T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

COULOMB ALANI İÇİNDE SPİNİ SIFIR OLAN NEGATİF YÜKLÜ PARÇACIĞIN GÖRELİ D-BOYUTTAKİ HAREKETİ

OSMAN IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

EDİRNE-2019

Osman IŞIK'ın hazırladığı "**COULOMB ALANI İÇİNDE SPİN'İ SIFIR OLAN NEGATİF YÜKLÜ PARÇACIĞIN GÖRELİ D BOYUTTAKİ HAREKETİ**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından FİZİK Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri;	İmza
Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN	.....
Prof. Dr. Metin ÖZDEMİR	.....
Doç. Dr. Akif SABANER	.....

Tez Savunma Tarihi: 08/02/2019

Bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

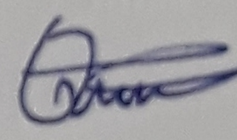
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

08 / 02 / 2019

Osman IŞIK

İmza



Yüksek Lisans Tezi

Coulomb Alanı İçinde Spini Sıfır Olan Negatif Yüklü Parçacığın Göreli D-Boyuttaki Hareketi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, D + 1 boyutlu uzayzamanda Coulomb küresel simetrik potansiyel enerjinin etkisi altındaki spin'i sıfır olan negatif yüklü parçacık için Klein-Gordon denklemi oluşturulmuştur. D + 1 boyutlu uzay zamanında Coulomb alanı etkisi altında spin'i sıfır olan negatif yüklü parçacık için enerji özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını elde edilmiştir. D + 1 boyut uzayzamanda spin'i sıfır olan negatif yüklü parçacık için göreli sınırlı kuantum enerjisi, hem sınırlı kuantum enerjisi ile uzayzaman boyutu arasındaki karşılıklı ilişkiyi anlamak için hem de D+1 boyutlu uzayzamanda spin'i sıfır olan bükülmüş negatif yüklü parçacık için bağlı kuantum enerjisini doğrulamanın anahtarı olarak ilgi çekici olarak görülebilir.

Yıl : 2019

Sayfa Sayısı : 121 sayfa

Anahtar Kelimeler : Klein-Gordon Denklemi, D-Boyutlu Hidrojen Benzeri Atomlar, Ultra Küresel Harmonikler, Pi-Mezonik Atomlar, D+1 Boyutlu Uzay-zaman

Master's Thesis

Relativistic D-Dimensional Motion of Negatively Charged Spin Zero Particle in The Coulomb Field

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Physics

ABSTRACT

The Klein-Gordon equation for negatively charged spin zero in the D+1 dimensional spacetime under the influence of the spherical symmeric petential energy that is the Coulomb field is constructed. We calculate the energy eigenvalues and eigenfunctions for negatively charged spin zero particle in D+1 dimensional spacetime under the Coulomb field. The relativistic bounded quantum energy for negatively charged spin zero particle in D+1 dimensional spacetime is regarded as interesting both to understand the correspondence between bounded quantum energy and the dimension of spacetime and as key to confirming the bounded quantum energy for twisted negatively spin zero particle in D+1 dimensional spacetime.

Year : 2019

Number of Pages : 121 pages

Keywords : Klein-Gordon Equation, D- Dimensional Hydrogen Like Atoms, Hyperspherical Harmonics, Pi Mesonic Atoms, D+1 Spacetime Dimensions

İÇİNDEKİLER

ÖZET……..…...i

ABSTRACT……...……..ii

İÇİNDEKİLER ……..iii

SİMGELER DİZİNİ ……..v

ÇİZELGELER DİZİNİ……....….....vi

ŞEKİLLER DİZİNİ……..…....vii

EKLER DİZİNİ……...……x

TEŞEKKÜR……xi

BÖLÜM 1……1

1. GİRİŞ VE AMAÇ ……...1

BÖLÜM 2……4

2. D-BOYUTTA KLEİN GORDON DENKLEMİ …….……..….4

2.1 Göreli Enerji-Momentum Bağıntısı ve Klein-Gordon Denklemi…….…..4

2.2 D-Boyutta Klein-Gordon Denkleminin Çözümü……6

2.3 D-Boyutta Yörüngesel Açısal Momentum Operatörleri ve Komütasyon Bağıntıları……..…….…11

2.3.1 Yörüngesel Açısal Momentum Operatörü, $\hat{L}^2$……..…14

2.3.2 D Boyutlu Uzayın Alt Uzayları Olan Hiper Düzlemlere Ait Yörüngesel Açısal Momentum Operatörleri……..…26

2.4 D-Boyutlu Küresel Geometride Dalga Fonksiyonunun Açısal Kısmının Çözümü ……...…..39

2.5 D-Boyutlu Klein-Gordon Denkleminin Radyal Kısmının Coulomb Potansiyeline Bağlı Çözümleri…….60

2.5.1 Olasılık Yoğunluğu ve Olasılık Akısı…….....68

2.5.2 Radyal Dalga Fonksiyonlarının ve Radyal Olasılık Fonkisyonlarının Grafikleri……..…71

2.5.2.1 Radyal Dalga Fonksiyonlarının Grafikleri……..…86

2.5.2.2 Radyal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Grafikleri……91

BÖLÜM 3……...……...99

SONUÇ…….....99

KAYNAKLAR ……101

ÖZGEÇMİŞ ……....121

SİMGELER DİZİNİ

$\Delta_{\mathrm{D}} = \vec{\nabla}_D^2$	:D-boyutlu Laplace Operatörü
$\Psi(\vec{r})$	:Parçacığın Dalga Fonksiyonu
$\Delta_{S^{D-1}} = \vec{\nabla}_{S^{D-1}}^2$	:D-boyutlu Laplace Operatörünün Açısal Kısmı
$\hat{L}_D^2$	:D-boyuttaki Yörüngesel Açısal Momentum Operatörü
$\hbar$	:Planck Sabiti
$\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$	:Ultra Küresel Harmonikler
$R_{k=N_{D-2}}(r)$	: Radyal Dalga Fonksiyonu
$B^D(r)$	:r Yarıçaplı Disk ya da Yuvar
k_e	: Coulomb Sabiti
$\Gamma(x)$	:Gamma Fonksiyonu
α	:İnce Yapı Sabiti
$C_n^{\lambda}(x)$	:Gegenbauer Polinomları
$L_n^{\alpha}(x)$	:Asosiye Laguerre Polinomları
$k = N_{D-2}$	:D-boyuttaki Açısal Momentum Kuantum Sayısı
$g_{\mu\nu}$	: Metrik Tensör
$\Omega_{D-1} = (\theta_{\mu}, \varphi = \theta_{D-1})$	:D-boyuttaki Kutupsal Koordinatlardaki Açılar
a_0	:Bohr Yarıçapı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Yarıçap beklenen değerlerinin D=3,4,5 ve 6 boyutta kuantum sayılarına göre değişim tablosu**……..……76**

Çizelge 2.2. Yarıçap beklenen değerlerin D=3 boyutta için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu**……...77**

Çizelge 2.3. Yarıçap beklenen değerlerin D=4 boyutta için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu**……..…78**

Çizelge 2.4. Yarıçap beklenen değerlerin D=5 boyutta için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu**……...79**

Çizelge 2.5. Yarıçap beklenen değerlerin D=6 boyutta için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu**…….…..80**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Hidrojen benzeri atom için $E(1,0,D)$ şeklindeki enerji öz değerlerinin D boyutuna göre değişim grafiği**……66**

Şekil 2.2. $\langle r\rangle_{(1,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyuta göre değişim grafiği**…….....74**

Şekil 2.3. $\langle r\rangle_{(2,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyuta göre değişim grafiği**…….....75**

Şekil 2.4. $\langle r\rangle_{(3,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyuta göre değişim grafiği**…….....75**

Şekil 2.5. n=1, k=0 için $\bar{R}_{(1,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…….....…86**

Şekil 2.6. n=2, k=0 için $\bar{R}_{(2,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…….……86**

Şekil 2.7. n=2, k=1 için $\bar{R}_{(2,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…....…….…87**

Şekil 2.8. n=3, k=0 için $\bar{R}_{(3,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…....…….….87**

Şekil 2.9. n=3, k=1 için $\bar{R}_{(3,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**……..……..88**

Şekil 2.10. n=3, k=2 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(3,2)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**……..…….88**

Şekil 2.11. n=4, k=0 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…….……89**

Şekil 2.12. n=4, k=1 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**…….….89**

Şekil 2.13. n=4, k=2 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,2)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**……..……..90**

Şekil 2.14. n=4, k=3 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,3)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri**……..90**

Şekil 2.15. n=1, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(1,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….……91**

Şekil 2.16. n=2, k=0 kuantum sayıları için olasılık $\bar{P}_{(2,0)}$ yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….……91**

Şekil 2.17. n=2, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(2,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….……92**

Şekil 2.18. n=3, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**……..92**

Şekil 2.19. n=3, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….….93**

Şekil 2.20. n=3, k=2 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,2)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….……93**

Şekil 2.21. n=4, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….……94**

Şekil 2.22. n=4, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….....94**

Şekil 2.23. n=4, k=2 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,2)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**……..95**

Şekil 2.24. n=4, k=3 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,3)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri**…….….95**

Şekil 2.25. D=3 boyutta $\bar{P}_{(1,0)}(r)$, $\bar{P}_{(2,0)}(r)$, $\bar{P}_{(3,0)}(r)$, $\bar{P}_{(4,0)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……..……..…96**

Şekil 2.26. D=3 boyutta $\bar{P}_{(2,1)}(r)$, $\bar{P}_{(3,1)}(r)$, $\bar{P}_{(4,1)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……..96**

Şekil 2.27. D=3 boyutta $\bar{P}_{(3,2)}(r)$, $\bar{P}_{(4,2)}(r)$, $\bar{P}_{(4,3)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……..…..…97**

Şekil 2.28. D=4 boyutta $\bar{P}_{(1,0)}(r)$, $\bar{P}_{(2,0)}(r)$, $\bar{P}_{(30,)}(r)$, $\bar{P}_{(4,0)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……..….97**

Şekil 2.29. D=4 boyutta $\bar{P}_{(2,1)}(r)$, $\bar{P}_{(3,1)}(r)$, $\bar{P}_{(4,1)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……...98**

Şekil 2.30. D=4 boyutta $\bar{P}_{(3,2)}(r)$, $\bar{P}_{(4,2)}(r)$, $\bar{P}_{(4,3)}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri**……...98**

EKLER DİZİNİ

Ek-A D-Boyutta Küresel Geometri İle İlgili Tanımlar ve Formüller……..……**103**

Ek-B D-Boyutta Küresel Geometri İle İlgili Tanımlar ve Formüller …….....**112**

Ek-C Gegenbauer Denklemi ve Polinomları …….…….....**114**

Ek-D Asosiye Laguerre Denklemi ve Polinomları……..**115**

Ek-E Gamma Fonksiyonları…….....**117**

Ek-F Asosiye Legendre Denklemi …….....**118**

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının oluşumunda, konunun belirlenmesinde ve planlanmasında lisansüstü eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerini paylaşarak yardımcı olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Süper sicim teorileri (Zwiebach, 2009) ve benzeri yüksek boyutlu uzay-zaman yapısı gerektiren birleşik alan teorileri, teorik fiziğin son zamanlardaki en popüler çalışma alanlarıdır. Bu teorilerin yoğun ilgi görmelerinin en önemli nedeni ise kütle çekiminin kuantumlu teorisinin tutarlı bir modelini kurabilmesi ve temel kuvvetler arasında bütünleştirici bir teori oluşturabilmesidir. Fakat bu teorilerde fiziksel tutarlılığın sağlanabilmesi için uzayın üçten daha büyük boyutlara sahip olması gerekir. Bu boyutların kimisi büyük, topolojik olarak açık kimisi de topolojik olarak kapalı ve aşırı derecede küçük ekstra boyutlardır. Bunun yanında ekstra boyutlar da sınırsız çeşitliliğe ve değişik geometrik, topolojik yapılara sahiptirler ve her biri farklı fiziksel etki vermektedir. Öte yandan hangi tür özelliklere sahip ekstra boyutlarla çalışılması gerektiği konusunda halen fiziksel ve matematiksel birliktelik sağlanabilmiş değildir.

Bu çalışmada süper sicim benzeri teorilerin içeriğinden bağımsız olarak yukarıda söz edilen 3'ten büyük boyutlu evrende yaşıyor olsaydık hali hazırdaki üç boyuttaki fizik problemlerimizde hangi tür değişiklikler olacaktır, bunları irdelenecektir. Konunun karmaşıklığını basitleştirmek adına klasik fizikteki tam analitik çözümleri elde edilebilen iki cisim problemi ele alınacaktır. Kuantum mekaniğinin analitik olarak, diğer deyişle tam olarak çözülebilen dinamik yapılarından biri merkezcil potansiyel altında iki cisim problemi olarak da adlandırılan hidrojen benzeri atom problemidir

(Davydov, 1965; Liboff, 1980). Bu problem aynı zamanda kuantum mekaniğinin de klasik mekanikten temelde ayrı bir matematik dünyasına sahip olduğunun göstergesidir.

İki cisim probleminin kuantizasyonu aynı zamanda kuantum mekaniği düşüncesinin varoluş koşuludur (Liboff, 1980). Genelde, şimdiye kadar literatürde göreli olmayan durumlar için bu modelleme yüksek boyutlarda tartışılmıştır (Al-Jaber, 1998; Cardoso & Alvarez-Nodarse, 2003; Papp, 1995; Kirchberg, Lange, Pisani & Wipf, 2003). Bu çalışmada ise iki cisim probleminin göreli kuantum mekaniğindeki karşılığı olan hidrojen benzeri atom modelinin (D+1) boyutlarda çözümleri tartışılacaktır. Burada D>3 olarak göz önüne alınacaktır. D-boyuta yerleştirilmiş artı yüklü parçacık veya parçacık topluluğunun etkisinde diğer deyişle, Coulomb çekim kuvveti altında hareket eden spini sıfır ve negatif yüklü parçacığın enerji öz değer ve öz fonksiyonları D>3 boyutlar için elde edilecektir. Bu çözümler, özellikle uzay zaman boyutu ile enerji arasındaki ilişkinin nasıl biçimlendiğini anlamamızı sağlayacaktır. Elde edilen sonuçlar ve elde ediliş biçimleri anti periyodik koşullara sahip göreli olarak kuantize edilmiş çok boyutlu geometri içinde iki cisim probleminin çözümlerini bulmamıza ve anti periyodik koşullara sahip iki cisim probleminin göreli kuantisazyon ile geometrisi arasındaki ilişkiyi anlamamıza olanak sağlayacaktır.

Bu çalışmada problemin çözümünün tamamı Bölüm-2 de ve onun alt başlıkları altında yapılacaktır. Öncelikle göreli enerji-momentum bağıntısına kuantum düşüncesini uygulayarak spini sıfır olan parçacıkları tasvir eden Klein-Gordon denklemi elde edilecektir. Ardından ana problemimiz olan Klein-Gordon denklemini D-boyutlu küresel koordinat sisteminde herhangi küresel simetrik potansiyele sahip hidrojen benzeri iki cisim sistemleri için yeniden yazılacaktır. Coulomb potansiyelinin küresel simetrik olması dolayısıyla denklemlerimiz küresel koordinat sisteminde çözülebilecektir. Bu tarz küresel simetriye sahip denklemler değişkenlere ayırma metodu kullanılarak çözülebilir. Dalga fonksiyonu, zaman, radyal ve açısal gibi kısımlara ayrılarak probleme ait elde edilecek denklemlerin analitik tam çözümü elde edilebilir (Davydov, 1965).

Dalga fonksiyonunun açısal kısmına ait olan denklemini çözmek için önce D-boyutlu küresel geometri ile D-boyutta yörüngesel açısal momentum işlemcileri elde edilecek ve D-boyutlu laplasyen ile ilişkisi gösterilecektir. Açısal momentumla ilgili bu

bilgiler problemin açısal kısmını çözerken hem teorik bir zemin sağlayacak hem de parçacığın D boyuttaki yörüngesel açısal momentumunun kuantum mekaniksel davranışını da betimleyecektir. Açısal kısma ait elde edilen denklem de açılara göre değişkenlere ayırma metodu kullanılarak çözülecektir. Elde edilen çözümün D-boyuta genelleştirilmiş olan ultra küresel harmonikler (Özcan, 2012; Özcan, 2006) olarak adlandırılan fonksiyonlarla ifade edildiği gösterilecektir.

Son olarak da problemimizin enerji öz değerlerini ve öz fonksiyonlarını bulmak amacıyla radyal kısma ait denklem çözülecektir. Böylelikle parçacığa ait dalga fonksiyonu tam olarak belirlenmiş olacaktır.

BÖLÜM 2

D-BOYUTTA KLEİN-GORDON DENKLEMİ

2.1 Göreli Enerji-Momentum Bağıntısı ve Klein-Gordon Denklemi

Klein-Gordon Denklemi, (bazı kaynaklarda Klein-Fock-Gordon denklemi olarak da ifade edilir) göreli kuantum mekanikte spini sıfır olan parçacıkların hareketini tanımlamak için kullanılır (Davydov, 1965). Oskar Klein ve Walter Gordon tarafından bulunmuştur. Klein-Gordon denklemi parçacığın spiniyle ilgili bir bilgi vermez. Bundan dolayı bu denklemi sağlayan parçacıklara spini sıfır olan skaler parçacıklar denilir. Özel görelilik kuramında *m* kütlesine sahip bir parçacığın momentumuyla toplam enerjisi arasındaki bağıntı

$$E^2 = \vec{p}_D{}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{2.1.1}$$

şeklinde verilir (Davydov, 1965). Burada E ve $\vec{p}_D$ sırasıyla parçacığın toplam enerjisi ve momentumudur. Bu denklemi kovaryant biçimde ifade etmek istersek

$$p^\alpha = (\frac{E}{c}, \vec{p}_D) \tag{2.1.2}$$

olmak üzere

$$p^\alpha . p^\alpha = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_D{}^2 = m^2 c^2 \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazılır. Buradaki $\eta_{\mu\nu}$ işareti $(1,-1,-1,\dots,-1)$ D+1 boyutlu minkowski metriğidir.

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & \dots & \vdots\\ \vdots & \dots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

(2.1.2)'deki E ve $\vec{p}_D$ sırasıyla parçacığın toplam enerjisi ve momentumudur. Eğer parçacık bir $U(\vec{r},t)$ potansiyeli altında hareket ediyorsa (2.1.1) denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir. Yani

$$(E-U(\vec{r},t))^2=p^2c^2+m^2c^4 \tag{2.1.5}$$

Denklemde m ile gösterilen nicelik, iki cisim problemi için elde edilen indirgenmiş kütledir. Bu eşitlik, kuantum mekaniğindeki çizgisel ve hermitsel işlemciler,

$$\vec{p}_D\rightarrow\hat{p}_D\rightarrow-i\hbar\vec{\nabla}_D \tag{2.1.6}$$

$$E\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.1.7}$$

ile ifade edilirise, spini sıfır olan parçacıkların kuantum mekaniksel davranışlarını açıklayan Klein-Gordon denklemine ulaşılır. Burada $\vec{\nabla}_D$ nabla işlemcisidir ve uzay zamanın geometrisine göre değişebilir. (2.1.5) nolu denklemde bu işlemciler yerine yazılır ve $\Psi(\vec{r},t)$ dalga fonksiyonu üzerine etki ettirilirse

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-U(\vec{r},t)\right)^2\Psi(\vec{r},t)\;=-\hbar^2c^2\vec{\nabla}_D^2\Psi(\vec{r},t)\;+m^2c^4\Psi(\vec{r},t) \tag{2.1.8}$$

şeklindeki Klein-Gordon denklemi elde edilir.

Klein-Gordon denklemini elektromanyetik alanla etkileşimleri de içerecek biçimde yazalım. Uzay-zamandaki göreli elektromanyetik alan vektörü,

$$A^\mu=\left(A^0,\vec{A}\right)=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right) \tag{2.1.9}$$

şeklinde kovaryant biçimde yazılabilir. Burada $\vec{A}$, 3 boyuttaki vektörel potansiyel ϕ de skaler potansiyeldir. Bu durumda kuantum işlemcilerinde aşağıdaki biçimde dönüşümler yapılır (Liboff, 1980).

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi \tag{2.1.10}$$

$$\vec{p}_D \rightarrow \hat{p}_D - \frac{e}{c}\vec{A} = -i\hbar\vec{\nabla}_D - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{2.1.11}$$

Bu dönüşümleri (2.1.8) nolu denklemin yerine yazarsak

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi)^2\Psi(\vec{r},t) = c^2(-i\hbar\vec{\nabla}_D - \frac{e}{c}\vec{A})^2\Psi(\vec{r},t) + m^2c^4\Psi(\vec{r},t) \tag{2.1.12}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemi Coulomb alanı etkisindeki atom için yazarsak bu durumda

$$\vec{A} = 0$$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(r) = -k_e\frac{Ze}{r} \quad , \quad (r = |x|)$$

olur. Bu ifadeleri (2.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + k_e\frac{Ze^2}{r})^2\Psi(\vec{r},t) = (-\hbar^2c^2\nabla_D^2 + m^2c^4)\Psi(\vec{r},t) \tag{2.1.13}$$

şeklindeki spini sıfır olan parçacığın Coulomb alanı etkisindeki dalga denklemi elde edilir.

2.2 D-Boyutta Klein-Gordon Denkleminin Çözümü

Coulomb potansiyeli küresel simetriye sahip olduğundan (2.1.13) denkleminin çözümleri küresel küresel koordinatlarda elde edilecektir. Bunun için küresel koordinat sistemine kısa bir geçiş yapılmalıdır. $d\sigma^2$ metriğin uzaysal kısmı olmak üzere D+1 boyuttaki uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2 \tag{2.2.1}$$

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \cdots + dx_D^2 \tag{2.2.2}$$

şeklindedir (Lee, 1997). Bu metriği, D boyutlu küresel koordinatlarda yazalım. Küresel koordinatlar ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişkiler (Özcan, 2012) ve (Ek-A)

$$x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{D-2}\cos\theta_{D-1}$$

$$x_2 = r\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2}\sin\theta_{D-1}$$

$$\vdots$$

$$x_b = r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-b}\cos\theta_{D-b+1} \quad , \quad (D-2 \geq b \geq 3), \tag{2.2.3}$$

$$\vdots$$

$$x_{D-1} = r \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$x_D = r \cos\theta_1,$$

$$0 < r < \infty,$$

$$(0 \leq \theta_i \leq \pi),\ 1 \leq i \leq D-2$$

$$(0 \leq \theta_{D-1}(=\varphi) \leq 2\pi) \tag{2.2.4}$$

şeklinde tanımlanmak üzere D+1 boyuttaki küresel koordinatlardaki uzay-zaman metriği

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$
$$= c^2dt^2 - [dr^2 + r^2d\theta_1^2 + r^2\sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \cdots . + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 \ldots \ldots \sin^2\theta_{D-2}d\varphi^2] \tag{2.2.5}$$

şeklinde yazılır. D+1 boyutlu uzay- zamanda D'Alembert operatörü de olarak bilinen operatörü (Lee, 1997) yazılırsa

$$\square = \frac{1}{\sqrt{(-1)^D g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{(-1)^D g}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \vec{\nabla}_D^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}_D^2 \tag{2.2.6}$$

bulunur. Burada $\vec{\nabla}_D^2$ şeklinde gösterilen sadece uzay koordinatlarına bağlı operatörüdür ve D boyutta

$$\vec{\nabla}_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^{D-1}}}{r^2} \tag{2.2.7}$$

şeklindedir. Burada $\Delta_{S^{D-1}}$ veya $\vec{\nabla}^2_{S^{D-1}}$ şeklinde gösterilen türev operatörü de, S^{D-1} birim hiper küreye kısıtlanmış Laplace operatörüdür. (Ek-A).

$$\Delta_{S^{D-1}} = \frac{1}{sin^{D-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin^{D-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \sum_{j=1}^{D-3}\left[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}\prod_{i=1}^{D-j-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\left(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\right)\right] + \frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2.2.8}$$

D boyutlu küresel koordinat sistemiyle ilgili gerekli tanımlamaları yaptıktan sonra (2.1.13) denklemini küresel koordinatlarda ifade edilebilir. Bu durumda (2.1.13) denklemi,

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + k_e\frac{Ze^2}{r})^2\Psi(\vec{r},t) = (-\hbar^2c^2\frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \hbar^2c^2\frac{\Delta_{S^{D-1}}}{r^2} + m^2c^4)\Psi(\vec{r},t) \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılır. (2.2.9) ile verilen Coulomb etkileşimindeki küresel simetrik Klein-Gordon denklemini değişkenlerine ayırma yöntemiyle (Özcan, 2006) çözelim. Bu durumda $\Psi(\vec{r},t)$ dalga fonksiyonu küresel koordinatlarda

$$\Psi(r,\Omega_{D-1};t) = \psi(\vec{r})T(t) = R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})T(t) \tag{2.2.10}$$

şeklinde değişkenlerine ayrıştırılabilir. Burada sadece açılara bağlı $\Upsilon(\Omega_{D-1})$ fonksiyonu,

$$\Upsilon(\Omega_{D-1}) = \prod_{j=1}^{D-1}\mathcal{X}_j(\theta_j) = \mathcal{X}_1(\theta_1)\mathcal{X}_2(\theta_2)\dots\mathcal{X}_{D-2}(\theta_{D-2})\mathcal{X}_{D-1}(\theta_{D-1}) \tag{2.2.11}$$

$$\Omega_{D-1} = (\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{D-2},\theta_{D-1}(=\varphi)) \tag{2.2.12}$$

$(0 \le \theta_i \le \pi),\ 1 \le i \le D-2$

$(0 \leq \theta_{D-1} \leq 2\pi)$

$0 < r < \infty$ (2.2.13)

şeklinde yazılır.

$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ şeklindeki kuantum enerji işlemcisini kullanarak (2.2.13) nolu ifadede verilen sadece zamana bağlı olan $T(t)$ fonksiyonunu elde edilebilir. Bu işlemci $\Psi(\vec{r},t)$ dalga fonksiyonuna etki ettirilirse,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = E\Psi(\vec{r},t) \quad (2.2.14)$$

$$\psi(\vec{r})i\hbar\frac{dT(t)}{dt} = E\psi(\vec{r})T(t) \quad (2.2.15)$$

dalga fonksiyonuna zaman bağımlılığını veren çarpan

$$T(t) = T_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = T_0 e^{-i\omega\, t} \quad (2.2.16)$$

$$E = \hbar\omega \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \quad (2.2.17)$$

olarak bulunur.

Burada $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ile tanımlı geçiş frekansını verir. Zamana bağlı olan $T(t)$ çarpan terimi, kuantum enerji seviyeleri arasında geçişin söz konusu olduğu durumlarda vardır. Sistem seviyeler arasında geçiş yapıyor iken dalga fonksiyonu zaman bağımlılığı gösterir. Herhangi bir zamanda λ parçacığa ait bütün kuantum sayılarını göstermek üzere $\psi_\lambda(r,\theta_1,\dots,\theta_{D-2},\theta_{D-1}(=\varphi))$ fonkisyonları, zamandan bağımsızdır. O halde λ halinden λ′ haline geçiş halindeki bir atomun dalga fonksiyonu ve $\psi(\vec{r})$ için dalga denklemi sırasıyla

$$\Psi_\lambda(t,r,\theta_1,\dots,\theta_{D-2},\varphi) = \sum_{\lambda'}^{N} a_{\lambda\lambda'}\psi_{\lambda'}(r,\theta_1,\dots,\theta_{D-2},\varphi)T_0 e^{-i\omega_\lambda\, t} \quad (2.2.18)$$

$$(E + k_e\frac{Ze^2}{r})^2\psi(\vec{r}) = (-\hbar^2c^2\frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \hbar^2c^2\frac{\triangle_{S^{D-1}}}{r^2} + m^2c^4)\psi(\vec{r}) \quad (2.2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada N tane durağan seviye olduğu varsayılmıştır. Buradaki $a_{\lambda\lambda'}$ katsayıları kuantum durumları arasındaki olasılık geçiş katsayılarıdır ve mutlak değer kareleri toplamı,

$$\sum_{\lambda}^{N} a_{\lambda\lambda'}^{*} a_{\lambda\lambda'} = 1 \tag{2.2.20}$$

şeklinde olur. Yani λ'ncı bileşke durumuna ait durağan seviyelerin (N tane; atomlar için $N = \infty$ alınabilir) katkıları toplamı 1'e normalizedir.

(2.2.19) denklemi radyal ve açısal değişkenlere ayrılarak çözülebilir. $\psi(\vec{r}) = R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$ şeklindeki ifadeyi (2.2.19) denkleminde yerine koyup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\mathrm{r}^2 \frac{1}{R(r)r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - r^2 \frac{M^2c^4 - \left(E + k_e\frac{Ze^2}{r^2}\right)^2}{\hbar^2c^2} = -\frac{\Delta_{S^{D-1}}\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})}{\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})} \tag{2.2.21}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Dikkat edilirse bu denklemin sol tarafı sadece radyal değişkeni, sağ tarafı da açısal değişkenleri içermektedir. Bu denklemin, r ve θ_μ bağımsız değişkenlerinin değişim sınırları içinde her değeri için doğrulanabilmesi, ancak denklemin her iki tarafının bir sabite eşit olması gerekir ve o sabite ayırma sabiti denir ve D, uzayın boyutu olmak üzere ayırma sabitini $N(k, D)$ ile gösterelim. (2.2.21) eşitliğinin sağ tarafındaki açısal kısım için

$$\Delta_{S^{D-1}}\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) = -N(k, D)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) \tag{2.2.22}$$

şeklindeki denklem bulunur. Burada $N(k, D)$ ile gösterilen ayırma sabitindeki k ise bir kuantum sayısıdır ve fiziksel anlamı açısal kısmın tam çözümü yapıldığında açıklığa kavuşacaktır. Açılara bağlı kısmın çözümü $\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$ şeklinde gösterilmek üzere ultra küresel harmonikler olarak adlandırılır (Özcan, 2006). Radyal kısım için ise;

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{D-1}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{N(k,D)}{r^2}R(r) - \frac{M^2c^4 - \left(E + k_e\frac{Ze^2}{r}\right)^2}{\hbar^2c^2}R(r) = 0 \tag{2.2.23}$$

denklemi bulunur. Bu denklem, Klein-Gordon denkleminin radyal denklemidir ve bölümün sonunda ayrıntılı çözümü yapılacaktır. Öncelikle $\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$ için elde edilen denklemi çözmeye çalışalım. Bu amaçla açılara bağlı $\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$ fonksiyonunu ve sağladığı denklemi parçacığın yörüngesel açısal momentumuyla ilişkilendirebilmek için D-boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcilerini elde edelim.

2.3 D Boyutta Yörüngesel Açısal Momentum Operatörleri ve Komütasyon Bağıntıları

Açısal momemtum iki boyutlu düzlemdeki dönmelerle ilişkilidir (Kirchberg vd., 2003; Al-Jaber, 1995; Granzow, 1964; Zhao, Q & Zhao, J, 2006) . Üç boyutta bir düzlemin içindeki bir noktadan bu düzleme sadece tek bir dik doğru çizilebilir ve bu tek tanımlıdır (Lee, 1997). Bu yüzden üç boyutta açısal momentum bir vektörle ifade edilebilir. Bu durum sadece içinde yaşadığımız bu 3 boyutlu uzaya has bir özelliktir. Fakat D>3 boyutta herhangi iki boyutlu bir düzleme içindeki bir noktadan sonsuz tane farklı dik doğru çizilebilir (Lee, 1997). D-boyutlu açısal momentumuna ait dönme düzlemleri $D(D-1)/2$ tanedir (Kirchberg vd., 2003). Bu yüzden D-boyuttaki açısal momentum artık bir vektörle değil, ikinci mertebeden antisimetrik bir tensör ile temsil edilir (Kirchberg vd., 2003). Antisimetrik tensör ile temsil edilen D boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörünün L_{ab} bileşenleri

$$\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \dots, \hat{p}_D)$$

$$= \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_D}\right) \tag{2.3.1}$$

olmak üzere

$$L_{ab} = x_a\hat{p}_b - x_b\hat{p}_a$$

$$L_{ab} = -i\hbar x_a\frac{\partial}{\partial x_b} + i\hbar x_b\frac{\partial}{\partial x_a} \tag{2.3.2}$$

$$= -i\hbar[x_a\partial_b - x_b\partial_a]\,, \qquad \left(\partial_a = \partial/\partial_{x_a}\right) \tag{2.3.3}$$

$$L_{ab} = -L_{ba} \tag{2.3.4}$$

şeklinde tanımlanırlar (Kirchberg vd., 2003).

L_{ab} açısal momentum operatörleri, c sabit bir sayı olmak üzere $x_i' = cx_i$ şeklindeki koordinat dönüşümleri altında değişmezdir, yani

$$L_{ab}(x_a, x_b) = -i\hbar x_a \frac{\partial}{\partial x_b} + i\hbar x_b \frac{\partial}{\partial x_a} \tag{2.3.5}$$

$$= -i\hbar \frac{x_a'}{c} c \frac{\partial}{\partial x_b'} + i\hbar \frac{x_b'}{c} c \frac{\partial}{\partial x_a'} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial x_i'}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i'} = c\frac{\partial}{\partial x_i'}\right)$$

$$= -i\hbar x_a' \frac{\partial}{\partial x_b'} + i\hbar x_b' \frac{\partial}{\partial x_a'} = L_{ab}(x_a', x_b') \tag{2.3.6}$$

şeklindedir. Tanımladığımız bu açısal momentum operatörlerini D=4 boyut için örnekleyelim. Bu durumda bileşenler

$$L_{12} = -i\hbar(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})$$

$$L_{13} = -i\hbar(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1})$$

$$L_{14} = -i\hbar(x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_1})$$

$$L_{23} = -i\hbar(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2})$$

$$L_{24} = -i\hbar(x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2})$$

$$L_{34} = -i\hbar(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3})$$

şeklinde olmak üzere 4 boyuttaki açısal momemtum

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ -L_{12} & 0 & L_{23} & L_{24} \\ -L_{13} & -L_{23} & 0 & L_{34} \\ -L_{14} & -L_{24} & -L_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.7}$$

antisimetrik tensör şeklinde ifade edilir. Şimdi de genelleştirilmiş L_{ab} açısal momentum operatörleri arasındaki komütasyon bağıntılarını hesaplamaya çalışalım. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ gibi iki operatörün komütasyon bağıntısı;

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{2.3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bilindiği gibi operatörlerin her zaman değişme özelliği yoktur. L_{ab} ve L_{cd} gibi iki açısal momentum operatörünün komütasyon bağıntılarını elde edelim. L_{ab} operatörlerinde indis işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlanır (Kirchberg vd., 2003).

$$L_{ab}\delta^{bc} = L_a^c \tag{2.3.9}$$

$$L^{ab} = L_{cd}\delta^{ad}\delta^{cb} \tag{2.3.10}$$

Burada L^{ab} , L_{ab} operatörünün tersidir ve kartezyen koordinat sisteminde bu iki operatör,

$$L^{ab} = L_{ab} \tag{2.3.11}$$

şeklinde birbirine eşittir. Komütasyon bağıntıları elde edilirken sıkça kullanılacak olan δ_{ik} Kronecker delta sembolü

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \begin{cases} 0 & i \neq k \; ise \\ 1 & i = k \; ise \end{cases} \tag{2.3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Kronecker sembolünün diğer özellikleri ise şöyledir.

$$[\delta_{ik}]^{-1} = \delta^{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \; ise \\ 1 & i = k \; ise \end{cases} \tag{2.3.13}$$

$$\delta_{ij}\delta^{jk} = \delta_i{}^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \; ise \\ 1 & i = k \; ise \end{cases} \tag{2.3.14}$$

$$\delta^{jk}\delta_{ij} = \delta^k{}_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \; ise \\ 1 & i = k \; ise \end{cases} \tag{2.3.15}$$

$$\delta^{kj}\delta_{ji} = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \; ise \\ 1 & i = k \; ise \end{cases} \tag{2.3.16}$$

$$x^i\delta_{ik} = x_k \tag{2.3.17}$$

$$x_i\delta^{ij} = x^j \tag{2.3.18}$$

Bu tanımlardan yaptıktan sonra komütasyon bağıntıları hesaplanırsa;

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i^2\hbar^2[(x_b\partial_a - x_a\partial_b), (x_d\partial_c - x_c\partial_d)] \tag{2.3.19}$$

$$= i^2\hbar^2(x_b\partial_a(x_d\partial_c) - x_b\partial_a(x_c\partial_d) + x_a\partial_b(x_c\partial_d) - x_a\partial_b(x_d\partial_c) - x_d\partial_c(x_b\partial_a) + x_d\partial_c(x_a\partial_b) + x_c\partial_d(x_b\partial_a) - x_c\partial_d(x_a\partial_b))$$

(2.3.20)

$$= i^2\hbar^2(x_b\delta_{ad}\partial_c + x_bx_d\partial_a\partial_c - x_b\delta_{ac}\partial_d - x_bx_c\partial_a\partial_d - x_a\delta_{bd}\partial_c - x_ax_d\partial_b\partial_c + x_a\delta_{bc}\partial_d + x_ax_c\partial_b\partial_d - x_d\delta_{cb}\partial_a - x_dx_b\partial_c\partial_a + x_d\delta_{ca}\partial_b + x_dx_a\partial_c\partial_b + x_c\delta_{db}\partial_a + x_cx_b\partial_d\partial_a - x_c\delta_{da}\partial_b - x_cx_a\partial_d\partial_b)$$

(2.3.21)

şeklindeki ifadeyi elde ederiz. Ayrıca $[x_a, x_b] = [\partial_a, \partial_b] = 0$, olduğu için $x_ax_b\partial_a\partial_b$ şeklindeki çiftler birbirini götürür. Bu durumda

$[L_{ab}, L_{cd}] = i^2\hbar(\hbar\delta_{ad}(x_b\partial_c - x_c\partial_b) - \hbar\delta_{ac}(x_b\partial_d - x_d\partial_b) - \hbar\delta_{bd}(x_a\partial_c - x_c\partial_a) + \hbar\delta_{bc}(x_a\partial_d - x_d\partial_a))$

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i\hbar(\delta_{ad}L_{cb} - \delta_{ac}L_{db} - \delta_{bd}L_{ca} + \delta_{bc}L_{da}) \quad (2.3.22)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca bu operatörlerin $L_{ab} = -L_{ba}$ şeklindeki antisimetri özellikleri kullanılırsa

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i\hbar(\delta_{ac}L_{bd} + \delta_{bd}L_{ac} - \delta_{ad}L_{bc} - \delta_{bc}L_{ad}) \quad (2.3.23)$$

şeklindeki standart biçimine ulaşılır. Bu bağıntı, D-boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörlerinin genelleştirilmiş komütasyon bağıntısıdır.

2.3.1 D>3 Boyutta Yörüngesel Açısal Momentum Operatörü, $\hat{L}^2$

L_{ab} operatörü a ve b indislerine göre antisimetriktir. $\hat{L}^2$ ile gösterilen operatör , L_{ab} operatörünün karelerinin toplamı şeklinde tanımlanır. Bu da bize $\hat{L}^2$ ile gösterilen D>3 boyutlu açısal momentum operatörünü verir (Kirchberg vd., 2003).

$$\hat{L}_D^2 = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{D}(L_{ab})^2 \quad (2.3.1.1)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{a,b=1}^{D}\left(x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a}\right)\left(x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a}\right) \quad (2.3.1.2)$$

$$=$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{a,b=1}^{D}\left(x_b\ \frac{\partial}{\partial x_a}\left(x_b\ \frac{\partial}{\partial x_a}\right)-x_b\ \frac{\partial}{\partial x_a}\left(x_a\ \frac{\partial}{\partial x_b}\right)-x_a\ \frac{\partial}{\partial x_b}\left(x_b\ \frac{\partial}{\partial x_a}\right)+x_a\ \frac{\partial}{\partial x_b}\left(x_a\ \frac{\partial}{\partial x_b}\right)\right) \tag{2.3.1.3}$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{a,b=1}^{D}\left(x_b\ \frac{\partial x_b}{\partial x_a}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)+x_b x_b\ \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)-x_b\ \frac{\partial x_a}{\partial x_a}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)-x_b\ x_a\ \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)-\right.$$

$$\left.x_a\ \frac{\partial x_b}{\partial x_b}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)-x_a x_b\ \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)+x_a\ \frac{\partial x_a}{\partial x_b}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)+x_a x_a\ \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)\right) \tag{2.3.1.4}$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{a,b=1}^{D}\left(x_b\ \delta_{ba}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)+x_b^2\ \frac{\partial^2}{\partial x_a^2}-x_b\ \delta_{aa}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)-x_b\ x_a\ \frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}-x_a\delta_{bb}\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right)-\right.$$

$$\left.x_a x_b\ \frac{\partial^2}{\partial x_b\partial x_a}+x_a\delta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x_b}\right)+x_a^2\ \frac{\partial^2}{\partial x_b^2}\right) \tag{2.3.1.5}$$

$$=$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left(\left(\left(\sum_{b=1}^{D}x_b^2\right)\left(\sum_{a=1}^{D}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\right)+\left(\sum_{a=1}^{D}x_a^2\right)\left(\sum_{b=1}^{D}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2}\right)\right)-\right.$$

$$\left(\left(\sum_{a=1}^{D}\delta_{aa}\right)\left(\sum_{b=1}^{D}x_b\ \frac{\partial}{\partial x_b}\right)+\left(\sum_{b=1}^{D}\delta_{bb}\right)\left(\sum_{a=1}^{D}x_a\ \frac{\partial}{\partial x_a}\right)\right)-$$

$$\left.\left(2\sum_{a,b=1}^{D}x_b\ x_a\ \frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}\right)+\sum_{b=1}^{D}x_b\ \left(\sum_{a=1}^{D}\delta_{ba}\frac{\partial}{\partial x_a}\right)+\sum_{a=1}^{D}x_a\ \left(\sum_{b=1}^{D}\delta_{ab}\frac{\partial}{\partial x_b}\right)\right) \tag{2.3.1.6}$$

Burada a ve b indisleri üzerinden toplamlar yapıldığında bazı terimler aynı olduğu olduğundan

$$\hat{L}_D^2=-\frac{\hbar^2}{2}\left(2\left(\sum_{b=1}^{D}x_b^2\right)\left(\sum_{a=1}^{D}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\right)-2D\left(\sum_{a=1}^{D}x_a\ \frac{\partial}{\partial x_a}\right)-\left(2\sum_{a,b=1}^{D}x_b\ x_a\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}\right)+\right.$$

$$\left.2\sum_{a=1}^{D}x_a\ \frac{\partial}{\partial x_a}\right) \tag{2.3.1.7}$$

$$\hat{L}_D^2=-\hbar^2\left(\left(\sum_{a=1}^{D}x_a^2\right)\left(\sum_{a=1}^{D}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2}\right)-\sum_{a,b}^{D}x_a x_b\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}-(D-1)\sum_{a}^{D}x_a\frac{\partial}{\partial x_a}\right) \tag{2.3.1.8}$$

ifadesi edilir. Bu ifadede b indisi üzerinden toplam yapılırsa ve $\vec{\nabla}_D^2=\sum_j^D\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ şeklindeki kartezyen koordinatlardaki Laplasyen tanımı kullanılırsa

$$\hat{L}_D^2 = -\hbar^2 \left((\sum_{a=1}^{D} x_a^2)\vec{\nabla}_D^2 - \sum_{a,b}^{D} x_a x_b \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} - (D-1)\sum_a^D x_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \quad (2.3.1.9)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi de $\hat{L}_D^2$ ile L_{ab} operatörleri arasındaki komütasyon bağıntılarını bulalım. D boyutta yörüngesel açısal momentum operatörü, ikinci mertebeden antisimetrik bir tensör operatör olduğundan $\hat{L}_D^2$ aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir (Kirchberg vd., 2003).

$$\hat{L}_D^2 = \frac{1}{2}\sum_{a,b}^{D}(L_{ab})^2 = \frac{1}{2}\sum_{a,b}^{D} L_{ab}L^{ab} = \frac{1}{2}\delta^{ac}\delta^{bd}L_{ab}L_{cd} \quad (2.3.1.10)$$

Bu durumda L_{ab} operatörlerinin tanımını ve (2.3.23)'deki bağıntıyı da kullanarak komütasyon bağıntısını yazarsak

$$[\hat{L}_D^2, L_{fg}] = \frac{1}{2}\delta^{ac}\delta^{bd}[L_{ab}L_{cd}, L_{fg}] \quad (2.3.1.11)$$

$$= \frac{1}{2}\delta^{ac}\delta^{bd}(L_{ab}L_{cd}L_{fg} - L_{fg}L_{ab}L_{cd})$$

$$= \frac{1}{2}\delta^{ac}\delta^{bd}\{L_{ab}[L_{cd}, L_{fg}] + [L_{ab}, L_{fg}]L_{cd}\} \quad (2.3.1.12)$$

Burada (2.3.23) ile verilen bağıntıyı tekrar eden indislerin Einstein toplamı yöntemi (Lee, 1997) kullanılırsa

$$[\hat{L}_D^2, L_{fg}] = \frac{i}{2}\hbar\delta^{ac}\delta^{bd}\{L_{ab}(\delta_{cf}L_{dg} + \delta_{dg}L_{cf} - \delta_{cg}L_{df} - \delta_{df}L_{cg}) + (\delta_{af}L_{bg} + \delta_{bg}L_{af} - \delta_{ag}L_{bf} - \delta_{bf}L_{ag})L_{cd}\} \quad (2.3.1.13)$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\{\delta^{ac}\delta^{bd}L_{ab}(\delta_{cf}L_{dg} + \delta_{dg}L_{cf} - \delta_{cg}L_{df} - \delta_{df}L_{cg}) + (\delta_{af}L_{bg} + \delta_{bg}L_{af} - \delta_{ag}L_{bf} - \delta_{bf}L_{ag})\delta^{ac}\delta^{bd}L_{cd}\}$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\{L_{cd}(\delta_{cf}L_{dg} + \delta_{dg}L_{cf} - \delta_{cg}L_{df} - \delta_{df}L_{cg}) + (\delta_{af}L_{bg} + \delta_{bg}L_{af} - \delta_{ag}L_{bf} - \delta_{bf}L_{ag})L_{ab}\}$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\{(\delta_{cf}L_{cd}L_{dg} + \delta_{dg}L_{cd}L_{cf} - \delta_{cg}L_{cd}L_{df} - \delta_{df}L_{cd}L_{cg}) + (\delta_{af}L_{bg}L_{ab} + \delta_{bg}L_{af}L_{ab} - \delta_{ag}L_{bf}L_{ab} - \delta_{bf}L_{ag}L_{ab})\}$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\{(L_{fd}L_{dg} + L_{af}L_{ag}) + (L_{cg}L_{cf} + L_{bg}L_{fb}) - (L_{gd}L_{df} + L_{ag}L_{af}) - (L_{cf}L_{cg} + L_{bf}L_{gb})\}$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\{(L_{fd}L_{dg} - L_{fa}L_{ag}) + (L_{cg}L_{cf} - L_{bg}L_{bf}) - (L_{gd}L_{df} - L_{ga}L_{af}) - (L_{cf}L_{cg} - L_{bf}L_{bg})\}$$

$$[\hat{L}_D^2, L_{fg}] = 0 \qquad (2.3.1.14)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç $\hat{L}_D^2$ operatörü ile L_{ab} operatörlerinin komütasyon bağıntısını sağladığını gösterir.

Şimdi de $\hat{L}_D^2$ operatörünü D boyutlu küresel koordinatlardaki ifadesini bulmaya çalışalım. Bunu gerçekleştirmek için kutupsal koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasındaki türev dönüşümlerine bakmak gerekir. (2.3.1.9) denklemindeki $\vec{\nabla}_D^2$, $\sum_a^D x_a \frac{\partial}{\partial x_a}$ ve $\sum_{a,b}^D x_a x_b \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}$ terimlerinin küresel koordinat sistemindeki karşılıklarını bulabilirsek $\hat{L}_D^2$ operatörünün küresel koordinatlardaki ifadesi elde edilmiş olur.

$\hat{L}_D^2$ ve L_{ab} operatörlerinin küresel koordinatlardaki karşılıklarını bulmak için kartezyen koordinatlar ile küresel koordinatlar arasındaki türev dönüşümlerini hesaplayalım. Dönüşüm sistemleri,

$$(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{D-1}(= \varphi)) \qquad (2.3.1.18)$$

$$0 \le \theta_{D-1}(= \varphi) \le 2\pi$$

$$0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{D-2} \le \pi \qquad (2.3.1.19)$$

$$0 < r < \infty$$

olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{j=1}^{D-1}\frac{\partial \theta_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j} \quad (i = 1,2,3,\dots,D) \qquad (2.3.1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots \dots + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots \dots + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad (2.3.1.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{D-1}} = \frac{\partial r}{\partial x_{D-1}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{D-1}}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots \ldots + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_{D-1}}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_{D-1}}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_D} = \frac{\partial \theta_0}{\partial x_D}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_D}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots \ldots + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_D}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_D}\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}}$$

Bu denklem sistemleri matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{D-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{D-1}} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_{D-1}} \\ \frac{\partial r}{\partial x_D} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_D} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \end{bmatrix} \quad (2.3.1.22)$$

$$X = AR \quad (2.3.1.23)$$

şeklinde yazılır. Şimdi de dx_i diferansiyellerinin küresel koordinatlardaki karşılığını bulalım.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial r}dr + \sum_{j=1}^{D-1}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j}d\theta_j \quad (2.3.1.24)$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial r}dr + \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \cdots \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{D-2}}d\theta_{D-2} + \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{D-1}}d\theta_{D-1}$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial r}dr + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \cdots \ldots + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{D-2}}d\theta_{D-2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{D-1}}d\theta_{D-1}$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial r}dr + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \cdots \ldots + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_{D-2}}d\theta_{D-2} + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_{D-1}}d\theta_{D-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad (2.3.1.25)$$

$$dx_{D-1} = \frac{\partial x_{D-1}}{\partial r}dr + \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \cdots \ldots + \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_{D-2}}d\theta_{D-2} + \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_{D-1}}d\theta_{D-1}$$

$$dx_D = \frac{\partial x_D}{\partial r}dr + \frac{\partial x_D}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \cdots \ldots + \frac{\partial x_D}{\partial \theta_{D-2}}d\theta_{D-2} + \frac{\partial x_D}{\partial \theta_{D-1}}d\theta_{D-1}$$

Yine bu dönüşüm sistemleri matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{D-2}} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{D-1}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{D-2}} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{D-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_{D-2}} & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial \theta_{D-1}} \\ \frac{\partial x_D}{\partial \theta_0} & \frac{\partial x_D}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_D}{\partial \theta_{D-2}} & \frac{\partial x_D}{\partial \theta_{D-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.26}$$

$$dX = \mathcal{J}_D d\Theta \tag{2.3.1.27}$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{J}_D$ matrisi, literatürde jakobiyen matrisi olarak tanımlanır (Lee, 1997). Jakobiyen matrisi yardımıyla metrik tensör hesaplanabilir. Sonsuz küçük yay uzunluğunun karesi

$$d\vec{r} = dx_1\vec{\imath}_1 + dx_2\vec{\imath}_2 + \cdots \ldots + dx_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + dx_D\vec{\imath}_D \tag{2.3.1.28}$$

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.1.29}$$

$$= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \cdots + dx_D^2 \tag{2.3.1.30}$$

şeklindedir. Burada $\vec{\imath}_j$ 'ler Kartezyen koordinatlardaki doğal birim taban vektörleridir. Matris formunda ise

$$d\vec{r} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} \tag{2.3.1.31}$$

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} \tag{2.3.1.32}$$

$$= [dx_1 \quad dx_2 \quad \ldots \quad dx_{D-2} \quad dx_{D-1}] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} \tag{2.3.1.33}$$

şeklinde yazılır. (2.3.1.26) ifadesini tekrar göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} = \mathcal{J}_D \begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.35}$$

ve bu ifadenin her iki tarafının transpozunu alırsak

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix}^T \mathcal{J}_D{}^T \tag{2.3.1.36}$$

olur. Bu ifadeleri (2.3.1.32) de yerine yazarsak

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \tag{2.3.1.37}$$

$$= [dr \quad d\theta_1 \quad \dots \quad d\theta_{D-2} \quad d\theta_{D-1}] \mathcal{J}_D{}^T \mathcal{J}_D \begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.38}$$

$\mathcal{J}_D{}^T \mathcal{J}_D$ çarpımı küresel koordinatlara ait metrik tensörü vermektedir (Lee, 1997). Yani

$$\mathcal{J}_D{}^T \mathcal{J}_D = [g_{ij}] \tag{2.3.1.39}$$

şeklindedir. O halde (2.3.1.32) ifadesini

$$ds^2 = [dr \quad d\theta_1 \quad \dots \quad d\theta_{D-2} \quad d\theta_{D-1}][g_{ij}] \begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix} \tag{2.3.1.40}$$

$$= g_{00} dr^2 + \sum_{i,j=0}^{D-1} g_{ij} d\theta_i d\theta_j \tag{2.3.1.41}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi de dr ve $d\theta_i$ diferansiyellerinin Kartezyen koordinatlardaki karşılıklarını bulalım. Daha önceki yaptıklarımıza benzer şekilde

$$dr = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial r}{\partial x_j} dx_j \tag{2.3.1.42}$$

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} dx_j \quad i \in (1,2,3, \dots, D-1) \tag{2.3.1.43}$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \ldots + \frac{\partial r}{\partial x_{D-1}} dx_{D-1} + \frac{\partial r}{\partial x_D} dx_D$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \ldots + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{D-1}} dx_{D-1} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_D} dx_D$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \tag{2.3.1.44}$$

$$\partial\theta_{D-2} = \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \ldots + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_{D-1}} dx_{D-1} + \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_D} dx_D$$

$$d\theta_{D-1} = \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \ldots + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_{D-1}} dx_{D-1} + \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_D} dx_D$$

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ \vdots \\ d\theta_{D-2} \\ d\theta_{D-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial r}{\partial x_D} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_D} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial \theta_{D-2}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial \theta_{D-1}}{\partial x_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{D-1} \\ dx_D \end{bmatrix} \tag{2.3.1.45}$$

$$d\Theta = C dX \tag{2.3.1.46}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeyi (2.3.1.27)'de yerine koyarsak

$$dX = \mathcal{J}_D C dX \tag{2.3.1.47}$$

ifadesini buluruz. Koordinat sistemlerinin dönüşümlerinin sürekli ve türevlenebilir olması nedeniyle (2.3.1.47) ifadesinden

$$\mathcal{J}_D . C = I \tag{2.3.1.48}$$

olması gerektiği anlaşılır. Bu eşitlikten $\mathcal{J}_D$ve C matrislerinin birbirlerinin tersi olduğunu anlaşılır. Yani

$$\mathcal{J}_D = C^{-1} \quad \text{ya da} \quad C = {\mathcal{J}_D}^{-1} \tag{2.3.1.49}$$

dir. Ayrıca (2.3.1.23) ve (2.3.1.47) bağıntıları incelendiğinde

$$A = C^T \tag{2.3.1.50}$$

olduğunu görebiliriz. A matrisini, $\mathcal{J}_D$ (jakobiyen) matrisi cinsinden yazılabilir, yani

$$A = \left({\mathcal{J}_D}^{-1}\right)^T = \left({\mathcal{J}_D}^T\right)^{-1} \tag{2.3.1.51}$$

şeklindedir. $\mathcal{J}_D$ matrisinin tersini bulmak kolay olmayabilir. Fakat $\mathcal{J}_D$ matrisinin metrik tensör ile olan ilişkisini kullanarak kolaylıkla hesaplayabiliriz. Özelikle ortogonal bir

koordinat sistemi olan küresel koordinatlarda bu işlemler daha da kolaydır. (2.3.1.39) ifadesinin her iki tarafını sağdan $\mathcal{J}_D$ matrsinin tersi ${\mathcal{J}_D}^{-1}$ ile çarparsak

$${\mathcal{J}_D}^T \mathcal{J}_D {\mathcal{J}_D}^{-1} = [g_{ij}]{\mathcal{J}_D}^{-1} \tag{2.3.1.52}$$

$${\mathcal{J}_D}^T = [g_{ij}]{\mathcal{J}_D}^{-1} \quad \text{ya da} \quad {\mathcal{J}_D}^{-1} = [g_{ij}]^{-1}{\mathcal{J}_D}^T \tag{2.3.1.53}$$

ifadelerini buluruz. Bu ifadenin her iki tarafının tersini alırsak

$$\left({\mathcal{J}_D}^T\right)^{-1} = \mathcal{J}_D[g_{ij}]^{-1} \tag{2.3.1.54}$$

$$A = \mathcal{J}_D[g_{ij}]^{-1} \tag{2.3.1.55}$$

olarak A matrisini, Jakobiyen ve metrik tensörün çarpımı olarak buluruz. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{D} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{D-2} \quad x_{D-1}]_{1\times D} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{D-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_D} \end{bmatrix}_{D\times 1} \tag{2.3.1.56}$$

toplamının sonucunu küresel koordinatlardaki karşılığını bulalım. Bu ifadeyi,

$$\sum_{i=1}^{D} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_D \tag{2.3.1.57}$$

şeklinde yazabliriz. Burada $\vec{r}$ ve $\vec{\nabla}_D$ kartezyen koordinatlarda sırasıyla konum vektörü ve nabla operatörüdür.

$$\vec{r} = x_1\vec{\imath}_1 + x_2\vec{\imath}_2 + \cdots \dots . + x_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + x_D\vec{\imath}_D \tag{2.3.1.58}$$

$$\vec{\nabla}_D = \vec{\imath}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\imath}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots \dots . + \vec{\imath}_{D-1} \frac{\partial}{\partial x_{D-1}} + \vec{\imath}_D \frac{\partial}{\partial x_D} \tag{2.3.1.59}$$

Burada $\vec{\imath}_j$ ‘ler kartezyen koordinatlardaki doğal birim taban vektörleridir. $\vec{r}$ konum vektörünü ve $\vec{\nabla}_D$ nabla operatörü küresel koordinatlarda sırasıyla

$$\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{2.3.1.60}$$

$$\vec{\nabla}_D = \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2} \frac{1}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cdots + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \frac{1}{r \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \tag{2.3.1.61}$$

şeklindedir. $\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2}, \dots, \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}}$ ile gösterilen vektörler küresel koordinatlardaki ortonormal taban vektörleridir. Özel olarak $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ vektörü bir noktayı orijinle birleştiren radyal birim vektördür. $\vec{\nabla}_D$ nabla operatörü ile ayrıntılı bilgi Ek-A kısmında verilmiştir. $\vec{r}$ ve $\vec{\nabla}_D$ ifadelerinin küresel koordinatlardaki karşılığını (2.3.1.57) ifadesinde yerine yazarsak

$$\sum_{i=1}^{D} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_D \tag{2.3.1.62}$$

$$= (r\hat{\boldsymbol{e}}_r) \cdot \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2} \frac{1}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cdots + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \frac{1}{r \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right)$$

(2.3.1.63)

$$=$$

$$r\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + r\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + r\hat{\boldsymbol{e}}_r . \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2} \frac{1}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cdots + r\hat{\boldsymbol{e}}_r . \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \frac{1}{r \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{D} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = r \frac{\partial}{\partial r} \tag{2.3.1.64}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi $\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{r}}{r}$ şeklindeki normal konum vektörü için genelleştirelim. Bu durumda kartezyen koordinatlar ile küresel koordinatlar arasındaki dönüşüm denklem sistemleri sembolik şekilde şöyle yazılabilir.

$$r^2 = \sum_{a=1}^{D} x_a^2 \tag{2.3.1.65}$$

$$x_a = x_a\big(r, \theta_1, \theta_1, \dots, \theta_{D-2}, \theta_{D-1}(= \varphi)\big)$$

$$= r f_a(\theta_1, \theta_1, \dots, \theta_{D-2}, \theta_{D-1}(= \varphi)) \tag{2.3.1.66}$$

Buradaki f_a fonksiyonları, x_a ile gösterilen kartezyen koordinatlarla küresel koordinatları birbirine bağlayan fonksiyonlardır ve

$$f_1 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \cos\theta_{D-1}$$

$$f_2 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \sin\theta_{D-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \tag{2.3.1.67}$$

$$f_{D-2} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$f_{D-1} = \sin\theta_1 \cos\theta_2$

$f_D = \cos\theta_1,$

şeklinde ifade edilirler. Bu durumda $\vec{r}$ konum vektörünü,

$\vec{r} = x_1\vec{\imath}_1 + x_2\vec{\imath}_2 + \cdots \ldots + x_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + x_D\vec{\imath}_D$

$= rf_1\vec{\imath}_1 + rf_2\vec{\imath}_2 + \cdots \ldots + rf_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + rf_D\vec{\imath}_D$ (2.3.1.68)

$\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{n}}$ (2.3.1.69)

şeklinde yazabiliriz. Burada $\hat{\boldsymbol{n}}$, $\vec{r}$ konum vektörünün birim normal vektörüdür.

$\hat{\boldsymbol{n}} = f_1\vec{\imath}_1 + f_2\vec{\imath}_2 + \cdots \ldots + f_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + f_D\vec{\imath}_D$ (2.3.1.70)

Küresel koordinatlarda $\hat{\boldsymbol{n}}$ vektörü:

$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{\boldsymbol{e}}_r$ (2.3.1.71)

şeklindedir. Bu durumda

$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\nabla}_D = \sum_{i=1}^{D} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{D} rf_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{D} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$= \frac{1}{r} r \frac{\partial}{\partial r}$

$\sum_{i=1}^{D} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r}$ (2.3.1.72)

$\sum_{a,b=1}^{D} x_a x_b \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}$ ifadesinin de küresel koordinatlardaki karşılığı (2.3.1.9) sonucunu kullanarak bulunabilir.

$\sum_{a,b=1}^{D} x_a x_b \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} = \sum_{a,b=1}^{D} rf_a rf_b \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}$ (2.3.1.73)

$= r^2 \sum_{a=1}^{D} f_a \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\sum_{b=1}^{D} f_b \frac{\partial}{\partial x_b}\right)$ (2.3.1.74)

$$= r^2 \sum_{a=1}^{D} f_a \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{2.3.1.75}$$

$$= r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{a=1}^{D} f_a \frac{\partial}{\partial x_a}\right) \tag{2.3.1.76}$$

$$= r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{2.3.1.77}$$

$$= r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tag{2.3.1.78}$$

$\vec{\nabla}_D^2$ operatörünün küresel koordinatlardaki ifadesi ise (2.2.8) no'lu denklemde verilmiştir. (2.3.1.72), (2.3.1.78) ve (2.2.7) ifadelerini (2.3.1.8) denkleminde yerine koyarsak D boyutlu küresel koordinatlardaki yörüngesel açısal momentum operatörü ile Laplasyen arasındaki bağıntı şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{L}_D^2 = h^2 r^2 \frac{d^2}{dr^2} + h^2 (D-1) r \frac{d}{dr} - \hbar^2 r^2 \vec{\nabla}_D^2 \tag{2.3.1.79}$$

$$\begin{aligned} = h^2 r^2 \frac{d^2}{dr^2} + h^2 (D-1) r \frac{d}{dr} \\ - \hbar^2 r^2 \Bigg(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} \\ + \frac{1}{r^2} \Bigg(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(sin^{D-2}\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \\ + \sum_{j=1}^{D-3} [\frac{1}{\sin^j \theta_{D-j-1} \prod_{i=1}^{D-j-2} \sin^2 \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-j-1}} (\sin^j \theta_{D-j-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-j-1}})] \\ + \frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} \sin^2 \theta_i} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Bigg) \Bigg) \end{aligned} \tag{2.3.1.80}$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(sin^{D-2}\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{D-3} \left[\frac{1}{\sin^j \theta_{D-j-1} \prod_{i=1}^{D-j-2} \sin^2 \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-j-1}} (\sin^j \theta_{D-j-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-j-1}}) \right]$$

$$\left. + \frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} \sin^2 \theta_i} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = -\hbar^2 \, \Delta_{S^{D-1}}$$

(2.3.1.81)

Ayrıca $\vec{\nabla}_D^2$ operatörü de

$$\vec{\nabla}_D^2 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (D-1) r \frac{d}{dr} - \frac{\hat{L}_D^2}{h^2 r^2} \tag{2.3.1.82}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\hat{L}_D^2$ açısal momentum operatörü ile $\vec{\nabla}_D^2$ Laplasyen operatörlerini birbiriyle ilişkilendirmiş olduk.

2.3.2 D Boyutlu Uzayın Alt Uzayları Olan Hiper Düzlemlere Ait Yörüngesel Açısal Momentum Operatörleri

D boyutlu uzayın alt uzayları olan A boyutlu hiper düzlemlere ait yörüngesel açısal momentum operatörleri,

$$\hat{L}_A^2 = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{A} L_{ab}^2 \qquad A \in (2,3,4,\dots,D-1) \tag{2.3.2.1}$$

$$L_{ab} = -i\hbar \left(x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \qquad a,b \in (1,2,3\dots,A)$$

şeklinde tanımlanır (Kirchberg vd., 2003). Alt uzaylara ait yörüngesel açısal momentum operatörleri, D boyutlu uzayın x_D-eksenine dik kesitleri olan alt $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemlerine kısıtlanmış dönme hareketlerinin operatörleridir.

D boyutlu uzaydaki $\hat{L}_D^2$ yörüngesel açısal momentum operatörünün alt uzay operatörü olan

$$\hat{L}_A^2 = \sum_{\substack{c,d=1 \\ c<d}}^{A} L_{cd}^2 \qquad (A < D) \tag{2.3.2.2}$$

operatörünün $\hat{L}_D^2$ ile olan komütasyon bağıntısını inceleyelim.

$$\left[\hat{L}_D^2, \hat{L}_A^2\right] = \left[\hat{L}_D^2, \sum_{\substack{c,d=1 \\ c<d}}^{A} L_{cd}^2\right] \tag{2.3.2.3}$$

$$= \sum_{\substack{c,d=1 \\ c<d}}^{A} \left[\hat{L}_D^2, L_{cd}\right] L_{cd} + \sum_{\substack{c,d=1 \\ c<d}}^{A} L_{cd}\left[\hat{L}_D^2, L_{cd}\right] \qquad \left(\left[\hat{L}_D^2, L_{cd}\right] = 0\right) \tag{2.3.2.4}$$

$$\left[\hat{L}_D^2, \hat{L}_A^2\right] = 0 \tag{2.3.2.5}$$

Benzer şekilde $\hat{L}_A^2$ ve $\hat{L}_B^2$ D boyutlu uzayın alt yörüngesel açısal momentum operatörlerinin birbirleriyle olan

$$\hat{L}_A^2 = \sum_{\substack{c,d=1 \\ c<d}}^{A} L_{cd}^2 \text{ ve } \hat{L}_B^2 = \sum_{\substack{f,g=1 \\ f<g}}^{B} L_{fg}^2 \tag{2.3.2.6}$$

$$\left[\hat{L}_A^2, \hat{L}_B^2\right] = 0 \quad (A < B < D) \tag{2.3.2.7}$$

komütasyon bağıntılarını sağladığı görülür. Ayrıca $\left[\hat{L}_D^2, \hat{L}_A^2\right] = 0$ ve $\left[\hat{L}_D^2, L_{cd}\right] = 0$ olduğundan

$$\left[\hat{L}_A^2, L_{cd}\right] = 0\,, \tag{2.3.2.8}$$

dir.

Şimdi D boyutlu uzayın $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemine ait $\hat{L}_{D-1}^2$ yörüngesel açısal momentum operatörünü hesaplayalım ve $\hat{L}_D^2$ arasındaki ilişkiyi bulalım. D boyutlu uzayın $(D-1)$ boyutlu hiper düzleminin yörüngesel açısal momentum operatörünü hesaplayabilirsek diğer alt uzaylara açısal momentum operatörlerini de iterasyon ile kolaylıkla hesaplarız. $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemleri,

$$x_D = c \in \mathbb{R} \tag{2.3.2.10}$$

şeklinde parametrize edilir. D boyutlu küresel koordinat sisteminden yola çıkarak $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemlerinin küresel koordinat sistemini oluşturabiliriz. D boyutta tanımladığımız küresel koordinat sistemi ile $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemine ait küresel koordinat sistemi arasında bağlantı kurabilmek için $x_D = 0$ şeklindeki $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemleri seçebiliriz. Bu şekilde hiper düzlemlere ait kartezyen koordinat sistemlerinin orijinleri aynı olur. $x_D = 0$ hiper düzlemine ait konum vektörleri x_D-eksenine diktir. Dolayısıyla bu hiper düzleme ait konum vektörlerinin x_D-

ekseni ile yaptıkları açı $\theta_1 = 90^{\circ}$ olur. Bu durumda $(D-1)$ boyutlu hiper düzleminin küresel koordinat sistemi:

$$x_1 = r\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2}\cos\theta_{D-1}$$

$$x_2 = r\ \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2}\sin\theta_{D-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad (2.3.2.11)$$

$$x_{D-2} = r\ \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$x_{D-1} = r\cos\theta_2$$

$$x_D = r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 \le \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{D-2} \le \pi \qquad (2.3.2.12)$$

$$0 \le \theta_{D-1} \le 2\pi$$

$$0 < r < \infty$$

şeklinde olur. Bu koordinat sistemindeki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü olan L^2_{D-1} 'yi (2.3.1.97) formülünden

$$\hat{L}^2_{D-1} = -\hbar^2\left(\frac{1}{sin^{D-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(sin^{D-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{D-4}\left[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}\prod_{i=2}^{D-j-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\left(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\right)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{\prod_{i=2}^{D-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad (2.3.2.13)$$

olarak elde edilir.

Şimdi L^2_{D-1} ile L^2_D operatörleri arasındaki ilişkiyi bulmak için L^2_D bulduğumuz ifadesinde düzenlemeler yapılırsa

$$\hat{L}_D^2 = -\hbar^2 \Bigg(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_1} \Big(sin^{D-2}\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} \Big) + \frac{1}{sin^2\theta_1} \Bigg[\frac{1}{sin^{D-3}\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \Big(sin^{D-3}\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} \Big) + \sum_{j=1}^{D-4} [\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1} \prod_{i=2}^{D-j-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}} (\sin^j\theta_{D-j-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}})] + \frac{1}{\prod_{i=2}^{D-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Bigg] \Bigg) \tag{2.3.2.14}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede dikkat edilirse en sağdaki $\frac{1}{sin^2\theta_1}$ çarpanlı terimin olduğu parantez L_{D-1}^2 operatörüne eşittir. Böylelikle L_D^2 ile L_{D-1}^2 operatörleri arasındaki ilişki,

$$L_D^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left(sin^{D-2}\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} \right) + \frac{1}{sin^2\theta_1} L_{D-1}^2 \right) \tag{2.3.2.15}$$

olarak bulunur. Benzer şeklide L_{D-1}^2 ile L_{D-2}^2 operatörleri arasındaki ilişkiyi bulalım. L_{D-2}^2 operatörü $(D-1)$ boyutlu hiper düzlemin alt düzlemi olan $(D-2)$ boyutlu hiper düzleme ait operatördür. $(D-2)$ boyutlu hiper düzlem, yukarıda elde ettiğimiz $(D-1)$ boyutlu hiper düzlem içindeki $x_{D-1} = 0$ şeklinde tanımlanan hiper düzlemdir. Bu durumda $x_{D-1} = 0$ hiper düzlemine ait konum vektörleri yine x_{D-1}-eksenine diktir ve bu konum vektörlerinin x_{D-1}-ekseni ile yaptıkları açı da $\theta_2 = 90^\circ$ olur. Bu durumda $(D-2)$ boyutlu hiper düzleminin küresel koordinat sistemi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \cos\theta_{D-1} \\
x_2 &= r \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \sin\theta_{D-1} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_{D-2} &= r \sin\theta_3 \cos\theta_4 \\
x_{D-2} &= r \cos\theta_3
\end{aligned} \tag{2.3.2.16}$$

$$x_{D-1} = r\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 \le \theta_3, \theta_4, \dots, \theta_{D-2} \le \pi \qquad (2.3.2.17)$$

$$0 \le \theta_{D-1} \le 2\pi$$

$$0 < r < \infty$$

şeklindedir. Bu koordinat sistemindeki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü olan L^2_{D-2} 'yi yine (2.3.1.97) formülünden bulabiliriz.

$$\hat{L}^2_{D-2} = -\hbar^2 \Bigg(\frac{1}{sin^{D-4}\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_3} \left(sin^{D-4}\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_3} \right) + \sum_{j=1}^{D-5} \Big[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1} \prod_{i=3}^{D-j-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}} \left(\sin^j\theta_{D-j-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}} \right) \Big] + \frac{1}{\prod_{i=3}^{D-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Bigg)$$

(2.3.2.18)

Şimdi L^2_{D-2} ile L^2_{D-1} operatörleri arasındaki ilişkiyi bulmak için L^2_{D-1} için bulduğumuz ifadede düzenlemeler yapalım. Bu durumda L^2_{D-1} ifadesi,

$$\hat{L}^2_{D-1} = -\hbar^2 \Bigg(\frac{1}{sin^{D-3}\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left(sin^{D-3}\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} \right) + \frac{1}{sin^2\theta_2} \Bigg[\frac{1}{sin^{D-4}\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_3} \left(sin^{D-4}\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_3} \right) + \sum_{j=1}^{D-5} \Big[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1} \prod_{i=3}^{D-j-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}} \left(\sin^j\theta_{D-j-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}} \right) \Big] + \frac{1}{\prod_{i=3}^{D-2} \sin^2\theta_i} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Bigg] \Bigg)$$

(2.3.2.19)

Yukarıdaki ifadededede en sağdaki $\frac{1}{sin^2\theta_2}$ çarpanlı terimin olduğu parantez L^2_{D-2} operatörüne eşittir. Böylelikle L^2_{D-1} ile L^2_{D-2} operatörleri arasındaki ilişki,

$$L^2_{D-1} = -\hbar^2\left(\frac{1}{sin^{D-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(sin^{D-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)+\frac{1}{sin^2\theta_2}L^2_{D-2}\right) \tag{2.3.2.20}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer L^2_{D-A+1} ile L^2_{D-A} operatörleri arasındaki ilişkilerde bulunabilir. Şimdi bulduğumuz bu sonuçları D=2, D=3, D=4 ve D=5 için örneklendirelim.

D=2 için yörüngesel açısal momentum operatörlerini bulalım.

$$x_1 = r\cos\theta_1$$

$$x_2 = r\sin\theta_1 \tag{2.3.2.22}$$

$$0 \le \theta_1 \le 2\pi$$

$$0 < r < \infty$$

$$\left[g_{ij}\right]_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix} \tag{2.3.2.23}$$

$$\left[g_{ij}\right]_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{bmatrix} \tag{2.3.2.24}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & r\cos\theta_1\end{bmatrix} \tag{2.3.2.25}$$

$$A_2 = J_2.\left[g_{ij}\right]_2 \tag{2.3.2.26}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & r\cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r}\\ \sin\theta_1 & \frac{\cos\theta_1}{r}\end{pmatrix} \tag{2.3.2.27}$$

Kartezyen koordinatlardaki türev operatörleri ile küresel koordinatlardaki türev operatörleri arasındaki bağıntılar,

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix} = A_2\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}\end{pmatrix} \tag{2.3.2.28}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} \\ \sin\theta_1 & \frac{\cos\theta_1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \quad (2.3.2.29)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \quad (2.3.2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.32)$$

İki boyutta sadece bir tane dönme düzlemi vardır. Bu durumda

$$L_{12} = -i\hbar\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \quad (2.3.2.33)$$

$$= -i\hbar\left(r\cos\theta_1\left(\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1}\right) - r\sin\theta_1\left(\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1}\right)\right) \quad (2.3.2.34)$$

$$L_{12} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.35)$$

2 boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü,

$$\hat{L}_2^2 = (L_{12})^2 \quad (2.3.2.36)$$

$$= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \quad (2.3.2.37)$$

olur.

D=3 için yörüngesel açısal momentum operatörlerini bulalım. 2 boyutta yaptığımıza benzer işlemleri yaparsak

$$x_1 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$$

$$x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \quad (2.3.2.38)$$

$$x_3 = r\cos\theta_1$$

$$0 \le \theta_1 \le \pi$$

$$0 \le \theta_2 \le 2\pi$$

$$0 < r < \infty$$

$$[g_3]_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 \end{bmatrix} \tag{2.3.2.39}$$

$$[g_3]_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1} \end{bmatrix} \tag{2.3.2.40}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & r\sin\theta_1 \sin\theta_2 & r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 & r\sin\theta_1\cos\theta_2 & r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\cos\theta_1 & r\cos\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{2.3.2.41}$$

$$A_3 = J_3.\left[g_{ij}\right]_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1}{r} & \frac{\cos\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.2.42}$$

3 boyut için kartezyen koordinatlardaki türev operatörleri ile küresel koordinatlardaki türev operatörleri arasındaki bağıntılar,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \tag{2.3.2.43}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1}{r} & \frac{\cos\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \tag{2.3.2.44}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_2}{r\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\ \cos\theta_1\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} \end{bmatrix} \tag{2.3.2.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sin\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} \tag{2.3.2.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\theta_1\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_2}{r\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} \tag{2.3.2.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.48)$$

şeklindedir. 3 boyutta 3 tane dönme düzlemi vardır. Bu düzlemlere ait açısal momentum operatörleri,

$$L_{12} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (2.3.2.49)$$

$$L_{13} = -i\hbar \left(-\cos\theta_2 \ \cot\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ - \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.3.2.50)$$

$$L_{23} = -i\hbar \left(\sin\theta_2 \ \cot\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ - \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \quad (2.3.2.51)$$

3 boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü,

$$\hat{L}_3^2 = (L_{12})^2 + (L_{13})^2 + (L_{23})^2 \quad (2.3.2.52)$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \frac{1}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right] \quad (2.3.2.53)$$

$$\hat{L}_3^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1} \hat{L}_2^2 \quad (2.3.2.54)$$

D=4 için yörüngesel açısal momentum operatörlerini bulalım.

$x_1 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$

$x_2 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3$

$x_3 = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \quad (2.3.2.55)$

$x_4 = r \cos\theta_1,$

$0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

$0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$

$0 < r < \infty$

4 boyut için kartezyen koordinatlardaki türev operatörleri ile küresel koordinatlardaki türev operatörleri arasındaki bağıntılar,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3}{r} & \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 & \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{r} & \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_2}{r \sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r \sin\theta_1} & 0 \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

(2.3.2.56)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{\sin\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3}$$

(2.3.2.57)

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_2}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\cos\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3}$$

(2.3.2.58)

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (2.3.2.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.60)$$

4 boyutta 6 tane dönme düzlemi vardır. Bu düzlemlere ait açısal momentum operatörleri,

$$L_{12} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_3} \quad (2.3.2.61)$$

$$L_{13} = -i\hbar \left(-\frac{\partial}{\partial \theta_2} \cos\theta_3 + \frac{\partial}{\partial \theta_3} \sin\theta_3 \cot\theta_2 \right) \quad (2.3.2.62)$$

$$L_{14} = -i\hbar \left(-\sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sin\theta_3 \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \quad (2.3.2.63)$$

$$L_{23} = -i\hbar \left(-\sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \cos\theta_3 \cot\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \quad (2.3.2.64)$$

$$L_{24} = -i\hbar \left(-\sin\theta_2 \sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_3}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \quad (2.3.2.65)$$

$$L_{34} = -i\hbar \left(-\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \sin\theta_2 \cot\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \quad (2.3.2.66)$$

4 boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü,

$$\hat{L}_4^2 = (L_{12})^2 + (L_{13})^2 + (L_{14})^2 + (L_{23})^2 + (L_{24})^2 + (L_{34})^2 \quad (2.3.2.67)$$

$$\hat{L}_4^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\left[\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_3^2}+\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right]\right)$$

(2.3.2.68)

$$= -\hbar^2\frac{1}{\sin^2\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\hat{L}_3^2 \qquad (2.3.2.69)$$

D=5 için yörüngesel açısal momentum operatörlerini bulalım.

$x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$

$x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$x_4 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$ (2.3.2.70)

$x_5 = r\cos\theta_1,$

$0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le \pi$

$0 \le \theta_4 \le 2\pi$

$0 < r < \infty$

5 boyut için kartezyen koordinatlardaki türev operatörleri ile küresel koordinatlardaki türev operatörleri arasındaki bağıntılar,

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\\ \frac{\partial}{\partial x_5}\end{bmatrix} = [A_5]\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_3}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_4}\end{bmatrix} \qquad (2.3.2.71)$$

$$A_5$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 & \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_4}{r} & \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_2 \cos\theta_4}{r \sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} & -\frac{\sin\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 & \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\theta_1}{r} & \frac{\sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\theta_2}{r \sin\theta_1} & \frac{\sin\theta_4 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} & \frac{\cos\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3}{r} & \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} & 0 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r \sin\theta_1} & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.3.2.72)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_4}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_2 \cos\theta_4}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} - \frac{\sin\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_4}$$

(2.3.2.73)

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\theta_2}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\sin\theta_4 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\cos\theta_4}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_4}$$

(2.3.2.74)

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{\sin\theta_3}{r \sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3}$$

(2.3.2.75)

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\sin\theta_2}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (2.3.2.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_5} = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \quad (2.3.2.77)$$

5 boyutta 10 tane dönme düzlemi vardır. Bu düzlemlere ait açısal momentum operatörleri,

$$L_{12} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_4} \quad (2.3.2.78)$$

$$L_{13} = -i\hbar \left(\sin\theta_4 \cot\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_4} - \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \quad (2.3.2.79)$$

$$L_{14} = -i\hbar \left(-\sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_2} \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_4} \right) \quad (2.3.2.80)$$

$$L_{15} = -i\hbar\left(\sin\theta_2\ \sin\theta_3\ \cos\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_4\ \sin\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_1\cos\theta_3\cos\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\sin\theta_4\cos\theta_1}{\sin\theta_1\sin\theta_2\ \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$

(2.3.2.81)

$$L_{23} = -i\hbar\left(-\ \sin\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_3} - \ \cos\theta_4\ \cot\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right) \quad (2.3.2.82)$$

$$L_{24} = -i\hbar\left(-\ \sin\theta_3\ \sin\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\sin\theta_4\cos\theta_2\cos\theta_3}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_2\cos\theta_4}{\sin\theta_2\ \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right) \quad (2.3.2.83)$$

$$L_{25} = -i\hbar\left(-\ \sin\theta_2\ \sin\theta_3\ \sin\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\sin\theta_4\cos\theta_1\cos\theta_2\ \sin\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\sin\theta_4\cos\theta_1\cos\theta_3}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_1\cos\theta_4}{\sin\theta_1\sin\theta_2\ \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$

(2.3.2.84)

$$L_{34} = -i\hbar\left(-\ \cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \ \sin\theta_3\ \cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) \quad (2.3.2.85)$$

$$L_{35} = -i\hbar\left(-\ \sin\theta_2\ \cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\sin\theta_3\cos\theta_1}{\sin\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) \quad (2.3.2.86)$$

$$L_{45} = -i\hbar\left(-\ \cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \ \sin\theta_2\ \cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \quad (2.3.2.87)$$

5 boyuttaki yörüngesel açısal momentum operatörünün büyüklüğü,

$$\hat{L}_5^2 = (L_{12})^2 + (L_{13})^2 + (L_{14})^2 + (L_{15})^2 + (L_{23})^2 + (L_{24})^2 + (L_{25})^2 + (L_{34})^2 + (L_{35})^2 + (L_{45})^2$$

(2.3.2.88)

$$= -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta_3\sin^2\theta_2\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_4^2} + \frac{1}{\sin^2\theta_2\sin^2\theta_1}\frac{1}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\sin^3\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right)$$

(2.3.2.89)

$$\hat{L}_5^2 = -\hbar^2\frac{1}{\sin^3\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\hat{L}_4^2 \quad (2.3.2.90)$$

Artık L_D^2 yörüngesel açısal momentum operatörleri iteratif biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$A \in [2,3,\dots,D]$

$$\hat{L}_D^2 = -\left\{\hbar^2 \frac{1}{sin^{D-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin^{D-2}\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \frac{L_{D-1}^2}{sin^2\theta_1}\right\} \quad (2.3.2.91)$$

$$\hat{L}_{D-1}^2 = -\left\{\hbar^2 \frac{1}{sin^{D-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(sin^{D-3}\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) - \frac{1}{sin^2\theta_2}L_{D-2}^2\right\} \quad (2.3.2.92)$$

$\vdots$ … … …

$$\hat{L}_A^2 = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{A} L_{ab}^2 = -\left\{\hbar^2 \frac{1}{sin^{A-2}\theta_{D-A+1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-A+1}}\left(sin^{A-2}\theta_{D-A+1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-A+1}}\right) - \frac{L_{A-1}^2}{sin^2\theta_{D-A+1}}\right\} \quad (2.3.2.93)$$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$$\hat{L}_3^2 = -\left\{\hbar^2 \frac{1}{sin\,\theta_{D-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-2}}\left(sin\,\theta_{D-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-2}}\right) - \frac{L_2^2}{sin^2\theta_{D-2}}\right\} \quad (2.3.2.94)$$

$$\hat{L}_2^2 = L_{12}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_{D-1}^2} = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (2.3.2.95)$$

2.4 D-Boyutlu Küresel Geometride Dalga Fonksiyonunun Açısal Kısmının Çözümü

Klein-Gordon denkleminin açısal kısma ait denklemi çözelim. Açısal momentum operatörü için elde ettiğimiz $\hat{L}_D^2 = -\hbar^2\,\Delta_{S^{D-1}}$ şeklindeki bağıntıyı (2.2.22) denkleminde yerine yazarsak

$$\hat{L}_D^2\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) = \hbar^2 N(k,D)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) \quad (2.4.1)$$

$$\hat{L}_D^2\left(\prod_{n=1}^{D-1}\mathcal{X}_n(\theta_n)\right) = \hbar^2 N(k,D)\prod_{n=1}^{D-1}\mathcal{X}_n(\theta_n) \quad (2.4.2)$$

$$-\hbar^2\left(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin^{D-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{D-3}\left[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}\prod_{i=1}^{D-j-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}})\right]$$
$$\left.+\frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\prod_{n=1}^{D-1}\mathcal{X}_n(\theta_n)=N(k,D)\hbar^2\prod_{n=1}^{D-1}\mathcal{X}_n(\theta_n)$$

(2.4.3)

şeklindeki öz değer denklemi bulunur. Bu denklem θ_j açısal değişkenlerine ayrılarak çözülebilir (Özcan, 2006). (2.4.3) denkleminin her iki tarafını $\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})=\prod_{n=1}^{D-1}\mathcal{X}_n(\theta_n)$ ile bölüp gerekli işlemleri yaparsak,

$$\frac{1}{\mathcal{X}_1\sin^{D-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{D-2}\theta_1\frac{\partial\mathcal{X}_1}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\mathcal{X}_2\sin^2\theta_1\sin^{D-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{D-3}\theta_2\frac{\partial\mathcal{X}_2}{\partial\theta_2}\right)$$
$$+\cdots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\mathcal{X}_{D-3}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{D-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-3}}\left(\sin^2\theta_{D-3}\frac{\partial\mathcal{X}_{D-3}}{\partial\theta_{D-3}}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathcal{X}_{D-2}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{D-3}\sin\theta_{D-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-2}}\left(\sin\theta_{D-2}\frac{\partial\mathcal{X}_{D-2}}{\partial\theta_{D-2}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{D-3}\sin^2\theta_{D-2}}\frac{1}{\mathcal{X}_{\mathrm{D-1}}}\frac{\partial^2\mathcal{X}_{\mathrm{D-1}}}{\partial{\theta_{D-1}}^2}=-N(k,D)$$

(2.4.4)

şeklindeki denklemi elde ederiz. Bu denklemi çözmek için açısal momentum operatörlerinin tanımını kullanarak iterasyonla alt denklemlere ayırırsak

$$\frac{1}{\mathcal{X}_{\mathrm{D-1}}}\frac{\partial^2\mathcal{X}_{\mathrm{D-1}}}{\partial\theta_{D-1}}=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-\lambda_0$$

(2.4.5)

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_{D-2}\ \sin\theta_{D-2}}\frac{d}{d\theta_{D-2}}\left(\sin\theta_{D-2}\frac{d\mathcal{X}_{D-2}}{d\theta_{D-2}}\right)-\frac{\lambda_0}{\sin^2\theta_{D-2}}\right]=-\lambda_1$$

(2.4.6)

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_{D-3}\ \sin^2\theta_{D-3}}\frac{d}{d\theta_{D-3}}\left(\sin^2\theta_{D-3}\frac{d\mathcal{X}_{D-3}}{d\theta_{D-3}}\right)-\frac{\lambda_1}{\sin^2\theta_{D-3}}\right]=-\lambda_2$$

(2.4.7)

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_{D-4}\ \sin^3\theta_{D-4}}\frac{d}{d\theta_{D-4}}\left(\sin^3\theta_{D-4}\frac{d\mathcal{X}_{D-4}}{d\theta_{D-4}}\right)-\frac{\lambda_2}{\sin^2\theta_{D-4}}\right]=-\lambda_3$$

(2.4.8)

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_2\sin^{D-3}\theta_2}\frac{d}{d\theta_2}\left(\sin^{D-3}\theta_2\frac{d\mathcal{X}_2}{d\theta_2}\right)-\frac{\lambda_{D-4}}{\sin^2\theta_2}\right]=-\lambda_{D-3}$$

(2.4.9)

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_1\sin^{D-2}\theta_1}\frac{d}{d\theta_1}\left(\sin^{D-2}\theta_1\frac{d\mathcal{X}_1}{d\theta_1}\right)-\frac{\lambda_{D-3}}{\sin^2\theta_1}\right]=-\lambda_{D-2}=-N(k,D)$$

(2.4.10)

denklemleri elde edilir. O halde bu denklemlerin iteratif çözümlerinin özdeğer denklemlerini, $j=1,2,\dots,D-2$ şeklinde olmak üzere aşağıdaki biçimde genel olarak yazabiliriz.

$$\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}}\frac{d}{d\theta_{D-j-1}}\left(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{d\mathcal{X}_{D-j-1}}{d\theta_{D-j-1}}\right)-\frac{\lambda_{j-1}\mathcal{X}_{D-j-1}}{\sin^2\theta_{D-j-1}}=-\lambda_j\mathcal{X}_{D-j-1} \qquad (2.4.11)$$

Yukarıdaki denklemlerde eşitliğin sağ tarafındaki λ_a sabitlerinin alt indisleriyle denklemin bağımsız değişkeni olan θ_b açılarının alt indilerinin toplamı her denklem için

$$a+b=D-1 \qquad (2.4.12)$$

şeklindedir. (2.4.11) denkleminin herhangi bir θ_{D-j-1} açısı için $x=\cos\theta_{D-j-1}$ şeklinde değişken dönüşümü yaparsak,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-j-1}}{dx^2}-(j+1)x\frac{d\mathcal{X}_{D-j-1}}{dx}+[\lambda_j-\frac{\lambda_{j-1}}{(1-x^2)}]\mathcal{X}_{D-j-1}=0 \qquad (2.4.13)$$

şeklindeki denklemi elde edilir.

Burada $\mathcal{X}_{D-1}(\theta_{D-1}(=\varphi)) = \Phi(\varphi)$ için elde edilen (2.4.5) denklemi diğer denklemlerden farklı olarak ilk olarak çözülmesi gerekir. Bu denklem bir çember üzerinde hareket etmeye kısıtlanmış spini sıfır olan bir parçacık için dalga denklemi olarak görülebilir. Literatürden parçacığın bağlı durumları için $-\lambda_0 \leq 0$ şeklinde olması gerektiği biliniyor (Liboff, 1980). O halde denklem,

$$\frac{1}{\mathcal{X}_{\mathrm{D}-1}}\frac{\partial^2 \mathcal{X}_{\mathrm{D}-1}}{\partial \theta_{D-1}} = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\lambda_0 = -m^2 \tag{2.4.14}$$

Bu denklemin çözümü de

$$\mathcal{X}_{\mathrm{D}-1}(\theta_{D-1}) = \Phi(\varphi) = ce^{\pm im\varphi} \tag{2.4.15}$$

dir. Buradaki c sabiti $\int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi)d\,\varphi = 1$ normalizasyon koşulundan $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ olarak bulunur.

Diğer açılar için elde ettiğimiz denklemlerin çözümlerindeki kuantum sayılarıyla ilişki kurmak amacıyla m sayısını $m = N_0$ şeklinde de etiketleyebiliriz. Şimdi de m sayılarının birer tam sayı olduklarını gösterelim. φ değişkeni, $[0,2\pi]$ kapalı aralığında değer almaktadır. $[0,2\pi]$ kapalı aralığı içinde ve uç noktalarında $\Phi(\varphi)$ dalga fonksiyonu sürekli ve tek değerli olması gerektiğinden

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \tag{2.4.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm im\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm im(\varphi+2\pi)} \tag{2.4.17}$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu koşul, $\Phi(\varphi)$ fonksiyonunun 2π dönmeleri altında değişmez kaldığını yani periyodiklik özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. Bu durumda m kuantum sayıları,

$$e^{\pm im2\pi} = 1 \tag{2.4.18}$$

eşitliğini sağlamalıdır. Buradan da m sayılarının ancak birer tamsayı olması gerektiği görülür, yani

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{2.4.19}$$

şeklindedir.

Şimdi de (2.4.6) denklemini çözmeye çalışalım. Bu denklem, $\mathcal{X}_{D-2}$ fonkisyonunun θ_{D-2} açısına bağlı olan denklemidir. O halde ilk denklemde bulduğumuz $\lambda_0 = N_0^2$ sabitini denklemde yerine yazarsak

$$\left[\frac{1}{\mathcal{X}_{D-2}\ \sin\theta_{D-2}}\frac{d}{d\theta_{D-2}}\left(\sin\theta_{D-2}\frac{d\mathcal{X}_{D-2}}{d\theta_{D-2}}\right)-\frac{{N_0}^2}{\sin^2\theta_{D-2}}\right]=-\lambda_1 \tag{2.4.20}$$

denklemini buluruz. Bu denklemi çözmek için $x=\cos\theta_{D-2},\ x\in[-1,1]$ gibi bir bağımsız değişken tanımlayarak değişken dönüşümü yapalım. Denklemimiz,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-2}}{dx^2}-2x\frac{d\mathcal{X}_{D-2}}{dx}+[\lambda_1-\frac{{N_0}^2}{(1-x^2)}]\mathcal{X}_{D-2}=0 \tag{2.4.21}$$

şeklini alır. (2.4.21) denkleminde $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^{k+\alpha}$ şeklinde sıfır noktası etrafında bir seri çözümü denersek, üç terimli bir tekrarlama bağıntısını elde ederiz. 2 terimli bir tekrarlama bağıntısını elde etmek için denklemin tanım aralığının uç noktalarındaki davranışına bakmalıyız. (2.4.21) denklemi, $x=\pm1$ noktalarında iki tane düzgün tekil nokta barındırıyor. Bu durumda tanım aralığının uç noktalarındaki asimptotik davranışı için önce $y=(1-x)$ ve sonra da $y=(1+x)$ şeklinde iki değişken tanımlayıp denklemimizi düzenleyip ardından $y=\ln p$ şeklinde yeni bir dönüşüm altındaki $y\to0$ limitinde bu denklemleri inceleriz (Bayın, 2006). İlk durum için $y=(1-x)$'i (2.4.21)-denkleminde yerine yazarsak ve $y\to0$ limitinde denklem

$$(-y^2+2y)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-2}}{dy^2}+2(1-y)\frac{d\mathcal{X}_{D-2}}{dy}+[\lambda_1-\frac{N_0^2}{-y^2+2y}]\mathcal{X}_{D-2}=0 \tag{2.4.22}$$

Benzer şekilde $y=(1+x)$ için

$$(-y^2+2y)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-2}}{dy^2}+2(1-y)\frac{d\mathcal{X}_{D-2}}{dy}+[\lambda_1-\frac{N_0^2}{-y^2+2y}]\mathcal{X}_{D-2}=0 \tag{2.4.22}$$

elde edilir. Her iki denklem de

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{N_0^2}{4}\right]\mathcal{X}_{D-2}(\rho)_{y\to0}=0 \tag{2.4.23}$$

sonucunu verir. Bu denklem, ikinci mertebeden Euler denklemidir. Bu denklemin y değişkeni cinsinden çözümleri;

$$C_{D-2}(\rho)_{y\to 0} = Ay^{\frac{N_0}{2}} + B\frac{1}{y^{\frac{N_0}{2}}} \tag{2.4.24}$$

Bu ifadede sonlu çözüm elde etmek için B=0 alınır Bu durumda $y \to 0$ için sonlu çözümü $y^{\frac{N_0}{2}}$ yani $(1-x)^{\frac{N_0}{2}}$ olarak buluruz. $y = (1-x)$ değişkeni için yapılan hesaplamaları de hesapları $y = (1+x)$ için de yaptığımızda

$$C_{D-2}(\rho)_{y\to 0} = Dy^{\frac{N_0}{2}} + F\frac{1}{y^{\frac{N_0}{2}}} \tag{2.4.25}$$

şeklindeki aynı sonucu buluruz. Yine bu ifadede de sonlu çözüm elde etmek için F=0 alınır ve $y = (1+x)$ için $(1+x)^{N_0/2}$ sonucunu buluruz. Bulduğumuz bu sonuçları kullanarak $(1+x)^{N_0/2}(1-x)^{N_0/2} = (1-x^2)^{N_0/2}$ çözümünü (2.4.21) denkleminde deneriz. Buradan

$$\mathcal{X}_{D-2}(x) = (\sin^2\theta_{D-2})^{\frac{N_0}{2}} C_{D-2}(\cos\theta_{D-2}) \tag{2.4.26}$$

olur. Sonuç olarak denklemimiz,

$$(1-x^2)\frac{d^2C_{D-2}(x)}{dy^2} - (2N_0+2)x\frac{dC_{D-2}(x)}{dx} + [\lambda_1 - N_0^2 - N_0]C_{D-2}(x) = 0 \tag{2.4.27}$$

şeklini alır. $x = \cos\theta_{D-2}$, $x \in [-1,1]$ idi. (2.4.21) denkleminin $x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil noktasi vardir. $[-1,1]$ aralığında ve sıfır noktası etrafinda Frobenius yöntemini (Bell, 1968; Bayın, 2006; Arfken, 2012) kullanarak

$$C_{D-2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\alpha} \tag{2.4.28}$$

şeklinde bir seri çözüm deneyelim. $\lambda_1 - N_0^2 - N_0 = Z$ olsun.

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}\,(n+\alpha+2)(n+\alpha+1) + [-(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (2N_0+2)(n+\alpha) + Z]a_n\}x^{n+\alpha} = 0 \tag{2.4.29}$$

Kuvvet serilerin teklik özelliği gereği bu denklemin bütün x noktalarinda sağlanması, ancak $x'in$ bütün kuvvetlerinin katsayılarının ayni anda sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. O halde seri çözümdeki katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$a_{n+2} = a_n \frac{[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(2N_0+2)(n+\alpha)-Z]}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)} \quad (2.4.30)$$

şeklindedir.

$$a_0\alpha(\alpha-1) = 0 \quad (2.4.31)$$

$$a_1\alpha(\alpha+1) = 0 \quad (2.4.32)$$

$\alpha = 0$ indis kökü için seri çözümü bulalım. Bu durumda (2.4.31) ve (2.4.32) numaralı denklem $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ sonucunu verir. Tekrarlama bağıntısı ise

$$a_{n+2} = a_n \frac{[(n)(n-1)+(2N_0+2)(n)-Z]}{(n+2)(n+1)} \quad (2.4.33)$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$

olarak bulunur. Genel çözüm

$$C_{D-2}(x) = a_0[1 - \frac{Z}{2}x^2 - \frac{(2+2(2N_0+2)-Z)}{3.4}(\frac{Z}{2})x^4 + \cdots \ldots.] + a_1[x + \frac{(2N_0+2)-Z}{2.3}x^3 + \cdots.] \quad (2.4.34)$$

şeklindedir. Bu serinin $x = \pm 1$ uç noktalarında da geçerli olacak şekilde normalize edildiğinde yakınsak olması beklenir. Bu durumda (2.4.34)'deki serinin uç noktalarda da yakınsak olup olmadığına bakalım. $x \neq \pm 1$ şeklindeki $(-1,1)$ açık aralığındaki serinin ilk genel terimi $u_k = a_{2k}x^{2k}$ olan seri için yakınsaklık durumunu oran testi (Arfken, 2012) ile hesaplayabiliriz.

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| x^2 = \left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right| x^2 = \left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| x^2$$

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}| x^2 < 1 \quad (2.4.35)$$

Bu sonuçlar, oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığındaki (2.4.34)-serisinin yakınsak biçimde davrandığını gösterir. Fakat $x = \pm 1$ durumları için oran testi sonuçsuz kalır. Serinin uç durum noktalarındaki yakınsak olup olmadığı Raabe testi (Arfken, 2012) ile hesaplayabiliriz. Raabe testini uygulayabilmek için

$u_n = a_{2n}x^{2n}$ve $u_{n+1} = a_{2n+2}x^{2n+2}$;

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} \ ; \qquad (2.4.36.a)$$

şeklinde olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = L \qquad (2.4.36.b)$$

limitini hesaplamak gerekir. Limit hesaplamaları yapıldıktan sonra $L > 1$ ise seri yakınsak; $L < 1$ için ise seri ıraksak olur. $L = 1$ için ise Raabe testi belirsizdir. O halde D-boyut için bulunan tekrarlama bağıntısı için bu Raabe testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \left\{n\left[\frac{4n-2N_0(2n)+Z}{4n^2-2n+4N_0n+4n-Z}\right]\right\}$$

$$= \frac{4n-4nN_0}{4n} = 1 - N_0 < 1 \qquad (2.4.37)$$

sonucunu buluruz. Ancak yukarıdaki (2.4.37) ifadesi her $j = 2,3,\dots,D-2$ için, her D boyutta ve her N_0 açısal momentum sayıları için Raabe yakınsaklık testinin, u_n serisinin ıraksak olduğunu gösteriyor. Iraksaklık durumunda ise açısal dalga fonksiyonlarını, uç durumlarını da kapsayacak şekilde normalize edemeyiz. Bu durumda sonlu bir çözüm elde edebilmek için seriyi bir yerde kesmek gerekir. Bu kesme işlemini $a_{n+2} = 0$ fakat $a_n \neq 0$ olacak şekilde yaparsak,

$$n(n-1) + (2N_0 + 2)n - \lambda_1 + N_0^2 + N_0 = 0 \qquad (2.4.38)$$

$$\lambda_1 = (n + N_0 + 1)(n + N_0) \qquad (2.4.39)$$

Burada $(n + N_0)$'ye N_1 dersek

$$\lambda_1 = N_1(N_1 + 1) \quad , \quad n = N_1 - N_0 \qquad (2.4.40)$$

şeklinde olur. $(n + N_0)$'nin tam sayı değerler aldığını da burada belirtmek gerekir. O halde N_1 kuantum sayıları da birer tamsayıdır. Dolayısıyla λ_1 ayırma sabiti için kuantum sayılarımız ve aralarındaki ilişki,

$$\lambda_1 = N_1(N_1 + 1) = (n + N_0 + 1)(n + N_0) \qquad (2.4.41)$$

$$N_0 = -N_1, -N_1 + 1, \dots, 0, \dots, N_1 - 1, N_1 \qquad (2.4.42)$$

$$N_1 = 0,1,2, \dots. \qquad (2.4.43)$$

Seri çözümünü bulduğumuz bu denklem aslında Asosiye Legendre denklemidir (Arfken, 2012). Bu denklemin sonlu çözümleri de Asosiye Legendre polinomlarıdır (Arfken, 2012). Ek-E 'den denklemin sonlu çözümlerinin;

$$\mathcal{X}_{D-2}(x) = (\sin\theta_{D-2})^{N_0} C_{D-2}(\cos\theta_{D-2}) = P_{N_1}^{N_0}(\cos\theta_{D-2}) = P_l^m(\cos\theta_{D-2})$$

(2.4.44)

şeklinde olduğu görülür. Özel olarak N_0 ve N_1 kuantum sayılarını $N_0 = m$ ve $N_1 = l$ şeklinde göstermek literatürde gelenek olmuştur. (2.3.5) ve (2.3.6) denklemlerinin çözümlerinin çarpımı bize küresel harmonikleri verecektir (Bayın, 2006). Normalize edilmiş küresel harmonikler ise

$$Y_{lm}(\theta_{D-2}, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta_{D-2}) \qquad (2.4.45)$$

şeklinde olurlar.

Şimdi de bu yaptıklarımızın bir benzerini (2.4.7) denklemi için de yapalım. Bu şekilde denklemlerdeki ayırma sabitleri arasındaki ilişkiyi bulabiliriz. (2.4.7) denklemini çözmek için $x = \cos\theta_{D-3}$, $x \in [-1,1]$ gibi bir bağımsız değişken tanımlayarak değişken dönüşümü yapalım. Artık yeni denklemimiz,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-3}}{dx^2} - 3x\frac{d\mathcal{X}_{D-3}}{dx} + [\lambda_2 - \frac{N_1(N_1+1)}{(1-x^2)}]\mathcal{X}_{D-3} = 0 \qquad (2.4.46)$$

dir. (2.4.46) denklemine $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{k+\alpha}$ şeklinde sıfır noktası etrafında bir seri çözümü denersek, üç terimli bir tekrarlama bağıntısını elde ederiz. 2 terimli bir tekrarlama bağıntısını elde etmek için denklemin tanım aralığının uç noktalarındaki davranışına bakmalıyız. $x = \pm 1$ noktasının yakını için $y = (1-x)$ ve $y = (1+x)$ şeklinde iki değişken tanımlarız. $y = (1-x)$ değişkeni için denklemimizi düzenleyip, $y = \ln p$ şeklinde yeni bir dönüşüm altında ve $y \to 0$ limitinde bu denklemi inceleriz. İlk durum için $y = (1-x)$'i (2.3.46)-denkleminde yerine yazarsak ve $y \to 0$ limitinde

$$(-y^2+2y)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-3}}{dy^2} + 3(1-y)\frac{d\mathcal{X}_{D-3}}{dy} + [\lambda_2 - \frac{N_0^2}{-y^2+2y}]\mathcal{X}_{D-3} = 0 \qquad (2.4.47)$$

denklemi elde edilir. Benzer şeklide $y = (1 + x)$ için de aynı işlemler yapıldığında (2.4.47) denklemi tekrar elde edilir. Bu durumda $y = (1 - x)$ ve $y = (1 + x)$ için her iki denklem de aşağıdaki aynı sonucu verir.

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \frac{N_1(N_1+1)}{4}\right] \mathcal{X}_{D-3}(\rho)_{y\to 0} = 0 \tag{2.4.48}$$

Bu denklem, ikinci mertebeden Euler denklemidir. Birinci durum için sonlu çözüm olarak $(1 - x)^{N_1/2}$ buluruz. Aynı işlemi $y = (1 + x)$ için de yaptığımızda, $(1 + x)^{N_1/2}$ sonucunu buluruz. Bulduğumuz bu sonuçları kullanarak $(1 + x)^{N_0/2}(1 - x)^{N_0/2} = (1 - x^2)^{N_0/2}$ çözümünü (2.3.46) denkleminde deneriz. Buradan

$$\mathcal{X}_{D-3}(x) = (\sin^2\theta_{D-3})^{\frac{N_1}{2}} C_{D-3}(\cos\theta_{D-3}) \tag{2.4.49}$$

olur. Sonuç olarak denklemimiz,

$$(1 - x^2)\frac{d^2C_{D-3}(x)}{dy^2} - (2N_1 + 3)x\frac{dC_{D-3}(x)}{dx} + [\lambda_2 - N_1(N_1 + 2)]C_{D-3}(x) = 0 \tag{2.4.50}$$

şeklini alır. Bu durumda $x = \cos\theta_{D-3}$, $x \in [-1,1]$ olmak üzere (2.4.50) denkleminin $x = \pm 1$ noktalarinda iki tane düzgün tekil noktası vardır.

$x \in [-1,1]$ aralığında ve x=0 noktası etrafında Frobenius yöntemini kullanarak $C_{D-3}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$ şeklinde bir seri çözümünü (2.4.50) denkleminde deneyelim. $\lambda_2 - N_1(N_1 + 2) = H$ olsun. Bu durumda

$$a_0\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha(\alpha + 1)x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}\,(n + \alpha + 2)(n + \alpha + 1) + [-(n + \alpha)(n + \alpha - 1) - (2N_1 + 3)(n + \alpha) + H]a_n\}x^{n+\alpha} = 0 \tag{2.4.51}$$

denklemi elde edilir. Kuvvet serilerin teklik özelliği gereği bu denklemin bütün x noktalarinda sağlanması, ancak $x'in$ bütün kuvvetlerinin katsayılarının ayni anda sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. O halde seri çözümdeki katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$a_{n+2} = a_n\frac{[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(2N_1+3)(n+\alpha)-H]}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)} \tag{2.4.52}$$

şeklindedir.

$$a_0\alpha(\alpha-1)=0 \tag{2.4.53}$$

$$a_0\alpha(\alpha+1)=0 \tag{2.4.54}$$

$\alpha=0$ indis kökü için seri çözümü bulursak, (2.4.53) ve (2.4.54) numaralı denklem $a_0\neq 0$ ve $a_1\neq 0$ sonucunu verir. Bu durumda tekrarlama bağıntısı ise

$$a_{n+2}=a_n\frac{[(n)(n-1)+(2N_1+3)(n)-H]}{(n+2)(n+1)} \tag{2.4.55}$$

$n=0,1,2,3,\ldots$

olarak bulunur. Genel çözüm,

$$C_{D-3}(x)=a_0[1-\frac{H}{2}x^2-\frac{(2+2(2N_1+3)-Z)}{3.4}(\frac{H}{2})x^4+\cdots\ldots.]+a_1[x+\frac{(2N_1+3)-H}{2.3}x^3+\cdots.] \tag{2.4.56}$$

şeklinde açık olarak ifade edilebilir. İlk olarak bu serinin yakınsak olup olmadığına bakalım. Oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığında serimiz yakınsaktır. Fakat oran testi $x=\pm 1$ noktalarında serilerin yakınsaklığı konusunda bir şey söylemez. Bunun için önceki kısımda yapıldığı gibi Raabe testini uygulamalıyız. Raabe testi bize tekrarlama katsayıları arasındaki ilişkinin ıraksak olduğunu söyler. $C_{D-3}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{n+\alpha}$ $\alpha=0$ için katsayılar artarak gelir. Katsayılar arasındaki ilişki sonsuza gittiği için bu seri bir yerde kesilmeli. Çünkü sonlu çözüm arıyoruz. Kesme işlemini $a_{n+2}=0$ ve $a\,n\neq 0$ olacak şekilde yaptığımızda, sonlu terimli bir kuvvet serisi elde etmiş olur. Buna göre,

$$n(n-1)+(2N_1+3)n-\lambda_2+N_1(N_1+2)=0 \tag{2.4.57}$$

$$\lambda_2=(n+N_1+2)(n+N_1) \tag{2.4.58}$$

Burada $(n+N_1)$'ye N_2 dersek

$$\lambda_2=N_2(N_2+2)\quad,\quad n=N_2-N_1 \tag{2.4.59}$$

olur. Burada $(n+N_1)$'nin tam sayı değerler aldığını belirtmek gerekir. O halde N_2 kuantum sayısı da birer tamsayıdır. Dolayısıyla λ_2 ayırma sabiti için 4 boyutta kuantum sayıları ve aralarındaki ilişki,

$$\lambda_2 = N_2(N_2+2) = (n+N_1+2)(n+N_1) \tag{2.4.60}$$

$$m = -N_1, -N_1+1, \dots, 0, \dots, N_1-1, N_1 \tag{2.4.61}$$

$$N_1 = 0,1,2, \dots, N_2 \tag{2.4.62}$$

$$N_2 = 0,1,2, \dots. \tag{2.4.63}$$

Bu denklemin çözümü bize Gegenbauer denklemini ve onun onlu çözümleri olan Gegenbauer polinomlarını verir. En genel halde Gegenbauer denklemi,

$$(1-x^2)\frac{d^2C_n^\lambda(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)\frac{dC_n^\lambda(x)}{dx} + n(n+2\lambda)C_n^\lambda(x) = 0 \tag{2.4.64}$$

şeklinde verilir. Bu denklemin çözümü ise

$$Y = N\sin^{N_1}\theta_{D-3}C_{N_2-N_1}^{N_1+1}(\cos\cos\theta_{D-3}) \tag{2.4.65}$$

Burada N, Gegenbauer polinomlarının normalizasyon şartından hesaplanan (Bell, 1968) normalizasyon sabitidir ve

$$N = \left[2^{2N_1+1}\left(\Gamma(N_1+1)\right)^2 \times \frac{(N_2-N_1)!(N_2+1)}{\pi\Gamma(N_2+N_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.66}$$

şeklindedir.

Şimdi de (2.4.8) denklemini çözelim. Bu denklemi de yine aynı yöntemle çözeriz. ilk olarak $x = \cos\theta_{D-4}$ dönüşümünü uygularız. Ardından denklemin uç noktalarındaki davranışına bakıp, sonlu çözüm ararız. Bu durumda (4.55) denklemi,

$$(1-x^2)\frac{d^2C_{D-4}(x)}{dy^2} - (2N_2+4)x\frac{dC_{D-4}(x)}{dx} + [\lambda_3 - N_2(N_2+3)]C_{D-4}(x) = 0 \tag{2.4.67}$$

halini alır. (2.4.67) denklemine $[-1,1]$ aralığında ve sıfır noktasi etrafında $C_{D-4}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$ gibi bir seri çözüm uyguladığımızda

$$\lambda_3 - N_2(N_2+3) = A \tag{2.4.68}$$

olmak üzere tekrarlama katsayıları arasındaki bağıntıyı,

$$a_{n+2} = a_n \frac{[(n)(n-1)+(2N_2+4)(n)-A]}{(n+2)(n+1)} \ , \ n = 0,1,2,3 \ldots \tag{2.4.69}$$

olarak buluruz. Bu serinin yakınsaklığı ilk önce oran testi ve ardından Raabe testi ile kontrol edilir. Raabe testi, tekrarlama katsayıları arasındaki ilişkinin ıraksak olduğunu söyler. Katsayılar arasındaki ilişki sonsuza gittiği için bu seriyi $a_{n+2} = 0$ ve $a \neq 0$ olacak şekilde keseriz ve sonlu terimli bir polinom elde ederiz.

$$n(n-1) + (2N_2+4)n - \lambda_3 + N_2(N_2+3) = 0$$

$$\lambda_3 = (N_2 + n + 3)(N_2 + n) \tag{2.4.70}$$

Burada $(N_2 + n)$'ye N_3 dersek

$$\lambda_3 = N_3(N_3 + 3) \quad , \quad n = N_3 - N_2 \tag{2.4.70}$$

olur. Yine $(N_2 + n)$'nin tam sayı değerler aldığını da burada belirtmek gerekir. O halde N_3 kuantum sayıları da birer tamsayıdır. Dolayısıyla λ_3 ayırma sabiti için 5 boyut için kuantum sayılarımız ve aralarındaki ilişki,

$$\lambda_2 = N_3(N_2+3) = (N_2 + n + 3)(N_2 + n) \tag{2.4.71}$$

$$m = -N_1, -N_1 + 1, \ldots 0, \ldots, N_1 - 1, N_1 \tag{2.4.72}$$

$$N_1 = 0,1,2, \ldots \ldots \ldots \ldots, N_2 \tag{2.4.73}$$

$$N_2 = 0,1,2, \ldots \ldots \ldots \ldots, N_3 \tag{2.4.74}$$

$$N_3 = 0,1,2, \ldots \ldots \tag{2.4.75}$$

Sonuç olarak 5 boyut için dalga fonksiyonumuz

$$Y = N[\sin^{N_2}\theta_{D-4} C_{N_3-N_2}^{N_2+3/2}(\cos\theta_{D-4}) \tag{2.4.76}$$

dir. Yine buradaki N, normalizasyon sabitidir ve

$$N = \left[2^{2N_2+2}\left(\Gamma\left(N_2+\frac{3}{2}\right)\right)^2 \frac{(N_3-N_2)!\left(N_3+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+3)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.77)$$

dir.

Şimdiye kadar çözdüğümüz bu açılara bağlı 4 denklemden λ_j ayırma sabitlerinin nasıl biçimlendiğini konusunda fikir yürütebiliriz. Bu durumu $j = 0,1,2\ ve\ 3$ denklemleri için bulduğumuz seri çözümlerinin katsayılar arasındaki ilişkilerinden dolayı sonsuza gittiğini göstermiştik. Bu serileri $a_{n+2} = 0$ ve $a\ n \neq 0$ olacak şekilde kestiğimiz aşağıdaki kesme bağıntılardan

$$n(n-1) + (2N_0+2)n - \lambda_1 + N_0(N_0+1) = 0 \quad (2.3.78)$$

$$n'(n'-1) + (2N_1+3)n - \lambda_2 + N_1(N_1+2) = 0 \quad (2.4.79)$$

$$n''(n''-1) + (2N_2+4)n - \lambda_3 + N_2(N_2+3) = 0 \quad (2.4.80)$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

anlayabiliriz. Buradaki n, n' ve n'' ile gösterilen sayılar bütün pozitif tamsayı değerlerini almaktadır ve aslında birbirlerine eşdeğerdirler. (2.4.11) denklemini tekrar göz önüne alalım. Bu denklemin $j = 0,12\ ve\ 3$ için olan çözümlerinden görülüyor ki λ_j ayırma sabitleri belli bir N_j sayısı için iteratif biçimde

$$\eta(\eta-1) + \left(2N_{j-1}+j+1\right)\eta - \lambda_j + N_{j-1}(N_{j-1}+j) = 0 \quad (2.4.81)$$

$$\lambda_j = \left(\eta + N_{j-1} + j\right)\left(\eta + N_{j-1}\right) \quad (2.4.82)$$

şeklinde olmaktadır. $\eta = 0,12,\ldots$ şeklinde pozitif tamsayılar olmak üzere $\eta + N_{j-1}$'ye $j = 1,2\ ve\ 3$ için çözülen denklemlerde yaptığımız gibi N_j şeklinde bir sayı atarsak λ_j 'leri

$$\lambda_j = N_j\left(N_j + j\right) \quad (2.4.83)$$

şeklinde gösterebiliriz. O halde bu denklemlerin iteratif çözümlerinde $\lambda_j = N_j\left(N_j + j\right)$ ayırma sabitlerine yerine koyup düzenlersek özdeğer denklemlerini, $j = 2,3,\ldots,D-2$ olmak üzere aşağıdaki biçimde genel olarak yazabiliriz.

$$\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}}\frac{d}{d\theta_{D-j-1}}\left(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{d\mathcal{X}_{D-j-1}}{d\theta_{D-j-1}}\right)-\frac{N_{j-1}\left(N_{j-1}+j-1\right)\mathcal{X}_{D-j-1}}{\sin^2\theta_{D-j-1}}$$
$$=-N_j\left(N_j+j\right)\mathcal{X}_{D-j-1}$$

(2.4.84)

Yukarıdaki denklemin herhangi bir θ_{D-j-1} açısı için çözümüne bakalım. Bu denklemde $x=\cos\theta_{D-j-1}$ şeklinde değişken dönüşümü yaparak,

$$(1-x^2)\frac{d^2\mathcal{X}_{D-j-1}}{dx^2}-(j+1)x\frac{d\mathcal{X}_{D-j-1}}{dx}+[N_j(N_j+j)-\frac{N_{j-1}(N_{j-1}+j-1)}{(1-x^2)}]\mathcal{X}_{D-j-1}=0$$

(2.4.85)

denklemi elde edilir. Bu denklem, $x=\pm1$ noktalarında iki tane düzgün tekil nokta barındırıyor. Bu durumda tanım aralığının uç noktalarındaki asimptotik davranışı için önce $y=(1-x)$ ve sonra da $y=(1+x)$ şeklinde iki değişken tanımlayalım. İlk durum için $y=(1-x)$'i (2.4.85) denkleminde yerine yazarsak ve $y\to0$ limitinde denklem

$$2y^2\frac{d^2C_{D-j-1}(y)}{dy^2}+(j+1)y\frac{dC_{D-j-1}(y)}{dy}-\frac{N_{j-1}(N_{j-1}+j-1)}{2}C_{D-j-1}(y)=0 \qquad (2.4.86)$$

şeklinde olur. Yine bu denkleme $p=\ln y$ şeklinde dönüşüm yaparsak

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{d\rho^2}+\frac{(j-1)}{2}\frac{d}{d\rho}-\frac{N_{j-1}(N_{j-1}+j-1))}{4}\right]C_{D-j-1}(\rho)_{y\to0}=0 \qquad (2.4.87)$$

diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin y değişkeni cinsinden çözümleri;

$$C_{D-j-1}(\rho)_{y\to0}=Ay^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}+B\frac{1}{y^{\frac{N_{(j-1)}+j-1}{2}}} \qquad (2.4.88)$$

Bu ifadede sonlu çözüm elde etmek için B=0 alınır Bu durumda $y\to0$ için sonlu çözümü $y^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}$ yani $(1-x)^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}$ olarak buluruz.

Benzer şekilde $y=(1-x)$ değişkeni için yapılan hesaplamaları de hesapları $y=(1+x)$ için de yaptığımızda (2.4.87) denkleminin aynısını buluruz. Bu durumda

$$C_{D-j-1}(\rho)_{y\to 0} = Dy^{\frac{N_{(j-1)}}{2}} + F\frac{1}{y^{\frac{N_{(j-1)}+j-1}{2}}} \tag{2.4.89}$$

şeklindeki benzer sonuç bulunur. Yine bu ifadede de sonlu çözüm elde etmek için F=0 alınır. Bu durumda $y \to 0$ için sonlu çözümü; $y^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}$ yani $(1+x)^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}$ olarak bulunur. Bulduğumuz bu asimptotik çarpanlarını kullanarak uç noktalardaki çözümümüz,

$$\mathcal{X}_{D-j-1} = (1+x)^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}(1-x)^{\frac{N_{(j-1)}}{2}} = (1-x^2)^{\frac{N_{(j-1)}}{2}}C_{D-j-1}(\mathrm{x}) \tag{2.4.90}$$

şeklinde olmalıdır. Buradaki $C(\mathrm{x})$ çarpanı (2.4.77)-denkleminin ara bölgesi için çözümüdür. Bu çözümü, (2.4.87) denkleminde yerine koyarsak

$$(1-x^2)\frac{d^2C_{D-j-1}(x)}{dx^2} - \left(2N_{j-1} + (j+1)\right)x\frac{dC_{D-j-1}(x)}{dx} + \left[N_j\left(N_j+j\right) - N_{j-1}\left(N_{j-1}+j\right)\right]C_{D-j-1}(x) = 0 \tag{2.4.91}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem Gegenbauer diferansiyel denklemidir ve çözümü de Gegenbauer polinomlarıdır (Bayın, 2006). D-boyutlu küresel simetrik potansiyelli dalga denklemlerinde veya D-boyutta bir hiper-kürenin yüzey salınımlarında küresel harmoniklerin doğal uzantısı olan Gegenbauer polinomları kullanılır. Bu denklemin $x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil noktası vardır. (2.4.91) denklemini Frobenius yöntemini kullanarak çözelim. O halde bu denklemi $[-1,1]$ aralığı içerisinde ve $x = 0$ noktası civarında $C_{D-j-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$ şeklinde seri çözümünü, (2.4.91) no'lu Gegenbauer denkleminde yerine yazarsak ve

$K = N_j(N_j+j) - N_{j-1}\left(N_{j-1}+j\right)$ şeklindeki kısaltmayı yaparsak

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1a(\alpha+1)x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}(n+\alpha+2)(n+\alpha+1) + [-(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (2N_{j-1}+j+1)(n+\alpha) + K]a_n\}x^{n+\alpha} = 0 \tag{2.4.92}$$

seri katsayıları için olan denklemi buluruz. Bu denklemde x'in en küçük kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek indis denklemi bulunur. Bu denklemler,

$$a_0\alpha(\alpha-1)=0 \tag{2.4.93}$$

$$a_1\alpha(\alpha+1)=0 \tag{2.4.94}$$

$\alpha=0$ kökü için $a_0\neq 0$ ve $a_1\neq 0$ 'dır. Buna göre $\alpha=0$ tekrarlama bağıntısı,

$$a_{n+2}=a_n\frac{(n)(n-1)+(2N_{j-1}+j+1)(n)-K}{(n+2)(n+1)} \qquad n=0,1,2,3\ldots. \tag{2.4.95}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu tekrarlama bağıntısını kullanarak $C_{D-j-1}(x)$ ara bölge fonksiyonu,

$$C_{D-j-1}(x)=a_0[1-\frac{K}{2}x^2-(\frac{2+2(2N_{j-1}+j+1)-K}{3.4})(\frac{K}{2})x^4+\cdots\ldots.]+a_1[x+\frac{(2N_{j-1}+j+1)-K}{2.3}x^3+\cdots.] \tag{2.4.96}$$

şeklinde iki bağımsız çözümün toplamı olarak bulunur. Ancak bu serinin $x=\pm 1$ uç noktalarında da geçerli olacak şekilde normalize edildiğinde yakınsak olması beklenir. Bu durumda (2.4.96)'daki serinin uç noktalarında da yakınsak olup olmadığını inceleyelim. $x\neq\pm 1$ olmak üzere $x\in(-1,1)$ açık aralığındaki serinin ilk genel terimi $u_k=a_{2k}x^{2k}$ olan seri için yakınsaklık durumunu oran testi ile hesaplayabiliriz. (Arfken, 2012).

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|x^2=\left|\frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right|x^2=\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right|x^2$$

$$\lim_{k\to\infty}|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}|x^2=1 \tag{2.4.97}$$

Bu sonuçlar, oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığındaki (2.4.96) serisinin yakınsak biçimde davrandığını gösterir. Fakat $x=\pm 1$ durumları için oran testi sonuçsuz kalır. Serinin uç durum noktalarındaki yakınsak olup olmadığı Raabe testi (Arfken, 2012) ile hesaplayabiliriz. Raabe testini uygulayabilmek için,

$u_n = a_{2n}x^n \quad$ ve $\quad u_{n+1} = a_{2n+2}x^{2n+2}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} \tag{2.4.98}$$

şeklinde olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = L \tag{2.4.99}$$

limitini hesaplamak gerekir. Limit hesaplamaları yapıldıktan sonra $L > 1$ ise seri yakınsak; $L < 1$ için ise seri ıraksak olur. $L = 1$ için ise Raabe testi belirsizdir. O halde D-boyut için bulunan tekrarlama bağıntısı için bu Raabe testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\frac{(6-2j)n-2N_{j-1}(2n)+N_j(N_j+j)-N_{j-1}(N_{j-1}+j)}{4n^2-2n+4N_{j-1}n+(j+1)2n-N_j(N_j+j)+N_{j-1}(N_{j-1}+j)}\right]\right\}$$

$$= \frac{(6-2j)n-4nN_{j-1}}{4n} = \frac{(6-2j)}{4} - N_{j-1} \tag{2.4.100}$$

şeklindeki sonucu buluruz. Ancak yukarıdaki (2.4.100) ifadesi her $j = 2,3,\dots,D-2$ için, her D boyutta için ve her N_{j-1} açısal momentum sayıları için Raabe yakınsaklık testi, u_n serisinin ıraksak olduğunu gösteriyor. Buradan

$$\frac{(6-2j)}{4} - N_{j-1} < 1 \tag{2.4.101}$$

şeklinde olmaktadır. Iraksaklık durumunda ise açısal dalga fonksiyonlarını, uç durumlarını da kapsayacak şekilde normalize edemeyiz. Bu durumda sonlu bir çözüm elde edebilmek için seriyi bir yerde kesmek gerekir. Bu kesme işlemini $a_{n+2} = 0$ fakat $a_n \neq 0$ olacak şekilde yapariz. O halde,

$$(n)(n-1) + (2N_{j-1} + j + 1)(n) - N_j(N_j + j) + N_{j-1}(N_{j-1} + j) = 0 \tag{2.4.102}$$

veya

$$n = N_j - N_{j-1} \tag{2.4.103}$$

olarak buluruz. Artık D-boyutta kuantum sayılarını ve aralarındaki ilişkileri,

$$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots l-1, l$$

$l = 0,1,2, \dots, N_2$

$N_2 = 0,1,2, \dots, N_3$

$N_3 = 0,1,2, \dots, N_4$

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

$N_{j-1} = 0,1,2 \dots, N_j$

$N_{D-3} = 0,1,2 \dots, N_{D-2}$

$k = N_{D-2} = 0,1,2, \dots \dots$ (2.4.104)

şeklinde yazabiliriz. Şimdi de her bir $j = 2,3, \dots, D-2$ değeri için (2.4.91)'deki Gegenbauer denkleminin hangi Gegenbauer polinomlarına karşılık geldiğini bulalım. [Ek-C.1]'deki Gegenbauer denkleminin literatürdeki genel biçimini kullanarak her bir $j = 2,3, \dots, D-2$ için $\lambda = N_{j-1} + \frac{j}{2}$ ve $n = N_j - N_{j-1}$ olduğundan (2.4.91) denkleminin çözümü olan Gegenbauer polinomlarını

$$C_{D-j-1}(x = \cos\theta_{D-j-1}) = C_{N_j - N_{j-1}}^{N_{j-1}+\frac{j}{2}}(\cos\theta_{D-j-1}) \tag{2.4.105}$$

şeklinde buluruz. Bu durumda açısal dalga fonksiyonun Θ_j bileşenleri,

$$\mathcal{X}_j = \left(\sin^{N_{j-1}}\theta_{D-j-1}\right) C_{N_j - N_{j-1}}^{N_{j-1}+\frac{j}{2}}(\cos\theta_{D-j-1}) \tag{2.4.106}$$

şeklindedir. Burada $D - j - 1 = \mu$ indis dönüşümü yaparsak; $\mu \in (1, \dots, D-3)$ olur. Bu durumda $D = 4,5,6, \dots$ olmak üzere μ değişkeni cinsinden açısal dalga fonksiyonun tam çözümü

$$\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) = N \prod_{j=1}^{D-1} \mathcal{X}_j(\theta_j)$$

$$= \mathrm{N} Y_{\ell m}(\theta_{D-2}, \varphi) \prod_{\mu=1}^{D-3} \sin^{N_{D-2-\mu}}\theta_\mu \, C_{N_{D-\mu-1} - N_{D-2-\mu}}^{N_{D-2-\mu}+(\frac{D-\mu-1}{2})}(\cos\theta_\mu) \tag{2.4.107}$$

dir. Burada $Y_{\ell m}(\theta_{D-2}, \varphi) = \mathcal{X}_{D-2}(\theta_{D-2})\Phi(\varphi)$ ile gösterilen ifade, 3 boyuttan iyi bildiğimiz küresel harmoniklerdir. N sayısı ise normalizasyon sabitidir. Bu normalizasyon sabitini,

$$\int\left[Y(\theta_\mu;\varphi)\right]^2 \sin^{D-2}\theta_1 \sin^{D-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{D-3} \sin\theta_{D-2} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{D-2} d\varphi = 1$$

(2.4.108)

şeklindeki normalizasyon koşulundan bulabiliriz. Buradan D-boyuttaki açısal dalga fonksiyonlarının normalizasyon integralini

$$(N)^2 \times \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\ell m}(\theta_{D-2},\varphi) d\varphi d\theta_{D-2}\right) \times$$
$$\prod_{\mu=1}^{D-3}\left[\int_0^\pi (\sin^{D-\mu-1}\theta_\mu)(\sin^{2N_{D-2-\mu}}\theta_\mu)\left(C_{N_{D-1-\mu}-N_{D-2-\mu}}^{N_{D-2-\mu}+\left(\frac{D-\mu-1}{2}\right)}(cos\theta_\mu)\right)^2 d\theta_\mu\right] = 1$$

(2.4.109)

olarak yazabiliriz. Bu ifadede ilk integral,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\ell m}(\theta_{D-2},\varphi) \sin\theta_{D-2}\, d\varphi d\theta_{D-2} = 1 \qquad (2.4.110)$$

şeklinde normalize edilmiştir. [Ek-C.7]'deki Gegenbauer polinomlarının normalizasyon eşitliklerini kullanarak normalizasyon sabitini,

$$N = \left[\prod_{\mu=1}^{D-3}\left\{2^{2N_{D-\mu-2}+(D-\mu-3)}\left(\Gamma\left(N_{D-\mu-2}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)\right)^2 \times \frac{(N_{D-\mu-1}-N_{D-\mu-2})!\left(N_{D-\mu-1}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_{D-\mu-1}+N_{D-\mu-2}+D-\mu-2)}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(2.4.111)

olarak buluruz. Bu sonuçla normalize edilmiş açısal dalga fonksiyonunu,

$$\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) = \mathcal{Y}(\theta_1, \dots, \theta_{D-2}, \theta_{D-1}(=\varphi))$$

$$= \left[\prod_{\mu=1}^{D-3}\left\{2^{2N_{D-\mu-2}+(D-\mu-3)}\left(\Gamma\left(N_{D-\mu-2}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{(N_{D-\mu-1}-N_{D-\mu-2})!\left(N_{D-\mu-1}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_{D-\mu-1}+N_{D-\mu-2}+D-\mu-2)}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times Y_{\ell m}(\theta_{D-2},\varphi)\prod_{\mu=1}^{D-3}\sin^{N_{D-2-\mu}}\theta_\mu C_{N_{D-\mu}-N_{D-2-\mu}}^{N_{D-2-\mu}+(\frac{D-\mu-1}{2})}(\cos\theta_\mu)$$

(2.4.112)

şeklinde yazabiliriz. Artık elde ettiğimiz bu sonuçları D-boyuttaki yörüngesel açısal momentum ifadesinde kullanabiliriz. Sonuç olarak $\hat{L}^2(D)$ yörüngesel açısal momentum öz değer denklemleri artık

$$\hat{L}^2(D)\mathcal{Y} = N_{D-2}(N_{D-2}+D-2)\mathcal{Y}, \tag{2.4.113}$$

$$\hat{L}^2(D-1)\mathcal{Y} = N_{D-3}(N_{D-3}+D-3)\mathcal{Y}, \tag{2.4.114}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{L}^2(j)\mathcal{Y} = N_{j-2}(N_{j-2}+j-2)\mathcal{Y} \tag{2.4.115}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{L}^2(3)\mathcal{Y} = N_1(N_1+1)\Psi = l(l+1)\mathcal{Y} \tag{2.4.116}$$

$$\hat{L}^2(2)\mathcal{Y} = N_0^2\mathcal{Y} \tag{2.4.117}$$

şeklinde yazılabilirler. (2.4.116) ve (2.4.117) öz değer denklemleri 3 boyuttaki iyi bildiğimiz küresel harmonik öz değer denklemlerini verir. Bu ifadelerde ilk iki açısal momentum operatörü, 3 boyuttaki yörüngesel açısal momentum bilgilerimizle aynıdır. Birincisi $\hat{L}_2^2 = \hat{L}_{12}^2 = \hat{L}_z^2$, ikincisi ise $\hat{L}_3^2 = \hat{L}^2(\theta,\varphi)$ açısal momentum operatörünün karesidir. Aynı şekilde $\theta_1 = \phi$ ve $\theta_2 = \theta$ şeklinde birebir karşılık gelme vardır.

2.5 Klein-Gordon Radyal Dalga Denkleminin Coulomb Potansiyeline Bağlı Çözümü

Bu alt bölümde Coulomb potansiyelinin radyal çözümü yapılarak olarak parçacığın enerji öz fonksiyonlarının ve enerji öz değerlerinin D boyutuna bağlı olarak nasıl değiştiği incelenecektir.

Açısal kısma ait (2.4.1) denkleminin çözümünden elde edilen $N(k,D) = k(k+D-2)$ katsayısını, (2.2.23) denkleminde yerine koyarsak hidrojen benzeri atom için Coulomb potansiyeli altındaki parçacığın radyal denklemini,

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{D-1}{r}\frac{dR(r)}{dr} - \frac{k(k+D-2)}{r^2}R(r) - \frac{M^2c^4 - \left(E + k_e\frac{Ze^2}{r}\right)^2}{\hbar^2c^2}R(r) = 0 \tag{2.5.1}$$

şeklinde buluruz. Bu denklemin çözümü için radyal denklemin fiziksel olarak boyutuz hale getirilmesi gerekir (Davydov, 1965). Bunun için $\rho = \beta r$ $\left(\beta \sim \frac{1}{metre}\ boyutunda\right)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dr} \to \beta\frac{d}{d\rho}, \qquad \frac{d^2}{dr^2} \to \beta^2\frac{d^2}{d\rho^2}, \tag{2.5.2}$$

$$R(r) \to R\left(\frac{\rho}{\beta}\right) \to R(\rho) \tag{2.5.3}$$

dönüşümleri (2.4.3) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{(D-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{-k(k+D-2)+\xi^2}{\rho^2}\right)R(\rho) + \frac{1}{\beta^2}\frac{2E\xi}{\hbar c}\frac{\rho}{\beta}R(\rho) + \frac{1}{\hbar^2c^2}\frac{1}{\beta^2}(E^2 - m^2c^4)R(\rho) = 0 \tag{2.5.4}$$

denklemi elde edilir. Burada β, radyal denklemlerimizi boyutsuz hale getirmek için kullandığımız bir sabittir. α ince yapı sabiti olmak üzere bağlı durumlar $Mc^2 < E$ olacak şekilde yeni sabitler;

$$\beta^2 = \frac{4(m^2c^4 - E^2)}{\hbar^2c^2} \tag{2.5.5}$$

$$\xi = Z\alpha \tag{2.5.6}$$

$$\alpha = k_e \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137} \tag{2.5.7}$$

$$\lambda = \frac{2Z\alpha E}{\hbar c \beta} = \frac{E\xi}{\sqrt{m^2c^4 - E^2}} \tag{2.5.8}$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan (2.5.4) denklemi

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{(D-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{-k(k+D-2)+\xi^2}{\rho^2}\right)R(\rho) + \frac{\lambda}{\rho}R(\rho) - \frac{1}{4}R(\rho) = 0 \tag{2.5.9}$$

haline gelir. Bu denklemde

$$-k(k + D - 2) + \xi^2 = -\sigma(\sigma + D - 2) \tag{2.5.10}$$

dönüşümü yapılırsa (3.4.9) denklemi,

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{(D-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{\sigma(\sigma+D-2)}{\rho^2}R(\rho) + \frac{\lambda}{\rho}R(\rho) - \frac{1}{4}R(\rho) = 0 \tag{2.5.11}$$

halini alır. Bunu yapmamızdaki amaç, göreli olmayan D boyuttaki Schrödinger denklemindekine benzer çözüm üretmektir (Liboff, 1980). O halde (2.5.10) ifadesini σ 'ye göre çözersek iki tane birbirinden farklı kök buluruz.

$$\sigma_{\pm} = -\frac{D}{2} + 1 \pm \sqrt{(k - 1 + \frac{D}{2})^2 - \xi^2} \tag{2.5.12}$$

Ancak ileride bu denklemi çözerken sadece σ 'nin pozitif değerleri geçerli olacağı, yani

$$\sigma_{+} = -\frac{D}{2} + 1 + \sqrt{(k - 1 + \frac{D}{2})^2 - \xi^2} \tag{2.5.13}$$

olduğu görülecektir. Bundan sonra bölüm boyunca yapılacak işlemlerde σ_+ yerine artık σ kullanılacaktır. (2.5.13)'de verilen σ ifadesini, fiziksel olarak anlamlı ve bağlı enerji durumlarını veren çözümler vermesi için kök içindeki ifadenin negatif olmaması gerekir. Negatif kök durumu ise denklemlerin göreli olarak ele alınmasından kaynaklanmaktadır (Davydov, 1965). Bu durum kapalı olmayan klasik yörüngelere eşdeğerdir (Davydov, 1965). Dolayısıyla

$$\left|k-1+\frac{D}{2}\right| \geq |\xi| \tag{2.5.14}$$

olmak zorundadır. Ayrıca σ_+ ifadesinin de pozitif olması gerekir. Yani

$$\sigma_+ = -\frac{D}{2}+1+\sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2-\xi^2} > 0 \tag{2.5.15}$$

Bu açıklamalardan sonra bu denklemi çözmek için ilk önce R(ρ) fonksiyonunu sonlu tutacak asimptotik limitlerini bulmalıyız. Çünkü radyal dalga fonksiyonu aynı zamanda bir olasılık fonksiyonu olduğundan bütün uzay üzerinden alınan integrali sonlu olmalıdır. Asimptotik limitler: Denklem-(2.5.11), bir $\rho \to \infty$ iken bir de $\rho \to 0$ iken ele alınarak ara değişken ρ'nun ($\rho = \beta r$ olduğuna göre aynı zamanda r'nin) bu iki bölgesi için temsilci çözüm fonksiyon çarpanları bulunur. Asimptotik denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2\mathrm{R}(\rho)}{d\rho^2}-\frac{1}{4}\mathrm{R}(\rho)=0\,, \quad \rho \to \infty \tag{2.5.16}$$

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{(D-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}-\frac{\sigma(\sigma+D-2)}{\rho^2}R(\rho)=0\,, \quad \rho \to 0 \tag{2.5.17}$$

Birinci denklemin $e^{-\rho/2}$ ve $e^{+\rho/2}$ şeklinde iki tane bağımsız çözümü vardır. $e^{+\rho/2}$ fonksiyonu $\rho \to \infty$ iken sonsuz olur. Sonlu çözüm elde etmek istediğimizden dolayı $e^{-\rho/2}$ fonksiyonu ele alınmalıdır. Bu fonksiyon $\rho \to \infty$ iken sıfır olur. Bu da radyal dalga fonksiyonumuzu $\rho \to \infty$ iken sonlu tutar.

2.nci denklem ise bir Euler denklemidir. Yarıçapın çok küçük olduğu limit bölgeler için çözümleri ρ^w şeklindedir. Böyle bir çözümü (2.5. 17) denkleminde yerine konulup gerekli işlemler yapılırsa ρ^w fonksiyonlarını bulabiliriz. Buradan w için ikinci dereceden cebirsel bir denklem buluruz. Bu denklemi çözdüğümüzde

$$w_1 = \frac{-(D-2)+\sqrt{[(D-2)^2+4\sigma(\sigma+D-2)]}}{2} = \sigma \tag{2.5.18}$$

$$w_2 = \frac{-(D-2)-\sqrt{[(D-2)^2+4\sigma(\sigma+D-2)]}}{2} = -D+2-\sigma \tag{2.5.19}$$

elde ederiz. İkinci çözüm için $R(\rho) \propto \rho^{-D+2-\sigma}$ şeklinde olmaktadır. Fakat D>4 için ve s kuantum sayılarının pozitif olduğunu da göz önüne alırsak $R(\rho) \propto \rho^{-D+2-\sigma}$ ifadesi

$\rho \to 0$ için sonsuz olacaktır. Bu da fiziksel olarak istediğimiz çözüm değildir. O halde $\rho \to 0$ için asimptotik çarpan $R(\rho) \propto \rho^{\sigma}$ şeklinde olmalıdır.

Yarıçapın çok büyük ya da çok küçük olduğu limit bölgeler için bulunan ρ^{σ} ve $e^{-\rho/2}$ şeklindeki ifadeler temsilci çarpanlardır. $R(\rho)$ fonksiyonu bu iki temsilci ifadeyi çarpan olarak içermelidir. Bunların dışında da ara bölgeyi temsil etmek üzere bir ara çarpan fonksiyon $L(\rho)$'nin göz önüne alınması gerekir. Bu durumda $R(\rho)$ fonksiyonu, $0 \leq r \leq \infty$ aralığında ρ nun her değeri için

$$\mathrm{R}(\rho) = \rho^{\sigma} e^{-\rho/2} L(\rho) \tag{2.5.20}$$

şeklinde olmalıdır. Burada $L(\rho)$, öyle bir fonksiyon olmalı ki $\rho \to \infty$ ve $\rho \to 0$ limitlerinde $L(\rho)$, $R(\rho)$ gerçek fonksiyonunu sonlu tutsun. Şimdi bu $L(\rho)$, ara bölge fonksiyon çarpanı için bir ifade belirleyelim. (2.5.20)'de verilen $\mathrm{R}(\rho) = \rho^{\sigma} e^{-\rho/2} L(\rho)$ ifadesini (2.5.11) nolu radyal denklemde yerine koyarsak

$$\rho \frac{d^2 L(\rho)}{d\rho^2} + (2\sigma + D - 1 - \rho) \frac{dL(\rho)}{d\rho} + \left(\lambda - \sigma - \frac{D-1}{2}\right) L(\rho) = 0 \tag{2.5.21}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem literatürde Asosiye Laguerre denklemi olarak bilinir (Bayın, 2006). Bu denklemi, Frobenius yöntemini (Bell, 1968) kullanarak

$$L(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+\alpha} \tag{2.5.22}$$

şeklindeki bir seriyle çözebiliriz. Bu seriyi denklemde yerine koyarsak,

$$\alpha(\alpha + 2\sigma + D - 2) a_0 \rho^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ [(n + 1 + \alpha)(n + \alpha + 2\sigma + D - 1)] a_{n+1} + \left[\lambda - \sigma - \frac{D-1}{2} - n - \alpha\right] a_n \Big\} \rho^{n+\alpha} = 0 \tag{2.5.23}$$

ifadesi elde edilir. Denklemde x'in en küçük kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek

$$\alpha(\alpha + 2\sigma + D - 2) a_0 = 0 \tag{2.5.24}$$

indis denklemini elde ederiz. Bu durumda, $\alpha = 0$ veya $\alpha = -2\sigma - D + 2$ şeklindedir. Ancak $\alpha \geq 0$ olmalı ki çözüm sıfır noktasında ve civarında analitik olsun. Bu yüzden $\alpha = 0$ olmalıdır. Buna göre tekrarlama bağıntısı,

$$[(n+1)(n+2\sigma+D-1)]a_{n+1} + \left[\lambda - \sigma - \frac{D-1}{2} - n\right] a_n = 0 \qquad (2.5.25)$$

şeklinde olmaktadır. Elde ettiğimiz bu serilerin yakınsak olup olmadığını oran testiyle araştıralım. $n \geq 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\lambda+\sigma+\frac{D-1}{2}+n\right)}{(n+1)(n+2\sigma+D-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(-\frac{\lambda}{n}+\frac{\sigma}{n}+\frac{D-1}{2n}+1\right)}{n(n+1)\left(1+\frac{2\sigma}{n}+\frac{D}{n}-\frac{1}{n}\right)} \qquad (2.5.26)$$

şeklinde olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{n+1}$ gibi davranır. Seri bir yerde sona ermezse, büyük n değeri için, $a_{n+1} \propto \frac{1}{k} a_n$ veya $a_n \propto \frac{1}{n!}$ olup, katsayılar arasındaki davranış ıraksak yapıdadır. Bu durumda $L(\rho) \propto e^{+\rho}$ büyümesi ortaya çıkar ki bu $u(\rho) = L(\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}$ için kabul edilemez (Bell, 1968). Bu durumda seriyi bir yerde kesilmeli yani $a_{n'} \neq 0$ olacak fakat $a_{n'+1} = 0$ olacak şekilde bir kesme işlemi yapılmalıdır. Bu durumda $n' = 0,1,2,3, \ldots$ için

$$\lambda - \sigma - \frac{D-1}{2} - n' = 0$$

olmalıdır. Buradan atom fiziğinde gelenek olduğu üzere $n = n' + k + 1$ şeklinde baş kuantum sayısı tanımlanabilir ve k yörüngesel açısal momentum kuantum sayısıyla

$$k = 0,1,2, \ldots, n-1 \qquad (2.5.27)$$

$$n = 1,2,3, \ldots..$$

$$\lambda = n - k - 1/2 + \sqrt{(k - 1 + \tfrac{D}{2})^2 - (Z\alpha)^2} \qquad (2.5.28)$$

şeklinde ilişkilidir.

Bütün bu işlemlerin sonucunda Asosiye Laguerre denkleminin sonlu çözümlerinin birer polinom olduğu görülebilir. Literatürde bu polinomlara Asosiye

Laguerre polinomları denilir (Bayın, 2006). (2.5.21) nolu denklem ile Ek-D.1'de verilen Asosiye Laguerre denklemi ile karşılaştırdığımızda (2.5.21) nolu denklemin çözümünün

$$L(\rho) = \mathrm{L}_{\mathrm{n-k-1}}^{2\sigma+D-2}(\rho) \tag{2.5.29}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu çözüm radyal denklemin $r \in (0,\infty)$ aralığındaki ara bölge çözümüdür. Bu durumda radyal dalga fonksiyonunu,

$$R(\rho) = N_k \rho^{\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}} \mathrm{L}_{\mathrm{n-k-1}}^{2\sigma+D-2}(\rho) \tag{2.5.30}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada N_k normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabitini, $R_k(\rho)$ dalga foknisyonunu yerine koyarsak ve $\rho = \beta r, \quad d\rho = \beta dr$ şeklindeki dönüşümleri yaparsak

$$\int_0^{\infty} R\,(\rho)^2 r^{D-1} dr = N_k^2 \frac{1}{\beta^{\mathrm{D}}} \int_0^{\infty} \rho^{2\sigma+D-1} \mathrm{e}^{-\rho} \left(\mathrm{L}_{\mathrm{n-k-1}}^{2\sigma+D-2}(\rho) \right)^2 d\rho = 1 \tag{2.5.31}$$

şeklindeki radyal normalizasyon şartından bulunabilir. Burada [Ek-D.12]'deki Assosiye Laguerre polinomlarının normalizasyon eşitliği de kullanılırsa;

$$N_k = \beta^{\frac{\mathrm{D}}{2}} \left(\frac{\Gamma(\mathrm{n-k})}{\Gamma(n-k+2\sigma+D-2)(2n-2k+2\sigma+D-3\,)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5.32}$$

şeklindeki normalizasyon sabitini buluruz. Bu sabiti de radyal çözüme koyarsak radyal dalga fonksiyonunu,

$$R(r) = \beta^{\frac{\mathrm{D}}{2}} \left(\frac{\Gamma(\mathrm{n-k})}{\Gamma(n-k+2\sigma+D-2)(2n-2k+2\sigma+D-3\,)} \right)^{\frac{1}{2}} (\beta r)^{\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\beta r}{2}} \mathrm{L}_{\mathrm{n-k-1}}^{2\sigma+D-2}(\beta r) \tag{2.5.33}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada λ sayısının diğer kuantum sayıları ve enerjiyle ilişkileri,

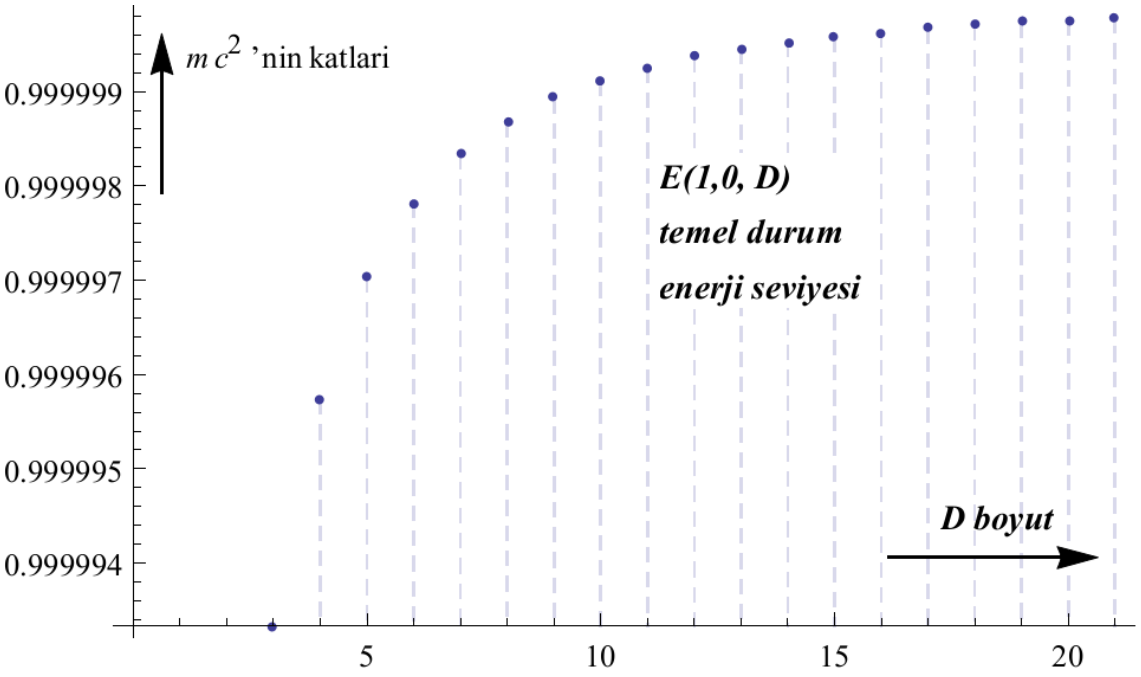
$$\lambda = \frac{E\xi}{\sqrt{m^2c^4 - E^2}} = n - k - 1/2 + \sqrt{(k - 1 + \frac{D}{2})^2 - (Z\alpha)^2} > 0 \tag{2.5.34}$$

olacak biçimdedir. Buradan da dalga fonksiyonun enerji öz değerlerini bulmak için $\frac{E\xi}{\sqrt{m^2c^4 - E^2}} = \lambda$ denklemini E'ye göre çözersek

$$E(n,k,D) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n-k+\frac{1}{2} + \sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2 - (Z\alpha)^2} \right)^2}}} \tag{2.5.35}$$

şeklindeki enerji öz değerlerini buluruz.

Özel olarak $n = 1$ ve $k = 0$ şeklindeki temel durum enerji öz değerlerinin D boyutuna göre grafiğini çizelim. Grafiği çizmek için $Z = 1$ alabiliriz. Bu durumda temel duruma ait enerji öz değerlerinin D boyutuna göre değişim grafiği (Şekil 2.1.)'deki gibidir.



Şekil 2.1. Hidrojen benzeri atom için $E(1,0,D)$ şeklindeki enerji öz değerlerinin D boyutuna göre değişim grafiği

β'nın kuantum sayılarıyla olan ilişkisi ise

$$\beta = \frac{2Z\alpha E}{\hbar c\lambda} = \frac{2Z}{a_0}\frac{1}{\sqrt{Z^2\alpha^2+\left(n-k+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(k-1+\frac{D}{2}\right)^2-(Z\alpha)^2}\right)^2}} \tag{2.5.36}$$

şeklindedir. Buradaki a_0, spini hariç fiziksel özelikleri elektronla aynı olan parçacığa ait Bohr yarıçapıdır ve

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{k_e e^2 m} \tag{2.5.37}$$

şeklindedir. Atomdaki spin-0 parçacığının bağlanma enerjisi,

$$E_{bağ} = E(n,k,D) - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{(Z\alpha)^2}{\left(n-k+\frac{1}{2}+\sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2-(Z\alpha)^2}\right)^2}}} - mc^2 \tag{2.5.38}$$

şeklinde verilir. Ayrıca (2.5.35) ifadesini, çok küçük ξ değerleri için de

$$E(n,k,D) = mc^2\left\{1 - \frac{Z^2\alpha^2}{2[n+(D-3)/2]^2} + \frac{Z^4\alpha^4(D+6k-4n)}{4(2k-2+D)[n+(D-3)/2]^4} + \cdots\right\} \tag{2.5.39}$$

şeklinde seriye açabiliriz. Bu ifadedeki ilk terim durgun enerjiyi göstermektedir. İkinci terim ise Schrödinger denkleminin Coulomb potansiyeli için enerji öz değerdir. Üçüncü terim ise aynı n değerine sahip durumlar arasındaki dejenereliği ortadan kaldıran bir terimdir (Davydov, 1965). Son olarak parçacığa ait tam dalga fonksiyonunu,

$$\begin{aligned}
&\Psi\left(t,r,\theta_{1,},\theta_{2,}\dots,\theta_{D-2},\varphi\right) = R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})T(t)\\
&= \beta^{\frac{D}{2}}\left(\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(n-k+2\sigma+D-2)(2n-2k+2\sigma+D-3)}\right)^{\frac{1}{2}}(\beta r)^{\sigma}e^{-\frac{\beta r}{2}}L_{n-k-1}^{2\sigma+D-2}(\beta r)\\
&\times\left[\prod_{\mu=1}^{D-3}\left\{2^{2N_{D-\mu-2}+(D-\mu-3)}\left(\Gamma\left(N_{D-\mu-2}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)\right)^2\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left(\frac{(N_{D-\mu-1}-N_{D-\mu-2})!\left(N_{D-\mu-1}+\frac{(D-\mu-2)}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(N_{D-\mu-1}+N_{D-\mu-2}+D-\mu-2\right)}\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\times Y_{\ell m}(\theta_{D-2},\varphi)\prod_{\mu=1}^{D-3}\sin^{N_{D-2-\mu}}\theta_\mu C_{N_{D-\mu}-N_{D-2-\mu}}^{N_{D-2-\mu}+\left(\frac{D-\mu-1}{2}\right)}(\cos\theta_\mu)e^{-\frac{iE(n,k,D)}{\hbar}t}
\end{aligned} \tag{2.5.40}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

2.5.1 Olasılık Yoğunluğu ve Olasılık Akısı

Şimdi dalga fonksiyonu için olasılık yoğunluğunu ve olasılık akısını hesaplayalım. Olasılık yoğunluğu ve olasılık akısı için formüller sırasıyla

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\right) \tag{2.5.1.1}$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \vec{\nabla}_D \Psi - \Psi \vec{\nabla}_D \Psi^*\right) \tag{2.5.1.2}$$

şeklindedir (Liboff, 1980). Bu iki ifade süreklilik denklemi adı verilen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_D \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = 0 \tag{2.5.1.3}$$

ifadesiyle birbirine bağlıdır (Liboff, 1980). ρ, olasılık yoğunluğunu hesaplayalım.

$$\Psi(r, \Omega_{D-1}; t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega\, t} \tag{2.5.1.4}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega\, e^{-i\omega\, t}\, \psi(\vec{r}) \tag{2.5.1.5}$$

$$\Psi^*(r, \Omega_{D-1}; t) = \psi^*(\vec{r}) e^{i\omega\, t} \tag{2.5.1.6}$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = i\omega\, e^{i\omega\, t}\, \psi^*(\vec{r}) \tag{2.5.1.7}$$

Bu ifadeleri, (2.5.1.1) denkleminde yerine konulup gerekli işlemler yapılırsa

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-e^{i\omega\, t}\, \psi^*(\vec{r})\, i\omega\, e^{-i\omega\, t}\, \psi(\vec{r}) - e^{-i\omega\, t}\, \psi(\vec{r})\, i\omega\, e^{i\omega\, t}\, \psi^*(\vec{r})\right) \tag{2.5.1.8}$$

$$= -i\omega \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) + \psi(\vec{r})\psi^*(\vec{r})\right) \tag{2.5.1.9}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{mc^2}\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) \tag{2.5.1.10}$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{E(n,k,D)}{mc^2}\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) \tag{2.5.1.11}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi de $\vec{\boldsymbol{j}}$, olasılık akısını hesaplayalım. Olasılık yoğunluğu için yaptığımız işlemlerin benzerini de $\vec{\boldsymbol{j}}$ için yaparsak

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) \tag{2.5.1.12}$$

$$\psi^*(\vec{r}) = \left(R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\right)^* \tag{2.5.1.13}$$

$$= R^*(r)\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1}) \tag{2.5.1.14}$$

$$= R(r)\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1}) \tag{2.5.1.15}$$

Yukarıdaki ifadede $R(r)$ fonksiyonunun reel değerli olma özelliği kullanılmıştır.

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D R(r) + R(r)\vec{\nabla}_D \mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) \tag{2.5.1.16}$$

$$\vec{\nabla}\phi^*(\vec{r}) = \mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D R(r) + R(r)\vec{\nabla}_D \mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1}) \tag{2.5.1.17}$$

Bu ifadeler (2.5.1.2) denkleminde yerine konulursa

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\vec{\nabla}_D\Psi - \Psi\vec{\nabla}_D\Psi^*\right) \tag{2.5.1.18}$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} e^{-i\omega\, t}\, e^{i\omega\, t}\, \left(\psi^*(\vec{r})\vec{\nabla}_D\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\vec{\nabla}_D\psi^*(\vec{r})\right) \tag{2.5.1.19}$$

$=$

$$\frac{\hbar}{2mi}\Big(R(r)\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\big(\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D R(r) +$$

$$R(r)\vec{\nabla}_D\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\big) - R(r)\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\left(\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D R(r) + R(r)\vec{\nabla}_D\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\right)\Big)$$

(2.5.1.20)

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(R(r)\right)^2\left(\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) - \mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\vec{\nabla}_D\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\right) \tag{2.5.1.21}$$

Burada $\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})$ açısal dalga fonksiyonlarının kompleks eşlenik özelliklerini kullanalım.

$$\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1}) = \left(\prod_{j=1}^{D-1}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j)\right)^* \tag{2.5.1.22}$$

$$= \mathcal{X}^*_{\mathrm{D-1}}(\theta_{D-1})\prod_{j=1}^{D-2}\mathcal{X}^*_{\mathrm{j}}(\theta_j) \tag{2.5.1.23}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iN_0\varphi}\right)^*\prod_{j=1}^{D-2}\mathcal{X}^*_{\mathrm{j}}(\theta_j) \tag{2.5.1.24}$$

$\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j)$, fonksiyonları $j \in (1,2,3,\ldots,D-2)$ için gerçel değer alırlar. Bu durumda

$$\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iN_0\varphi} \prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j) \tag{2.5.1.25}$$

olur. Ayrıca

$$\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) = \frac{1}{2\pi} \left(\prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j)\right)^2 \tag{2.5.1.26}$$

Bu ifadeleri (2.5.1.21) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemleri yaparsak

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{4\pi m i} \left(R(r)\right)^2 \left(e^{-iN_0\varphi} \prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j)\, \vec{\nabla}_D \left(e^{iN_0\varphi} \prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j) \right) - \mathcal{Y}(\Omega_{D-1}) \vec{\nabla}_D \left(e^{-iN_0\varphi} \prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j) \right) \right) \tag{2.5.1.27}$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\hbar}{4\pi m i} \left(R(r)\right)^2 \left(\prod_{j=1}^{D-2} \mathcal{X}_j(\theta_j) \right)^2 \left(e^{-iN_0\varphi} \vec{\nabla}_D \left(e^{iN_0\varphi}\right) - e^{iN_0\varphi} \vec{\nabla}_D \left(e^{-iN_0\varphi}\right) \right) \tag{2.5.1.28}$$

$\vec{\nabla}_D$ operatörünün küresel koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{\nabla}_D = \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2} \frac{1}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cdots + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \frac{1}{r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.5.1.29}$$

şeklindedir. Bu durumda $\vec{\nabla}_D\left(e^{iN_0\varphi}\right)$ ifadesi hesaplanırsa

$$\vec{\nabla}_D\left(e^{iN_0\varphi}\right) = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2} \frac{1}{r \sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \cdots + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \frac{1}{r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{iN_0\varphi} \tag{2.5.1.30}$$

$$= \frac{1}{r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \left(e^{iN_0\varphi}\right) \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}} \tag{2.5.1.31}$$

$$= \frac{iN_0}{r \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{D-2}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi} \tag{2.5.1.32}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\vec{\nabla}_D\left(e^{-iN_0\varphi}\right)$ hesaplanırsa

$$\vec{\nabla}_D\left(e^{-iN_0\varphi}\right) = \frac{-iN_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{2.5.1.33}$$

sonucu bulunur. Bu iki ifadeyi (2.5.1.28) denkleminde yerine koyarsak

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \left(j_r\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + j_{\theta_1}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \cdots + j_{\theta_{D-2}}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + j_\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\right) \tag{2.5.1.34}$$

$$= \frac{\hbar}{2\pi m}\left(R(r)\right)^2\left(\prod_{j=1}^{D-2}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j)\right)^2\frac{N_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{2.5.1.35}$$

Bu durumda sadece j_φ bileşeni sıfırdan farklı olur ve

$$j_\varphi = \frac{\hbar}{2\pi m}\left(R(r)\right)^2\left(\prod_{j=1}^{D-2}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j)\right)^2\frac{N_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \tag{2.5.1.36}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\left(R(r)\right)^2\mathcal{Y}^*(\Omega_{D-1})\mathcal{Y}(\Omega_{D-1})\frac{N_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \tag{2.5.1.37}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\frac{N_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \tag{2.5.1.38}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\Psi^*(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)\frac{N_0}{r\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-2}} \tag{2.5.1.39}$$

ve

$$j_r, j_{\theta_1}, \dots, j_{\theta_{D-2}} = 0 \tag{2.5.1.40}$$

sonucunu buluruz.

2.5.2 Radyal Dalga Fonksiyonlarının ve Radyal Olasılık Fonkisyonlarının Grafikleri

Olasılık yoğunluğuna bağlı bir olasılık dağılım fonksiyonu,

$$Q(r,\Omega_{D-1}) = \int \rho(r,\Omega_{D-1})dV = \int \Psi^*\Psi dV \tag{2.5.2.1}$$

ile tanımlanır (Davydov, 1965).

Burada dV sonsuz küçük hacim elemanı,

$$dV = r^{D-1}\sin^{D-2}\theta_1\sin^{D-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{D-3}\sin\theta_{D-2}drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{D-2}d\theta_{D-1}$$

(2.5.2.2)

olup ve bu ifadenin her iki tarafının diferansiyeli alındığında

$$dQ(r,\Omega_{D-1}) = \rho(r,\Omega_{D-1})r^{D-1}\sin^{D-2}\theta_1\sin^{D-3}\theta_2\cdots\sin^2\theta_{D-3}\sin\theta_{D-2}drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{D-2}d\theta_{D-1}$$

(2.5.2.3)

olur. Burada

$$\rho(r,\Omega_{D-1}) = \Psi^*\Psi = R(r)\mathrm{R}^*(r)\Upsilon^*(\Omega_{D-1})\Upsilon(\Omega_{D-1}) \quad (2.5.2.4)$$

$$= \big(R(r)\big)^2\Upsilon^*(\Omega_{D-1})\Upsilon(\Omega_{D-1}) \quad (2.5.2.5)$$

$$= \big(R(r)\big)^2\big(\textstyle\prod_{j=1}^{D-1}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j)\big)^*\prod_{j=1}^{D-1}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j) \quad (2.5.2.6)$$

$$= \big(R(r)\big)^2\textstyle\prod_{j=1}^{D-1}\mathcal{X}_{\mathrm{j}}^*(\theta_j)\mathcal{X}_{\mathrm{j}}(\theta_j) \quad (2.5.2.7)$$

$$= \rho_r(r)\rho_{\theta_1}(\theta_1)\rho_{\theta_2}(\theta_2)\dots\rho_\varphi(\varphi) \quad (2.5.2.8)$$

Burada değişkene bağlı olasılık yoğunlukları,

$$\rho_r(r) = \big(R(r)\big)^2 \quad (2.5.2.9)$$

$$\rho_{\theta_1}(\theta_1) = \mathcal{X}_1^*(\theta_1)\mathcal{X}_1(\theta_1) \quad (2.5.2.10)$$

$$\rho_{\theta_2}(\theta_2) = \mathcal{X}_2^*(\theta_2)\mathcal{X}_2(\theta_2) \quad (2.5.2.11)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\rho_\varphi(\varphi) = \mathcal{X}_{\mathrm{D}-2}^*(\varphi)\mathcal{X}_{\mathrm{D}-2}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (2.5.2.12)$$

şeklinde olmak üzere olasılık dağılım fonksiyonunun diferansiyeli olan dQ ifadesi,

$$dQ\big(r,\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{D-2},\theta_{D-1}(=\varphi)\big) = \rho_r(r)r^{D-1}dr\,\rho_{\theta_1}(\theta_1)\sin^{D-2}\theta_1d\theta_1\rho(\theta_2)\sin^{D-3}\theta_2d\theta_2\dots d\varphi$$

(2.5.2.13)

olur. Dikkat edilirse burada olasılık yoğunluğu, değişkenlere bağlı olasılık yoğunlukları cinsinden yazılmıştır.

Değişkene bağlı olasılık yoğunlukları dışında, yine değişkene bağlı olasılık fonksiyonlarından söz edilebilir (Liboff, 1980). Yani

$$P(r) = \rho_r(r) r^{D-1} = \big(R(r)\big)^2 r^{D-1} \tag{2.5.2.14}$$

$$P(\theta_1) = \rho_{\theta_1}(\theta_1) \sin^{D-2}\theta_1 = \big(\mathcal{X}_1(\theta_1)\big)^2 \sin^{D-2}\theta_1 \tag{2.5.2.15}$$

$$P_{\theta_2}(\theta_2) = \rho_{\theta_2}(\theta_2) \sin^{D-3}\theta_2 = \big(\mathcal{X}_2(\theta_2)\big)^2 \sin^{D-3}\theta_2 \tag{2.5.2.16}$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$$P_{\theta_{D-2}}(\theta_{D-2}) = \rho_{D-2}(\theta_{D-2}) \sin\theta_{D-2} = \big(\mathcal{X}_{\mathrm{D-2}}(\theta_{D-2})\big)^2 \sin\theta_{D-2}$$

$$P_\varphi(\varphi) = \rho_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \tag{2.5.2.17}$$

olan fonksiyonlar da olasılık fonksiyonu olup yoğunlukla olan ilişkileri yukarıda verildiği gibidir. Burada α_0, Bohr yarıçapıdır. r'nin $\langle r\rangle_{(n,k)}$ beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$\langle r\rangle_{(n,k)} = \int_0^\infty r P(r)\, dr \tag{2.5.2.18}$$

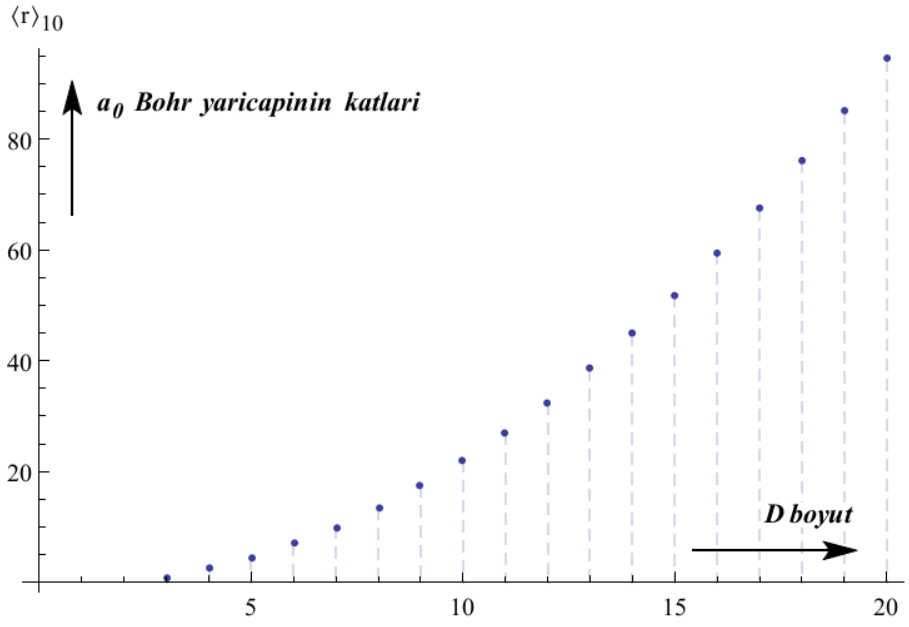
$$= \int_0^\infty R\,(r)^2 r^D dr \tag{2.5.2.19}$$

$$= \frac{1}{\beta}\left((2n - 2k + 2\sigma + D - 4) + \frac{(2n-2k-4)(\mathrm{n-k+2\sigma+D-3})}{(2n-2k+2\sigma+D-3\,)}\right) \tag{2.5.2.20}$$

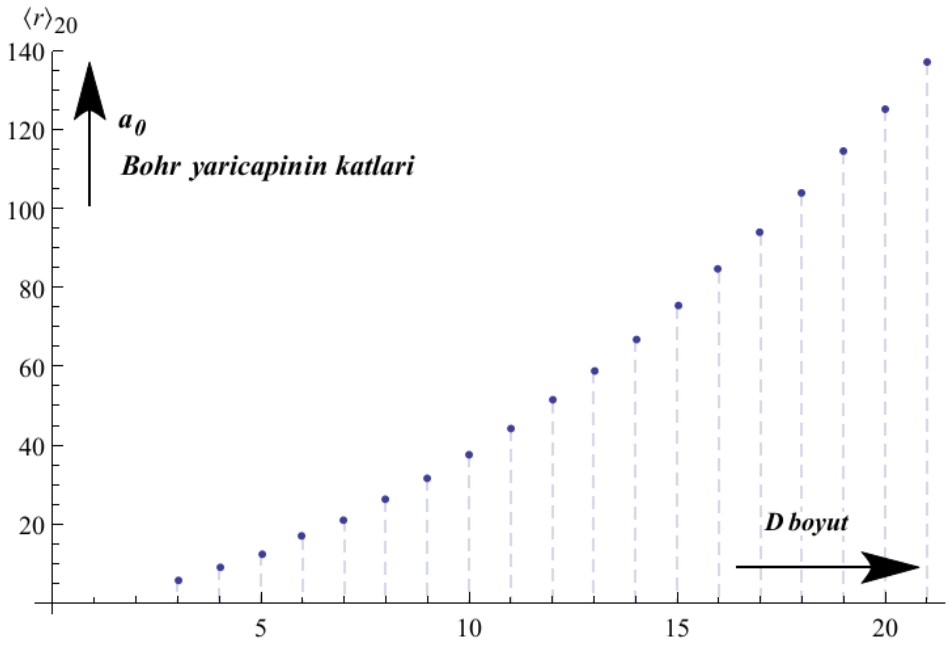
$$= \frac{\alpha_0}{2Z}\sqrt{\mathrm{Z}^2\alpha^2 + \left(n - k + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(k - 1 + \frac{D}{2}\right)^2 - \mathrm{Z}^2\alpha^2}\right)^2}\left(\left(2n - 2k - 2 + 2\sqrt{(k - 1 + \tfrac{D}{2})^2 - \mathrm{Z}^2\alpha^2}\right) + \frac{(2n-2k-2)\left(\mathrm{n-k-1+2}\sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2-\mathrm{Z}^2\alpha^2}\right)}{\left(2n-2k-1+2\sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2-\mathrm{Z}^2\alpha^2}\right)}\right) \tag{2.5.2.21}$$

Beklenen değerler, atom yükünü saymazsak sadece baş kuantum n sayısı ile k yörüngesel açısal momentum kuantum sayısına bağlıdır. $\langle r\rangle_{(n,k)}$ beklenen değerlerin kuantum sayılarına göre nasıl değiştiğini anlamak adına çekirdek yükünü Z=1 olarak alabiliriz. Şimdi de $n=0,\ n=2\ ve\ k=0$ ve $n=3\ ve\ k=0$ kuantum sayılarına karşılık gelen $\langle r\rangle_{(1,0)}$, $\langle r\rangle_{(2,0)}$ ve $\langle r\rangle_{(3,0)}$ yarıçap beklenen değerlerinin D boyutlarına göre değişim grafikleri (Şekil 2.2.-Şekil 2.4.). dir.

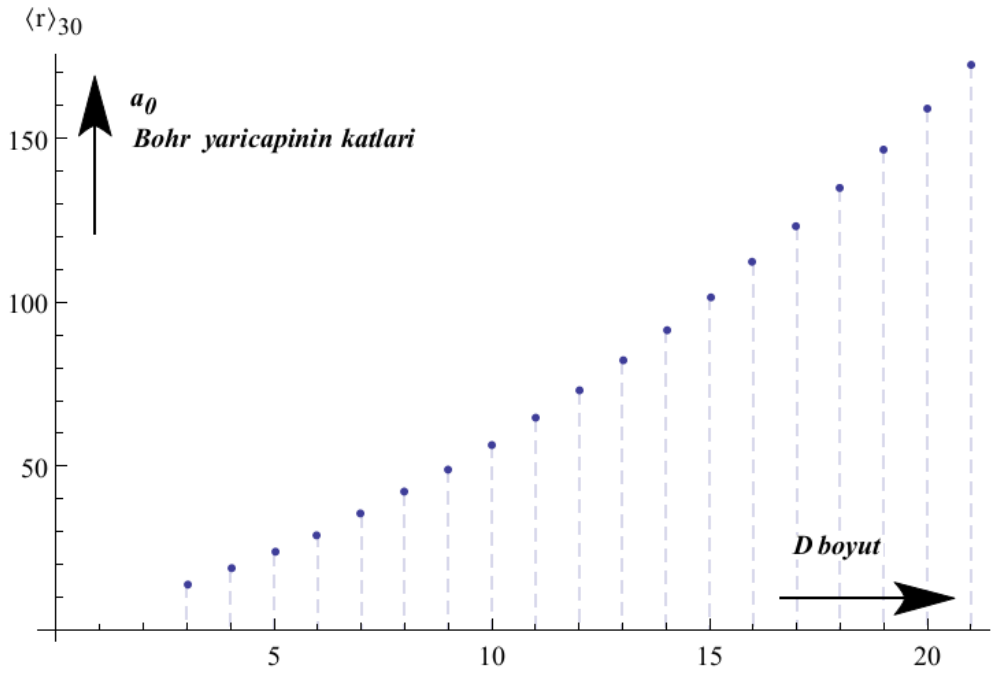
Hidrojen atomunda ve çok elektronlu atomlarda her kuantum seviyesinin dalga fonksiyonlarını kullanarak $P_{(n,k,D)}$ olasılık yoğunluk grafikleri çizildiğinde, bazı kuantum seviyelerinde dışta kalması gereken bir bulutun çekirdeğe doğru sokulduğu ve elektron yarıçapının beklenen değerinin, bir önceki bulut için söz konusu olan beklenen değerden küçük olduğu gözlenir. Örneğin hidrojen benzeri atomda D=3 boyutta n=2, l=0 seviyesi için $\langle r\rangle_{(2,0)} = 5.9997113a_0$ iken, n=2, l=0 için $\langle r\rangle_{(2,1)} = 4.4999334a_0$ dır (Çizelge2.1 ve Çizelge 2.2). Buna yörünge katlanması (orbital penetration) denir. D=4 boyutta da aynı şekilde n=2, l=0 seviyesi için $\langle r\rangle_{(2,0)} = 9.0998423a_0$ iken, n=2, l=0 için $\langle r\rangle_{(2,1)} = 6.9999419a_0$ dır. Bu durumun tüm D>4 boyutları için de geçerli olduğu benzer şekildeki hesaplamalarla gösterilebilir. (Çizelge 2.1.-Çizelge 2.5.)



Şekil 2.2. $\langle r\rangle_{(1,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyutuna göre değişim grafiği



Şekil 2.3. $\langle r \rangle_{(2,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyutuna göre değişim grafiği



Şekil 2.4. $\langle r \rangle_{(3,0)}$ yarıçap beklenen değerinin D boyutuna göre değişim grafiği

Çizelge 2.1 Yarıçap beklenen değerlerin D=3,4,5 ve 6 boyutları için kuantum sayılarına göre değişim tablosu

		$\langle r\rangle_{(n,k)}\sim\alpha_0$	$\langle r\rangle_{(n,k)}\sim\alpha_0$	$\langle r\rangle_{(n,k)}\sim\alpha_0$	$\langle r\rangle_{(n,k)}\sim\alpha_0$
$\underline{n}$	$\underline{k}$	$D=3$	$D=4$	$D=5$	$D=6$
1	0	0.9998734	2.4999174	4.4999334	6.9999419
2	0	5.9997113	9.0998423	12.6665525	16.7141933
	1	4.4999334	6.9999419	9.9999473	13.4999511
3	0	13.9995526	18.6426220	23.7498354	29.3332040
	1	12.6665525	16.7141933	21.2499207	26.2777072
	2	9.9999473	13.4999511	17.4999539	21.9999561
4	0	24.9993939	31.1663532	37.7997839	44.9089234
	1	23.7498354	29.3332040	35.3998917	41.9544511
	2	21.2499207	26.2777072	31.7999356	37.8181221
	3	17.4999539	21.9999561	26.9999578	32.4999592
5	0	38.9992349	46.6814258	54.8330651	63.4613322
	1	37.7997839	44.9089234	52.4998616	60.5768039
	2	35.3998917	41.9544511	48.9999156	56.5383846
	3	31.7999356	37.8181221	44.3332773	51.3461007
	4	26.9999578	32.4999592	38.4999603	44.9999613
6	0	55.9990758	65.1918362	74.8568222	84.9997547
	1	54.8330651	63.4613322	72.5712594	82.1665222
	2	52.4998616	60.5768039	69.1427517	78.1999049
	3	48.9999156	56.5383846	64.5713574	73.0999334
	4	44.3332773	51.3461007	58.8570921	66.8666179
	5	38.4999603	44.9999613	51.9999622	59.4999629
7	0	75.9989165	86.6994492	97.8746267	109.5291272
	1	74.8568222	84.9997547	95.6247998	106.7351239
	2	72.5712594	82.1665222	92.2498731	102.8234156
	3	69.1427517	78.1999049	87.7499128	97.7940368
	4	64.5713574	73.0999334	82.1249371	91.6469991
	5	58.8570921	66.8666179	75.3749530	84.3823073
	6	51.9999622	59.4999629	67.4999635	75.9999641

Çizelge 2.2. Yarıçap beklenen değerlerin D=3 boyutu için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu

		$\langle r \rangle_{(n,k)} \sim \alpha_0$
$\underline{n}$	$\underline{k}$	$D = 3$
1	0	0.9998734
2	1	4.4999334
2	0	5.9997113
3	2	9.9999473
3	1	12.6665525
3	0	13.9995526
4	3	17.4999539
4	2	21.2499207
4	1	23.7498354
4	0	24.9993939
5	4	26.9999578
5	3	31.7999356
5	2	35.3998917
5	1	37.7997839
6	5	38.4999603
5	0	38.9992349
6	4	44.3332773
6	3	48.9999156
7	6	51.9999622
6	2	52.4998616
6	1	54.8330651
6	0	55.9990758
7	5	58.8570921
7	4	64.5713574
7	3	69.1427517
7	2	72.5712594
7	1	74.8568222
7	0	75.9989165

Çizelge 2.3. Yarıçap beklenen değerlerin D=4 boyutu için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu

		$\langle r \rangle_{(n,k)} \sim \alpha_0$
$\underline{n}$	$\underline{k}$	$D = 4$
1	0	2.4999174
2	1	6.9999419
2	0	9.0998423
3	2	13.4999511
3	1	16.7141933
3	0	18.6426220
4	3	21.9999561
4	2	26.2777072
4	1	29.3332040
4	0	31.1663532
5	4	32.4999592
5	3	37.8181221
5	2	41.9544511
5	1	44.9089234
6	5	44.9999613
5	0	46.6814258
6	4	51.3461007
6	3	56.5383846
7	6	59.4999629
6	2	60.5768039
6	1	63.4613322
6	0	65.1918362
7	5	66.8666179
7	4	73.0999334
7	3	78.1999049
7	2	82.1665222
7	1	84.9997547
7	0	86.6994492

Çizelge 2.4. Yarıçap beklenen değerlerin D=5 boyutu için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu

		$\langle r \rangle_{(n,k)} \sim \alpha_0$
$\underline{n}$	$\underline{k}$	$D = 5$
1	0	4.4999334
2	1	9.9999473
2	0	12.6665525
3	2	17.4999539
3	1	21.2499207
3	0	23.7498354
4	3	26.9999578
4	2	31.7999356
4	1	35.3998917
4	0	37.7997839
5	4	38.4999603
5	3	44.3332773
5	2	48.9999156
6	5	51.9999622
5	1	52.4998616
5	0	54.8330651
6	4	58.8570921
6	3	64.5713574
7	6	67.4999635
6	2	69.1427517
6	1	72.5712594
6	0	74.8568222
7	5	75.3749530
7	4	82.1249371
7	3	87.7499128
7	2	92.2498731
7	1	95.6247998
7	0	97.8746267

Çizelge 2.5. Yarıçap beklenen değerlerin D=6 boyutu için kuantum sayılarına göre yukarıdan aşağıya doğru artan biçimde oluşturulmuş değişim tablosu

		$\langle r \rangle_{(n,k)} \sim \alpha_0$
n	k	$D = 6$
1	0	6.9999419
2	1	13.4999511
2	0	16.7141933
3	2	21.9999561
3	1	26.2777072
3	0	29.3332040
4	3	32.4999592
4	2	37.8181221
4	1	41.9544511
4	0	44.9089234
5	4	44.9999613
5	3	51.3461007
5	2	56.5383846
6	5	59.4999629
5	1	60.5768039
5	0	63.4613322
6	4	66.8666179
6	3	73.0999334
7	6	75.9999641
6	2	78.1999049
6	1	82.1665222
7	5	84.3823073
6	0	84.9997547
7	4	91.6469991
7	3	97.7940368
7	2	102.8234156
7	1	106.7351239
7	0	109.5291272

Şimdi de radyal dalga fonksiyonlarına ait radyal olasılık yoğunluğu grafiklerini inceleyelim. Radyal olasılık yoğunluğu

$$P_{(n,k,D)} = \rho_r(r) r^{D-1} \tag{2.5.2.36}$$

$$= \left(R_{(n,k,D)}(r)\right)^2 r^{D-1} \tag{2.5.2.37}$$

$$=$$

$$\beta^{\mathrm{D}} \left(\frac{\Gamma(\mathrm{n-k})}{\Gamma\left(n-k+2\sqrt{\left(k-1+\frac{D}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)\left(2n-2k-1+2\sqrt{\left(k-1+\frac{D}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)} \right) \times$$

$$(\beta r)^{-D+2+2\sqrt{(k-1+\frac{D}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\beta r} \left(\mathrm{L}^{2\sqrt{\left(k-1+\frac{D}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}}_{\mathrm{n-k-1}} (\beta r) \right)^2 r^{D-1} \tag{2.5.2.38}$$

$$\beta = \frac{2Z}{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{Z^2\alpha^2 + \left(n-k+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(k-1+\frac{D}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}} \tag{2.5.2.39}$$

şeklinde ifade ile hesaplanabilir.

Grafikleri boyutsuz olarak çizebilmek için $\frac{r}{\alpha_0}$ 'a göre çizeceğiz. Bu durumda radyal dalga fonksiyonları ve bunlara ait olasılık yoğunluk fonksiyonları;

$$\bar{R}_{(n,k)} = \alpha_0^{\frac{D}{2}} R_{(n,k)}\left(\frac{r}{\alpha_0}\right) \tag{2.5.2.40}$$

$$\bar{P}_{(n,k)} = \alpha_0 P_{(n,k)}\left(\frac{r}{\alpha_0}\right) \tag{2.5.2.41}$$

şeklinde olurlar.

Hidrojen benzeri atom için Z=1 alabiliriz. Bu durumda D=3 için n=1,2,3 baş kuantum sayılarına karşılık gelen radyal dalga fonksiyonları,

$$R_{(n,k)}(r) =$$

$$\beta^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma\left(n-k+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)\left(2n-2k-1+2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$(\beta r)^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}}\, e^{-\frac{\beta r}{2}} L_{n-k-1}^{2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}}(\beta r) \qquad (2.5.2.42)$$

Burada β

$$\beta = \frac{2}{\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{137}\right)^2+\left(n-k+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)^2}} \qquad (2.5.2.43)$$

şeklinde hesaplanır.

n=1 ve k=0 için $R_{(1,0)}(r)$, radyal dalga fonksiyonu,

$$R_{(1,0)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{9\sqrt{2085}}{274}+\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{3\sqrt{2085}}{137}\right)\Gamma\left[1+\frac{3\sqrt{2085}}{137}\right]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{9\sqrt{2085}}{274}+\frac{5}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{9\sqrt{2085}}{274}+\frac{5}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

(2.5.2.44)

n=2 ve k=0,1 için $R_{(2,0)}(r)$, $R_{(2,1)}(r)$ radyal dalga fonksiyonları,

$$R_{(2,0)}(r) = \left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(3+\frac{3\sqrt{2085}}{137})\Gamma[2+\frac{3\sqrt{2085}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}}\times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{3\sqrt{2085}}{137}+1\right)$$

(2.5.2.45)

$$R_{(2,1)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{3\sqrt{168917}}{274}+\frac{9}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1+\frac{\sqrt{168917}}{137})\Gamma[1+\frac{\sqrt{168917}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{3\sqrt{168917}}{274}+\frac{9}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{168917}}{274}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{3\sqrt{168917}}{274}+\frac{9}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

(2.5.2.46)

n=3 ve k=0,1,2 için $R_{(3,0)}(r)$, $R_{(3,1)}(r)$, $R_{(3,2)}(r)$ radyal dalga fonksiyonları,

$$R_{(3,0)}(r) = \left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{(5+\frac{3\sqrt{2085}}{137})\Gamma[3+\frac{3\sqrt{2085}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}} \times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^2}{2}-\left(\frac{3\sqrt{2085}}{137}+2\right)\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{2085}}{274}+\frac{13}{2}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{9\sqrt{2085}}{274}+\frac{56303}{37538}\right)$$

(2.5.2.47)

$$R_{(3,1)}(r) = \left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(3+\frac{\sqrt{168917}}{137})\Gamma[2+\frac{\sqrt{168917}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{168917}}{274}-\frac{1}{2}} \times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{\sqrt{168917}}{137}+1\right) \quad (2.5.2.48)$$

$$R_{(3,2)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1+\frac{\sqrt{469221}}{137}]\Gamma[1+\frac{\sqrt{469221}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{469221}}{274}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

(2.5.2.49)

şeklindedirler. D=4 için radyal dalga fonksiyonları ise

$$R_{(n,k)}(r) =$$

$$\beta^2\left(\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma\left(n-k+2\sqrt{(k+1)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)\left(2n-2k-1+2\sqrt{(k+1)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$(\beta r)^{-2+2\sqrt{(k+1)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}}\,e^{-\frac{\beta r}{2}}L_{n-k-1}^{2\sqrt{(k+1)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}}(\beta r) \qquad (2.5.2.50)$$

$$\beta=\frac{2}{\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{137}\right)^2+\left(n-k+\frac{1}{2}+\sqrt{(k+1)^2-\left(\frac{1}{137}\right)^2}\right)^2}} \qquad (2.5.2.51)$$

şeklinde hesaplanır. n=1 ve k=0 için $R_{(1,0)}(r)$, radyal dalga fonksiyonu,

$$R_{(1,0)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{12\sqrt{1173}}{137}+\frac{13}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{8\sqrt{1173}}{137}\right)\Gamma\left[1+\frac{8\sqrt{1173}}{137}\right]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{12\sqrt{1173}}{137}+\frac{13}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{12\sqrt{1173}}{137}+\frac{13}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

(2.5.2.52)

n=2 ve k=0,1 için $R_{(2,0)}(r)$, $R_{(2,1)}(r)$, radyal dalga fonksiyonları,

$$R_{(2,0)}(r)=\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{20\sqrt{1173}}{137}+\frac{29}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\left(3+\frac{8\sqrt{1173}}{137}\right)\Gamma\left[2+\frac{8\sqrt{1173}}{137}\right]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{20\sqrt{1173}}{137}+\frac{29}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}}\times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{20\sqrt{1173}}{137}+\frac{29}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{20\sqrt{1173}}{137}+\frac{29}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{8\sqrt{1173}}{137}+1\right) \qquad (2.5.2.53)$$

$$R_{(2,1)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{3003}}{137}+\frac{25}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1+\frac{10\sqrt{3003}}{137})\Gamma[1+\frac{10\sqrt{3003}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{15\sqrt{3003}}{137}+\frac{25}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{168917}}{274}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{15\sqrt{3003}}{137}+\frac{25}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

(2.5.2.54)

n=3 ve k=0,1,2 için $R_{(3,0)}(r)$, $R_{(3,1)}(r)$, $R_{(3,2)}(r)$ radyal dalga fonksiyonları,

$$R_{(3,0)}(r) = \left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{(5+\frac{8\sqrt{1173}}{137})\Gamma[3+\frac{8\sqrt{1173}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{3\sqrt{2085}}{274}-\frac{1}{2}} \times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^2}{2}-\left(\frac{8\sqrt{1173}}{137}+2\right)\frac{2}{\sqrt{\frac{28\sqrt{1173}}{137}+\frac{53}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{16\sqrt{1173}}{137}+\frac{75074}{18769}\right)$$

(2.5.2.55)

$$R_{(3,1)}(r) = \left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(3+\frac{10\sqrt{3003}}{137})\Gamma[2+\frac{10\sqrt{3003}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{168917}}{274}-\frac{1}{2}} \times$$

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{25\sqrt{3003}}{137}+\frac{41}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}+\frac{10\sqrt{3003}}{137}+1\right) \quad (2.5.2.56)$$

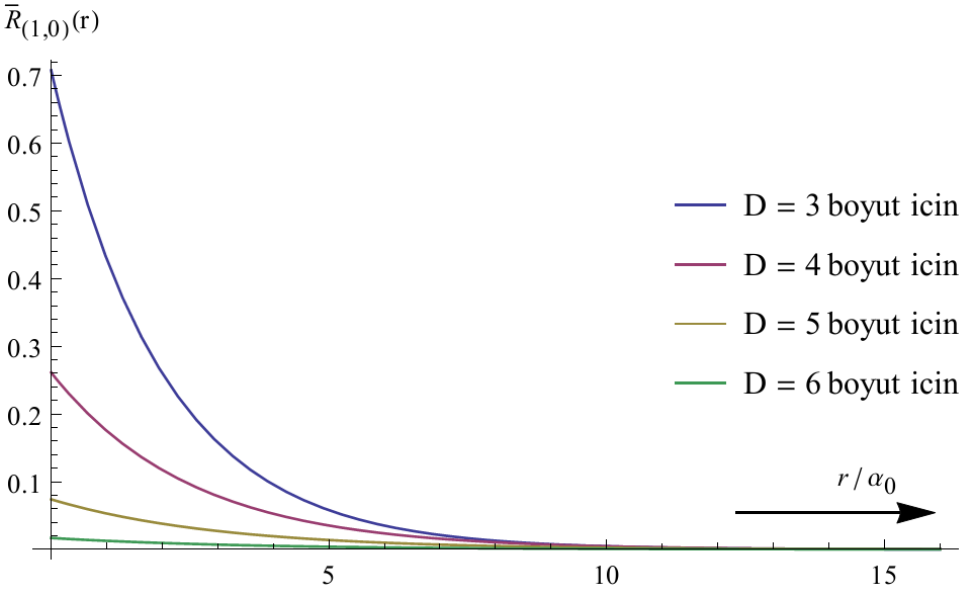
$$R_{(3,2)}(r) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1+\frac{4\sqrt{42230}}{137})\Gamma[1+\frac{4\sqrt{42230}}{137}]}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\alpha_0}\frac{2}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}\right)^{\frac{\sqrt{469221}}{274}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{6\sqrt{42230}}{137}+\frac{45}{4}}}\frac{r}{\alpha_0}}$$

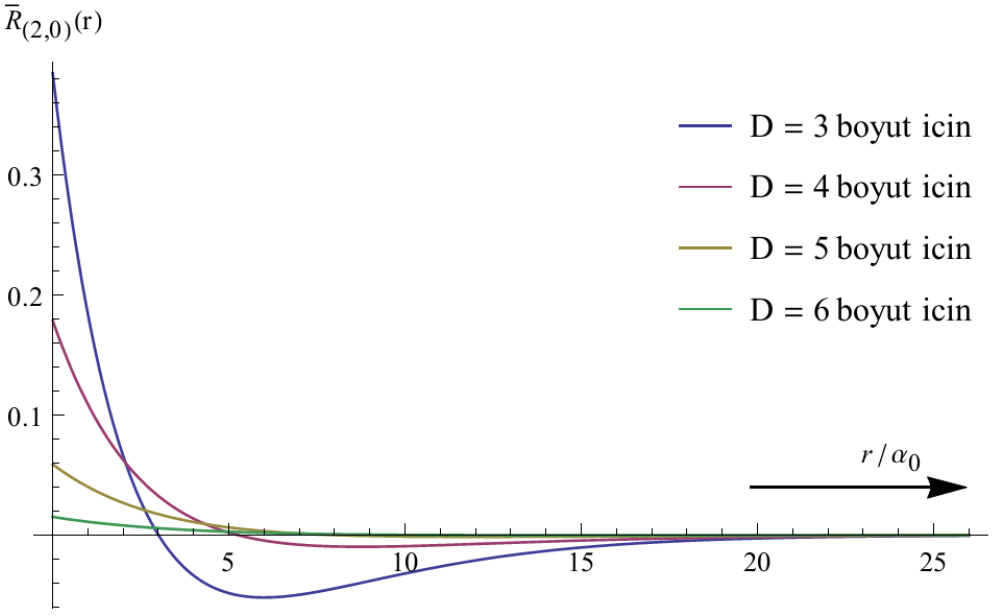
(2.5.2.57)

2.5.2.1 Radyal Dalga Fonksiyonlarının Grafikleri

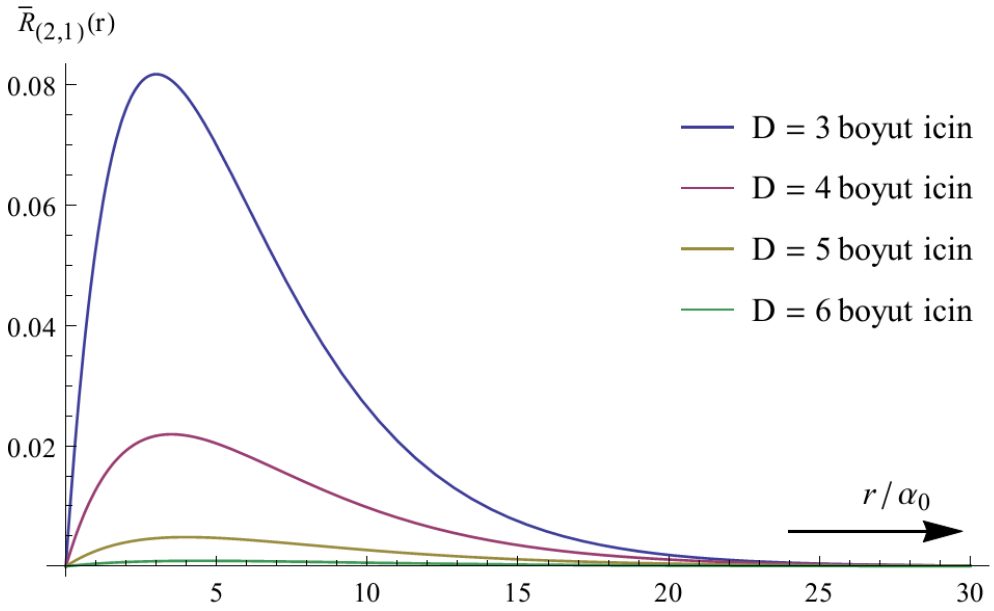
D=3 ve D=4 boyutları için radyal $\bar{R}_{(n,k)}$ olasılık fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri aşağıdaki gibidir (Şekil 2.5.-Şekil 2.14).



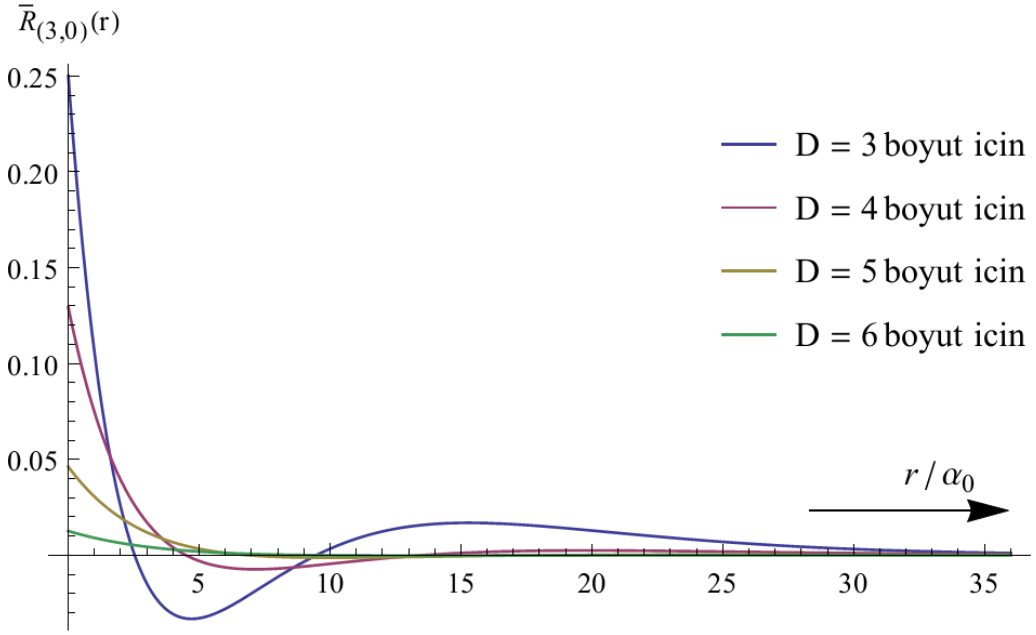
Şekil 2.5. n=1, k=0 için $\bar{R}_{(1,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



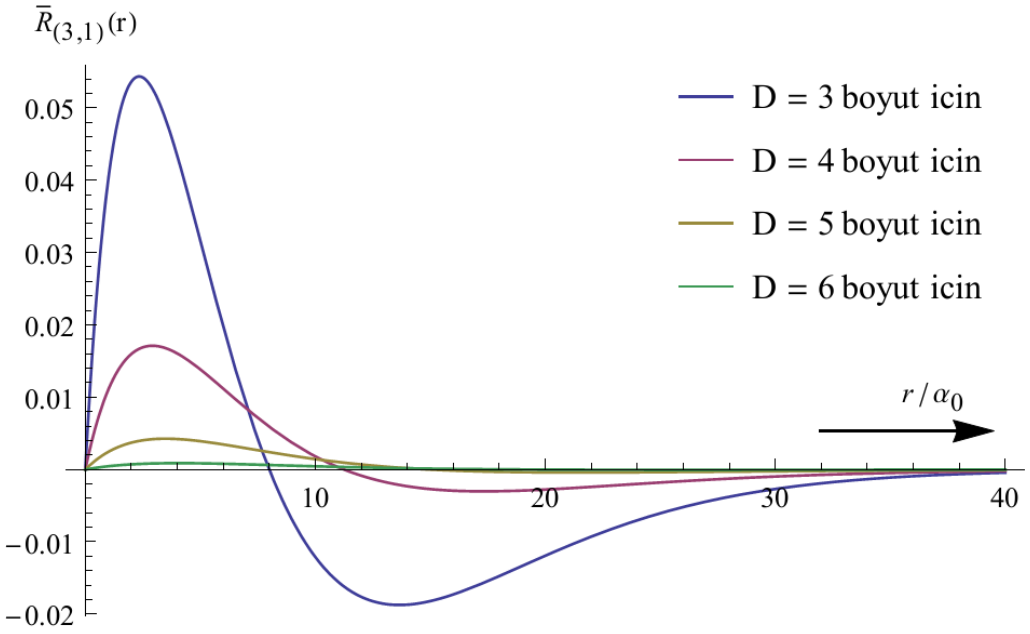
Şekil 2.6. n=2, k=0 için $\bar{R}_{(2,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



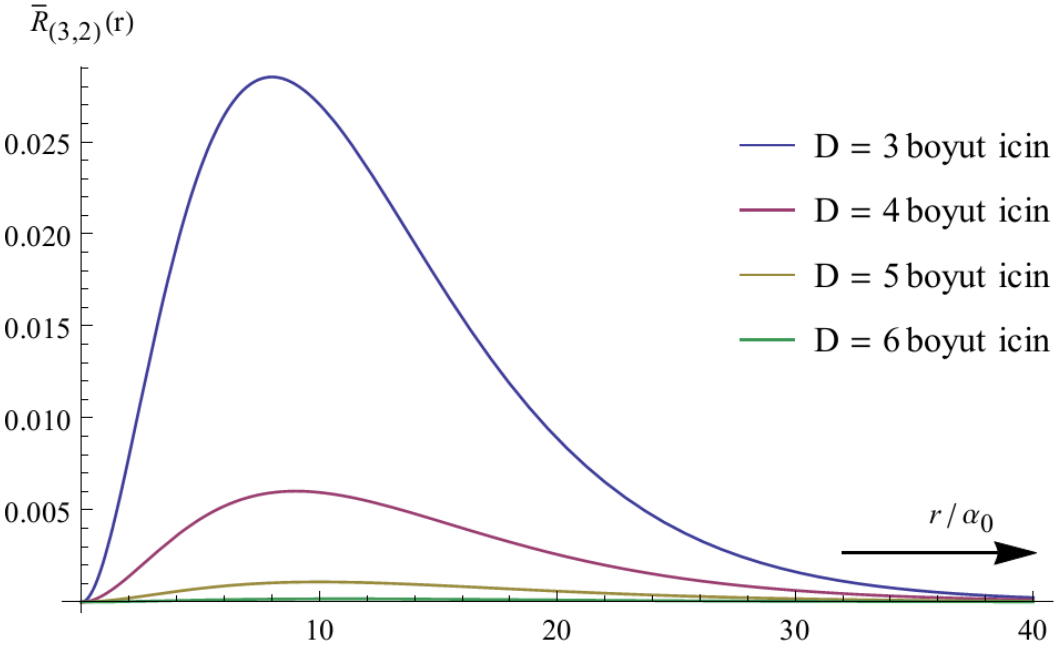
Şekil 2.7. n=2, k=1 için $\bar{R}_{(2,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



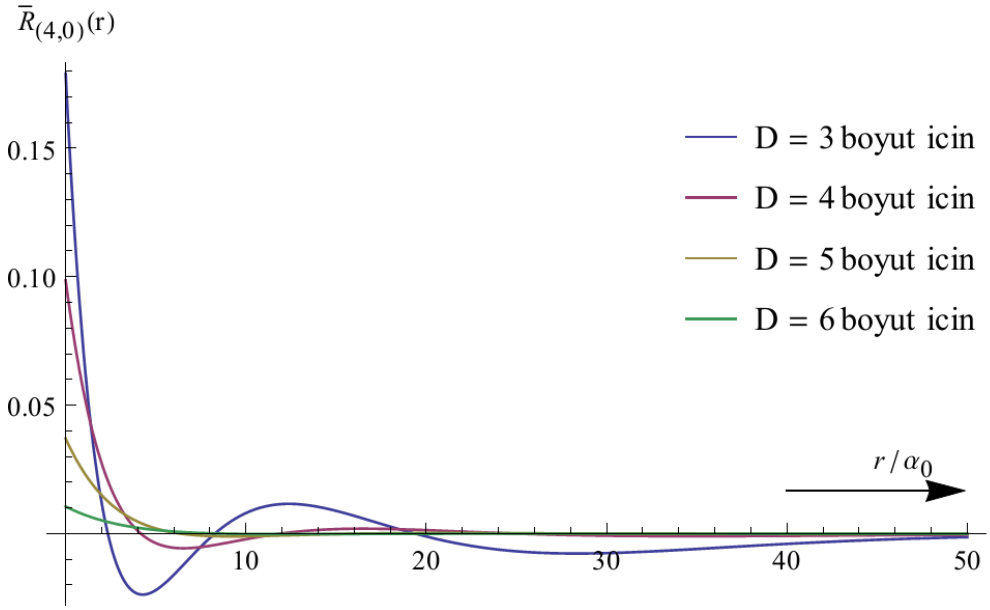
Şekil 2.8. n=3, k=0 için $\bar{R}_{(3,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



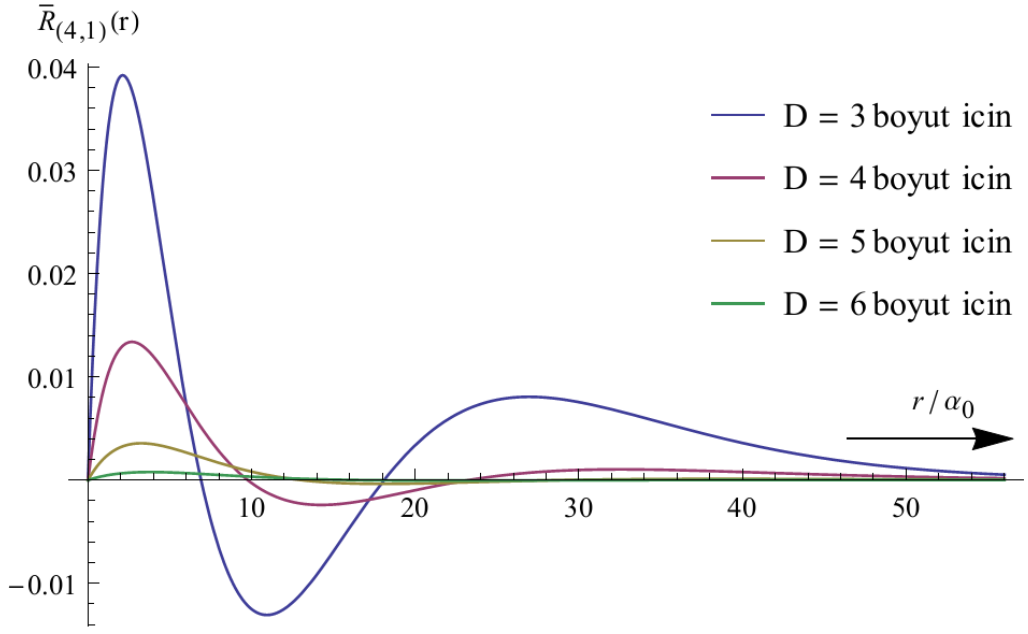
Şekil 2.9. n=3, k=1 için $\bar{R}_{(3,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



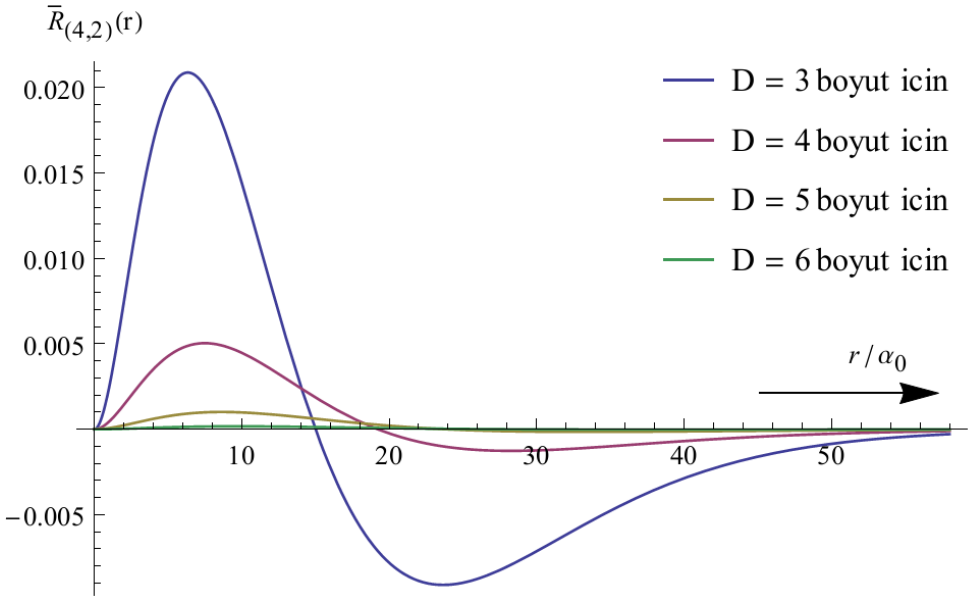
Şekil 2.10. n=3, k=2 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(3,2)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



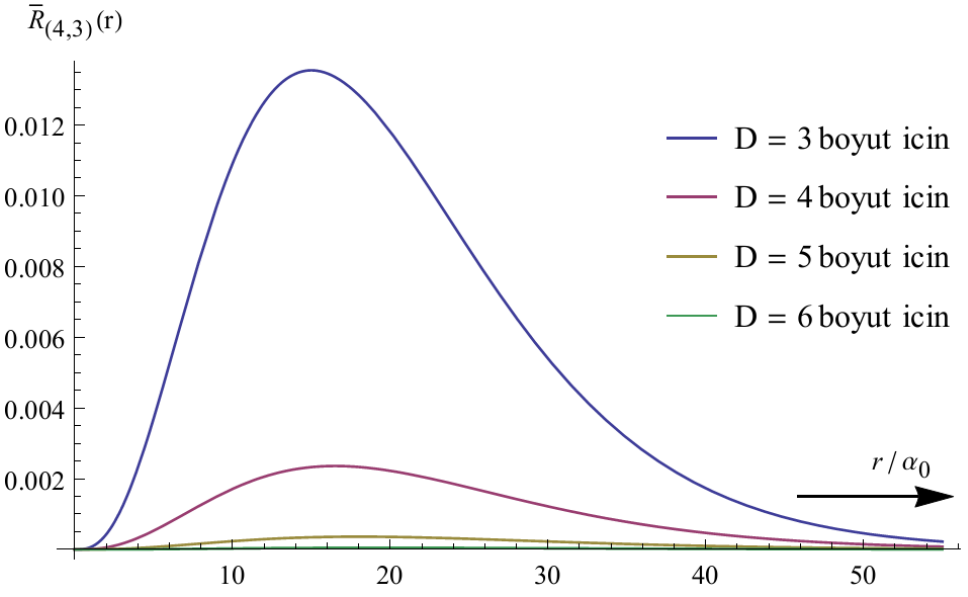
Şekil 2.11. n=4, k=0 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,0)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2.12. n=4, k=1 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,1)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



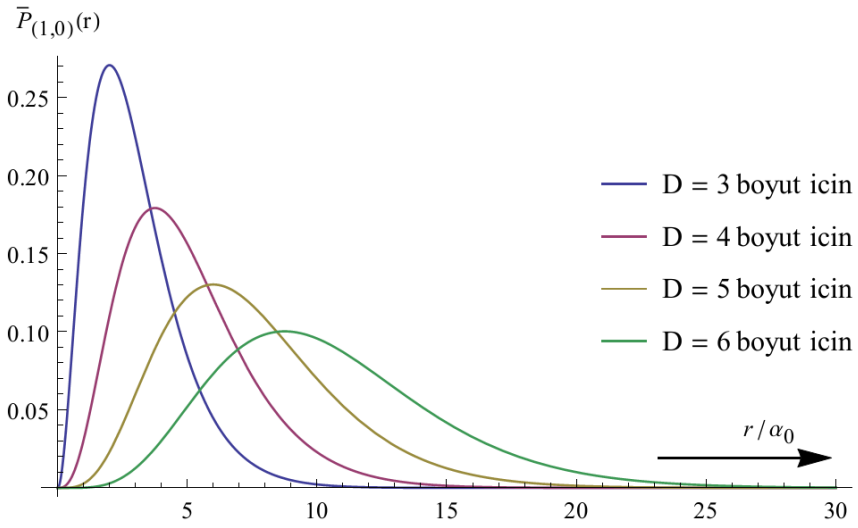
Şekil 2.13. n=4, k=2 kuantum sayıları için $\bar{R}_{(4,2)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri



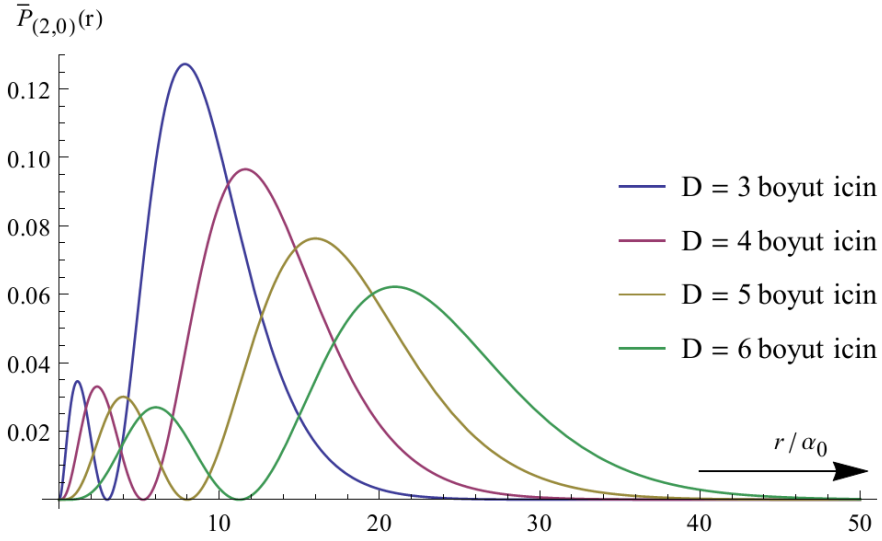
Şekil 2.14. n=4, k=3 kuantum sayıları için boyutsuz şekilde çizilmiş $\bar{R}_{(4,3)}$ radyal dalga fonksiyonlarının grafikleri

2.5.2.2 Radyal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Grafikleri

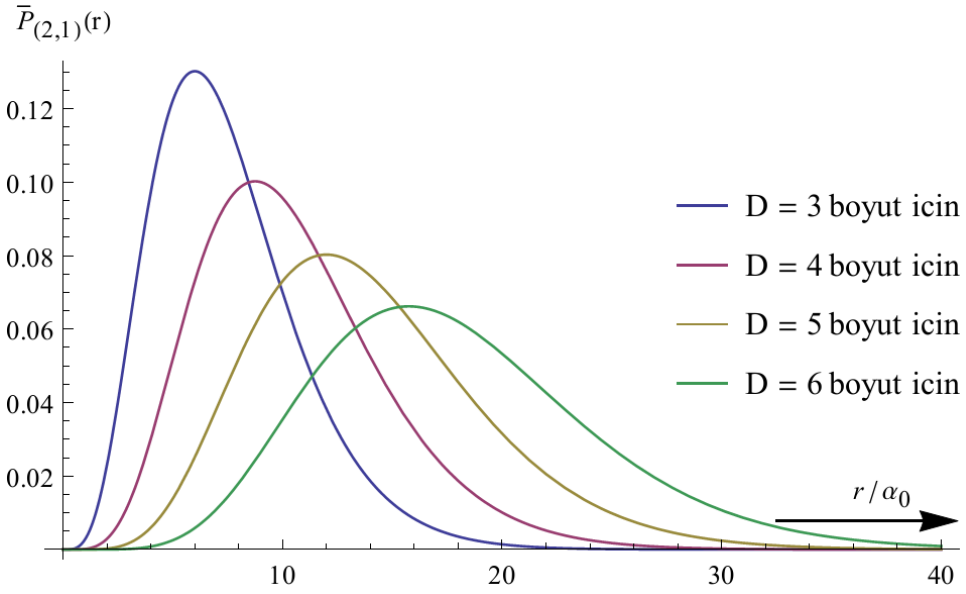
D=3,4,5 ve 6 boyutları için $\bar{P}_{(n,k)}$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri ise aşağıdaki gibidir (Şekil 2.15.-Şekil 2.24).



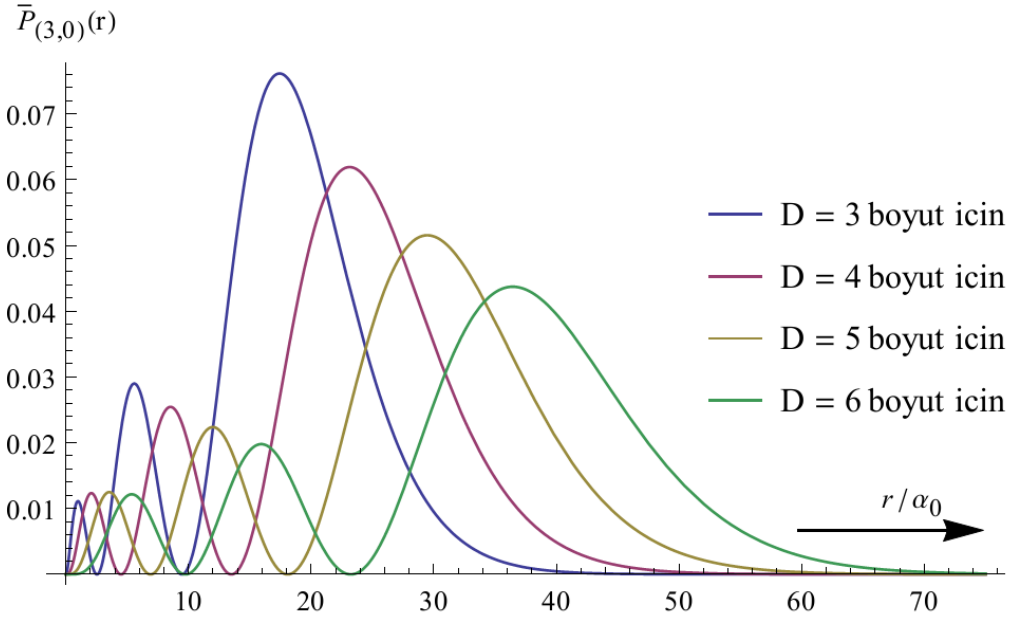
Şekil 2.15. n=1, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(1,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



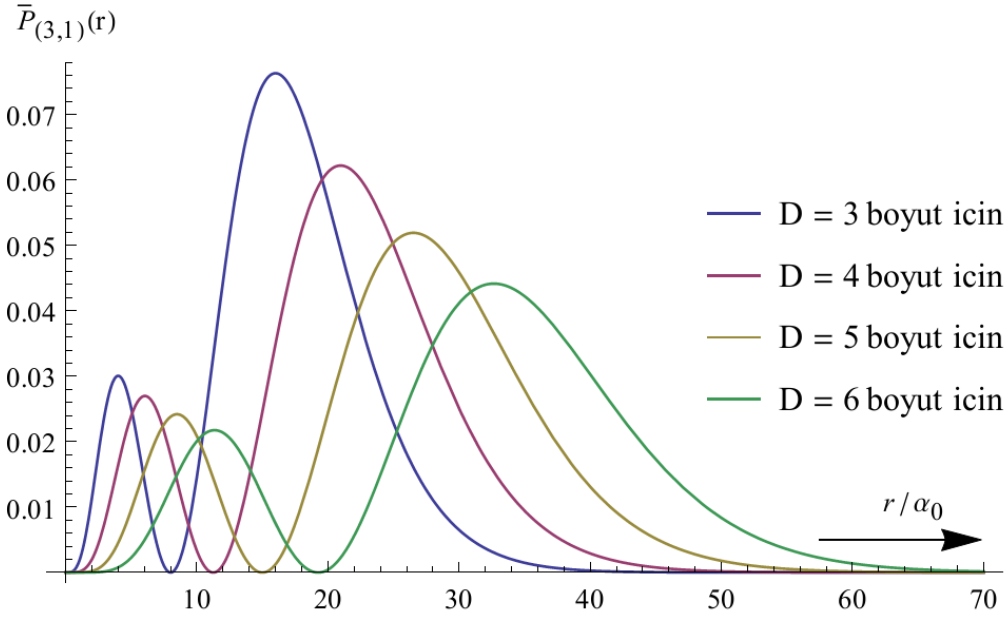
Şekil 2.16. n=2, k=0 kuantum sayıları için olasılık $\bar{P}_{(2,0)}$ yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



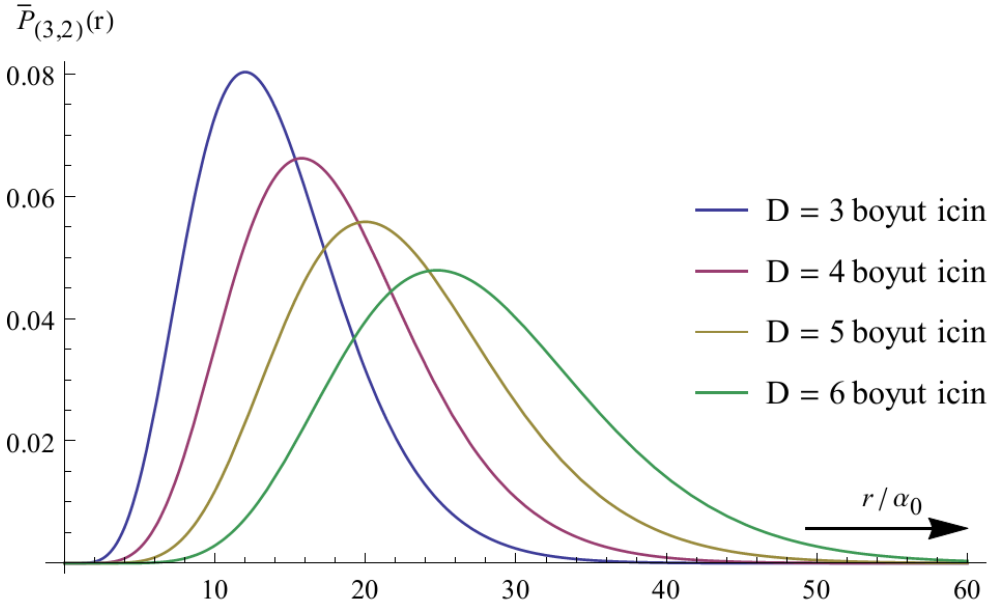
Şekil 2.17. n=2, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(2,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



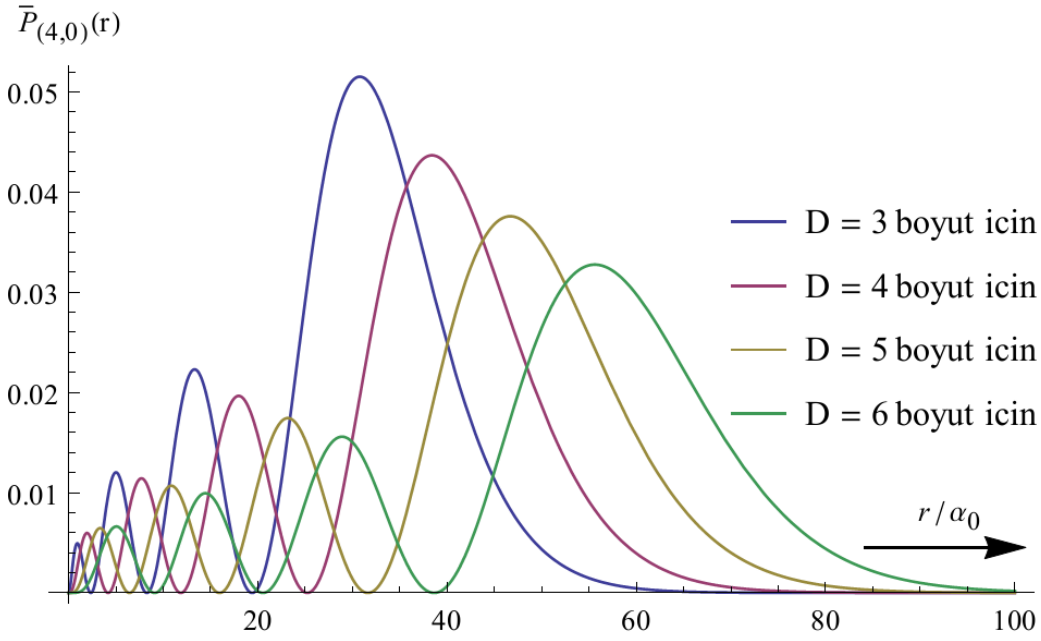
Şekil 2.18. n=3, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



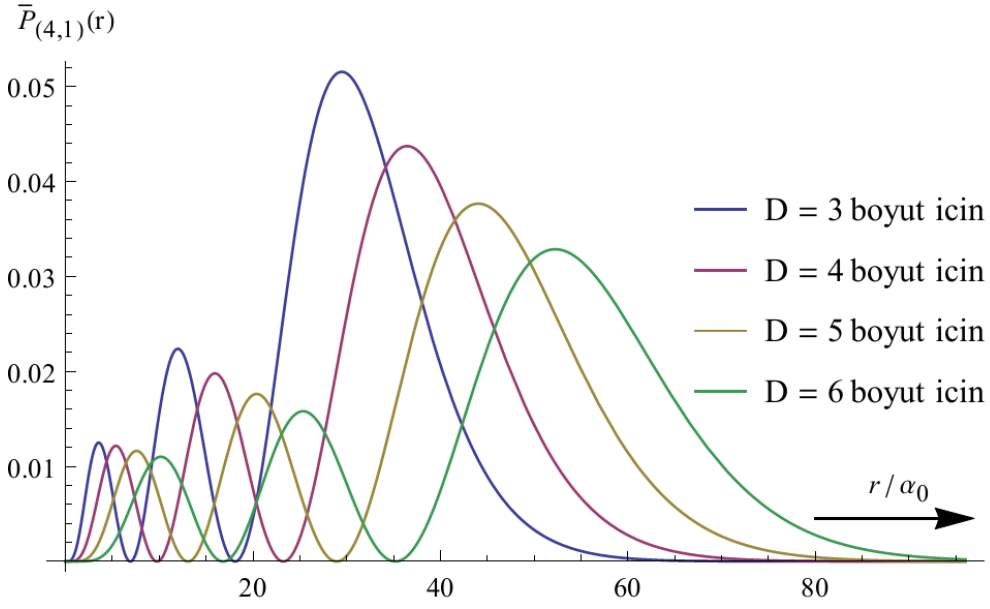
Şekil 2.19. n=3, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



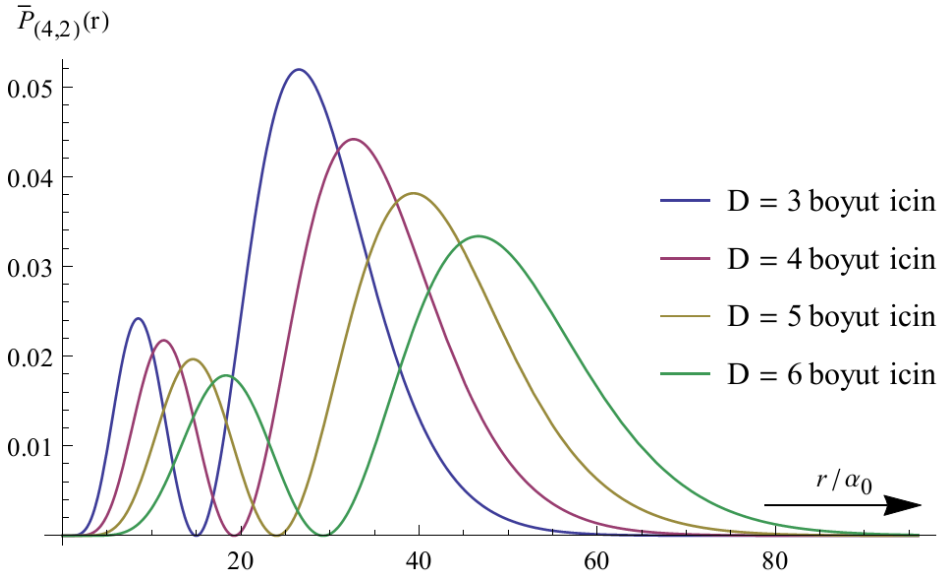
Şekil 2.20. n=3, k=2 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(3,2)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



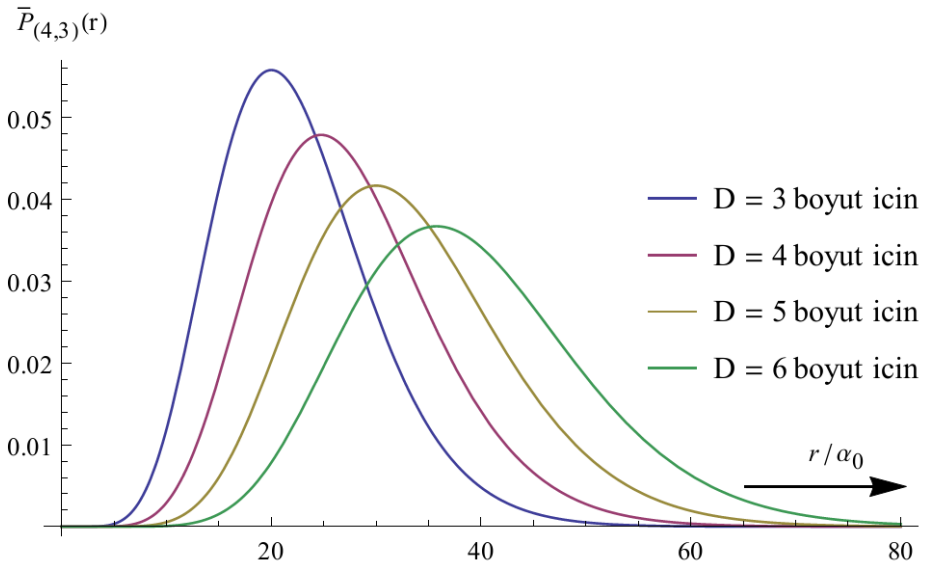
Şekil 2.21. n=4, k=0 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,0)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri



Şekil 2.22. n=4, k=1 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,1)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri

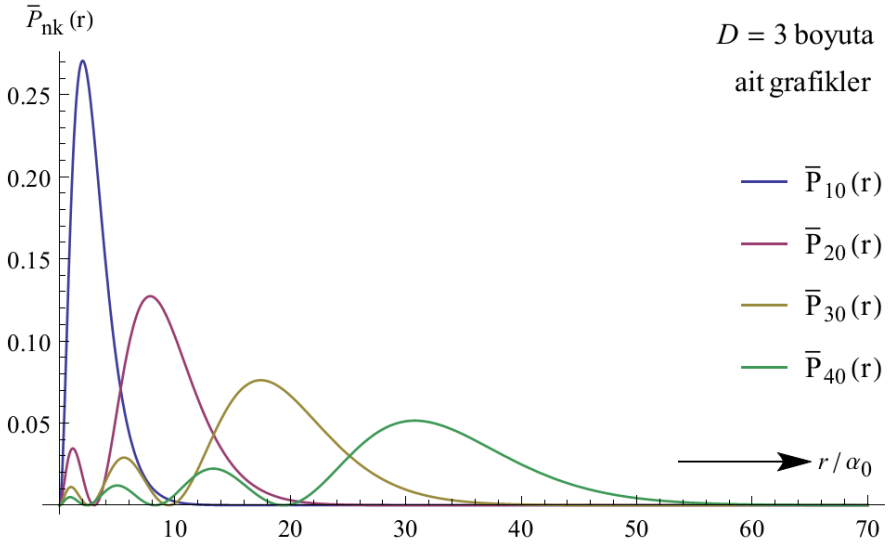


Şekil 2.23. n=4, k=2 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,2)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri

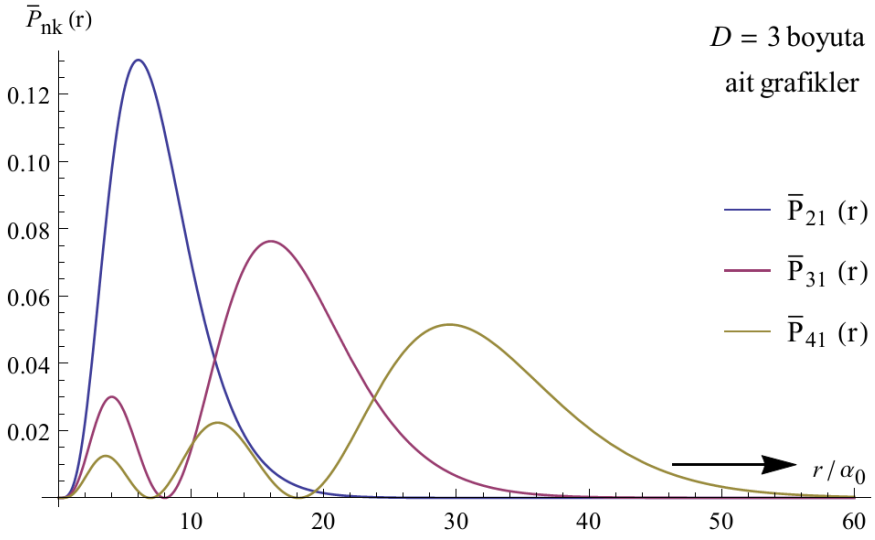


Şekil 2.24. n=4, k=3 kuantum sayıları için $\bar{P}_{(4,3)}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının grafikleri

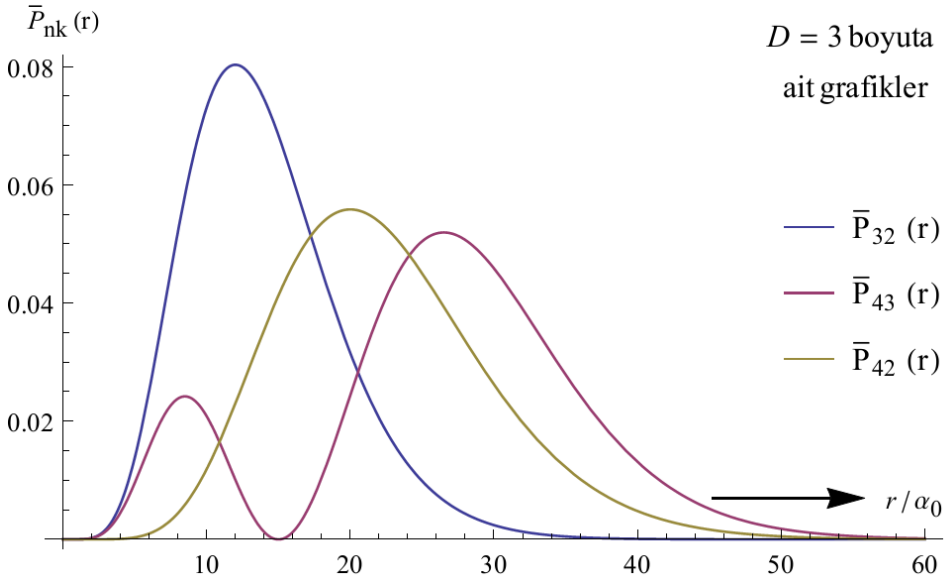
D=3 boyutta hidrojen benzeri atomun çeşitli durumları için r/a_0'a göre radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birbirleriyle karşılaştırmalı grafikleri aşağıda verilmiştir. (Şekil 2.25.-Şekil 2.27).



Şekil 2.25. D=3 boyutta $\bar{P}_{10}(r)$, $\bar{P}_{20}(r)$, $\bar{P}_{30}(r)$, $\bar{P}_{40}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri

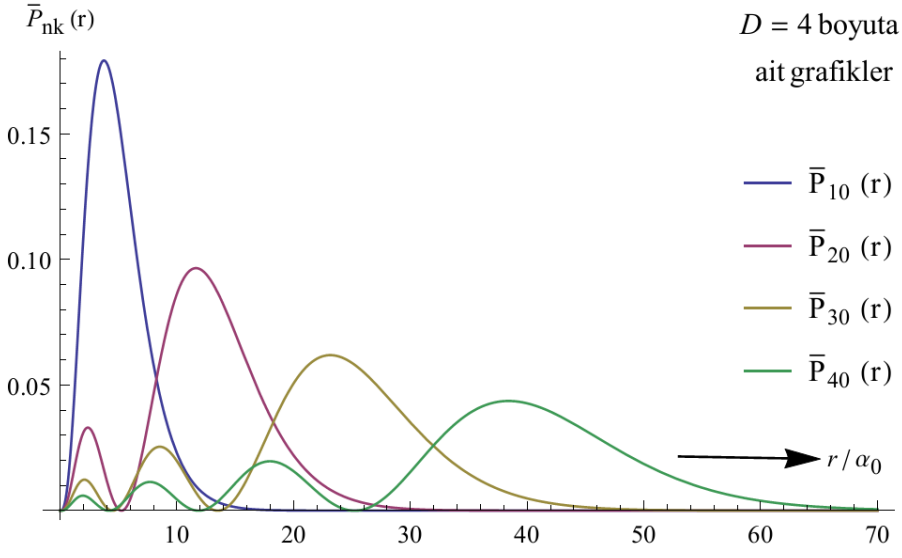


Şekil 2.26. D=3 boyutta $\bar{P}_{21}(r)$, $\bar{P}_{31}(r)$, $\bar{P}_{41}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri

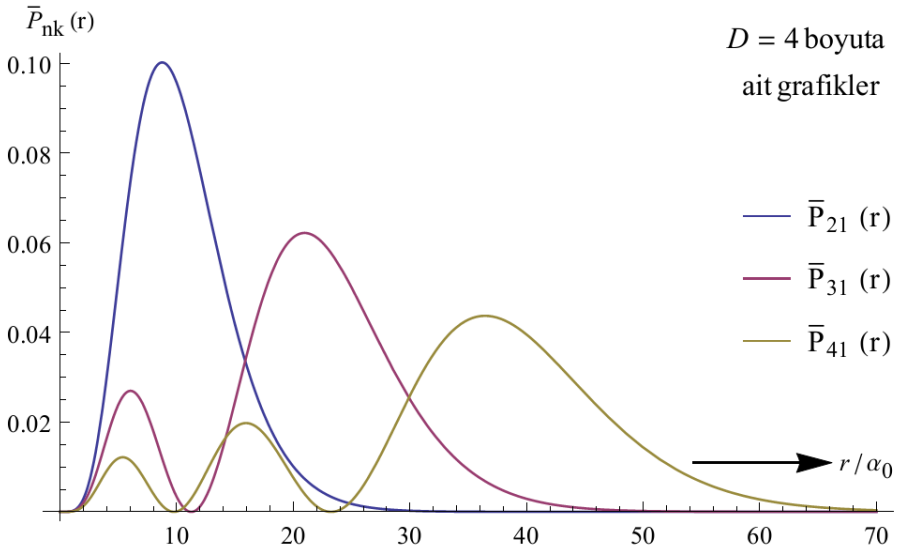


Şekil 2.27. D=3 boyutta $\bar{P}_{32}(r)$, $\bar{P}_{42}(r)$, $\bar{P}_{43}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri

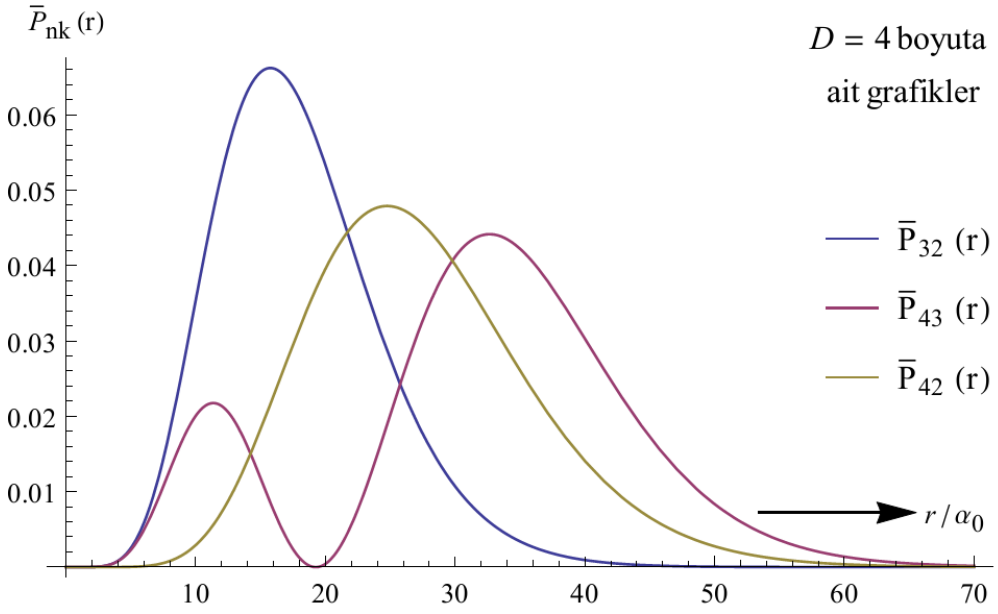
D=4 boyutta hidrojen benzeri atomun çeşitli durumları için r/a_0'a göre radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birbirleriyle karşılaştırmalı grafikleri aşağıda verilmiştir. (Şekil 2.28.-Şekil 2.30)



Şekil 2.28. D=4 boyutta $\bar{P}_{10}(r)$, $\bar{P}_{20}(r)$, $\bar{P}_{30}(r)$, $\bar{P}_{40}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 2.29. D=4 boyutta $\bar{P}_{21}(r)$, $\bar{P}_{31}(r)$, $\bar{P}_{41}(r)$ boyutsuz olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 2.30. D=4 boyutta $\bar{P}_{32}(r)$, $\bar{P}_{42}(r)$, $\bar{P}_{43}(r)$ radyal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının karşılaştırmalı grafikleri

BÖLÜM 3

SONUÇ

Bu çalışmada spini sıfır olan parçacıkların Coulomb alanındaki D-boyutlu uzaydaki göreli hareketi ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Böyle bir problemi çözmek amacıyla problem birkaç alt aşamaya ayrılmıştır. İlk olarak herhangi küresel simetrik bir potansiyel için Klein-Gordon denklemi değişkenlerine ayırma yöntemiyle açısal ve radyal olarak iki denkleme ayrılmıştır. Problemin açısal kısmını çözmek ve açısal çözümü parçacığın yörüngesel açısal momentumuyla ilişkilendirmek amacıyla D boyutta yörüngesel açısal momentum operatörleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Elde edilen yörüngesel açısal momentum operatörleri 3 boyuttaki açısal momentum operatörlerinin genelleştirilmiş halidir. Bulduğumuz açısal momentum operatörlerinin iterasyon bağıntıları açısal kısma ait denklemi çözmek için kolaylık sağlamıştır.

Küresel simetrik potansiyellerin kullanıldığı Klein-Gordon gibi dalga denklemlerinde açısal kısma ait denklemin çözümü her zaman ultra küresel harmonikler cinsinden standart biçimde ifade edilebilir. D-boyutlu uzaydaki parçacıkların yörüngesel açısal momentum operatörünün öz fonksiyonları, Gegenbauer polinomlarıyla ifade edilen ultra küresel harmoniklerdir. D-boyutlu uzaydaki açısal momentum operatörünün öz değerleri de $N_{D-2} = k$ bir kuantum ayırma sabiti olmak üzere $k(k + D - 2)$ şeklinde bulundu. Bu durum D boyutu arttıkça aynı yörüngesel açısal momentum

sayısına sahip durumlar için parçacığın yörüngesel açısal momentumunun arttığını gösterir.

Parçacığa ait enerji öz fonksiyonlarını ve enerji öz değerlerini elde etmek amacıyla Coulomb potansiyelinin radyal çözümü irdelenmiştir. Elde edilen çözümler sonlu ve fiziksel olarak anlamlı çözümlerdir. Bu çözümler yapılırken 3 boyutlu Klein-Gordon denklemindeki benzerliği dolayısıyla aynı prosedürler uygulanmıştır. Bu sayede 3 boyuttaki Klein-Gordon denklemlerinin çözümleri D-boyuta genelleştirilebilmiştir. Radyal dalga denkleminin çözümleri yine 3 boyuttaki radyal denkleme benzer şekilde Asosiye Laguerre polinomları cinsinden ifade edilebilmiştir. Radyal denkleminin çözümü yapılırken D boyutunun hidrojen benzeri atom sistemindeki çekirdek yükü Z için bir kısıtlama getirmiştir. D=3 için veya için $Z \leq 68$, D=4 için $Z \leq 137$, D=5 için ise $Z \leq 205$ dir. Hidrojen benzeri atomdaki parçacığın toplam rölativistik enerjisi D boyutu arttıkça artmaktadır. Buna karşın parçacığın atoma bağlanma enerjisi ise düşmektedir. Yani parçacık atomun çekirdeğinden uzaklaşmaktadır.

Son olarak parçacığın olasılık fonksiyonları küresel koordinatlarda ifade edilerek hesaplanmıştır. Bu fonksiyonlar olasılık yoğunluğu ve olasılık akısı olarak adlandırılır ve süreklilik bağıntısıyla birbirine bağlıdır. Elde edilen bu olasılık fonksiyonları da kullanarak parçacığın D boyutuna bağlı olarak boyutsuz radyal dalga fonksiyonlarının ve olasılık yoğunluk grafikleri çizilmiştir. Hidrojen atomunda ve çok elektronlu atomlarda her kuantum seviyesinin dalga fonksiyonlarını kullanarak $\bar{P}_{nk}$ grafikleri çizildiğinde, bazı kuantum seviyelerinde dışta kalması gereken bir bulutun çekirdeğe doğru sokulduğu ve elektron yarıçapının beklenen değerinin, bir önceki bulut için söz konusu olan beklenen değerden küçük olduğu gözlenir. Buna yörünge katlanması (orbital penetration) denir. Bu durumun $D > 3$ boyutları için de aynı şekilde devam ettiği gösterildi. Ayrıca Parçacığın $\langle r \rangle_{nk}$ yarıçap beklenen değerleri ise boyut arttıkça monoton biçimde büyümektedir. $\langle r \rangle_{nk}$ beklenen değerler arasındaki büyüklük küçüklük ilişkilerin ise $D > 3$ boyutları için de aynı kaldığı gösterildi.

Bu tezde yapılan çalışmalar, spini sıfır olamayan parçacıkları tanımlayan Dirac denklemi ve benzer dalga denklemlerini D boyuta genelleştirip çözebilmek için bir kaynak olarak görülebilir.

KAYNAKLAR

Al-Jaber, S. M. (1998). Hydrogen atom in N-dimensions'' *International Journal of Theoretical Physics, 37*, 1289–1298. doi: 10.1023/A:1026679921970

Al-Jaber, S. (1995). Quantization of angular momentum in the N-dimensional space. *Nuovo Cimento B 110*, 993-995. doi: 10.1007/BF02722866

Arfken, G. (2012). *Mathematical Methods for Physicists*. U.S.A: Academic Press.

Bayin, S. S. (2006). *Mathematical Methods in Science and Engineering*. New Jersey: Wiley.

Bell, W. W. (1968). *Special Functions For Scientists And Engineers.* Canada: D. Van Nostrand Company Ltd.

Cardoso , J. L., Alvarez-Nodarse. R., (2003). Recurrence relations for radial wave functions for the N-th dimensional oscillators and hydrogenlike atoms. *Journal of Physics A: Mathematical and General, 36*, 2055-2068. doi: 10.1088/0305-4470/36/8/304

Davydov, A. S. (1965). *Quantum Mechanics*. London: Pergamon Press Ltd.

Granzow, K. (1964). N-dimensional total orbital angular momentum operator. II. Explicit representations'', *Journal of Mathematical Physics 5*(10), 1474–1477. doi: 10.1063/1.1704015

Özcan, M. (2012). Scalar Casimir effect between two concentric D-dimensional spheres, 1-14, 1 Ocak 2019 tarihinde https://arxiv.org/abs/1207.4612 adresinden erişildi.

Özcan, M . (2006). Green's Function for a n-Dimensional Closed, Static Universe and with a Spherical Boundary *Classical and Quantum Gravity, 23,* 5531-5546 doi: 10.1088/0264-9381/23/18/004

Kirchberg, A., Lange, J. D., Pisani , P.A.G. & Wipf , A. (2003). Algebraic solution of the supersymmetric hydrogen atom in d-dimensions. *Annals of Physics*, *303*, 359-388. doi: 10.1016/S0003-4916(03)00003-4

Lee, J. M. (1997). *Riemannian manifolds*. New York: Springer-Verlag.

Liboff, R. (1980). *Introductory Quantum Mechanics*. U.S.A: Addison-Wesley Publishing Company

Papp , E. (1995). q-analogs of the radial Schrödinger equation in N-space dimensions. *Physical Review A*, 52, 101–106. doi: 10.1103/PhysRevA.52.101.

Zhao, Q. & Zhao , J. (2006). Relation between dimension and angular momentum for radially symmetric potential in N-dimensional space. *Communications in Theoretical Physics 46*, 429-434.

Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

EKLER

Ek-A D Boyutta Küresel Geometri İle İlgili Tanımlar ve Formüller

D-boyuttaki yörüngesel açısal momentum konusunun detaylarına girmeden önce D-boyutta küresel geometri ile ilgili bazı bilgileri gözden geçirelim.

D boyutta aşağıdaki biçimde tanımlanmış noktalar kümesine D-yuvar ya da D boyutlu r yarıçaplı disk denilir ve $B^D(r)$ sembolüyle gösterilir. Matematiksel olarak D-yuvar

$$B^D(r) = D^D(r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2 \leq r^2\} \qquad \text{(Ek-A.1)}$$

şeklinde tanımlanır.

D-boyutta (D-1)-küre ise , $\mathbb{R}^D$ içinde sabit bir noktaya uzaklıkları sabit bir r uzaklığına mesafeleri aynı olan noktalar kümesi olarak tanımlanır. Matematiksel olarak D-yuvarın topolojik sınırı $\partial B^D(r) = S^{D-1}$ olarak şeklinde de tasvir edilir.

$$\partial B^D(r) = S^{D-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D : \sum_{i=1}^{D} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2 = r^2$$

(Ek-A.2)

Kartezyen koordinatlar x_i ve D-boyuttaki kutupsal koordinatlar arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir [7].

$$\vec{r} = x_1\vec{\imath}_1 + x_2\vec{\imath}_2 + \cdots \dots . + x_{D-1}\vec{\imath}_{D-1} + x_D\vec{\imath}_D$$

$$x_1 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \cos\theta_{D-1}$$

$$x_2 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots \sin\theta_{D-2} \sin\theta_{D-1}$$

$\vdots$

$x_b = r \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{D-b}\cos\theta_{D-b+1} \quad , \quad (D-2 \geq b \geq 3),$ (Ek-A.3)

$\vdots$

$x_{D-2} = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$

$x_{D-1} = r \sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_D = r \cos\theta_1,$ (Ek-A.4)

Burada kutupsal koordinat değişkenleri,

$r \geq 0,$

$(0 \leq \theta_i \leq \pi),\ 1 \leq i \leq D-2$

$(0 \leq \theta_{D-1}(=\phi) \leq 2\pi)$ (Ek-A.5)

şeklinde olmaktadır.

(D+1)-boyutta küresel metrik, sonsuz küçük yay uzunluğun karesi cinsinden

$\{x^\mu\} = (x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{D-1}, x^D) = (ct, \theta_0 = r, \theta_1, \theta_2 \dots, \theta_{D-1}(=\varphi))$ (Ek-A.6)

$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\sum_{i=1}^{D-1}(\prod_{j=1}^{i-1}\sin^2\theta_j)d\theta_i^2$ (Ek-A.7)

$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2 =$
$c^2dt^2 - [dr^2 + r^2d\theta_1^2 + r^2\sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \cdots . + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 \dots \dots \sin^2\theta_{D-2}d\varphi^2]$

(Ek-A.8)

biçiminde yazılabilir [7]. Metrik tensörün determinantı:

$$g = \det[g_{\mu\nu}] = \prod_{\alpha=0}^{D} g_{\alpha\alpha}$$
$$= (-1)^D\left(r^{D-1}\sin\theta_{D-2}\sin^2\theta_{D-3}\sin^3\theta_{D-4}\cdots\sin^{j-1}\theta_{D-j}\cdots\sin^{D-2}\theta_1\right)^2$$

(Ek-A.9)

şeklindedir. $\vec{\nabla}_D$ nabla operatörünü küresel koordinatlarda

$$\vec{\nabla}_D = \sum_{i,j=1}^{D}\left(g^{ij}\sqrt{g_{jj}}\hat{\boldsymbol{e}}_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad \text{(Ek-A.10)}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{D-1}\frac{1}{rq_i}\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_i} \quad \text{(Ek-A.11)}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_2}\frac{1}{r\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \cdots + \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_{D-1}}\frac{1}{r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{D-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{D-1}\frac{1}{rq_i}\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_i} \quad \text{(Ek-A.12)}$$

şeklindedir. Bu ifadede küresel koordinatlarda ortogonal yönlerde tanımlanmış birim vektörler,

$$\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial \mathrm{r}}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial \mathrm{r}}\right|} = \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta_i}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta_i}\right|} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta_i} = \frac{1}{q_i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \quad \text{(Ek-A.13)}$$

şeklinde tanımlanır. q_i 'ler de

$$q_i = \prod_{j=1}^{i-1}(\sin\theta_j) \quad \text{(Ek-A.14)}$$

şeklinde tanımlanır.

D+1 boyutlu uzay- zamandaki Laplace operatörüne D'Alembert operatörü denilir ve □ ile gösterilir.

$$\square = \frac{1}{\sqrt{(-1)^D g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g^{\mu\nu}\sqrt{(-1)^D g}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \quad \text{(Ek-A.15)}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \vec{\nabla}_D^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} - \vec{\nabla}_D^2 \quad \text{(Ek-A.16)}$$

Burada $\vec{\nabla}_D^2$ şeklinde gösterilen sadece uzay koordinatlarına bağlı olan Laplace operatörüdür.

$$\Delta_D = \vec{\nabla}_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_S{}^{D-1}}{r^2} =$$

$$\frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) +$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{sin^{D-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin^{D-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) +\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{D-3}\left[\frac{1}{\sin^j\theta_{D-j-1}\prod_{i=1}^{D-j-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\left(\sin^j\theta_{D-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-j-1}}\right)\right] + \frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2}\sin^2\theta_i}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

(Ek-A.17)

D=2,3,4,5 ve 6 boyutlar için metrik tensör ve tersi, jakobiyen ve dönüşüm matrislerini bulalım. Dönüşüm sistemleri aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_{D-1}}\\ \frac{\partial}{\partial x_D}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\theta_{D-2}}{\partial x_1} & \frac{\partial\theta_{D-1}}{\partial x_1}\\ \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\theta_{D-2}}{\partial x_2} & \frac{\partial\theta_{D-1}}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial r}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_{D-1}} & \cdots & \frac{\partial\theta_{D-2}}{\partial x_{D-1}} & \frac{\partial\theta_{D-1}}{\partial x_{D-1}}\\ \frac{\partial r}{\partial x_D} & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial\theta_{D-2}}{\partial x_D} & \frac{\partial\theta_{D-1}}{\partial x_D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial\theta_{D-2}}\\ \frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.18)}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right] = [A]_{ij}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right] \quad \text{(Ek-A.19)}$$

$$X = A.R \quad \text{(Ek-A.20)}$$

$$A = J.\left[g_{ij}\right]^{-1} \quad \text{(Ek-A.21)}$$

$$\left[g_{ij}\right] = J^T.J \quad \text{(Ek-A.22)}$$

$$J = \begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\theta_0} & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_{D-2}} & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_{D-1}}\\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta_0} & \frac{\partial x_2}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial\theta_{D-2}} & \frac{\partial x_2}{\partial\theta_{D-1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial x_{D-1}}{\partial\theta_0} & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial\theta_{D-2}} & \frac{\partial x_{D-1}}{\partial\theta_{D-1}}\\ \frac{\partial x_D}{\partial\theta_0} & \frac{\partial x_D}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_D}{\partial\theta_{D-2}} & \frac{\partial x_D}{\partial\theta_{D-1}}\end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.23)}$$

D=2,3,4,5 ve 6 boyutları için metrik tensör $\left[g_{ij}\right]$, J jakobiyen ve türev operatörlerinin A şeklinde gösterdiğimiz dönüşüm matrisleri aşağıdaki gibidir.

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1$

$0 \le \theta_1 \le 2\pi$

$0 < r < \infty$ (Ek-A.24)

$$[g_{ij}]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.25)}$$

$$[g_{ij}]_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.26)}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.27)}$$

$$A_2 = J_2 . [g_2]_{ij}^{-1} \quad \text{(Ek-A.28)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} \\ \sin\theta_1 & \frac{\cos\theta_1}{r} \end{pmatrix} \quad \text{(Ek-A.29)}$$

D=3 için

$x_1 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2$

$x_3 = r\cos\theta_1$

$0 \le \theta_1 \le \pi$ (Ek-A.30)

$0 \le \theta_2 \le 2\pi$

$0 < r < \infty$

$$[g_{ij}]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.31)}$$

$$[g_{ij}]_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta_1} \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.32)}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & r\sin\theta_1 \sin\theta_2 & r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ r\sin\theta_1 \cos\theta_2 & r\sin\theta_1 \cos\theta_2 & r\sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ r\cos\theta_1 & r\cos\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.33)}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1}{r} & \frac{\cos\theta_2}{r\sin\theta_1} \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.34)}$$

D=4 için

$x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$

$x_2 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3$

$x_3 = r\sin\theta_1 \cos\theta_2$

$x_4 = r\cos\theta_1,$

$0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi$

$0 \le \theta_3 \le 2\pi$

$0 < r < \infty$ (Ek-A.35)

$$[g_{ij}]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.36)}$$

$$[g_{ij}]_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2} \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.37)}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & r\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 & r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 & r\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 & r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & r\cos\theta_1 \cos\theta_2 & -r\sin\theta_1 \sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.38)

$$A_4 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\theta_3}{r} & \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{r\sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_3}{r\sin\theta_1 \sin\theta_2} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 & \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{r} & \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_2}{r\sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_3}{r\sin\theta_1 \sin\theta_2} \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1} & 0 \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.39)

D=5 için

$x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4$

$x_2 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4$

$x_3 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$

$x_4 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_5 = r\cos\theta_1,$

$0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le \pi$

$0 \le \theta_4 \le 2\pi$

$0 < r < \infty$ (Ek-A.40)

$$[g_{ij}]_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.41)

$$\left[g_{ij}\right]_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3} \end{bmatrix} \quad \text{(Ek-A.42)}$$

$J_5 =$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_4 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.43)

$$A_5 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & \frac{\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_4}{r} & \frac{\sin\theta_3\cos\theta_2\cos\theta_4}{r\sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_3\cos\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & -\frac{\sin\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 & \frac{\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_1}{r} & \frac{\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_2}{r\sin\theta_1} & \frac{\sin\theta_4\cos\theta_3}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & \frac{\cos\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_3}{r} & \frac{\cos\theta_2\cos\theta_3}{r\sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_3}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{r} & -\frac{\sin\theta_2}{r\sin\theta_1} & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin\theta_1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.44)

D=6 için

$x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5$

$x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$

$x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$x_5 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_6 = r\cos\theta_1,$

$0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \le \pi$

$$0 \le \theta_5 \le 2\pi$$

$$0 < r < \infty \qquad \text{(Ek-A.45)}$$

$$\left[g_{ij}\right]_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.46)

$$\left[g_{ij}\right]_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4} \end{bmatrix}$$

(Ek-A.47)

$$J_6 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_5 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4\cos\theta \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4\sin\theta \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & r\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \mathrm{r}\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.48)

$$A_6 = \begin{bmatrix} \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\theta_5 & \frac{\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_1\cos\theta_5}{r} & \frac{\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\theta_2\cos\theta_5}{r\sin\theta_1} & \frac{\sin\theta_4\cos\theta_3\cos\theta_5}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & \frac{\cos\theta_4\cos\theta_5}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} & -\frac{\sin\theta_5}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5 & \frac{\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_1}{r} & \frac{\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_2}{r\sin\theta_1} & \frac{\sin\theta_4\sin\theta_5\cos\theta_3}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & \frac{\sin\theta_5\cos\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} & \frac{\cos\theta_5}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 & \frac{\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_4}{r} & \frac{\sin\theta_3\cos\theta_2\cos\theta_4}{r\sin\theta_1} & \frac{\cos\theta_3\cos\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & -\frac{\sin\theta_4}{r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3} & 0 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1\cos(\theta_3)}{r} & \frac{\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)}{r\sin\theta_1} & -\frac{\sin\theta_3}{r\sin\theta_1\sin\theta_2} & 0 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{r} & -\frac{\sin(\theta_2)\csc(\theta_1)}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 & -\frac{\sin(\theta_1)}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ek-A.49)

Ek-B D-Boyutlu Yuvarların Hiper Hacimleri ve Hiper Alanları

$B^D(r)$ yuvarı için sonsuz küçük hacim elemanı;

$$dV_{B^D(r)} = r^{D-1}\sin^{D-2}\theta_1 \sin^{D-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{D-3} \sin\theta_{D-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{D-2} d\theta_{D-1}$$

(Ek-B.1)

şeklindedir. Bu hacim elementinin her iki tarafının integralini alırsak $B^D(r)$ bölgesinin hiper hacmin bulmuş oluruz. Burada $\theta_{D-1} = \varphi$ ve diğer kutupsal koordinatlar;

$r \geq 0,$

$(0 \leq \theta_i \leq \pi),\ 1 \leq i \leq D-2$

$(0 \leq \phi = \theta_{D-1} \leq 2\pi)$ (Ek-B.2)

şeklindedir. O halde integral;

$$V\left(D^D(r)\right) = V_D(R) =$$
$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} r^{D-1} \sin^{D-2}(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{D-2}) d\varphi d\theta_{D-2} \cdots d\theta_1 dr \quad \text{(Ek-B.3)}$$

şeklinin alır. Bu integraldeki her bir değişkene ait fonksiyonlar çarpım şeklinde yazılabilir. O halde bu integrali;

$$V\left(D^D(r)\right) =$$
$$\left(\int_0^R r^{D-1}\, dr\right)\left(\int_0^\pi \sin^{D-2}\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^\pi \sin^{D-3}\theta_2 d\theta_2\right) \ldots \left(\int_0^\pi \sin\theta_{D-2} d\theta_{D-2}\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta_{D-1}\right)$$

(Ek-B.4)

şeklinde çarpanlar şeklinde ifade edilebilir. Radyal kısmın ve θ_{D-1} 'ya ait integraller alınırsa,

$$V\left(D^D(r)\right) = \frac{R^D}{D}\left(\int_0^{\pi} \sin^{D-2}\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^{D-2}\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^{D-3}\theta_2 d\theta_2\right) \times \ldots$$

$$\times \left(\int_0^{\pi} \sin\ \theta_{D-2} d\theta_{D-2}\right) \quad \text{(Ek-B.5)}$$

şeklinde yazılabilir. Açısal integraller için $\sin(x)$ fonksiyonun simetrisini kullanırsak integrali aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$V_D(R) = \frac{R^D}{D}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{D-2}(\theta_1) d\theta_1\right) \cdots \left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\theta_{D-1}\right) \quad \text{(Ek-B.6)}$$

Burada açısal integraller,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^x d\theta = B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{(Ek-B.7)}$$

şeklinde hesaplanır . Burada $B(x,y)$, Beta fonksiyonudur ve

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(\mathrm{y})}{\Gamma(\mathrm{x+y})} \quad \text{(Ek-B.8)}$$

şeklindedir [19]. Burada Γ 'ler gamma fonksiyonlarıdır. O halde (Ek-D.5) integrali beta fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda integrali

$$V_D(R) = \frac{R^D}{D} B\left(\frac{D-1}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{D-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) 2B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{(Ek-B.9)}$$

$$V_D(R) = \frac{R^D}{D} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{\Gamma(\frac{D-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \ldots \frac{\Gamma(\frac{2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{2})} \quad \text{(Ek-B.10)}$$

biçimindedir. Gereken hesaplamalar yapılırsa D-boyutlu R yarıçaplı yuvarın hacmi

$$V_D(R) = Vol\left(\mathbb{B}^D(r)\right) = V\left(D^D(r)\right) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}} R^D}{D\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}} R^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} \quad \text{(Ek-B.11)}$$

şeklinde olur. D-boyutlu yuvarların alanını da $\partial\mathbb{B}^D(r) = \mathbb{S}^{D-1}$ olmak üzere

$$Vol\left(\partial\mathbb{B}^D(r)\right) = V\left(\partial\mathbb{B}^D(r)\right) = A_{D-1}(R) = \frac{d}{dR} V_D(R) \quad \text{(Ek-B.12)}$$

$$A\left(\mathbb{S}^{D-1}(r)\right) = V\left(\mathbb{S}^{D-1}(r)\right) = \frac{D\pi^{\frac{D}{2}}R^{D-1}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} \quad \text{(Ek-B.13)}$$

şeklinde tanımlanır [1]. Burada $A_{D-1}(R)$, $\mathbb{S}^{D-1}$ 'nın hiper alanıdır.

Ek-C Gegenbauer Denklemi ve Polinomları

Gegenbauer denklemi, D boyutlu küresel simetrik problemlerde Laplasyen operatörünü içeren diferansiyel denklemleri çözerken karşımıza çıkar. Gegenbauer diferansiyel denkleminin sonlu çözümleri de Gegenbauer polinomudur. D boyutta bir hiper-kürenin yüzey salınımlarında küresel harmoniklerin doğal uzantısı olan ultra küresel harmonikleri ifade etmek için Gegenbauer polinomları kullanılır [20].

Gegenbauer diferansiyel denklemin genel hali

$$(1-x^2)\frac{d^2C_n^\lambda(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)\frac{dC_n^\lambda(x)}{dx} + n(n+2\lambda)C_n^\lambda(x) = 0 \quad \text{(Ek-C.1)}$$

ile tanımlanır [18]. Burada λ mutlaka bir tam sayı olmak zorunda değildir fakat n tam sayı olmalıdır. Frobenius seri çözümünden elde edilen (Ek-C.1) denkleminin Gegenbauer polinomları aşağıdaki gibidir

$$C_0^\lambda(x) = 1$$

$$C_1^\lambda(x) = 2\lambda x$$

$$\vdots$$

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!}(2x)^{n-2r} \quad \text{(Ek-C.2)}$$

Gegenbauer polinomları için tekrarlama ve türev bağıntıları;

$$C_n^\lambda(x) = \frac{1}{n}[2x(n+\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x) - (n+2\lambda-2)C_{n-2}^\lambda(x)] \quad \text{(Ek-C.3)}$$

ve

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^\lambda(x) = 2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{n-m}^{\lambda+m}(x) \quad \text{(Ek-A.2)}$$

Gegenbauer polinomları için Rodrigues formülü

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(-2)^n}{n!}\frac{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2n)}(1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right] \quad \text{(Ek-C.4)}$$

Gegenbauer polinomları için normalizasyon bağıntıları;

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(x)C_m^{\lambda}(x)\,(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx = 0, \quad n \neq m \; için \quad \text{(Ek-C.5)}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[C_n^{(\lambda)}(x)\right]^2(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} \quad \text{(Ek-C.6)}$$

$x = cos\theta_{\mu}$ için

$$\int_0^{\pi}\left[C_n^{(\lambda)}(cos\theta_{\mu})\right]^2(\sin\theta_{\mu})^{2\lambda}d\theta_{\mu} = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} \quad \text{(Ek-C.7)}$$

şeklindedir.

Ek-D Asosiye Laguerre Denklemi ve Polinomları

Aosiye Laguerre polinomları hidrojen benzeri tek elektronlu atom için Schrödinger, Klein-Gordon ve Dirac benzeri denklemlerin Coulomb benzeri potansiyeller için radyal kısmının çözümünde karşımıza çıkmaktadır. Kuantum mekaniğinde bazı fiziksel sistemlerin davranışlarının incelenmesi açısından oldukça önemlidir. Asosiye Laguerre diferansiyel denkleminin genel hali [18]

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 \quad \text{(Ek-D.1)}$$

ile tanlmlanlr. Burada α mutlaka bir tam sayı olmak zorunda değildir fakat n tam sayı olmalıdır. Frobenius seri çözümünden elde edilen (Ek-D.1) denkleminin Asosiye Laguerre polinomları aşağıdaki gibidir:

$$L_0^{\alpha}(x) = 1$$

$$L_1^{\alpha}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{\alpha}(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+1)(\alpha+2)]$$

$$L_3^{\alpha}(x) = \frac{1}{6}[-x^3 + 3(\alpha+3)x^2 - 3(\alpha+2)(\alpha+3)x + (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)]$$

⋮ ⋮ ⋮

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{k!(n-k)!(k+\alpha)} x^k \quad \text{(Ek-D.2)}$$

şeklindedir.

Asosiye Laguerre polinomları

$$L_n^k(x) = \frac{\Gamma(n+k+1)}{(n)!\Gamma(k+1)}\ {}_1F_1(-n, k+1;\ x) \quad \text{(Ek-D.3)}$$

denklemiyle de verilmektedir. Burada $F_1(\eta, \gamma;\ x)$ konfluent hipergeometrik fonksiyon ve $\Gamma(x)$, Gamma fonksiyonudur. Konfluent hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır [19]:

$${}_1F_1(\eta, \gamma, ; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta)_k}{(\gamma)_k} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(Ek-D.4)}$$

Burada $(\eta)_k$ Pochhammer sembolüdür ve

$$(\eta)_k = \eta(\eta+1) \dots (\eta+k-1) = \frac{\Gamma(\eta+k)}{\Gamma(\eta)} \quad \text{(Ek-D.5)}$$

$$(\eta)_0 = 1 \quad \text{(Ek-D.6)}$$

yapısına sahiptir.

Asosiye Laguerre polinomları ile ilgili bazı tekrarlama bağıntıları,

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \quad \text{(Ek-D.7)}$$

$$x\frac{dL_n^k(x)}{dx} = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \quad \text{(Ek-D.8)}$$

şeklindedir.

Asosiye Laguerre polinomları için Rodrigues bağıntıları;

$$L_n^a(x) = \frac{e^x x^{-a}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+a}) \quad \text{(Ek-D.9)}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}L_n^a(x) = (-1)^k L_{n-k}^{(a+k)}(x) \quad \text{(Ek-D.10)}$$

şeklindedir.

Asosiye Laguerre polinomları için normalizasyon bağıntıları;

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn}. \quad \text{(Ek-D.11)}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{k+1}[L_n^k(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n!}(2n+k+1) \quad \text{(Ek-D.12)}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha+2}\, e^{-x}\left(L_n^a(x)\right)^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}[(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)+2n(n+\alpha)] \quad \text{(Ek-D.13)}$$

$$J_{n,\alpha}^{(\gamma)} = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{\alpha+\gamma}[L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n-k-\gamma)\Gamma(\alpha+k+\gamma+1)}{\Gamma(-k-\gamma)\Gamma(\alpha+k+1)k!(n-k)!} \quad \text{(Ek-D.14)}$$

şeklindedir.

Ek-E Gamma Fonksiyonları

Gamma fonksiyonu matematikte faktöriyel fonksiyonun karmaşık ve tam sayılar olmayan reel sayılar için genellemesi olan bir fonksiyondur. Γ simgesi ile gösterilir [19]. Literatürde Gamma fonksiyonun farklı formlarla karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan birkaçı aşağıdaki gibidir:

- $\Gamma(z)$ fonksiyonunun Euler sonsuz limit fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3\ldots\ldots(n-1).n}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \quad \text{(Ek-E.1)}$$

Burada $z \neq 0, -1,$ olarak tanımlanır.

- $\Gamma(z)$ fonksiyonunun Euler integral formu,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-r}\, t^{x-1} dt,\ Rez > 0 \quad \text{(Ek-E.2)}$$

- γ, Euler sabiti olmak üzere $\Gamma(z)$ fonksiyonunun Weierstrass sonsuz çarpım formu [22],

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{Z}{n})e^{-\frac{z}{n}} \quad \text{(Ek-E.3)}$$

şeklindedir. Fiziksel uygulamalarda çoğu zaman gamma fonksiyonunun (Ek-E.2) formu kullanılır.

Gamma fonksiyonunun basitçe özellikleri şunlardır: [19]

i. $\Gamma(1) = 1$ (Ek-E.4)

ii. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \;\; (x > 0)$ (Ek-E.5)

iii. $\Gamma(x+1) = x!$ (Ek-E.6)

iv. $\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, t^{2x-1}dt$ (Ek-E.7)

v. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Ek-E.8)

vi. $\int_0^{\pi/2} c\,os^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$ (Ek-E.9)

Ek-F Asosiye Legendre Denklemi

Asosiye Legendre adi diferansiyel denklemine fizik ve diğer teknik alanlarda da sık rastlanir. Özel olarak, küresel koordinatlar içinde Laplace denklemiyle ilişkili (kısmi diferansiyel denklemler) çözümler oluşturur ve buna bağlı olarak Asosiye Legendre polinomları küresel harmoniklerin tanımında önemli bir rol oynamaktadır. Asosiye Legendre denkleminin en genel hali

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad \text{(Ek-F.1)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemin sonlu çözümleri olan polinomlar $P_l^m(x)$ şeklinde gösterilir. $m = 0$ için denklem Legendre denklemi olarak adlandırılır ve

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \quad \text{(Ek-F.2)}$$

şeklinde olmaktadır ve yine sonlu çözümleri olan polinomlar da $P_l(x)$ şeklinde gösterilir. Frobenius seri çözümünden elde edilen sonlu çözümler olan Asosiye Legendre polinomlarının bazıları aşağıdaki gibidir:

$$P_0^0(x) = 1$$

$$P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}P_1^1(x)$$

$$P_1^0(x) = x$$

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24}P_2^2(x)$$

$$P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6}P_2^1(x)$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) \qquad \text{(Ek-F.3)}$$

Asosiye Legendre polinomları için bazı tekrarlama bağıntıları:

$$\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1}(P_{l-1}^{m+1} - P_{l+1}^{m+1}), m \geq 0 \qquad \text{(Ek-F.4)}$$

$$(l-m-1)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)P_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) \qquad \text{(Ek-F.5)}$$

$$2mxP_l^m(x) = -\sqrt{1-x^2}[P_l^{m+1}(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x)] \qquad \text{(Ek-F.6)}$$

$$(l-m-1)P_{l+1}^m(x) = (2l+1)P_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) \qquad \text{(Ek-F.7)}$$

$$\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) = \frac{1}{2}[(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - P_l^{m+1}(x)] \qquad \text{(Ek-F.8)}$$

$$1-x^2P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1}[(l+m)(l+1)P_{l-1}^m(x) - l(l-m+1)P_{l+1}^m(x)] \qquad \text{(Ek-F.9)}$$

Asosiye Laguerre polinomları için Rodrigues bağıntıları:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}[(1-x^2)^l] \quad \text{(Ek-F.10)}$$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}[(1-x^2)^l] \quad \text{(Ek-F.11)}$$

Bu denklem $-\ell \leq m \leq \ell$ için m 'in sınırlarının uzantısını sağlar. $P_l^{\pm m}(x)$,in tanımları $\pm m$ in yerine konmasi ile bu ifade sonucu orantılıdır.

Asosiye Legendre polinomları için normalizasyon bağıntısı;

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_l^m(x)dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{k,l} \quad \text{(Ek-F.12)}$$

Burada $\delta_{k,l}$ Kroneceker delta'dır.

ÖZGEÇMİŞ

08.09.1989 tarihinde Bulgaristan'ın Kırcaali ilinde doğdum. 2004 yılında başladığım Lüleburgaz Anadolu Lisesi'nden 2008 yılında mezun oldum. 2008 yılında Trakya Üniversitesi'nde Fen Fakültesi'ne bağlı Matematik Bölümüne başladım. 2013 yılında bu bölümden mezun oldum. 2015 yılında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladım. Halen yüksek lisans eğitimim devam etmektedir.