T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ VE ÇÖZÜLEBİLİR POTANSİYELLER

AYTÜL BAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

PROF. DR. MİRZA KERİM

EDİRNE-2015

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Serap ŞENTÜRK DALGIÇ
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mirza KERİM
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından FİZİK Anabilim Dalında bir YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Mirza KERİM	
Doç. Dr. Mehmet SEZGİN	
Yrd. Doç. Dr. Ayşe ULUBAY SIDDIKİ	

Tarih: 04/09/2015

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

04/09/2015

Aytül BAL

Yüksek Lisans Tezi

Süpersimetrik Kuantum Mekaniği ve Çözülebilir Potansiyeller

T.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tezin amacı bir boyutlu süpersimetrik kuantum mekaniğine giriş sağlamaktır. Süpersimetrik kuantum mekaniğinin Hamiltonyen formülasyonu kurulduktan sonra çözülebilir bir Hamiltonyenden başlayarak aynı spektruma sahip yeni Hamiltonyenler kurma yöntemi basit örnekle açıklanmıştır. Pöschl-Teller I ve Morse potansiyelleri için enerji spektrumunun analitik ifadesi süpersimetri ve şekil değişmezlik koşulundan elde edilmiştir.

Yıl : 2015

Sayfa Sayısı : 30

Anahtar Kelimeler : Süpersimetrik cebir, kuantum mekaniği, çözülebilir potansiyeller

Thesis of Master

Supersymmetric Quantum Mechanics and Solvable Potentials

Department of Physics, Faculty of Sciences, Trakya University

ABSTRACT

This master thesis is intended to provide an introduction to supersymmetric quantum mechanics (SUSY Q.M) in one dimension. After setting up a Hamiltonian formulation of SUSY Q.M , we illustrate its powerful techninque for designing Hamiltonians with a prescribed energy spectrum from known exactly solvable one . For Pöschl-Teller I and Mors potentials , analytic expressions for the energy spectrum are derived using SUSY and the shape invariant condition.

Year : 2015
Number of pages : 30
Key Words : Supersymmetry algebra, quantum mechanics, solvable potentials

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken desteğini esirgemeyen, derin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Sayın Hocam Prof. Dr. Mirza KERİM ' e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca, birçok fedakarlıkla beni okutan, eğitim hayatım boyunca desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen babam Hasan YÜKSEL, annem Hanife YÜKSEL' e , tanıdığım ilk günden itibaren kararlarımda sürekli yanımda olan ve beni destekleyen değerli eşim Yasin BAL ' a, kardeşim Hayrettin YÜKSEL ' e ve bana inanan varlıklarıyla yanımda olduğunu hissettiğim tüm sevdiklerime teşekkür ederim.

Aytül BAL

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar aşağıda açıklamaları ile birlikte verilmiştir.

Simge	**Açıklamalar**
$\mathcal{H}$	Hilbert Uzayı
$\hat{H}$	Süpersimetrik Hamiltonyen
$\hat{Q}_i$,$\hat{Q}_j$	Süper Yük Operatörleri
δ_{ij}	Kroneker Sembolü
$\|\Psi\|$	Ψ Özfonksiyonu Normu
E_0	Taban Durum Enerjisi
A, A^+	Operatör
W (x)	Süper Potansiyel
Ψ_0	Taban Durumu Dalga Fonksiyonu
c_1,c_2	Normalizasyon Sabitleri
N	Normalizasyon Katsayısı
$V_{s.k}$	Sonsuz Kuyu Potansiyeli
E_n	Enerji Öz değerleri
a_1,a_2	Parametreler

Kısaltma	**Açıklamalar**
SUSY	Süpersimetri
Q.M	Kuantum Mekaniği
bkz.	Bakınız

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
KAPAK	i
KABUL VE ONAY SAYFASI	ii
TEZ DOĞRULUK BEYANI	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. Giriş	1
2. Süpersimetrik Kuantum Mekaniği	2
3. Hamiltonyen ve Süperpotansiyel	5
4. Hamilton Faktörizasyonu ve Hiyerarşisi	12
5. Şekil İnvaryantlık ve Çözülebilir Potansiyeller	16
6. Pöschl-Teller I Potansiyeli	21
7. Morse Potansiyeli	24
8. Sonuç	28
9. Kaynaklar	29
10.Özgeçmiş	30

GİRİŞ

Süpersimetri (SUSY olarak kısaltılır) matematiksel bir kavramdır ve parçacık fiziğinde geçen Standart Modelin karşılaştığı sorunları çözmek için 1970 ' lerde ortaya atılmıştır. Fermiyonlar (yarıtam spinli parçacıklar) ve bozonları (tam spinli parçacıklar) ilişkilendiren bu simetri bilinen her fermiyona yeni bir bozon ve bilinen her bozona da yeni bir fermiyon öne sürer. Süperpartner olarak isimlendirilen bu parçacık çifti aynı kütleye ve farkı $\frac{1}{2}$ olan spinlere sahiptir. Henüz hiç süperpartner çiftine rastlanmadığı için süpersimetri kendiliğinden bozuluyor olmalıdır. Süpersimetrinin kendiliğinden bozulma mekanizmasını araştırmak için 1981 ' de Witten [1] süpersimetrik kuantum mekaniğini ortaya attı. Temel fikir kuantum mekaniğinde simetri bozulmasını ele alarak bulunan sonuçları kuantum alan teorisine aktarmaktı. Kısa bir sürede süpersimetrik kuantum mekaniğinin tek başına ilginç bir kuram olduğu anlaşıldı. Örneğin, süpersimetrik kuantum mekaniği Infeld ve Hull [2] tarafından ileri sürülen çarpanlara ayırma yönteminin derinden kavranmasını sağladığı gibi çözülebilir Hamiltonyenler hiyerarşisini kurmada ve bu hiyerarşideki tüm Hamiltonyenlerin özdeğerleri ve özfonksiyonlarını bulmada kullanılmaktadır. 1983 ' te Gendenshtain [3] şekil değişmez potansiyeller kavramını ileri sürdü. Tanıma göre bu potansiyeller için eş potansiyeller değişkene aynı şekilde bağlı iken parametrelere ise farklı şekilde bağlı olabilir. Bu potansiyeller için enerji spektrumu ve özfonksiyonlar süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemi kullanılarak analitik şekilde elde edilebilir.

Bu çalışmanın amacı süpersimetrik kuantum mekaniğine özlü bir giriş yapmaktır. Süpersimetrik kuantum mekaniğinin Hamiltonyen formülasyonu kurulduktan sonra bu kuram basit örnekle açıklanmıştır. Daha sonra Pöschl-Teller I ve Morse Potansiyeli için enerji spektrumu süpersimetri ve şekil değişmezlik koşulundan bulunmuştur.

2. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ

Kuantum sistemini nitelendiren H hamiltonyeninin etkilediği $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında

$$\{\hat{Q}_i,\hat{Q}_j\} = H\delta_{ij} \quad , \quad i,j = 1,2, \dots , N \tag{2.1}$$

$$[H, Q_1] = 0 \tag{2.2}$$

bağıntılarını sağlayan N tane $Q_i = Q_i^+$ operatörleri mevcut ise bu sisteme süpersimetrik sistem denir [4]. Burada , $\{\hat{Q}_i,\hat{Q}_j\}$, $\hat{Q}_i$ ve $\hat{Q}_j$ operatörlerinin antikomutasyon bağıntısı olup

$$\{\hat{Q}_i ,\hat{Q}_j\} = \hat{Q}_i\hat{Q}_j + \hat{Q}_j\,\hat{Q}_i \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca, δ_{ij} Kroneker sembolüdür :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j \quad ise \\ 0\,, & i \neq j \quad ise \end{cases}$$

Denklem (2.1) ve (2.2) 'den görüldüğü gibi SUSY cebri $[.\ ,\ .]$ komutasyon ve $\{.\ ,\ .\}$ antikomutasyon bağıntıları altında kapalıdır. $\hat{Q}_i$ operatörlerine süper yük ve H hamiltonyenine Süpersimetrik (SUSY) Hamiltonyen denir.

Biz, burada N=2 süpersimetrik kuantum mekaniğini ele alacağız. Bu durumda yukarıdaki (2.1) bağıntıları aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\{\hat{Q}_1,\hat{Q}_1\} = H \tag{2.4}$$

$$\{\hat{Q}_2,\hat{Q}_2\} = H \tag{2.5}$$

$$\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} = 0 \tag{2.6}$$

$$[H, Q_1] = 0 \tag{2.7}$$

$$[H, Q_2] = 0 \tag{2.8}$$

Denklem (2.4) ve (2.5) 'den

$$H = 2\hat{Q}_1^{\,2} = 2\,\hat{Q}_2^{\,2} = \hat{Q}_1^{\,2} + \hat{Q}_2^{\,2} \tag{2.9}$$

bağıntısını elde ederiz [4].

H 'nin özdeğerlerinin eksi olmadığını gösterelim. Zamandan bağımsız

$$H\Psi = E\Psi$$

Schrödinger denkleminden

$$E = (\Psi, H\Psi) \tag{2.10}$$

buluruz. Bu denklemde (2.9) bağıntısı göz önüne alınırsa

$$E = (\Psi, 2\hat{Q}_1^{\,2}\,\Psi) \tag{2.11}$$

$$= 2\,(\,\hat{Q}_1^{\dagger}\,\Psi,\,\hat{Q}_1\,\Psi\,) \tag{2.12}$$

bulunur. Burada, hermitik eşleniğin tanımını kullandık. $\hat{Q}_1$ operatörünün hermitik olduğu göz önüne alınırsa,

$$E = 2\,(\,\hat{Q}_1\Psi,\,\hat{Q}_1\Psi) \tag{2.13}$$

$$= 2\,\|\hat{Q}\,\Psi\|^2 \tag{2.14}$$

olarak bulunur. (2.14) denklemine göre, taban durum enerjisi $E \geq 0$ ' dır. Başka bir deyişle, SUSY özdeğeri sıfır veya pozitif sayılardır. Burada, $\|\Psi\|$, Ψ özfonksiyonun normudur.

Eğer, taban durum enerjisi $E_0 = 0$ ise, süpersimetrik sistem, iyi süpersimetriye sahiptir denir. Eğer, $E_0 > 0$ ise, süpersimetrik sistem bozuktur denir.

İyi süpersimetriye sahip sistemler için $\hat{Q}_i\Psi_0 = 0$ (i= 1,2) olur. Gerçekten (2.13) bağıntısında , $\Psi = \Psi_0$ ve $E = E_0 = 0$ yazılırsa

$$0 = (\hat{Q}_1\,\Psi_0\,,\,\hat{Q}_1\,\Psi_0) \tag{2.15}$$

veya

$$\hat{Q}_1\,\Psi_0 = 0 \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\hat{Q}_2\Psi_0 = 0 \qquad (2.17)$$

olarak bulunur. Genelde $\hat{Q}_1$ ve $\hat{Q}_2$ hermitik operatörler yerine, aşağıdaki hermitik olmayan

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2) \qquad (2.18)$$

$$\hat{Q}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_1 - i\hat{Q}_2) \qquad (2.19)$$

operatörler kullanılır [4]. Biz de $\hat{Q}$ ve $\hat{Q}^\dagger$ operatörlerini kullanarak (2.4) – (2.8) bağıntılarını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} = 0 \qquad (2.20)$$

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = H \qquad (2.21)$$

$$[H, \hat{Q}] = 0 \qquad (2.22)$$

$$[H, \hat{Q}^\dagger] = 0 \qquad (2.23)$$

$\hat{Q}$ ve $\hat{Q}^+$ operatörleri aşağıdaki şekilde gerçekleştirilebilir:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{Q}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bu operatörlerin (2.20) bağıntısını sağladığını gösterelim. İlk olarak $\{\hat{Q}, \hat{Q}\}$ ' yi hesaplayalım.

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \qquad (2.24)$$

Benzer şekilde,

$$\{\hat{Q}^{\dagger}, \hat{Q}^{\dagger}\} = 0 \qquad (2.25)$$

olarak bulunur. Böylece , $\{\hat{Q}, \hat{Q}\}$ ve $\{\hat{Q}^{\dagger}, \hat{Q}^{\dagger}\}$ antikomutasyon bağıntıları sıfıra eşittir. Şimdi (2.21) denkleminde H ' ın açık ifadesini yazalım.

$$H = \{\hat{Q}, \hat{Q}^{\dagger}\} = \hat{Q}\,\hat{Q}^{\dagger} + \hat{Q}^{\dagger}\hat{Q}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}\hat{A}^{\dagger} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{A}^{\dagger}\hat{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla,

$$H = \begin{pmatrix} \hat{A}^{\dagger}\hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A}\hat{A}^{\dagger} \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

yazabiliriz. Böylece, N=2 süpersimetrik kuantum sistemi için H toplam SUSY Hamiltonyeni

$$H_1 = A^{+}A \geq 0 \quad , \quad H_2 = AA^{+} \geq 0 \qquad (2.27)$$

Hamiltonyenlerini içermektedir. Bundan dolayı H_1 ve H_2 ' ye SUSY Eş Hamiltonyenleri denir.

3. HAMİLTONYEN VE SÜPERPOTANSİYEL

Bir boyutlu kuantum mekaniğinde Hamiltonyen

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$$

şeklinde ifade edilir. Genelliği bozmadan taban durum enerjisini sıfır alabiliriz. O halde Ψ_0 taban durumu dalga fonksiyonu

$$H_1\Psi_0 = 0$$

veya

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi_0}{dx^2} + V_1(x)\,\Psi_0(x) = 0 \qquad (3.1)$$

zamandan bağımsız Schrödinger denklemini sağlar. Buradan,

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Psi''_0(x)}{\Psi_0(x)} \qquad (3.2)$$

olarak buluruz [5]. Şimdi H_1 hamiltonyenini aşağıdaki şekilde çarpanlarına ayırabiliriz:

$$H_1 = A^+A \qquad (3.3)$$

Burada

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x) \quad , \quad A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x) \qquad (3.4)$$

dir. Burada, W (x) süperpotansiyel olarak isimlendirilir.

A ve A^+ operatörlerinin (3.4) ile verilen ifadeleri (3.3) ' te yerine yazılırsa

$$V_1(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) + W^2(x). \qquad (3.5)$$

olarak bulunur. Bu iyi bilinen Riccati denklemidir. (3.2) bağıntısı ile verilen $V_1(x)$ potansiyeli için (3.5) denkleminin çözümü:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\Psi'_0(x)}{\Psi_0(x)} \qquad (3.6)$$

dir. H_1 için süpersimetrik eş hamiltonyen

$$H_2 = AA^+$$

şeklindedir. Buna göre ,

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)$$

ve

$$V_2(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) + W^2(x) \qquad (3.7)$$

dir. (3.7) denkleminden (3.5) denklemini çıkarırsak

$$2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = V_2(x) - V_1(x)$$

veya

$$V_2(x) = 2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) + V_1(x) \qquad (3.8)$$

olarak bulunur. Şimdi H_1 ve H_2 hamiltonyenlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarını ilişkilendirelim. $n > 0$ olmak üzere H_1 için

$$H_1\Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\Psi_n^{(1)} \qquad (3.9)$$

Schrödinger denklemini

$$A^+A\Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\Psi_n^{(1)}$$

olarak yazabiliriz. Buna göre

$$H_2(A\Psi_n^{(1)}) = AA^+(A\Psi_n^{(1)})$$

$$= AA^+A\Psi_n^1$$

$$= AE_n^{(1)}\Psi_n^{(1)}$$

veya

$$H_2(A\Psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} A\Psi_n^{(1)} \tag{3.10}$$

olarak buluruz. Dolayısıyla $E_n^{(1)}$, H_2 Hamiltonyenin $A\Psi_n^{(1)}$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğeridir. Benzer şekilde H_2 için,

$$H_2\Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\Psi_n^{(2)} \tag{3.11}$$

Schrödinger denklemi

$$AA^+\Psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\Psi_n^{(2)}$$

şeklinde yazılabilir ve bu da

$$H_1(A^+\Psi_n^{(2)}) = A^+A(A^+\Psi_n^{(2)})$$

$$= A^+A\, A^+\Psi_n^{(2)}$$

$$= A^+\, E_n^{(2)}\Psi_n^{(2)}$$

veya

$$H_1(A^+\Psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)}(A^+\,\Psi_n^{(2)}) \tag{3.12}$$

sonucuna götürür. Dolayısıyla $E_n^{(2)}$, H_1 Hamiltonyeninin $A^+\,\Psi_n^{(2)}$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğeridir. (3.9) - (3.12) denklemleri ve $E_0^{(1)} = 0$ bağıntısına göre H_1 ve H_2 Hamiltonyenlerinin özdeğer ve özfonksiyonları arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad , \quad E_0^{(1)} = 0 \tag{3.13}$$

$$\Psi_n^{(2)} = c_1\, A\Psi_{n+1}^{(1)} \tag{3.14}$$

$$\Psi_{n+1}^{(1)} = c_2 A^{+}\Psi_n^{(2)} \quad . \tag{3.15}$$

Burada c_1 ve c_2 normalizasyon sabitleridir. Bu sabitler normalizasyon koşulundan bulunur. Örneğin,

$$(\Psi_n^{(2)}, \Psi_n^{(2)}) = |c_1|^2 (A\Psi_{n+1}^{(1)}, A\Psi_{n+1}^{(1)})$$

$$= |c_1|^2 (\Psi_{n+1}^{(1)}, A^{+} A\Psi_{n+1}^{(1)})$$

$$= |c_1|^2 (\Psi_{n+1}^{(1)}, H^{(1)} \Psi_{n+1}^{(1)})$$

$$= |c_1|^2 E_{n+1}^{(1)} (\Psi_{n+1}^{(1)}, \Psi_{n+1}^{(1)})$$

bağıntısından

$$c_1 = \left[E_{n+1}^{(1)}\right]^{-1/2} \tag{3.16}$$

olarak bulunur. Burada c_1 sabitinin fazını sıfır aldık. Benzer şekilde

$$c_2 = \left[E_n^{(2)}\right]^{-1/2} \tag{3.17}$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki (3.13) – (3.15) bağıntılarını, çözümü bilinen bir hamiltonyenden (spektrumu hemen hemen aynı olan) yeni çözülebilir hamiltonyenlerin elde edilmesinde kullanabiliriz. Örneğin, iyi bilinen sonsuz kuyu potansiyelini ele alalım. Sonsuz kuyu potansiyelinin genişliği L olsun. Bu potansiyel,

$$V_{s.k}(x) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le x \le L \quad , \\ \infty \quad , & -\infty < x < 0 \quad , \quad x > L \end{cases} \tag{3.18}$$

olarak tanımlanır. Bu potansiyele karşılık gelen

$$H_{s.k} = -\frac{\hbar^2 d^2}{2m\, dx^2} + V_{s.k}(\mathrm{x})$$

Hamiltonyeni için Schrödinger denkleminin çözümü

$$E_n = (n+1)^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \tag{3.19}$$

$$\Psi_n(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, sin\, \frac{(n+1)\pi x}{L} \quad , \quad \mathrm{n}=0,1,2,... \tag{3.20}$$

dir [6]. Taban durumu enerjisi ,

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \neq 0 \tag{3.21}$$

olduğu için H_1 süpersimetrik eş hamiltonyenini,

$$H_1 = H_{s.k} - E_O$$

veya

$$H_1 = H_{s.k} - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \tag{3.22}$$

olarak alalım. H_1 ' in taban durum enerjisinin sıfır olacağı açıktır. Buna göre H_1 , (3.3) denklemi şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

Denklem (3.22) ' i kullanarak H_1 Hamiltonyeninin $E_n^{(1)}$ enerji öz değerleri ve $\Psi_n^{(1)}$ öz fonksiyonlarını

$$E_n^{(1)} = E_n - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$= \mathrm{n(n+2)} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad , \quad \mathrm{n}= 0,1,2,... \tag{3.23}$$

$$\Psi_n^{(1)} = \Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\ sin\frac{(n+1)\pi x}{L} \quad , \quad 0 \leq x \leq L \tag{3.24}$$

olarak buluruz [6]. Şimdi, H_1 Hamiltonyeninin H_2 SUSY Eş Hamiltonyenini (3.7) bağıntısından hesaplayalım. Bunun için önce W(x) süper potansiyeli (3.6) bağıntısından bulalım. H_1 Hamiltonyeninin taban dalga fonksiyonu

$$\Psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{L}}\ sin\frac{\pi x}{L} \quad , \quad 0 \leq x \leq L \tag{3.25}$$

şeklindedir. Bu taban dalga fonksiyonunu (3.6) denkleminde yerine yazarsak,

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi}{L}\ cot\frac{\pi x}{L} \tag{3.26}$$

elde ederiz. W(x) 'in bu ifadesi (3.7) bağıntısında yerine yazılırsa $V_2(x)$ potansiyelini,

$$V_2(x) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\right)^2 \left[2cosec^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1\right] \tag{3.27}$$

olarak buluruz. Ayrıca A operatöründe (3.4) bağıntısından,

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi}{L}cot\frac{\pi x}{L} \tag{3.28}$$

olarak bulunur. (3.13) ve (3.14) bağıntılarını kullanarak H_2 ' nin özfonksiyon ve özdeğerleri rahatça hesaplanabilir. Denklem (3.19) ve (3.23) göz önüne alınırsa

$$E_n^{(2)} = (n+1)(n+3)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad , \ n=0,1,2,... \tag{3.29}$$

olarak bulunur. $\Psi_n^{(2)}$ ' nin ifadesi ise (3.14) bağıntısından basit türev işlemi ile elde edilir. Örneğin n ' nin bir kaç değeri için $\Psi_n^{(2)}$ hesaplayalım. $\Psi_o^{(2)}$ dalga fonksiyonunu hesaplamak için (3.14) bağıntısında n=0 alalım:

$$\Psi_o^{(2)}(x) = \left[E_1^{(1)}\right]^{-1/2} A\Psi_1^{(1)}(x) \tag{3.30}$$

Burada A operatörünün (3.28) ifadesi ve $\Psi_1^{(1)}$ dalga fonksiyonunun ifadesi (bkz.(3.20)) göz önüne alınırsa,

$$\Psi_o^{(2)}(x) \sim sin^2 \frac{\pi x}{L} \tag{3.31}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (3.14) bağıntısında n yerine 1 yazar ve

$$\Psi_2^{(1)}(x) \sim sin \frac{3\pi x}{L}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\Psi_1^{(2)}(x) \sim sin \frac{\pi x}{L} sin \frac{2\pi x}{L} \tag{3.32}$$

olarak buluruz.

4. HAMİLTON FAKTÖRİZASYONU VE HİYERARŞİSİ

Önceki bölümde H_1 ' in taban durumundan Ψ fonksiyonu biliniyorsa W_1(x) süper potansiyelin (3.6) bağıntısından hesaplanabileceğini gördük. Sonuç olarak (3.4) bağıntısı ile verilen A_1 ve A_1^+ operatörlerini H_1 ' in faktörizasyonunda kullanabiliriz. Ayrıca H_2 ' nin taban dalga fonksiyonunun H_1 için birinci uyarılmış durumunun dalga fonksiyonundan A_1 operatörünün yardımıyla elde edilebileceğini gördük. Buna göre ikinci Hamiltonyenini de W_2 yardımıyla faktörize edebiliriz. Bu durumda H_2 ' nin eşi olarak H_3 Hamiltonyenini elde ederiz. Her yeni hamiltonyen bir sayı az bağıl durumlarına sahip olduğundan bu işlemi tüm bağıl durumlarını tüketene kadar devam edebiliriz. Böylece H_1 için Schrödinger probleminin çözümü biliniyorsa , elde edilen Hamiltonyenlerin hiyerarşisi için dalga fonksiyonu ve öz değerleri bulabiliriz. Diğer taraftan elde edilen Hamiltonyen hiyerarşisi için taban durumu dalga fonksiyonu biliniyorsa H_1 için Schrödinger problemini çözebiliriz. Bundan sonrası için ħ = 2m=1 alacağız. Eğer H_1 ' in taban durumunun enerjisi sıfır ise H_1 ' i (3.3) denklemi şeklinde faktörize edebiliriz. Buna göre eğer $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ ' in $\Psi_0^{(1)}$ taban durumunun E_0

enerjisi sıfır değilse,

$$H_1 - E_0^{(1)} = A_1^+ A_1$$

veya

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} \tag{4.1}$$

yazabiliriz [5]. Burada,

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \quad , \quad A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x)$$

$$W_1(x) = -\frac{\left[\Psi_0^{(1)}\right]'}{\Psi_0^{(1)}} = -\frac{d}{dx} ln\, \Psi_0^{(1)}(x) \tag{4.2}$$

olur. SUSY eş Hamiltonyeni yazacak olursak,

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \tag{4.3}$$

olur. Burada (bkz. (3.5))

$$V_2(x) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2W_1'$$

$$V_2(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} ln\, \Psi_0^{(1)} \tag{4.4}$$

bulunmuş olur. Bundan sonra m ' inci H_m Hamiltonyeninin n ' inci enerji durumlarını $E_n^{(m)}$ ile göstereceğiz. (3.11) ve (3.12) bağıntılarına göre,

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$$

$$\Psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_1\, \Psi_{n+1}^{(1)} \tag{4.5}$$

yazabiliriz. Taban durum enerjisi $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ olur. H_2 Hamiltonyeninden yola çıkarak H_2 Hamiltonyeninin SUSY eş H_3 Hamiltonyenini elde edebiliriz. Gerçekten (bkz. (4.3)) ,

$$H_2 = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)}$$

ve

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_2(x) \quad , \quad A_2^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \quad , \quad W_2(x) = -\frac{d}{dx} ln\Psi_0^{(2)}$$

olmak üzere,

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)}$$

$$= -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x)$$

olarak yazabiliriz. Burada,

$$V_3(x) = W_2^2 + W_2' + E_1^{(1)}$$

$$= V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} ln\, \Psi_0^{(2)} \quad .$$

bu bağıntıda (4.4) denklemi göz önüne alınırsa ,

$$V_3(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} ln\, \Psi_0^{(1)} - 2\frac{d^2}{dx^2} ln\, \Psi_0^{(2)}$$

$$= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} ln\, (\Psi_0^{(1)} \Psi_0^{(2)}) \qquad (4.6)$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}$$

$$\Psi_n^{(3)} = \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_2\, \Psi_{n+1}^{(2)}$$

$$= \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_2 A_1\, \Psi_{n+2}^{(1)} \qquad (4.7)$$

yazabiliriz.

Eğer, orjinal H_1 Hamiltonyeni enerji özdeğerleri $E_n^{(1)}$ ve öz fonksiyonları $\Psi_n^{(1)}$ olmak üzere p sayıda bağıl durumuna sahipse, $0 \leq n \leq$ p-1 olur . O halde, p-1 tane H_2, H_3 ,..., H_p Hamiltonyenler hiyerarşisini üretebiliriz. Ayrıca (H_m) hiyerarşisinin m üyesinin spektrumu H_1 Hamiltonyeninin ilk (m-1) özdeğerleri hariç H_1 Hamiltonyeninin spektrumu ile aynıdır. Buna göre aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(\mathrm{x}) \qquad (4.8)$$

m= 2, 3, ..., p

Burada ,

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(\mathrm{x}) \quad , \quad W_m(\mathrm{x}) = -\frac{d}{dx} ln\Psi_0^{(m)} \qquad (4.9)$$

ayrıca,

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \ldots = E_{n+m-1}^{(1)}$$

$$\Psi_n^{(m)} = \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}\right)^{-1/2} \left(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_{m-1} \ \ldots \ A_1\, \Psi_{n+m-1}^{(1)}$$

$$V_m(\mathrm{x}) = V_1(\mathrm{x}) - 2\frac{d^2}{dx^2}\, ln\left(\Psi_0^{(1)} \ldots \Psi_0^{(m-1)}\right) \qquad (4.10)$$

Örneğin, sonsuz kuyu potansiyeli için hamiltonyenler hiyerarşisinde H_3 için (m = ħ = 1 birimlerinde)

$$V_3(\mathrm{x}) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[4cosec^2\frac{\pi x}{L} - 1\right] \quad (4.11)$$

ve

$$E_n^{(3)} = (\mathrm{n+2})(\mathrm{n+4})\frac{\pi^2}{\mathrm{L}^2} \quad (4.12)$$

olarak buluruz.

5. ŞEKİL İNVARYANTLIK VE ÇÖZÜLEBİLİR POTANSİYEL

Konuya şekil invariantlık kavramının ne anlama geldiği ile başlayalım. Eğer SUSY eş $V_{1,2}(\mathrm{x})$ potansiyeller çiftinin konuma bağımlığı aynı; fakat bu potansiyellerin içerdiği parametreler farklı ise, bu potansiyellere Şekil İnvaryant Potansiyelleri denir[3]. Daha net olarak, eğer $V_1(\mathrm{x},\mathrm{a}_1)$ ve $V_2(\mathrm{x},\mathrm{a}_2)$ eş potansiyelleri

$$V_2(\mathrm{x}\,;\,\mathrm{a}_1) = V_1(\mathrm{x}\,;\mathrm{a}_2) + \mathrm{R}(a_1) \quad (5.1)$$

koşulunu sağlıyorsa $V_1(\mathrm{x},\mathrm{a}_1)$ ve $V_2(\mathrm{x},\mathrm{a}_1)$ potansiyellerine Şekil İnvariant Potansiyeller denir. Burada a_1 bir parametreler kümesi , a_2 ise a_1' in bir fonksiyonu

$$a_2 = (\mathrm{f}(a_1))$$

$\mathrm{R}(a_1)$ de x 'den bağımsız bir fonksiyondur.

Şimdi , H_1 ve H_2 SUSY eş Hamiltonyenlerini ele alalım. SUSY bozulmadığı için,

$$E_0^{(1)}(a_1) = 0 \quad (5.2)$$

dır. Ayrıca (4.2) bağıntısına göre

$$\Psi_0^{(1)}(x, a_1) = N exp\left[-\int W(x\,;a_1)dx\right] \quad (5.3)$$

dir. Burada, N normalizasyon katsayısıdır. Şimdi şekil invariant bağıntısı (4.8) yardımıyla H_1 operatörünün tüm özdeğerlerinin cebirsel olarak elde edilebileceğini gösterelim. Bunun için, H_s , s =1,2,3,... Hamiltonyenleri dizisini oluşturalım. Önceki bölümde yaptığımız tartışmadan açıktır ki, eğer H_1 Hamiltonyeni p tane bağıl duruma sahip ise o halde p tane $H_1, H_2, \ldots , H_p$ Hamiltonyenlerini oluşturabiliriz. (5.1) bağıntısına göre V_s ve V_{s-1} eş potansiyeller arasında

$$V_s (x,a_1) = V_{s-1} (x,a_2) + \mathrm{R} (a_1) , \quad s=2,3,...,p \tag{5.4}$$

bağıntısı sağlanmaktadır. Şimdi bu bağıntıyı kullanarak V_s potansiyelini V_1 cinsinden yazalım. (5.4) bağıntısında s=3 yazılırsa ,

$$V_3 (x,a_1) = V_2 (x,a_2) + \mathrm{R} (a_1) \tag{5.5}$$

bulunur. (5.1) bağıntısına göre,

$$V_2 (x,a_2) = V_1 (x,\mathrm{f} (a_2)) + \mathrm{R} (a_2)$$

veya

$$V_2 (x,a_2) = V_1 (x,a_3) + \mathrm{R} (a_2) \tag{5.6}$$

yazabiliriz. Burada $a_3 = \mathrm{f} (a_2)$ ' dir. (5.6) bağıntısı (5.5) ' te göz önüne alınırsa,

$$V_3 (x,a_1) = V_1 (x,a_3) + \mathrm{R} (a_2) + \mathrm{R} (a_1) \tag{5.7}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (5.1) bağıntısının bir sonucu olarak,

$$V_4 (\mathrm{x},a_1) = V_3 (x,a_2) + \mathrm{R} (a_1)$$

$$V_3 (\mathrm{x},a_2) = V_2 (x,a_3) + \mathrm{R} (a_2)$$

ve

$$V_2 (x,a_3) = V_1 (x,a_4) + \mathrm{R} (a_3)$$

bağıntılarından

$$V_4\ (x,a_1\ )\ =\ V_1\ (x,a_4) + \mathrm{R}\ (a_3) + \mathrm{R}\ (a_2) + \mathrm{R}\ (a_1)$$

bağıntısı elde edilir. Burada,

$$a_4 = \mathrm{f}(a_3)\quad ,\quad a_3 = \mathrm{f}\ (a_2)\quad \text{ve}\quad a_2 = \mathrm{f}\ (a_1\ )$$ ' dir.

Genel olarak (5.1) şekil invaryantlık koşulundan,

$$V_s\ (x,a_1\ )\ =\ V_1\ (x,a_s) + \mathrm{R}\ (a_{s-1}) + \mathrm{R}\ (a_{s-2}) + \ldots + \mathrm{R}\ (a_1)$$

veya

$$V_s\ (x,a_1\ )\ =\ V_1\ (x,a_s)\ +\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{s}-1}\mathrm{R}(a_k) \tag{5.8}$$

bağıntısı elde edilir. Burada,

$$a_s = \mathrm{f}\ (\ a_{s-1}\ ) = \mathrm{f}\ (\ \mathrm{f}\ (\ a_{s-2}\ )) = \ldots = \mathrm{f}\ (\ \mathrm{f}\ (\ \ldots \mathrm{f}\ (\ a_1)\ldots))$$

veya

$$a_s\ =\ f^{s-1}\ (a_1\ ) \tag{5.9}$$

dir. Böylece H_s Hamiltonyeninin

$$H_s\ =\ -\frac{d^2}{dx^2}\ + V_s\ (x,a_1)$$

ifadesini,

$$H_s\ =\ -\frac{d^2}{dx^2}\ +\ V_1\ (x,a_s)\ +\ \sum_{k=1}^{s-1}R(a_k) \tag{5.10}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu bağıntıda s yerine s+1 yazılırsa,

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x;\, a_{s+1}) + \sum_{k=1}^{s} R(a_k) \tag{5.11}$$

olarak buluruz. Diğer taraftan (5.1) bağıntısına göre,

$$V_2(x;\, a_s) = V_1(x;\, a_{s+1}) + \mathrm{R}(a_s) \tag{5.12}$$

yazabiliriz. Buna göre (5.11) bağıntısını da,

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x;\, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \tag{5.13}$$

şeklinde yazabiliriz. V_1 ve V_2 potansiyelleri SUSY eş potansiyeller olduğu için H_s ve H_{s+1} (bkz.(5.10) ve (5.13)) SUSY eş hamiltonyenleridir. Ayrıca $E_0^{(1)} = 0$ ve dolayısıyla,

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(\mathrm{x};\, a_s)$$

Hamiltonyeninin taban durum enerjisi sıfır olduğundan H_s Hamiltonyeninin $E_0^{(s)}$ taban durum enerjisi

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \tag{5.14}$$

olarak bulunur (bkz.(5.10). Diğer taraftan taban durum enerjisi sıfır olan H_1 Hamiltonyeninin s. düzey enerjisinin H_s Hamiltonyeninin taban durum enerjisine eşit olduğunu biliyoruz. Buna göre, H_1 Hamiltonyeninin özdeğer spektrumu için,

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^{n} R(a_k) \quad ; \quad E_0^{(1)}(a_1) = 0 \tag{5.15}$$

olarak buluruz. (3.15) bağıntısına göre,

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x;a_1) \sim A^{+}(x;a_1)\,\Psi_n^{(2)}(x;a_1) \tag{5.16}$$

yazabiliriz. Ayrıca (bkz.(5.10) ve (5.15)) ,

$$H_2\Psi_n^{(1)}(x;a_2) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_2\,(x\,;\,a_1)\right]\Psi_n^{(1)}(x;a_2)$$

$$= \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1\,(x\,;\,a_2) + R(a_1)\right]\Psi_n^{(1)}(x;a_2)$$

$$= \left[E_n^{(1)}(a_2) + R\,(a_1)\right]\Psi_n^{(1)}(x;a_2)$$

veya

$$H_2\Psi_n^{(1)}(x;a_2) = E_n^{(1)}(a_1)\,\Psi_n^{(1)}(x;a_2)$$

bağıntısına göre $\Psi_n^{(1)}(x;a_2)$ H_2 Hamiltonyeninin $E_n^{(1)}(a_1)$ özdeğerine karşı gelen özfonksiyonudur.

$$\Psi_n^{(1)}(x;a_2) \sim \Psi_n^{(2)}(x;a_1)$$

Bu bağıntı (5.16) ' da göz önüne alınırsa,

$$\Psi_{n+1}^{(1)}(x;a_1) \sim A^{+}(x;a_1)\,\Psi_n^{(1)}(x;a_2) \tag{5.17}$$

olarak buluruz.

Şekil invaryantlık denklemini (bkz.(5.1)) sağlayacak potansiyellerin genel sınıflandırılmasının yapılmamasına rağmen (5.1) denklemini sağlayan iki sınıf potansiyel bulunmuş ve tartışılmıştır. Birinci sınıftaki potansiyelin a_1 ve a_2 parametreleri arasındaki ilişki $a_2 = a_1 + \alpha$ şeklindedir. Kuantum mekaniği kitaplarında bulunan çok sayıda potansiyel bu sınıfa aittir. İkinci sınıfa ait potansiyeller için a_1 ve a_2 parametreleri arasındaki bağıntı ise $a_2 = qa_1$ şeklindedir. Bir sonraki bölümlerde 1.sınıfa ait bazı potansiyelleri ele alacağız.

6. PÖSCHL-TELLER I POTANSİYELİ

A > B > 0 olmak üzere,

$$W(x; A,B) = A\tan\alpha x - B\cot\alpha x \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2\alpha} \tag{6.1}$$

süperpotansiyelini ele alalım. Bu süperpotansiyele karşılık gelen V_1 ve V_2 SUSY eş potansiyeller (3.5) ve (3.7) bağıntısından elde edilir:

$$V_1(x; A,B) = -(A+B)^2 + A(A-\alpha)sec^2\alpha x + B(B-\alpha)cosec^2\alpha x \tag{6.2}$$

$$V_2(x; A,B) = -(A+B)^2 + A(A+\alpha)sec^2\alpha x + B(B+\alpha)cosec^2\alpha x. \tag{6.3}$$

Literatürde V_1 ve V_2 potansiyelleri Pöschl-Teller I Potansiyelleri olarak isimlendirilir [7]. V_1 ve V_2 potansiyelleri şekil invaryant potansiyelidir. Çünkü,

$$V_2(x; A,B) = V_1(x; A+\alpha, B+\alpha) + (A+B+2\alpha)^2 - (A+B)^2 \tag{6.4}$$

dir. Bu bağıntı (5.1) bağıntısı ile karşılaştırılınca a_1, a_2 ve $R(a_1)$ ' i ,

$$\{a_1\} = \{A, B\} \tag{6.5}$$

$$\{a_2\} = \{A+\alpha, B+\alpha\} \tag{6.6}$$

$$R(a_1) = (A+B+2\alpha)^2 - (A+B)^2 \tag{6.7}$$

olarak buluruz. (5.9) bağıntısına göre,

$$\{a_3\} = (A+2\alpha, B+2\alpha) \ , \ \{a_4\} = (A+3\alpha, B+3\alpha) \ , \{a_5\} = (A+4\alpha, B+4\alpha) \ , \dots ,$$

$$\{a_k\} = (A+(k-1)\alpha, B+(k-1)\alpha) ,\dots \tag{6.8}$$

dir. Buna göre $R(a_k)$ için

$$R(a_k) = (A+(k-1)\alpha + B + (k-1)\alpha + 2\alpha)^2 - (A+(k-1)\alpha + B + (k-1)\alpha)^2$$

veya

$$R(a_k) = (A+B+2k\alpha)^2 - (A+B+2(k-1)\alpha)^2 \tag{6.9}$$

olarak buluruz. [bkz.(6.7)] Şimdi $E_n^{(1)}$ özdeğerlerini bulabiliriz. Bunun için $R(a_k)$ ' nın (6.9) ' da olan ifadesini (5.15) bağıntısında yerine yazalım.

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \{(A+B+2k\alpha)^2 - (A+B+2(k-1)\alpha)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A+B+2k\alpha)^2 - \sum_{k=1}^{n} (A+B+2(k-1)\alpha)^2 \qquad (6.10)$$

Bu ifadeyi basitleştirmek için 2. toplamda,

$$s = k-1 \qquad (6.11)$$

indis değişimi yapalım. Buna göre,

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} (A+B+2k\alpha)^2 - \sum_{s=0}^{n-1} (A+B+2s\alpha)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (A+B+2k\alpha)^2 + (A+B+2n\alpha)^2$$

$$- \left[(A+B)^2 + \sum_{s=1}^{n-1} (A+B+2s\alpha)^2 \right] \qquad (6.12)$$

olarak bulunur. (6.12) bağıntısındaki 1. ve 4. terimleri sadeleştirirsek V_1(x;A,B) potansiyeli için enerji özdeğerlerini,

$$E_n^{(1)} = (A + B + 2n\alpha)^2 - (A + B)^2 \qquad (6.13)$$

olarak buluruz. Ayrıca V_1(x; A,B) potansiyeli için $\Psi_0^{(1)}$(x;A,B) taban durumu dalga fonksiyonu (5.3) bağıntısından bulunur. Buna göre, (6.1) ' in integralini hesaplayalım:

$$\int W(x; A, B)dx = -\left[\ln(\cos\alpha x)^s + \ln(\sin\alpha x)^\lambda \right] \qquad (6.14)$$

Burada,

$$s = \frac{A}{\alpha} \quad ; \quad \lambda = \frac{B}{\alpha} \tag{6.15}$$

dir. Bu bağıntı (5.3) ' te göz önüne alınırsa,

$$\Psi_0^{(1)}(x;a_1) \sim \exp\left[ln(cos\alpha x)^s + ln(sin\alpha x)^\lambda\right]$$

$$\sim e^{ln(cos\alpha x)^s}\, e^{\ln(sin\alpha x)^\lambda}$$

$$\Psi_0^{(1)}(x;a_1) \sim (cos\alpha x)^s (sin\alpha x)^\lambda \tag{6.16}$$

olarak bulunur. Uyarılmış x durum için dalga fonksiyonu (5.17) bağıntısından hesaplanır. Örneğin 1. uyarılmış durum için $\Psi_1^{(1)}(x;A,B)$ dalga fonksiyonunu hesaplayalım. (5.17) bağıntısında n yerine 0 yazılırsa

$$\Psi_1^{(1)}(x;\, A,B) \sim A^+(x;A,B)\, \Psi_0^{(1)}(\, x;\, A+\alpha\, ,\, B+\alpha) \tag{6.17}$$

olarak buluruz. A^+ operatörünün açık ifadesi (3.4) tanımından

$$A^+\,(x;\, A,B\,) = (-\frac{d}{dx} + A\tan\alpha x - B\cot\alpha x) \tag{6.18}$$

olarak bulunur. Ayrıca (6.16) bağıntısına göre

$$\Psi_1^{(1)}(x;\, A+\alpha,\, B+\alpha) \sim (cos\alpha x)^{s+1}(sin\alpha x)^{\lambda+1} \tag{6.19}$$

dir. Denklem (6.18) ve (6.19) göz önüne alınırsa (6.17) bağıntısından

$$\Psi_1^{(1)}(\, x;A,B\,) \sim [(2s+1)sin^2\alpha x - (2\lambda+1)cos^2\alpha x]\ x\ (cos\alpha x)^s\ (sin\alpha x)^\lambda \tag{6.20}$$

olarak buluruz.

7. MORSE POTANSİYELİ

A > B > 0 olmak üzere,

$$W(x; A,B) = A - B\exp(-\alpha x) \tag{7.1}$$

süperpotansiyelini ele alalım. Bu süperpotansiyele karşılık gelen V_1 ve V_2 SUSY eş potansiyeller (3.5) ve (3.7) bağıntısından

$$V_1(x; A,B) = A^2 + B^2\exp(-2\alpha x) - 2B\left(A + \alpha/2\right)\exp(-\alpha x) \tag{7.2}$$

$$V_2(x; A,B) = A^2 + B^2\exp(-2\alpha x) - 2B\left(A - \alpha/2\right)\exp(-\alpha x) \tag{7.3}$$

olarak elde edilir. Literatürde V_1 ve V_2 potansiyelleri Morse Potansiyelleri olarak isimlendirilir [7] . V_1 ve V_2 potansiyelleri şekil invaryant potansiyelleridir. Çünkü,

$$V_2(x; A,B) = V_1(x; A-\alpha,B) - (A-\alpha)^2 + A^2 \tag{7.4}$$

dir. Bu bağıntı (5.1) bağıntısı ile karşılaştırılınca a_1 , a_2 ve R(a_1) ' i ,

$$\{a_1\} = (A,B) \tag{7.5}$$

$$\{a_2\} = (A-\alpha , B) \tag{7.6}$$

$$R(a_1) = A^2 - (A-\alpha)^2 \tag{7.7}$$

olarak buluruz. (5.9) bağıntısına göre,

$$\{a_3\} = (A-2\alpha ,B) \quad , \quad \{a_4\} = (A- 3\alpha , B) , ... \quad \{a_k\} = (A- (k-1)\alpha , B) , ... \tag{7.8}$$

dir. Buna göre R (a_k) için

$$R(a_k) = (A-(k-1)\alpha)^2 - (A-(k-1)\alpha-\alpha)^2$$

veya

$$R(a_k) = (A-(k-1)\alpha)^2 - (A-k\alpha)^2 \tag{7.9}$$

olarak buluruz. $[bkz(7.7)]$

Şimdi $E_n^{(1)}$ özdeğerlerini bulabiliriz. Bunun için $R(a_k)$ ' nın (7.9) ' da olan ifadesini (5.15) bağıntısında yerine yazalım.

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n}[(A-(k-1)\alpha)^2 - (A-k\alpha)^2]$$

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n}(A-(k-1)\alpha)^2 - \sum_{k=1}^{n}(A-k\alpha)^2 \tag{7.10}$$

Bu ifadeyi basitleştirmek için 1. toplamda,

$$s = k-1 \tag{7.11}$$

indis değişimi yapalım. Buna göre,

$$E_n^{(1)} = \sum_{s=0}^{n-1}(A-s\alpha)^2 - \sum_{k=1}^{n}(A-k\alpha)^2$$

$$= A^2 + \sum_{s=1}^{n-1}(A-s\alpha)^2 - \left[\sum_{k=1}^{n-1}(A-k\alpha)^2 + (A-n\alpha)^2\right] \tag{7.12}$$

olarak bulunur. (7.12) bağıntısındaki 2. ve 3. terimleri sadeleştirirsek $V_1(x;A,B)$ potansiyeli için enerji özdeğerlerini,

$$E_n^{(1)} = A^2 + (A-n\alpha)^2 \tag{7.13}$$

olarak buluruz.

Şimdi, $V_1(x; A,B)$ potansiyeli için $\Psi_0^{(1)}(x;A,B)$ taban durumu dalga fonksiyonunu (5.3) bağıntısından hesaplayalım. Süperpotansiyelin (7.1) bağıntısından

$$\int W(x;A,B)\,dx = Ax + \frac{B}{\alpha}\exp(-\alpha x) \tag{7.14}$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$\Psi_0(x;a_1) \sim \exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha}\exp(-\alpha x)\right\} \tag{7.15}$$

olarak bulunur. Burada, yeni y değişkeni ve s parametresi tanımlayalım.

$$y = \frac{2B}{\alpha}\exp(-\alpha x) \quad , \quad s = A/\alpha \tag{7.16}$$

Bu değişiklikten sonra,

$$\Psi_0(y;a_1) \sim y^s \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \tag{7.17}$$

olur. Uyarılmış x durum için dalga fonksiyonunu (5.17) bağıntısından hesaplayabiliriz. Örneğin, (5.17) bağıntısında n yerine 0 yazalım:

$$\Psi_1^{(1)}(x;a_1) \sim A^+(x;a_1)\,\Psi_0^{(1)}(x;a_2) \tag{7.18}$$

A^+ operatörünün (3.4) tanımı göz önüne alınırsa,

$$A^+(x;a_1) = -\frac{d}{dx} + A - B\exp(-\alpha x) \tag{7.19}$$

yazabiliriz. Ayrıca (7.15) bağıntısına göre,

$$\Psi_0(x;a_2) \sim exp\left\{-(A-\alpha)x - \frac{B}{\alpha}exp(-\alpha x)\right\} \tag{7.20}$$

olur. (7.19) ve (7.20) bağıntıları göz önüne alınırsa (7.18) bağıntısını

$\Psi_1^{(1)}$ ($x;a_1$) ~ (- $\frac{d}{dx}$ + A- B exp (- αx)) exp $\left\{-(A-\alpha)x-\frac{B}{\alpha}exp(-\alpha x)\right\}$ (7.21)

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$\Psi_1^{(1)}$ ($x;a_1$) ~ exp $\left\{-(A-\alpha)x-\frac{B}{\alpha}exp(-\alpha x)\right\}$ $[2A-\alpha-2Bexp\,(-\alpha x)]$ (7.22)

olarak buluruz.

SONUÇ

Bu çalışmada bir Hamiltonyenin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulmada kullanılan süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemlerini kısaca ele aldık. Çözümü bilinen bir Hamiltonyenden başlayarak aynı spektruma sahip (eş Hamiltonyenler olarak isimlendirilen) yeni Hamiltonyenlerin elde edilebileceğini gördük. Dolayısıyla eğer, eş Hamiltonyenlerden birinin çözümü biliniyorsa diğer eş Hamiltonyenin çözümü süpersimetri yöntemiyle elde edilebilir. Buna göre şekil değişmezliğin bulunuşu süpersimetrik kuantum mekaniğinde büyük önem taşır. Şekil değişmez potansiyeller için çözümler (eş potansiyellerden biri için çözümün önceden bilinmesine gerek kalmadan) süpersimetri ve şekil değişmezlik koşulundan direkt elde edilebilir.

Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri fiziğin pek çok alanında uygulanmaktadır [8]. Örneğin, nükleer fizikte singüler potansiyelleri elde etmede süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kullanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] E. Witten , ***Nucl. Phys***. B185, 513, (1981).

[2] L. Infeld and T. E. Hull , ***Rev. Mod. Phys***. , 23, 21, (1951).

[3] L. E. Gendenshtein , ***Sov. Phys. JETP Lett***., 38, 356, (1983).

[4] G. Junker , ***Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics***, Springer, Berlin, (1996).

[5] F. Cooper , A. Khare and U.P. Sukhatme , ***Supersymmetry in Quantum Mechanics,*** World Scientific, London, (2001).

[6] Bekir Karaoğlu , ***Kuantum Mekaniğine Giriş*** , 60-61, İstanbul, (1998).

[7] S. Flügge, ***Practical Quantum Mechanics*** , Sringer-Verlag , Berlin, (1974).

[8] C. V. Sukumar, ***Supersymmetric Quantum Mechanics and Its Aplications***, University of Oxford, Oxford, (1996).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Lüleburgaz'da doğdum. İlkokulu Lüleburgaz Yenitaşlı Köyü, ortaokulu Lüleburgaz Merkez Ortaokulunda, liseyi Lüleburgaz Lisesinde okudum.1995 yılında İstanbul Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliğini kazandım.1999 yılında mezun oldum. Aynı yıl Kırklareli ilinin Vize ilçesine öğretmen olarak atandım. 2005-2008 yıllarında Lüleburgaz Kepirtepe Anadolu Öğretmen Lisesi, 2009-2012 yılları arası Lüleburgaz Atatürk Anadolu Lisesi, 2013-2014 Babaeski Şehit Ersan Yenici Anadolu Lisesi ve 2014 -2015 eğitim-öğretim yılında Lüleburgaz Anadolu İmam Hatip Lisesinde çalıştım. 2012 yılında Trakya Üniversitesinde Yüksek Enerji Ve Plazma Fiziği Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladım ve devam etmekteyim.