T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-BOYUTLU KAPALI, DURAĞAN EVREN İÇİN YENİDEN NORMALİZE EDİLMİŞ BOŞLUK ENERJİ YOĞUNLUĞU

İSMAİL MESUT MÜJDE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

EDİRNE-2016

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ş. Erol OKAN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Fizik Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN	
Prof. Dr. Metin ÖZDEMİR	
Doç. Dr. M. Akif SABANER	

21.10.2016

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

21/10/2016

İsmail Mesut MÜJDE

Yüksek Lisans Tezi
İSMAİL MESUT MÜJDE
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

n-boyutlu Einstein evreninde kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi yeniden incelenecektir. [M. Özcan Class. Q. Grav. 23, 5531-5546(2006)] Kovaryant nokta-bölme yöntemi kullanılarak yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunluğu *n*-boyutlu Einstein evreni için yeniden elde edilecektir. Bu çalışmayı, Casimir etkisinin boyutsal bağımlılığını araştırmak için sunuyoruz. Bu çalışmanın ana sonucu; kapalı topolojideki farklı boyutların ve boyutlara karşı gelen enerji işareti arasındaki ilişkiyi anlamak olacaktır.

Yıl : 2016
Sayfa Sayısı : 127
Anahtar Kelimeler : Casimir Enerji ; Renormalizasyon ; Regularizasyon ; Nokta-Bölme Yöntemi ; Einstein Evreni ; Riemann Küresi

Master's Thesis
İSMAİL MESUT MÜJDE
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Physics

ABSTRACT

We reconsider the Casimir energy for the massless conformal scalar field in an n-dimensional Einstein universe. [M. Özcan Class. Q. Grav. 23, 5531-5546(2006)] We reobtain the renormalized vacuum energy density for the n-dimensional Einstein universe by using the covariant point-splitting method. In this work we purpose to investigate the dimensional dependence of the Casimir effect. The main result of this work is to understand the correspondence between the sign of the energy and the different dimensions of manifold in the closed topology.

Year : 2016
Number of Pages : 127
Keywords : Casimir Energy ; Renormalization ; Regularization; The Point-Splitting Method ; Einstein Universe ; Riemann Sphere

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... İ
ABSTRACT ..... İİ
İÇİNDEKİLER ..... İİİ
SİMGELER V
TABLOLAR LİSTESİ ..... Vİ
TEŞEKKÜR ..... Vİİ
BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1
BÖLÜM 2 5
n-BOYUTLU EINSTEIN EVRENİNDE MOD FONKSİYONU 5
BÖLÜM 3 13
n-BOYUTLU EINSTEIN EVRENİNDE SKALER ALAN İÇİN GREEN FONKSİYONU 13
BÖLÜM 4 17
YENİDEN NORMALİZE EDİLMİŞ KUANTUM BOŞLUK ENERJİ YOĞUNLUĞU 17
4.1. *n*=2, 4, 6, 8, 10, 12 Çift Uzay-Zaman Boyutlarındaki Enerji Yoğunlukları 25
4.1.1. *n*=2 İçin Sonuçlar 25
4.1.2. *n*=4 İçin Sonuçlar 34
4.1.3. *n*=6 İçin Sonuçlar 45
4.1.4. *n*=8, 10, 12 İçin Sonuçlar 61
4.2. *n*=3, 5, 7, 9, 11 Tek Uzay-Zaman Boyutlarındaki Enerji Yoğunlukları 65
4.2.1. *n*=3 İçin Sonuçlar 65
4.2.2. *n*=5 İçin Sonuçlar 70
4.2.3. *n*=7, 9, 11 İçin Sonuçlar 77
BÖLÜM 5 80
SONUÇLAR VE TARTIŞMA 80
KAYNAKLAR 83

EK A 85

A.1. S^1 (Uzayzaman Boyutu n=2) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 85

A.2. S^2 (Uzayzaman Boyutu n=3) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 89

A.3. S^3(Uzayzaman Boyutu n=4) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 93

A.4. S^4(Uzayzaman Boyutu n=5) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 106

A.5. S^5(Uzayzaman Boyutu n=6) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 113

A.6. S^6, S^7, S^8, S^9, S^{10}, S^{11} (Uzayzaman Boyutları n=7, 8, 9, 10, 11, 12) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması 122

ÖZ GEÇMİŞ 127

SİMGELER

$\square$	D'Alembert İşlemcisi
$C_n^{\lambda}(x)$	Gegenbauer Polinomu
$D^{(n)}(x,x')$	n-Boyutlu Green Fonksiyonu
$D_{ren}^{(n)}(x,x')$	n-Boyutlu Yeniden Normalize Edilmiş Green Fonksiyonu
$g_{\mu\nu}$	Metrik Tensör
$G^{(1)}(x,x')$	Hadamard Green Fonksiyonu
$G^{(+)}(x,x')$	Pozitif Wightmann Fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Lagrange Yoğunluğu
n	Uzay-Zaman Boyutu
$\xi(n)$	n-Boyutlu Konformal Faktör
$\rho_0^{(n)}$	n-Boyutlu Boşluk Enerji Yoğunluğu
$\rho_0^{(n)}{}_{(ren)}$	Yeniden Normalize Edilmiş n-Boyutlu Boşluk Enerji Yoğunluğu
R	Ricci Skaleri
$R_{\mu\nu}$	Ricci Tensörü
R_0	Evrenin Yarıçapı
$\mathcal{S}$	Hareket Fonksiyoneli
S^{n-1}	Riemann Yüzeyi
$T_{\mu\nu}$	Enerji-Momentum Tensörü
$\langle T_{\mu\nu} \rangle$	Enerji-Momentum Tensörünün Kuantum Boşluk Beklenen Değeri
$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$	Yeniden Normalize Edilmiş Enerji- Momentum Tensörünün Kuantum Boşluk Beklenen Değeri
$\Phi(x)$	Skaler Alan
$Y_{lm}(\theta,\phi)$	Küresel Harmonik Fonksiyon
$\zeta(s,q)$	Hurwitz Zeta Fonksiyonu
$\zeta(s)$	Riemann Zeta Fonksiyonu

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1 $N(k, N_{n-2})$ 'nin alabildiği dejenere değerler……..……..9

Tablo 5.1 n-boyutlu Einstein evrenleri için yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunlukları……...……...……81

Tablo A.1 $N(k, N_2)$ 'nin alabildiği dejenere değerler……102

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde, araştırma aşamasında, sonuçların değerlendirilmesi ve tamamlanmasında hem lisans hem de lisansüstü eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerini paylaşarak yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde kuşkusuz en büyük paya sahip olan ve bana her konuda sonuna kadar destek veren aileme en içten teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında; geri planda kapalı *n*-boyutlu (n uzay-zaman boyutu) Einstein evreninde bulunan kuantize edilmiş kütlesiz konformal skaler alanın hiçbir şeyin olmadığı mutlak sıfırdaki kuantum mekaniksel enerji yoğunluğu kovaryant nokta-bölme (the covariant point-splitting) yöntemi ile yeniden elde edilmiştir. Mutlak sıfırdaki alanın kuantum mekaniksel etkisi literatürde Casimir etki olarak bilinir. Bu etki ilk defa 1948'de Casimir [1] tarafından iki iletken ve yüksüz paralel plaka arasındaki çekici kuvvetin, mutlak sıfır noktasındaki kuantumlanmış alanın bir sonucu olduğu önerilmiş, konu fizik literatüründe çok geniş yelpazeye dahil olduğundan disiplinler arası bir çalışma konusu olarak araştırmalarda yerini bulmuştur. Bu etki deneysel olarak gözlemlenmiştir [2,3]. Böylece Casimir etki gerçek bir etkidir; kuantum alan teorisinin ölçülebilir diğer bir deyişle gözlemlenebilir fiziksel bir olgusudur.

Casimir etki, arka zeminde eğri uzay-zamanda kuantize edilmiş alanın kuantum boşluk enerjisinin hesaplanması için oldukça öğretici olan ve göz önüne alınması gereken gerçek bir problemdir. Ford tarafından eğri uzay-zaman kuantum alan teorisi için yapılmış önemli bir çalışma ile literatüre girmiştir. 1975'te Ford [4] bu çalışmasında Einstein evrenine (n=4 boyutlu) yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın kuantum boşluk enerji yoğunluğunu mod toplama yöntemi ile

$$\rho = \frac{\hbar c}{480\pi^2 R_0^4} \tag{1.1}$$

olarak hesapladı. Yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunluğunu pozitif işaretli olarak elde etti. Enerji yoğunluğunun pozitif olarak elde edilmesi bize buradaki

kuvvetin "itici" bir kuvvet olduğunu gösterir. Burada R_0 evrenin yarıçapıdır ve basınç [4] $P = \frac{1}{3}\rho$ ile verilir.

Böylece alanın enerji-momentum tensörü, klasik ışıma için aynı yapıda olur [4]. Ford çalışmasında Einstein evrenindeki Casimir etkisinin, enerjinin kapalı uzay topolojisi ile ilişkili olduğunu göstermiştir. Ford hesaplamalarında, üstel kesme fonksiyonu ile mod toplama yöntemini kullanmıştır [5,6]. Daha sonra Dowker ve Critchley [7], kovaryant nokta-bölme yöntemi ile Ford'un elde ettiği genel sonucu yerel özelliklerden hareketle doğruladılar. Dowker ve Critchley kovaryant nokta-bölme yöntemi gereği olan Green fonksiyonunu oluşturmak için, evrenin küresel topolojisini kullanarak yerel yeniden normalize edilmiş enerji yoğunluğunu ve basıncı,

$$(\langle T_0^0 \rangle =)\ \rho = \frac{\hbar c}{480\pi^2 R_0^4} \quad , \quad (-\langle T_1^1 \rangle = -\langle T_2^2 \rangle = -\langle T_3^3 \rangle =)\ P = \frac{1}{3}\rho \tag{1.2}$$

olarak hesaplamışlardır [7].

Eğri uzay-zamanda kuantum boşluk enerjisinin hesaplamasında sonsuzlukların üstesinden gelmek için genelde üç regularizasyon tekniği vardır. Bunlar; mod toplama yöntemi [4], zeta fonksiyon regularizasyon tekniği [8] ve nokta-bölme yöntemidir [9-12]. Bunlardan biri, mevcut en güçlü yöntem olan nokta-bölme regularizasyon tekniğidir [13,14]. Nokta-bölme regularizasyon yöntemi kovaryant olmasının yanısıra kesilim fonksiyonlarından da bağımsızdır [7,9-14]. Bu yöntem ayrılmış nokta fonksiyonları ile çalışır. Enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin hesaplanma işlemi, alan işlemcisinin karesinin kuantum boşluk beklenen değerinin hesaplanmasıyla elde edilir. Burada, Hamilton işlemcisindeki $\Phi(x)$ skaler alanı, ikinci kanonik kuantumlama nedeniyle bir alan işlemcisi gibi davranır. Temelde, enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değeri, aynı uzay-zaman noktasında alan işlemcilerinin çarpanları ve kovaryant türevlerinden inşa edilirler. Bu durum, enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin ıraksamasına neden olur. Dolayısıyla bu ıraksak nicelikleri ortadan kaldırmak için Hamilton işlemcisinde, her bir çarpandaki $\Phi(x)$ alan işlemcilerinden biri $\Phi(x')$ ile değiştirilir. Burada x', x'e sonsuz küçük aralıkta yakın bir noktadır. Böylece $\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle$ ayrılmış fonksiyonu, biri

x 'de diğeri x' 'de olmak üzere iki fonksiyonun çarpımı şekline dönüştürülür. $\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle$ iki nokta fonksiyonuna, pozitif Wightmann fonksiyonu denir ve

$$G^{(+)}(x,x') = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle \tag{1.3}$$

ile gösterilir.

Alan anti değişme (anti commutator) kuantum boşluk beklenen değeri,

$$G^{(1)}(x,x') = \langle 0|\{\Phi(x)\Phi(x') + \Phi(x')\Phi(x)\}|0\rangle \tag{1.4}$$

ile tanımlanan Hadamard Green fonksiyonudur [13,14]. Burada x ile x' arasındaki simetriden dolayı $G^{(1)}(x,x')$ ve $G^{(+)}(x,x')$ arasındaki ilişki,

$$G^{(1)}(x,x') = 2\mathrm{Re}G^{(+)}(x,x') \tag{1.5}$$

bağıntısı ile verilir.

Enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin hesaplanması sonunda $x' \to x$ (çakışma limiti olarak bilinen) limiti alınır. Yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerjileri için sonsuzlukların çıkarılmasından sonra sonlu sonuçlar bulunur.

Hesaplanması istenilen nicelik, *n*-boyutlu uzay-zaman için kütlesiz konformal skaler alanın enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değeridir. Bu aşağıdaki çakışma limiti ile verilir [7,13-16]:

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle = \lim_{x'\to x}\Big[(1-2\xi)\,\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + g_{\mu\nu'}\left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g^{\lambda\sigma'}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'} - \xi\left(g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'} + g_{\nu'\sigma}\nabla^\sigma\nabla_\mu\right) + \xi g_{\mu\nu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right) - \frac{1}{2}\xi\left(R^\sigma_\mu g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\sigma'}_{\nu'}\right) + \frac{1}{2}\xi R g_{\mu\nu'}\Big] D^{(n)}(x,x')\,. \tag{1.6}$$

Kütlesiz limitte Green fonksiyonları, $G(x,x')$ yerine $D(x,x')$ ile gösterilir. Böylece, $D^{(n)}(x,x') = \frac{1}{2}G^{(1)}(x,x')$ olur ($G^{(1)}(x,x')$ Hadamard Green fonksiyonu ile $G^{(+)}(x,x')$ arasındaki ilişki, (1.5) bağıntısıyla verilir) ve $D^{(n)}(x,x')$: *n*-boyutlu uzay

zamandaki Green fonksiyonunu gösterir. Burada $\xi\left(=\xi(n)\right)=\frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}$, konformal bağlantı sabitini belirleyen parametredir.

Bu çalışmada, *n*-boyutlu Einstein evrenine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alan için yukarıdaki fiziksel motivasyon kullanılarak yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunluğu hesaplanacaktır. Çünkü kütle çekim teorisi ve kuantum mekanik yasalarının aynı anda geçerli olduğu bir fiziksel sistem göz önüne alındığında, sistemi tanımlayacak ve sistem ile ilgili bilgi verecek bir yasaya sahip değiliz. Bu durum fizik literatürünün en temel problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Ayrıca kütle çekim ile kuantum mekanik birlikte göz önüne alındığında ortaya çıkan sonsuzlukları, matematiksel ve fiziksel olarak tanımlamaların nasıl üstesinden gelineceğinin tartışması yapılacaktır. Bu konuda tek bir yöntem olmadığından sonsuzlukların üstesinden gelme amacına yönelik kovaryant nokta-bölme yöntemi kullanılacaktır.

Öncelikle yeniden geliştirilecek olan regularizasyon ve renormalizasyon yöntemleri bu tezin konuya bakış açısını daha detaylandırması açısından oldukça önemli bir noktasıdır. Fiziksel olarak mutlak sıfırdaki enerji yoğunluğunun işareti mutlak sıfırda yeniden ölçeklendirilmiş enerjinin ne tür (çekici mi? itici mi?) bir kuvvet ürettiğinin tanımlamasını verecektir. Aynı topolojik özelliğe sahip farklı boyuttaki geometrinin mutlak sıfırdaki kuantum enerji yoğunluğu işaretinin boyuttan boyuta ve geometriden geometriye nasıl değişim gösterdiğinin önemi detaylandırılacaktır.

Bu tez çalışmasının altyapısı, (M. Özcan, arXiv:gr-qc/0106082v1) referanslı *"Green's Function for a n-Dimensional Closed, Static Universe and with a Spherical Boundary"* [17] ve (M. Özcan, Class. Quantum Grav. 23 5531-5546 (2006)) referanslı *"Casimir Energy Density for Spherical Universes in n-Dimensional Spacetime"* [18] konulu makaleler temel alınarak oluşturulmuştur.

Bölüm 2'de, *n*-boyutlu kapalı durağan bir evrende kütlesiz konformal skaler alan için mod fonksiyonu hesaplandı. Bölüm 3'de, S^{n-1}'de ($n \geq 4$; n, uzay-zaman boyutudur) kütlesiz konformal skaler alan için dalga denkleminin çözülmesi ile elde edilen özfonksiyon kullanarak Hadamard Green fonksiyonu yeniden inşa edildi. Daha sonra Bölüm 4'de, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu kullanılarak yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunluğu hesaplandı. Burada yapılan hesaplamalar $n = 2$ 'den $n = 12$ 'ye kadar olan uzay-zaman boyutu için ayrıntılı olarak hesaplanmıştır. Son olarak elde edilen verilerin tartışılması yapıldı.

BÖLÜM 2

n-BOYUTLU EINSTEIN EVRENİNDE MOD FONKSİYONU

Öncelikle *n*-boyutlu Einstein evreninde mod fonksiyonunu bulmak için geometrik yapıyı tanımlayalım:

$$(\chi, \vartheta, \phi) = \left(\chi, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_j, \phi\right) \; ; \; j = 1,2,3, \dots, n-3 \tag{2.1}$$

olmak üzere hiperküresel koordinatlar kullanılır. Burada n uzayzaman boyutudur. Uzay zamanda iki nokta arasındaki uzaklığın karesi

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2 dl^2 \tag{2.2}$$

dir. Burada R_0 evrenin yarıçapıdır ve bir sabittir. Bu uzay için küresel koordinatlar,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \cos\phi \\ x_2 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-3} \sin\phi \\ x_3 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \cos\theta_{n-3} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= R_0 \sin\chi \cos\theta_1 \\ x_n &= R_0 \cos\chi \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

dır. Burada $\chi \in [0,\pi]$, $\theta_j \in [0,\pi]$, $j = 1,2,3, \dots, n-3$ ve $\phi \in [0,\pi]$ aralığındadır.

Böylece statik kapalı *n*-boyutlu bir uzay-zaman için metriğimiz,

$$\begin{aligned} ds^2 = dt^2 - R_0^2 [& d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\theta_1^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \, d\theta_2^2 + \cdots \\ & + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \dots \dots \sin^2\theta_{n-4} \, d\theta_{n-3}^2 \\ & + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \dots \dots \sin^2\theta_{n-4} \sin^2\theta_{n-3} d\phi^2] \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Bu eğri uzay-zaman geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı için

$$\square\Phi(x) + \xi(n)R\Phi(x) = 0 \tag{2.5}$$

alan denklemi göz önüne alınarak çözümlerini üreteceğiz. Burada $\xi(n) = \frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}$, konformal bağlantı sabitini belirleyen parametre ifadesidir (n uzay-zaman boyutu) ve R'de Ricci skaleridir. Ayrıca $\square$, D'Alembert işlemcisidir ve

$$\square = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1}g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{(-1)^{n-1}g}\ \ g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \tag{2.6}$$

denklemi ile verilir. (2.4) denklemindeki metrik için Ricci skaleri,

$$n \geq 2\ için \quad R = \frac{1}{R_0^2}(n-2)(n-1) \tag{2.7}$$

olarak ifade edilir. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak (2.5) denkleminin $n \geq 5$ için çözümlerini tartışalım. Çözüm;

$$\Phi(x) = c_{0n}X(\chi)\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2)\ldots\ldots\Theta_{n-4}(\theta_{n-4})Y_{lm}(\theta_{n-3},\phi) \tag{2.8}$$

$$\omega = \frac{N}{R_0}\ ile \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir. Burada Y_{lm} küresel harmonik fonksiyondur ve c_{0n}'de uygun normalizasyon sabiti ve

$$(N_2 =)\ l = 0,1,2,3,\ldots \text{ ve } m = -l, -l+1, \ldots, 0, 1, \ldots, l-1, l \tag{2.10}$$

$n \geq 5$ için mod fonksiyonunu hesaplayalım. $X(\chi)$ ve $\Theta_\mu(\theta_\mu)(\mu = 1,2,3,\ldots,n-4)$ fonksiyonları,

$$\frac{1}{\sin^{n-4}\chi}\frac{d}{d\chi}\left(\sin^{n-2}\chi\frac{d}{d\chi}X(\chi)\right)+\left[\left(N^2-\frac{(n-2)^2}{4}\right)\sin^2\chi-N_{n-2}(N_{n-2}+n-3)\right]X(\chi)=0 \tag{2.11}$$

ve $\mu=1,2,3,\dots,n-4$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\sin^{n-\mu-4}\theta_\mu}\frac{d}{d\theta_\mu}\left(\sin^{n-\mu-2}\theta_\mu\frac{d}{d\theta_\mu}\Theta_\mu(\theta_\mu)\right)+\left[N_{n-\mu-1}(N_{n-\mu-1}+n-\mu-2)\sin^2\theta_\mu\right.$$
$$\left.-N_{n-\mu-2}(N_{n-\mu-2}+n-\mu-3)\right]\Theta_\mu(\theta_\mu)=0 \tag{2.12}$$

diferansiyel denklemlerini sağlarlar. (2.11) ve (2.12) denklemlerinde, $(N_2=)l,N_3,N_4,N_5,\dots,N_{n-3},N_{n-2}\ ve\ N=R_0\omega$ ayırma parametreleridir. Yine de, $\mu=1,2,3,\dots,n-4$ ile $\Theta_\mu\in[0,\pi]$ aralığında düzenli çözüm hesaplanmadı; bu yüzden, l ve m, $(N_2=)l=0,1,2,3,4,5,6,\dots$, $m=-l,-l+1,\dots,0,1,\dots,l-1,l$ değerlerini alırken, $N_j(j=3,4,5,\dots,n-2)\ ve\ N=R_0\omega$ sürekli parametreler olarak kalır. Bu diferansiyel denklemlerde $x=\cos\chi$ ve $x_\mu=\cos\theta_\mu(\mu=1,2,3,4,\dots,n-4)$ dönüşümleri yapıldığında;

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta(x)-(2N_{n-2}+n-1)x\frac{d}{dx}\Theta(x)$$
$$+\left[\left(N^2-\frac{(n-2)^2}{4}\right)-N_{n-2}(N_{n-2}+n-2)\right]\Theta(x)=0 \tag{2.13}$$

$$\left(1-x_\mu^2\right)\frac{d^2}{dx_\mu^2}\Theta_\mu(\theta_\mu)-\left(2N_{n-\mu-2}+n-\mu-1\right)x_\mu\frac{d}{dx_\mu}\Theta_\mu(\theta_\mu)$$
$$+\left[N_{n-\mu-1}(N_{n-\mu-1}+n-\mu-2)-N_{n-\mu-2}(N_{n-\mu-2}+n-\mu-2)\right]\Theta_\mu(\theta_\mu)=0 \tag{2.14}$$

denklemleri elde edilir. Bu diferansiyel denklemler Frobenius yöntemi ile çözülebilir. Çözümler;

$$\left.\begin{array}{l} X(\chi)\sim\sin^{N_{n-2}}X(\chi)\,\Theta(\cos\chi)\qquad ve \\ \mu=1,2,3,4,\dots,n-4\ \ ile\ \ \Theta_\mu(\theta_\mu)\sim\sin^{N_{n-\mu-2}}X(\theta_\mu)\,\Theta_\mu(\cos\theta_\mu) \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

şeklindedir. (2.13) denklemindeki diferansiyel denklem yine Frobenius yöntemi ile çözülür. Bu amaçla çözüm;

$$\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{2.16}$$

gibi bir kuvvet serisi ile $\Theta(x)$ fonksiyonu olarak ifade edilir. (2.16) Denklemi, (2.15) denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa aşağıdaki tekrarlama bağıntısı bulunur:

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{\left[k + N_{n-2} + \frac{(n-2)}{2}\right]^2 - N^2}{(k+2)(k+1)} \; ; \; k = 0,1,2,3, \ldots \text{ (Tekrarlama bağıntısı)} \tag{2.17}$$

(2.17) tekrarlama bağıntısı, $\Theta(x)$ için

$$\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \tag{2.18}$$

seri çözümünü verir.

Şimdi seri çözümün yakınsaklığına bakalım. Bunun için serinin çift (tek) pariteli terimlerini gözönüne alalım ve Raabe testi [19,20] uygulayalım.

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{u_k}{u_{k+1}} - 1\right) = \frac{3}{2} - N_{n-2} - \frac{(n-2)}{2} = \mathrm{A} \quad ; \quad (N_{n-2} \geq 0 \; ve \; n \geq 5) \tag{2.19}$$

N_{n-2} değerleri ile Raabe testinin sonucu, seriyi ıraksak çıkarır (benzer şekilde tek pariteli terimlerde de aynı sonuç gözlemlenir). Iraksaklığı ortadan kaldırmak için serinin bir yerde kesilmesi gerekir. Serinin bir yerde kesilmesi için, $a_{k+2} = 0$ fakat $a_k \neq 0$ olabilecek şekilde bir seçim yapılmalıdır. Bu aynı zamanda kesim yapılan yerdeki terimin çözümün ilk terimi olur ve diğer terimlerde o terime göre belirlenir. (2.17) Denkleminde $\begin{pmatrix} a_{k+2} = 0 \\ a_k \neq 0 \end{pmatrix}$ şartlarını sağlayacak bir kesme işlemi yapılırsa

$$\left[k + N_{n-2} + \frac{(n-2)}{2}\right]^2 - N^2 = 0 \qquad (2.20)$$

dan

$$\mathrm{N} = k + N_{n-2} + \frac{(n-2)}{2} \quad ; \quad k = 0,1,2,3,\ldots \quad ; \quad N_{n-2} = 0,1,2,3,\ldots \qquad (2.21)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede, $k + N_{n-2}$' ye k' yeni bir indis tanımlaması yapılırsa;

$$\mathrm{N} = k' + \frac{(n-2)}{2} \quad ; \quad k' = 0,1,2,3,\ldots \quad ; \quad N_{n-2} = 0,1,2,3,\ldots,k' \qquad (2.22)$$

$$\omega_k = \frac{N}{R_0} = \frac{k' + \frac{(n-2)}{2}}{R_0} \quad ; \quad k' \to k \text{ yazılırsa;}$$

$$\omega_k = \frac{N}{R_0} = \frac{1}{R_0}\left[k + \frac{(n-2)}{2}\right] \quad ; \quad k = 0,1,2,3,\ldots \quad ; \quad N_{n-2} = 0,1,2,3,\ldots,k \qquad (2.23)$$

elde edilir. $N(k, N_{n-2})$'nin alabildiği dejenere değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 2.1: $N(k, N_{n-2})$' nin alabildiği dejenere değerler

N_{n-2}\k	0	1	2	3	4	5	…
0	$\frac{(n-2)}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{(n+2)}{2}$	$\frac{(n+4)}{2}$	$\frac{(n+6)}{2}$	$\frac{(n+8)}{2}$	…
1		$\frac{n}{2}$	$\frac{(n+2)}{2}$	$\frac{(n+4)}{2}$	$\frac{(n+6)}{2}$	$\frac{(n+8)}{2}$	…
2			$\frac{(n+2)}{2}$	$\frac{(n+4)}{2}$	$\frac{(n+6)}{2}$	$\frac{(n+8)}{2}$	…
3				$\frac{(n+4)}{2}$	$\frac{(n+6)}{2}$	$\frac{(n+8)}{2}$	…
4					$\frac{(n+6)}{2}$	$\frac{(n+8)}{2}$	…
5						$\frac{(n+8)}{2}$	…
⋮							⋱

$\Theta(x)$ fonksiyonunun sağladığı denklemin çözümünün Gegenbauer polinomları olduğunu gösterelim:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)-(2\lambda+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)+n[n+2\lambda]\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)=0 \tag{2.24}$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x)-(2N_{n-2}+n-1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)$$
$$+\left[\left(N^2-\frac{(n-2)^2}{4}\right)-N_{n-2}(N_{n-2}+n-2)\right]\Theta(x)=0 \tag{2.25}$$

(2.24) ve (2.25) Denklemleri karşılaştırılırsa;

$$\lambda=N_{n-2}+\frac{n-2}{2}\quad ve\quad n=k-\ N_{n-2} \tag{2.26}$$

sonuçları bulunur.

$$a_k=\left\{\frac{(k+2)(k+1)}{\left[k+N_{n-2}+\frac{(n-2)}{2}\right]^2-N^2}\right\}a_{k+2} \tag{2.27}$$

Tekrarlama bağıntısında $N=n+N_{n-2}+\frac{n-2}{2}$ yazılır ve k'yı $n-2,n-4,\dots,n-2r$ şeklinde azaltarak elde edilen $\Theta(x)$ polinom çözümleri, iyi bildiğimiz Gegenbauer polinomlarıdır.

$$C_{k-N_{n-2}}^{N_{n-2}+\frac{n-2}{2}}(x)=\Theta(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r\frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!}(2x)^{n-2r} \tag{2.28}$$

Burada $\left[\frac{1}{2}n\right]=\begin{cases}\frac{\mathrm{n}}{2} & ;\ \mathrm{n}=\text{çift ise}\\ \frac{1}{2}(\mathrm{n}-1) & ;\ \mathrm{n}=\text{tek ise}\end{cases}$; $\lambda=\mathrm{N}_{\mathrm{n}-2}+\frac{\mathrm{n}-2}{2}$ ve $\mathrm{n}=\mathrm{k}-\mathrm{N}_{\mathrm{n}-2}$ dir.

Benzer işlemler, (2.14) diferansiyel denklemi için yapılırsa;

$$C_{N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2}}^{N_{n-\mu-2}+\frac{n-\mu-2}{2}}(x)=\Theta_{\mu}(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^{r}\frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!}(2x)^{n-2r} \qquad (2.29)$$

Gegenbauer polinom çözümü bulunur.

Burada $\left[\frac{1}{2}n\right]=\begin{cases}\frac{\mathrm{n}}{2} & ;\ \mathrm{n}=\text{çift ise}\\ \frac{1}{2}(\mathrm{n}-1) & ;\ \mathrm{n}=\text{tek ise}\end{cases}$; $\lambda=\mathrm{N}_{\mathrm{n}-2}+\frac{\mathrm{n}-2}{2}$ ve $\mathrm{n}=\mathrm{k}-\mathrm{N}_{\mathrm{n}-\mu-1}$ dir.

Böylece $n\geq 5$ için dalga denkleminin genel çözümü;

$$\Phi_{\lambda}(x)=c_{0n}e^{-i\omega_k t}\sin^{N_{n-2}}\chi\, C_{k-N_{n-2}}^{N_{n-2}+\frac{n-2}{2}}(\cos\chi)$$
$$\times\prod_{\mu=1}^{n-4}\left[\sin^{N_{n-\mu-2}}\theta_{\mu}\, C_{N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2}}^{N_{n-\mu-2}+\frac{n-\mu-2}{2}}(\cos\theta_{\mu})\right]Y_{lm}(\theta_{n-3},\phi) \qquad (2.30)$$

olur. Denklem (2.30) da

$$\left.\begin{aligned}\omega_k&=\frac{1}{R_0}\left[k+\frac{(n-2)}{2}\right]\ ;\ \ k=0,1,2,3\,,\dots\\ N_{n-2}&=0,1,2,3,\dots,k\\ N_{n-(\mu+1)}&=0,1,2,3,\dots,N_{n-\mu}\ ;\ \mu=2,3,4\dots,n-4\\ (N_2=)\,l&=0,1,2,3,\dots,N_3\quad \text{ve}\\ m&=-l,-l+1,\dots,0,1,\dots,l-1,l\end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

ve c_{0n}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti,

$$\left(\Phi_{\lambda_1},\Phi_{\lambda_2}\right)=-i\int\left[\Phi_{\lambda_1}(x)\partial_t\Phi_{\lambda_2}^{*}(x)-\partial_t\Phi_{\lambda_1}(x)\Phi_{\lambda_2}^{*}(x)\right]\sqrt{-g}\,d^{n-1}x=\delta_{\lambda_1\lambda_2} \qquad (2.32)$$

skaler çarpım bağıntısı ile bulunur.

Gerekli hesaplamalar yapıldığında normalizasyon sabiti;

$$c_{0n} = \frac{2^{N_{n-2}+\frac{n-4}{2}}}{R_0^{\frac{n-2}{2}}}\Gamma\left(N_{n-2}+\frac{n-2}{2}\right)\left[\frac{(k-N_{n-2})!}{\pi\Gamma(k+N_{n-2}+n-2)}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{\mu=1}^{n-4}\left\{2^{N_{n-\mu-2}+\frac{(n-\mu-3)}{2}}\right.$$
$$\left.\Gamma\left(N_{n-\mu-2}+\frac{(n-\mu-2)}{2}\right)\left[\frac{(N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2})!\left(N_{n-\mu-1}+\frac{(n-\mu-2)}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(N_{n-\mu-1}+N_{n-\mu-2}+n-\mu-2\right)}\right]\right\} \tag{2.33}$$

olarak bulunur.

Kuantize alan denkleminin çözümü,

$$\Phi(x) = \sum_{\lambda}\left(a_\lambda\Phi_\lambda(x) + a_\lambda^\dagger\Phi_\lambda^*\right) \tag{2.34}$$

biçiminde toplam üzerinden bu modlar olarak yazılır. Burada $\Phi_\lambda(x)$, Denk. (2.30) ile verilen dalga denkleminin çözümü, λ modundaki kuanta için, $a_\lambda^\dagger$ yaratıcı bir işlemci ve a_λ da yok edici bir işlemcidir.

Einstein evreninin n = 2, 3, 4, 5 ,6, …, 12 (S^1, S^2, S^3, S^4, S^5, …, S^{11} yüzey boyutlu) özel durumları için mod fonksiyonunun ayrıntılı hesaplanması EK A'da verilmiştir.

BÖLÜM 3

n-BOYUTLU EINSTEIN EVRENİNDE SKALER ALAN İÇİN GREEN FONKSİYONU

Önceki bölümde elde ettiğimiz ve (EK A'da) geliştirdiğimiz mod fonksiyonları göz önüne alınarak,

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle = \sum_{\lambda} \Phi_{\lambda}(x)\Phi_{\lambda}^{*}(x') \tag{3.1}$$

ile tanımlanan pozitif Wightmann fonksiyonunun $n \geq 4$ uzay-zaman boyutu için Green fonksiyonunu inşa edelim. Burada $\Phi_{\lambda}(x)$, mod fonksiyonudur.

Wightmann fonksiyonunu, (2.30) denklemindeki genel ifadeden yola çıkarak $n \geq 4$ için EK A'daki 20, 42, 118, 157 ve 206-212 denklemlerindeki mod çözümlerini (3.1) denkleminde yerine koyduğumuzda $n \geq 4$ için,

$$\begin{aligned} G^{(+)}(x,x') = \frac{1}{\pi R_0^{n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\frac{\Delta t}{R_0}\left(k+\frac{(n-2)}{2}\right)} \sum_{N_{n-2}=0}^{k} 2^{2N_{n-2}+n-4} \left\{\Gamma\left(N_{n-2}+\frac{(n-2)}{2}\right)\right\}^2 \\ \frac{(k-N_{n-2})!}{\Gamma(N_{n-2}+k+n-2)} \sin^{N_{n-2}}\chi \sin^{N_{n-2}}\chi' \, C_{k-N_{n-2}}^{N_{n-2}+\frac{(n-2)}{2}}(\cos\chi) C_{k-N_{n-2}}^{N_{n-2}+\frac{(n-2)}{2}}(\cos\chi') \\ \times \prod_{\mu=1}^{n-4} \left\{ \sum_{N_{n-\mu-2}=0}^{N_{n-\mu-1}} 2^{2N_{n-\mu-2}+n-\mu-3} \left\{\Gamma\left(N_{n-\mu-2}+\frac{(n-\mu-2)}{2}\right)\right\}^2 \right. \\ \left[\frac{(N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2})!\left(N_{n-\mu-1}+\frac{(n-\mu-2)}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_{n-\mu-1}+N_{n-\mu-2}+n-\mu-2)} \right] \sin^{N_{n-\mu-2}}\theta_{\mu} \sin^{N_{n-\mu-2}}\theta_{\mu}' \\ \left. C_{N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2}}^{N_{n-\mu-2}+\frac{(n-\mu-2)}{2}}(\cos\theta_{\mu}) C_{N_{n-\mu-1}-N_{n-\mu-2}}^{N_{n-\mu-2}+\frac{(n-\mu-2)}{2}}(\cos\theta_{\mu}') \right\} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_{n-3},\phi) Y_{lm}^{*}(\theta_{n-3}',\phi') \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde ederiz. Küresel harmonikler için toplama formülü,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2l+1)}{4\pi}P_l(\cos\gamma_1)=\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_{n-3},\phi)Y_{lm}^{*}(\theta'_{n-3},\phi')\\&\cos\gamma_1=\cos\theta_{n-3}\cos\theta'_{n-3}+\sin\theta_{n-3}\sin\theta'_{n-3}\cos(\phi-\phi')\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

olarak verilir [19-21] ve Gegenbauer polinomları için toplama teoremi [21] $n-3$ kez kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}C_\nu^p(\cos\vartheta\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi)=&\frac{\Gamma(2p-1)}{\{\Gamma(p)\}^2}\sum_{\eta=0}^{\nu}2^{2\eta}\{\Gamma(p+\eta)\}^2\\&\frac{(\nu-\eta)!\,(2\eta+2p-1)}{\Gamma(\nu+\eta+2p)}\sin^\eta\vartheta\sin^\eta\varphi\\&C_{\nu-\eta}^{p+\eta}(\cos\vartheta)C_{\nu-\eta}^{p+\eta}(\cos\varphi)C_\eta^{p-\frac{1}{2}}(\cos\psi)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Daha sonra (3.4) denkleminin kullanılmasıyla,

$$D^{(n)}(x,x')\ \left(=G^{(+)}(x,x')\right)=\frac{\tilde{\alpha}_n}{4\pi^{n-2}R_0^{n-2}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-i\frac{\Delta t}{R_0}\left(k+\frac{(n-2)}{2}\right)}C_k^{\frac{(n-2)}{2}}(\cos\gamma_{n-2})\tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) denkleminde

$$\tilde{\alpha}_n=2^0.2^1.2^2.\dots.2^{n-4}\frac{\{\Gamma(1)\}^2\left\{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2\{\Gamma(2)\}^2\dots\dots\left\{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(3)\Gamma(4)\dots\dots\dots\dots\Gamma(n-3)}\tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\gamma_{n-2}=\cos\chi\cos\chi'+\sin\chi\sin\chi'\cos\gamma_{n-3}\\&\mu=1,2,3,4,\dots,n-4\qquad\text{ile}\\&\cos\gamma_{n-\mu-2}=\cos\theta_\mu\cos\theta'_\mu+\sin\theta_\mu\sin\theta'_\mu\cos\gamma_{n-\mu-3}\\&\cos\gamma_1=\cos\theta_{n-3}\cos\theta'_{n-3}+\sin\theta_{n-3}\sin\theta'_{n-3}\cos(\phi-\phi')\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

dir.

$\Delta t - i\epsilon$ yerine koyduğumuzda ve uç durumlarda $\epsilon \to 0$ götürürsek, $\left|e^{-i\frac{\Delta t}{R_0}}\right| < 1$ olur. Şimdi,

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\lambda}(x)t^k \quad , \quad |t|<1\,, \quad |x|\le 1\,, \qquad \lambda > -\frac{1}{2} \tag{3.8}$$

bağıntısını kullanabiliriz [19-21]. Daha sonra (3.8) denklemindeki Gegenbauer polinomlarının üretici fonksiyonu kullanılırsa,

$$D^{(n)}(x,x') = \frac{\alpha_n}{4\pi^{n-2}R_0^{n-2}} \frac{1}{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\gamma_{n-2}\right)^{\frac{(n-2)}{2}}} \tag{3.9}$$

elde edilir $\left(\text{Burada } \alpha_n = \frac{\tilde{\alpha}_n}{2^{(n-2)/2}} \text{ dir}\right)$. Buradaki γ_{n-2} , $(\chi\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \theta_3\,,\ \dots\dots\,,\ \theta_{n-3}\,,\ \phi)$ ve $(\chi'\,,\ \theta_1'\,,\ \theta_2'\,,\ \theta_3'\,,\ \dots\dots\,,\ \theta_{n-3}'\,,\ \phi')$ yönlerindeki $\vec{r}$ ve $\vec{r}'$ vektörleri arasındaki açıdır. S^{n-1} yüzeydeki jeodezik mesafe; $\Delta s_{n-2}(q,q') = R_0\gamma_{n-2}$ ile ifade edilir. Burada $q = q(\chi\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \theta_3\,,\ \dots\dots\,,\ \theta_{n-3}\,,\ \phi)$; q ve $q' \in S^{n-1}$ ve $x = x(t,q)$ dir. $\Delta s_{n-2}(q,q')$ uzay ayrılması,

$$(\cos\gamma_{n-2} =)\ \cos\frac{\Delta s_{n-2}}{R_0} = \cos\chi\cos\chi' + \sin\chi\sin\chi'\cos\gamma_{n-3} \tag{3.10}$$

olarak $(\chi\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \theta_3\,,\ \dots\dots\,,\ \theta_{n-3}\,,\ \phi)$ ve $(\chi'\,,\ \theta_1'\,,\ \theta_2'\,,\ \theta_3'\,,\ \dots\dots\,,\ \theta_{n-3}'\,,\ \phi')$ koordinatları cinsinden verilmiştir. Burada γ_{n-3} , Denk. (3.7)'de verilmiştir.

Böylece, $n = 2,3\ (S^1, S^2\ için)$ [10,11], $n = 4\ (S^3\ için)$ [7] ve $n = 5,6,\dots,12$ [17] uzay-zaman boyutları için Green fonksiyonu

$$D^{(n)}(x,x')\ \left(= G^{(+)}(x,x')\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{2\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_0}{R_0}\right)} & n = 2\ için \\ \dfrac{\alpha_n}{4\pi^{n-2}R_0^{n-2}} \dfrac{1}{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_{n-2}}{R_0}\right)^{\frac{(n-2)}{2}}} & n \ge 3\ için \end{cases} \tag{3.11}$$

elde edilir. Burada $\cos\frac{\Delta s_0}{R_0}$ ve $\cos\frac{\Delta s_{n-2}}{R_0}$ ilgili uzay-zamandaki jeodezik mesafe arasındaki açıdır. x ile x' arasındaki simetriden dolayı $G^{(+)}(x,x')$ pozitif Wightmann fonksiyonu ile $G^{(1)}(x,x')$ Hadamard Green fonksiyonu arasında şöyle bir ilişki vardır:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x,x') &= 2\mathrm{Re}\, G^{(+)}(x,x') \\ &= 2\mathrm{Re}\, \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\, D^{(n)}(x,x') \end{aligned} \tag{3.12}$$

Burada n uzay-zaman boyutudur. Ayrıca (3.12) denklemindeki Re pozitif Wightmann fonksiyonunun reel kısmını ifade eder.

BÖLÜM 4

YENİDEN NORMALİZE EDİLMİŞ KUANTUM BOŞLUK ENERJİ YOĞUNLUĞU

Bu bölümde; Denk.(3.10) ile elde edilen $D^{(n)}(x,x')$ Green fonksiyonunun kullanılmasıyla yeniden normalize edilmiş $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ enerji-momentum tensörünün beklenen değeri hesaplanacaktır. Öncelikle ıraksaklığa neden olan ifadeleri belirleyelim: $D^{(n)}(x,x')$ ifadesi seriye açılır ve çakışma limitinin $(\Delta t, \Delta s_{n-2} \to 0)$ alınması sonucunda $D^{(n)}(x,x')$ Green fonksiyonu ifadesinde ıraksaklığa neden olan terimin, sadece $(k=0)$ terimi olduğu belirlenir. Dolayısıyla; $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensöründeki ıraksaklıklara neden olan sadece $(k=0)$ terimidir. Bu terime: çakışma limitinde sonsuz olan, sadece R_0 yarıçapına bağlı olan Minkowski ifadesi denir. Bu çıkartılınca, geriye kalan terimler, enerji-momentum tensörüne sonlu miktarlarda katkıda bulunurlar. $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerindeki sonsuz olan terimlerin çıkarılması doğal bir yöntemdir ve $D^{(n)}(x,x')$ 'deki diğer ifadeleri kapsaması için Green fonksiyonundan $k=0$ terimi çıkarılır. Bu işleme *renormalizasyon işlemi* denir. $D^{(n)}(x,x')$ 'deki seride $k=0$ terimini çıkararak $D^{(n)}_{ren}(x,x')$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu tanımlanır. Daha sonra yeniden normalize edilmiş $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değer ifadesinin hesaplanması, $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ ifadesindeki $D^{(n)}(x,x')$ 'nün $D^{(n)}_{ren}(x,x')$ ile yer değiştirilmesi ile elde edilir.

Şimdi, $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin çakışma limitinin genel ifadesini göz önüne alalım. Enerji-momentum tensörünün elde edilmesinde ilk önce eğri uzay-zamanda kütlesiz konformal skaler alan için Lagrange yoğunluğu ve hareket fonksiyoneli sırasıyla

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{n-1}g}\left(g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu}(\vec{x})\Phi_{;\nu}(\vec{x}) - \xi R\Phi^2(\vec{x})\right) \tag{4.1}$$

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\vec{x})\, d^n x \tag{4.2}$$

dir. Burada $\Phi(\vec{x})$, skaler alandır, g ise $g_{\mu\nu}$ metriğinin determinantıdır ve R'de metrik için Ricci skaleridir. S'nin Φ varyasyonu ile

$$0 = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Phi} = \sqrt{(-1)^{n-1}g}\left(\Phi^{;\mu}_{;\mu}(\vec{x}) + \xi R\Phi(\vec{x})\right) \tag{4.3}$$

skaler alan denklemi elde edilir. Burada $\frac{\delta}{\delta\Phi}$ fonksiyonel türevdir. (4.3) ifadesi, hareket denklemini

$$\Box\Phi(\vec{x}) + \xi R\Phi(\vec{x}) = 0 \tag{4.4}$$

olarak verir.

Eğri uzay-zamanda kütlesiz konformal skaler bir alan için enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{(-1)^{n-1}g}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{4.5}$$

olarak $g^{\mu\nu}$ metrik tensörüne göre hareketin varyasyonundan elde edilebilir. Burada

$$\delta\mathcal{S} = \int \delta\mathcal{L}\, d^n x \tag{4.6}$$

dır. Ayrıca aşağıdaki bağıntı [13] kullanılırsa,

$$\delta\sqrt{(-1)^{n-1}g} = -\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{n-1}g}\; g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.7}$$

ve daha sonra $\delta\mathcal{L}$ ($g^{\mu\nu}$'ye göre) varyasyonu alınırsa,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{n-1}g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}\delta g^{\mu\nu} + \Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi R\Phi^2\delta g^{\mu\nu} - \xi\delta R\Phi^2\right) \qquad (4.8)$$

elde edilir. Aşağıdaki bağıntılar [13]

$$\left.\begin{aligned} \delta R &= -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\left(\delta g_{\rho\sigma;\mu\nu} + \delta g_{\rho\mu;\sigma\nu}\right) \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma} \\ g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &\text{ve} \\ R^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

ile (4.8) denklemi kullanılırsa $\mathcal{S}$'nin $g^{\mu\nu}$'ye göre varyasyonu,

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^{n-1}g}\delta g^{\mu\nu}\Big(\ (1-2\xi)\,\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - \xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Phi_{;\rho}\Phi_{;\sigma} - 2\xi\Phi_{;\mu\nu}\Phi$$
$$+2\xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Phi\Phi_{;\rho\sigma} - \xi R_{\mu\nu}\Phi^2 + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}R\Phi^2\ \Big) \qquad (4.10)$$

olarak elde edilir. Denk.(4.5)'in içine Denk.(4.10) yerleştirilir ve yeniden düzenlenirse, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = \Big(\ (1-2\xi)\,\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - \xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Phi_{;\rho}\Phi_{;\sigma} - 2\xi\Phi_{;\mu\nu}\Phi$$
$$+2\xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Phi\Phi_{;\rho\sigma} - \xi R_{\mu\nu}\Phi^2 + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}R\Phi^2\ \Big) \qquad (4.11)$$

olarak elde edilir [13]. Yukarıdaki denklemin kuantum boşluk beklenen değeri alınırsa,

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \ (1-2\xi)\langle 0|\Phi_{;\mu}(\vec{x})\Phi_{;\nu}(\vec{x})|0\rangle - \xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\langle 0|\Phi_{;\rho}(\vec{x})\Phi_{;\sigma}(\vec{x})|0\rangle$$
$$-2\xi\langle 0|\Phi_{;\mu\nu}(\vec{x})\Phi(\vec{x})|0\rangle + 2\xi g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi_{;\rho\sigma}(\vec{x})|0\rangle$$
$$-\xi R_{\mu\nu}\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})|0\rangle + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}R\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})|0\rangle \qquad (4.12)$$

bulunur.

Denk.(4.11)'deki $\Phi(\vec{x})$ skaler alanı, kanonik kuantizasyon nedeniyle bir alan işlemcisi gibi davranır. Denk.(4.12), aynı uzay-zaman noktasında bulunan alan işlemcilerinin çarpımları ve bunların kovaryant türevlerinden inşa edilmiştir. Bu olgu nedeniyle enerji-momentum tensörünün beklenen değeri için ıraksaklıklara yol açar. Iraksak niceliklerden kurtulmak için, Denk.(4.12)'deki her bir çarpım ifadesinde bulunan $\Phi(\vec{x})$ alan işlemcilerinden biri $\Phi(\vec{x}')$ ile yer değiştirir. Burada $\vec{x}'$, $\vec{x}$'ne sonsuz küçük aralıkta yakın bir noktadır. Böylece $\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle$, biri x de diğeri ise x' de olmak üzere iki vektörün çarpımı şeklinde dönüştürülür. $\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle$ ayrılmış nokta fonksiyonu, pozitif Wightmann fonksiyonu olarak adlandırılır ve $G^{(+)}(x,x') = \langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle$ ile gösterilir. Alanın anti değişim (anti commutator) kuantum boşluk beklenen değeri,

$$G^{(1)}(x,x') = \langle 0|\{\Phi(\vec{x}),\Phi(\vec{x}')\}|0\rangle \tag{4.13}$$

ile tanımlanan Hadamard Green fonksiyonudur. Burada x ile x' arasındaki simetriden dolayı $G^{(1)}(x,x')$ ve $G^{(+)}(x,x')$ arasındaki ilişki,

$$G^{(1)}(x,x') = 2Re\, G^{(+)}(x,x') \tag{4.14}$$

bağıntısı ile verilir.

Ayrılmış nokta fonksiyon tanımını [13,14,16] kullanarak,

$$\left\langle 0\middle|\Phi_{;\mu}(\vec{x})\Phi_{;\nu}(\vec{x})\middle|0\right\rangle = \lim_{x'\to x}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu'}\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.15}$$

ve

$$g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left\langle 0\middle|\Phi_{;\rho}(\vec{x})\Phi_{;\sigma}(\vec{x})\middle|0\right\rangle = \lim_{x'\to x} g_{\mu\nu'}g^{\rho\sigma'}\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma'}\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.16}$$

olarak yazılabilir. Burada indislerin temeli, x' noktasında türevinin alındığını gösterir. $\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle$ ve bunların türevleri bitensördür, yani bunlar iki farklı noktada tensörleri dönüştüren fonksiyonlardır. Ayrıca,

$$\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi_{;\mu\nu}(\vec{x})|0\rangle = \lim_{x'\to x}\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu + \nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'}\right)\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.17}$$

olduğunu göz önünde bulundurmamız gerekir. Her bir terim bitensör olarak farklı bir şekilde dönüştürülür, dolayısıyla bunlar toplanamaz. (4.17) denklemi düzenlenirse,

$$\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi_{;\mu\nu}(\vec{x})|0\rangle = \lim_{x'\to x}\tfrac{1}{2}\left(g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'} + g_{\nu'\sigma}\nabla^{\sigma}\nabla_{\mu}\right)\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.18}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle 0|g_{\mu\nu}\Phi(\vec{x})\Phi^{;\rho}_{;\rho}(\vec{x})|0\rangle = \lim_{x'\to x}\frac{1}{2}g_{\mu\nu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.19}$$

$$\langle 0|R_{\mu\nu}\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})|0\rangle = \lim_{x'\to x}\frac{1}{2}\left(R^\sigma_\mu g_{\sigma\nu'} + R^{\rho'}_{\nu'}g_{\mu\rho'}\right)\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.20}$$

yazılabilir. Son olarak,

$$\langle 0|g_{\mu\nu}R\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x})|0\rangle = \lim_{x'\to x}g_{\mu\nu'}R\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle \tag{4.21}$$

bağıntısı kullanılır.

Enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin çakışma limitini [7]

$$\begin{aligned}\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \lim_{x'\to x}\Big[\ & (1-2\xi)\,\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + g_{\mu\nu'}\left(2\xi-\frac{1}{2}\right)g^{\lambda\sigma'}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'} \\ & -\xi\left(g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'} + g_{\nu'\sigma}\nabla^{\sigma}\nabla_{\mu}\right) + \xi g_{\mu\nu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right) \\ & -\frac{1}{2}\xi\left(R^\sigma_\mu g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\sigma'}_{\nu'}\right) + \frac{1}{2}\xi R g_{\mu\nu'}\ \Big]\langle 0|\Phi(\vec{x})\Phi(\vec{x}')|0\rangle\end{aligned} \tag{4.22}$$

olarak elde etmek için (4.15)-(4.21) arasındaki tüm denklemler (4.12) denkleminin içine yerleştirilir. Denk.(3.12)'deki bağıntı (4.22) denkleminde kullanılırsa,

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{(n)} = \lim_{x'\to x}\Big[(1-2\xi)\,\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + g_{\mu\nu'}\left(2\xi-\frac{1}{2}\right) g^{\lambda\sigma'}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'}$$
$$-\xi\left(g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'} + g_{\nu'\sigma}\nabla^{\sigma}\nabla_{\mu}\right) + \xi g_{\mu\nu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\xi\left(R^{\sigma}_{\mu}g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\sigma'}_{\nu'}\right) + \frac{1}{2}\xi R g_{\mu\nu'}\Big] D^{(n)}(x,x') \qquad (4.23)$$

olarak elde edilir. Yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerini elde etmek için $D^{(n)}(x,x')$ ifadesi $D^{(n)}_{ren}(x,x')$ ifadesi ile yer değiştiririz.

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{(n)}_{ren} = \lim_{x'\to x}\Big[(1-2\xi)\,\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + g_{\mu\nu'}\left(2\xi-\frac{1}{2}\right) g^{\lambda\sigma'}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'}$$
$$-\xi\left(g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'} + g_{\nu'\sigma}\nabla^{\sigma}\nabla_{\mu}\right) + \xi g_{\mu\nu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\xi\left(R^{\sigma}_{\mu}g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\sigma'}_{\nu'}\right) + \frac{1}{2}\xi R g_{\mu\nu'}\Big] D^{(n)}_{ren}(x,x') \qquad (4.24)$$

Burada $D^{(n)}_{ren}(x,x')$ n-boyutlu yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonudur.

Çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş enerji momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T^0_0 ve T^j_i bileşenlerinin genel ifadesi:

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle^{(n)}_{ren} = \lim_{x'\to x}\left[(1-2\xi)\nabla_0\nabla_{0'} + \xi\left(\nabla_i\nabla^i + \nabla_{i'}\nabla^{i'}\right) + 2R\xi^2\right] D^{(n)}_{ren}(x,x') \qquad (4.25)$$

$$\langle 0|T^j_i|0\rangle^{(n)}_{ren} = \lim_{x'\to x}\Big[(1-2\xi)\,g^{ij'}\nabla_i\nabla_{j'} + \xi\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)$$
$$-\xi\left(\nabla^i\nabla_j + \nabla^{i'}\nabla_{j'}\right) - \xi R^j_i + 2R\xi^2\Big] D^{(n)}_{ren}(x,x') \qquad (4.26)$$

haline gelir. Burada $R^j_i = \frac{1}{R_0^2}(n-2)$ dir. (4.26) denkleminde dikkat edilmesi gereken nokta ikinci terimin kapalı şekilde yazılmasıdır. Çünkü herhangi bir bileşenin hesaplanması durumunda bu terim bileşenlerin toplamı şekline gelir. Yani istenilen bileşen (4.26)'da yerine yazılır ve daha sonra aşağıdaki denklem kullanır:

$$\lim_{x'\to x}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho+\nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)D_{ren}^{(n)}(x,x')=\lim_{x'\to x}\left(2\nabla_0\nabla_0+g^{ij}\nabla_i\nabla_j-g^{ij}\nabla_i\nabla_{j'}\right)D_{ren}^{(n)}(x,x') \quad . \quad (4.27)$$

(4.24) ile uzay-zaman boyutlarının özelleştirilmesinde boşluk enerji yoğunluğunun değerlerini hesaplamak için

$$\zeta(s,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+q)^s} \quad , \quad \mathrm{Re}\,s>1, \;\; q\neq 0,-1,-2,\ldots \tag{4.28}$$

Hurwitz-Zeta fonksiyonuna [8] ihtiyaç vardır. Bu fonksiyon q=1 olduğunda Riemann-Zeta fonksiyonuna indirgenir. Mümkün olan integral gösterimlerinden biri,

$$\zeta(s,q)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dt\,\frac{t^{s-1}e^{-qt}}{1-e^{-t}} \tag{4.29}$$

şeklindedir. Burada $\mathrm{Re}\,s>1$ ve $\mathrm{Re}\,q>0$ 'dır. (4.29)'daki integral kontur integraline dönüştürülürse,

$$\zeta(s,q)=\frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i}\Gamma(1-s)\oint dz\,\frac{z^{s-1}e^{-qz}}{1-e^{-z}} \tag{4.30}$$

elde edilir. Bu integral bütün düzlem üzerinde $\zeta(s,q)$ 'nin analitik sürekliliğini sağlar, bu durum $rezid$ü 1 ile $s=1$'deki basit bir kutup haricinde her yerde düzenlidir. Riemann-Zeta fonksiyonunun, Bernoulli polinomu ve Bernoulli sayısı ile gösterimi

$$\zeta(-m,q)=-\frac{B_{m+1}(q)}{m+1} \;, \quad m=0,1,2,3,\ldots \tag{4.31}$$

$$\zeta(1-2j)=-\frac{B_{2j}}{2j} \;, \quad j=1,2,3,\ldots \tag{4.32}$$

şeklindedir. Burada $B_{m+1}(q)$ ve B_{2j} sırasıyla Bernoulli polinomunu ve Bernoulli sayısını ifade eder.

Bernoulli polinomunun değerini kullanılarak, Denk.(4.31) ve Denk.(4.32)'den uzay-zaman boyutunun $n = 2$'den $n = 12$' ye kadar olan değerlerinde kütlesiz konformal skaler alan için Casimir enerjisi sonuçları elde edilir.

Zeta-fonksiyonunun uygun bir kesme fonksiyonu kullanılarak mod toplama yöntemi ile elde edilen sonuçları nokta-bölme yönteminin sonuçlarını doğrulamıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan bazı Riemann-Zeta fonksiyonlarının değerleri şunlardır:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \ , \ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \ , \ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \ , \ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \ , \ \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} \ . \ (4.33)$$

4.1. *n*=2, 4, 6, 8, 10, 12 Çift Uzay-Zaman Boyutlarındaki Enerji Yoğunlukları

4.1.1. *n*=2 İçin Sonuçlar

Denk.(3.11) kullanılarak iki nokta fonksiyonu

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{2\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_0}{R_0}\right)} \tag{4.34}$$

olarak elde edilir. Burada $\cos\frac{\Delta s_0}{R_0}$ jeodezik mesafe arasındaki açıdır. (4.34)'deki iki nokta fonksiyonu, sonsuz bir toplam olarak açılabilir [7,17]. Bu nedenle,

$$u = \ln\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_0}{R_0}\right) \tag{4.35}$$

değişken tanımlaması yapılır. Daha sonra

$$\cos x-\cos y = 2\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\sin^2\frac{y}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(2k\pi+y)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2k\pi-y)^2}\right) \tag{4.36}$$

sonsuz çarpım açılım formülü kullanılır. Bu formülde $x=\frac{\Delta t}{R_0}$ ve $y=\frac{\Delta s_0}{R_0}$ alınırsa,

$$\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_0}{R_0} = 2\left(1-\frac{\Delta t^2}{{\Delta s_0}^2}\right)\sin^2\frac{\Delta s_0}{2R_0} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0+\Delta s_0)^2}\right)\left(1-\frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0-\Delta s_0)^2}\right) \tag{4.37}$$

sonucu elde edilir. (4.37) denklemi (4.35)'de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra (4.35)'deki u ifadesi şu şekilde olur:

$$u = \ln 2+\ln\left(\frac{1}{2R_0}\right)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_0)^2-\Delta t^2}{2k\pi R_0}\right] \tag{4.38}$$

(4.38) denklemi (4.34)'de yerine yazılırsa iki nokta fonksiyonu

$$(\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle =) D^{(2)}(x,x') = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln\frac{\left[(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2 - \Delta t^2\right]}{R_0^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k} \tag{4.39}$$

şeklinde olur.

$\Delta t, \Delta s_0 \to 0$ çakışma limitinde Green fonksiyonu ifadesindeki ıraksaklığa neden olan terim, sadece $(k = 0)$ terimidir. (4.39) denkleminde sadece $(k = 0)$ teriminin ıraksak olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla bu terim, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensöründe ıraksaklıklara yol açacaktır. Ayrıca $(k = 0)$ terimi, çakışma limitinde sonsuz olan, sadece R_0 yarıçapına bağlı ve Minkowski ifadesini betimleyen tek terimdir. Bu yüzden geriye kalan terimler, enerji-momentum tensörüne sonlu miktarlarda katkıda bulunurlar. $\langle T_{\mu\nu}\rangle$'deki sonsuz olan terimlerin çıkarılması doğal bir yöntemdir ve $D^{(2)}(x,x')$'deki diğer ifadeleri kapsaması için Denk. (4.39)'daki $k = 0$ terimi çıkarılır. Bu işlemle renormalizasyon yapılmış olur. Denk. (4.39)'daki seride $k = 0$ terimini çıkararak $D^{(2)}_{ren}(x,x')$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu tanımlanır. Daha sonra yeniden normalize edilmiş $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ ifadesi, $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ ifadesindeki $D^{(2)}(x,x')$'nün $D^{(2)}_{ren}(x,x')$ ile yer değiştirilmesi ile elde edilir.

Çakışma limitinde yani $(t' \to t)\ \Delta t \to 0\ ve\ \Delta s_0 \to 0$ iken, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu hesaplanır. Bunun için (4.39) denkleminden $k = 0$ terimi çıkarılır.

$$D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2 - \Delta t^2]}{R_0^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k} \tag{4.40}$$

Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_0 \to 0)$ alınırsa,

$$\lim_{x'\to x} D^{(2)}_{ren}(x,x') = \lim_{\Delta s_0 \to 0}\left[-\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2]}{R_0^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k}\right] \tag{4.41}$$

denklemi elde edilir. (4.41) denklemi düzenlenirse, çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(2)}(x,x') = 0 \tag{4.42}$$

haline gelir. (4.40) denkleminin t'ye göre 2 kez türevi alınırsa

$$\nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(2)}(x,x') = -\nabla_0\nabla_{0'} D_{ren}^{(2)}(x,x')$$

$$= \nabla_0\nabla_0\left[\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0+\Delta s_0)^2-\Delta t^2]}{R_0^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_0)^2-\Delta t^2} - \frac{2\Delta t^2}{[(2k\pi R_0+\Delta s_0)^2-\Delta t^2]^2}\right] \tag{4.43}$$

elde edilir (Burada $\nabla_{0'}$, t' göre türevi gösterir). Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_0 \to 0)$ alınırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(2)}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'} D_{ren}^{(2)}(x,x')$$

$$= \lim_{\Delta s_0\to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{(2k\pi R_0)^2\left(1+\frac{\Delta s_0}{2k\pi R_0}\right)^2}\right] \tag{4.44}$$

haline gelir. Yukarıdaki denklemin son terimi için binom açılımı kullanırsa;

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_0}{2k\pi R_0}\right)^2} = \left[\frac{1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\Delta s_0}{4\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{3\Delta s_0^2}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\Delta s_0^3}{8\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) + \ldots\ldots\right] \tag{4.45}$$

(4.44) denklemi

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(2)}(x,x') = \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta s_0\to 0}\left\{\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\Delta s_0}{4\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3\Delta s_0^2}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right) - \frac{\Delta s_0^3}{8\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) + \ldots\ldots\right]\right\} \tag{4.46}$$

olarak bulunur. Aşağıdaki bağıntılar (4.46)'da kullanılırsa,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta s_{n-2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta s_{n-2}}{R_0}}{\frac{\Delta s_{n-2}}{R_0}}=1 \quad , \qquad \left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{k^{2p-1}}=0 \qquad \text{ve} \\ &\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{k^{2p}}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} \qquad \text{burada} \quad p=1,2,3,4,\dots \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

(4.46) denklemi

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(2)}_{ren}(x,x') &= -\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'}D^{(2)}_{ren}(x,x') \\ &= \frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 k^2}\end{aligned} \tag{4.48}$$

haline gelir. Çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonunun kovaryant türevlerini hesaplanması için önce jeodezik mesafenin bulunması gerekir. S^1 yüzeyindeki jeodezik mesafe,

$$\Delta s_0 = R_0\arccos[\cos(\phi-\phi')] \tag{4.49}$$

olarak kolayca bulunur. Çakışma limitinde jeodezik mesafenin kovaryant türevi alınırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\Delta s_0 = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x'\to x}\nabla_{i'}\Delta s_0 = 0 \tag{4.50}$$

elde edilir. Burada i indisi, ϕ'yi ifade eder. $\nabla^{\nu'}\Delta s_0$ üzerinde $g^{\mu}_{\nu'}$'nün etkisinin incelenmesi ile $g^{\mu}_{\nu'}$'nün özellikleri kullanılacaktır. Bu, x' de jeodezikler için teğet bileşen olup, x ve x' arasındaki jeodezik mesafeye eşit uzunluğa sahiptir ve $x'\to x$ yönünde yönlendirilmiştir [7,13,14,16]. Jeodezik mesafenin kontravaryant türevi ile kovaryant türevi arasındaki ilişki

$$\nabla^{\mu}\Delta s_0 = -g^{\mu}_{\nu'}\nabla^{\nu'}\Delta s_0 \tag{4.51}$$

ile verilir. Teğet vektör paralele taşınırken, bu teğet olarak kalır ve aynı uzunluğu tutar. Yani $\nabla^{\nu'}\Delta s_0$ üzerindeki $g^{\mu}_{\nu'}$'nün etkisi, $-\nabla^{\mu}\Delta s_0$'ı vermelidir. Bu, x'de jeodezikler için teğettir ve $\nabla^{\nu'}\Delta s_0$ ile aynı uzunluğa sahiptir. $\nabla^{\mu}\Delta s_0$'daki eksi işareti, $x' \to x$ yönüne yönlendirilmiş olmasından gelir [7,16]. Böylece jeodezik mesafe için kontravaryant türev ifadelerinden kovaryant türev ifadelerine geçiş,

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\Delta s_0 = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Delta s_0 \tag{4.52}$$

ve

$$\nabla_{\mu'}\nabla^{\mu'}\Delta s_0 = -g^{\mu'\nu}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu}\Delta s_0 \tag{4.53}$$

ile olacaktır.

Çakışma limitinde $(\Delta t, \Delta s_0 \to 0)$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonunun kovaryant türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j D^{(2)}_{ren}(x,x') &= -\nabla_i\nabla_{j'} D^{(2)}_{ren}(x,x') \\ &= \nabla_i\nabla_j\left[\frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2 - \Delta t^2]}{R_0^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\nabla_i\nabla_j\Delta s_0\frac{\partial}{\partial\Delta s_0}\left\{\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2 - \Delta t^2]}{R_0^2}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2\pi k}\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.54) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$\nabla_i\nabla_j D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\nabla_i\nabla_j\Delta s_0\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_0)}{(2k\pi R_0 + \Delta s_0)^2 - \Delta t^2}\right] \tag{4.55}$$

bulunur. (4.55) denkleminin çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_0 \to 0)$ alınırsa

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta s_0\to 0}\left[\nabla_i\nabla_j\Delta s_0\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_0)}\right]\right] \quad (4.56)$$

ifadesi elde edilir. (4.56) denklemi düzenlenirse,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta s_0\to 0}\left[\nabla_i\nabla_j\Delta s_0\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{2k\pi R_0}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_0}{2k\pi R_0}\right)}\right]\right] \quad (4.57)$$

denklemi kolayca bulunur.(4.57) denkleminde parantez içindeki terime binom açılımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_0}{2k\pi R_0}\right)} = \left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_0}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{{\Delta s_0}^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{{\Delta s_0}^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{{\Delta s_0}^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{{\Delta s_0}^5}{64\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\ \dots\dots\right] \quad (4.58)$$

ve (4.57) denklemi,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta s_0\to 0}\left\{\nabla_i\nabla_j\Delta s_0\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_0}{4\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_0^2}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_0^3}{8\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \dots\dots\right]\right\} \quad (4.59)$$

haline gelir. Daha sonra kovaryant türevler,

$$\left.\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j\Delta s_{n-2} &= \frac{\partial^2\Delta s_{n-2}}{\partial x_i\partial x_j}-\Gamma^{\alpha}_{ij}\frac{\partial\Delta s_{n-2}}{\partial x_\alpha} \quad ve\\ \Gamma^{\alpha}_{ij} &= \frac{g^{\alpha k}}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad i,j,\alpha,k=\chi,\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{n-3},\phi\end{aligned}\right\} \quad (4.60)$$

bağıntıları ile hesaplanır. Kovaryant türevler arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned}\nabla_\phi \nabla_\phi \Delta s_0 &= -\nabla_\phi \nabla_{\phi'} \Delta s_0 \\ &= -R_0^2 \cos(\phi-\phi')\left(-\frac{1}{\Delta s_0}-\frac{\Delta s_0}{6R_0^2}-\frac{7\Delta s_0^3}{360R_0^4}\right. \\ &\quad \left.-\frac{31\Delta s_0^5}{15120R_0^6}+\left\{\frac{\Delta s_0}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\right) \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\csc\left(\frac{\Delta s_0}{R_0}\right) &= \frac{R_0}{\Delta s_2}+\frac{\Delta s_0}{6R_0}+\frac{7\Delta s_0^3}{360R_0^3}+\frac{31\Delta s_0^5}{15120R_0^5} \\ &\quad +\left\{\frac{\Delta s_0}{\mathrm{R}_0}\text{ 'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\end{aligned} \tag{4.62}$$

ile verilir. (4.61) ve (4.62) denklemleri, (4.59) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(2)}(x,x') &= -\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'}D_{ren}^{(2)}(x,x') \\ &= -\frac{1}{2\pi}g_{ij}\lim_{\Delta s_0\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-\frac{\Delta s_0}{4\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_0^2}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_0^3}{8\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \ldots\ldots\right]\right]\end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir ve (4.47) bağıntıları, (4.63) denkleminde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(2)}(x,x') &= -\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'}D_{ren}^{(2)}(x,x') \\ &= -\frac{1}{4\pi R_0^2}g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2k^2}\end{aligned} \tag{4.64}$$

bulunur.

Şimdi yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün $\langle T_0^0\rangle$ ve $\langle T_i^j\rangle$ kuantum boşluk beklenen değerlerini hesaplayalım. T_0^0 bileşeni için (4.25) denklemi kullanılırsa,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(2)} = \lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'}D_{ren}^{(2)}(x,x') \tag{4.65}$$

denklemi bulunur. Burada,

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x'\to x} D^{(2)}_{ren}(x,x') = 0 \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_0 \nabla_{0'} D^{(2)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 k^2} \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_i \nabla_{j'} D^{(2)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{4\pi R_0^2} g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 k^2} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

(4.66) denklemleri, (4.65)'da yerine yazılırsa

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(2)}_{ren} = -\frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 k^2} \tag{4.67}$$

elde edilir ve daha sonra Riemann zeta fonksiyonunun

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.68}$$

ifadesi kullanılırsa sonuç olarak, yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_0^0 bileşeni,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(2)}_{ren}\left(=\left(\rho_0^{(2)}\right)_{ren}\right) = -\frac{1}{24\pi R_0^2} \tag{4.69}$$

olarak elde edilir [10]. Bu ifade aynı zamanda yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunu verir. (4.27) denklemi (4.26) denkleminde kullanılırsa T_i^j için,

$$\left\langle 0\middle|T_i^j\middle|0\right\rangle^{(2)}_{ren} = \lim_{x'\to x} g^{ij'}\nabla_i \nabla_{j'} D^{(2)}_{ren}(x,x') \tag{4.70}$$

denklemi elde edilir. Burada $n = 2$ için $g^{ij}g_{ij} = 1$'dir. (4.66)'daki denklemler (4.70) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(2)} = \frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 k^2} \tag{4.71}$$

bulunur. (4.68) denklemi (4.71) denkleminde yerine yazılırsa yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_i^j bileşeni,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(2)} = \frac{1}{24\pi R_0^2}\delta_i^j \tag{4.72}$$

olarak hesaplanır [10]. Burada, $\delta_i^j = \begin{cases} i = j & \text{ise} \quad 1 \\ i \neq j & \text{ise} \quad 0 \end{cases}$ dır.

4.1.2. *n*=4 İçin Sonuçlar

Denk.(3.11) kullanılarak iki nokta fonksiyonu

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle = \frac{1}{8\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_2}{R_0}}\right) \tag{4.73}$$

olarak elde edilir. Burada $\cos\frac{\Delta s_2}{R_0}$'da jeodezik mesafe arasındaki açıdır.(4.73)'deki iki nokta fonksiyonu, sonsuz bir toplam olarak açılabilir [7,17]. Bu nedenle,

$$u = \ln\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_2}{R_0}\right) \tag{4.74}$$

değişken tanımlaması yapılır. $\frac{\Delta s_2}{R_0}$ 'a göre bu denklemin türevi alınır.

$$\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)} = \frac{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}{\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_2}{R_0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_2}{R_0}} = \frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)} \tag{4.75}$$

(4.75) ifadesi (4.73)'de kullanılırsa iki nokta fonksiyonu

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle = \frac{1}{8\pi^2 R_0^2 \sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)} \tag{4.76}$$

haline gelir. (4.73) denklemi için (4.36)'daki sonsuz çarpım açılım formülü kullanılır. Bu formülde $x = \frac{\Delta t}{R_0}$ ve $y = \frac{\Delta s_2}{R_0}$ alınırsa,

$$\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_2}{R_0} = 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{{\Delta s_2}^2}\right)\sin^2\frac{\Delta s_2}{2R_0}$$
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 - \Delta s_2)^2}\right) \tag{4.77}$$

sonucu bulunur. Şimdi bulunan (4.77) denklemi (4.74) 'deki u ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$u = \ln 2 + \ln\left(\Delta {s_2}^2 - \Delta t^2\right) + \ln\left(\Delta {s_2}^2\right) + \ln\left(\sin^2 \frac{\Delta s_2}{2R_0}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \ln[(2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2 - \Delta t^2] - \sum_{k=1}^{\infty} \ln[(2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2]$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \ln[(2k\pi R_0 - \Delta s_2)^2 - \Delta t^2] - \sum_{k=1}^{\infty} \ln[(2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2] \qquad (4.78)$$

elde edilir. (4.78) denkleminde u'nun $\frac{\Delta s_2}{R_0}$'a göre türevi alınırsa,

$$\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)} = -2R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_2)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2} \qquad (4.79)$$

haline gelir. (4.79) sonucu, (4.76) denkleminde yerine yazılırsa iki nokta fonksiyonu

$$(\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle =) D^{(4)}(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2 R_0 \sin\frac{\Delta s_2}{R_0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_2)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2} \qquad (4.80)$$

şeklinde olur [18].

$\Delta t, \Delta s_2 \to 0$ çakışma limitinde Green fonksiyonu ifadesindeki ıraksaklığa neden olan terim, sadece $(k = 0)$ terimidir. (4.80) denkleminde sadece $(k = 0)$ teriminin ıraksak olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla bu terim, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensöründe ıraksaklıklara yol açacaktır. Ayrıca $(k = 0)$ terimi, çakışma limitinde sonsuz olan, sadece R_0 yarıçapına bağlı ve Minkowski ifadesini betimleyen tek terimdir. Bu yüzden geriye kalan terimler, enerji-momentum tensörüne sonlu miktarlarda katkıda bulunurlar. $\langle T_{\mu\nu}\rangle$'deki sonsuz olan terimlerin çıkarılması doğal bir yöntemdir ve $D^{(4)}(x, x')$'deki diğer ifadeleri kapsaması için Denk. (4.80)'deki $k = 0$ terimi çıkarılır. Bu işlemle renormalizasyon yapılmış olur. Denk. (4.80)'deki seride $k = 0$ terimini çıkararak

$D_{ren}^{(4)}(x,x')$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu tanımlanır. Daha sonra yeniden normalize edilmiş $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ ifadesi, $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ ifadesindeki $D^{(4)}(x,x')$'nün $D_{ren}^{(4)}(x,x')$ ile yer değiştirilmesi ile elde edilir.

Çakışma limitinde yani $(t'\to t)\,\Delta t\to 0\; ve\; \Delta s_2\to 0$ iken, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu hesaplanır. Bunun için (4.80) denkleminden $k=0$ terimi çıkarılır.

$$D_{ren}^{(4)}(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2 R_0 \sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_2)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2} \tag{4.81}$$

Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_2\to 0)$ alınırsa

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(4)}(x,x') = \frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\left[\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{(2k\pi R_0)}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)}\right] \tag{4.82}$$

haline gelir. (4.82) denkleminin son terimine binom açılımı uygulanırsa;

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(4)}(x,x') = \frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\left(\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{1}{2k\pi R_0}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left\{1-\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}+\left(\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^2-\left(\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^3+\left(\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^4-\ \dots\dots\right\}\right]\right) \tag{4.83}$$

elde edilir. (4.83) denklemi düzenlenirse;

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(4)}(x,x') = \frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\left(\frac{1}{2\pi R_0}\right)\frac{1}{k}-\left(\frac{\Delta s_2}{4\pi^2 {R_0}^2}\right)\frac{1}{k^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{{\Delta s_2}^2}{8\pi^3 {R_0}^3}\right)\frac{1}{k^3}-\left(\frac{{\Delta s_2}^3}{16\pi^4 {R_0}^4}\right)\frac{1}{k^4}+\left(\frac{{\Delta s_2}^4}{32\pi^5 {R_0}^5}\right)\frac{1}{k^5}-\ \dots\dots\right] \tag{4.84}$$

olur ve (4.47) bağıntılar kullanırsa, çakışma limitinde ($\Delta t, \Delta s_2 \to 0$) yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu

$$\lim_{x' \to x} D_{ren}^{(4)}(x, x') = -\frac{1}{8\pi^4 {R_0}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{4.85}$$

haline gelir. (4.81) denkleminin t'ye göre 2 kez türevi

$$\nabla_0 \nabla_0 D_{ren}^{(4)}(x, x') = -\nabla_0 \nabla_{0'} D_{ren}^{(4)}(x, x')$$

$$= \nabla_0 \nabla_0 \left[-\frac{1}{4\pi^2 R_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_2)}{\sin \frac{\Delta s_2}{R_0}} \left(\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 R_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_2)}{\sin \frac{\Delta s_2}{R_0}}$$

$$\left\{ \frac{2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2]^2} + \frac{8\Delta t^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_2)^2]^3} \right\} \tag{4.86}$$

elde edilir (Burada $\nabla_{0'}$, t' göre türevi gösterir). Çakışma limiti ($\Delta t, \Delta s_2 \to 0$) alınırsa,

$$\lim_{x' \to x} \nabla_0 \nabla_0 D_{ren}^{(4)}(x, x') = -\lim_{x' \to x} \nabla_0 \nabla_{0'} D_{ren}^{(4)}(x, x')$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 R_0} \lim_{\Delta s_2 \to 0} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{1}{\sin \frac{\Delta s_2}{R_0}} \frac{1}{(2k\pi R_0)^3 \left(1 + \frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^3} \right] \tag{4.87}$$

haline gelir. (4.87) denkleminin son terimi için binom açılımı kullanırsa;

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)^3 \left(1 + \frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^3} = \frac{1}{(2k\pi R_0)^3} - \frac{3\Delta s_2}{(2k\pi R_0)^4} + \frac{6{\Delta s_2}^2}{(2k\pi R_0)^5} - \ \ldots\ldots \tag{4.88}$$

(4.87) denklemi,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(4)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{2\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{(2k\pi R_0)^3}-\frac{3\Delta s_2}{(2k\pi R_0)^4}+\frac{6{\Delta s_2}^2}{(2k\pi R_0)^5}-\ \dots\dots\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{8\pi^3{R_0}^3}\right)\frac{1}{k^3}-\left(\frac{3\Delta s_2}{16\pi^4{R_0}^4}\right)\frac{1}{k^4}+\left(\frac{3{\Delta s_2}^2}{16\pi^5{R_0}^5}\right)\frac{1}{k^5}-\ \dots\dots\right] \tag{4.89}$$

olarak elde edilir. (4.47) bağıntıları, (4.89) denkleminde kullanılırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(4)}_{ren}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'} D^{(4)}_{ren}(x,x')$$
$$=-\frac{3}{16\pi^6 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \tag{4.90}$$

haline gelir. Çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonunun kovaryant türevlerini hesaplanması için önce jeodezik mesafenin bulunması gerekir. S^3 yüzeyindeki jeodezik mesafe,

$$\Delta s_2 = R_0\arccos[\cos\chi\cos\chi' + \sin\chi\sin\chi'(\cos\theta_1\cos\theta_1' + \sin\theta_1\sin\theta_1'\cos(\phi-\phi'))]\ . \tag{4.91}$$

olarak kolayca bulunur. Çakışma limitinde jeodezik mesafenin kovaryant türevi alınırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\Delta s_2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x'\to x}\nabla_{i'}\Delta s_2 = 0 \tag{4.92}$$

elde edilir. Burada i indisi χ,θ_1 ve ϕ'yi ifade eder.$\nabla^{\nu'}\Delta s_2$ üzerinde $g^{\mu}_{\nu'}$'nün etkisinin incelenmesi ile $g^{\mu}_{\nu'}$'nün özellikleri kullanılacaktır. Bu, x' de jeodezikler için teğet bileşen olup, x ve x' arasındaki jeodezik mesafeye eşit uzunluğa sahiptir ve $x'\to x$ yönünde

yönlendirilmiştir [7,13,14,16]. Jeodezik mesafenin kontravaryant türevi ile kovaryant türevi arasındaki ilişki

$$\nabla^{\mu}\Delta s_2 = -g^{\mu}_{\nu'}\nabla^{\nu'}\Delta s_2 \tag{4.93}$$

ile verilir. Teğet vektör paralele taşınırken, bu teğet olarak kalır ve aynı uzunluğu tutar. Yani $\nabla^{\nu'}\Delta s_2$ üzerindeki $g^{\mu}_{\nu'}$'nün etkisi, $-\nabla^{\mu}\Delta s_2$'yi vermelidir. Bu, x'de jeodezikler için teğettir ve $\nabla^{\nu'}\Delta s_2$ ile aynı uzunluğa sahiptir. $\nabla^{\mu}\Delta s_2$'deki eksi işareti, $x' \to x$ yönüne yönlendirilmiş olmasından geliyor [7,16]. Böylece jeodezik mesafe için kontravaryant türev ifadelerinden kovaryant türev ifadelerine geçiş,

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\Delta s_2 = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Delta s_2 \tag{4.94}$$

ve

$$\nabla_{\mu'}\nabla^{\mu'}\Delta s_2 = -g^{\mu'\nu}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu}\Delta s_2 \tag{4.95}$$

ile olacaktır.

Çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonun kovaryant türevini alırsak;

$$\begin{aligned}
\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(4)}_{ren}(x,x') &= -\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'}D^{(4)}_{ren}(x,x') \\
&= \lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j\left[-\frac{1}{4\pi^2R_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_2)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi^2R_0}\lim_{x'\to x}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_2 \\
&\quad \frac{\partial}{\partial\Delta s_2}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}}\left(\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_2)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2}\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.96}$$

elde edilir. (4.96) denklemi düzenlenirse,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(4)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{x'\to x}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\csc\frac{\Delta s_2}{R_0}$$
$$\nabla_i\nabla_j\Delta s_2\Bigg\{\frac{1}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2]}$$
$$-\frac{1}{R_0}\cot\frac{\Delta s_2}{R_0}\frac{2k\pi R_0+\Delta s_2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2]}$$
$$+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2]^2}\Bigg\}\Bigg] \tag{4.97}$$

haline gelir. (4.97) denkleminde $\Delta t\to 0$ limiti alınırsa

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(4)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\csc\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)$$
$$\nabla_i\nabla_j\Delta s_2\left\{\frac{1}{R_0}\cot\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_2)}+\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_2)^2}\right\}\Bigg] \tag{4.98}$$

elde edilir. (4.98) denklemi düzenlenirse,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(4)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{4\pi^2 R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\csc\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_2$$
$$\left\{\cot\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)\frac{1}{2k\pi R_0^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)}+\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^2}\right\}\Bigg]. \tag{4.99}$$

haline gelir. (4.99) denkleminde parantez içindeki terimlere binom açılımı uygulanırsa,

$$\cot\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)\frac{1}{2k\pi R_0^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)} = \Bigg[\frac{1}{2\pi R_0\Delta s_2}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_2}{6\pi R_0^3}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_2^3}{90\pi R_0^5}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$-\frac{1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\Delta s_2^2}{12\pi^2 R_0^4}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\Delta s_2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$-\frac{\Delta s_2^3}{24\pi^3 R_0^5}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_2^2}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\ \ldots\ldots\Bigg] \tag{4.100}$$

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_2}{2k\pi R_0}\right)^2}=\left[\frac{1}{4\pi^2R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_2}{4\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_2^2}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\Delta s_2^3}{8\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \ldots\ldots\right] \qquad (4.101)$$

Denk.(4.100) ve Denk.(4.101), Denk.(4.99)'de yerine yazılırsa

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(4)}(x,x')=-\frac{1}{4\pi^2R_0}\lim_{\Delta s_2\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\csc\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_2\right.$$
$$\left\{\frac{1}{2\pi R_0\Delta s_2}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_2}{6\pi R_0^3}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_2^3}{90\pi R_0^5}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_2^2}{12\pi^2R_0^4}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.$$
$$-\frac{\Delta s_2}{8\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_2^3}{24\pi^3R_0^5}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{\Delta s_2^2}{8\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_2^3}{8\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\Delta s_2}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\right\}\right] \qquad (4.102)$$

elde edilir. Daha sonra kovaryant türevler, (4.60) bağıntıları ile hesaplanır. Şimdi, kovaryant türevler arasındaki bağıntı şu şekildedir:

$$\nabla_\chi\nabla_\chi\Delta s_2=-\nabla_\chi\nabla_{\chi'}\Delta s_2$$
$$=-R_0^2\left(-\frac{1}{\Delta s_2}+\frac{\Delta s_2}{3R_0^2}+\frac{\Delta s_2^3}{45R_0^4}+\frac{2\Delta s_2^5}{945R_0^6}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\Delta s_2}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\right) \qquad (4.103)$$

$$\nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_1}\Delta s_2=-\nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_1'}\Delta s_2$$
$$=-R_0^2\sin\chi\sin\chi'\cos\gamma_1\left(-\frac{1}{\Delta s_2}-\frac{\Delta s_2}{6R_0^2}-\frac{7\Delta s_2^3}{360R_0^4}-\frac{31\Delta s_2^5}{15120R_0^6}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\Delta s_2}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\right) \qquad (4.104)$$

$$\nabla_\phi \nabla_\phi \Delta s_2 = -\nabla_\phi \nabla_{\phi'} \Delta s_2$$
$$= -R_0^2 \sin\chi \sin\chi' \sin\theta_1 \sin\theta_1' \cos(\phi - \phi') \left(-\frac{1}{\Delta s_2} - \frac{\Delta s_2}{6R_0^2} - \frac{7\Delta s_2^3}{360R_0^4} \right.$$
$$\left. - \frac{31\Delta s_2^5}{15120R_0^6} + \left\{ \frac{\Delta s_2}{R_0} \text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \right) \qquad (4.105)$$

$$\csc\left(\frac{\Delta s_2}{R_0}\right) = \frac{R_0}{\Delta s_2} + \frac{\Delta s_2}{6R_0} + \frac{7\Delta s_2^3}{360R_0^3} + \frac{31\Delta s_2^5}{15120R_0^5}$$
$$+ \left\{ \frac{\Delta s_2}{R_0} \text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \qquad (4.106)$$

(4.103), (4.104), (4.105) ve (4.106) denklemleri, (4.102) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_j D_{ren}^{(4)}(x, x') = -\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_{j'} D_{ren}^{(4)}(x, x')$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2 R_0} g_{ij} \lim_{\Delta s_2 \to 0} \left[\frac{\frac{\Delta s_2}{R_0}}{\sin\frac{\Delta s_2}{R_0}} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \left\{ -\frac{1}{2\pi \Delta s_2^3} \left(\frac{1}{k}\right) \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{6\pi R_0^2 \Delta s_2} \left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_2}{90\pi R_0^4} \left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{12\pi^2 R_0^3} \left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{8\pi^3 R_0^3 \Delta s_2} \left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$+ \frac{\Delta s_2}{24\pi^3 R_0^4} \left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{1}{8\pi^4 R_0^3} \left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{\Delta s_2}{8\pi^5 R_0^4} \left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\Delta s_2}{R_0} \text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right) \right\} \right] \qquad (4.107)$$

elde edilir. (4.47) bağıntıları, (4.107) denkleminde kullanılırsa,

$$\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_j D_{ren}^{(4)}(x, x') = -\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_{j'} D_{ren}^{(4)}(x, x')$$
$$= \frac{1}{8\pi^4 R_0^4} g_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{2\pi^2 k^4} \right\} \qquad (4.108)$$

haline gelir.

Şimdi yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün $\langle T_0^0 \rangle$ ve $\langle T_i^j \rangle$ kuantum boşluk beklenen değerleri hesaplanır. T_0^0 bileşeni için (4.25) denklemi kullanılırsa,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(4)} = \frac{1}{6}\lim_{x'\to x}\left[4\nabla_0\nabla_{0'} + g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j - \nabla_i\nabla_{j'}\right) + \frac{2}{R_0^2}\right]D_{ren}^{(4)}(x,x') \tag{4.109}$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(4)}(x,x') = -\frac{1}{8\pi^4 {R_0}^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_0\nabla_{0'}D_{ren}^{(4)}(x,x') = \frac{3}{16\pi^6 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_{j'}D_{ren}^{(4)}(x,x') = -\frac{1}{8\pi^4 R_0^4}g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{2\pi^2k^4}\right\} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{4.110}$$

(4.110) denklemleri, (4.119)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(4)} = \frac{1}{6}\Bigg\{&4\frac{3}{16\pi^2R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k k^4} + g^{ij}g_{ij}2\frac{1}{8\pi^2R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4k^4}+\frac{1}{3\pi^2k^2}\right] \\
&-\frac{2}{R_0^2}\frac{1}{8\pi^2R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2k^2}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.111}$$

olarak elde edilir. Burada $n = 4$ için $g^{ij}g_{ij} = 3$ dür. (4.111) denklemi düzenlenirse,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(4)} = \frac{3}{16\pi^6R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \tag{4.112}$$

haline gelir. Daha sonra aşağıdaki Riemann zeta fonksiyonunun sonucu kullanılır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{4.113}$$

Sonuç olarak, yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_0^0 bileşeni,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(4)} \left(= \left(\rho_0^{(4)}\right)_{ren}\right) = \frac{1}{480\pi^2 R_0^4} \tag{4.114}$$

olarak elde edilir [7]. Bu ifade aynı zamanda yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunu verir. (4.27) denklemi (4.26) denkleminde kullanılırsa T_i^j için,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(4)} = \frac{1}{6}\lim_{x'\to x}\left[6g^{ij'}\nabla_i\nabla_{j'} + \left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)\right]D_{ren}^{(4)}(x,x') \tag{4.115}$$

elde edilir. (4.110) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(4)} = \frac{1}{6}\left\{-\frac{6}{8\pi^2 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4 k^4}+\frac{1}{3\pi^2 k^2}\right]+\frac{3.2}{8\pi^2 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4 k^4}+\frac{1}{3\pi^2 k^2}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2.3}{16\pi^2 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k k^4}\right\} \tag{4.116}$$

haline gelir. Denk.(4.116) düzenlenirse,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(4)} = -\frac{1}{16\pi^2 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4 k^4} \tag{4.117}$$

bulunur. (4.113) denklemi (4.117) denkleminde yerine yazılır ve yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_i^j bileşeni,

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(4)} = -\frac{1}{1440\pi^2 R_0^4}\delta_i^j \tag{4.118}$$

olarak hesaplanır [7]. Burada, $\delta_i^j = \begin{cases} i=j & \text{ise} \quad 1 \\ i\neq j & \text{ise} \quad 0 \end{cases}$ dır.

4.1.3. *n*=6 İçin Sonuçlar

Denk.(3.11) kullanılarak iki nokta fonksiyonu

$$D^{(6)}(x,x') = \frac{\alpha_6}{4\pi^4 R_0^4} \frac{1}{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)^2} \tag{4.119}$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha_6 = \frac{\tilde{\alpha}_6}{2^2}$ dir ve $\cos\frac{\Delta s_4}{R_0}$'da jeodezik mesafe arasındaki açıdır. (4.119) 'deki iki nokta fonksiyonu, sonsuz bir toplam olarak açılabilir [7,17]. Bu nedenle,

$$u = \ln\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_4}{R_0}\right) \tag{4.120}$$

değişken tanımlaması yaparız. $\frac{\Delta s_4}{R_0}$ 'a göre bu denklemin iki kez türevi alınır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra iki nokta fonksiyonu

$$D^{(6)}(x,x') = \frac{1}{16\pi^3 R_0^4}\left[\frac{\cos\frac{\Delta s_4}{R_0}}{\sin^3\frac{\Delta s_4}{R_0}}\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)} - \frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)^2}\right] \tag{4.121}$$

haline gelir. (4.119) denklemi için (4.36)'daki sonsuz çarpım açılım formülü kullanılır. Bu formülde $x = \frac{\Delta t}{R_0}$ ve $y = \frac{\Delta s_4}{R_0}$ alınırsa,

$$\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_4}{R_0} = 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{{\Delta s_4}^2}\right)\sin^2\frac{\Delta s_4}{2R_0} \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 - \Delta s_4)^2}\right) \tag{4.122}$$

sonucu bulunur. (4.122) denklemi, u'da yerine yazılır ve sırasıyla, $\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)}$ ve $\frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)^2}$ ifadeleri hesaplanır.

$$\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)} = -2R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2} \tag{4.123}$$

$$\frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)^2} = -2R_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^2}\right] \tag{4.124}$$

(4.123) ve (4.124) denklemleri (4.121)'deki iki nokta fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$D^{(6)}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta s_4}{R_0}} \left\{ -\cot\frac{\Delta s_4}{R_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}\right] \right.$$
$$\left. + R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^2}\right] \right\} \tag{4.125}$$

şeklinde olur [18].

$\Delta t, \Delta s_4 \to 0$ çakışma limitinde Green fonksiyonu ifadesindeki ıraksak terim, sadece $(k = 0)$ terimidir. (4.125) denkleminde sadece $(k = 0)$ teriminin ıraksak olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla bu terim, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensöründe ıraksaklıklara yol açacaktır. Ayrıca $(k = 0)$ terimi, çakışma limitinde sonsuz olan, sadece R_0 yarıçapına bağlı ve Minkowski ifadesini betimleyen tek terimdir. Bu yüzden geriye kalan terimler, enerji-momentum tensörüne sonlu miktarlarda katkıda bulunurlar. $\langle T_{\mu\nu} \rangle$'deki sonsuz olan terimlerin çıkarılması doğal bir yöntemdir ve $D^{(6)}(x,x')$'deki diğer ifadeleri kapsaması için Denk. (4.125)'deki $k = 0$ terimi çıkarılır. Bu işlemle renormalizasyon yapılmış olur. Denk. (4.125)'deki seride $k = 0$ terimini çıkararak $D^{(6)}_{ren}(x,x')$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu tanımlanır. Daha sonra yeniden normalize edilmiş $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ifadesi, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ifadesindeki $D^{(6)}(x,x')$'nün $D^{(6)}_{ren}(x,x')$ ile yer değiştirilmesi ile elde edilir.

Çakışma limitinde yani $(t' \to t)\, \Delta t \to 0\ ve\ \Delta s_4 \to 0$ iken, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu hesaplanır. Bunun için (4.125) denkleminden $k = 0$ terimi çıkarılır.

$$D_{ren}^{(6)}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left\{-\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}\right]\right.$$
$$\left. + R_0\left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^2}\right]\right\} \quad (4.126)$$

Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_4 \to 0)$ alınırsa

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(6)}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{\Delta s_4\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left\{\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\frac{1}{(2k\pi R_0)}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)}\right.\right.$$
$$\left.\left. + R_0\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^2}\right\}\right] \quad (4.127)$$

elde edilir. (4.127) denkleminin son terimlerine binom açılımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)} = \left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_4}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{{\Delta s_4}^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{{\Delta s_4}^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{{\Delta s_4}^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{{\Delta s_4}^5}{64\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \ \ldots\ldots\right] \quad (4.128)$$

$$\frac{R_0}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^2} = \left[\frac{1}{4\pi^2 R_0}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\Delta s_4}{4\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{3{\Delta s_4}^2}{16\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{{\Delta s_4}^3}{8\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right) + \frac{5{\Delta s_4}^4}{8\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right) - \ \ldots\right] \quad (4.129)$$

$$\cot\frac{\Delta s_4}{R_0} = \frac{R_0}{\Delta s_4} - \frac{\Delta s_4}{3R_0} - \frac{{\Delta s_4}^3}{45R_0^3} - \frac{2{\Delta s_4}^5}{945R_0^5} - \left(\frac{\Delta s_4}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right) \quad (4.130)$$

(4.128), (4129) ve (4.130) denklemleri, (4.127) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(6)}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3} \lim_{\Delta s_4 \to 0} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta s_4}{R_0}} \left\{ \left(\frac{R_0}{\Delta s_4} - \frac{\Delta s_4}{3R_0} - \frac{{\Delta s_4}^3}{45R_0^3} \right.\right.\right.$$
$$\left. - \frac{2{\Delta s_4}^5}{945R_0^5} - \ \ldots\ldots \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_4}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{{\Delta s_4}^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{{\Delta s_4}^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{{\Delta s_4}^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{{\Delta s_4}^5}{64\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \ \ldots\ldots \right)$$
$$+ \left(\frac{1}{4\pi^2 R_0}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\Delta s_4}{4\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{3{\Delta s_4}^2}{16\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right) - \frac{{\Delta s_4}^3}{8\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right) \right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{5{\Delta s_4}^4}{8\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right) - \ \ldots\ldots \right) \right\} \right] \quad . \tag{4.131}$$

elde edilir. (4.131) denklemi düzenlenirse;

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(6)}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3} \lim_{\Delta s_4 \to 0} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta s_4}{R_0}} \left\{ \frac{1}{2\pi \Delta s_4}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_4}{6\pi R_0^2}\left(\frac{1}{k}\right) \right.\right.$$
$$- \frac{{\Delta s_4}^3}{90\pi R_0^4}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{{\Delta s_4}^5}{945\pi R_0^6}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{{\Delta s_4}^2}{12\pi^2 R_0^3}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{{\Delta s_4}^4}{180\pi^2 R_0^5}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
$$+ \frac{{\Delta s_4}^6}{1890\pi^2 R_0^7}\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\Delta s_4}{8\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{{\Delta s_4}^3}{24\pi^3 R_0^4}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{{\Delta s_4}^5}{360\pi^3 R_0^6}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$- \frac{{\Delta s_4}^7}{3780\pi^3 R_0^8}\left(\frac{1}{k^3}\right) + \frac{{\Delta s_4}^2}{8\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{{\Delta s_4}^4}{48\pi^4 R_0^5}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{{\Delta s_4}^6}{720\pi^4 R_0^7}\left(\frac{1}{k^4}\right)$$
$$+ \frac{{\Delta s_4}^8}{7560\pi^4 R_0^9}\left(\frac{1}{k^4}\right) - \frac{3{\Delta s_4}^3}{32\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{{\Delta s_4}^5}{96\pi^5 R_0^6}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{{\Delta s_4}^7}{1440\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$- \frac{{\Delta s_4}^9}{15120\pi^5 R_0^{10}}\left(\frac{1}{k^5}\right) + \frac{39{\Delta s_4}^4}{64\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \frac{{\Delta s_4}^6}{192\pi^6 R_0^7}\left(\frac{1}{k^6}\right)$$
$$\left.\left. + \frac{{\Delta s_4}^8}{2880\pi^6 R_0^9}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \frac{{\Delta s_4}^{10}}{30240\pi^6 R_0^{11}}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \ \ldots\ldots \right\} \right] \tag{4.132}$$

olur ve (4.47) bağıntıları (4.132) denkleminde kullanılırsa, çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(6)}(x,x') = \frac{1}{16\pi^3 R_0^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi^4 k^4} + \frac{1}{3\pi^2 k^2} \right] \quad . \tag{4.133}$$

haline gelir.(4.126) denkleminin t'ye göre 2 kez türevi alınırsa

$$\nabla_0\nabla_0 D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\nabla_0\nabla_{0'} D^{(6)}_{ren}(x,x')$$
$$= \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\Bigg\{ 2\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}(2k\pi R_0 + \Delta s_4)$$
$$\cdot\left(\frac{1}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^2} + \frac{4\Delta t^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^3}\right)$$
$$+R_0\Bigg[-\frac{2}{[\Delta t^2 - (2n\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^2} + \frac{8\Delta t^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^3}$$
$$-8\left(\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^3} - \frac{6\Delta t^2(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_4)^2]^4}\right)\Bigg]\Bigg\} \tag{4.134}$$

elde edilir. Çakışma limiti $(\Delta t \to 0,\ \Delta s_4 \to 0)$ alınırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'} D^{(6)}_{ren}(x,x')$$
$$= \frac{1}{4\pi^3 R_0^3}\lim_{\Delta s_4\to 0}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}$$
$$\left\{\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\frac{1}{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^3} + \frac{3R_0}{(2k\pi R_0 + \Delta s_4)^4}\right\}\Bigg]$$
$$= \frac{1}{4\pi^3 R_0^3}\lim_{\Delta s_4\to 0}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}$$
$$\cdot\Bigg\{\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\frac{1}{(2k\pi R_0)^3}\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^3}$$
$$+\frac{3R_0}{(2k\pi R_0)^4}\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^4}\Bigg\}\Bigg] \tag{4.135}$$

elde edilir. (4.135) denkleminin son terimlerine için binom açılımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)^3\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^3}=\left[\frac{1}{8\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{3\Delta s_4}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{3{\Delta s_4}^2}{16\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{5{\Delta s_4}^3}{32\pi^6R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\ \dots\dots\right] \tag{4.136}$$

$$\frac{3R_0}{(2k\pi R_0)^4\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^4}=\left[\frac{3}{16\pi^4R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{3\Delta s_4}{8\pi^5R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{15{\Delta s_4}^2}{32\pi^6R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\ \dots\dots\right] \tag{4.137}$$

$$\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}=\frac{R_0}{\Delta s_4}-\frac{\Delta s_4}{3R_0}-\frac{{\Delta s_4}^3}{45R_0^3}-\frac{2{\Delta s_4}^5}{945R_0^5}+\left(\frac{\Delta s_4}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right) \tag{4.138}$$

(4.136), (4.137) ve (4.138) denklemleri, (4.135) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(6)}(x,x')=\frac{1}{4\pi^3R_0^3}\lim_{\Delta s_4\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\right.$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{R_0}{\Delta s_4}-\frac{\Delta s_4}{3R_0}-\frac{{\Delta s_4}^3}{45R_0^3}-\frac{2{\Delta s_4}^5}{945R_0^5}-\ \dots\dots\right)\left[\frac{1}{8\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3\Delta s_4}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{3{\Delta s_4}^2}{16\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{5{\Delta s_4}^3}{32\pi^6R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\ \dots\dots\right]$$
$$\left.\left.+\frac{3}{16\pi^4R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{3\Delta s_4}{8\pi^5R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{15{\Delta s_4}^2}{32\pi^6R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\ \dots\dots\right\}\right]. \tag{4.139}$$

olarak bulunur. (4.139) denklemi düzenlenirse;

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{4\pi^3 R_0^3}\lim_{\Delta s_4\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\left\{\frac{1}{8\pi^3 R_0^2\Delta s_4}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right.\right.$$
$$-\frac{\Delta s_4}{24\pi^3 R_0^4}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{{\Delta s_4}^3}{360\pi^3 R_0^6}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{{\Delta s_4}^5}{3780\pi^3 R_0^8}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$+\frac{{\Delta s_4}^2}{16\pi^4 R_0^5}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{{\Delta s_4}^4}{240\pi^4 R_0^7}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{{\Delta s_4}^6}{2520\pi^4 R_0^9}\left(\frac{1}{k^4}\right)$$
$$-\frac{3\Delta s_4}{16\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{{\Delta s_4}^3}{16\pi^5 R_0^6}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{{\Delta s_4}^5}{240\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$-\frac{{\Delta s_4}^7}{2520\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{5{\Delta s_4}^2}{16\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\frac{5{\Delta s_4}^4}{96\pi^6 R_0^7}\left(\frac{1}{k^6}\right)$$
$$\left.\left.+\frac{{\Delta s_4}^6}{288\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\frac{{\Delta s_4}^8}{3024\pi^6 R_0^{11}}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\ \ldots\ldots\right\}\right] \tag{4.140}$$

elde edilir. (4.47) bağıntıları, (4.140) denkleminde kullanılırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_0 D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_0\nabla_{0'} D^{(6)}_{ren}(x,x')$$
$$= \frac{1}{32\pi^3 R_0^6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi^6 k^6}+\frac{1}{\pi^4 k^4}\right] \tag{4.141}$$

haline gelir. Çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonunun kovaryant türevlerini hesaplanması için önce jeodezik mesafenin bulunması gerekir. S^5 yüzeyindeki jeodezik mesafe,

$$\Delta s_4 = R_0\arccos[\cos\chi\cos\chi' + \sin\chi\sin\chi'(\cos\theta_1\cos\theta_1'$$
$$+\sin\theta_1\sin\theta_1'(\cos\theta_2\cos\theta_2'+\sin\theta_2\sin\theta_2'(\cos\theta_3\cos\theta_3'$$
$$+\sin\theta_3\sin\theta_3'\cos(\phi-\phi')))\big)\big] \tag{4.142}$$

olarak kolayca bulunur. Çakışma limitinde jeodezik mesafenin kovaryant türevi alınırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\Delta s_4 = 0 \quad ; \quad \lim_{x'\to x}\nabla_{i'}\Delta s_4 = 0 \tag{4.143}$$

elde edilir. Burada i indisi $\chi, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ ve ϕ'yi ifade eder.$\nabla^{\nu'}\Delta s_4$ üzerinde $g^{\mu}_{\nu'}$ 'nün etkisinin incelenmesi ile $g^{\mu}_{\nu'}$'nün özellikleri kullanılacaktır. Bu, x' de jeodezikler için teğet bileşen olup , x ve x' arasındaki jeodezik mesafeye eşit uzunluğa sahiptir ve $x' \to x$ yönünde yönlendirilmiştir [7,13,14,16]. Jeodezik mesafenin kontravaryant türevi ile kovaryant türevi arasındaki ilişki

$$\nabla^{\mu}\Delta s_4 = -g^{\mu}_{\nu'}\nabla^{\nu'}\Delta s_4 \tag{4.144}$$

ile verilir. Teğet vektör paralele taşınırken, bu teğet olarak kalır ve aynı uzunluğu tutar. Yani $\nabla^{\nu'}\Delta s_4$ üzerindeki $g^{\mu}_{\nu'}$'nün etkisi, $-\nabla^{\mu}\Delta s_4$'ü vermelidir. Bu, x'de jeodezikler için teğettir ve $\nabla^{\nu'}\Delta s_4$ ile aynı uzunluğa sahiptir. $\nabla^{\mu}\Delta s_2$ 'deki eksi işareti, $x' \to x$ yönüne yönlendirilmiş olmasından geliyor [7,16]. Böylece jeodezik mesafe için kontravaryant türev ifadelerinden kovaryant türev ifadelerine geçiş,

$$\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\Delta s_4 = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Delta s_4 \tag{4.145}$$

ve

$$\nabla_{\mu'}\nabla^{\mu'}\Delta s_2 = -g^{\mu'\nu}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu}\Delta s_4 \tag{4.146}$$

ile olacaktır.

Çakışma limitinde $(\Delta t \to 0,\ \Delta s_4 \to 0)$ yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonun kovaryant türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') &= -\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_{j'} D^{(6)}_{ren}(x,x') \\ &= \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{x'\to x}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4 \\ &\cdot\frac{\partial}{\partial\Delta s_4}\Bigg\{-\frac{\cos\frac{\Delta s_4}{R_0}}{\sin^3\frac{\Delta s_4}{R_0}}\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_4)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}\right] \\ &+\frac{R_0}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\left[\frac{1}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2]^2}\right]\Bigg\}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.147}$$

elde edilir. (4.147) denklemi düzenlenirse,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{x'\to x}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4\csc^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right.$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{R_0}\left(1+3\cot^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_4)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}\right]\right.$$
$$-3\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\left[\frac{1}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2]^2}\right]$$
$$\left.\left.+2R_0\left[\frac{3(2k\pi R_0+\Delta s_4)}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2]^2}+\frac{4(2k\pi R_0+\Delta s_4)^3}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2]^3}\right]\right\}\right] \tag{4.148}$$

haline gelir. (4.148) denkleminin $\Delta t\to 0$ limiti alınırsa

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{x'\to x}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4\csc^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right.$$
$$\cdot\left\{-\frac{1}{R_0}\left(1+3\cot^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_4)}\right.$$
$$\left.\left.-3\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_4)^2}-2R_0\frac{1}{(2k\pi R_0+\Delta s_4)^3}\right\}\right] \tag{4.149}$$

elde edilir. (4.149) denklemi düzenlenirse;

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{x'\to x}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4\csc^2\frac{\Delta s_4}{R_0}$$

$$\cdot\Bigg\{-\frac{1}{R_0}\left(1+3\cot^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)\frac{1}{2k\pi R_0}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)}$$

$$-3\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^2}$$

$$-\frac{2R_0}{(2k\pi R_0)^3}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^3}\Bigg\}\Bigg] \quad . \qquad (4.150)$$

haline gelir. (4.150) denkleminde parantez içindeki terimlere binom açılımı uygulanır.

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)} = \left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_4}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\Delta s_4^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_4^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta s_4^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{\Delta s_4^5}{64\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\frac{\Delta s_4^6}{128\pi^7 R_0^7}\left(\frac{1}{k^7}\right)-\ \ldots\ldots\right] \quad (4.151)$$

$$\frac{1}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^2} = \left[\frac{1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_4}{4\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_4^2}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_4^3}{8\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{5\Delta s_4^4}{64\pi^6 R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\frac{3\Delta s_4^5}{64\pi^7 R_0^7}\left(\frac{1}{k^7}\right)+\ \ldots\ldots\right] \qquad (4.152)$$

$$\frac{2R_0}{(2k\pi R_0)^3}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_4}{2k\pi R_0}\right)^3} = \left[\frac{1}{4\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{3\Delta s_4}{8\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_4^2}{8\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{5\Delta s_4^3}{16\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{15\Delta s_4^4}{64\pi^7 R_0^6}\left(\frac{1}{k^7}\right)-\ \ldots\ldots\right] \qquad (4.153)$$

Ayrıca aşağıdaki bağıntılarda kullanırsa,

$$3\cot\frac{\Delta s_4}{R_0}=\left[\frac{3R_0}{\Delta s_4}-\frac{\Delta s_4}{R_0}-\frac{\Delta s_4^3}{15R_0^3}-\frac{2\Delta s_4^5}{315R_0^5}+\left(\frac{\Delta s_4}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\right] \tag{4.154}$$

$$\frac{1}{R_0}\left(1+3\cot^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\right)=\left[\frac{3R_0}{\Delta s_4^2}-\frac{1}{R_0}+\frac{\Delta s_4^2}{5R_0^3}+\frac{2\Delta s_4^4}{63R_0^5}+\left(\frac{\Delta s_4}{\mathrm{R}_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\right] \tag{4.155}$$

(4.151), (4.152), (4.153), (4.154) ve (4.155) denklemleri, (4.150) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(6)}(x,x')=-\frac{1}{8\pi^3R_0^3}\lim_{x'\to x}\Bigg[&\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4\csc^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\\&\cdot\Bigg\{\left(\frac{3R_0}{\Delta s_4^2}-\frac{1}{R_0}+\frac{\Delta s_4^2}{5R_0^3}+\frac{2\Delta s_4^4}{63R_0^5}+\ \dots\dots\right)\left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_4}{4\pi^2R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.\\&+\frac{\Delta s_4^2}{8\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_4^3}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_4^4}{32\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{\Delta s_4^5}{64\pi^6R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)\\&\left.+\frac{\Delta s_4^6}{128\pi^7R_0^7}\left(\frac{1}{k^7}\right)-\ \dots\dots\right]+\left(\frac{3R_0}{\Delta s_4}-\frac{\Delta s_4}{R_0}-\frac{\Delta s_4^3}{15R_0^3}\right.\\&-\frac{2\Delta s_4^5}{315R_0^5}+\ \dots\dots\Bigg)\left[\frac{1}{4\pi^2R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_4}{4\pi^3R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_4^2}{16\pi^4R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.\\&\left.-\frac{\Delta s_4^3}{8\pi^5R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{5\Delta s_4^4}{64\pi^6R_0^6}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\frac{3\Delta s_4^5}{64\pi^7R_0^7}\left(\frac{1}{k^7}\right)+\ \dots\dots\right]\\&+\left[\frac{1}{4\pi^3R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{3\Delta s_4}{8\pi^4R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_4^2}{8\pi^5R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{5\Delta s_4^3}{16\pi^6R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)\right.\\&\left.\left.+\frac{15\Delta s_4^4}{64\pi^7R_0^6}\left(\frac{1}{k^7}\right)-\ \dots\dots\right]\Bigg\}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.156}$$

elde edilir. (4.156) denklemi düzenlenirse,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{8\pi^3 R_0^3}\lim_{x'\to x}\Bigg[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\nabla_i\nabla_j\Delta s_4\csc^2\frac{\Delta s_4}{R_0}\Bigg[\frac{3}{2\pi\Delta s_4^2}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$-\frac{1}{2\pi R_0^2}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_4^2}{10\pi R_0^4}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_4^4}{63\pi R_0^6}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_4^3}{15\pi^2 R_0^5}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_4^5}{105\pi^2 R_0^7}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
$$-\frac{1}{8\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{\Delta s_4^2}{8\pi^3 R_0^4}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{\Delta s_4^4}{24\pi^3 R_0^6}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{\Delta s_4^6}{180\pi^3 R_0^8}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$-\frac{\Delta s_4^3}{8\pi^4 R_0^5}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_4^5}{40\pi^4 R_0^7}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_4^7}{315\pi^4 R_0^9}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{5\Delta s_4^2}{32\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$+\frac{3\Delta s_4^4}{32\pi^5 R_0^6}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{7\Delta s_4^6}{480\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\frac{\Delta s_4^8}{560\pi^5 R_0^{10}}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{\Delta s_4^3}{8\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right)$$
$$+\frac{3\Delta s_4^5}{32\pi^6 R_0^7}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\frac{\Delta s_4^7}{120\pi^6 R_0^9}\left(\frac{1}{k^6}\right)-\frac{\Delta s_4^9}{1008\pi^6 R_0^{11}}\left(\frac{1}{k^6}\right)+\frac{15\Delta s_4^4}{128\pi^7 R_0^6}\left(\frac{1}{k^7}\right)$$
$$+\frac{5\Delta s_4^6}{128\pi^7 R_0^8}\left(\frac{1}{k^7}\right)+\frac{3\Delta s_4^8}{640\pi^7 R_0^{10}}\left(\frac{1}{k^7}\right)+\frac{11\Delta s_4^{10}}{20160\pi^7 R_0^{12}}\left(\frac{1}{k^7}\right)$$
$$+\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\Bigg\}\Bigg] \qquad (4.157)$$

elde edilir. Daha sonra kovaryant türevler, (4.60) bağıntıları ile hesaplanır. Şimdi, kovaryant türevler arasındaki bağıntı şu şekildedir:

$$\nabla_\chi\nabla_\chi\Delta s_4 = -\nabla_\chi\nabla_{\chi'}\Delta s_4$$
$$= -R_0^2\left(-\frac{1}{\Delta s_4}+\frac{\Delta s_4}{3R_0^2}+\frac{\Delta s_4^3}{45R_0^4}+\frac{2\Delta s_4^5}{945R_0^6}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\right) \qquad (4.158)$$

$$\nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_1}\Delta s_4 = -\nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_1'}\Delta s_4$$
$$= -R_0^2\sin\chi\sin\chi'\cos\gamma_3\left(-\frac{1}{\Delta s_4}-\frac{\Delta s_4}{6R_0^2}-\frac{7\Delta s_4^3}{360R_0^4}-\frac{31\Delta s_4^5}{15120R_0^6}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right\}\right) \qquad (4.159)$$

$$\nabla_{\theta_2}\nabla_{\theta_2}\Delta s_4 = -\nabla_{\theta_2}\nabla_{\theta_2'}\Delta s_4$$

$$= -R_0^2 \sin\chi \sin\chi' \sin\theta_1 \sin\theta_1' \cos\gamma_2 \left(-\frac{1}{\Delta s_4} - \frac{\Delta s_4}{6R_0^2} - \frac{7\Delta s_4^3}{360R_0^4} - \frac{31\Delta s_4^5}{15120R_0^6} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \right) \qquad (4.160)$$

$$\nabla_{\theta_3}\nabla_{\theta_3}\Delta s_4 = -\nabla_{\theta_3}\nabla_{\theta_3'}\Delta s_4$$

$$= -R_0^2 \sin\chi \sin\chi' \sin\theta_1 \sin\theta_1' \sin\theta_2 \sin\theta_2' \cos\gamma_1 \left(-\frac{1}{\Delta s_4} - \frac{\Delta s_4}{6R_0^2} - \frac{7\Delta s_4^3}{360R_0^4} \right.$$

$$\left. - \frac{31\Delta s_4^5}{15120R_0^6} + \left\{ \frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \right) \qquad (4.161)$$

$$\nabla_{\phi}\nabla_{\phi}\Delta s_4 = -\nabla_{\phi}\nabla_{\phi'}\Delta s_4$$

$$= -R_0^2 \sin\chi \sin\chi' \sin\theta_1 \sin\theta_1' \sin\theta_2 \sin\theta_2' \sin\theta_3 \sin\theta_3' \cos(\phi - \phi')$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{\Delta s_4} - \frac{\Delta s_4}{6R_0^2} - \frac{7\Delta s_4^3}{360R_0^4} - \frac{31\Delta s_4^5}{15120R_0^6} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \right) \qquad (4.162)$$

$$\csc\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\right) = \frac{R_0}{\Delta s_4} + \frac{\Delta s_4}{6R_0} + \frac{7\Delta s_4^3}{360R_0^3} + \frac{31\Delta s_4^5}{15120R_0^5}$$

$$+ \left\{ \frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler} \right\} \qquad (4.163)$$

(4.158), (4.159), (4.160), (4.161), (4.162) ve (4.163) denklemleri, (4.157) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'} D^{(6)}_{ren}(x,x')$$

$$= -\frac{1}{8\pi^3 R_0^3} g_{ij} \lim_{\Delta s_4\to 0}\Bigg[\frac{\frac{\Delta s_4^2}{R_0^2}}{\sin^2\frac{\Delta s_4}{R_0}}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg)\Bigg[-\frac{3R_0^2}{2\pi\Delta s_4^5}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2\pi\Delta s_4^3}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$-\frac{1}{10\pi R_0^2\Delta s_4}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_4}{63\pi R_0^4}\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{15\pi^2 R_0^3}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{\Delta s_4^2}{105\pi^2 R_0^5}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
$$+\frac{1}{8\pi^3\Delta s_4^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{1}{8\pi^3 R_0^2\Delta s_4}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{\Delta s_4}{24\pi^3 R_0^4}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{\Delta s_4^3}{180\pi^3 R_0^6}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$+\frac{1}{8\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{\Delta s_4^2}{40\pi^4 R_0^5}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{\Delta s_4^4}{315\pi^4 R_0^7}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{5}{32\pi^5 R_0^2\Delta s_4}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$-\frac{3\Delta s_4}{32\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{7\Delta s_4^3}{480\pi^5 R_0^6}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \frac{\Delta s_4^5}{560\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right) + \frac{1}{8\pi^6 R_0^3}\left(\frac{1}{k^6}\right)$$
$$-\frac{3\Delta s_4^2}{32\pi^6 R_0^5}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \frac{\Delta s_4^4}{120\pi^6 R_0^7}\left(\frac{1}{k^6}\right) + \frac{\Delta s_4^6}{1008\pi^6 R_0^9}\left(\frac{1}{k^6}\right) - \frac{15\Delta s_4}{128\pi^7 R_0^4}\left(\frac{1}{k^7}\right)$$
$$-\frac{5\Delta s_4^3}{128\pi^7 R_0^6}\left(\frac{1}{k^7}\right) - \frac{3\Delta s_4^5}{640\pi^7 R_0^8}\left(\frac{1}{k^7}\right) - \frac{11\Delta s_4^7}{20160\pi^7 R_0^{10}}\left(\frac{1}{k^7}\right)$$
$$+\left(\frac{\Delta s_4}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\Bigg\}\Bigg] \qquad (4.164)$$

haline gelir. (4.47) bağıntıları, (4.164) denkleminde kullanılırsa,

$$\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_j D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'} D^{(6)}_{ren}(x,x')$$
$$= -\frac{1}{4\pi^3 R_0^6} g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi^6 k^6} + \frac{1}{8\pi^4 k^4} + \frac{1}{15\pi^2 k^2}\right] \qquad (4.165)$$

denklemi elde edilir.

Şimdi $n = 6$ için yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün $\langle T_0^0\rangle$ ve $\langle T_i^{\ j}\rangle$ kuantum boşluk beklenen değerleri hesaplanır. T_0^0 bileşeni için (4.25) denklemi kullanılırsa,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(6)}_{ren} = \frac{1}{5}\lim_{x'\to x}\left[3\nabla_0\nabla_{0'} + g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j - \nabla_i\nabla_{j'}\right) + \frac{8}{R_0^2}\right] D^{(6)}_{ren}(x,x') \qquad (4.166)$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x'\to x} D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{16\pi^3 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4k^4}+\frac{1}{3\pi^2k^2}\right] \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_0\nabla_{0'} D^{(6)}_{ren}(x,x') = -\frac{1}{32\pi^3 R_0^6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi^6k^6}+\frac{1}{\pi^4k^4}\right] \quad , \\
&\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_{j'} D^{(6)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{4\pi^3 R_0^6} g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi^6k^6}+\frac{1}{8\pi^4k^4}+\frac{1}{15\pi^2k^2}\right] \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.167)$$

(4.167) denklemleri, (4.166)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(6)}_{ren} = \frac{1}{5}\Bigg\{ & -3\frac{1}{32\pi^3 R_0^6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi^6k^6}+\frac{1}{\pi^4k^4}\right] \\
& -g^{ij}g_{ij}2\frac{1}{4\pi^3 R_0^6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi^6k^6}+\frac{1}{8\pi^4k^4}+\frac{1}{15\pi^2k^2}\right] \\
& -\frac{8}{R_0^2}\frac{1}{16\pi^3 R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4k^4}+\frac{1}{3\pi^2k^2}\right]\Bigg\} \quad .
\end{aligned} \qquad (4.168)$$

denklemi elde edilir. Burada $n = 6$ için $g^{ij}g_{ij} = 5$ dir. (4.168) denklemi düzenlenirse,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(6)}_{ren} = \frac{1}{160\pi^3 R_0^6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-25\frac{1}{\pi^6k^6}-15\frac{1}{\pi^4k^4}\right] \quad . \qquad (4.169)$$

haline gelir. Daha sonra (4.169) denkleminde Riemann-Zeta fonksiyonunun

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad (4.170)$$

sonuçları kullanılır.

Sonuç olarak, yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_0^0 bileşeni,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(6)}_{ren}\left(=\left(\rho_0^{(6)}\right)_{ren}\right) = -\frac{31}{60480\pi^3 R_0^6} \qquad (4.171)$$

olarak elde edilir [18]. Bu ifade aynı zamanda boşluk enerji yoğunluğunu verir. (4.27) denklemi (4.26) denkleminde kullanılırsa $T_i^{\ j}$ için,

$$\langle 0|T_i^{\ j}|0\rangle_{ren}^{(6)} = \frac{1}{5}\lim_{x'\to x}\left[5g^{ij'}\nabla_i\nabla_{j'} + \left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right) + \frac{4}{R_0^2}\right]D_{ren}^{(6)}(x,x') \tag{4.172}$$

elde edilir. (4.167) denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\langle 0|T_i^{\ j}|0\rangle_{ren}^{(6)} = \frac{1}{5}\Bigg[&\frac{5}{4\pi^3R_0^6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi^6k^6}+\frac{1}{8\pi^4k^4}+\frac{1}{15\pi^2k^2}\right]\\ &-g^{ij}g_{ij}\frac{2}{4\pi^3R_0^6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{8\pi^6k^6}+\frac{1}{8\pi^4k^4}+\frac{1}{15\pi^2k^2}\right]\\ &+\frac{2}{32\pi^3R_0^6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi^6k^6}+\frac{1}{\pi^4k^4}\right]+\frac{4}{R_0^2}\frac{1}{16\pi^3R_0^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^4k^4}+\frac{1}{3\pi^2k^2}\right]\Bigg]\ .\end{aligned} \tag{4.173}$$

haline gelir. Denk.(4.173) düzenlenirse,

$$\langle 0|T_i^{\ j}|0\rangle_{ren}^{(6)} = \frac{1}{160\pi^3R_0^6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{5}{\pi^6k^6}+5\frac{1}{\pi^4k^4}\right] \tag{4.174}$$

bulunur. (4.170) denklemi (4.174) denkleminde yerine yazılırsa sonuç olarak yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin $T_i^{\ j}$ bileşeni,

$$\langle 0|T_i^{\ j}|0\rangle_{ren}^{(6)} = \frac{31}{302400\pi^3R_0^6}\delta_i^{\ j} \tag{4.175}$$

olarak hesaplanır [18].

4.1.4. *n*=8, 10, 12 İçin Sonuçlar

Bu boyutlar için Green fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$n = 8$ için;

$$D^{(8)}(x,x') = \frac{1}{16\pi^4 R_0^5}\frac{1}{\sin^3\frac{\Delta s_6}{R_0}}\Bigg\{\left(-3\cot^2\frac{\Delta s_6}{R_0}-1\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_6)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2}\right]$$
$$+3R_0\cot\frac{\Delta s_6}{R_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2}+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2]^2}\right]$$
$$-R_0^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{6(2k\pi R_0+\Delta s_6)}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2]^2}+\frac{8(2k\pi R_0+\Delta s_6)^3}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_6)^2]^3}\right]\Bigg\} \tag{4.176}$$

$n = 10$ için;

$$D^{(10)}(x,x') = \frac{3}{32\pi^5 R_0^7}\frac{1}{\sin^4\frac{\Delta s_8}{R_0}}\Bigg\{\left(-5\cot^3\frac{\Delta s_8}{R_0}-3\cot\frac{\Delta s_8}{R_0}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_8)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2}\right]$$
$$+R_0\left(5\cot^2\frac{\Delta s_8}{R_0}+\frac{4}{3}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2}+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^2}\right]$$
$$-4R_0^2\cot\frac{\Delta s_8}{R_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{3(2k\pi R_0+\Delta s_8)}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^2}+\frac{4(2k\pi R_0+\Delta s_8)^3}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^3}\right]$$
$$+2R_0^3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^2}+\frac{8(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^3}$$
$$+\frac{8(2k\pi R_0+\Delta s_8)^4}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_8)^2]^4}\Bigg]\Bigg\} \tag{4.177}$$

$n = 12$ için;

$$D^{(12)}(x,x') = \frac{3}{16\pi^6 R_0^9}\frac{1}{\sin^5\frac{\Delta s_{10}}{R_0}}\left\{\left(-\frac{35}{4}\cot^4\frac{\Delta s_{10}}{R_0} - \frac{15}{2}\cot^2\frac{\Delta s_{10}}{R_0} - \frac{3}{4}\right)\right.$$
$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2}\right]$$

$$+R_0\left(\frac{35}{4}\cot^3\frac{\Delta s_{10}}{R_0} + \frac{55}{12}\cot\frac{\Delta s_{10}}{R_0}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^2}\right]$$

$$-R_0^2\left(\frac{15}{2}\cot^2\frac{\Delta s_{10}}{R_0} + \frac{5}{3}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{3(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^2}\right.$$
$$\left.+\frac{4(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^3}\right]$$

$$+5R_0^3\cot\frac{\Delta s_{10}}{R_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^2} + \frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^3}\right.$$
$$\left.+\frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^4}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^4}\right]$$

$$-2R_0^4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{5(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^3} + \frac{20(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^4}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{16(2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^5}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_{10})^2]^5}\right]\right\} \qquad (4.178)$$

Uzun hesaplamalardan sonra, $n = 8, 10, 12$ boyutları için çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu ve $\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}$, $\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}$ yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün bileşenlerinin kuantum boşluk beklenen değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir [18]:

$n = 8$ için;

$$\lim_{x' \to x} D^{(8)}_{ren}(x, x') = -\frac{1}{8\pi^4 R_0^6} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{15\pi^2 k^2} + \frac{1}{8\pi^4 k^4} + \frac{1}{8\pi^6 k^6} \right] \tag{4.179}$$

$$\lim_{x' \to x} \nabla_0 \nabla_0 D^{(8)}_{ren}(x, x') = -\frac{1}{8\pi^4 R_0^8} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{10\pi^4 k^4} + \frac{5}{8\pi^6 k^6} + \frac{3}{16\pi^8 k^8} \right] \tag{4.180}$$

$$\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_j D^{(8)}_{ren}(x, x') = \frac{1}{8\pi^4 R_0^8} g_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3}{35\pi^2 k^2} + \frac{7}{40\pi^4 k^4} + \frac{1}{4\pi^6 k^6} + \frac{3}{16\pi^8 k^8} \right] \tag{4.181}$$

$$\langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle^{(8)}_{ren} \left(= \left(\rho_0^{(8)} \right)_{ren} \right) = \frac{289}{1209600\pi^4 R_0^8} \tag{4.182}$$

$$\left\langle 0 \middle| T_i^j \middle| 0 \right\rangle^{(8)}_{ren} = -\frac{289}{8467200\pi^4 R_0^8} \delta_i^j \tag{4.183}$$

$n = 10$ için;

$$\lim_{x' \to x} D^{(10)}_{ren}(x, x') = \frac{3}{16\pi^5 R_0^8} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{35\pi^2 k^2} + \frac{7}{120\pi^4 k^4} + \frac{1}{12\pi^6 k^6} + \frac{1}{16\pi^8 k^8} \right] \tag{4.184}$$

$$\lim_{x' \to x} \nabla_0 \nabla_0 D^{(10)}_{ren}(x, x') = \frac{3}{16\pi^5 R_0^{10}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3}{70\pi^4 k^4} + \frac{7}{24\pi^6 k^6} + \frac{7}{8\pi^8 k^8} + \frac{9}{8\pi^{10} k^{10}} \right] \tag{4.185}$$

$$\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_j D^{(10)}_{ren}(x, x') = -\frac{1}{16\pi^5 R_0^{10}} g_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{16}{105\pi^2 k^2} + \frac{41}{126\pi^4 k^4} + \frac{13}{24\pi^6 k^6} + \frac{5}{8\pi^8 k^8} + + \frac{3}{8\pi^{10} k^{10}} \right] \tag{4.186}$$

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(10)}\left(=\left(\rho_0^{(10)}\right)_{ren}\right)=-\frac{317}{1900800\pi^5R_0^{10}} \tag{4.187}$$

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(10)}=\frac{317}{17107200\pi^5R_0^{10}}\delta_i^j \tag{4.188}$$

$n=12$ için;

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(12)}(x,x')=-\frac{1}{32\pi^6R_0^{10}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{16}{105\pi^2k^2}+\frac{41}{126\pi^4k^4}+\frac{13}{24\pi^6k^6}+\frac{5}{8\pi^8k^8}+\frac{3}{8\pi^{10}k^{10}}\right] \tag{4.189}$$

$$\lim_{x'\to x} \nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(12)}(x,x')=-\frac{1}{32\pi^6R_0^{12}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{8}{35\pi^4k^4}+\frac{205}{126\pi^6k^6}+\frac{91}{16\pi^8k^8}+\frac{45}{8\pi^{10}k^{10}}+\frac{165}{8\pi^{12}k^{12}}\right] \tag{4.190}$$

$$\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(12)}(x,x')=\frac{1}{32\pi^6R_0^{12}}g_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{80}{231\pi^2k^2}+\frac{479}{630\pi^4k^4}+\frac{695}{504\pi^6k^6}+\frac{31}{16\pi^8k^8}+\frac{15}{8\pi^{10}k^{10}}+\frac{15}{16\pi^{12}k^{12}}\right] \tag{4.191}$$

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(12)}\left(=\left(\rho_0^{(12)}\right)_{ren}\right)=\frac{6803477}{43589145600\pi^6R_0^{12}} \tag{4.192}$$

$$\langle 0|T_i^j|0\rangle_{ren}^{(12)}=-\frac{6803477}{479480601600\pi^6R_0^{12}}\delta_i^j \quad . \tag{4.193}$$

4.2. *n*=3, 5, 7, 9, 11 Tek Uzay-Zaman Boyutlarındaki Enerji Yoğunlukları

4.2.1. *n*=3 İçin Sonuçlar

Denk.(3.11) kullanılarak iki nokta fonksiyonu

$$D^{(3)}(x,x') = \frac{\alpha_3}{4\pi R_0}\frac{1}{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.194}$$

olarak elde edilir [18]. Burada $\alpha_3 = \frac{\tilde{\alpha}_3}{2^{1/2}}$ dir ve $\cos\frac{\Delta s_1}{R_0}$'da jeodezik mesafe arasındaki açıdır. (4.194) 'daki iki nokta fonksiyonu, sonsuz bir toplam olarak açılabilir. Bu nedenle,

$$u = \ln\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_1}{R_0}\right) \tag{4.195}$$

değişken tanımlaması yaparız. $\frac{\Delta s_1}{R_0}$ 'a göre bu denklemin iki kez türevi alınır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra iki nokta fonksiyonu

$$D^{(3)}(x,x') = \frac{1}{4\pi R_0}\frac{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)^{1/2}}{2^{1/2}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\Delta s_1}{R_0}}\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)}\right] \tag{4.196}$$

haline gelir. (4.194) denklemi için (4.36)'daki sonsuz çarpım açılım formülü kullanılır.

$$\cos\frac{\Delta t}{R_0}-\cos\frac{\Delta s_1}{R_0} = 2\left(1-\frac{\Delta t^2}{{\Delta s_1}^2}\right)\sin^2\frac{\Delta s_1}{2R_0}$$
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0+\Delta s_1)^2}\right)\left(1-\frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0-\Delta s_1)^2}\right) \tag{4.197}$$

(4.197) denklemi, u'da yerine yazılır ve sırasıyla, $u^{\frac{1}{2}}\ ve\ \frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)}$ ifadeleri hesaplanır:

$$u^{\frac{1}{2}} = \ln 2^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\Delta {s_1}^2 - \Delta t^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{1}{2R_0}\right) + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2 - \Delta t^2]^{\frac{1}{2}}}{(2k\pi R_0)} \tag{4198}$$

$$\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)} = -2R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_1)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2}\right] \tag{4.199}$$

Ayrıca sonsuz çarpımda şöyledir:

$$\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_1}{R_0}\right)^{1/2} = \frac{2^{1/2}\left(\Delta {s_1}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{2R_0} \exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right] . \tag{4.200}$$

$(4.198), (4.199)$ ve (4.200) denklemleri (4.196)'daki iki nokta fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$D^{(3)}(x, x') = \frac{1}{4\pi R_0} \exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right] \frac{\left(\Delta {s_1}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin\frac{\Delta s_1}{R_0}} \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_1)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2}\right]\right\} . \tag{4.201}$$

sonucu elde edilir. Çakışma limitinde $(\Delta t, \Delta s_1 \to 0)$ Green fonksiyonu ifadelerindeki ıraksak terim, sadece $k = 0$ terimidir ve bu sonuç aşağıda verilmiştir:

$$\lim_{x' \to x} D^{(3)}_{(k=0)}(x, x') = \lim_{\Delta s_1, \Delta t \to 0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{[\Delta s_1^2 - \Delta t^2]^{1/2}} . \tag{4.202}$$

Bu ifade; $(1 + 2)$ boyutlu Minkowski uzayzamanındaki Green fonksiyonu için özdeşliktir.

Çakışma limitinde yani $(t' \to t)\ \Delta t \to 0$ ve $\Delta s_1 \to 0$ iken, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu hesaplanır. Bunun için (4.201) denkleminden $k = 0$ terimi çıkarılır.

$$D_{ren}^{(3)}(x,x') = \frac{1}{4\pi R_0} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]$$
$$\frac{\left(\Delta {s_1}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin \frac{\Delta s_1}{R_0}} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_1)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_1)^2}\right] \qquad (4.203)$$

Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_1 \to 0)$ alınırsa

$$\lim_{x' \to x} D_{ren}^{(3)}(x,x') = \frac{1}{4\pi R_0} \lim_{\Delta s_1 \to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \frac{\Delta s_1}{\sin \frac{\Delta s_1}{R_0}} \frac{1}{(2k\pi R_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_1}{2k\pi R_0}\right)}\right] \qquad (4.204)$$

denklemi elde edilir. (4.204) denkleminin parantez içindeki terime binom açılımı uygulanırsa

$$\frac{1}{2k\pi R_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_1}{2k\pi R_0}\right)} = \left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{\Delta s_1^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{\Delta s_1^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\Delta s_1^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \ \ldots \ldots\right] \qquad (4.205)$$

(4.205) denklemi, (4.204) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lim_{x' \to x} D_{ren}^{(3)}(x,x') = \frac{1}{4\pi R_0} \lim_{\Delta s_1 \to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \frac{\Delta s_1}{\sin \frac{\Delta s_1}{R_0}}\left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_1}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\Delta s_1^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{\Delta s_1^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right) + \frac{\Delta s_1^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \ \ldots\right]\right] \qquad (4.206)$$

haline gelir. (4.47) bağıntıları kullanırsa

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \tag{4.207}$$

olarak elde edilir. (4.203) denklemini t'ye göre 2 kez türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(3)}(x,x') &= -\nabla_0\nabla_{0'} D_{ren}^{(3)}(x,x') \\ &= \nabla_0\nabla_0\left\{ \frac{1}{4\pi R_0} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0+\Delta s_1)^2-\Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]\right. \\ &\left.\frac{\left(\Delta {s_1}^2-\Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin\frac{\Delta s_1}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_1)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_1)^2}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.208}$$

haline gelir. Daha sonra çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_1 \to 0)$ alınır ve uzun hesaplamalar sonucunda

$$\lim_{x'\to x} \nabla_0\nabla_0 D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \tag{4.209}$$

olarak elde edilir. Yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonun kovaryant türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(3)}(x,x') &= -\nabla_i\nabla_{j'} D_{ren}^{(53)}(x,x') \\ &= \nabla_i\nabla_j\left\{ \frac{1}{4\pi R_0} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0+\Delta s_1)^2-\Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]\right. \\ &\left.\frac{\left(\Delta {s_1}^2-\Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin\frac{\Delta s_1}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_1)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_1)^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.210}$$

Benzer şekilde çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_1 \to 0)$ alınır ve uzun hesaplamalar sonucunda

$$\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_j D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \tag{4.211}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $n = 3$ için yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün $\langle T_0^0 \rangle^{(3)}$ ve $\langle T_i^j \rangle^{(3)}$ kuantum boşluk beklenen değerleri hesaplanır. T_0^0 bileşeni için (4.25) denklemi kullanılırsa,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(3)} = \frac{1}{16}\lim_{x'\to x}\left[12\nabla_0\nabla_{0'} + 2g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j - \nabla_i\nabla_{j'}\right) + \frac{1}{R_0^2}\right]D_{ren}^{(3)}(x,x') \qquad (4.212)$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \quad , \\ &\lim_{x'\to x} \nabla_0\nabla_{0'} D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \quad , \\ &\lim_{x'\to x} \nabla_i\nabla_{j'} D_{ren}^{(3)}(x,x') = 0 \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (4.213)$$

(4.213) denklemleri, (4.212)'da yerine yazılırsa sonuç olarak yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_0^0 bileşeni,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle_{ren}^{(3)} \left(= \left(\rho_0^{(3)}\right)_{ren}\right) = \quad 0 \qquad (4.214)$$

olarak elde edilir [11]. Bu ifade aynı zamanda boşluk enerji yoğunluğunu verir. (4.27) denklemi (4.26) denkleminde kullanılırsa T_i^j için,

$$\left\langle 0\middle|T_i^j\middle|0\right\rangle_{ren}^{(3)} = \frac{1}{8}\lim_{x'\to x}\left[8g^{ij'}\nabla_i\nabla_{j'} + \left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)\right]D_{ren}^{(3)}(x,x') \qquad (4.215)$$

elde edilir. (4.213) denklemleri yerine yazılırsa sonuç olarak yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_i^j bileşeni,

$$\left\langle 0\middle|T_i^j\middle|0\right\rangle_{ren}^{(3)} = \quad 0 \qquad (4.216)$$

olarak hesaplanır [11].

4.2.2. n=5 İçin Sonuçlar

Denk.(3.11) kullanılarak iki nokta fonksiyonu

$$D^{(5)}(x,x') = \frac{\alpha_5}{4\pi^3 R_0^3} \frac{1}{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.217}$$

olarak elde edilir [18]. Burada $\alpha_5 = \frac{\tilde{\alpha}_5}{2^{3/2}}$ dir ve $\cos\frac{\Delta s_3}{R_0}$'da jeodezik mesafe arasındaki açıdır. (4.217)'deki iki nokta fonksiyonu, sonsuz bir toplam olarak açılabilir. Bu nedenle,

$$u = \ln\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_3}{R_0}\right) \tag{4.218}$$

değişken tanımlaması yaparız. $\frac{\Delta s_3}{R_0}$'a göre bu denklemin iki kez türevi alınır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra iki nokta fonksiyonu

$$D^{(5)}(x,x') = \frac{1}{16\pi^2 R_0^3} \frac{\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^{1/2}}{2^{1/2}} \left[\frac{\cos\frac{\Delta s_3}{R_0}}{\sin^3\frac{\Delta s_3}{R_0}} \frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)} - \frac{1}{\sin^2\frac{\Delta s_3}{R_0}} \frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^2}\right] \tag{4.219}$$

haline gelir. (4.217) denklemi için (4.36)'daki sonsuz çarpım açılım formülü kullanılır.

$$\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_3}{R_0} = 2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{{\Delta s_3}^2}\right)\sin^2\frac{\Delta s_3}{2R_0} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta t^2}{(2k\pi R_0 - \Delta s_3)^2}\right) \tag{4.220}$$

(4.220) denklemi, u'da yerine yazılır ve sırasıyla, $u^{\frac{1}{2}}$, $\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)}$ ve $\frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^2}$ ifadeleri hesaplanır:

$$u^{\frac{1}{2}} = \ln 2^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\Delta s_3{}^2 - \Delta t^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{1}{2R_0}\right) + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2 - \Delta t^2]^{\frac{1}{2}}}{(2k\pi R_0)} \tag{4.221}$$

$$\frac{du}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)} = -2R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_3)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}\right] \tag{4.222}$$

$$\frac{d^2u}{d\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^2} = -2R_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2]^2}\right] \tag{4.223}$$

Ayrıca sonsuz çarpımda şöyledir:

$$\left(\cos\frac{\Delta t}{R_0} - \cos\frac{\Delta s_3}{R_0}\right)^{1/2} = \frac{2^{1/2}\left(\Delta s_3{}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{2R_0} \; exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right] \tag{4.224}$$

$(4.221), (4.222), (4.223)$ ve (4.224) denklemleri (4.219)'daki iki nokta fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$D^{(5)}(x, x') = \frac{1}{16\pi^2 R_0^3} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right] \frac{\left(\Delta s_3{}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin^2 \frac{\Delta s_3}{R_0}} \left\{ -\cot\frac{\Delta s_3}{R_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_3)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}\right] + R_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2]^2}\right] \right\} \tag{4.225}$$

sonucu elde edilir. Çakışma limitinde $(\Delta t, \Delta s_3 \to 0)$ Green fonksiyonu ifadesindeki ıraksak terim, sadece $k = 0$ terimidir ve bu sonuç aşağıda verilmiştir:

$$\lim_{x' \to x} D^{(5)}_{(k=0)}(x, x') = \lim_{\Delta s_3, \Delta t \to 0} \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{[\Delta s_3^2 - \Delta t^2]^{3/2}} \quad . \tag{4.226}$$

Bu ifade; $(1+4)$ boyutlu Minkowski uzayzamanındaki Green fonksiyonu için özdeşliktir.

Çakışma limitinde yani $(t' \to t)\ \Delta t \to 0$ ve $\Delta s_3 \to 0$ iken, yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu hesaplanır. Bunun için (4.225) denkleminden $k = 0$ terimi çıkarılır.

$$D^{(5)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{16\pi^2 R_0^3} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]$$
$$\frac{\left(\Delta {s_3}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin^2 \frac{\Delta s_3}{R_0}} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \left\{ -\cot \frac{\Delta s_3}{R_0} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_3)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}\right]\right.$$
$$\left. + R_0 \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2]^2}\right] \right\} \quad (4.227)$$

Çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_3 \to 0)$ alınırsa,

$$\lim_{x' \to x} D^{(5)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{16\pi^2 R_0^3} \lim_{\Delta s_3 \to 0} \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \frac{\Delta s_3}{\sin^2 \frac{\Delta s_3}{R_0}}\right.$$
$$\left. \cdot \left\{ \cot \frac{\Delta s_3}{R_0} \frac{1}{(2k\pi R_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_3}{2k\pi R_0}\right)} + \frac{R_0}{(2k\pi R_0)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_3}{2k\pi R_0}\right)^2} \right\} \right] \quad (4.228)$$

denklemi elde edilir. (4.228) denkleminin parantez içindeki terimlerine binom açılımı uygulanırsa

$$\frac{1}{2k\pi R_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta s_3}{2k\pi R_0}\right)} = \left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{\Delta s_3}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{\Delta s_3^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right) - \frac{\Delta s_3^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\Delta s_3^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right) - \ \ldots\ldots \right] \quad (4.229)$$

$$\frac{R_0}{(2k\pi R_0)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta s_3}{2k\pi R_0}\right)^2}=\left[\frac{1}{4\pi^2 R_0}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_3}{4\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_3^2}{16\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\Delta s_3^3}{8\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \ldots\ldots\right] \qquad (4.230)$$

Ayrıca aşağıdaki bağıntıda kullanılır:

$$\cot\frac{\Delta s_3}{R_0}=\frac{R_0}{\Delta s_3}-\frac{\Delta s_3}{3R_0}-\frac{\Delta s_3^3}{45R_0^3}-\frac{2\Delta s_3^5}{945R_0^5}$$
$$-\left(\frac{\Delta s_3}{R_0}\text{'ın pozitif kuvvetlerindeki terimler}\right)\quad . \qquad (4.231)$$

(4.229), (4.230) ve (4.231) denklemleri, (4.228) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lim_{x'\to x} D_{ren}^{(5)}(x,x')=\frac{1}{16\pi^2 R_0^3}\lim_{\Delta s_3\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{\Delta s_3}{\sin^2\frac{\Delta s_3}{R_0}}\right.$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{R_0}{\Delta s_3}-\frac{\Delta s_3}{3R_0}-\frac{\Delta s_3^3}{45R_0^3}-\frac{2\Delta s_3^5}{945R_0^5}-\ \ldots\right)\left[\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_3}{4\pi^2 R_0^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta s_3^2}{8\pi^3 R_0^3}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_3^3}{16\pi^4 R_0^4}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_3^4}{32\pi^5 R_0^5}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\ \ldots\right]+\left[\frac{1}{4\pi^2 R_0}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\Delta s_3}{4\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{3\Delta s_3^2}{16\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{\Delta s_3^3}{8\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \ldots\right]\right\}\right] \qquad (4.232)$$

olarak elde edilir ve (4.232) denklemi düzenlenirse;

$$\lim_{x'\to x} D^{(5)}_{ren}(x,x') = \frac{1}{16\pi^2 R_0^3}\lim_{\Delta s_3\to 0}\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{\Delta s_3}{\sin^2\frac{\Delta s_3}{R_0}}\left\{\frac{1}{2\pi\Delta s_3}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_3}{6\pi R_0^2}\left(\frac{1}{k}\right)\right.\right.$$
$$-\frac{\Delta s_3^3}{90\pi R_0^4}\left(\frac{1}{k}\right)-\frac{\Delta s_3^5}{945\pi R_0^5}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{\Delta s_3^2}{12\pi^2 R_0^3}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{\Delta s_3^4}{180\pi^2 R_0^5}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
$$+\frac{\Delta s_3^6}{1890\pi^2 R_0^7}\left(\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\Delta s_3}{8\pi^3 R_0^2}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_3^3}{24\pi^3 R_0^4}\left(\frac{1}{k^3}\right)-\frac{\Delta s_3^5}{360\pi^3 R_0^6}\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
$$+\frac{\Delta s_3^7}{3780\pi^3 R_0^8}\left(\frac{1}{k^3}\right)+\frac{\Delta s_3^2}{8\pi^4 R_0^3}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_3^4}{48\pi^4 R_0^5}\left(\frac{1}{k^4}\right)+\frac{\Delta s_3^6}{720\pi^4 R_0^7}\left(\frac{1}{k^4}\right)$$
$$+\frac{\Delta s_3^8}{7560\pi^4 R_0^9}\left(\frac{1}{k^4}\right)-\frac{3\Delta s_3^3}{32\pi^5 R_0^4}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{\Delta s_3^5}{96\pi^5 R_0^6}\left(\frac{1}{k^5}\right)-\frac{\Delta s_3^7}{1440\pi^5 R_0^8}\left(\frac{1}{k^5}\right)$$
$$\left.\left.-\frac{\Delta s_3^9}{15120\pi^5 R_0^{10}}\left(\frac{1}{k^5}\right)+\ \ldots\ldots\right\}\right] \qquad (4.233)$$

haline gelir. (4.47) bağıntıları kullanırsa

$$\lim_{x'\to x} D^{(5)}_{ren}(x,x') = 0 \qquad (4.234)$$

olarak elde edilir. (4.227) denkleminin t'ye göre 2 kez türevi alınırsa

$$\nabla_0\nabla_0 D^{(5)}_{ren}(x,x') = -\nabla_0\nabla_{0'} D^{(5)}_{ren}(x,x')$$
$$= \nabla_0\nabla_0\left\{\frac{1}{16\pi^2 R_0^3}exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0+\Delta s_3)^2-\Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]\right.$$
$$\frac{\left(\Delta {s_3}^2-\Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin^2\frac{\Delta s_3}{R_0}}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left\{-\cot\frac{\Delta s_3}{R_0}\left[\frac{(2k\pi R_0+\Delta s_3)}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_3)^2}\right]\right.$$
$$\left.\left.+R_0\left[\frac{1}{\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_3)^2}+\frac{2(2k\pi R_0+\Delta s_3)^2}{[\Delta t^2-(2k\pi R_0+\Delta s_3)^2]^2}\right]\right\} \qquad (4.235)$$

haline gelir. Daha sonra çakışma limiti $(\Delta t \to 0 \; ve \; \Delta s_3 \to 0)$ alınır ve uzun hesaplamalar sonucunda

$$\lim_{x' \to x} \nabla_0 \nabla_0 D^{(5)}_{ren}(x, x') = 0 \tag{4.236}$$

olarak elde edilir. Yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonun kovaryant türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j D^{(5)}_{ren}(x, x') &= -\nabla_i \nabla_{j'} D^{(5)}_{ren}(x, x') \\ &= \nabla_i \nabla_j \left\{ \frac{1}{16\pi^2 R_0^3} exp \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)} \right] \right. \\ &\quad \frac{\left(\Delta {s_3}^2 - \Delta t^2\right)^{1/2}}{\sin^2 \frac{\Delta s_3}{R_0}} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \left\{ -\cot \frac{\Delta s_3}{R_0} \left[\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_3)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \left. + R_0 \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_3)^2]^2} \right] \right\} \right.\end{aligned} \tag{4.237}$$

Benzer şekilde çakışma limiti $(\Delta t, \Delta s_3 \to 0)$ alınır ve uzun hesaplamalar sonucunda

$$\lim_{x' \to x} \nabla_i \nabla_j D^{(5)}_{ren}(x, x') = 0 \tag{4.238}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $n = 5$ için yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin $\langle T^0_0 \rangle^{(5)}$ ve $\langle T^j_i \rangle^{(5)}$ bileşenleri hesaplanır. T^0_0 bileşeni için (4.25) denklemi kullanılırsa,

$$\langle 0 | T^0_0 | 0 \rangle^{(5)}_{ren} = \frac{1}{32} \lim_{x' \to x} \left[20 \nabla_0 \nabla_{0'} + 6 g^{ij} \left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_i \nabla_{j'} \right) + \frac{27}{R_0^2} \right] D^{(5)}_{ren}(x, x') \tag{4.239}$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x'\to x} D^{(5)}_{ren}(x,x') = 0 \quad , \\ &\lim_{x'\to x} \nabla_0 \nabla_{0'} D^{(5)}_{ren}(x,x') = 0 \quad , \\ &\lim_{x'\to x} \nabla_i \nabla_{j'} D^{(5)}_{ren}(x,x') = 0 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{4.240}$$

(4.240) denklemleri, (4.239)'da yerine yazılırsa sonuç olarak yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin T_0^0 bileşeni,

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle^{(5)}_{ren} \left(= \left(\rho_0^{(5)}\right)_{ren}\right) = \quad 0 \tag{4.241}$$

olarak elde edilir [18]. Bu ifade aynı zamanda boşluk enerji yoğunluğunu verir. Şimdi (4.27) denklemi (4.26) denkleminde kullanılırsa $T_i^{\ j}$ için,

$$\left\langle 0\middle|T_i^{\ j}\middle|0\right\rangle^{(5)}_{ren} = \frac{1}{32}\lim_{x'\to x}\left[32 g^{ij'}\nabla_i\nabla_{j'} + 6\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right) + \frac{9}{R_0^2}\right] D^{(5)}_{ren}(x,x') \tag{4.242}$$

elde edilir. (4.240) denklemleri yerine yazılırsa sonuç olarak yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin $T_i^{\ j}$ bileşeni,

$$\left\langle 0\middle|T_i^{\ j}\middle|0\right\rangle^{(5)}_{ren} = \quad 0 \tag{4.243}$$

olarak hesaplanır [18].

4.2.3. *n*=7, 9, 11 İçin Sonuçlar

Bu boyutlar için Green fonksiyonunun hesaplama işlemi, önceki bölümlerde olduğu gibi işlemlerin sistematik bir şekilde takip edilmesi ile yapılmıştır.

$n = 7$ için;

$$D^{(7)}(x,x') = \frac{3}{128\pi^3 R_0^5} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]$$
$$\frac{(\Delta {s_5}^2 - \Delta t^2)^{\frac{1}{2}}}{\sin^3 \frac{\Delta s_5}{R_0}} \left\{ \left(-3\cot^2 \frac{\Delta s_5}{R_0} - 1\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_5)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2} \right.$$
$$+3R_0 \cot \frac{\Delta s_5}{R_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2]^2}\right]$$
$$\left. -R_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{6(2k\pi R_0 + \Delta s_5)}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2]^2} + \frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_5)^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_5)^2]^3}\right] \right\} \tag{4.244}$$

$n = 9$ için;

$$D^{(9)}(x,x') = \frac{15}{512\pi^4 R_0^7} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right) \ln \frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{(2k\pi R_0)}\right]$$
$$\frac{(\Delta {s_7}^2 - \Delta t^2)^{\frac{1}{2}}}{\sin^4 \frac{\Delta s_7}{R_0}} \left\{ \left(-5\cot^3 \frac{\Delta s_7}{R_0} - 3\cot \frac{\Delta s_7}{R_0}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_7)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2} \right.$$
$$+R_0 \left(5\cot^2 \frac{\Delta s_7}{R_0} + \frac{4}{3}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2} + \frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^2}\right]$$
$$-4R_0^2 \cot \frac{\Delta s_7}{R_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{3(2k\pi R_0 + \Delta s_7)}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^2} + \frac{4(2k\pi R_0 + \Delta s_7)^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^3}\right]$$
$$+2R_0^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^2} + \frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^3}\right.$$
$$\left. + \frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_7)^4}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_7)^2]^4}\right] \right\} \tag{4.245}$$

$n = 11$ için;

$$D^{(11)}(x,x') = \frac{105}{2^{11}\pi^5 R_0^9} exp\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2 - \Delta t^2]^{\frac{1}{2}}}{(2k\pi R_0)}\right]\frac{(\Delta {s_9}^2 - \Delta t^2)^{\frac{1}{2}}}{\sin^5\frac{\Delta s_9}{R_0}}$$

$$\left\{\left(-\frac{35}{4}\cot^4\frac{\Delta s_9}{R_0} - \frac{15}{2}\cot^2\frac{\Delta s_9}{R_0} - \frac{3}{4}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(2k\pi R_0 + \Delta s_9)}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2}\right.$$

$$+R_0\left(\frac{35}{4}\cot^3\frac{\Delta s_9}{R_0} + \frac{4}{3}\cot\frac{\Delta s_9}{R_0}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^2}\right]$$

$$-R_0^2\left(\frac{15}{2}\cot^2\frac{\Delta s_9}{R_0} + \frac{5}{3}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{3(2k\pi R_0 + \Delta s_9)}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{4(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^3}\right]$$

$$+5R_0^3\cot\frac{\Delta s_9}{R_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^2} + \frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^3}\right.$$

$$\left.+\frac{8(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^4}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^4}\right]$$

$$-2R_0^4\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{5(2k\pi R_0 + \Delta s_9)}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^3} + \frac{20(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^3}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^4}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{16(2k\pi R_0 + \Delta s_9)^5}{[\Delta t^2 - (2k\pi R_0 + \Delta s_9)^2]^5}\right]\right\} \qquad (4.246)$$

$\Delta t, \Delta s_5, \Delta s_7 \; ve \; \Delta s_9 \to 0$ çakışma limitinde Green fonksiyonu ifadelerindeki ıraksak terim, sadece $k = 0$ terimidir ve bu sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$\lim_{x'\to x} D^{(7)}_{(k=0)}(x,x') = \lim_{\Delta s_5,\Delta t\to 0} \frac{3}{16\pi^3}\frac{1}{[\Delta s_5^2-\Delta t^2]^{5/2}} \tag{4.247}$$

$$\lim_{x'\to x} D^{(9)}_{(k=0)}(x,x') = \lim_{\Delta s_7,\Delta t\to 0} \frac{15}{32\pi^4}\frac{1}{[\Delta s_7^2-\Delta t^2]^{7/2}} \tag{4.248}$$

$$\lim_{x'\to x} D^{(11)}_{(k=0)}(x,x') = \lim_{\Delta s_9,\Delta t\to 0} \frac{105}{60\pi^5}\frac{1}{[\Delta s_9^2-\Delta t^2]^{9/2}} \tag{4.249}$$

Bu ifadeler; $(1+6)$, $(1+8)$ ve $(1+10)$ boyutlu Minkowski uzayzamanındaki Green fonksiyonu için özdeşliktir.

Uzun hesaplamalardan sonra, $n=7,9,11$ boyutları için çakışma limitinde yeniden normalize edilmiş Green fonksiyonu ve $\langle 0|T^{\nu}_{\mu}|0\rangle_{ren}$ yeniden normalize edilmiş enerji-momentum tensörünün bileşenlerinin beklenen değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir [18]:

$$\lim_{x'\to x}\begin{cases} D^{(7)}_{ren}(x,x') = 0\,, \\ \nabla_0\nabla_{0'}D^{(7)}_{ren}(x,x') = -\nabla_0\nabla_0 D^{(7)}_{ren}(x,x') = 0\,, \\ \nabla_i\nabla_{j'}D^{(7)}_{ren}(x,x') = -\nabla_i\nabla_j D^{(7)}_{ren}(x,x') = 0 \quad , \end{cases} \tag{4.250}$$

$$\langle 0|T^{\nu}_{\mu}(x)|0\rangle^{(7)}_{ren} = 0\,. \tag{4.251}$$

Benzer şekilde şu sonuçlar elde edilir [18]:

$$\lim_{x'\to x}\begin{cases} D^{(9)}_{ren}(x,x') = 0\,, \\ \nabla_0\nabla_{0'}D^{(9)}_{ren}(x,x') = -\nabla_0\nabla_0 D^{(9)}_{ren}(x,x') = 0\,, \quad ve \\ \nabla_i\nabla_{j'}D^{(9)}_{ren}(x,x') = -\nabla_i\nabla_j D^{(9)}_{ren}(x,x') = 0 \quad , \end{cases} \tag{4.252}$$

$$\langle 0|T^{\nu}_{\mu}(x)|0\rangle^{(9)}_{ren} = 0\ , \tag{4.253}$$

$$\lim_{x'\to x}\begin{cases} D^{(11)}_{ren}(x,x') = 0\,, \\ \nabla_0\nabla_{0'}D^{(11)}_{ren}(x,x') = -\nabla_0\nabla_0 D^{(11)}_{ren}(x,x') = 0\,, \\ \nabla_i\nabla_{j'}D^{(11)}_{ren}(x,x') = -\nabla_i\nabla_j D^{(11)}_{ren}(x,x') = 0 \quad . \end{cases} \tag{4.254}$$

$$\langle 0|T^{\nu}_{\mu}(x)|0\rangle^{(11)}_{ren} = 0\ . \tag{4.255}$$

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, n-boyutlu Einstein evrenine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alan için dalga denkleminin çözülmesiyle elde edilen özfonksiyonlar kullanarak Green fonksiyonu inşa edildi. Daha sonra bulunan bu Green fonksiyonları ile n-boyutlu Einstein evrenine yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alan için yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunlukları hesaplandı. Gözönüne aldığımız evren yüksek boyutlu Einstein evrenidir. Tablo 5.1.'de $n = 2$ 'den $n = 12$ 'ye kadar olan uzay-zaman boyutunda kütlesiz konformal skaler alan için yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunluklarının sonuçları verilmiştir. Bu noktada, yerel özelliklerden hareketle bilgi taşıyan regularizasyon yöntemlerinden biri olan kovaryant nokta-bölme (the covariant point-splitting) regularizasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde başlıca sorun ilk etapta, kuantum boşluk enerji yoğunluğunun yeniden normalize edilmesi için fiziksel anlamlı sonlu miktarın, ıraksak olan ifadeden çıkarılması gerekmektedir. Bu yüzden, $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ enerji-momentum tensörünün kuantum boşluk beklenen değerinin yeniden normalize edilmesi işlemine yoğunlaşırız. Bu ifade n-boyutlu eğri geri plan geometrisi için ıraksaklıklar içerir ve bu ıraksak ifadelerden sonlu anlamlı miktarların nasıl çıkarılacağının tartışması yapıldı.

Zeta fonksiyonu regularizasyon yöntemi, mod toplama yöntemi ile yakından ilişkilidir. Bu yöntem kesilim fonksiyonundan bağımsızdır. Fakat, fiziksel motivasyon açısından sorunları vardır ve aynı zamanda sonsuzlukların fiziksel temsillerini açıkça görmemize için izin vermez.

Tablo 5.1. *n*-boyutlu Einstein evrenleri için yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerji yoğunlukları

n uzay-zaman boyutu	S^{n-1} yüzey boyutu	$\rho_0^{(n)}$ kuantum boşluk enerji yoğunluğu
n=2	S^1	$-\frac{1}{24\pi R_0^2}$
n=3	S^2	0
n=4	S^3	$\frac{1}{480\pi^2 R_0^4}$
n=5	S^4	0
n=6	S^5	$-\frac{31}{60480\pi^3 R_0^6}$
n=7	S^6	0
n=8	S^7	$\frac{289}{1209600\pi^4 R_0^8}$
n=9	S^8	0
n=10	S^9	$-\frac{317}{1900800\pi^5 R_0^{10}}$
n=11	S^{10}	0
n=12	S^{11}	$\frac{6803477}{43589145600\pi^6 R_0^{12}}$

Burada *n* uzay-zaman boyutudur.

Elde edilen sonuçların bir diğer ilginç noktası: boyutsal etkinin işareti ve belirli boyutlar arasındaki ilişkileri anlatmasıdır. Einstein evreni için tüm tek uzay zaman boyutları yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunun sıfır değeri verdiği gözlemlenmiştir. Çift uzay zaman boyutları için yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunun işareti "+" ve "-" olarak dalgalanmaktadır. Negatif yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunun çift uzay zaman boyutlarında (n = 2+4j, burada j=0,1,2,3,…) monoton bir şekilde artarken, pozitif yeniden normalize edilmiş boşluk enerji yoğunluğunun çift uzay zaman boyutlarında (n = 4+4j, burada j=0,1,2,3,…) monoton bir şekilde azaldığı gözlemlenmiştir. Elizalde, S^1 , S^2 , S^3 ve S^4 Riemann kürelerinde minimum konformal faktörü ile kütlesiz skaler alan için negatif boşluk enerjiyi elde etmiştir [12]. Minimum konformal faktörü ile kütlesiz skaler alan için

negatif boşluk enerji yoğunluğu monoton bir şekilde azalırken S^3 ve S^4 değerlerinin birbirine çok benzer olduğu gözlemlenmiştir 12]. Elizalde S^3 için Casimir enerjisinin kararlı olduğu sonucuna varmıştır. Bu çalışmada, kütlesiz konfomal skaler alan için *n*-boyutlu kapalı statik evrende içinde herhangi bir var olan Casimir enerjisinin kararlı olmadığı gözlemlenmiştir.

n-boyutlu Einstein evreni için Casimir enerjisinin işareti uzay zaman boyut ile değişmektedir. Sonuç olarak; bu çalışmada yüksek boyutlu Einstein evreninde Casimir etkisinin boyuta bağımlılığı gösterilmektedir. Ayrıca evrenin başlangıcında, Casimir enerjisi ile ilişkili olan kozmolojik entropi arasında bir sınır söz konusudur; bu durum Casimir etkisi ile kozmoloji arasında daha derin bir ilişki olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] H. B. G. Casimir, ***"On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates"***, *Proc.* K. Ned. Acad. Wet. **51**, 793 (1948).

[2] M. J. Spaarnay, ***"Measurements of Attractive Forces Between Flat Plates"***, *Physica* **24**, 751-764 (1958).

[3] S. K. Lamoreaux, ***"Demonstration of The Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range"***, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997).

[4] L. H. Ford, ***"Quantum Vacuum Energy in General Relativity"***, *Phys. Rev.* D **11**, 3370 (1975).

[5] L. H. Ford, ***"Quantum Vacuum Energy in a Closed Universe"***, *Phys. Rev.* D **14**, 3304 (1976).

[6] L. H. Ford, ***"Spectrum of the Casimir Effect"***, *Phys. Rev.* D **38**, 528 (1988).

[7] J. S. Dowker and R. Critchley, ***"Covariant Casimir Calculations"***, *J. Phys.* A **9**, 535 (1976).

[8] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbini, ***"Zeta Regularization Techniques with Aplications"*** (World Scientific, Singapore, 1994).

[9] S. Ş. Bayın and M. Özcan, ***"Casimir Effect in a 'Half Einstein Universe': An Exactly Solvable Case in Curved Background and with a Spherical Boundary"***, *Class. Quantum Grav.* **10** L115 (1993) ,

S. Ş. Bayın and M. Özcan, ***"Casimir Energy in a Curved Background With a Spherical Boundary: An Exactly Solvable Case"***, *Phys. Rev.* D **48** 2806 (1993).

[10] S. Ş. Bayın, J. P. Krisch and M. Özcan, ***"Casimir Energy of the Massless Scalar Field on S^1 by the Point-Splitting Method"***, *Turk. J. Phys.* **21** 632 (1997).

[11] S. Ş. Bayın and M. Özcan, ***"Casimir Energy of the Massless Conformal Scalar Field on S^2 by the Point-Splitting Method"***, *J. Math. Phys.* **38** 5240 (1997)

[12] S. Ş. Bayın, J. P. Krisch and M. Özcan, ***"The Casimir Energy of the Twisted String Loop: Uniform and Two Segment Loops"***, *J. Math. Phys.* **37** 3662 (1996).

[13] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, ***"Quantum Fields in Curved Space"*** (Cambridge University Press, Cambridge, England 1984).

[14] S. A. Fulling, ***"Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time"*** (Cambridge University Press, Cambridge, England 1989).

[15] B. S. DeWitt, ***"Quantum Field Theory in Curved Spacetime"***, *Phys. Rep.* **19** 295-357 (1975).

[16] S. M. Christensen, ***"Vacuum Expectation Value of the Stress Tensor in an Arbitrary Curved Background: The Covariant Point-Separation Method"***, *Phys. Rev.* D **14** 2490 (1976).

[17] M. Özcan, ***"Green's Function for a n-Dimensional Closed, Static Universe and with a Spherical Boundary"***, (arXiv:gr-qc/0106082v1) (Cornell University, New York, USA, 2001).

[18] M. Özcan, ***"Casimir Energy Density for Spherical Universes in n-Dimensional Spacetime"***, *Class. Quantum Grav.* **23** 5531-5546 (2006).

[19] G. Arfken, ***"Mathematical Methods for Physicists"*** (Academic Press, Second Edition).

[20] S. S. Bayin, ***"Mathematical Methods in Science and Engineering"*** (Wiley, 2006).

[21] I. S. Gradshteyn and I. M. Rhyzhik, ***"Table of Integrals, Series and Products"*** (Academic Press, Fifth Edition 1994, New York).

[22] G. Kennedy, R. Critchley and J. S. Dowker, ***"Finite Temperature Field Theory with Boundaries: Stress Tensor and Surface Action Renormalisation"***, *Ann. Phys.* (NY) **125**, 346-400 (1980).

EK A

A.1. S^1 (Uzayzaman Boyutu n=2) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu uzay için küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\phi \\ x_2 &= R_0 \cos\phi \end{aligned}\right\} \qquad (A.1)$$

burada $\phi \in [0,2\pi]$ dir. Böylece statik, kapalı 2-boyutlu (S^1 yüzey boyutlu) bir uzay-zamanı için metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2 d\phi^2 \qquad (A.2)$$

şeklindedir. Bu eğri geri plan geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı

$$\square\Phi(x) + \xi(2)R\Phi(x) = 0 \qquad (A.3)$$

alan denklemini sağlar. Bu uzay için $\xi(2)$ konformal faktör ve R Ricci skaleri şu şekildedir:

$$\xi(2) = 0 \quad , \quad R = 0 \quad . \qquad (A.4)$$

Bu boyut için D'Alembert işlemcisi,

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \qquad (A.5)$$

denklemi ile verilir. Bu uzay için metrik tensör ifadeleri

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_0^2 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

$$g = det g_{\mu\nu} = R_0^2 \tag{A.7}$$

$$g^{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{R_0^2} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

şeklindedir. $(A.4)$ ve $(A.5)$ denklemleri, $(A.3)$'deki alan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right\}\Phi(x) = 0 \tag{A.9}$$

denklemi elde edilir. $(A.9)$ denklemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülür. Bu nedenle çözümün,

$$\Phi(x) = \Phi(t, \phi) = T(t)\Phi(\phi) \tag{A.10}$$

şeklinde olduğu varsayılır ve bu çözüm, $(A.9)$ denkleminde yerine yazılır. Burada gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right] - \left[\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\Phi(\phi)\right] = 0 \tag{A.11}$$

denklemi elde edilir. t ve ϕ bağımsız değişkenler olduklarından, $T(t)$ ve $\Phi(\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = -\omega^2 \tag{A.12}$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi(\phi) = -k_{m,n}^2 \tag{A.13}$$

olarak bulunur. Burada ω ve $k_{m,n}^2$, ayırma sabitleridir. Fiziksel olarak, ω frekansa karşı gelir. $(A.12)$ denkleminin çözümü kolayca,

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \tag{A.14}$$

olarak bulunur. $(A.13)$ denkleminin çözümü

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(n\phi) \quad , \quad n = 1,2,3 \dots \\ \Phi_m(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(m\phi) \quad , \quad m = 1,2,3, \dots \end{aligned}\right\} \tag{A.15}$$

olarak elde edilir. Burada $k_n = n$ ve $k_m = m$'dir. Şimdi ω'yı bulalım. $(A.11)$ denklemindeki ayırma parametreleri kullanılırsa ω için,

$$-\omega^2 + \frac{k_{m,n}^2}{R_0^2} = 0 \tag{A.16}$$

denklemi bulunur. $k_{m,n}^2$'nin yukarıdaki tanımlamalarını kullanırsak ω 'yı

$$\left.\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n}{R_0} \quad , \quad n = 1,2,3, \dots \\ \omega_m &= \frac{m}{R_0} \quad , \quad m = 1,2,3, \dots \end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

olarak elde ederiz. Böylece $n = 2$ için mod çözümü;

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_n(t,\phi) = c_{02}e^{-i\omega_n t}\cos(n\phi) \\ &\text{ve} \\ &\Phi_m(t,\phi) = c_{02}e^{-i\omega_m t}\sin(m\phi) \end{aligned}\right\} \tag{A.18}$$

olur. Burada c_{02}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti (2.32)'deki skaler çarpım bağıntısı kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} |c_{02}| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \\ |c_{02}| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \end{aligned}\right\} \qquad (A.19)$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, $n = 2$ için mod çözümü;

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_n(t,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-i\omega_n t}\cos(n\phi) \;\;,\;\; \omega_n = \frac{n}{R_0} \;\;,\;\; n = 1,2,3,\ldots \\ &\text{ve} \\ &\Phi_m(t,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-i\omega_m t}\sin(m\phi) \;\;,\;\; \omega_m = \frac{m}{R_0} \;\;,\;\; m = 1,2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (A.20)$$

olarak elde edilir.

A.2. S^2 (Uzayzaman Boyutu n=3) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu uzay için küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\theta_1 \cos\phi \\ x_2 &= R_0 \sin\theta_1 \sin\phi \\ x_3 &= R_0 \cos\theta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (A.21)$$

burada $\theta_1 \in [0,\pi]$ ve $\phi \in [0,2\pi]$ dir. Böylece statik, kapalı 3-boyutlu (S^2 yüzey boyutlu) bir uzay-zamanı için metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2[d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\, d\phi^2] \qquad (A.22)$$

şeklindedir. Bu eğri geri plan geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı

$$\Box\Phi(x) + \xi(3)R\Phi(x) = 0 \qquad (A.23)$$

alan denklemini sağlar. Bu uzay için $\xi(3)$ konformal faktör ve R Ricci skaleri şu şekildedir:

$$\xi(3) = \frac{1}{8} \quad , \quad R = \frac{2}{R_0^2} \quad . \qquad (A.24)$$

Bu boyut için D'Alembert işlemcisi,

$$\begin{aligned} \Box &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1,2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \frac{1}{R_0^2\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \qquad (A.25)$$

denklemi ile verilir. Bu uzay için metrik tensör ifadeleri

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -R_0^2 \sin^2\theta_1 \end{bmatrix} \tag{A.26}$$

$$g = det g_{\mu\nu} = R_0^4 \sin^2\theta_1 \tag{A.27}$$

$$g^{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{R_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{R_0^2 \sin^2\theta_1} \end{bmatrix} \tag{A.28}$$

şeklindedir. $(A.24)$ ve $(A.25)$ denklemleri, $(A.23)$'deki alan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2 \sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \frac{1}{R_0^2 \sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{4R_0^2}\right\}\Phi(x) = 0 \tag{A.29}$$

denklemi elde edilir. $(A.29)$ denklemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülür. Bu nedenle çözümün,

$$\Phi(x) = \Phi(t, \theta_1, \phi) = T(t)Y(\theta_1, \phi) \tag{A.30}$$

şeklinde olduğu varsayılır ve bu çözüm, $(A.9)$ denkleminde yerine yazılır. Burada gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right] - \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}Y(\theta_1,\phi)\right) + \frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_1,\phi)\right]$$
$$+\frac{1}{4R_0^2} = 0 \tag{A.31}$$

denklemi elde edilir. t, θ_1 ve ϕ bağımsız değişkenler olduklarından, $T(t)$ ve $Y(\theta_1, \phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = -\omega^2 \tag{A.32}$$

$$\frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}Y(\theta_1,\phi)\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_1,\phi)\right] = \lambda \tag{A.33}$$

olarak bulunur. Burada ω ve λ, ayırma sabitleridir. Fiziksel olarak, ω frekansa karşı gelir. $(A.32)$ denkleminin çözümü kolayca,

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \tag{A.34}$$

olarak bulunur. $(A.33)$ denklemi ise çözümünü iyi bildiğimiz küresel harmonik fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemden başka bir şey değildir ve dolayısıyla λ ayırma sabiti,

$$\lambda = -l(l+1)\,, \qquad l = 0,1,2,3,\ldots \tag{A.35}$$

alınarak $(A.33)$ denkleminin çözümü,

$$Y(\theta_1,\phi) = Y_{lm}(\theta_1,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta_1)e^{im\phi} \tag{A.36}$$

olarak elde edilir. Şimdi ω'yı bulalım. $(A.31)$ denklemindeki ayırma parametreleri kullanılırsa ω için,

$$-\omega^2 + \frac{1}{4R_0^2} - \frac{\lambda}{R_0^2} = 0 \tag{A.37}$$

denklemi bulunur. Burada $(A.35)$ denklemini $(A.37)$ denkleminde yerine yerleştirilirse ω'yı,

$$\omega_l = \frac{1}{R_0}\left(l + \frac{1}{2}\right) \;\; ; \quad l = 0,1,2,3,\ldots \tag{A.38}$$

olarak elde ederiz. Böylece $n = 3$ için mod çözümü;

$$\Phi_\lambda(x) = T(t)Y(\theta_1, \phi) = c_{03}e^{-i\omega_l t}Y_{lm}(\theta_1, \phi) \tag{A.39}$$

olur. Denklem (A. 39)'da

$$\left.\begin{array}{l} \omega_l = \dfrac{1}{R_0}\left(l + \dfrac{1}{2}\right) \\ N_2 \equiv l = 0,1,2,3,\ldots \\ m = -l, -l+1, \ldots, 0, 1, \ldots, l \end{array}\right\} \tag{A.40}$$

ve c_{03}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti (2.32)'deki skaler çarpım bağıntısı kullanılarak

$$|c_{03}| = \frac{1}{\sqrt{(2l+1)R_0}} \tag{A.41}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, $n = 3$ için mod çözümü;

$$\Phi_3\,(x) = \frac{1}{\sqrt{(2l+1)R_0}}Y_{lm}(\theta_1, \phi)e^{-i\omega_l t} \tag{A.42}$$

olarak elde edilir.

A.3. S^3(Uzayzaman Boyutu n=4) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu uzay için küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \cos\phi \\ x_2 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\phi \\ x_3 &= R_0 \sin\chi \cos\theta_1 \\ x_4 &= R_0 \cos\chi \end{aligned}\right\} \qquad (A.43)$$

burada $\chi \in [0,2\pi]$, $\theta_1 \in [0,\pi]$ ve $\phi \in [0,2\pi]$ dir. Böylece statik, kapalı 4-boyutlu (S^3 yüzey boyutlu) bir uzay-zamanı için metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta_1^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1\, d\phi^2] \qquad (A.44)$$

şeklindedir. Bu eğri geri plan geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı

$$\square\Phi(x) + \xi(4)R\Phi(x) = 0 \qquad (A.45)$$

alan denklemini sağlar. Bu uzay için $\xi(4)$ konformal faktör ve R Ricci skaleri şu şekildedir:

$$\xi(4) = \frac{1}{6} \quad , \quad R = \frac{6}{R_0^2} \quad . \qquad (A.46)$$

Bu boyut için D'Alembert işlemcisi,

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) \\ &\quad - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \qquad (A.47)$$

denklemi ile verilir. Bu uzay için metrik tensör ifadeleri

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_0^2 \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \end{bmatrix} \tag{A.48}$$

$$g = det g_{\mu\nu} = -R_0^6 \sin^4\chi \sin^2\theta_1 \tag{A.49}$$

$$g^{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1} \end{bmatrix} \tag{A.50}$$

şeklindedir. $(A.46)$ ve $(A.47)$ denklemleri, $(A.45)$'deki alan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{R_0^2}\right\}\Phi(x) = 0 \tag{A.51}$$

denklemi elde edilir. $(A.51)$ denklemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülür. Bu nedenle çözümün,

$$\Phi(x) = \Phi(t, \chi, \theta_1, \phi) = T(t)X(\chi)Y(\theta_1, \phi) \tag{A.52}$$

şeklinde olduğu varsayılır ve bu çözüm, $(A.52)$ denkleminde yerine yazılır. Burada gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right] - \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{X(\chi)}\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right) - 1\right]$$
$$- \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi}\left[\frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}Y(\theta_1,\phi)\right) + \frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_1,\phi)\right] = 0 \tag{A.53}$$

denklemi elde edilir. t, χ, θ_1 ve ϕ bağımsız değişkenler olduklarından, $T(t), X(\chi)$ ve $Y(\theta_1, \phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = -\omega^2 \tag{A.54}$$

$$\frac{1}{X(\chi)}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial \chi}X(\chi)\right) + \left(\omega^2 - \frac{1}{R_0^2}\right)R_0^2\sin^2\chi = -\lambda \tag{A.55}$$

$$\frac{1}{Y(\theta_1,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}Y(\theta_1,\phi)\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_1,\phi)\right] = \lambda \tag{A.56}$$

olarak bulunur. Burada ω ve λ, ayırma sabitleridir. Fiziksel olarak, ω frekansa karşı gelir. $(\mathrm{A.54})$ denkleminin çözümü kolayca,

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \tag{A.57}$$

olarak bulunur. $(\mathrm{A.56})$ denklemi ise çözümünü iyi bildiğimiz küresel harmonik fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemden başka bir şey değildir ve dolayısıyla λ ayırma sabiti,

$$\lambda = -l(l+1)\,, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.58}$$

alınarak $(\mathrm{A.56})$ denkleminin çözümü,

$$Y(\theta_1,\phi) = Y_{lm}(\theta_1,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta_1)e^{im\phi} \tag{A.59}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $X(\chi)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem şöyle olur:

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+[\,(\omega^2R_0^2-1)\sin^2\chi-l(l+1)]X(\chi)=0 \qquad (A.60)$$

$n=4$ için $X(\chi)$'in sağladığı diferansiyel denklem:

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+[(N^2-1)\sin^2\chi-N_2(N_2+1)]X(\chi)=0 \qquad (A.61)$$

$(A.60)$ ve $(A.61)$ diferansiyel denklemleri karşılaştırılırsa,

$$\omega=\frac{N}{R_0} \quad , \quad N_2=l \qquad (A.62)$$

sonucu bulunur. Bulunun bu sonuçlar $(A.60)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\sin^2\chi\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}X(\chi)+2\sin\chi\cos\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)+[(N^2-1)\sin^2\chi+N_2(N_2+1)]X(\chi)=0 \qquad (A.63)$$

elde edilir. Burada $x=\cos\chi$ dönüşümü yapılırsa türevler aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial}{\partial\chi}=-\sin\chi\frac{\partial}{\partial x} \qquad , \qquad \frac{\partial^2}{\partial\chi^2}=-\cos\chi\frac{\partial}{\partial x}+\sin^2\chi\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad . \qquad (A.64)$$

Türev ifadeleri, $(A.63)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)-3x\frac{\partial}{\partial x}X(x)+\left[(N^2-1)+\frac{N_2(N_2+1)}{(1-x^2)}\right]X(x)=0 \qquad (A.65)$$

elde edilir. $(A.65)$ diferansiyel denklemin son teriminin paydasındaki $(1-x^2)$ teriminden dolayı, $x=\pm1$ noktalarında iki tane düzgün tekil nokta vardır. Asimtotik

durumlardaki çözümler, sonlu çözüme nasıl bir katkı sağlayacak? Bunun için $y = 1 - x$ ve $y = 1 + x$ dönüşümleri yapılarak uç durumlardaki çözümler bulunur.

$y = 1 - x$ dönüşümü yapılırsa $(x \to 1,\ y \to 0,\ X(x) \to X(y)\ ;\ x = 1 - y)$ türevler aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d}{dx} = -\frac{d}{dy} \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dy^2} \quad . \tag{A.66}$$

Türev ifadeleri, $(\text{A.}65)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$2y^2\left(1 - \frac{y}{2}\right)\frac{d^2}{dy^2}X(y) + 3y(1-y)\frac{d}{dy}\,X(y) + \left[(N^2-1)y - \frac{N_2(N_2+1)}{2\left(1-\frac{y}{2}\right)}\right]X(y) = 0 \tag{A.67}$$

elde edilir. Şimdi, $y \to 0$'da $(\text{A.}67)$ denklemine katkı sağlayan baskın terimler yeniden düzenlenirse,

$$2y^2\frac{d^2}{dy^2}X(y) + 3y\frac{d}{dy}\,X(y) - \frac{N_2(N_2+1)}{2}X(y) = 0 \tag{A.68}$$

denklemi bulunur. Burada $t = \ln y$ dönüşümü yapılırsa türevler aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{y}\frac{d}{dt} \quad , \quad \frac{d^2}{dy^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{y^2}\frac{d^2}{dt^2} \quad . \tag{A.69}$$

Türev ifadeleri, $(\text{A.}68)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$X(t) = Ae^{\frac{N_2}{2}t} + Be^{-\frac{(N_2+1)}{2}t} \tag{A.70}$$

$t = \ln y$ idi.

$$X(y) = Ay^{\frac{N_2}{2}} + B\frac{1}{y^{\frac{(N_2+1)}{2}}} \qquad (A.71)$$

Burada $B = 0$ alınır. Çünkü $y \to 0$ iken, sonlu çözüm olmalıdır.

$$X(y) = Ay^{\frac{N_2}{2}} \qquad (A.72)$$

$y = 1 - x$ idi.

$$X(x) = A(1-x)^{\frac{N_2}{2}} \;\; ; \;\; N_2 = 0,1,2,3,\ldots \quad . \qquad (A.73)$$

Benzer hesaplamalar, $y = 1 + x$ dönüşümü içinde yapılırsa ($x \to -1, \quad y \to 0,$ $X(x) \to X(y)$; $\quad x = y - 1$) türevler aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dy^2} \quad . \qquad (A.74)$$

Türev ifadeleri, $(A.65)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$2y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)\frac{d^2}{dy^2}X(y) + 3y(1-y)\frac{d}{dy}X(y) + \left[(N^2-1)y - \frac{N_2(N_2+1)}{2\left(1-\frac{y}{2}\right)}\right]X(y) = 0\,. \qquad (A.75)$$

elde edilir. Şimdi, $y \to 0$'da $(A.75)$ denklemine katkı sağlayan baskın terimler yeniden düzenlenirse,

$$2y^2\frac{d^2}{dy^2}X(y) + 3y\frac{d}{dy}X(y) - \frac{N_2(N_2+1)}{2}X(y) = 0 \quad . \qquad (A.76)$$

denklemi bulunur. Burada $t = \ln y$ dönüşümü yapılır ve türevler, $(A.69)$ denklemindeki gibi olur. $(A.69)$'deki türev ifadeleri, $(A.76)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$X(t) = Ae^{\frac{N_2}{2}t} + Be^{-\frac{(N_2+1)}{2}t} \qquad (A.77)$$

$t = \ln y$ idi.

$$X(y) = Ay^{\frac{N_2}{2}} + B\frac{1}{y^{\frac{(N_2+1)}{2}}} \qquad (A.78)$$

Burada $B = 0$ alınır. Çünkü $y \to 0$ iken, sonlu çözüm olmalıdır.

$$X(y) = Ay^{\frac{N_2}{2}} \qquad (A.79)$$

$y = 1 + x$ idi.

$$X(x) = A(1+x)^{\frac{N_2}{2}} \;\; ; \;\; N_2 = 0,1,2,3,\ldots \qquad . \qquad (A.80)$$

Dolayısıyla uç durumlarda hesaplanan çözüm şöyle olacaktır:

$$X(x) \sim (1-x^2)^{\frac{N_2}{2}}\Theta(x) \quad . \qquad (A.81)$$

Bulunan $(A.81)$ çözümü, $(A.65)$ diferansiyel denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) - (2N_2+3)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) + [(N^2-1) - N_2(N_2+2)]\Theta(x) = 0 \;\; . \qquad (A.82)$$

$(A.82)$ diferansiyel denklemi, Frobenius yöntemi ile çözülür. Bu amaçla,

$$\Theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (A.83)$$

gibi bir kuvvet serisi ile $\Theta(x)$ fonksiyonu olarak ifade edilir. $(A.83)$ denklemi, $(A.82)$ denkleminde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha(\alpha-1)a_0x^{\alpha-2}+\alpha(\alpha+1)a_1x^{\alpha-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[\,(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)a_{k+2}$$
$$+\{\,(N^2-1)-N_2(N_2+2)-(k+\alpha)(k+\alpha-1)-(2N_2+3)(k+\alpha)\}a_k]x^{k+\alpha}=0\,. \qquad (A.84)$$

denklemini elde ederiz. Burada x'in tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki bağıntılar bulunur:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(\alpha-1)=0 \;\; ve \;\; a_0\neq 0 \;\; , \;\; \alpha(\alpha+1)=0 \;\; ;\\ &(k+\alpha+2)(k+\alpha+1)a_{k+2}+\{\,(N^2-1)-N_2(N_2+2)-(k+\alpha)(k+\alpha-1)\\ &\qquad\qquad -(2N_2+3)(k+\alpha)\,\}a_k=0\end{aligned}\right\} \qquad (A.85)$$

$\alpha=0$ için aşağıdaki tekrarlama bağıntısı bulunur:

$$\frac{a_{k+2}}{a_k}=\frac{[k+N_2+1]^2-N^2}{(k+2)(k+1)} \;\; ; \;\; k=0,1,2,3,\ldots \qquad \text{Tekrarlama bağıntısı} \qquad (A.86)$$

$(A.43)$ 'deki tekrarlama bağıntısı, $\Theta(x)$ için

$$\Theta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1} \quad . \qquad (A.87)$$

seri çözümünü verir. Bu tekrarlama bağıntısının kullanılması,

$$\Theta(x)=a_0\Theta_1(x)+a_1\Theta_2(x) \qquad , \qquad -1<x<1 \qquad (A.88)$$

biçiminde olur. Burada $\Theta_1(x)$ ve $\Theta_2(x)$, lineer bağımsızdır. Şimdi $x=\pm 1$'de seri çözümüne bakalım. Bunun için serinin çift pariteli terimlerine yani $\Theta_1(x)$ çözümüne Raabe testini uygulayalım.

Raabe Testi:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\mathrm{A} \qquad (\mathrm{A}.89)$$

$\mathrm{A}>1$ ise seri yakınsak, $\mathrm{A}<1$ ise seri ıraksak, $\mathrm{A}=1$ ise test başarısız.

$$u_k=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} \quad ; \quad u_{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}x^{2k+2} \qquad (\mathrm{A}.90)$$

Tekrarlama bağıntısında k yerine $2k$ yazılırsa,

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\frac{[2k+N_2+1]^2-N^2}{(2k+2)(2k+1)} \implies \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}=\frac{(2k+2)(2k+1)}{[2k+N_2+1]^2-N^2} \quad . \qquad (\mathrm{A}.91)$$

$(\mathrm{A}.91)$ denklemi, $(\mathrm{A}.89)$ denkleminde yerine yazılır ve limit işleminin alınmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}-1\right)=\frac{3}{2}-N_2-1=\mathrm{A} \quad ; \quad N_2=0,1,2,3,\ldots \quad . \qquad (\mathrm{A}.92)$$

N_2 değerleri ile Raabe testinin sonucu, seriyi ıraksak çıkarır. Iraksaklığı ortadan kaldırmak için serinin bir yerde kesilmesi gerekir. Serinin bir yerde kesilmesi için, $a_{k+2}=0$ fakat $a_k\neq 0$ olabilecek şekilde bir seçim yapılmalıdır. Bu aynı zamanda kesim yapılan yerdeki terim, çözümün ilk terimi olur ve diğer terimlerde o terime göre belirlenir. $(\mathrm{A}.91)$ denkleminde $\begin{pmatrix} a_{k+2}=0 \\ a_k\neq 0 \end{pmatrix}$ şartlarını sağlayacak bir kesme işlemi yapılırsa

$$[k+N_2+1]^2-N^2=0 \qquad (\mathrm{A}.93)$$

dan,

$$\mathrm{N}=k+N_2+1 \quad ; \quad k=0,1,2,3,\ldots \quad ; \quad N_2=0,1,2,3,\ldots \qquad (\mathrm{A}.94)$$

olur. $\omega=\frac{N}{R_0}$ idi. $k+N_2$'ye k' gibi yeni bir indis tanımlaması yapılırsa;

$$\mathrm{N} = k' + 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad ; \quad N_2 = 0, 1, 2, 3, \ldots, k') \tag{A.95}$$

yazılır ve

$$\omega_{k'} = \frac{k' + 1}{R_0} \tag{A.96}$$

olur. $k' \to k$ yazılırsa,

$$\omega_k = \frac{k + 1}{R_0} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.97}$$

elde edilir. Frekansın kuantize olması önceden tahmin edilebilecek bir sonuçtur. Kapalı bir evrenin çevresinin $2\pi R_0$ olarak verildiğini ve bir çevre üzerinde de, sadece dalga boylarının tamsayı katlarının bulunabileceğini düşünürsek,

$$(k + 1)\lambda = 2\pi R_0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.98}$$

yazılır ve $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ formülü ile kolayca (A.97) denkleminde verilen frekanslar bulunur. $N(k, N_2)$ 'nin alabildiği dejenere değerler Tablo A.1'de verilmiştir.

Tablo A.1: $N(k, N_2)$' nin alabildiği dejenere değerler

N_2\k	0	1	2	3	4	5	…
0	1	2	3	4	5	6	…
1		2	3	4	5	6	…
2			3	4	5	6	…
3				4	5	6	…
4					5	6	…
5						6	…
⋮							⋱

Şimdi $\Theta(x)$ polinom çözümünün Gegenbauer polinomlarına karşılık geldiğini gösterelim:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)-(2\lambda+1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)+n[n+2\lambda]\mathrm{C}_n^{\lambda}(x)=0 \qquad (\mathrm{A}.99)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x)-(2N_2+3)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x)+[(N^2-1)-N_2(N_2+2)]\Theta(x)=0 \qquad (\mathrm{A}.100)$$

$(\mathrm{A}.99)$ ve $(\mathrm{A}.100)$ denklemleri karşılaştırıldığında; $\lambda=N_2+1$ ve $n=N-N_2-1$ sonuçları bulunur. Şimdi tekrarlama bağıntısında $N=n+N_2+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$a_k=\frac{(k+2)(k+1)}{(k-n).(k+n+2\lambda)}a_{k+2} \qquad (\mathrm{A}.101)$$

elde edilir. $(\mathrm{A}.101)$ denkleminde, k' yı $n-2,\ n-4,\ n-6,\ \ldots\ldots,n-2r$ azaltırsak,

$k=n-2$ için ;

$$a_{n-2}=\frac{n(n-1)}{(-2)(2n-2\lambda-2)}a_n \qquad (\mathrm{A}.102)$$

$k=n-4$ için ;

$$a_{n-4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(-2)(-4)(2n-2\lambda-2)(2n-2\lambda-4)}a_n \qquad (\mathrm{A}.103)$$

$k=n-6$ için ;

$$a_{n-6}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(-2)(-4)(-6)(2n-2\lambda-2)(2n-2\lambda-4)(2n-2\lambda-6)}a_n \qquad (\mathrm{A}.104)$$

$\vdots$

$k=n-2r$ için ;

$$a_{n-2r}=(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-2r+1)}{(2)(4)\ldots\ldots(2r)(2n-2\lambda-2)(2n-2\lambda-4)\ldots\ldots(2n+2\lambda-2r)}a_n \qquad (\mathrm{A}.105)$$

$(\mathrm{A}.105)$ denklemi, $\Theta(x)$ çözümünde yerine yazılırsa,

$$\Theta(x) = a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-2r+1)}{(2)(4)\dots\dots(2r)(2n-2\lambda-2)(2n-2\lambda-4)\dots\dots(2n+2\lambda-2r)} x^{n-2r} \tag{A.106}$$

denklemi bulunur. Burada $\left[\frac{1}{2}n\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \text{ n = çift ise} \\ \frac{1}{2}(n-1) & ; \text{ n = tek ise} \end{cases}$. Daha sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$n(n-1)\dots\dots(n-2r+1) = \frac{n!}{(n-2r)!} \tag{A.107}$$

$$(2).(4).(6)\dots\dots(2r) = 2^r r! \tag{A.108}$$

$$(2n-2\lambda-2)(2n-2\lambda-4)\dots(2n+2\lambda-2r) = 2^r \frac{(n+\lambda-1)!}{(n+\lambda-r-1)!} \tag{A.109}$$

$(\mathrm{A}.107)$, $(\mathrm{A}.108)$ ve $(\mathrm{A}.109)$ denklemleri, $(\mathrm{A}.106)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\Theta(x) = a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{n!}{(n-2r)!} \cdot \frac{(n+\lambda-r-1)!}{(n+\lambda-1)!\, r!\, 2^n} \cdot (2x)^{n-2r} \tag{A.110}$$

haline gelir. Ayrıca, aşağıdaki bağıntıları kullanırsak;

$$\left.\begin{array}{lll} n! = \Gamma(n+1) & ; & (n+\lambda-1)! = \Gamma(n+\lambda) \\ (n+\lambda-r-1)! = \Gamma(n+\lambda-r) & ; & (n-2r)! = \Gamma(n-2r+1) \end{array}\right\} \tag{A.111}$$

$$\Theta(x) = a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(n+1).\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(n+\lambda) r!\, 2^n} \cdot (2x)^{n-2r} \tag{A.112}$$

elde edilir. $a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\lambda)2^n} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}$ tanımlaması yapılırsa,

$$C_{k-N_2}^{N_2+1}(x) = \Theta(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!} \cdot (2x)^{n-2r} \qquad (A.113)$$

Burada $\lambda = N_2 + 1$ ve $N = k + 1$ idi. Dolayısıyla da, $n = k - N_2$ olur. Bu yolla elde edilen polinom çözümleri, iyi bildiğimiz Gegenbauer polinomlarıdır. Bu durumda uç durumlardaki çözüm şöyle olur:

$$X(x) \sim \sin^{N_2}\chi \, C_{k-N_2}^{N_2+1}(\cos\chi) \quad . \qquad (A.114)$$

Böylece $n = 4$ için mod çözümü;

$$\Phi_\lambda(x) = T(t)X(\chi)Y(\theta_1,\phi) = c_{04}e^{-i\omega t}\sin^{N_2}\chi \, C_{k-N_2}^{N_2+1}(\cos\chi)Y_{lm}(\theta_1,\phi) \qquad (A.115)$$

olur. Denklem $(A.115)$'de

$$\left.\begin{array}{l} \omega_k = \dfrac{k+1}{R_0} \quad ; \quad k = 0,1,2,3,\ldots \\ N_2 \equiv l = 0,1,2,3,\ldots \\ m = -l, -l+1, \ldots, 0, 1, \ldots, l \end{array}\right\} \qquad (A.116)$$

ve c_{04}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti (2.32)'deki skaler çarpım bağıntısı kullanılarak

$$|c_{04}| = \frac{2^{N_2}}{R_0}\Gamma(N_2+1)\left\{\frac{(k-N_2)!}{\pi\Gamma(k+N_2+2)!}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad . \qquad (A.117)$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, $n = 4$ için mod çözümü;

$$\Phi_4(x) = \frac{2^{N_2}}{R_0}\Gamma(N_2+1)\left\{\frac{(k-N_2)!}{\pi\Gamma(k+N_2+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\sin^{N_2}\chi \, C_{k-N_2}^{N_2+1}(\cos\chi)Y_{lm}(\theta_1,\phi)e^{-i\omega t} \qquad (A.118)$$

olarak elde edilir.

A.4. S^4(Uzayzaman Boyutu n=5) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu uzay için küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi \\ x_2 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi \\ x_3 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_4 &= R_0 \sin\chi \cos\theta_1 \\ x_5 &= R_0 \cos\chi \end{aligned}\right\} \qquad (A.119)$$

burada $\chi \in [0,2\pi]$, $\theta_1 \in [0,\pi]$, $\theta_2 \in [0,\pi]$ ve $\phi \in [0,2\pi]$ dir. Böylece statik, kapalı 5-boyutlu (S^4 yüzey boyutlu) bir uzay-zamanı için metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta_1^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\phi^2] \qquad (A.120)$$

şeklindedir. Bu eğri geri plan geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı

$$\Box\Phi(x) + \xi(5)R\Phi(x) = 0 \qquad (A.121)$$

alan denklemini sağlar. Bu uzay için $\xi(5)$ konformal faktör ve R Ricci skaleri şu şekildedir:

$$\xi(5) = \frac{3}{16} \quad , \quad R = \frac{12}{R_0^2} \quad . \qquad (A.122)$$

Bu boyut için D'Alembert işlemcisi,

$$\begin{aligned} \Box &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3,4 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2\sin^3\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) \\ &\quad - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) - \frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \qquad (A.123)$$

denklemi ile verilir. Bu uzay için metrik tensör ifadeleri

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -R_0^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\end{bmatrix} \tag{A.124}$$

$$g=detg_{\mu\nu}=R_0^8\sin^6\chi\sin^4\theta_1\sin^2\theta_2 \tag{A.125}$$

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_0^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\end{bmatrix}. \tag{A.126}$$

şeklindedir. (A.122) ve (A.123) denklemleri, (A.121)'deki alan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{R_0^2\sin^3\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right)-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{9}{4R_0^2}\right\}\Phi(x)=0 \tag{A.127}$$

denklemi elde edilir. (A.85) denklemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülür. Bu nedenle çözümün,

$$\Phi(x)=\Phi(t,\chi,\theta_1,\theta_2,\phi)=T(t)X(\chi)X_1(\theta_1)Y(\theta_2,\phi) \tag{A.128}$$

şeklinde olduğu varsayılır ve bu çözüm, (A.85) denkleminde yerine yazılır. Burada gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right]-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{X(\chi)}\frac{1}{\sin^3\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)-\frac{9}{4}\right]$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{X_1(\theta_1)}\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1}\left[\frac{1}{Y(\theta_2,\phi)}\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}Y(\theta_2,\phi)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{Y(\theta_2,\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_2,\phi)\right]=0 \qquad (A.129)$$

denklemi elde edilir. t,χ,θ_1,θ_2 ve ϕ bağımsız değişkenler olduklarından, $T(t)$, $X(\chi)$, $X_1(\theta_1)$ ve $Y(\theta_2,\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)=-\omega^2 \qquad (A.130)$$

$$\frac{1}{X(\chi)}\left[\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+\left(\omega^2-\frac{9}{4R_0^2}\right)R_0^2\sin^2\chi\right]=-\alpha \qquad (A.131)$$

$$\frac{1}{X_1(\theta_1)}\left[\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)+\frac{\lambda}{\sin^2\theta_1}\right]=\alpha \qquad (A.132)$$

$$\frac{1}{Y(\theta_2,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}Y(\theta_2,\phi)\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_2,\phi)\right]=\lambda \qquad (A.133)$$

olarak bulunur. Burada ω, α ve λ, ayırma sabitleridir. Fiziksel olarak, ω frekansa karşı gelir. $(A.130)$ denkleminin çözümü kolayca,

$$T(t)=e^{\pm i\omega t} \qquad (A.134)$$

olarak bulunur. $(A.133)$ denklemi ise çözümünü iyi bildiğimiz küresel harmonik fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemden başka bir şey değildir ve dolayısıyla λ ayırma sabiti,

$$\lambda = -l(l+1)\,, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.135}$$

alınarak (A.133) denkleminin çözümü,

$$Y(\theta_2, \phi) = Y_{lm}(\theta_2, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta_2) e^{im\phi} \tag{A.136}$$

olarak elde edilir. Daha sonra, $X_1(\theta_1)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem şöyle olur:

$$\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} X_1(\theta_1)\right) + \left[-\alpha - \frac{l(l+1)}{\sin^2\theta_1}\right] X_1(\theta_1) = 0 \qquad . \tag{A.137}$$

Burada α ayırma sabiti,

$$\alpha = -l_1(l_1+2)\,, \qquad l_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.138}$$

alınarak, $X_1(\theta_1)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem çözülebilir. (A.138) denklemi (A.137) denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} X_1(\theta_1)\right) + [l_1(l_1+2)\sin^2\theta_1 - l(l+1)] X_1(\theta_1) = 0 \tag{A.139}$$

elde edilir. $X(\chi)$'a bağlı bulunan diferansiyel denklem de şöyle olur:

$$\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi \frac{\partial}{\partial\chi} X(\chi)\right) + \left[\left(\omega^2 R_0^2 - \frac{9}{4}\right)\sin^2\chi - l_1(l_1+2)\right] X(\chi) = 0 \tag{A.140}$$

$n = 5$ için, $X_1(\theta_1)$ ve $X(\chi)$'nın sırasıyla sağladıkları diferansiyel denklemler:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} X_1(\theta_1)\right) + [N_3(N_3+2)\sin^2\theta_1 - N_2(N_2+1)] X_1(\theta_1) = 0 \tag{A.141}$$

$$\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+\left[\left(N^2-\frac{9}{4}\right)\sin^2\chi-N_3(N_3+2)\right]X(\chi)=0 \quad . \quad (A.142)$$

Şimdi, (A.139) ile (A.141) ve (A.140) ile (A.142) diferansiyel denklemleri karşılaştırılırsa,

$$N_3=l_1 \quad , \quad N_2=l, \qquad \omega=\frac{N}{R_0} \tag{A.143}$$

sonuçları bulunur. (A.141)'de $x_1=\cos\theta_1$ ve (A.142)'de $x=\cos\chi$ dönüşümleri yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(1-x_1^2)\frac{d^2}{dx_1^2}X_1(x_1)-3x_1\frac{d}{dx_1}X_1(x_1)+\left[N_3(N_3+2)-\frac{N_2(N_2+1)}{(1-x_1^2)}\right]X_1(x_1)=0 \tag{A.144}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}X(x)-4x\frac{d}{dx}X(x)+\left[\left(N^2-\frac{9}{4}\right)-\frac{N_3(N_3+2)}{(1-x^2)}\right]X(x)=0 \quad . \quad (A.145)$$

(A.144) ve (A.145) diferansiyel denklemlerin son teriminin paydasındaki $(1-x_1^2)$ ve $(1-x^2)$ terimlerinden dolayı, $x_1, x=\pm1$ noktalarında iki tane düzgün tekil nokta vardır. Asimtotik durumlardaki çözümler, sonlu çözüme nasıl bir katkı sağlayacak? Bunun için, $y=1-x_1,\ y=1+x_1,\ y=1-x$ ve $y=1+x$ dönüşümleri yapılarak uç durumlardaki çözümler aşağıdaki gibi bulunur:

$$X_1(x_1)\sim(1-x_1^2)^{\frac{N_2}{2}}\Theta(x_1) \tag{A.146}$$

$$X(x)\sim(1-x^2)^{\frac{N_3}{2}}\Theta(x) \quad . \tag{A.147}$$

(A.146) ve (A.147) çözümleri, (A.144) ve (A.145) 'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(1-x_1^2)\frac{d^2}{dx_1^2}\Theta(x_1)-(2N_2+3)x_1\frac{d}{dx_1}\Theta(x_1)+[N_3(N_3+2)-N_2(N_2+2)]\Theta(x_1)=0 \tag{A.148}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta(x)-(2N_3+4)x\frac{d}{dx}\Theta(x)+\left[\left(N^2-\frac{9}{4}\right)-N_3(N_3+3)\right]\Theta(x)=0\ . \tag{A.149}$$

(A.148) ve (A.149) diferansiyel denklemleri, Frobenius yöntemi ile çözülürse aşağıdaki Gegenbauer polinom çözümleri elde edilir:

$$C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(x_1)=\Theta(x_1)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r\cdot\frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!}\cdot(2x_1)^{n-2r} \tag{A.150}$$

$$C_{k-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(x)=\Theta(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r\cdot\frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!}\cdot(2x)^{n-2r}\ . \tag{A.151}$$

Burada sırasıyla λ değerleri N_2+1 , $N_3+\frac{3}{2}$ ve N değerleri de sırasıyla $k+1$, $k+\frac{3}{2}$ idi. Dolayısıyla da, $n=N_3-N_2$ ve $n=k-N_3$ olur. Bu durumda uç durumlardaki çözüm şöyle olur:

$$X_1(\theta_1)\sim\sin^{N_2}\chi\,C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_1) \tag{A.152}$$

$$X(\chi)\sim\sin^{N_3}\chi\,C_{k-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\chi)\qquad . \tag{A.153}$$

Böylece $n=5$ için mod çözümü;

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(x)&=T(t)X(\chi)X_1(\theta_1)Y(\theta_2,\phi)\\&=c_{05}e^{-i\omega t}\sin^{N_3}\chi\,C_{k-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\chi)\sin^{N_2}\theta_1\,C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_1)Y_{lm}(\theta_2,\phi)\end{aligned} \tag{A.154}$$

olur. Denklem (A.154)'de

$$\left.\begin{aligned} \omega_k &= \frac{k+\frac{3}{2}}{R_0} \quad ; \quad k = 0,1,2,3,\dots \\ N_3 &= 0,1,2,3,\dots \\ N_2 \equiv l &= 0,1,2,3,\dots \\ m &= -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l \end{aligned}\right\} \tag{A.155}$$

ve c_{05}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti (2.32)'deki skaler çarpım bağıntısı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$|c_{05}| = \frac{2^{N_3+\frac{1}{2}}}{R_0^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(k-N_3)!}{\pi\Gamma(N_3+k+3)}\right]^{\frac{1}{2}} 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A.156}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, $n = 5$ için mod çözümü;

$$\Phi_5(x) = \frac{2^{N_3+\frac{1}{2}}}{R_0^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(k-N_3)!}{\pi\Gamma(N_3+k+3)}\right]^{\frac{1}{2}} 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \sin^{N_3}\chi\, C_{k-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\chi)\sin^{N_2}\theta_1\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_1)Y_{lm}(\theta_2,\phi)e^{-i\omega t} \tag{A.157}$$

olarak elde edilir.

A.5. S^5(Uzayzaman Boyutu n=6) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu uzay için küresel koordinatlar;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\phi \\ x_2 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\phi \\ x_3 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ x_4 &= R_0 \sin\chi \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ x_5 &= R_0 \sin\chi \cos\theta_1 \\ x_6 &= R_0 \cos\chi \end{aligned}\right\} \qquad (A.158)$$

burada $\chi \in [0,2\pi]$, $\theta_1 \in [0,\pi]$, $\theta_2 \in [0,\pi]$, $\theta_3 \in [0,\pi]$ ve $\phi \in [0,2\pi]$ dir. Böylece statik, kapalı 6-boyutlu (S^5 yüzey boyutlu) bir uzay-zamanı için metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta_1^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\theta_3^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3\, d\phi^2] \qquad (A.159)$$

şeklindedir. Bu eğri geri plan geometrisinde konformal kütlesiz $\Phi(x)$ skaler alanı

$$\square\Phi(x) + \xi(6)R\Phi(x) = 0 \qquad (A.160)$$

alan denklemini sağlar. Bu uzay için $\xi(6)$ konformal faktör ve R Ricci skaleri şu şekildedir:

$$\xi(6) = \frac{1}{5} \quad , \quad R = \frac{20}{R_0^2} \quad . \qquad (A.161)$$

Bu boyut için D'Alembert işlemcisi,

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad ; \quad \mu,\nu = 0,1,2,3,4,5$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{R_0^2 \sin^4\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) - \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)$$
$$- \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)$$
$$- \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$
$$- \frac{1}{R_0^2 \sin^2\chi \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad (A.162)$$

denklemi ile verilir. Bu uzay için metrik tensör ifadeleri

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 \end{bmatrix} \qquad (A.163)$$

$$g = detg_{\mu\nu} = -R_0^{10}\sin^8\chi\sin^6\theta_1\sin^4\theta_2\sin^2\theta_3 \qquad (A.164)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_0^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3} \end{bmatrix}. \qquad (A.165)$$

şeklindedir. (A.161) ve (A.162) denklemleri, (A.160)'deki alan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{R_0^2\sin^4\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right)-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right.$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{4}{R_0^2}\right\}\Phi(x)=0 \qquad (A.166)$$

denklemi elde edilir. (A.166) denklemi değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülür. Bu nedenle çözümün,

$$\Phi(x)=\Phi(t,\chi,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi)=T(t)X(\chi)X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)Y(\theta_3,\phi) \qquad (A.167)$$

şeklinde olduğu varsayılır ve bu çözüm, (A.166) denkleminde yerine yazılır. Burada gerekli işlem ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\left[\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right]-\frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{X(\chi)}\frac{1}{\sin^4\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)-4\right]$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{X_1(\theta_1)}\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1}\left[\frac{1}{X_2(\theta_2)}\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}X_2(\theta_2)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{R_0^2\sin^2\chi\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\left[\frac{1}{Y(\theta_3,\phi)}\frac{1}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}Y(\theta_3,\phi)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{Y(\theta_3,\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_3,\phi)\right]=0 \qquad (A.168)$$

denklemi elde edilir. $t,\chi,\theta_1,\theta_2,\theta_3$ ve ϕ bağımsız değişkenler olduklarından, $T(t)$, $X(\chi)$, $X_1(\theta_1)$, $X_2(\theta_2)$ ve $Y(\theta_3,\phi)$ için çözülmesi gereken denklemler,

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = -\omega^2 \tag{A.169}$$

$$\frac{1}{X(\chi)}\left[\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right) + \left(\omega^2 - \frac{4}{R_0^2}\right)R_0^2\sin^2\chi\right] = -\beta \tag{A.170}$$

$$\frac{1}{X_1(\theta_1)}\left[\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right) + \frac{\alpha}{\sin^2\theta_1}\right] = \beta \tag{A.171}$$

$$\frac{1}{X_2(\theta_2)}\left[\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}X_2(\theta_2)\right) + \frac{\lambda}{\sin^2\theta_2}\right] = \alpha \tag{A.172}$$

$$\frac{1}{Y(\theta_2,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}Y(\theta_3,\phi)\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta_3,\phi)\right] = \lambda \tag{A.173}$$

olarak bulunur. Burada ω, α, β ve λ, ayırma sabitleridir. Fiziksel olarak, ω frekansa karşı gelir. (A.169) denkleminin çözümü kolayca,

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \tag{A.174}$$

olarak bulunur. (A.173) denklemi ise çözümünü iyi bildiğimiz küresel harmonik fonksiyonların sağladığı diferansiyel denklemden başka bir şey değildir ve dolayısıyla λ ayırma sabiti,

$$\lambda = -l(l+1)\,, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{A.175}$$

alınarak (A.173) denkleminin çözümü,

$$Y(\theta_3,\phi) = Y_{lm}(\theta_3,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta_3)e^{im\phi} \tag{A.176}$$

olarak elde edilir. Daha sonra, $X_2(\theta_2)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem şöyle olur:

$$\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}X_2(\theta_2)\right)+\left[-\alpha-\frac{l(l+1)}{\sin^2\theta_2}\right]X_2(\theta_2)=0 \quad . \qquad (A.177)$$

Burada α ayırma sabiti,

$$\alpha=-l_1(l_1+2)\,, \qquad l_1=0,1,2,3,\ldots \qquad (A.178)$$

alınarak, $X_2(\theta_2)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem çözülebilir. $(A.178)$ denklemi $(A.177)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}X_2(\theta_2)\right)+[l_1(l_1+2)\sin^2\theta_2-l(l+1)]X_2(\theta_2)=0 \qquad (A.179)$$

elde edilir. $X_1(\theta_1)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem şöyle olur:

$$\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)+\left[-\beta-\frac{l_1(l_1+2)}{\sin^2\theta_1}\right]X_1(\theta_1)=0 \quad . \qquad (A.180)$$

Burada α ayırma sabiti,

$$\beta=-l_2(l_2+3)\,, \qquad l_2=0,1,2,3,\ldots \qquad (A.181)$$

alınarak, $X_1(\theta_1)$'e bağlı bulunan diferansiyel denklem çözülebilir. $(A.181)$ denklemi $(A.180)$ denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)+[l_2(l_2+3)\sin^2\theta_1-l_1(l_1+2)]X_1(\theta_1)=0 \qquad (A.182)$$

elde edilir. $X(\chi)$'a bağlı bulunan diferansiyel denklem de şöyle olur:

$$\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+[(\omega^2R_0^2-4)\sin^2\chi-l_2(l_2+3)]X(\chi)=0 \quad . \quad (A.183)$$

$n=6$ için, $X_2(\theta_2),\ X_1(\theta_1)$ ve $X(\chi)$'nın sırasıyla sağladıkları diferansiyel denklemler:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}X_2(\theta_2)\right)+[N_3(N_3+2)\sin^2\theta_2-N_2(N_2+1)]X_2(\theta_2)=0 \quad (A.184)$$

$$\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}X_1(\theta_1)\right)+[N_4(N_4+3)\sin^2\theta_1-N_3(N_3+2)]X_1(\theta_1)=0 \quad (A.185)$$

$$\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^4\chi\frac{\partial}{\partial\chi}X(\chi)\right)+[(N^2-4)\sin^2\chi-N_4(N_4+3)]X(\chi)=0 \quad . \quad (A.186)$$

Şimdi, (A. 179) ile (A. 184), (A. 182) ile (A. 185) ve (A. 183) ile (A. 186) diferansiyel denklemleri karşılaştırılırsa,

$$N_2=l, \qquad N_3=l_1, \qquad N_4=l_2 \qquad \text{ve} \qquad \omega=\frac{N}{R_0} \quad (A.187)$$

sonuçları bulunur. (A. 184)'de $x_2=\cos\theta_2$, (A. 185)'de $x_1=\cos\theta_1$ ve (A. 186)'da $x=\cos\chi$ dönüşümleri yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(1-x_2^2)\frac{d^2}{dx_2^2}X_2(x_2)-3x_2\frac{d}{dx_2}X_2(x_2)+\left[N_3(N_3+2)-\frac{N_2(N_2+1)}{(1-x_2^2)}\right]X_2(x_2)=0 \ , \quad (A.188)$$

$$(1-x_1^2)\frac{d^2}{dx_1^2}X_1(x_1)-4x_1\frac{d}{dx_1}X_1(x_1)+\left[N_4(N_4+3)-\frac{N_3(N_3+2)}{(1-x_1^2)}\right]X_1(x_1)=0 \ , \quad (A.189)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}X(x)-5x\frac{d}{dx}X(x)+\left[(N^2-4)-\frac{N_4(N_4+3)}{(1-x^2)}\right]X(x)=0 \quad . \quad (A.190)$$

$(A.188)$, $(A.189)$ ve $(A.190)$ diferansiyel denklemlerin son teriminin paydasındaki $(1-x_2^2)$, $(1-x_1^2)$ ve $(1-x^2)$ terimlerinden dolayı, $x_2, x_1, x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil nokta vardır. Asimtotik durumlardaki çözümler, sonlu çözüme nasıl bir katkı sağlayacak? Bunun için, $y = 1 - x_2,\ y = 1 + x_2,\ y = 1 - x_1,\ y = 1 + x_1,$ $y = 1 - x$ ve $y = 1 + x$ dönüşümleri yapılarak uç durumlardaki çözümler aşağıdaki gibi bulunur:

$$X_2(x_2) \sim (1-x_2^2)^{\frac{N_2}{2}} \Theta(x_2) \quad , \tag{A.191}$$

$$X_1(x_1) \sim (1-x_1^2)^{\frac{N_3}{2}} \Theta(x_1) \quad , \tag{A.192}$$

$$X(x) \sim (1-x^2)^{\frac{N_4}{2}} \Theta(x) \quad . \tag{A.193}$$

$(A.191)$, $(A.192)$ ve $(A.193)$ çözümleri, $(A.188)$, $(A.189)$ ve $(A.190)$'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$(1-x_2^2)\frac{d^2}{dx_2^2}\Theta(x_2) - (2N_2+3)x_2\frac{d}{dx_2}\Theta(x_2) + [N_3(N_3+2) - N_2(N_2+2)]\Theta(x_2) = 0 \tag{A.194}$$

$$(1-x_1^2)\frac{d^2}{dx_1^2}\Theta(x_1) - (2N_3+4)x_1\frac{d}{dx_1}\Theta(x_1) + [N_4(N_4+3) - N_3(N_3+3)]\Theta(x_1) = 0 \tag{A.195}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta(x) - (2N_4+5)x\frac{d}{dx}\Theta(x) + [(N^2-4) - N_4(N_4+4)]\Theta(x) = 0 \ . \tag{A.196}$$

$(A.194)$, $(A.195)$ ve $(A.196)$ diferansiyel denklemleri, Frobenius yöntemi ile çözüldüğünde aşağıdaki polinom çözümleri elde edilir:

$$C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(x_2) = \Theta(x_2) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!} \cdot (2x_2)^{n-2r} \quad , \qquad (A.197)$$

$$C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(x_1) = \Theta(x_1) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!} \cdot (2x_1)^{n-2r} \quad , \qquad (A.198)$$

$$C_{k-N_4}^{N_4+2}(x) = \Theta(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(n-2r+1).\Gamma(\lambda).r!} \cdot (2x)^{n-2r} \quad . \qquad (A.199)$$

Burada sırasıyla λ değerleri $N_2 + 1$, $N_3 + \frac{3}{2}$, $N_4 + 2$ ve N değerleri de sırasıyla $k + 1$, $k + \frac{3}{2}$, $k + 2$ idi. Dolayısıyla da, $n = N_3 - N_2$, $n = N_4 - N_3$ ve $n = k - N_4$ olur. Bu yolla elde edilen polinom çözümleri, iyi bildiğimiz Gegenbauer polinomlarıdır. Bu durumda uç durumlardaki çözüm şöyle olur:

$$X_2(\theta_2) \sim \sin^{N_2}\theta_2 \, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_2) \qquad (A.200)$$

$$X_1(\theta_1) \sim \sin^{N_3}\theta_1 \, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_1) \qquad (A.201)$$

$$X(\chi) \sim \sin^{N_4}\chi \, C_{k-N_4}^{N_4+2}(\cos\chi) \quad . \qquad (A.202)$$

Böylece $n = 6$ için mod çözümü;

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(x) &= T(t)X(\chi)X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)Y(\theta_3,\phi) \\ &= c_{06}e^{-i\omega t}\sin^{N_4}\chi \, C_{k-N_4}^{N_4+2}(\cos\chi)\sin^{N_3}\theta_1 \, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_1) \\ &\quad \cdot \sin^{N_2}\theta_2 \, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi) \end{aligned} \qquad (A.203)$$

olur. Denklem $(A.203)$'de

$$\left.\begin{aligned} \omega_k &= \frac{k+2}{R_0} \quad ; \quad k = 0,1,2,3,\dots \\ N_4 &= 0,1,2,3,\dots \\ N_3 &= 0,1,2,3,\dots \\ N_2 \equiv l &= 0,1,2,3,\dots \\ m &= -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l \end{aligned}\right\} \qquad (A.204)$$

ve c_{06}'de normalizasyon sabitidir. Normalizasyon sabiti (2.32)'deki skaler çarpım bağıntısı kullanılarak

$$|c_{06}| = \frac{2^{N_4+1}}{R_0^2}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(k-N_4)!}{\pi\Gamma(N_4+k+4)}\right]^{\frac{1}{2}} 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (A.205)$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, $n = 6$ için mod çözümü;

$$\Phi_6(x) = \frac{2^{N_4+1}}{R_0^2}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(k-N_4)!}{\pi\Gamma(N_4+k+4)}\right]^{\frac{1}{2}} 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_4}\chi\, C_{k-N_4}^{N_4+2}(\cos\chi)$$
$$\cdot \sin^{N_3}\theta_1\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_1)\sin^{N_2}\theta_2\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi)e^{-i\omega t} \qquad (A.206)$$

olarak elde edilir.

A.6. S^6, S^7, S^8, S^9, S^{10}, S^{11} (Uzayzaman Boyutları n=7, 8, 9, 10, 11, 12) İçin Mod Fonksiyonunun Hesaplanması

Bu boyutlar için mod fonksiyonu hesabı, Ek A.1 bölümünde yapılan hesaplamaların sistematik bir şekilde takip edilmesiyle aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$n = 7$ için;

$$\Phi_7(x) = \frac{2^{N_5+\frac{3}{2}}}{R_0^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(k-N_5)!}{\pi\Gamma(N_5+k+5)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_5}\chi\, C_{k-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\chi)$$
$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_4}\theta_1\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_1)$$
$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_3}\theta_2\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_2)$$
$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_2}\theta_3\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_3)$$
$$\times Y_{lm}(\theta_4,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 207)}$$

$n = 8$ için;

$$\Phi_8(x) = \frac{2^{N_6+2}}{R_0^3}\Gamma(N_6+3)\left[\frac{(k-N_6)!}{\pi\Gamma(N_6+k+6)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_6}\chi\, C_{k-N_6}^{N_6+3}(\cos\chi)$$
$$\times 2^{N_5+2}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(N_6-N_5)!\left(N_6+\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_6+N_5+5)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_5}\theta_1\, C_{N_6-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\theta_1)$$
$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_4}\theta_2\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_2)$$
$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_3}\theta_3\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_3)$$
$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_2}\theta_4\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_4)$$
$$\times Y_{lm}(\theta_5,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 208)}$$

$n = 9$ için;

$$\Phi_9(x) = \frac{2^{N_7+\frac{5}{2}}}{R_0^{\frac{7}{2}}}\Gamma\left(N_7+\frac{7}{2}\right)\left[\frac{(k-N_7)!}{\pi\Gamma(N_7+k+7)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_7}\chi\, C_{k-N_7}^{N_7+\frac{7}{2}}(\cos\chi)$$

$$\times 2^{N_6+\frac{5}{2}}\Gamma(N_6+3)\left[\frac{(N_7-N_6)!\,(N_7+3)}{\pi\Gamma(N_7+N_6+6)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_6}\theta_1\, C_{N_7-N_6}^{N_6+3}(\cos\theta_1)$$

$$\times 2^{N_5+2}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(N_6-N_5)!\left(N_6+\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_6+N_5+5)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_5}\theta_2\, C_{N_6-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\theta_2)$$

$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_4}\theta_3\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_3)$$

$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_3}\theta_4\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_4)$$

$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_2}\theta_5\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_5)$$

$$\times Y_{lm}(\theta_6,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 209)}$$

$n = 10$ için;

$$\Phi_{10}(x) = \frac{2^{N_8+3}}{R_0^4}\Gamma(N_8+4)\left[\frac{(k-N_8)!}{\pi\Gamma(N_8+k+8)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_8}\chi\, C_{k-N_8}^{N_8+4}(\cos\chi)$$

$$\times 2^{N_7+3}\Gamma\left(N_7+\frac{7}{2}\right)\left[\frac{(N_8-N_7)!\left(N_8+\frac{7}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_8+N_7+7)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_7}\theta_1\, C_{N_8-N_7}^{N_7+\frac{7}{2}}(\cos\theta_1)$$

$$\times 2^{N_6+\frac{5}{2}}\Gamma(N_6+3)\left[\frac{(N_7-N_6)!\,(N_7+3)}{\pi\Gamma(N_7+N_6+6)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_6}\theta_2\, C_{N_7-N_6}^{N_6+3}(\cos\theta_2)$$

$$\times 2^{N_5+2}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(N_6-N_5)!\left(N_6+\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_6+N_5+5)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_5}\theta_3\, C_{N_6-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\theta_3)$$

$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_4}\theta_4\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_4)$$

$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_3}\theta_5\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_5)$$

$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_2}\theta_6\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_6)$$

$$\times Y_{lm}(\theta_7,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 210)}$$

$n = 11$ için;

$$\Phi_{11}(x) = \frac{2^{N_9+\frac{7}{2}}}{R_0^{\frac{9}{2}}}\Gamma\left(N_9+\frac{9}{2}\right)\left[\frac{(k-N_9)!}{\pi\Gamma(N_9+k+9)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_9}\chi\, C_{k-N_9}^{N_9+\frac{9}{2}}(\cos\chi)$$

$$\times 2^{N_8+\frac{7}{2}}\Gamma(N_8+4)\left[\frac{(N_9-N_8)!\,(N_9+4)!}{\pi\Gamma(N_9+N_8+8)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_8}\theta_1\, C_{N_9-N_8}^{N_8+4}(\cos\theta_1)$$

$$\times 2^{N_7+3}\Gamma\left(N_7+\frac{7}{2}\right)\left[\frac{(N_8-N_7)!\left(N_8+\frac{7}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_8+N_7+7)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_7}\theta_2\, C_{N_8-N_7}^{N_7+\frac{7}{2}}(\cos\theta_2)$$

$$\times 2^{N_6+\frac{5}{2}}\Gamma(N_6+3)\left[\frac{(N_7-N_6)!\,(N_7+3)}{\pi\Gamma(N_7+N_6+6)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_6}\theta_3\, C_{N_7-N_6}^{N_6+3}(\cos\theta_3)$$

$$\times 2^{N_5+2}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(N_6-N_5)!\left(N_6+\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_6+N_5+5)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_5}\theta_4\, C_{N_6-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\theta_4)$$

$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_4}\theta_5\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_5)$$

$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_3}\theta_6\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_6)$$

$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin^{N_2}\theta_7\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_7)$$

$$\times Y_{lm}(\theta_8,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 211)}$$

$n = 12$ için;

$$\Phi_{12}(x) = \frac{2^{N_{10}+4}}{R_0^5}\Gamma(N_{10}+5)\left[\frac{(k-N_{10})!}{\pi\Gamma(N_{10}+k+10)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_{10}}\chi\, C_{k-N_{10}}^{N_{10}+5}(\cos\chi)$$

$$\times 2^{N_9+4}\Gamma\left(N_9+\frac{9}{2}\right)\left[\frac{(N_{10}-N_9)!\left(N_{10}+\frac{9}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_{10}+N_9+9)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_9}\theta_1\, C_{N_{10}-N_9}^{N_9+\frac{9}{2}}(\cos\theta_1)$$

$$\times 2^{N_8+\frac{7}{2}}\Gamma(N_8+4)\left[\frac{(N_9-N_8)!\,(N_9+4)!}{\pi\Gamma(N_9+N_8+8)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_8}\theta_2\, C_{N_9-N_8}^{N_8+4}(\cos\theta_2)$$

$$\times 2^{N_7+3}\Gamma\left(N_7+\frac{7}{2}\right)\left[\frac{(N_8-N_7)!\left(N_8+\frac{7}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_8+N_7+7)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_7}\theta_3\, C_{N_8-N_7}^{N_7+\frac{7}{2}}(\cos\theta_3)$$

$$\times 2^{N_6+\frac{5}{2}}\Gamma(N_6+3)\left[\frac{(N_7-N_6)!\,(N_7+3)}{\pi\Gamma(N_7+N_6+6)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_6}\theta_4\, C_{N_7-N_6}^{N_6+3}(\cos\theta_4)$$

$$\times 2^{N_5+2}\Gamma\left(N_5+\frac{5}{2}\right)\left[\frac{(N_6-N_5)!\left(N_6+\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_6+N_5+5)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_5}\theta_5\, C_{N_6-N_5}^{N_5+\frac{5}{2}}(\cos\theta_5)$$

$$\times 2^{N_4+\frac{3}{2}}\Gamma(N_4+2)\left[\frac{(N_5-N_4)!\,(N_5+2)}{\pi\Gamma(N_5+N_4+4)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_4}\theta_6\, C_{N_5-N_4}^{N_4+2}(\cos\theta_6)$$

$$\times 2^{N_3+1}\Gamma\left(N_3+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{(N_4-N_3)!\left(N_4+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(N_4+N_3+3)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_3}\theta_7\, C_{N_4-N_3}^{N_3+\frac{3}{2}}(\cos\theta_7)$$

$$\times 2^{N_2+\frac{1}{2}}\Gamma(N_2+1)\left[\frac{(N_3-N_2)!\,(N_3+1)}{\pi\Gamma(N_3+N_2+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \sin^{N_2}\theta_8\, C_{N_3-N_2}^{N_2+1}(\cos\theta_8)$$

$$\times Y_{lm}(\theta_9,\phi)e^{-i\omega t} \qquad \text{(A. 212)}$$

ÖZ GEÇMİŞ

19.08.1989 tarihinde Sakarya'nın Karasu ilçesinde doğdum. 1995 yılında Bilecik Osmangazi İlköğretim Okulu'nda başladığım ilköğretimimi 2003 yılında tamamladım. 2003 yılında başladığım Bilecik Ertuğrulgazi Lisesi'nden (Yabancı Dil Ağırlıklı Süper Lise) 2007 yılında mezun oldum. 2008 yılında Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümünü kazandım. 2012 yılında Fizik Bölümü 1.si ve Fen Fakültesi 3.sü olarak mezun oldum. Ayrıca 2010'da Fizik Bölümü 3. Sınıfındayken Çift Anadal Programı'na başvurarak Bilgisayar Mühendisliğini okumaya hak kazandım ve 2013 yılında Bilgisayar Mühendisliği Bölümünden mezun oldum. Hedefim öncelikle Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği alanında kendimi geliştirmek ve bilimsel çalışmalara katkıda bulunmaktır.