq 0$ bulunur.

$0 < 1 - k$ olduğundan $w_{t_0}(x_*, y_*) = 0$ olur. w nin mutlak modüler olmasından $x_* = y_*$ dir.

5.2.7.Sonuç: Eğer w, X_w^* üzerinde sonlu değerler alan bir modüler ve $T: X_w^* \to X_w^*$ dönüşümünün $n-$ inci iterasyonu T^n, Teorem 5.2.6. nın koşullarını sağlıyorsa T nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

Kanıt: T^n Teorem 5.2.6. ya uygulandığında $T^n x_* = x_*$ olacak biçimde bir $x_* \in X_w^*$ vardır.

$$T^n(Tx_*) = T(T^n x_*) = Tx_*$$

olduğundan Tx_* , T^n nin bir sabit noktası olur. T^n nin sabit noktası tek olduğundan $Tx_* = x_*$ dir. Yani x_* T nin bir sabit noktasıdır.

Eğer $y_* \in X_w^*$ ve $Ty_* = y_*$ ise o zaman

$$T^n y_* = T^{n-1}(Ty_*) = T^{n-1}y_* = \cdots = y_*$$

olur. Bu da y_* ın T^n nin başka bir sabit noktası olduğunu gösterir. T^n nin sabit noktası tek olduğundan $y_* = x_*$ dır.

Teorem 5.2.6. nın bir başka sonucu da kuvvetli modüler daraltan dönüşümler için olup burada X üzerindeki w modülerinin konveks olması gerekmez.

5.2.8. Teorem: (Chistyakov, 2013) w, X kümesi üzerinde mutlak modüler, X_w^*

$w-$ tam modüler uzay ve $T: X_w^* \to X_w^*$ de her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var koşulunu sağlayan kuvvetli $w-$daraltan bir dönüşüm olsun. O zaman T nin X_w^* de bir x_* sabit noktası vardır.

Eğer w modüleri X_w^* üzerinde sonlu değerler alırsa; o zaman

(a) $w_t(x, Tx) < \infty$ koşuluna gerek yoktur.

(b) T nin x_* sabit noktası tektir.

(c) Her bir $x_0 \in X_w^*$ için $\{T^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi x_*'a modüler yakınsar.

Kanıt: Her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için $v_t(x, y) = w_t(x, y)/t$ tanımlansın. O zaman v, X üzerinde bir konveks modüler olur. Ayrıca v mutlak modüler olup $X_v^* = X_w^*$ ve X_v^* $w-$ tamdır. T kuvvetli $w-$daraltan olduğundan aynı zamanda kuvvetli $v-$daraltandır. Yani her $x, y \in X_v^*$ ve her $0 < t \leq t_0$ için $v_{kt}(Tx, Ty) \leq k v_t(x, y)$ koşulunu sağlar. Teorem 5.2.6. dan $Tx_* = x_*$ olacak biçimde $x_* \in X_v^* = X_w^*$ vardır.

Diğer sonuçlarda benzer şekilde elde edilir.

5.3. Modüler Uzaylarda Sabit Nokta Teoreminin Bir Örneği

Bu kesimde klasik Banach sabit nokta teoremine uygulanamayan fakat modüler uzaylardaki sabit nokta teoremine uygulanabilecek bir örnek verilecektir.

5.3.1.Örnek: $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ (merkez) olmak üzere her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$w_t(x,y) = \begin{cases} 0; & t > 0 \text{ ve } x = y \\ \infty; & 0 < t < 1 \text{ ve } x \neq y \\ \dfrac{|x-y|}{t}; & t \geq 1 \text{ ve } x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ dönüşümünün Teorem 5.2.6. nın koşullarını sağladığı ve T nin sabit noktasının var olduğunu ($T(0) = 0$) göstereceğiz.

a) w, $X = \mathbb{R}$ üzerinde mutlak konveks modüler, $X_w^* = \mathbb{R}$ dir.

Kanıt: (i) Her $t > 0$ ve $x \in X$ için $w_t(x,x) = 0$ olduğu açıktır.

Eğer $t > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ ise o zaman $w_t(x,y) \neq 0$ olup w mutlak modüler olur.

(ii) $w_t(x,y) = w_t(y,x)$ simetri özelliği açıktır.

(iii) w nin konvekslik özelliğini göstermek için $(t, s > 0)$ $x \neq z$ ve $z \neq y$ için $w_t(x,z)$ ve $w_s(z,y)$ yi sonlu almak genelliği bozmaz. w nin tanımından $t \geq 1$ ve $s \geq 1$ için

$$w_t(x,z) = \frac{|x-z|}{t} \text{ ve } \; w_s(z,y) = \frac{|z-y|}{s}$$

dir. $t + s \geq 2$ olduğundan $x \neq y$ için

$$w_{t+s}(x,y) = \frac{|x-y|}{t+s} \leq \frac{t}{t+s} \cdot \frac{|x-z|}{t} + \frac{s}{t+s} \cdot \frac{|z-y|}{s}$$

$$= \frac{t}{t+s} w_t(x,z) + \frac{s}{t+s} w_s(z,y)$$

sağlanır.

$$X_w^* = X_w^*(0) = \{x \in X : \exists\, t > 0 \ni \; w_t(x,0) < \infty\} = \mathbb{R}$$

olduğu açıktır.

b) w tarafından $X_w^* = \mathbb{R}$ üzerine indirgenen d_w^* metriği

$$d_w^*=\inf\{\,t>0:\, w_t(x,y)\le 1\}=\begin{cases} 0; & x=y \\ 1; & 0<|x-y|\le 1 \\ |x-y|; & |x-y|>1 \end{cases}$$

dir.

c) X_w^* deki modüler yakınsama d_w^* de ki metrik yakınsamaya denk değildir.

Gerçekten; $x_n=\frac{1}{n}$ dizisi göz önüne alındığında $t_0\ge 1$ için

$$w_{t_0}(x_n,0)=\frac{|x_n-0|}{t_0}=\frac{1}{nt_0}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

yani $x_n \overset{w}{\to} 0$ olur.

Aynı zamanda her $n\in\mathbb{N}$ için $0<|x_n-0|\le 1$ olduğundan $d_w^*(x_n,0)=1$ dir. Yani $\{x_n\}$ dizisi d_w^* metriğine göre yakınsak değildir.

d) $X_w^*=\mathbb{R}$ modüler uzayı modüler tamdır.

Kanıt: $\{x_n\}$, X_w^* üzerinde bir modüler Cauchy dizisi olsun. O zaman $n,m\to\infty$ iken

$$w_{t_0}(x_n,x_m)\to 0$$

olacak biçimde bir $t_0\ge 1$ vardır. Yani her $\varepsilon>0$ için $\exists n_0\in\mathbb{N}\ni$ her $n,m>n_0(\varepsilon)$ için $w_{t_0}(x_n,x_m)\le\varepsilon$ dir. Bu durumda w nin tanımından olası aşağıdaki iki durum söz konusudur.

i) $0<t_0<1$

ii) $t_0\ge 1$.

Eğer $0<t_0<1$ ise o zaman $\varepsilon=1$ alındığında $w_{t_0}(x_n,x_m)\le 1$ olup böylece her $n,m>n_0(1)$ için $w_{t_0}(x_n,x_m)=0$ olur ve buradan $x_n=x_m$ bulunur. $x=x_{n_0(1)}$ alındığında her $n\ge n_0(1)$ için $x_n=x$ olur. Ve böylece her $n\ge n_0(1)$ için $w_{t_0}(x_n,x)=0$ dır. Yani $\{x_n\}$, $x\in X_w^*$ ye modüler yakınsar.

Eğer $t_0\ge 1$ ise o zaman $\varepsilon>0$ verildiğinde her $n,m\ge n_0(\varepsilon)$ için

$$w_{t_0}(x_n,x_m)=\frac{|x_n-x_m|}{t_0}\le\varepsilon$$

dir. Bu da $\{x_n\}$ nin $\mathbb{R}$ deki mutlak değer metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$w_{t_0}(x_n, x) = \frac{|x_n - x|}{t_0} = \lim_{m\to\infty} \frac{|x_n - x_m|}{t_0} \leq \varepsilon$$

olur. Bu da $\lim_{m\to\infty} w_{t_0}(x_n, x) = 0$ olduğunu gösterir.

Her iki durumda da $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bir $x \in X_w^*$ modüler yakınsak olduğundan $X_w^* = \mathbb{R}$ modüler uzayı modüler tamdır.

e) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ dönüşümü modüler daraltan dönüşüm olup en küçük modüler Lipschitz sabiti $k_w(T) = 0$ dır. Fakat T, d_w^* metriğine göre daraltan değildir.

Kanıt: $0 < k < 1$ ve $0 < t_0 < 1$ keyfi seçilmiş sabitler olsunlar. O zaman w nin tanımından her $0 < t \leq t_0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) = w_{kt}(2x, 2y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ \infty; & x \neq y \end{cases} = w_t(x, y)$$

olur. $k_w(T)$ nin tanımından her $0 < k < 1$ için $k_w(T) \leq k$ olur. Buradan $k_w(T) = 0$ bulunur.

Eğer sabit bir $k > 0$ için

$$d_w^*(Tx, Ty) \leq k d_w^*(x, y)$$

ise, $|x - y| > 1$ alındığında

$$|2x - 2y| = d_w^*(Tx, Ty) \leq k d_w^*(x, y) = k|x - y|$$

olup buradan $k \geq 2$ bulunur. Bu da T nin d_w^* −daraltan olmadığını gösterir.

Not: Yukarıdaki daraltanlık koşulunda $t_0 = 1$ alınırsa T nin daraltanlık koşulu gerçekleşmez. Gerçekten; $x \neq y$, $0 < k < 1$ ve $t_0 = 1$ için

$$w_{kt_0}(Tx, Ty) = w_k(2x, 2y) = \infty > |x - y| = w_1(x, y) = w_{t_0}(x, y)$$

olur.

f) $Tx = 2x$ dönüşümü Teorem 5.2.6.daki " her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var" koşulunu sağlar.

Gerçekten; her $t > 0$ için $x = 0$ alınırsa

$$w_t(x, Tx) = w_t(x, 2x) = w_t(0,0) = 0$$

olur. Buna karşın $x \neq 0$ dan başka hiçbir nokta bu koşulu sağlamaz. Çünkü $x \neq 0$ ise $x \neq 2x = Tx$ olup ve böylece her $0 < t < 1$ için $w_t(x, Tx) = \infty$ olur.

Sonuç olarak Teorem 5.2.6. dan $Tx = 2x$ dönüşümü $\mathbb{R}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir ve $x = 0$ T nin tek bir sabit noktasıdır.

5.3.2.Not: $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Sx = x + 1$ olarak tanımlanan dönüşümü modüler daraltan olup Teorem 5.2.6.daki " her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var" koşulunu sağlamaz. Çünkü her $x \in \mathbb{R}$ için $x \neq Sx$ dir.(yani S nin bir sabit noktası yoktur.) O halde her $0 < t < 1$ için $w_t(x, Sx) = \infty$ olur.

Bu örnek bize Teorem 5.2.6. daki " her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var" koşulunun, T nin sabit noktasını garanti etmek için gerekli bir koşul olduğunu gösterir.

5.3.3.Not: Eğer w modüleri X_w^* üzerinde sonlu değerler almazsa $T: X_w^* \to X_w^*$ modüler daraltan dönüşümün sabit noktası tek olmayabilir.

Örneğin; $Tx = [\![x]\!]$ tam değer fonksiyonu göz önüne alındığında her $q \in \mathbb{Z}$ için $Tq = [\![q]\!] = q$ dur. Yani her $q \in \mathbb{Z}$, T nin bir sabit noktasıdır. Eğer $0 < k < 1$ ve $0 < t_0 < 1$ alınırsa her $0 < t \leq t_0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$w_{kt}(Tx, Ty) = w_{kt}([\![x]\!], [\![y]\!]) = \begin{cases} 0; & [\![x]\!] = [\![y]\!] \\ \infty; & [\![x]\!] \neq [\![y]\!] \end{cases} \leq \begin{cases} 0; & x = y \\ \infty; & x \neq y \end{cases} = w_t(x, y)$$

sağlanır. Yani T daraltan dönüşümdür.

w modüleri X_w^* üzerinde sonlu değerler almamasına karşın T dönüşümü Teorem 5.2.6. daki " her $t > 0$ için $w_t(x, Tx) < \infty$ olacak biçimde bir $x = x(t) \in X_w^*$ var" koşulunu sağlar. Gerçekten; her $t > 0$ için her hangi bir $q = q_t \in \mathbb{Z}$ seçildiğinde

$$w_t(q_t, Tq_t) = w_t(q_t, [\![q_t]\!]) = w_t(q_t, q_t) = 0.$$

5.4. Modüler Metrik Uzaylarda Caristi Tipinde Bir Sabit Nokta Teoremi

Sabit nokta teorisinde S.Banach'ın teoreminden sonra en önemli teoremlerden biri de Caristi'nin sabit nokta teoremidir.

Caristi'nin teoremi (Caristi, 1976);

"(X, d) bir metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için

$$d\big(x, f(x)\big) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$$

koşulunu sağlıyorsa, f'nin bir sabit noktası vardır"

biçimindedir.

Burada $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması;

X deki $x_n \to x$ olan her $\{x_n\}$ dizisi için

$$\varphi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n)$$

olarak tanımlanır.

Caristi'nin sabit nokta teoreminin literatürde birçok farklı uzayda değişik genişlemeleri ve genellemeleri vardır. Bu kesimde Caristi'nin teoreminin bir versiyonu modüler metrik uzaylara genişletilecektir.

5.4.1.Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$O_T(x, \infty) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

kümesine x in yörüngesi denir.

5.4.2.Tanım: w, bir X kümesi üzerinde modüler olsun. Eğer bir $x \in X$ için $O_T(x, \infty)$ deki her $\{x_n\} \subset X_w^*$ modüler Cauchy dizisi X_w^* da modüler yakınsak ise yani;

$$\lim_{n,m\to\infty} w_t(x_n, x_m) = 0$$

olacak biçimde bir $t > 0$ varsa o zaman $\lim_{n\to\infty} w_t(x_n, x) = 0$ olacak biçimde bir $x \in X_w^*$vardır koşulu sağlanırsa, X_w^*'a *yörüngesel modüler tamdır* denir.

5.4.3.Tanım: w, bir X kümesi üzerinde modüler ve $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü verilsin. Eğer $x_n \overset{w}{\to} u$ olan $O_T(x, \infty)$ deki her $\{x_n\} \subset X_w^*$ dizisi için

$$\varphi(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n)$$

oluyorsa φ'ye u'da modüler yörüngesel alttan yarı süreklidir denir ve kısaca $w - a.y.s.$ ile gösterilir.

.4.4.Teorem: w, bir X kümesi üzerinde mutlak konveks modüler, X_w^* modüler uzay, $T: X_w^* \to X_w^*$ ve $\Phi: X \to \mathbb{R}^+$ bir dönüşüm olsun. Bir $u \in X_w^*$ için X_w^* modüler yörüngesel tam ve her $x \in O_T(u, \infty)$ ve $t_0 \geq t > 0$ için

$$w_t(x, Tx) \leq \Phi(x) - \Phi(Tx) \tag{5.2}$$

olacak biçimde bir $t_0 > 0$ var olsun. O zaman

(i) $T^n x \overset{w}{\to} x_0 \in X_w^*$ vardır.

(ii) $Tx_0 = x_0$ olması için gerekli ve yeterli koşul$\varphi(x) = w_{t_0}(x, Tx)$ in x_0 da

$w - a.y.s.$ olmasıdır.

Kanıt: (i) (5.2) eşitsizliğinden $n = 0,1,2,$ ... ve her $t_0 \geq t > 0$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} w_t(T^n x, T^{n+1}x) \leq \sum_{i=0}^{n} \left[\Phi(T^i x - \Phi(T^{i+1}x)\right]$$

$$= \Phi(x) - \Phi(T^{n+1}x)$$

$$\leq \Phi(x) \qquad (5.3)$$

dir. Böylece $\{S_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve azalmayan olacağından her

$t_0 \geq t > 0$ için yakınsaktır.

$m > n$ olsun. O zaman w'nin (iii) özelliğinden

$$w_{t_0}(T^n x, T^m x) \leq \underbrace{w_{\frac{t_0}{m-n}}(T^n x, T^{n+1}x) + \cdots + w_{\frac{t_0}{m-n}}(T^{m-1}x, T^m x)}_{m-n \text{ kez}}$$

bulunur. $\{S_n\}$, her $t_0 \geq t > 0$ için yakınsak olduğundan yeteri kadar büyük $N \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=N}^{\infty} w_t(T^k x, T^{k+1}x) < \varepsilon$$

olur. Böylece her $m > n \geq N$ için $\frac{t_0}{m-n} < t_0$ olacağından

$$w_{t_0}(T^n x, T^m x) \leq \sum_{k=N}^{m-1} w_{\frac{t_0}{m-n}}(T^k x, T^{k+1}x)$$

$$\leq \sum_{k=N}^{\infty} w_{\frac{t_0}{m-n}}(T^k x, T^{k+1}x) < \varepsilon$$

olur ki bu da $\{T^n x\}$ in X_w^* üzerinde bir modüler Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

X_w^* modüler tam olduğundan $n \to \infty$ iken $w_{t_0}(x_n, x_0) \to 0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X_w^*$ vardır.

(ii) $Tx_0 = x_0$ ve $\{x_n\}$ de $O_T(x, \infty)$ da x_0'a modüler yakınsayan herhangi bir dizi olsun. O zaman

$$G(x_0) = w_{t_0}(x_0, Tx_0) = 0 \leq \lim_{n\to\infty} \inf\, w_{t_0}(x_n, Tx_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n)$$

yani; φ, x_0 da modüler yörüngesel alttan yarı sürekli olur.

Tersine φ, x_0 da modüler yörüngesel alttan yarı sürekli olsun. O zaman (i) ve (5.3) ten

$$0 \leq w_{t_0}(x_0, Tx_0) = \varphi(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(T^n x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf w_{t_0}(T^n x, T^{n+1} x) = 0$$

olur ve buradan $w_{t_0}(x_0, Tx_0) = 0$ olup w mutlak olduğundan $x_0 = Tx_0$ bulunur.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada Christyakov(Christyakov, 2006) tarafından tanımlanan ve geliştirilen lineer uzaylar ve Orlicz uzayları üzerindeki klasik modülerin her hangi bir küme üzerinde genelleştirilmesi olan modüler uzaylar ve modüler metrik çalışılmış, onların bazı önemli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca literatürde Banach daralma ilkesi olarak bilinen Banach'ın sabit nokta teoreminin modüler metrik uzaylara uyarlanması incelenmiş ve uzayla uyumlu elverişli koşullar araştırılmıştır.

Yine literatürde " Caristi' nin sabit nokta teoremi" olarak bilinen önemli bir teoremin modüler uzaylara uyarlanmış olan bir versiyonu verilmiştir.

Aslında;

$\alpha = \frac{1}{t} > 0$ olmak üzere $w(\alpha, x, y) = \alpha d(x, y)$ doğal modüleri göz önüne alındığında metrik uzay teorisinin modüler uzay teorisi içinde gömülü olduğu ortaya çıkmaktadır. Buradaki α parametresi ikisinin arasındaki farkı ortaya koymada önemli rol oynar.

w genel modülerinde α üzerindeki değişik bağıntılar lineer olmayan analizin gelişmesinde önemli katkılar sağlayacağı ön görmektedir.

KAYNAKLAR

Abobaker, H., Ryan R. A. (2017). Modular metric spaces. *Irish Mathematical Society Bulletin. 80,* 35-44.

Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics.* New York: Academic.

Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications. *Fundamenta Mathematicae. 3*, 133-181.

Caristi, J. (1976). Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society. 215*, 241-251.

Chistyakov, V. V. (2006). Metric modulars and their application. *Doklady Mathematics. 73*(1), 32-35.

Chistyakov, V. V. (2008). Modular metric spaces generated by *F*-modulars. *Folia Mathematica. 15*(1), 3-24.

Chistyakov, V. V. (2010). Moduler metric spaces, I: Bacis concepts. *Nonlinear Analysis*, *72*(1), 1-14.

Chistyakov, V. V. (2010). Moduler metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis*, *72*(1), 15-30.

Chistyakov, V.V. (2011). A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. arXiv:1112.5561, 1-31.

Chistyakov, V.V. (2012). Fixed points of modular contractive maps. *Doklady Mathematics*. *86*(1), 515-518.

Chistyakov, V. V. (2013). Modular contractions and their application. B. Goldengorin et al. (ed.), *Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis* (s.65-92). New York: Springer Science + Business Media.

Chistyakov, V. V. (2015). Modular Lipschitzian and contractive maps. A. Migdalas, A. Karakitsiou (ed.), *Optimizition, Control, and Applications in the Informations Age* (s.1-15).Switzerland: Springer Intertaional Publishing.

Chistyakov, V. V. (2015). *Metric Modüler Spaces Theory and Applications.* Switzerland: Springer İnternational Puplishing.

Khamsi, M. A., Kozlowski W. M. (2015). *Fixed Points Theory in Modular Function Spaces.* Switzerland: Springer İnternational Puplishing.

Kirk W., Shahzad N. (2014). *Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Switzerland: Springer İnternational Puplishing.

Krasnosel'skiĭ, M. A., Rutickiĭ, J. B. (1958). *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Moscow: Fizmatgiz (in Russian), English Translation: (1961). Groningen: P. Noordhoff Ltd.

Lindenstrauss, J., Tzafriri, L. (1979). *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*. Berlin: Springer.

Maligranda, L. (1989). *Orlicz Spaces and Interpolation*. *Seminars in Mathematics.* Campinas, *5*. Brasil: Universidade Estadual de Campinas.

Musielak, J., (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces. *Lecture Notes in Mathematics. 1034*, Berlin: Springer.

Nakano, H. (1950). *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.* Tokyo: Maruzen.

Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces. *I. Bulltin L' Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques. 9*, 157-162.

Orlicz, W. (1988). *Collected Papers. Parts I,II* . Warsaw: Polish Scientific Publishers.

Palais, R. S. (2007). A simple proof of the Banach contraction principle. *Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2*(2), 221-223.

Rao, M. M., Ren, Z. D. (2002). *Applications of Orlicz Spaces. Monographs and Textbooks in Pure and Appliedd Mathematics. 250,* New York: Marcel Dekker.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Emine Öz

Doğum Yeri: **:** Edirne

Doğum Tarihi **:** 02.01.1987

EĞİTİM VE AKADEMİK DURUMU:

İlkokul **:** Yusufhoca İlköğretim Okulu

Ortaokul **:** Yusufhoca İlköğretim Okulu

Lise **:** Edirne Lisesi

Lisans **:** Zonguldak Karaelmas Üniversitesi (Bülent Ecevit Üniversitesi) Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans **:** Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil **:** İngilizce

İŞ TECRÜBESİ:

Ücretli öğretmenlik

Dershane öğretmenliği