T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$SO(1,3)$ GRUBUYLA BAĞLANTILI İNTEGRALLENEBİLİR SİSTEMLER

AYŞEN GÜREKE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. MEHMET SEZGİN

EDİRNE - 2018

AYŞEN GÜREKE'nin hazırladığı " $SO(1,3)$ GRUBUYLA BAĞLANTILI İNTEGRALLENEBİLİR SİSTEMLER" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalı'nda bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN .....

Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN .....

Yrd. Doç. Dr. Yasemen UÇAN .....

Tez Savunma Tarihi:01/02/2018

Bu tezin bir Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN
Tez Danışmanı .....

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

01 / 02 / 2018
AYŞEN GÜREKE

Yüksek Lisans Tezi
SO(1,3) Grubuyla Bağlantılı İntegrallenebilir Sistemler
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde grup, metrik tensör, integrallenebilir sistemler, prolate ve oblate küresel dalga denklemleri hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde $SO(1,3)$ grubunun homojen uzayının farklı parametrik ifadelerine göre metrik tensör, Laplace-Beltrami operatörü, Schrödinger denklemleri ve integrallenebilir sistemin dalga fonksiyonları ifade edildi.

Yıl : 2018

Sayfa Sayısı : 56

Anahtar Kelimeler : Grup, Laplace-Beltrami Operatörü, İntegrallenebilir Sistemler

Master's Thesis

The Integrable Systems Related to the $SO(1,3)$ Group

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In the first chapter of this study, some knowledge about group, metric tensor, integrable systems, oblate and prolate wave equations are given. In the second chapter according to different parametric expression of homogeneous space of the group $SO(1,3)$ metric tensor, Laplace-Beltrami operator, Schrödinger equation and wave function of integrable system are given.

Year : 2018

Number of Pages : 56

Keywords : Group, Laplace-Beltrami Operator, Integrable Systems

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışmanım Doç. Dr. Mehmet SEZGİN'e, çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen Arş. Gör. Yasemin IŞIK'a, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım değerli bölüm hocalarıma, hayatımın her evresinde bana destek olan eşim Sancar GÜREKE'ye ve biricik kızım Nisa Rüya GÜREKE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayşen GÜREKE

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
ABSTRACT v
ÖNSÖZ vi
BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1
1.1. Grup 1
1.2. Metrik Tensör 9
1.3. İntegrallenebilir Sistemler 13
1.4. Prolate ve Oblate Küresel Dalga Denklemleri 17
BÖLÜM 2 - SO(1,3) GRUBU İLE BAĞLANTILI İNTEGRALLENEBİLİR SİSTEMLER 23
SONUÇLAR 49
KAYNAKLAR 53
ÖZGEÇMİŞ 55
TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER 56

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Grup

$G \neq \emptyset$ bir küme, $* : G \times G \to G$ bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına grup denir.

i. $*$ işlemi birleşmelidir. Yani $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir.

ii. $*$ işlemine göre G'de bir birim (etkisiz) eleman vardır. Yani $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $a*e = e*a = a$ dır.

iii. $*$ işlemine göre $\forall a \in G$'nin tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G$ öyle ki $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ dir.

Üstelik,

iv. $\forall a,b \in G$ için $a*b = b*a$

koşulu sağlanıyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli (Abel) grup denir. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel sayılar kümesi çarpma işlemine göre birer değişmeli gruptur. Uzayda dönmeler, ötelemeler ve simetriler topluluğu da hareketler grubunu oluşturur. Bilimsel çalışmalarda ortaya çıkan denklemler lineer, lineer olmayan, diferansiyel denklem veya operatör denklemleri olabilir. Grup teorisi yaklaşımı denklemlerin çözümünü kolaylaştırır. Cebirsel denklemlerin çözümünde grup kavramını ilk kullananlardan biri Evariste Galois olmuştur. Daha sonra Marius Sophus Lie sürekli lineer dönüşüm gruplarıyla diferansiyel denklemlerin çözümleri için benzer bir teoriyi oluşturmuştur. Bugün grup teorisi matematiğin birçok dalında ve fizik, mühendislik gibi matematik temelli bilimler üzerinde, kontrol teoride vb. diğer bilimsel alanlarda da büyük bir etkiye sahiptir.

Lie grupları hem grup hem de manifold yapısına sahiptir. Lie grubunun tanımını verelim.

i. G bir grup,

ii. G bir manifold,

iii. G grubu üzerinde tanımlanan grup işlemi

$$m : G \times G \to G, \quad m(g,h) = g * h, \quad g,h \in G$$

ve ters işlemi

$$i : G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

analitik dönüşümlerdir.

Bu koşullar sağlanıyorsa G bir Lie grubudur.

$G = \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ 'nin manifold yapısına sahip olduğu aşikardır. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere grup işlemi $(x,y) \mapsto x + y$ şeklinde vektör toplamı işlemi olsun. Ters işlemi ise $x \mapsto -x$ şeklinde tanımlansın. Tanımlanan her iki işlem de analitik olup $\mathbb{R}^n$, n parametreli, değişmeli bir Lie grubudur.

Lie grupları oldukça özel, önemli ve kullanışlı gruplardır. Sebebi ise Lie teorisinin temelinin cebir ve geometri gibi matematiğin iki büyük alanına dayanıyor olmasıdır. Lie gruplarının cebirsel özellikleri grup yapısına sahip olmalarından, geometrik özellikleri ise grup işlemini topolojik bir uzayın noktalarını kullanarak tanımlamaktan gelmektedir.

Lie gruplarının önemli bir bölümünü oluşturan $n \times n$'lik matris gruplarının en çok bilinenlerini verelim.

$\mathbb{R}^n$ uzayında $x' = Ax$ lineer dönüşümlerini ele alalım. A , bu dönüşümün $n \times n$'lik matrisi olmak üzere bu türden matrisler, matris çarpımı işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup genel lineer grup olarak adlandırılır ve $GL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R}\,,\ \ i,j = 1,2,\dots,n,\ \ \det A \neq 0 \right\}.$$

$GL(n,\mathbb{R})$ grubu, basitçe n^2 boyutlu $M_{nxn}(\mathbb{R})$ vektör uzayından determinantı sıfır olan matrisler kümesinin çıkartılmasıyla oluşan bir alt küme olarak düşünülebilir. Bu küme $M_{nxn}(\mathbb{R})$ Euclidean uzayında bir alt manifold olup $GL(n,\mathbb{R})$ grubu n^2 boyutlu bir Lie grubudur.

Bir matrisin determinantı, matrisin ilgili olduğu lineer dönüşümün geometrik özellikleri hakkında önemli bilgiler vermektedir. Bu ise bizi $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun determinantı bir olan matrislerden oluşan alt grubuna yönlendirir. Bu grup özel lineer grup olarak adlandırılır ve $SL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir,

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\}.$$

$n \times n$ ortogonal matrislerin kümesi $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup ortogonal grup olarak adlandırılır ve A^t , A matrisinin transpozu olmak üzere

$$O(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^t = I \,\}$$

şeklinde ifade edilir. $A \in O(n,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\det(AA^t) = (\det A)^2 = \det(I)$$

yani $\det A = \pm 1$ ' dir. $\det A = 1$ koşulunu sağlayan ortogonal matrisler, $O(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu yeni grup ise özel ortogonal grup olarak adlandırılır ve $SO(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir,

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\}.$$

Ortogonal matrislerle verilen dönüşümler skaler çarpımı yani uzunluğu korur ve reel parametre sayısı $n(n-1)/2$'dir.

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında $z' = Uz$ biçiminde tanımlanan dönüşümlerin U matrisleri bir grup oluşturur ve $GL(n,\mathbb{C})$ ile ifade edilir. U, $n \times n$'lik kompleks bir matris olmak üzere $\bar{U}^t U = I$ koşulu sağlanıyor ise U üniter matris olarak tanımlanır. $n \times n$'lik üniter matrisler $GL(n,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup $U(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir,

$$U(n,\mathbb{C}) = \{\, U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{U}^t U = I \,\}$$

$$\det(\bar{U}^t U) = (\det U)^2 = \det(I) \quad \text{yani} \quad \det U = \pm 1.$$

$U(n,\mathbb{C})$ grubunun reel parametre sayısı n^2 'dir. Özel olarak bu grup, $z = (z_1, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i z_i$$

iç çarpımını koruyan n boyutlu kompleks bir vektör uzayının dönüşümler grubu olarak da tanımlanabilir.

Determinantı bir olan üniter matrisler $U(n,\mathbb{C})$'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu grup ise özel üniter grup olarak adlandırılır ve

$$SU(n,\mathbb{C}) = \{\ U \in\ U(n,\mathbb{C}) \mid \det U = 1\ \}$$

ile ifade edilir. $SU(n,\mathbb{C})$ grubunun reel parametre sayısı n^2-1 'dir.

$\mathbb{R}^n$, $n=p+q$ uzayında pseudo-ortogonal dönüşümler ile belirlenen $n \times n$ tipinde ortogonal matrisler pseudo-ortogonal grubu oluşturur ve $O(p,q)$ ile gösterilir. Grubun bir $A \in O(p,q)$ elemanı pseudo-ortogonallik koşulunu sağlar ve $I_{pq} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\ tane},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\ tane})$, $n=p+q$ olmak üzere

$$O(p,q) = \left\{\ A \in GL(n,\mathbb{R}) \ \middle|\ AI_{pq}A^t = I_{pq}\ \right\}$$

ile ifade edilir. Ayrıca $A \in O(p,q)$ olmak üzere,

$$\det(\ AIA^t\ )\ =\ (\det A\ )^2\ = \det\ (I)$$

yani $\det A = \pm 1$ 'dir. $\det A = 1$ olan matrislerin kümesi $O(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup özel pseudo-ortogonal grup olarak adlandırılan $SO(p,q)$ grubudur ve

$$SO(p,q) = \{\ A \in\ O(p,q) \mid \det A = 1\ \}$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde $\mathbb{C}^n$, $n=p+q$ boyutlu kompleks uzayındaki lineer dönüşümlerin belirttiği matrisler ise $U(p,q)$ grubunu oluşturur ve $I_{pq} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\ tane},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\ tane})$ ve $n=p+q$ olmak üzere

$$U(p,q) = \left\{ U \in GL(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, \bar{U}^t I_{pq} U = I_{pq} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu grubun bir elemanı $U \in U(p,q)$ olmak üzere

$$\det\left(\bar{U}^t I_{pq} U\right) = \ (\det U\ )^2 = \det\ (\ I\ )$$

dolayısıyla $\det U = \pm 1$ olup $\det U = 1$ olan kompleks matrisler kümesi $U(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup $SU(p,q)$ ile gösterilir ve

$$SU(p,q) = \{\ U \in\ U(p,q) \mid \det U = 1\ \}$$

şeklinde ifade edilir.

$\mathbb{R}^{2n}$'de antisimetrik bilineer form

$$B[x,y] = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k$$

şeklinde tanımlanır. B antisimetrik bilineer formunu koruyan A matrisleri (yani, $B[Ax, Ay] = B[x, y]$) $Sp(n, \mathbb{R})$ reel simplektik grubu oluşturur. Eğer $2n \times 2n$ 'lik J matrisi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

formunda ise $B[x, y] = \langle x, Jy \rangle$ olur. Reel simplektik grubu oluşturan tüm matrisler

$$A^t J A = J = A J A^t$$

koşulunu sağlamaktadır. Bu nedenle bu grup

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(2n) \mid A^t J A = J = A J A^t \}$$

şeklinde ifade edilir. Bu koşulu sağlayan tüm simplektik matrisler için $\det A = 1$ 'dir. $Sp(n, \mathbb{R})$ grubunun reel parametre sayısı $2n^2 + n$ 'dir.

$\mathbb{R}^{2n}$'deki antisimetrik bilineer forma benzer bir form $\mathbb{C}^{2n}$'de de tanımlanabilir. Bu formu koruyan $2n \times 2n$ 'lik matrisler $Sp(n, \mathbb{C})$ kompleks simplektik grubu oluşturur.

a, b, c keyfi reel değerler olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki tüm 3×3 tipindeki reel matrisler Heisenberg grubunu oluşturur ve H ile gösterilir. A matrisi formundaki iki matrisin çarpımı yine aynı formda olup, A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formundadır. Dolayısıyla H grubu $GL(3, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. Grubun Heisenber grubu olarak adlandırılmasının sebebi, H grubuna karşılık gelen Lie cebirinin kuantum mekaniğindeki Heisenberg komütasyon bağlantıları ile olan ilişkisidir.

Poincare grubu $P(n, 1)$, $\mathbb{R}^{n+1}$'deki tüm

$$x' = Ax + b, \qquad A \in O(n, 1), \ b \in \mathbb{R}^{n+1}$$

şeklindeki dönüşümler grubudur. Başka bir deyişle bu grup, $\mathbb{R}^{n+1}$'de

$$d(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2$$

uzunluğunu koruyan afin dönüşümler grubudur ve $A \in O(n, 1)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} & A & & x_1 \\ & & & \vdots \\ & & & x_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki $(n+2) \times (n+2)$ formundaki matrisler grubuna izomorftur.

$n \times n$ tipindeki matrislerden oluşan bir G grubu için, bu gruba karşılık gelen homojen olmayan lineer dönüşümlerden oluşan bir IG grubu oluşturulabilir. Bu grup, $g \in G$ ve x , n bileşenli bir sütun matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formundaki $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki matrislerden oluşur. Örneğin $ISO(n)$ grubu,

$$\begin{pmatrix} w & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w \in SO(n)$$

formundaki matrisler grubudur. z ise n kompleks bileşenli bir sütun matris olmak üzere, $ISU(n)$ grubu,

$$\begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w \in SU(n)$$

formundaki matrisler grubudur.

Bir G grubunun birim eleman ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa G'ye basit grup denir. Diğer bir deyişle; G grubunun normal öz alt grubu yoksa G basit bir gruptur. G grubunu normal alt gruplarının hiçbiri değişmeli değil ise G grubuna yarı basit grup denir. $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $n \geq 2$ için $SU(2)$ grupları yarı basit gruplara örnektir.

G bir grup olsun. G grubunun $0 \leq i \leq n$ için, G_{i+1} , G_i 'nin bir normal alt grubu olsun ve $G = G_o > G_1 > \cdots > G_n$ sağlanacak şekilde normal alt grupları zinciri yazılsın. $G_n =< e >$ ve G_{i+1}/G_i bölüm grupları değişmeli ise G grubuna çözülebilir grup denir.

Lie grupları çoğu zaman basit ve çözülebilir gruplar olmak üzere iki temel şekilde sınıflandırılır. Basit gruplar kendilerini bir komütasyon altında yeniden üretme özelliğine sahiptir. Çözülebilir gruplar ise normal alt grup zinciri içerir. Basit ve çözülebilir gruplar, diğer tüm Lie gruplarının yapı taşlarıdır. Yarı basit Lie grupları basit Lie gruplarının direk çarpımlarıdır. Yarı basit olmayan Lie grupları ise normal alt gruplara sahip (yarı) basit Lie gruplarının yarı direk çarpımlarıdır ve çözülebilirdir. Çözülebilir Lie grupları integrallenebilirlik ve adi diferansiyel denklemlerin

basitleştirilmesi ile bağlantılıdır. Basit ve çözülebilir Lie grupları diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalarda önemli rol oynamaktadır. Galois her polinom denkleme karşılık gelen bir grup oluşturulabileceğini ve bu grubun çözülebilir olmasının denklemin köklerle çözümü için gerek ve şart olduğunu göstermiştir. Galois'nın polinom denklemlerinde olduğu gibi, eğer normal grupları çözülebilirse diferansiyel denklemler de kökler yardımıyla çözülebilir veya basitleştirilebilir. Öte yandan, matematiksel fizikte klasik fonksiyonların çoğu basit Lie gruplarının matris elemanlarıdır. Özellikle Lie grupları ve özel fonksiyonlar arasında sürekli gelişen çok önemli bir ilişki vardır.

Lie grupları sürekli parametrelere bağlıdır ve bu nedenle sonsuz (sayılamayan) sayıda elemana sahip sürekli gruplar olarak bilinirler. Grubun bir elemanı $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$ şeklinde reel sürekli parametrelerin bir fonksiyonu olarak verilir. Bir sürekli grubun elemanlarının bağlı olduğu bu parametreler bir topolojik uzay tanımlar. Bu uzaya grubun parametrik uzayı veya manifoldu denir. Grup elemanları bu parametrelere bağlı olduğundan, grubun her elemanı ile parametrelerin bir noktası arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Bu sayede sürekli gruplar, parametrelerin oluşturduğu topolojik uzayın topolijisine doğrudan sahip olurlar.

Örnek olarak tek boyutlu $U(1)$ üniter grubunu ele alalım. Grubun elemanları tek boyutta bir θ açısıyla yapılan dönmelerdir. Bu nedenle grubun her bir elemanı $U(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ ile ifade edilebilir. Bu ise $U(1)$ üniter grubunun manifoldunun bir çember belirttiği sonucunu verir. Grubun her bir elemanı belirli bir θ açısı ile çemberin üzerindeki bir noktayı ifade eder. Bir diğer örnek ise $SO(3)$ üç boyutlu dönme grubunun parametrik uzayıdır. Grubun her bir elemanı
$(x, y, z) = (\, r\cos\varphi \sin\theta\, , r\sin\varphi\sin\theta\, , r\cos\theta\,),\quad 0 \le r \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$
ile ifade edilip, grubun manifoldu bir küredir.

Bir topolojik uzay, sınırlı ve kapalı bir topolojiye sahip ise böyle topolojik uzaylara kompakt, böyle bir topolojiye sahip değil ise kompakt değildir denir. Lie grupları ise ilgili oldukları grup manifolduna (topolojik uzayına) bağlı olarak kompakt ve kompakt olmayan Lie grupları olarak sınıflandırılırlar.

$U(n)$ üniter grubunun manifoldu sınırlı ve kapalı olduğundan kompakttır. $SU(n)$, $SO(n)$, $O(n)$ grupları da manifold yapıları gereği kompakt Lie grupları iken, $SL(n)$, $O(p,q)$ grupları kompakt olmayan Lie gruplarına örnektir.

Bir G grubunun bir S kümesine etkisi bir fonksiyon olarak

$$f : G \times S \longrightarrow S$$
$$(g, x) \longmapsto gx$$

şeklinde verilir. $x \in S$, $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere

$$(g_1\, g_2)x = g_1(\, g_2 x)\,, \quad ex = x \;\;,\;\; (e \text{ grubun birim elemanı})$$

ise G grubu S kümesine etki eder denir.

G grubu bir S kümesine etki etsin. Bu durumda $x \in S$ ve $g \in G$ olmak üzere

$$x \sim x' \quad \Leftrightarrow \quad gx = x'$$

bir denklik bağıntısı oluşturulabilir. Bu denklik bağıntısının denklik sınıfları S kümesinde G grubunun orbitleri olarak tanımlanır.

V bir vektör uzayı, G ise bir Lie grubu olsun. Eğer her $x, y \in V$ nokta çifti için $y = gx$ koşulunu sağlayan bir $g \in G$ var ise G grubu V uzayında geçişlidir denir. H, G grubunun normal bir alt grubu olmak üzere homojen uzay çoğu zaman G/H bölüm uzayı ile tanımlanır. G/H grubu her $g \in G$ için gH sol denklik sınıflarının kümesi olarak verilir yani $G/H = \{\, gH \mid g \in G \,\}$. Eğer $H = \{\, e \,\}$ ise G grubunun kendisi homojen uzayı oluşturur. Birkaç homojen uzay örneği verelim (Das, Okubo, 2014; Gilmore, 2008; Hall, 2003; Vilenkin, Klimyk, 1991).

$G = SO(n+1)$ grubu, $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1$$

kuadratik formunu invaryant bırakan $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının özel ortogonal dönüşümler grubudur. Yukarıdaki denklemle verilen S^n, n boyutlu küre yüzeyi, $SO(n+1)$ grubunun homojen uzayıdır.

$\mathbb{R}^{n+1}$ pseudo-Euclidean uzayının özel ortogonal dönüşümler grubu $G = SO(1,n)$ ve $H = SO(n)$ olmak üzere $X = G/H$ homojen uzayı

$$X : \;\; x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1 \quad , \;\; x_o > 0$$

denklemiyle verilen iki oyuklu hiperboloid olur (Helgason, 1984).

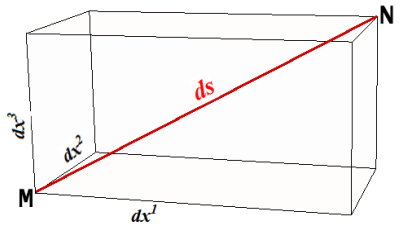
Bu tezde $SO(1,3)$ grubunun homojen uzayına bağlı olarak verilen integrallenebilir sistemler ele alındı. Homojen uzayın uygun seçilen parametrik ifadesine göre Laplace-Beltrami operatörü, Schrödinger denklemi ve dalga fonksiyonu elde edildi.

1.2. Metrik Tensör

Metrik tensör (metrik matris), temel olarak uzunluk hesaplamalarında kullanılır. Belirli bir uzayda iki nokta arasındaki uzaklığın nasıl hesaplanacağını belirten bir fonksiyondur. Bu sayede verilen keyfi bir koordinat sisteminde, üzerinde çalışılan uzayın özellikleri hakkında bilgi verir.

Herhangi iki nokta arasındaki uzaklık hesaplanırken genellikle geometrik gösterimden faydalanılır. Basit bir alıştırma ile metrik tensör ifadesini örneklendirelim:

M noktası, üç boyutlu Öklid uzayında, $x^k;\ k = 1,2,3$ koordinatlarıyla ifade edilen bir nokta ve N noktası ise $x^k + dx^k$ koordinatlarıyla ifade edilen M noktası ile komşu başka bir nokta olsun.



M ile N arasındaki uzaklık ds ile gösterilsin. Şekilden faydalanılarak Kartezyen koordinat sisteminde ds,

$$ds = \mathrm{i}.dx^1 + \mathrm{j}.dx^2 + \mathrm{k}.dx^3$$

ile verilebilir. Her iki tarafın karesin alınırsa,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (1.2.1)$$

olmak üzere uzunluk elemanı ds^2 elde edilir. Uzunluk elemanının genel ifadesi

$$ds^2 = \left(g_{ij}\right).dx^i\,.dx^j \quad ; \quad i,j = 1,2,\dots,n \qquad (1.2.2)$$

kuadratik formunda olup, (g_{ij}) metrik tensördür. Burada (1.2.1) ifadesi, (1.2.2) kuadratik formunun özel bir halidir. Üç boyutlu Öklid uzayında Kartezyen koordinatlarda uzunluk elemanı

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

olup,

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$$
$$g_{ij} = 0\,; \quad i \neq j, \;\; i,j = 1,2,3$$

olmak üzere metrik tensör

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Öklid uzayında (g_{ij}) metrik tensörü, J Jakobiyen matrisi olmak üzere

$$(g_{ij}) = J^t.J \tag{1.2.3}$$

ile ifade edilir. Metrik tensörün tersi,

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})\;; \qquad (g_{ij})(g^{ij}) = I \tag{1.2.4}$$

ile ifade edilir. Örnek olarak Öklid uzayında, polar koordinat sistemi için metrik tensörü elde edelim. Polar koordinat sisteminde herhangi bir $X = (x, y)$ noktası, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere,

$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$

bağıntıları ile verilir. Jakobiyen matrisi,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda (g_{ij}) metrik tensörü

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada uzunluk elemanı ise

$$ds^2 = (dr \quad d\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

dir. Şimdi ise n boyutlu Euclidean uzayını ele alalım. n boyutlu uzayda parametrik formda k boyutlu yüzey aşağıdaki gibi verilsin.

$$X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$
$$x^i = x^i(z^1, z^2, \dots, z^k) \ ; \qquad i = 1, \dots n \, . \tag{1.2.5}$$

$(z^1, z^2, \dots, z^k)$, k boyutlu yüzeyin koordinatları olmak üzere,

$$f_1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^1}, \frac{\partial x^2}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^1}\right)$$
$$f_2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^2}, \frac{\partial x^2}{\partial z^2}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^2}\right)$$
$$\vdots$$
$$f_k = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^k}, \frac{\partial x^2}{\partial z^k}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^k}\right)$$

ifadeleri k boyutlu yüzeyin teğet vektörleridir. Buradan metrik tensör (g_{ij})'nin elemanları,

$$g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle \, ; \qquad i, j = 1,2, \dots, k \tag{1.2.6}$$

şeklinde bulunur. Benzer sonuca uzunluk elemanı yardımıyla da ulaşılabilir. Uzunluk elemanının,

$$ds^2 = \sum_{l=1}^{n} dx^l dx^l$$

ile ifade edildiğini biliyoruz. (1.2.5) ifadesinden,

$$dx^l = \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \, . dz^i$$

dir. Dolayısıyla uzunluk elemanı

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x^l}{\partial z^i} \, . dz^i\right)\left(\frac{\partial x^l}{\partial z^j} \, . dz^j\right) = dz^i \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} dz^j$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak (1.2.2) ifadesi yardımıyla metrik tensör (g_{ij})'nin elemanlarının genel ifadesi

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \ ; \qquad i, j = 1,2, \dots, k \tag{1.2.7}$$

şeklinde elde edilir.

$\mathbb{R}^n$, $n = p + q$ pseudo-Riemann uzayında metrik tensörü verelim. Bu uzayda $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots y^n) \in \mathbb{R}^n$, $n = p + q$ olmak üzere, skaler çarpım

$$\langle x, y\rangle_{p,q} = x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^py^p - x^{p+1}y^{p+1} - \cdots - x^ny^n$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla pseudo-Riemann uzayında Kartezyen koordinatlarda metrik tensör,

$$(g_{ij}) = \text{diag}\left(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{p\ tane}, \underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{q\ tane}\right)$$

olarak ifade edilir. Örnek olarak $\mathbb{R}^4$ uzayını inceleyelim. $p = 1, q = 3$ olmak üzere metrik tensör

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olup, uzunluk elemanı,

$$ds^2 = (\, dx^1 \quad dx^2 dx^3 \quad dx^4\,) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2$$

şeklinde verilir.

Metrik tensör matematiğin bir çok alanında karşımıza çıkar. Örneğin $Z = f(x, y)$ şeklinde verilen bir yüzeyin alanı

$$A = \iint_D \sqrt{g}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}\,dxdy, \quad g = \det(g_{ij})$$

şeklinde bulunur.

Yay uzunluğu bulunabilir. R^n de bir C eğrisinin uzunluğu ;

$$C : x^i = x^i(t), \quad t_1 \le t \le t_2$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt \quad , \quad i, j = 1,2,\ldots,n$$

şeklinde bulunur.

Metrik tensörün, Laplace-Beltrami operatörünün elde edilmesinde de önemli bir rolü vardır. Diferansiyel geometride, Pierre-Simon Laplace'ın çalışmalarından ismini alan Laplace operatörü, Euclidean uzayında yüzeylerde, Riemann ve Pseudo-Riemann uzaylarında ise manifoldlarda tanımlanan fonksiyonlara uygulanmaktadır. Laplace ve daha sonra Eugenio Beltrami'nin çalışmalarıyla bu operatör daha kapsamlı bir operatör olan Laplace-Beltrami operatörüne geliştirilmiştir. Laplace operatörü gibi Laplace-

Beltrami operatörü de gradyantın diverjansı ($\mathrm{div}\,.\,\mathrm{grad}\,f$) olup, bir fonksiyonu başka bir fonksiyona taşıyan lineer bir operatördür.

Yerel koordinatlarda, gradyant ve diverjans tanımları kullanılarak oluşturulan Laplace-Beltrami operatörü, $\bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right|$ ve ∇ (del, nabla) diferansiyel operatör olmak üzere,

$$\mathrm{div}.\,\mathrm{grad}\,f \;=\; \nabla.\nabla f$$

$$\nabla^2 f \;=\; \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}\left(\sum_j \sqrt{\bar{g}}\,.\,g^{ij}.\frac{\partial f}{\partial X_j}\right) \;;\; i,j = 1,\dots,n \qquad (1.2.8)$$

şeklinde tanımlanır. ∇^2 yerine Δ veya Δ_{LB} gösterimi de kullanılmaktadır. Bilinen Euclidean uzayında, Kartezyen koordinatlarda Laplace-Beltrami operatörünü inceleyecek olursak, bu koordinatlarda metrik tensörün determinantı $|g| = 1$ olacağından,

$$\Delta \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i}\,.\frac{\partial}{\partial x_i}$$

bilinen Laplace operatörü elde edilir. Örneğin $n = 3$ için Laplace operatörü,

$$\Delta \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

şeklindedir.

Laplace operatörü ikinci mertebeden bir operatördür. Euclidean uzayında düzlemde çalışılır. İlk önce Laplace operatörü oluşturulmuştur. Daha sonra Beltrami metrik tensör yardımıla bu operatörü geliştirmiş ve işlemleri eğri (Riemann) uzaya taşımıştır. Bu nedenle Laplace operatörü Laplace-Beltrami operatörü olarak adlandırılır. Daha sonra grup ve grubun manifoldu üzerinde çalışılarak invaryant operatörler oluşturulmuş ve Casimir operatörü elde edilmiştir. Bir çok Casimir operatörü oluşturulabilir ancak bunlardan sadece bir tanesi Laplace-Beltrami operatörüne eşdeğerdir. Casimir operatörü daha yüksek mertebeden olabilir. Laplace-Beltrami operatörü ise yalnızca ikinci mertebedendir (Helgason, 1984).

1.3. İntegrallenebilir sistemler

Klasik mekanikte bir sistemin durumu, sistemin faz uzayında bir nokta ile belirtilir. q_i konumun koordinatlarını, p_i momentumu (klasik mekanikte momentum,

bir cismin kütlesi ve hızının çarpımıdır) ifade etmek üzere, sistemin Hamiltonyeni faz uzayında bir fonksiyondur ve $H(p_i, q_i)$ ile gösterilir. Newton'ın hareket denklemleri birinci dereceden diferansiyel denklem sistemi olup Hamiltonyen formunda

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

şeklinde verilir.

İntegrallenebilir (çözülebilir) sistemler, klasik mekanikte Newton denklemlerinin tam çözümlerinin araştırılmasıyla ortaya çıkmıştır. Newton denklemlerinden sonra, bilim adamları çözümleri zor olan farklı problemler için tam çözümler bulmaya çalışmışlardır.

19. yüzyılda Liouville, Hamiltonyen sistemler için integrallenebilme kavramını biraz daha belirginleştirmiş, sonlu boyutlu sistemlerin denklemlerini sayısal integrasyon yöntemi ile çözümlenebilmelerine göre sınıflandırmıştır.

$H,\ p_i, q_i$ koordinatlarında bir fonksiyon olsun. Liouville teoremine göre,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1,2, \dots, n)$$

formunda n serbestlik dereceli bu mekanik sistem n tane bağımsız fonksiyona (H fonksiyonu da bu fonksiyonlardan biri olmak üzere) sahip ve her bir fonksiyon çifti Poisson komütasyon bağıntısını sağlıyor ise yani

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = 0$$

bu sistem kuadratürler yöntemi ile çözülebilirdir. Liouville teoreminin koşullarını sağlayan sistemler Liouville integrallenebilir sistemleri olarak adlandırılır.

Liouville integrallenebilir sistemler elde etmek ve kuadratürler yöntemi ile böyle sistemlerin tam çözümlerini araştırmak hem büyük beceri hem de uzun hesaplamalar yapmayı gerektirmektedir. Daha karmaşık problemlerde ise çözümler, kullanımı kolay olmayan analitik özelliklere sahip iki boyutlu fonksiyonlar ile ifade edilmiştir. Riemann ve Abel'in bu alandaki çalışmaları integrallenebilir sistemler ve kompleks analiz arasında kuvvetli bir bağ kursa da bu alanda uzun bir süre gelişme gösterilememiştir (Vanhaecke, 2001).

1967'de Gardner, Greene, Kruskal ve Miura gibi bilim adamlarının lineer olmayan denklemleri çözebilmek için yeni bir yaklaşım geliştirmeleri integrallenebilir sistemlere olan ilgiyi yeniden canlandırmıştır. Bu metot, ters saçılma metodu olarak bilinmektedir ve akışkanlar mekaniğinin bir problemi olan Korteweg de Vries (KdV) problemi, lineer olmayan Schrödinger denklemi, sine-Gordon denklemi gibi denklemleri çözmek için geliştirilmiştir.

Bir dinamik sistemde her bir parçacığın konumunu eş zamanlı olarak tanımlayabilmek için gerekli bağımsız koordinat değişkenleri sayısına bu sistemin serbestlik derecesi denir. Örneğin, üç boyutlu bir uzayda n serbest parçacıktan oluşan bir sistemin serbestlik derecesi $3n$ 'dir. Çünkü her bir parçacığın kütle merkezinin konumunu belirtmek için üç koordinata ihtiyaç duyulur. Ancak parçacıklar serbest değilse, yani sistemde bazı kısıtlamalar varsa serbestlik derecesi $3n$ 'den az olabilir (Bernal, Flower-Cano, Carbajal-Dominguez, 2009). İntegrallenebilir denklemlerinin sonsuz sayıda bağımsız ilk integrale sahip bir Hamiltonyen yapıya sahip olduğu, bu sayede sonsuz serbestlik dereceli integrallenebilir sistemler olarak yorumlanabileceği gözlenmiştir. Ters saçılma metodu ise bu ilk integralleri elde etmeye yardımcı olarak sistemlerin tam çözümlerine ulaşmayı hedeflemektedir. Metot, ilerleyen yıllarda (sonlu boyutlu) klasik integrallenebilir sistemlere de başarıyla uygulanmış ve matematiğin özellikle Lie teorisi, temsil teorisi, cebir ve diferansiyel geometri gibi birçok dalında kullanılmıştır. Ters saçılma metodu, matematikte olduğu gibi fizik alanında da büyük bir canlanmaya sebep olmuş ve metot sayesinde farklı birçok fiziksel sistemin integrallenebilir sistem olarak tanımlanabileceği görülmüştür. Günümüzde ise (sonsuz boyutlu) integrallenebilir sistemler modern alan teorisinde önemli bir rol oynamaktadır.

Lax formülasyonu geliştirilmesinden kısa bir süre sonra Faddeev, Zakharov ve Gardner bu formülasyon ile integrallenebilme arasında bir ilişki keşfetmiş ve bu ilişki bu alanda birçok önemli sonucu beraberinde getirmiştir.

20. yüzyılda Leningard - St. Petersburg okulunda Ludwig Faddeev'in başkanlığında Korepin, Kulish, Reshetikhin, Sklyanin, Semenov Tian-Shansky ve Takhtajan gibi bilim adamları ise kuantum mekaniğinde ters saçılma metodu üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bu bilim adamları metodun Drinfeld ve Jimbo'nun kuantum grupları teorisi ile bağlantısını kuran sistematik bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Bu

yaklaşım problemlerin cebirsel olarak yeniden formüle edilmesini sağlamaktadır (Tornelli, 2016).

İntegrallenebilir sistemleri anlamak için basit bir örnek inceleyelim. Harmonik salıngaç en basit integrallenebilir sistemlerden biridir. Sistemin faz uzayı iki boyutludur ve Poisson braketi $\{p, q\} = 1$ olmak üzere Hamiltonyeni $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$'dir. Bu sistem n tane harmonik salıngacın direk toplamına genelleştirilebilir. Böyle bir sistemin Hamiltonyeni

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}({p_i}^2 + {\omega_i}^2 {q_i}^2)$$

ve Poisson braketi

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

şeklindedir.

Şimdi de Kepler problemini ele alalım. Bilinen en eski integrallenebilir sistem örneği Kepler'in iki cisim problemidir. Sistemin kütle merkezinde hareket denklemleri

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V(r)}{\partial x_i}, \qquad r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

şeklinde verilir. Klasik Kepler denkleminde $V(r) = \frac{C}{r}$ olmasına rağmen $V(r)$ 'yi merkezde herhangi simetrik bir potansiyel olarak ele alalım. Bu sistemin faz uzayı 6 boyutludur ve Hamiltonyeni

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} {p_i}^2 \; + \; V(r)$$

ve Poisson braketi $\{ p_i, x_i \} = \delta_{ij}$ ile verilir.

Bir diğer integrallenebilir sistem örneği kuantum mekaniğinin ilk integrallenebilir sistem örneği olan Calogero-Moser modelidir. Calogero-Moser modeli, bir eksen üzerindeki konumları q_i , momentumları p_i olan özdeş n parçacıktan oluşur ve sistemin Hamiltonyeni

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i} {p_i}^2 \; + \frac{\gamma^2}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{\left(q_i - \; q_j \right)^2}$$

şeklindedir. Bu dinamik sistem integrallenebilirdir ve potansiyel $1/q^2 \to P(q)$ gibi eliptik bir potansiyel ile yer değiştirilse dahi sistem integrallenebilirliğini sürdürür.

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi modern integrallenebilir sistemler teorisinin temelini oluşturmaktadır. Denklem sığ sulardaki tek boyutlu uzun dalgaları tanımlayan hidrodinamik denklemlere bir yaklaşım olarak ortaya atılmıştır. Gardner, Greene, Kruskal ve Miura bu alanda yaptıkları çalışmalarda KdV denklemi ile Schrödinger denkleminin ters saçılma problemi arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. Yakın zamanda ise denklemin Hamiltonyen'i sayesinde KdV denklemi teorisi konformal alan teorisi ile ilişkilendirilmiştir. KdV denklemi

$$4\partial_t u = -6u\partial_x u + \partial_x^3 u$$

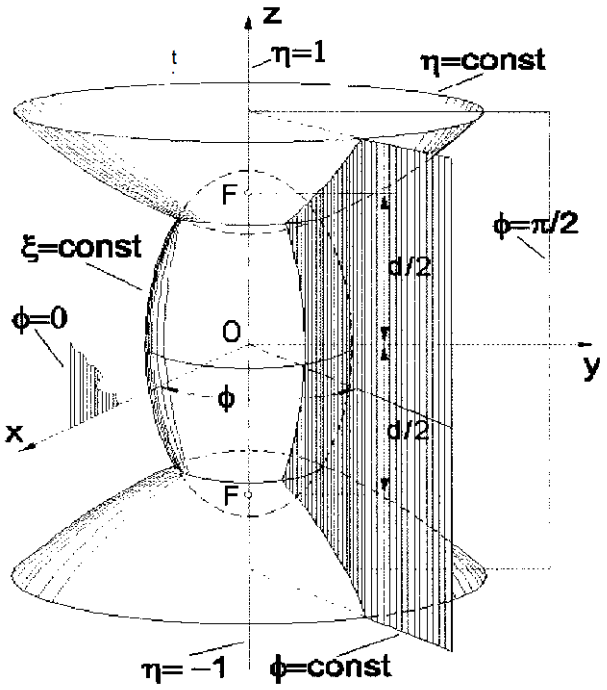
ile ifade edilir (Babelon, Bernard, Talon, 2003).

İntegrallenebilme kavramı sıkça çözülebilme kavramı ile birlikte anılmaktadır. Bu integrallenebilme teorisine olan ilgiyi artırsa da bu iki kavram arasında bazı farklar vardır. Tam olarak çözülemeyen integrallenebilir sistemler olduğu gibi integrallenebilir olmadığı halde tam olarak çözülebilen problemler de vardır. Bir problemin çözülebilirliği, problem ile ilgilenen kişinin kabiliyetlerine ve hesaplama gücüne dayanırken integrallenebilme, sistemin regüler ve kaotik davranışlar sergileme özelliklerine ve korunum yasalarına bağlıdır. Bu ise problemin tam çözümü için genel matematiksel yöntemleri beraberinde getirmektedir.

Günümüzde integrallenebilirlik matematik ve matematiksel fiziğin farklı birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Klasik integrallenebilme kısmi diferansiyel denklemler teorisi, diferansiyel geometri, genel izafiyet teorisi gibi farklı alanlarda kendisini göstermektedir (Tornelli, 2016).

1.4. Prolate ve Oblate Küresel Dalga Denklemleri

Prolate ve oblate küresel koordinat sistemleri, aynı odaklı elipsler ve hiperboloidlerden oluşan iki boyutlu eliptik koordinat sisteminin, bu sistemin elipslerinin sırasıyla büyük ve küçük eksenleri etrafında döndürülmesi ile oluşturulurlar.



Şekil 1. Prolate Küresel Koordinat Sistemi

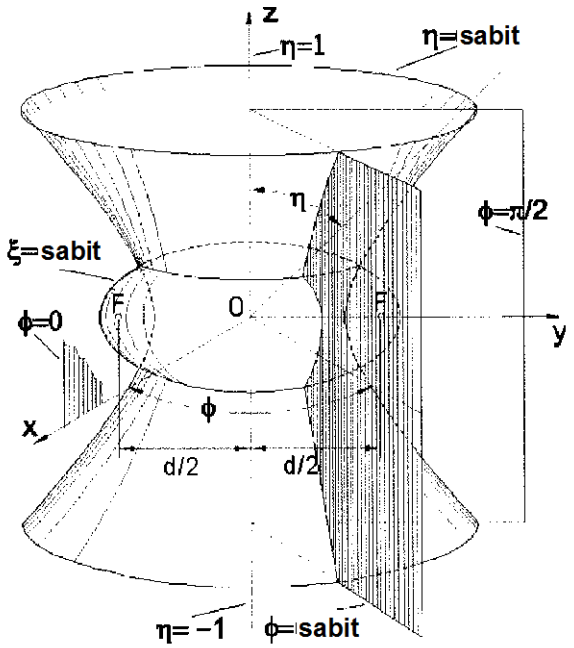
Yukarıdaki şekil ile verilen prolate küresel koordinat sistemi, $-1 \leq \eta \leq 1$, $1 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$x = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\,\cos\phi\,,$$

$$y = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2-1)}\,\sin\phi\,,$$

$$z = \frac{d}{2}\,\eta\,\xi$$

dönüşümleri ile tanımlanır. Benzer şekilde



Şekil 2. Oblate Küresel Koordinat Sistemi

şekli ile verilen oblate küresel koordinat sistemi ise $-1 \le \eta \le 1,\ 0 \le \xi < \infty,$ $0 \le \phi \le 2\pi$ olmak üzere,

$$x = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2+1)}\,\cos\phi\,,$$

$$y = \frac{d}{2}\sqrt{(1-\eta^2)(\xi^2+1)}\,\sin\phi\,,$$

$$z = \frac{d}{2}\,\eta\,\xi$$

dönüşümleri ile tanımlanır.

Eğrisel koordinatlarda ∇^2 Laplace operatörü yardımı ile verilen

$$(\ \nabla^2 + k^2\ )\psi = 0$$

Helmholtz dalga denkleminin prolate ve oblate küresel koordinatlardaki ifadeleri, $c = \frac{1}{2}kd$ olmak üzere, sırası ile

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\,(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi + c^2(\xi^2-\eta^2)\psi = 0 \qquad (1.4.1)$$

ve

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\,(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\,+\,\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2+1)\frac{\partial}{\partial\xi}\,+\frac{\xi^2+\eta^2}{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi\,+$$

$$c^2(\xi^2+\eta^2)\psi=0 \qquad (1.4.2)$$

şeklindedir. (1.4.1) denkleminde $\xi\longrightarrow i\xi$ ve $c\longrightarrow -ic$ dönüşümü yapılırsa (1.4.2) denklemi elde edilir. Bu dönüşüm, prolate küresel sistemdeki herhangi bir fiziksel büyüklüğün oblate küresel sisteme taşınmasında kullanılabilir. Bu iki denklem değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülebilmektedir. Prolate küresel koordinat sistemi için önerilen çözüm

$$\psi_{mn}(\eta,\xi,\phi)=S_{mn}(c,\eta).R_{mn}(c,\xi)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases},$$

oblate küresel koordinat sistemi için önerilen çözüm ise

$$\psi_{mn}(\eta,\xi,\phi)=S_{mn}(-ic,\eta).R_{mn}(-ic,i\xi)\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$$

formundadır. Bu durumda $S_{mn}(c,\eta)$, $R_{mn}(c,\xi)$, $S_{mn}(-ic,\eta)$, $R_{mn}(-ic,i\xi)$ fonksiyonları sırası ile

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}\,S_{mn}(c,\eta)\right]+\left[\lambda_{mn}-\,c^2\eta^2-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right]S_{mn}(c,\eta)=0 \qquad (1.4.3)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi}\,R_{mn}(c,\xi)\right]-\left[\lambda_{mn}-\,c^2\xi^2+\frac{m^2}{\xi^2-1}\right]R_{mn}(c,\xi)=0 \qquad (1.4.4)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}\,S_{mn}(-ic,\eta)\right]+\left[\lambda_{mn}+\,c^2\eta^2-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right]S_{mn}(-ic,\eta)=0 \qquad (1.4.5)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2+1)\frac{d}{d\xi}\,R_{mn}(-ic,i\xi)\right]-\left[\lambda_{mn}-\,c^2\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2+1}\right]R_{mn}(-ic,i\xi)=0 \qquad (1.4.6)$$

denklemlerinin çözümleridir. Bu denklemlerdeki λ_{mn} ve m sabitleri, değişkenlerine ayırma yönteminde kullanılan ayrıma sabitleri olup denklemlerin özdeğerleri olarak adlandırılırlar. (1.4.3) ve (1.4.4) denklemlerinin çözümleri olan $S_{mn}(c,\eta)$ ve $R_{mn}(c,\xi)$ fonksiyonları sırası ile açısal ve radyal prolate küresel dalga fonksiyonları olarak adlandırılır. (1.4.5) ve (1.4.6) denklemlerinin çözümleri olan $S_{mn}(-ic,\eta)$ ve $R_{mn}(-ic,i\xi)$ fonksiyonları ise sırası ile açısal ve radyal oblate küresel dalga fonksiyonlarıdır.

(1.4.3) ve (1.4.5) denklemlerindeki d parametresi sıfıra yaklaştırılarak bu denklemler asosiye Legendre denklemine indirgenebilir. Bu, açısal küresel

fonksiyonların, farklı derecelerden asosiye Legendre fonksiyonlarının bir serisi şeklinde ifade edilebilmesini sağlamaktadır. Prolate küresel koordinatlardaki açısal küresel fonksiyonlar ile asosiye Legendre fonksiyonları arasındaki ilişki

$$S_{mn}^{(1)}(\widetilde{c},\ \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\widetilde{c})\, P_{m+r}^{m}(\eta) \tag{1.4.7}$$

ve

$$S_{mn}^{(2)}(\widetilde{c},\ \eta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' d_r^{mn}(\widetilde{c})\, Q_{m+r}^{m}(\eta) \tag{1.4.8}$$

ile verilir. Bu ifadelerdeki $\widetilde{c}$, c veya $-ic$ anlamını taşımaktadır. Ayrıca $P_n^m(x)$ birinci tür asosiye Legendre fonksiyonu ($|x| > 1$ aralığında), $Q_n^m(x)$ ise ikinci tür asosiye Legendre fonksiyonudur. Toplam sembolü üzerindeki işaret, $n-m$ değeri çift ise toplamın r 'nin çift değerleri üzerinde tanımlı, $n-m$ değeri tek ise toplamın r 'nin tek değerleri üzerinde tanımlı olduğu anlamına gelir. (1.4.7) çözümü (1.4.3) denkleminde yerine yazılırsa, asosiye Legendre fonksiyonlarının rekürans bağıntıları yardımıyla d_r^{mn} katsayıları için aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilir.

$$\frac{(2m+r+2)(2m+r+1)\,c^2}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)}\, d_{r+2}^{mn}(c) \ +$$

$$\left[(m+r)(m+r+1) - \lambda_{mn}(c) \ + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)}\, c^2\right] d_r^{mn}(c) \ +$$

$$\frac{r(r-1)\,c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)}\, d_{r-2}^{mn}(c) \ = 0\,, \qquad r \geq 0\,.$$

Açısal küresel fonksiyonlar ile radyal küresel fonksiyonlar arasındaki ilişki

$$R_{mn}^{(1)}(c,\xi) = S_{mn}^{(1)}(c,\xi) \,/\, \mathcal{K}_{mn}^{(1)}(c)$$

$$R_{mn}^{(1)}(-ic,i\xi) = S_{mn}^{(1)}(-ic,i\xi) \,/\, \mathcal{K}_{mn}^{(1)}(-ic)$$

$$R_{mn}^{(2)}(c,\xi) = S_{mn}^{(2)}(c,\xi) \,/\, \mathcal{K}_{mn}^{(2)}(c)$$

$$R_{mn}^{(2)}(-ic,i\xi) = S_{mn}^{(2)}(-ic,i\xi) \,/\, \mathcal{K}_{mn}^{(2)}(-ic)$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{K}_{mn}^{(1)}$ ve $\mathcal{K}_{mn}^{(2)}$ sabitleri

$$\mathcal{K}_{mn}^{(1)}(\tilde{c})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2m+1)(n+m)!}{2^{n+m}\, d_0^{mn}(\tilde{c})\, c^m\, m!\, \left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!} \times \sum_{r=0}^{\infty}{}' \, d_r^{mn}(\tilde{c}) \dfrac{(2m+r)!}{r!}, & (n-m) \text{ çift} \\ \dfrac{(2m+3)(n+m+1)!}{2^{n+m}\, d_1^{mn}(\tilde{c})\, c^{m+1}\, (m+1)!\, \left(\frac{n-m-1}{2}\right)!\left(\frac{n+m+1}{2}\right)!} \times \sum_{r=1}^{\infty}{}' \, d_r^{mn}(\tilde{c}) \dfrac{(2m+r)!}{r!}, & (n-m) \text{ tek} \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{K}_{mn}^{(2)}(\tilde{c})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^{n-m}\, d_{-2m}^{mn}(\tilde{c})\, (2m)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}{(2m-1)\, m!\, (n+m)!\; c^{m-1}} \times \sum_{r=0}^{\infty}{}' \, d_r^{mn}(\tilde{c}) \dfrac{(2m+r)!}{r!}, & (n-m) \text{ çift} \\ -\dfrac{2^{n-m}\, d_{-2m+1}^{mn}(\tilde{c})(2m)!\, \left(\frac{n-m-1}{2}\right)!\left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}{(2m-3)\, (2m-1)\, m!\, (n+m+1)!\; c^{m-2}} \times \sum_{r=0}^{\infty}{}' \, d_r^{mn}(\tilde{c}) \dfrac{(2m+r)!}{r!}, & (n-m) \text{ tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu

$$\int_{-1}^{1} [S_{mn}(c,\eta)]^2\, d\eta = \frac{2}{2m+1}\, \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

ile verilir (Abramowitz, Stegun, 1964 ; Li, Kang, Leong, 2002)

BÖLÜM 2

SO(1,3) GRUBU İLE BAĞLANTILI İNTEGRALLENEBİLİR SİSTEMLER

$p = 1, q = 3$ olmak üzere, Euclidean uzayda ortogonallik koşulunu sağlayan ve determinantı bir olan pseudo-ortogonal matrisler $SO(1,3)$ grubunu oluşturur ve bu grup

$$SO(1,3) = \{ A \in O(1,3) \mid \det A = 1 \}, \quad I = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

ile ifade edilir. $SO(3)$, $SO(1,3)$ grubunun normal alt grubu olmak üzere $H \cong SO(1,3)/SO(3)$ homojen uzayı

$$H: \ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad , \ x_o > 0$$

denklemiyle verilen iki oyuklu hiperboloiddir. Bu bölümde $SO(1,3)$ grubunun homojen uzayı olan hiperboloidin dört farklı parametrik ifadesi ele alınarak integrallenebilir sistemlere bakılacaktır.

İlk olarak bu hiperboloidin,

$$x_0 = \cosh\rho,$$
$$x_1 = \sinh\rho \sin\nu \cos\eta,$$
$$x_2 = \sinh\rho \sin\nu \sin\eta,$$
$$x_3 = \sinh\rho \cos\nu,$$
$$-\infty < \rho < \infty, \quad 0 \le \nu < \pi, \quad 0 \le \eta < 2\pi$$

olmak üzere

$$X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$
$$= (\cosh\rho\,, \sinh\rho \sin\nu \cos\eta\,, \sinh\rho \sin\nu \sin\eta\,, \sinh\rho \cos\nu) \qquad (2.1)$$

parametrizasyonunu ele alalım (Kalnins, Miller, 1997). Bu yüzeyde metrik matris, $(1.2.6)$ yardımıyla

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh^2\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\sinh^2\rho \sin^2\nu \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Uzunluk elemanı ise

$$ds^2 = (\, d\rho \quad dv \quad d\eta\,) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh^2\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\sinh^2\rho \sin^2 v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ dv \\ d\eta \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$ds^2 = -d\rho^2 - \sinh^2\rho\, dv^2 - \sinh^2\rho \sin^2 v\, d\eta^2$$

şeklinde bulunur.

Bir pseudo-Riemann manifoldunda çeşitli diferansiyel operatörler verilebilir. Bu operatörden birisi Laplace-Beltrami operatörüdür. Şimdi bu operatörü tanımlayalım.

M bir pseudo-Riemann manifoldu ve $\phi : q \longrightarrow \big(X_1(q), \dots, X_m(q)\big)$ ise $U \subset M$ açık kümesinde geçerli bir koordinat sistemi olsun. U kümesi üzerinde metrik tensör

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}\,, \quad \bar{g} = \big|\det(g_{ij})\big|$$

dir. M 'deki sonsuz kez türevlenebilir her bir f fonksiyonu, tüm A vektör alanları için

$$< \text{grad}\, f\,, A > \;=\; Af$$

şeklinde bir vektör alanı oluşturur. $\partial_i f = (\partial/\partial X_i)(f)$ olmak üzere, grad f

$$\text{grad}\, f = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i f \frac{\partial}{\partial X_i}$$

ile verilir. Ayrıca, eğer A, M'de bir vektör alanı ve U 'da $A = \sum_i X_i(\partial X_i)$ ise X 'in diverjansı

$$\text{div}\, X \;=\; \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \partial_i \left(\sqrt{|g|}\,.X_i\right)$$

ile verilen M üzerinde bir fonksiyondur. Buradan yüzeyde eğrisel koordinatlarda Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta f \;= \text{div grad}\, f$$

yani,

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\sum_i \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\sum_j \sqrt{\bar{g}}\,.\,g^{ij}.\frac{\partial}{\partial X_j}\right)f \quad ; \qquad \bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right| \qquad (2.2)$$

ile verilir.

Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ 'de Laplace operatörünü elde etmeye çalışalım. $S:\; {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ olmak üzere birim küreyi ifade eder. (r,θ,ϕ) küresel polar koordinatlarda Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^{-2}\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

formunda elde edilir. Bu ifadede parantez içerisindeki operatör

$$\Delta_{LB} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^{-2}\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Laplace operatörünün S üzerindeki izdüşümüdür ve Laplace-Beltrami operatörü olarak adlandırılır. Geriye kalan

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

ifadesi ise Laplace operatörünün radyal kısmıdır. $n > 1$ için $\mathbb{R}^n$ 'de küresel polar koordinatlarda Laplace operatörünün genelleştirilmesi

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{LB}$$

şeklindedir. Burada Δ_{LB}, S^{n-1} üzerindeki Laplace Beltrami operatörüdür (Helgason, 1984).

Şimdi hiperboloid üzerinde verilen (2.1) parametrizasyonunu ele alalım. Bu parametrizasyon için $\bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right| = \sinh^4\rho\sin^2\nu$'dir. Bu parametrizasyona göre Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\coth\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\sinh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \cot\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sin^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

olarak bulunur. Bu operatörün özdeğeri $-\sigma(\sigma+2)$ olmak üzere (Vilenkin, Klimyk, 1991), Laplace-Beltrami operatörüne bir $f(\rho,\nu,\eta)$ fonksiyonu etki ettirilirse

$$\Delta_{LB}f(\rho,\nu,\eta) = -\sigma(\sigma+2)f(\rho,\nu,\eta)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\coth\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\sinh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sin^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\right]f(\rho,\nu,\eta)$$
$$= -\sigma(\sigma+2)f(\rho,\nu,\eta)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem aslında bir özdeğer-özfonksiyon denklemidir. Bu denklemi çözmek için değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılabilir. $f(\rho,\nu,\eta) = A(\rho)B(\nu)e^{im\eta}$; $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ şeklinde bir çözüm arayalım. Önerilen çözüm denklemde yerine yazılarak,

$$\left(-\frac{d^2A}{d\rho^2} - 2\coth\rho\frac{dA}{d\rho}\right)B(\nu)e^{im\eta}$$
$$-\frac{1}{\sinh^2\rho}\left(\frac{d^2B}{d\nu^2} + \cot\nu\frac{dB}{d\nu} - \frac{m^2}{\sin^2\nu}B(\nu)\right)A(\rho)e^{im\eta}$$
$$= -\sigma(\sigma+2)\,A(\rho)B(\nu)e^{im\eta}$$

eşitliği elde edilir. Denklem düzenlenirse,

$$-\frac{1}{A}.\frac{d^2A}{d\rho^2} - 2\coth\rho\frac{1}{A}.\frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{\sinh^2\rho}\left(\frac{1}{B}.\frac{d^2B}{d\nu^2} + \cot\nu\frac{1}{B}.\frac{dB}{d\nu} - \frac{m^2}{\sin^2\nu}\right)$$
$$= -\sigma(\sigma+2)$$

halini alır. ℓ reel değerler alan $-\ell(\ell+1)$ parantez içindeki denklemin özdeğeri olmak üzere diferansiyel denklem,

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} + 2\coth\rho\frac{dA}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2\rho}A = \sigma(\sigma+2)A \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2B}{d\nu^2} + \cot\nu\frac{dB}{d\nu} - \frac{m^2}{\sin^2\nu}B = -\ell(\ell+1)B \tag{2.4}$$

şeklinde iki adi diferansiyel denkleme indirgenir.

Şimdi bu denklemlerin çözümlerini araştıralım. Öncelikle (2.3) denklemini ele alalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$A(\rho) = \sinh^{\ell}\rho\, W(\rho) \tag{2.5}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + 2(\ell+1)\coth\rho\,\frac{dW}{d\rho} + [\,\ell(\ell+2) - \sigma(\sigma+2)\,]W = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yapılan

$$z = \cosh^2\rho \tag{2.6}$$

dönüşümü ile denklem

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + \left[\,\frac{1}{2} - (\ell+2)z\,\right]\frac{dW}{dz} - \frac{(\ell-\sigma)(\ell+\sigma+2)}{4}W = 0$$

halini alır. Elde edilen bu son denklem,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\ c-(a+b+1)z\ ]\frac{du}{dz} - abu = 0 \qquad (2.7)$$

Hipergeometrik denkleminin aynısıdır. Hipergeometrik denklemin çözümü hipergeometrik fonksiyonlar ile verilir. c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $z = 0$ civarındaki regüler çözüm

$$W(z) = c_1 W_1(z) + c_2 W_2(z)$$

şeklindedir. Burada

$$W_1(z) = F(\ a\ ,\ b\ ;\ c\ ;\ z\ )$$

$$W_2(z) = z^{1-c}\, F(\ a-c+1\ ,\ b-c+1\ ;\ 2-c\ ;\ z\ )$$

dir (Bateman, 1953). Bu durumda

$$a = \frac{\ell-\sigma}{2}\ ,\ b = \frac{\ell+\sigma+2}{2},\ c = \frac{1}{2}$$

olmak üzere denklemin çözümü

$$W(z) = c_1 F\left(\ \frac{\ell-\sigma}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ z\ \right) + c_2\, z^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{\ell-\sigma+1}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+3}{2}\ ;\ \frac{3}{2};\ z\ \right)$$

dir. (2.6) dönüşümü dikkate alındığında çözüm

$$W(\rho) = c_1\, F\left(\ \frac{\ell-\sigma}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right) + c_2\ \cosh\rho\ F\left(\ \frac{\ell-\sigma+1}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right)$$

şeklindedir. (2.5) dönüşümü dikkate alındığında ise diferansiyel denklemin genel çözümü

$$A(\rho) = c_1 \sinh^{\ell}\rho\, F\left(\ \frac{\ell-\sigma}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right) + c_2 \sinh^{\ell}\rho \cosh\rho\, F\left(\ \frac{\ell-\sigma+1}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right)$$

olarak elde edilir. Burada genel çözüm

$$A(\rho) = c_1 A_1(\rho) + c_2 A_2(\rho)$$

olmak üzere

$$A_1(\rho) = \sinh^{\ell}\rho\, F\left(\ \frac{\ell-\sigma}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right)$$

$$A_2(\rho) = \sinh^{\ell}\rho \cosh\rho\, F\left(\ \frac{\ell-\sigma+1}{2}\ ,\ \frac{\ell+\sigma+3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\ \right)$$

çözümlerinin toplamı şeklinde verilmiştir. Çözüm olarak bu iki çözümden biri seçilebilir.

Schrödinger denklemi, Hamiltonyen ile verilen kuantum integrallenebilir sistem örneklerinden biridir ve zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ile Δ_{LB} Laplace-Beltrami operatörü arasındaki ilişki ($\hbar = 2m = 1$) , $V(x)$ potansiyel enerji, E enerji olmak üzere

$$H\psi \;=\; [\; -\Delta_{LB} \;+\; V(x)]\,\psi \;=\; E\psi$$

ile verilir (Weidmann, 1987). Şimdi (2.3) denklemi Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$A(\rho) \;=\; (\sinh\rho)^{-1}\;\psi(\rho) \qquad (2.8)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[\; -\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2\rho}\;\right]\psi \;=\; -(\sigma+1)^2\psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada sistemin potansiyeli ve enerjisi

$$V(\rho) = \;\frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2\rho} \qquad (\text{Pöschl} - \text{Teller potansiyeli})$$

$$E \;=\; -(\sigma+1)^2$$

olarak elde edilir. (2.8) dönüşümü dikkate alınırsa, Schrödinger denklemin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(\rho) \;=\; N\sinh^{\ell+1}\rho\;F\left(\;\frac{\ell-\sigma}{2}\;,\;\frac{\ell+\sigma+2}{2}\;;\;\frac{1}{2}\;;\;\cosh^2\rho\;\right)$$

olarak bulunur ($N = c_1$).

Ortogonal fonksiyonlar, fizikte kapsamlı bir şekilde ele alınmakta ve fen ve mühendislik alanlarında sıkça kullanılmaktadır. Ortogonal fonksiyonlar iki ve daha büyük boyutlardaki birim vektörler ile benzerlik göstermektedir. Üç boyutlu keyfi bir vektör, ortogonal taban vektörlerinin lineer bir kombinasyonu şeklinde şu şekilde yazılabilir:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\,, \qquad \vec{i},\vec{j},\vec{k} \text{ birim vektörler.}$$

Benzer şekilde belirli koşulları sağlayan keyfi bir fonksiyon da

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)\,, \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ ortogonal fonksiyonlar}$$

şeklinde yazılabilir. Bir G fonksiyonunun ortogonal fonksiyonlar cinsinden açılımı çoğu zaman ortogonal fonksiyonların sonsuz bir kümesini içerirken, bir $\vec{v}$ vektörünün açılımı ortogonal birim vektörlerin sonlu bir kümesini içermektedir.

N_{ij} sabit değerler olmak üzere, tüm i, j 'ler için

$$\int_a^b f_i^*(x)\, f_j(x)\, w(x)\, dx \;=\; N_{ij}\, \delta_{ij}$$

koşulunu sağlayan $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarına, $w(x)$ yoğunluk fonksiyonu ile $[a, b]$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır denir. Burada $f_i^*(x)$, $f_i(x)$ 'nin kompleks eşleniğidir. Bazı kaynaklarda ise ortogonallik tanımı, $f_i(x)$ reel fonksiyonlar, $w(x) = 1$ ve $N_{ij} = 1,\ i, j = 1,2, \dots$ koşulları altında

$$\int_a^b f_i(x)\, f_i(x)\, dx \;=\; \delta_{ij}$$

şeklinde verilmektedir.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\ , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

olduğunu biliyoruz. $\cos(n\theta)\ ,\ n = 0,1,2, \dots$ ve $\sin(n\theta)\ ,\ n = 1,2, \dots$ fonksiyonları,

$$\int_0^{2\pi} \cos^*(n\theta)\sin(m\theta)\, d\theta \;=\; 0$$

olduğundan $w(x) = 1$ ile $[0,2\pi]$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır. Benzer şekilde, $e^{inx},\ n = 0,1, \dots$ fonksiyonları,

$$\int_0^{2\pi} \left(e^{inx}\right)^* e^{imx} dx \;=\; 2\pi\, \delta_{ij}$$

olduğundan $w(x) = 1$ ile $[0,2\pi]$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır.

Legendre polinomları $w(x) = 1$ ile $[-1,1]$ aralığında, Laguerre polinomları $w(x) = e^{-x}$ ile $[0, \infty]$ aralığında, Hermite polinomları $w(x) = e^{-x^2}$ ile $[-\infty, \infty]$ aralığında, Jacobi polinomları ise $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ile $[-1,1]$ aralığında ortogonal polinomlara örnektir.

Ortogonallik koşulunda $i = j$ alınırsa, $n = 1,2, \dots$ için

$$\int_a^b f_n{}^*(x)\, f_n(x)\, w(x)\, dx \;=\; N_{nn}, \quad (\delta_{nn}=1)$$

olur. Eğer

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}}\, f_n(x)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlanırsa, ortogonallik koşulu

$$\int_a^b \varphi_n{}^*(x)\, \varphi_n(x)\, w(x)\, dx \;=\; \delta_{nn}$$

halini alır. $n = m$ için

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}} f_n{}^*(x)\, \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}} f_n(x)\, w(x)\, dx \;=\; \frac{1}{N_{nn}}.N_{nn} = 1$$

dir. Bu sayede, $f_n(x)$ ortogonal fonksiyonu normalize edilerek ortonormal $\varphi_n(x)$ fonksiyonu elde edilmiş olur. Yukarıdaki örnekte e^{inx}, $n = 0,1,\ldots$ fonksiyonu, normalize edilerek $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$ ortonormal fonksiyonu elde edilmiştir. (Abromowitz, Stegun, 1964; Bateman, 1953; Lebedev, 1965).

Şimdi $\psi(\rho)$ fonksiyonunun N normalizasyon sabitini bulalım. Bu sabiti bulmak için Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulunu kullanacağız. Hipergeometrik fonksiyonların Jacobi polinomları ile ifadesi,

$$F\left(n+\alpha+\beta+1\,, -n\,, 1+\beta\,;\, \frac{1+x}{2}\right) = \frac{n!\,\Gamma(1+\beta)}{(-1)^n\Gamma(n+1+\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

şeklindedir (Bateman, 1953). Buradan $\psi(\rho)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları ile ifadesi

$$\psi(\rho) \;=\; N \underbrace{\frac{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)}}_{a} \sinh^{\ell+1}\rho\; P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(\cosh 2\rho)$$

olarak elde edilir. Dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumuna göre parçacık, tanımlı olduğu bölgede herhangi bir yerde bulunması gerektiğinden fonksiyon

$$\int |\psi|^2 dx = 1$$

eşitliğini sağlamalıdır. Bu durumda $\psi(\rho)$ fonksiyonu için

$$\int_{-1}^{1}\left[Na\sinh^{\ell+1}\rho\,P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(\cosh 2\rho)\right]\left[Na\sinh^{\ell+1}\rho\,.P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(\cosh 2\rho)\right]d\rho=1$$

yani,

$$N^2a^2\int_{-1}^{1}\sinh^{(2\ell+2)}\rho\left[P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(\cosh 2\rho)\right]^2 d\rho=1$$

integrali elde edilir. Bu integralde

$$x=\cosh 2\rho$$

dönüşümü yapılsa integral

$$N^2a^2\ (-1)^{\ell+\frac{1}{2}}\ 2^{-\ell-2}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}(1+x)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left[P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(x)\right]^2 dx=1$$

halini alır. Artık N'yi bulmak için Jacobi polinomları için ortogonallik koşulunu kullanabiliriz. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu,

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(n+1+\beta)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+n+1+\beta)},\quad \begin{matrix} m=n \\ Re\,\alpha>-1 \\ Re\,\beta>-1\end{matrix}$$

şeklinde verilir (Jeffrey, 1994). Buradan N normalizasyon sabiti

$$N=\sqrt{2\,\frac{(-1)^{-\sigma-\frac{1}{2}}\Gamma(-\sigma-1)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)}{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{\ell-\sigma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi (2.4) diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$B(\nu)\ =\ \sin^m\nu\ P(\nu) \tag{2.9}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2P}{d\nu^2}\ +\ (2m+1)\cot\nu\frac{dP}{d\nu}\ +\ [\,\ell(\ell+1)-m(m+1)\,]P=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$z=\cos^2\nu \tag{2.10}$$

dönüşümü yapılırsa denklem son olarak

$$z(1-z)\frac{d^2P}{dz^2}\ +\ \left[\ \frac{1}{2}-\left(m+\frac{3}{2}\right)z\ \right]\frac{dP}{dz}-\frac{(m-\ell)(m+\ell+1)}{4}\ P=0$$

halini alır. Bu denklem (2.7) hipergeometrik denklemin aynısıdır. c_3, c_4 keyfi sabitler olmak üzere $z = 0$ civarındaki regüler çözüm

$$P(z) = c_3 P_1 + c_4 P_2$$

şeklindedir. Burada

$$P_1(z) = F(\ a\ ,\ b\ ;\ c\ ;\ z\ )$$

$$P_2(z) = z^{1-c}\, F(\ a-c+1\ ,\ b-c+1\ ;\ 2-c\ ;\ z\ )$$

dir. Burada

$$a = \frac{m-\ell}{2}\ ,\ \ b = \frac{m+\ell+1}{2},\ \ c = \frac{1}{2}$$

olmak üzere denklemin çözümü

$$P(z) = c_3 F\left(\ \frac{m-\ell}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ z\ \right) + c_4\, z^{\frac{1}{2}} F\left(\ \frac{m-\ell+1}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+2}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \ z\ \right)$$

şeklindedir. (2.9) ve (2.10) dönüşümden diferansiyel denklemin genel çözümü

$$B(\nu)\ =\ c_3 \sin^m \nu\, F\left(\ \frac{m-\ell}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cos^2\nu\ \right) +\ c_4 \sin^m \nu \cos\nu\ F\left(\ \frac{m-\ell+1}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+2}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \cos^2\nu\ \right)$$

olarak elde edilir. Burada genel çözüm

$$B(\nu)\ =\ c_3 B_1(\nu) +\ c_4 B_2(\nu)$$

olmak üzere

$$B_1(\nu) = \sin^m \nu\, F\left(\ \frac{m-\ell}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cos^2\nu\ \right)$$

$$B_2(\nu) = \sin^m \nu \cos\nu\ F\left(\ \frac{m-\ell+1}{2}\ ,\ \frac{m+\ell+2}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \cos^2\nu\ \right)$$

çözümlerini toplamı şeklinde verilmiştir. Çözüm olarak bu iki çözümden biri seçilebilir.

Şimdi (2.4) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$B(\nu)\ =\ (\sin\nu)^{-1/2}\ \psi(\nu) \qquad (2.11)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[\ -\frac{d^2\psi}{d\nu^2} + \frac{m^2-1/4}{\sin^2\nu}\ \right]\psi\ =\ \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada sistemin potansiyeli ve enerjisinin

$$V(v) = \frac{m^2 - 1/4}{\sin^2 v} \qquad \text{(Pöschl} - \text{Teller potansiyeli)}$$

$$E = \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)^2$$

olduğu görülür. (2.11) dönüşümü dikkate alınırsa Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(v) = N \sin^{m+\frac{1}{2}} v \;\; F\left(\frac{m-\ell}{2}\;,\;\frac{m+\ell+1}{2}\;;\;\frac{1}{2}\;;\;\cos^2 v\right)$$

olarak bulunur ($N = c_3$).

Şimdi bu dalga fonksiyonundaki N sabitini belirleyelim. $\psi(v)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları ile ifadesi

$$\psi(v) = N.\underbrace{\frac{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}}_{c}.\sin^{m+\frac{1}{2}} v\,.P^{\left(m,-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-m-1}{2}\right)}(\cos 2v)$$

şeklindedir. $\psi(v)$ dalga fonksiyonu için

$$N^2c^2 \int_{-1}^{1} \sin^{2m+1} v\,.\left[P^{\left(m,-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}(\cos 2v)\right]^2 dv = 1$$

integrali elde edilir. Burada

$$x = \cos 2v$$

dönüşümü yapılsa

$$-N^2c^2\,2^{-\mathrm{m}-\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\mathrm{m}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left[P^{\left(\mathrm{m},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}(x)\right]^2 dx = 1$$

integrali elde edilir. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu yardımıyla N sabiti

$$N = \sqrt{2\frac{(-1)^{(-m-\ell)}\Gamma\left(-\ell-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}{\left(\frac{-m-\ell-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{m-\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de hiperboloidin

$$x_0 = \cosh\rho\cosh v$$

$$x_1 = \cosh\rho\sinh v\cos\eta$$

$$x_2 = \cosh\rho\sinh v\sin\eta$$

$$x_3 = \sinh\rho$$

$$-\infty < \rho < \infty, \quad -\infty < \nu < \infty, \quad 0 \le \eta < 2\pi$$

olmak üzere

$$X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$= (\cosh\rho\cosh\nu\,,\cosh\rho\sinh\nu\cos\eta\,,\cosh\rho\sinh\nu\sin\eta\,,\sinh\rho) \qquad (2.12)$$

şeklindeki başka bir parametrizasyonu ele alalım (Kalnins, Miller, 1997). Bu parametrizasyon yardımıyla metrik matris

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh^2\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\cosh^2\rho\sinh^2\nu \end{pmatrix}$$

ve metrik matrisin tersi (g^{ij})

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\cosh^2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\cosh^2\rho\sinh^2\nu} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Uzunluk elemanı ise

$$ds^2 = -d\rho^2 - \cosh^2\rho\, d\nu^2 - \cosh^2\rho\sinh^2\nu\, d\eta^2$$

şeklindedir. $\bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right| = \cosh^4\rho\sinh^2\nu$ olmak üzere, (2.12) parametrizasyonu için Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\tanh\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\cosh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \coth\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sinh^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

olarak bulunur. Bu operatörün özdeğeri $-\sigma(\sigma+2)$ olmak üzere, Laplace-Beltrami operatörüne bir $f(\rho,\nu,\eta)$ fonksiyonu etki ettirilirse

$$\Delta_{LB} f(\rho,\nu,\eta) = -\sigma(\sigma+2) f(\rho,\nu,\eta)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\tanh\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\cosh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \coth\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sinh^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\right] f(\rho,\nu,\eta)$$

$$= -\sigma(\sigma+2) f(\rho,\nu,\eta)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılabilir. $f(\rho,\nu,\eta) = A(\rho)B(\nu)e^{im\eta}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa, denklem

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} + 2\tanh\rho\frac{dA}{d\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2\rho}A = \sigma(\sigma+2)A \qquad (2.13)$$

$$\frac{d^2B}{dv^2} + \coth v \frac{dB}{dv} - \frac{m^2}{\sinh^2 v} B = \ell(\ell+1)B \qquad (2.14)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemlere indirgenir. Şimdi bu denklemlerin çözümlerini arayalım. Öncelikle (2.13) denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$A(\rho) = \cosh^{\ell} \rho \, W(\rho) \qquad (2.15)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + 2(\ell+1)\tanh\rho \, \frac{dW}{d\rho} + [\, \ell(\ell+2) - \sigma(\sigma+2) \,]W = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem

$$z = -\sinh^2 \rho \qquad (2.16)$$

dönüşümü ile

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} - (\ell+2)z \right] \frac{dW}{dz} - \frac{(\ell-\sigma)(\ell+\sigma+2)}{4} W = 0$$

hipergeometrik denklemine indirgenir. Bu durumda (2.15) ve (2.16) dönüşümleri yardımıyla (2.13) denkleminin çözümü

$$A(\rho) = c_5 A_1(\rho) + c_6 A_2(\rho)$$

olmak üzere

$$A_1(\rho) = \cosh^{\ell} \rho \, F\left(\frac{\ell-\sigma}{2} , \frac{\ell+\sigma+2}{2} ; \frac{1}{2} ; -\sinh^2 \rho \right)$$

$$A_2(\rho) = \cosh^{\ell} \rho \sqrt{-\sinh^2 \rho} \; F\left(\frac{\ell-\sigma+1}{2} , \frac{\ell+\sigma+3}{2} ; \frac{3}{2} ; -\sinh^2 \rho \right)$$

şeklindedir.

Şimdi (2.13) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$A(\rho) = (\cosh\rho)^{-1} \, \psi(\rho) \qquad (2.17)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 \rho} \right] \psi = -(\sigma+1)^2 \psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada potansiyel ve enerjinin

$$V(\rho) = -\frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2 \rho} \qquad \text{(Pöschl – Teller potansiyeli)}$$

$$E = -(\sigma+1)^2$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (2.17) dönüşümü dikkate alınırsa Schrödinger denklemin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(\rho) \;=\; N\cosh^{\ell+1}\rho\; F\left(\;\frac{\ell-\sigma}{2}\;,\;\frac{\ell+\sigma+2}{2}\;;\;\frac{1}{2}\;;-\sinh^2\rho\;\right)$$

olarak bulunur $(\,N=c_5\,)$.

Şimdi bu dalga fonksiyonunun normalizasyon sabitini belirleyelim. Öncelikle $\psi(\rho)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları ile ifadesi

$$\psi(\rho) \;=\; N.\underbrace{\frac{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)}}_{a}\cosh^{\ell+1}\rho\;P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(-\cosh 2\rho)$$

şeklindedir. Bu durumda dalga fonksiyonun istatistiksel yorumundan faydalanılarak

$$N^2a^2\int_{-1}^{1}\cosh^{(2\ell+2)}\rho\left[P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(-\cosh 2\rho)\right]^2 d\rho=1$$

integrali elde edilir. Burada

$$x=-\cosh 2\rho$$

dönüşümü yapılsa

$$N^2a^2\,(-1)^{-\frac{3}{2}}2^{-\ell-2}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\ell+\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left[P^{\left(\ell+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)}(x)\right]^2 dx=1$$

integrali elde edilir. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu yardımıyla N sabiti

$$N=\sqrt{2\frac{(-1)^{\left(-\ell-\sigma-\frac{1}{2}\right)}\Gamma(-\sigma-1)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell-\sigma}{2}\right)}{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi ise (2.14) denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$B(\nu)=\sinh^m\nu\,P(\nu) \qquad (2.18)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2P}{d\nu^2}+(2m+1)\coth\nu\,\frac{dP}{d\nu}+[\,m(m+1)-\ell(\ell+1)\,]P=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem

$$z=\cosh^2\nu \qquad (2.19)$$

dönüşümü ile

$$z(1-z)\frac{d^2P}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} - \left(m+\frac{3}{2}\right)z\right]\frac{dP}{dz} - \frac{(m-\ell)(m+\ell+1)}{4}P = 0$$

hipergeometrik denklemine dönüşür. Bu durumda (2.18) ve (2.19) dönüşümleri yardımıyla (2.14) denkleminin çözümü

$$B(v) = c_7 B_1(v) + c_8 B_2(v)$$

olmak üzere

$$B_1(v) = c_7 \sinh^m v \; F\left(\frac{m-\ell}{2}, \frac{m+\ell+1}{2}; \frac{1}{2}; \cosh^2 v\right)$$

$$B_2(v) = c_8 \sinh^m v \cosh v \; F\left(\frac{m-\ell+1}{2}, \frac{m+\ell+2}{2}; \frac{3}{2}; \cosh^2 v\right)$$

şeklindeki çözümlerin toplamı şeklinde verilir.

Şimdi (2.14) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$B(v) = (\sinh v)^{-\frac{1}{2}} \psi(v) \qquad (2.20)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[-\frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{m^2-1/4}{\sinh^2 v}\right]\psi = -\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada

$$V(v) = \frac{m^2-1/4}{\sinh^2 v} \qquad \text{(Pöschl} - \text{Teller potansiyeli)}$$

$$E = -\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2$$

potansiyel ve enerji özdeğerleri olmak üzere dalga fonksiyonu

$$\psi(v) = N \sinh^{m+\frac{1}{2}} v \; F\left(\frac{m-\ell}{2}, \frac{m+\ell+1}{2}; \frac{1}{2}; \cosh^2 v\right)$$

olarak bulunur ($N = c_7$).

Bu fonksiyon için normalizasyon sabitini belirleyelim. İlk olarak $\psi(v)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları ile ifadesi

$$\psi(v) = N.\underbrace{\frac{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}}_{c}.\sinh^{m+\frac{1}{2}} v\,.P^{\left(m,-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-\ell-m-1}{2}\right)}(\cosh 2v)$$

şeklindedir. Bu durumda

$$N^2c^2\int_{-1}^{1}\sinh^{2m+1}v\,.\left[P^{\left(m,-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}(\cosh 2v)\right]^2 dv=1$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$x=\cosh 2v$$

dönüşümü yapılsa integral

$$N^2c^2\,(-1)^{\mathrm{m}}2^{-\mathrm{m}-\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\mathrm{m}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left[P^{\left(\mathrm{m},-\frac{1}{2}\right)}_{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)}(x)\right]^2 dx=1$$

halini alır. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu yardımıyla normalizasyon sabiti

$$N=\sqrt{2\frac{(-1)^{(-\ell-1)}\Gamma\left(-\ell-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{-m-\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi ise hiperboloidin

$$x_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho}+\frac{\cos\rho}{\cosh v}\right)+\frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho}$$

$$x_1=\frac{\eta}{\cosh v\cos\rho}$$

$$x_2=\tanh v\tan\rho$$

$$x_3=\frac{1}{\cosh v\cos\rho}-\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho}+\frac{\cos\rho}{\cosh v}\right)-\frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho}$$

$$0\le\rho<2\pi,\quad -\infty<v<\infty,\quad -\infty<\eta<\infty$$

olmak üzere

$$X=(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho}+\frac{\cos\rho}{\cosh v}\right)+\frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho},\ \frac{\eta}{\cosh v\cos\rho},\ \tanh v\tan\rho,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\cosh v\cos\rho}-\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho}+\frac{\cos\rho}{\cosh v}\right)-\frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho}\right)\qquad(2.21)$$

şeklindeki başka bir parametrizasyonu ele alalım (Kalnins, Miller, 1997). Bu yüzeyde metrik matris

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cos^2 \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cos^2 \rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\cosh^2 v \cos^2 \rho} \end{pmatrix}$$

ve metrik matrisin tersi (g^{ij})

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cos^2 \rho}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cos^2 \rho}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\cosh^2 v \cos^2 \rho \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Uzunluk elemanı ise

$$ds^2 = \left(\frac{1}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cos^2 \rho}\right)(d\rho^2 + dv^2) - \frac{1}{\cosh^2 v \cos^2 \rho} d\eta^2$$

şeklindedir. $\bar{g} = \left| \det(g_{ij}) \right| = \frac{\left(\cos^2 \rho - \cosh^2 v\right)^2}{\cosh^6 v . \cos^6 \rho}$ olmak üzere, (2.21) parametrizasyonu için Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = \frac{\cosh^2 v \,.\cos^2 \rho}{(\cos^2 \rho - \cosh^2 v)} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \rho}{\cos \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\sinh v}{\cosh v} . \frac{\partial}{\partial v} \right) + (\cosh^2 v - \cos^2 \rho) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]$$

olarak bulunur. Bu operatörün özdeğeri $-\sigma(\sigma + 2)$ olmak üzere, Laplace-Beltrami operatörüne bir $f(\rho, v, \eta)$ fonksiyonu etki ettirilirse

$$\Delta_{LB} f(\rho, v, \eta) = -\sigma(\sigma + 2) f(\rho, v, \eta)$$

$$\frac{\cosh^2 v \,.\cos^2 \rho}{(\cos^2 \rho - \cosh^2 v)} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \rho}{\cos \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\sinh v}{\cosh v} . \frac{\partial}{\partial v} \right) + (\cosh^2 v - \cos^2 \rho) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f(\rho, v, \eta)$$

$$= -\sigma(\sigma + 2) f(\rho, v, \eta)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözmek için $f(\rho, v, \eta) = A(\rho) B(v) e^{im\eta}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Özdeğer-özfonksiyon denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa, denklem

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} + \tan\rho\frac{dA}{d\rho} + \left(m^2\cos^2\rho - \frac{\sigma(\sigma+2)}{\cos^2\rho} + \ell(\ell+1)\right)A = 0 \qquad (2.22)$$

$$\frac{d^2A}{dv^2} - \tanh v\frac{dB}{dv} + \left(-m^2\cosh^2 v + \frac{\sigma(\sigma+2)}{\cosh^2 v} - \ell(\ell+1)\right)B = 0 \qquad (2.23)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemlere indirgenir. Şimdi bu iki adi diferansiyel denklemin çözümlerini araştıralım. Öncelikle (2.22) denklemi ele alalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$A(\rho) = \cos\rho\, W(\rho) \qquad (2.24)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} - \tan\rho\frac{dW}{d\rho} + \left(m^2\cos^2\rho - \frac{(\sigma+1)^2}{\cos^2\rho} + \ell(\ell+1)\right)W(\rho) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yapılan

$$z = \sin\rho \qquad (2.25)$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dW}{dz}\right] + \left(\ m^2 + \ell(\ell+1) - \ m^2z^2\ - \frac{(\sigma+1)^2}{1-z^2}\right)W(z) = 0$$

halini alır. Elde edilen bu son denklem, açısal prolate küresel dalga denklemidir ve çözümü açısal küresel dalga fonksiyonları ile verilir. Burada $a = \sigma + 1$ olarak seçilirse, $a = b, b+1, b+2, \ldots$ olmak üzere çözüm

$$W(z) \ = \ c_9\, S_{ab}^{(1)}(\ m,\ \ z\ ) \ + \ c_{10}\, S_{ab}^{(2)}(\ m,\ \ z\ )$$

şeklindedir. Bu durumda (2.24) ve (2.25) dönüşümleri dikkate alındığında (2.22) denkleminin çözümü

$$A(\rho) = \ c_9A_1(\rho) + \ c_{10}A_2(\rho)$$

olmak üzere

$$A_1(\rho) = c_9\cos\rho\ S_{ab}^{(1)}(\ m,\ \ \sin\rho\ )$$

$$A_2(\rho) = c_{10}\cos\rho\ S_{ab}^{(2)}(\ m,\ \ \sin\rho\ )$$

çözümlerinin toplamı şeklinde verilir.

Şimdi (2.22) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$A(\rho) \ = \ (\cos\rho)^{\frac{1}{2}}\ \psi(\rho) \qquad (2.26)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cos^2\rho} - m^2\cos^2\rho \right]\psi = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\psi$$

Schrödinger denklemine gelir. Burada

$$V(\rho) = \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cos^2\rho} - m^2\cos^2\rho$$

$$E = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2$$

potansiyel ve enerji özdeğerleri olmak üzere (2.26) dönüşümü yardımıyla dalga fonksiyonu

$$\psi(\rho) = N\cos^{\frac{1}{2}}\rho\; S_{ab}^{(1)}(m,\ \sin\rho)$$

olarak bulunur ($N = c_9$) .

Şimdi de bu dalga fonksiyonundaki N normalizasyon sabitini bulalım. Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu

$$\int_{-1}^{1}[S_{ab}(m,\ x)]^2dx = \frac{2}{2a+1}\,\frac{(a+b)!}{(a-b)!}$$

şeklinde verilir. Bu durumda $\psi(\rho)$ fonksiyonu için

$$N^2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\rho\,.\left[S_{ab}^{(1)}(m,\ \sin\rho)\right]^2d\rho = 1$$

integrali

$$x = \sin\rho$$

dönüşümü ile

$$N^2\int_{-1}^{1}\left[S_{ab}^{(1)}(m,\ x)\right]^2dx = 1$$

halini alır. Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu yardımıyla normalizasyon sabiti

$$N = \sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise (2.23) denkleminin çözümünü bulalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$B(v) \;=\; \cosh v \;P(v) \tag{2.27}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2P}{dv^2} + \tanh v \frac{dP}{dv} - \left(-\frac{(\sigma+1)^2}{\cosh^2 v} \;+\; m^2 \cosh^2 v \;+\; \ell(\ell+1) \right) P(v) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yapılan

$$z = \sinh v \tag{2.28}$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2+1)\frac{dP}{dz}\right] - \left(m^2 + \ell(\ell+1) + m^2 z^2 - \frac{(\sigma+1)^2}{z^2+1} \right) P(z) = 0$$

halini alır. Elde edilen bu denklem, radyal oblate küresel dalga denklemidir ve çözümü radyal küresel dalga fonksiyonları ile verilir. Bu durumda çözüm

$$P(z) \;=\; c_{11}\, R_{ab}^{(1)}(m,\;\; iz\,) \;+\; c_{12}\, R_{ab}^{(2)}(m,\;\; iz\,)$$

şeklindedir. (2.27) ve (2.28) dönüşümü dikkate alındığında (2.23) denkleminin genel çözümü

$$B(v) \;=\; c_{11}B_1(v) + \; c_{12}B_2(v)$$

olmak üzere

$$B_1(v) = c_{11} \cosh v \;\; R_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; i \sinh v\,)$$

$$B_2(v) = c_{12} \cosh v \;\; R_{ab}^{(2)}(m,\;\; i \sinh v\,)$$

çözümlerinin toplamı şeklinde verilmiştir.

Şimdi (2.23) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$B(v) \;=\; (\cosh v)^{1/2} \;\; \psi(v) \tag{2.29}$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[\; -\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cosh^2 v} \;+\; m^2 \cosh^2 v \;\right] \psi \;=\; \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Bu durumda

$$V(v) = \; -\frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cosh^2 v} \;+\; m^2 \cosh^2 v$$

$$E = \; -\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2$$

olduğu görülür. (2.29) dikkate alınırsa Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(v) \;=\; N\cosh^{1/2} v \;\; R_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; i\sinh v\,)$$

olarak bulunur ($N = c_{11}$) . Bu dalga fonksiyonun açısal küresel dalga fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$\psi(v) \;=\; N\cosh^{1/2} v \;\; S_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; i\sinh v\,)/\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)$$

şeklindedir.

Şimdi dalga fonksiyonu için normalizasyon sabitini bulalım. N normalizasyon sabiti için dalga fonksiyonlarını istatistiksel yorumundan faydalanalım. Bu durumda

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cosh v\,.\left[S_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; i\sinh v\,)/\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\right]^2 dv = 1$$

elde edilir. Burada

$$x = \sinh v$$

dönüşümü ile integral

$$N^2 \frac{1}{\left[\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\right]^2} \int_{-1}^{1} \left[S_{ab}^{(1)}(m,\;\; ix\,)\right]^2 dx = 1$$

halini alır. Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu yardımıyla normalizasyon sabiti

$$N = \mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\sqrt{\frac{(2a+1)\;(a-b)!}{2\;(a+b)!}}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de hiperboloidin

$$x_0 = \left[\frac{1}{\sinh v \sin\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin\rho} - \frac{\sin\rho}{\sinh v}\right)\right] + \frac{\eta^2}{2\sinh v \sin\rho}$$

$$x_1 = \frac{\eta}{\sinh v\,.\sin\rho}$$

$$x_2 = \coth v \cot\rho$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin\rho} - \frac{\sin\rho}{\sinh v}\right) + \frac{\eta^2}{2\sinh v \sin\rho}$$

$$0 \le \rho < 2\pi, \quad -\infty < \nu < \infty, \quad -\infty < \eta < \infty$$

olmak üzere

$$X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\left[\frac{1}{\sinh v \sin \rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin \rho} - \frac{\sin \rho}{\sinh v} \right) \right] + \frac{\eta^2}{2 \sinh v \sin \rho} , \right.$$

$$\left. \frac{\eta}{\sinh v \,.\, \sin \rho} , \quad \coth v \cot \rho , \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin \rho} - \frac{\sin \rho}{\sinh v} \right) + \frac{\eta^2}{2 \sinh v \sin \rho} \right) \qquad (2.30)$$

şeklindeki başka bir parametrizasyonu ele alalım (Kalnins, Miller, 1997). Bu yüzeyde metrik matris

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sinh^2 v} - \frac{1}{\sin^2 \rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sinh^2 v} - \frac{1}{\sin^2 \rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sinh^2 v \sin^2 \rho} \end{pmatrix}$$

ve metrik matrisin tersi (g^{ij})

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sinh^2 v} - \frac{1}{\sin^2 \rho} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\sinh^2 v} - \frac{1}{\sin^2 \rho} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\sinh^2 v \sin^2 \rho \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Uzunluk elemanı ise

$$ds^2 = \left(-\frac{1}{\sinh^2 v} - \frac{1}{\sin^2 \rho} \right) (d\rho^2 + dv^2) - \frac{1}{\sinh^2 v \sin^2 \rho} d\eta^2$$

şeklindedir. $\bar{g} = \left| \det(g_{ij}) \right| = \frac{\left(\sin^2 \rho + \sinh^2 v \right)^2}{\sinh^6 v . \sin^6 \rho}$ olmak üzere (2.30) parametrizasyonu için Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = \frac{\sinh^2 v \,.\, \sin^2 \rho}{\sin^2 \rho + \sinh^2 v} \cdot \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \cot \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \coth v \frac{\partial}{\partial v} \right) \right.$$

$$\left. - (\sinh^2 v + \sin^2 \rho) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right]$$

olarak bulunur. Bu operatörün özdeğeri $-\sigma(\sigma + 2)$ olmak üzere, Laplace-Beltrami operatörüne bir $f(\rho, v, \eta)$ fonksiyonu etki ettirilirse

$$\Delta_{LB} f(\rho, v, \eta) = -\sigma(\sigma + 2) f(\rho, v, \eta)$$

$$\frac{\sinh^2 v \,.\, \sin^2 \rho}{\sin^2 \rho + \sinh^2 v} \cdot \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \cot \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \coth v \frac{\partial}{\partial v} \right) \right.$$

$$\left. - (\sinh^2 v + \sin^2 \rho) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f(\rho, v, \eta)$$

$$= -\sigma(\sigma+2)f(\rho,\nu,\eta)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözmek için $f(\rho,\nu,\eta) = A(\rho)B(\nu)e^{im\eta}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Özdeğer-özfonksiyon denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa, denklem

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} - \cot\rho\frac{dA}{d\rho} + \left[-m^2\sin^2\rho - \frac{\sigma(\sigma+2)}{\sin^2\rho} + \ell(\ell+1) \right]A = 0 \qquad (2.31)$$

$$\frac{d^2B}{dv^2} - \coth v\frac{dB}{dv} + \left[-m^2\sinh^2 v - \frac{\sigma(\sigma+2)}{\sinh^2 v} - \ell(\ell+1) \right]B = 0 \qquad (2.32)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemlere indirgenir. Bu denklemlerin çözümlerini araştıralım. Öncelikle (2.31) denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$A(\rho) = \sin\rho\, W(\rho) \qquad (2.33)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + \cot\rho\frac{dW}{d\rho} + \left[-m^2\sin^2\rho - \frac{(\sigma+1)^2}{\sin^2\rho} + \ell(\ell+1) \right]W(\rho) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yapılan

$$z = \cos\rho \qquad (2.34)$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dW}{dz}\right] + \left(-m^2 + \ell(\ell+1) + m^2z^2 - \frac{(\sigma+1)^2}{1-z^2} \right)W(z) = 0$$

halini alır. Elde edilen bu denklem, açısal oblate küresel dalga denklemidir ve çözümü açısal küsel dalga fonksiyonları ile verilir. Bu durumda çözüm

$$W(z) = c_{13}\, S_{ab}^{(1)}(-im,\ z) + c_{14}\, S_{ab}^{(2)}(-im,\ z)$$

şeklindedir. Bu durumda (2.33) ve (2.34) dönüşümleri dikkate alındığında çözüm

$$A(\rho) = c_{13}A_1(\rho) + c_{14}A_2(\rho)$$

olmak üzere

$$A_1(\rho) = c_{13}\sin\rho\ S_{ab}^{(1)}(-im,\ \cos\rho)$$

$$A_2(\rho) = c_{14}\sin\rho\ S_{ab}^{(2)}(-im,\ \cos\rho)$$

çözümlerinin toplamı şeklinde verilir.

Şimdi (2.31) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$A(\rho) = (\sin\rho)^{\frac{1}{2}}\ \psi(\rho) \qquad (2.35)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sin^2\rho} + m^2\sin^2\rho \right] \psi = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 \psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada potansiyel ve enerji

$$V(\rho) = \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sin^2\rho} + m^2\sin^2\rho$$

$$E = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2$$

şeklindedir. (2.35) dönüşümü yardımı ile Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(\rho) = N \sin^{\frac{1}{2}}\rho \; S_{ab}^{(1)}(-im, \cos\rho)$$

olarak bulunur ($N = c_{13}$).

Şimdi bu dalga fonksiyonu N normalizasyon sabiti bulalım. ψ dalga fonksiyonu için

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin\rho \,.\left[S_{ab}^{(1)}(-im, \cos\rho)\right]^2 d\rho = 1$$

integrali elde edilir. Burada

$$x = \cos\rho$$

dönüşümü yapılsa

$$N^2 \int_{-1}^{1} \left[S_{ab}^{(1)}(-im, x)\right]^2 dx = 1$$

integrali elde edilir. Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu yardımıyla

$$N = \sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (2.32) diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemini bilinen bir denkleme indirgemek için

$$B(v) = \sinh v \; P(v) \qquad (2.36)$$

dönüşümü yapılarsa

$$\frac{d^2P}{dv^2} + \coth v \frac{dP}{dv} + \left(-m^2 \sinh^2 v - \frac{(\sigma+1)^2}{\sinh^2 v} - \ell(\ell+1) \right) P(v) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde yapılan

$$z = \cosh v \tag{2.37}$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP}{dz}\right] - \left(-m^2 + \ell(\ell+1) + m^2 z^2 + \frac{(\sigma+1)^2}{1-z^2} \right) P(z) = 0$$

halini alır. Elde edilen bu denklem, radyal prolate küresel koordinatlarda dalga denklemidir ve çözüm radyal küresel dalga fonksiyonları ile verilir. Bu durumda çözüm

$$P(z) = c_{15} R_{ab}^{(1)}(m, z) + c_{16} R_{ab}^{(2)}(m, z)$$

şeklindedir. (2.36) ve (2.37) dönüşümleri dikkate alındığında diferansiyel denklemin genel çözümü

$$B(v) = c_{15} B_1(v) + c_{16} B_2(v)$$

olmak üzere

$$B_1(v) = c_{15} \sinh v \, R_{ab}^{(1)}(m, \cosh v)$$

$$B_2(v) = c_{16} \sinh v \, R_{ab}^{(2)}(m, \cosh v)$$

çözümlerini toplamı şeklinde verilir. Şimdi ise (2.32) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonu ve enerji özdeğerini verelim. Bu denklemde

$$B(v) = (\sinh v)^{1/2} \psi(v) \tag{2.38}$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$\left[-\frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sinh^2 v} + m^2 \sinh^2 v \right] \psi = -\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada potansiyel ve enerji

$$V(v) = \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sinh^2 v} + m^2 \sinh^2 v$$

$$E = -\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2$$

şeklindedir. (2.38) dönüşümü dikkate alınırsa Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu

$$\psi(v) = N \sinh^{1/2} v \, R_{ab}^{(1)}(m, \cosh v)$$

olarak bulunur ($N = c_{15}$) . Bu fonksiyonun açısal küresel dalga fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$\psi(v) \;=\; N \sinh^{1/2} v \; S_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; \cosh v\,)/\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)$$

şeklindedir (Li, Kang, Leong, 2002). Artık N normalizasyon sabiti bulabiliriz. $\psi(v)$ fonksiyonunun istatistiksel yorumundan

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh v \,.\left[S_{ab}^{(1)}(m\,,\;\; \cosh v\,)/\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\right]^2 dv = 1$$

integrali elde edilir. Burada

$$x = \cosh v$$

dönüşümü ile integral

$$N^2 \frac{1}{\left[\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\right]^2} \int_{-1}^{1} \left[S_{ab}^{(1)}(m,\;\; x\,)\right]^2 dx = 1$$

halini alır. Açısal küresel dalga fonksiyonları için ortogonallik koşulu yardımıyla normalizasyon sabiti

$$N = \mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m) \sqrt{\frac{(2a+1)\;(a-b)!}{2\;(a+b)!}}$$

şeklinde elde edilir.

SONUÇLAR

Bu tezde $SO(1,3)$ Lie grubunun homojen uzayının dört farklı parametrizasyonu ele alındı. Bu parametrizasyonlara göre yüzeyde Laplace-Beltrami operatörü verildi. Hamiltonyen ile verilen yani $H\psi = E\psi$ integrallenebillir sistemler ve dalga fonksiyonları elde edildi.

Homojen uzayın ele alınan dört parametrizasyonundan birincisi

$X = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (\cosh\rho\,, \sinh\rho\sin\nu\cos\eta\,, \sinh\rho\sin\nu\sin\eta\,, \sinh\rho\cos\nu)$

şeklindedir. Bu parametrizasyona göre Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\coth\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\sinh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \cot\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sin^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

şeklinde olur. Laplace-Beltrami operatörünün Hamiltonyen ile verilen integrallenebilir sistemler ile ilişkisi göz önünde bulundurulursa Schrödinger denklemleri

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2\rho}\right]\psi = -(\sigma+1)^2\psi\,,$$

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\nu^2} + \frac{m^2-1/4}{\sin^2\nu}\right]\psi = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\psi$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerin çözümleri olan dalga fonksiyonları sırasıyla

$$\psi(\rho) = \sqrt{2\frac{(-1)^{-\sigma-\frac{1}{2}}\Gamma(-\sigma-1)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)}{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{\ell-\sigma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}\sinh^{\ell+1}\rho\ \times$$

$$F\left(\frac{\ell-\sigma}{2}\,,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cosh^2\rho\right),$$

$$\psi(\nu) = \sqrt{2\frac{(-1)^{(-m-\ell)}\Gamma\left(-\ell-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}{\left(\frac{-m-\ell-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{m-\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}\ \sin^{m+1/2}\nu\ \times$$

$$F\left(\frac{m-\ell}{2}\,,\ \frac{m+\ell+1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cos^2\nu\right)$$

olarak elde edilir.

İkinci parametrizasyon,

$X = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (\cosh\rho\cosh\nu\,, \cosh\rho\sinh\nu\cos\eta\,, \cosh\rho\sinh\nu\sin\eta\,, \sinh\rho)$

şeklinde olup Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\tanh\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\cosh^2\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \coth\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{1}{\sinh^2\nu}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

olarak elde edilir. Schrödinger denklemleri

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\cosh^2\rho}\right]\psi = -(\sigma+1)^2\psi\,,$$

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\nu^2} + \frac{m^2-1/4}{\sinh^2\nu}\right]\psi = -\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\psi$$

olup dalga fonksiyonları sırasıyla

$$\psi(\rho) = \sqrt{2\frac{(-1)^{\left(-\ell-\sigma-\frac{1}{2}\right)}\Gamma(-\sigma-1)\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell-\sigma}{2}\right)}{\left(\frac{-\ell-\sigma-2}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{-\ell-\sigma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}\cosh^{\ell+1}\rho\ \times$$

$$F\left(\frac{\ell-\sigma}{2}\,,\ \frac{\ell+\sigma+2}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\sinh^2\rho\right),$$

$$\psi(\nu) = \sqrt{2\frac{(-1)^{(-\ell-1)}\Gamma\left(-\ell-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-m-\ell}{2}\right)}{\left(\frac{-m-\ell-1}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{-m-\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}\ \sinh^{m+1/2}\nu\ \times$$

$$F\left(\frac{m-\ell}{2}\,,\ \frac{m+\ell+1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \cosh^2\nu\right)$$

şeklinde bulunur.

Üçüncü parametrizasyon,

$$X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho} + \frac{\cos\rho}{\cosh v}\right) + \frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho}\,,\ \frac{\eta}{\cosh v\cos\rho}\,,\ \tanh v\tan\rho\,,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\cosh v\cos\rho} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh v}{\cos\rho} + \frac{\cos\rho}{\cosh v}\right) - \frac{\eta^2}{2\cosh v\cos\rho}\right)$$

şeklinde olup Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = \frac{\cosh^2 v \,.\cos^2 \rho}{(\cos^2 \rho - \cosh^2 v)} \,.\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin \rho}{\cos \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{\sinh v}{\cosh v}.\frac{\partial}{\partial v}\right) + (\cosh^2 v - \cos^2 \rho)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]$$

olarak bulunur. Schrödinger denklemleri

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cos^2 \rho} - m^2 \cos^2 \rho \right] \psi = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi ,$$

$$\left[-\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\cosh^2 v} + m^2 \cosh^2 v \right] \psi = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi$$

olup dalga fonksiyonları sırasıyla

$$\psi(\rho) = \sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}\ \cos^{1/2} \rho\ S_{ab}^{(1)}(m,\ \sin \rho\,) ,$$

$$\psi(v) = \mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m) \sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}\ \cosh^{1/2} v\ R_{ab}^{(1)}(m\,,\ i \sinh v\,)$$

şeklinde bulunur.

Son olarak dördüncü parametrizasyon,

$$X = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\left[\frac{1}{\sinh v \sin \rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin \rho} - \frac{\sin \rho}{\sinh v}\right)\right] + \frac{\eta^2}{2 \sinh v \sin \rho} ,\right.$$

$$\left. \frac{\eta}{\sinh v \,.\sin \rho} ,\ \coth v \cot \rho ,\ \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh v}{\sin \rho} - \frac{\sin \rho}{\sinh v}\right) + \frac{\eta^2}{2 \sinh v \sin \rho} \right)$$

ele alınırsa Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB} = \frac{\sinh^2 v \,.\sin^2 \rho}{\sin^2 \rho + \sinh^2 v} \,.\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \cot \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \left(-\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \coth v \frac{\partial}{\partial v}\right) - (\sinh^2 v + \sin^2 \rho)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]$$

olarak elde edilir. Schrödinger denklemleri

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sin^2 \rho} + m^2 \sin^2 \rho \right] \psi = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi ,$$

$$\left[-\frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{\sigma(\sigma+2)+3/4}{\sinh^2 v} + m^2 \sinh^2 v \right] \psi = -\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \psi$$

olup dalga fonksiyonları sırasıyla

$$\psi(\rho) \;=\; \sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}\;\sin^{1/2}\rho\;\; S_{ab}^{(1)}(\,-im,\;\;\cos\rho\,)\,,$$

$$\psi(v) \;=\mathcal{K}_{ab}^{(1)}(m)\sqrt{\frac{(2a+1)\,(a-b)!}{2\,(a+b)!}}\;\;\sinh^{1/2} v\;\; R_{ab}^{(1)}(\,m,\;\;\cosh v\,)$$

şeklinde bulundu.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I. A. (Ed) (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Fomula, Graphs, and Mathematical Tables.* (10. baskı) USA: US Goverment Printing Office.

Babelon, O., Bernard, D., Talon, M. (2003). *Introduction to Classical Integrable Systems.* UK : Cambridge.

Bateman, H. (1953). Cilt I.II. *Higher Transcendental Functions,* USA : McGraw Hill

Bernal, J., Flowers-Cano, R., Carbajal-Dominguez, A. (2009). Exact Calculation of The Number of Degrees of Freedom of a Rigid Body Constituted by *n* Particles. *Revista Mexicana De Fisica, 55 (2)* , 191-195.

Das, A., Okubo, S. (2014). *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists.* Singapore: Hindustan Book Agency.

Gilmore, R. (2008). *Lie Groups, Physics, and Geometry.* New York : Cambridge.

Hall, B. C. (2003). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations.* New York: Springer.

Helgason, S. (1984). *Groups and Geometric Analysis.* USA: American Mathematical Society.

Helgason, S. (1972). A Formula for the Radial Part of the Laplace-Beltrami Operator. *Journal of Differential Geometry, 6,* 411-419.

Jeffrey, A. (Ed.) (1994). *Table of Intergals, Series, and Products* (5. Baskı). USA: Academic Press.

Kalnins, E.G., Miller. Jr., W. (1977). Lie Theory And The Wave Equation In Space Time. I. The Lorentz Group. *Journal of Mathematical Physics, 18 (1).*

Lebedev, N. N. (1965). *Special Functions and Their Applications.* USA: Prentice Hall, INC.

Li, L. W., Kang, X. K., Leong, M. S. (2002). *Spheroidal Wave Functions in Electromagnetic Theory.* USA: John Wiley & Sons, INC.

Tornelli, A. (2016). Classical Integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* 49.

Vanhaecke, P. (2001). *Integrable Systems in the Realm of Algebraic Geometry.* (2. Baskı). Almanya: Springer.

Verdiyev, Y. A., (1983). Quantum Integrable Systems Related with Symmetric Spaces of the Group U(1,2) and Sp(1,2) and Green Functions on These Spaces. *Phys. Rep, 94 (6),* 313-404.

Vilenkin, N. Ja., Klimyk, A. U. (1991). Cilt I-II. *Representations of Lie Groups and Special Functions*. The Netherlands: Kluwer Academic.

Weidmann, J. (1987). *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators.* Germany: Springer.

https://vtk.ugent.be/w/images/9/96/Wiskundige_ingenieurstechnieken_-_Introduction_to_Tensor_Calculus.pdf ,30.01.2018

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşen GÜREKE
Doğum Yeri : EDİRNE
Doğum Tarihi : 08.02.1987
Medeni Durumu : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlköğretim : Kurtuluş İlköğretim Okulu
Lise : Edirne Lisesi
Lisans : Pamukkale Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi

2011-2015 Bilgi Dershanesi Matematik Öğretmenliği
2015-2016 Beykent Koleji Anadolu ve Fen Lisesi Matematik Öğretmenliği
2016-2017 Doğru Cevap Özel Öğretim Kursu Matematik Öğretmenliği

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Katıldığı Kongre : 29. ULUSAL MATEMATİK SEMPOZYUMU, 28-31 Ağustos 2016, Mersin, TÜRKİYE

Bildiri Adı : $SO(1,3)$ Grubuyla Bağlantılı İntegrallenebilir Sistemler

Düzenleyen Kuruluş : Mersin Üniversitesi