T. C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRİLMİŞ CİSİMLERİN GENİŞLEMELERİ VE DEĞERLENDİRİLMİŞ CİSİMLER ÜZERİNDE BAZI ASALLIK KRİTERLERİ

YÜCEL YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. FiGEN ÖKE

EDİRNE-2015

T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

.....

Prof. Dr. Hülya İŞCAN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....

Doç. Dr. Figen ÖKE

Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Doç. Dr. Figen ÖKE	.....
Yrd. Doç. Dr. Figen UYSAL	.....
Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ	.....

Tarih: 10 / 07 / 2015

T. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

10 / 07 / 2015

Yücel YILMAZ

İmza



Yüksek Lisans Tezi

Değerlendirilmiş Cisimlerin Genişlemeleri Ve Değerlendirilmiş Cisimlerde Bazı Asallık Kriterleri

T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

1. Bölümde konunun literatürdeki yeri ile ilgili ön bilgiler verilmiştir.

2. Bölümde değerlendirmeler, placeler ve cisim genişlemeleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

3. Bölümde değerlendirmelerin genişlemeleri ve genişlemelerinin sayısı incelenmiştir.

4. Bölümde bir K cismi üzerinde tanımlı değer grubu toplamsal olan değerlendirmelerin $K(x)$ cismine tüm genişlemeleri sınıflandırılmıştır.

5. Bölümde ise değerlendirilmiş cisimlerde bazı asallık kriterlerinin nasıl uygulandığı ve bu kriterlerle ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir.

Yıl: 2015

Sayfa Sayısı: 94

Anahtar Kelimeler: Değerlendirme, Değer Grubu, Değerlendirme Halkası, Rezidü Cismi, Değerlendirmelerin Rankları, Değerlendirmelerin Genişlemeleri, Rezidül Transandant Genişlemeler, Rezidül Cebirsel Genişlemeler, Asallık Kriterleri.

Master Thesis

Extensions of Valued Fields and Some Irreducibility Criterions over Valued Fields

Trakya Üniversity Institute of Natural Sciences

Mathematics Research Area

ABSTRACT

In Chapter 1, basic information about the position of the subject in literature is given.

In Chapter 2, fundamental knowledge relavant to valuations, places and field extensions is given.

In Chapter 3, extensions of valuations and number of the extensions are studied.

In Chapter 4, all extensions of valuations whose value groups are additive group on a field K to field $K(x)$ are categorized.

In Chapter 5, some irreducibility criterions and how they are practiced over a valued field K are handled and then several results related to the criterions are analyzed.

Year: 2015

Number of Pages: 94

Keywords: Valuation, Value Group, Valuation Ring, Residue Field, Rank of Valuations, Extensions of Valuations, Residual Transcendental Extensions, Residual Algebraic Extensions, Irreducibility Criterions.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalışmalarım sırasında çok yakın ilgi göstererek hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Figen ÖKE'ye ve emeği geçen tüm değerli hocalarıma en derin saygı ve en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yücel YILMAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET……..I

ABSTRACT……...…...II

ÖNSÖZ……III

İÇİNDEKİLER…….....……IV

SİMGELER DİZİNİ…….……..…VI

ŞEKİLLER LİSTESİ…….…VIII

1. GİRİŞ……..…….……1

2. GENEL BİLGİLER…….……....4

2.1. Değerlendirmeler……..…..4

2.2. Değerlendirmelerin Denkliği…….....….22

2.3. Bir Cismin Bir Değerlendirmeye Göre Tamlanışı……..…....25

2.4. Değerlendirmelerin Rankları……..…..27

2.5. Placeler……..……...30

2.6. Cisim Genişlemeleri……..…….…36

3. BİR DEĞERLENDİRMENİN GENİŞLEMELERİ VE GENİŞLEMELERİNİN SAYISI…….……..…..…39

3.1. Değerlendirmelerin Genişlemeleri……...……...….**.....**39

3.2. Bir Değerlendirmenin Genişlemelerinin Sayısı…….**.....**45

4. *K* CİSMİNİN DEĞERLENDİRMELERİNİN *K(x)* CİSMİNE GENİŞLEMELERİ……..…….…….49

4.1. *K* cisminin Değerlendirmelerinin *K(x)* Cismine Rezidül Transandant Genişlemeleri…….…**....**49

4.2. *K* cisminin Değerlendirmelerinin *K(x)* Cismine Rezidül Cebirsel Genişlemeleri……..…..64

5. DEĞERLENDİRİLMİŞ CİSİMLERDE BAZI ASALLIK KRİTERLERİ.....78

KAYNAKLAR……....95

ÖZGEÇMİŞ……..……..…96

SİMGELER DİZİNİ

v : değerlendirme

Γ_v : v değerlendirmesinin değer grubu

$\Gamma(K)$: v değerlendirmesinin K cismine genişlemesinin veya kısıtlanışının değer grubu

V, V_v, O_v : v değerlendirmesinin değerlendirme halkası

P, P_v, M_v : v nin değerlendirme halkasının maksimal ideali

U, U_v : v nin değerlendirme halkasının birim grubu

k_v : v değerlendirmesinin rezidü cismi

$\overline{K}$: K cisminin cebirsel kapanışı

$\bar{v}$: v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi

$\widehat{K}$: K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı

$\mathbb{Q}_p$: $p-$adik sayılar cismi

K/F : F cisminin K genişlemesi

$[K:F]$: K/F cisim genişlemesinin derecesi

$boy_F K$: K cisminin F cismi üzerindeki boyutu

$a\ ayr/F$: a, F cismi üzerinde ayrılabilir eleman

$a\ ceb/F$: a, F cismi üzerinde cebirsel eleman

$a\ trans/F$: a, F cismi üzerinde transandant eleman

$Irr(a,K)$: a nın K cismi üzerindeki minimal polinomu

KF : K ve F cisimlerini kapsayan en küçük cisim

$Çekf$: f dönüşümünün çekirdeği

$N_{K/F}(a)$: $a \in K$ elemanının F cismi üzerindeki normu

$T_{K/F}(a)$: $a \in K$ elemanının F cismi üzerindeki trace'i

$v_1 \circ v_2$: v_1 ve v_2 değerlendirmelerinin bileşkesi

$\| . \|$: norm

w/v : w, v değerlendirmesinin genişlemesi

$e, e(w/v)$: w/v genişlemesinin dallanma indeksi

$f, f(w/v)$: w/v genişlemesinin rezidü derecesi

$\bar{x}, x^*$: $x \in V$ elemanının $\varphi : V \longrightarrow V/P$ doğal homomorfizması altındaki görüntüsü

$\bar{f}, f^*$: f polinomunun tüm katsayılarının $\varphi : V \longrightarrow V/P$ doğal homomorfizması altındaki görüntüleri ile değiştirilmesiyle elde edilen polinom

$\omega_K(a)$: a elemanının Krasner sabiti

Kısaltmalar

r.c. : rezidül cebirsel

r.c.t. : rezidül cebirsel torsion

r.t. : rezidül transandant

s.r.c. : serbest rezidül cebirsel

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No: **Sayfa No:**

Şekil 3.1……...45

Şekil 4.1……...53

Şekil 4.2……...54

Şekil 4.3……...56

Şekil 4.4……...59

Şekil 4.5……..74

Şekil 4.6……...76

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Değerlendirmeler çok eski zamanlardan beri matematiğin içinde var olmalarına rağmen, Değerlendirme Teorisi ayrı ve sistematik bir araştırma alanı olarak ilk defa 1912 yılında Macar matematikçi Josef Kürschàk tarafından "Cambridge International Congress of Matematicians" ta ortaya konulan bir dizi aksiyomun üzerine temellendirilmiştir. Kürschàk burada bir K cisminden alınan a ve b elemanları için

$a \neq 0$ *ise* $\|a\| > 0$ *ve* $\|0\| = 0$,

$\|1 + a\| \leq 1 + \|a\|$,

$\|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|$,

$\exists a : \|a\| \neq 0,1$

aksiyomlarını ortaya koymuştur. Burada $\|a\|$ değeri bir reel sayı idi ve Kürschàk değerlendirmeyi "Bewtung" olarak isimlendiriyordu. Kürschàk, Alman matematikçi Kurt Hensel'in "Theorie der Algebraischen Zahlen (1908)" kitabından esinlenerek bu konuda çalışmaya başladığını açıkça ifade ediyordu ve temel amacı Hensel'in tanımladığı p −adik cisimler teorisi için sağlam bir temel oluşturmaktı. Sonraki yıllarda değerlendirme teorisindeki metot ve kavramlar kullanılarak cebirsel sayılar teorisinin daha iyi anlaşılabildiğinin keşfedilmesi bu konudaki gelişmeleri tetikledi ve hızlı bir ilerleme kaydedildi. Kürschàk'ın başlattığı Değerlendirme Teorisi alanındaki

çalışmaları Rus matematikçi Alexander Ostrowski önemli ölçüde ilerletti. Yine Alman matematikçi Helmut Hasse, Hensel'in "Zahlentheorie (1913)" kitabından etkilenerek bu konuda çalışmaya başlamış ve çok önemli katkılar yapmıştır. Fransız matematikçi Claude Chevalley ve Alman matematikçi Max Deuring de bu yıllarda Değerlendirme Teorisi alanında önemli çalışmaları olan bilim adamlarıdır. 1931 yılında Alman matematikçi Wolfgang Krull değerlendirme için daha genel ve evrensel bir tanım vererek değerlendirmenin değer gruplarını reel sayılardan herhangi bir tam sıralı gruba genellemiştir. Bu tanım değerlendirme teorisinin cebirsel geometri ve fonksiyonel analiz gibi matematiğin farklı disiplerinde uygulanabilmesine olanak sağlamıştır.

Bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri 1967 yılında Masayoshi Nagata tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmaların ışığında 1988 ve 1990 yıllarında Victor Alexandru, Nicolae Popescu ve Alexandru Zaharescu yaptıkları çalışmalarda bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri ve bu genişlemeleri tanımlayan minimal çiftleri belirlemişlerdir. Yine bu grup tarafından 1990 yılında bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine tüm genişlemeleri elde edilmiştir. 1990 ve 1992 yıllarından Sudesh Kaur Khanduja ve Usha Garg tarafından K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine genişlemeleri ve bu genişlemelerin rankları çalışılmıştır. 1982, 1983, 1985 ve 1990 yıllarında Jack Ohm ve Michel Matignon tarafından da bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri ve bu genişlemelerin tekliği ele alınmıştır.

1850 yılında Ferdinand Gotthold Max Eisenstein'ın bulduğu katsayıları tamsayı olan polinomlara uygulanabilen Eisenstein asallık kriteri 1906 yılında Gustave Dumas tarafından genellenmiştir. Değerlendirme tanımının ortaya konmasının ardından Dumas asallık kriteri 1923 yılında Kürschàk tarafından katsayıları, üzerinde ayrık bir değerlendirme tanımlı olan herhangi bir cisimden alınan polinomlara genellenmiştir. Eisenstein-Dumas-Kürschàk kriteri olarak bilinen bu kriter Wolfgang Krull'un değerlendirmelerin değer gruplarını reel sayılardan herhangi bir tam sıralı gruba genellemesinin ardından da 1997 yılında Sudesh Kaur Khanduja ve Jayanti Saha tarafından bu cisimlere genellenmiştir ve bu kriteri sağlayan polinomlar bir v değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olarak adlandırılmıştır.

Eisenstein'ın 1850'de bulduğu kriterden önce Theodor Schönemann 1846 yılında bu kriterin daha genel bir versiyonunu yayınlamıştı. Klasik Schönemann asallık kriteri olarak bilinen bu kriter de 1997 yılında Jayanti Saha tarafından genellenmiştir.

Bu çalışmanın 3. ve 4. Bölümlerinde, 2. bölümdeki çalışmalardan yararlanarak bir değerlendirmenin genişlemeleri derinlemesine incelenmiştir. Son bölümde yapılan çalışmalar ise önceki bölümlerde yapılanların bir uygulaması niteliğindedir. Yine son bölümde yukarıda bahsedilen asallık kriterleri ile ilgili 2000 yılında Sudesh Kaur Khanduja ve Anuj Bishnoi tarafından yayınlanan bazı sonuçlar incelenmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölüm altı kısımdan oluşmaktadır. Sırasıyla değerlendirmelerin tanımı ve genel özellikleri, değerlendirmelerin denkliği, bir cismin bir değerlendirmeye göre tamlanışı, değerlendirmelerin rankları, placeler ve cisim genişlemeleri yer almaktadır.

2.1. Değerlendirmeler

2.1.1. Tanım: Γ boş olmayan bir küme ve "$<$", Γ üzerinde bir bağıntı olsun. "$<$" bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa, "$<$" bağıntısına Γ üzerinde bir sıralama bağıntısı denir.

2.1.2. Tanım: Γ çarpımsal (veya toplamsal) değişmeli bir grup ve "$<$" (veya $>$), Γ üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y, z \in \Gamma$ için;

i) $x < y, y < z \implies x < z$ (veya $x > y, y > z \implies x > z$),

ii) $x < y, x = y, y < x$ (veya $x > y, x = y, y > x$)

durumlarından yalnız biri sağlanır,

iii) $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (veya $x > y \Rightarrow x + z > y + z$)

koşulları sağlanıyorsa Γ grubuna, üzerindeki "$<$" (veya $>$) bağıntısı ile çarpımsal (veya toplamsal) bir tam sıralı grup denir.

2.1.3. Önerme: Γ bir çarpımsal grup olsun. Γ grubunun $\Gamma = S \cup \{0\} \cup S^{-1}$ ayrık birleşim olacak biçimde bir S normal alt yarı grubu varsa Γ tam sıralı gruptur.[1]

2.1.4. Tanım: K bir cisim ve Γ çarpımsal bir sıralı grup olsun. $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ dönüşümü her $a, b \in K$ için

V1) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

V2) $v(a \cdot b) = v(a) \cdot v(b)$,

V3) $v(a + b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$

şartlarını sağlıyorsa v dönüşümüne K cismi üzerinde değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirme adı verilir.[1]

2.1.5. Tanım: K bir cisim ve Γ toplamsal bir sıralı grup olsun. $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ dönüşümü her $a, b \in K$ için

V1) $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$

V2) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$

V3) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

şartlarını sağlıyorsa v dönüşümüne K cismi üzerinde değer grubu toplamsal olan bir değerlendirme adı verilir.[1]

2.1.6. Tanım: 2.1.4. Tanım ve 2.1.5. Tanımları'ndaki Γ sıralı grubuna v değerlendirmesinin değer grubu denir.[1]

2.1.7. Tanım: K bir cisim olsun. $v : K \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü her $a, b \in K$ için

i) $v(a) \geq 0$,

ii) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

iii) $v(a \cdot b) = v(a) \cdot v(b)$,

iv) $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$

şartlarını sağlıyorsa v dönüşümüne K cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi veya K cisminin mutlak değeri adı verilir.[2]

2.1.8. Tanım: 2.1.7. Tanımı'ndaki v değerlendirmesi her $a, b \in K$ için

$v(a + b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$

şartını sağlıyorsa v değerlendirmesine Arşimetsel olmayan değerlendirme, sağlamıyorsa Arşimetsel değerlendirme adı verilir.[2]

2.1.9. Örnek: $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, her $a \in \mathbb{R}$ için

$$v(a) = \begin{cases} a \ , \ a > 0 \ ise \\ 0 \ , \ a = 0 \ ise \\ -a \ , \ a < 0 \ ise \end{cases}$$

ile tanımlanan adi mutlak değer bir Arşimetsel değerlendirmedir.[2]

2.1.10. Örnek: $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, her $z = a + i \cdot b \, \epsilon \, \mathbb{C}$ için

$v(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$

ile tanımlanan v bir Arşimetsel değerlendirmedir.[2]

2.1.11. Önerme: K bir cisim ve v, K cisminin Γ değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesi olsun.

i) $v(1_K) = v(-1_K) = 1$,

ii) Her $a \in K$ için $v(a) = v(-a)$,

iii) Her $a \in K$ için $v(a^{-1}) = v(a)^{-1}$,

iv) Her $a, b \in K$ için $v(a) \neq v(b) \Rightarrow v(a + b) = max\{v(a), v(b)\}$

koşulları gerçeklenir.[1]

2.1.12. Önerme: K bir cisim ve v, K cisminin Γ değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesi olsun. Her $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ için

i) $v(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq max\{v(a_1), v(a_2), \dots, v(a_n)\}$

ii) Her $i = 2, 3, \dots, n$ için $v(a_i) < v(a_1)$ ise $v(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = v(a_1)$

iii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ ise en az bir $i \neq j$, $i, j \in \{1,2, \dots n\}$ için $v(a_i) = v(a_j)$

koşulları sağlanır.[1]

2.1.13. Önerme: K bir cisim ve v, K cisminin Γ değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi olsun.

i) $v(1_K) = v(-1_K) = 0$

ii) Her $a \in K$ için $v(a) = v(-a)$

iii) Her $a \in K$ için $v(a^{-1}) = -v(a)$

iv) Her $a, b \in K$ için $v(a) \neq v(b) \Rightarrow v(a + b) = min\{v(a), v(b)\}$

koşulları gerçeklenir.[1]

2.1.14. Önerme: K bir cisim ve v, K cisminin Γ değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi olsun. Her $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ için

i) $v(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq min\{v(a_1), v(a_2), \dots, v(a_n)\}$

ii) Her $i = 2, 3, \dots, n$ için $v(a_i) > v(a_1)$ ise $v(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = v(a_1)$

koşulları sağlanır.[1]

2.1.15. Tanım: K bir cisim ve V, K cisminin bir alt halkası olmak üzere $a \in K^* = K\backslash\{0\}$ iken $a \in V$ veya $a^{-1} \in V$ oluyorsa V halkasına K cisminin bir değerlendirme halkası adı verilir. V, K cisminin birimli alt halkasıdır.[1]

2.1.16. Tanım: K bir cisim ve V, K cisminin bir değerlendirme halkası olmak üzere $P = \{a \in V | a^{-1} \notin V\}$ kümesi V değerlendirme halkasının tek maksimal idealidir.[1]

2.1.17. Tanım: K bir cisim ve V, K cisminin bir değerlendirme halkası olmak üzere $U = \{a \in V | a^{-1} \in V\}$ kümesi bir gruptur ve bu gruba V değerlendirme halkasının birim grubu adı verilir.[1]

2.1.18 Sonuç: K bir cisim olmak üzere V, K cisminin bir değerlendirme halkası, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali P ve birim grubu U olsun. $(P\backslash\{0\})^{-1}$, P nin sıfırdan farklı elemanlarının tersleri kümesi olmak üzere K cismi

$$K = P \cup U \cup (P\backslash\{0\})^{-1}$$

olarak ayrık kümelerin birleşimi biçiminde yazılabilir. Ayrıca $P \cup U = V$ olur.[1]

2.1.19. Sonuç: K bir cisim, V_1 ve V_2 de K cisminin iki değerlendirme halkası, V_1 ve V_2 değerlendirme halkalarının tek maksimal idealleri sırasıyla P_1 ve P_2, birim grupları sırasıyla U_1 ve U_2 olmak üzere

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow P_1 \supseteq P_2 \Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$$

sağlanır.[1]

2.1.20. Lemma: Birimli halkanın bir ideali halkanın birimini kapsarsa bu ideal halkaya eşittir.[3]

2.1.21. Önerme: K bir cisim ve v, K cisminin Γ değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesi olmak üzere v değerlendirmesine karşılık gelen V değerlendirme halkası, V nin P maksimal ideali ve U birim grubu sırasıyla

i) $V = \{a \in K \mid v(a) \leq 1\}$

ii) $P = \{a \in V \mid v(a) < 1\}$

iii) $U = \{a \in V \mid v(a) = 1\}$

kümelerine karşılık gelir.[2]

Kanıt:

i) $a, b \in V$ ise $v(a) \leq 1, v(b) \leq 1$ dir.

$v(a \cdot b) = v(a) \cdot v(b) \leq 1$ olduğundan $a \cdot b \in V$ (2.1)

$v(a-b) = v\big(a + (-b)\big) \leq max\{v(a), v(-b)\} = max\{v(a), v(b)\} \leq 1$ olduğundan $a - b \in V$ dir. (2.2)

$v(1_K) = 1 \leq 1$ olduğundan $1_K \in V$ dir. (2.3)

(2.1), (2.2) ve (2.3) den V, K nın birimli alt halkasıdır.

$v(a) < 1 \Rightarrow v(a^{-1}) = v(a)^{-1} > 1$ olduğundan $a^{-1} \notin V$ ve

$v(a) = 1 \Rightarrow v(a^{-1}) = v(a)^{-1} = 1$ olduğundan $a^{-1} \in V$ dir.

O halde V kümesi K nın bir değerlendirme halkasıdır.

ii) $a, b \in P$ ve $r \in V$ ise $v(a) < 1, v(b) < 1$ ve $v(r) \leq 1$ dir.

$v(a-b) = v\big(a + (-b)\big) \leq \max\{v(a), v(-b)\} = \max\{v(a), v(b)\} < 1$

olduğundan $a - b \in P$ sağlanır. (2.4)

$v(a \cdot r) = v(r \cdot a) = v(r) \cdot v(a) < 1$ olduğundan $a \cdot r, r \cdot a \in P$. (2.5)

Dolayısıyla (2.4) ve (2.5) ten P V nin idealidir.

V nin bir I ideali için $I \not\subset P \Rightarrow I = V$ olacağı gösterilirse P nin tek maksimal ideal olduğu görülür.

$x \in I$ ve $x \notin P$ olsun.

$v(x) = 1$ olduğundan $v(x^{-1}) = 1$ olur.

I ideal olduğundan $x \cdot x^{-1} = 1 \epsilon I$ olur.

Bu durumda $1 \epsilon I$ olduğundan 2.1.20. Lemma'dan $I = V$ olduğu sonucu elde edilir. Dolayısıyla P V nin tek maksimal idealidir.

iii) $(\Rightarrow:)$ $a, a^{-1} \in V$ olsun.

$v(a) \leq 1$ dir.

$v(a^{-1}) \leq 1$ olduğundan $v(a) \geq 1$ olur.

$v(a) = 1$ ise $a \in U$ dur.

$(\Leftarrow:)$ $a \in U$ ise $v(a) = 1$ dir.

$v(a^{-1}) = v(a)^{-1} = 1$ ise $a^{-1} \in U$ sağlanır.

Bu durumda U, V nin terslenebilir elemanlarından oluşur. Yani U, V nin birim grubudur.

2.1.22. Önerme: K bir cisim, v K cisminin Γ değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi olmak üzere v değerlendirmesine karşılık gelen V değerlendirme halkası, V değerlendirme halkasının P maksimal ideali ve U birim grubu sırasıyla

i) $V = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$

ii) $P = \{a \in V \mid v(a) > 0\}$

iii) $U = \{a \in V \mid v(a) = 0\}$

kümelerine karşılık gelir.[2]

Kanıt:

i) $a, b \in V$ ise $v(a) \geq 0, v(b) \geq 0$ dir.

$v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \geq 0$ olduğundan $a \cdot b \in V$ (2.6)

$v(a - b) = v\big(a + (-b)\big) \geq min\{v(a), v(-b)\} = min\{v(a), v(b)\} \geq 0$ olduğundan $a - b \in V$ olur. (2.7)

$v(1_K) = 0 \geq 0$ olduğundan $1_K \in V$ dir. (2.8)

(2.6), (2.7) ve (2.8) den V K nın birimli alt halkası olduğu görülür.

$v(a) > 0 \Rightarrow v(a^{-1}) = -v(a) < 0$ olduğundan $a^{-1} \notin V$ ve

$v(a) = 0 \Rightarrow v(a^{-1}) = -v(a) = 0$ olduğundan $a^{-1} \in V$ dir.

Dolayısıyla V K nın bir değerlendirme halkasıdır.

ii) $a, b \in P$ ve $r \in V$ ise $v(a) > 0, v(b) > 0$ ve $v(r) \geq 0$ dır.

$v(a-b) = v\big(a + (-b)\big) \geq \min\{v(a), v(-b)\} = \min\{v(a), v(b)\} > 0$

olduğundan $a - b \in P$ dir. (2.9)

$v(a \cdot r) = v(r \cdot a) = v(r) + v(a) > 0$ olduğundan $a \cdot r, r \cdot a \in P$ olur. (2.10)

(2.9) ve (2.10) dan P V nin idealidir.

V nin bir I ideali için $I \subset P \Rightarrow I = V$ olduğu gösterilirse P nin V nin tek maksimal ideali olduğu görülür.

$x \in I$ ve $x \notin P$ olsun.

$x \notin P$ olduğundan $v(x) = 0$

$v(x^{-1}) = -v(x) = 0 \Rightarrow x^{-1} \in V$

I ideal olduğundan $x \cdot x^{-1} = 1 \epsilon I$ olur.

$1 \epsilon I$ olduğundan 2.1.20. Lemma'dan $I = V$ olur. Bu durumda P V nin tek maksimal idealidir.

iii) ($\Rightarrow$:) $a, a^{-1} \in V$ olsun.

$v(a) \geq 0$ dır.

$v(a^{-1}) \geq 0 \Rightarrow v(a^{-1}) = -v(a) \geq 0 \Rightarrow v(a) \leq 0$ sağlanır.

$v(a) = 0$ ise $a \in U$ dur.

($\Leftarrow$:) $a \in U$ ise $v(a) = 0$ dir.

$v(a^{-1}) = -v(a) = 0$ ise $a^{-1} \in U$

Görüldüğü üzere U, V nin terslenebilir elemanlarından oluşur. Yani U, V nin birim grubudur.

2.1.23. Lemma: Birimli ve değişmeli bir R halkasının bir M idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır.[3]

2.1.24. Tanım: K bir cisim, v K cismi üzerinde bir değerlendirme, V v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası, P V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali olmak üzere V/P kümesi bir cisimdir ve bu cisme v değerlendirmesinin rezidü cismi adı verilir.[1]

2.1.25. Önerme: K bir cisim olsun. K cisiminin her değerlendirme halkasına karşılık gelen Arşimetsel olmayan bir değerlendirmesi vardır.[1]

Kanıt: V K cisminin bir değerlendirme halkası, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali P ve birim grubu U olsun. $v : K \longrightarrow K^*/U \cup \{0\}$, her $a \in K$ için

$$v(a) = \begin{cases} aU & , \ a \neq 0 \\ 0 & , \ a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v dönüşümü K cisminin bir değerlendirmesidir.

İlk önce K^*/U grubunun bir sıralı grup olduğu gösterilecek.

$S = \{ aU \mid a \in P^* = P - \{0\} \}$ kümesini tanımlayalım. S yarı gruptur ve K cisim olduğundan S normal alt yarı gruptur. $K^* = P^* \cup U \cup (P^*)^{-1}$ olduğundan $K^*/U = S \cup \{1\} \cup S^{-1}$ de kümelerin ayrık birleşimi olur. O zaman 2.1.3. Önerme'den K^*/U sıralı gruptur.

Şimdi de v dönüşümünün değerlendirme olduğunu görelim. Her $a, b \in K^*$ için

V1) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

V2) $v(ab) = (ab)U = (aU)(bU) = v(a)v(b)$

V3) $v(a) \leq 1$ ise $v(1 + a) \leq 1 + v(a)$ ve $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$ ifadeleri denktir. Bu durumda $v\left(\frac{a}{b}\right) \leq 1$ ise $v\left(1 + \frac{a}{b}\right) \leq 1 + v\left(\frac{a}{b}\right)$ olacağından $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$ bulunur. O zaman $v(a) \leq 1$ ise $v(1 + a) \leq 1$ ifadesi $v(a + b) \leq max\{v(a), v(b)\}$ ifadesine denktir. $v(a) = aU \leq 1$ olsun. $a \in V$ olduğundan $1 + a \in V$ olur. Yani $v(1 + a) \leq 1$ dir. O zaman $v(a + b) \leq max\{v(a), v(b)\}$ sağlanır.

O halde v, değer grubu K^*/U olan bir değerlendirmedir. Dolayısıyla K cisiminin her değerlendirme halkasına karşılık gelen Arşimetsel olmayan bir değerlendirmesi vardır.

2.1.26. Örnek: K bir cisim ve $a \in K$ olsun. $v : K \longrightarrow \{1\} \cup \{0\}$,

$$v(a) = \begin{cases} 1 & , \ a \neq 0 \\ 0 & , \ a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v dönüşümü değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmedir. Bu değerlendirmeye K cisminin aşikar değerlendirmesi denir.

v değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \{1\}$,

v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = K$,

V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \{0\}$,

V değerlendirme halkasının birim grubu $U = K^* = K\backslash\{0\}$,

v değerlendirmesini rezidü cismi $V/P = K/\{0\} \cong K$ dir.[1]

2.1.27. Örnek: K bir cisim ve $a \in K$ olsun. $v : K \longrightarrow \{0\} \cup \{\infty\}$,

$$v(a) = \begin{cases} 0 & , \ a \neq 0 \\ \infty & , \ a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v dönüşümü değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmedir. Bu değerlendirme de K cisminin aşikar değerlendirmesidir.

v değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \{0\}$,

v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = K$,

V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \{0\}$,

V değerlendirme halkasının birim grubu $U = K^* = K\backslash\{0\}$,

v değerlendirmesinin rezidü cismi $V/P = K/\{0\} \cong K$ dir.[1]

2.1.28. Sonuç: Her K cismi üzerinde aşikar değerlendirme tanımlanabilir.[2]

2.1.29. Örnek: $n, u, v \in \mathbb{Z}$, p bir asal sayı, $(u, v) = 1$, $(p, u \cdot v) = 1$ olmak üzere her $a \in \mathbb{Q}$ sayısı $a = p^n \frac{u}{v}$ biçiminde tek türlü yazılır. Her $a \in \mathbb{Q}$ sayısı için $v_p(a) : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$,

$$v_p = \begin{cases} p^{-n} & , \ a \neq 0 \\ 0 & , \ a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_p dönüşümü değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler ve $\mathbb{Q}$ cisminin Γ değer grubu çarpımsal olan p −adik değerlendirmesi olarak adlandırılır.

v_p değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{Q}^+$, v_p değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n \geq 0 \right\} = \mathbb{Z}$, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n > 0 \right\} = p\mathbb{Z}$, V değerlendirme halkasının birim grubu $U = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n = 0 \right\}$ ve v_p değerlendirmesinin rezidü cismi $V/P = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ dir.[1]

2.1.30. Önerme: 2.1.29. Örneği'ndeki v_p değerlendirmesi yardımıyla $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(a, b) = v_p(a - b)$ biçiminde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde bir metriktir.[1]

2.1.31. Örnek: Her $a \in \mathbb{Q}$ sayısı için $v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

$$v_p(a) = \begin{cases} n & , \ a \neq 0 \\ \infty & , \ a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_p dönüşümü değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler ve bu değerlendirme de $\mathbb{Q}$ cisminin değer grubu toplamsal olan p −adik değerlendirmesidir.

v_p değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{Q}$, v_p değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n \geq 0 \right\} = \mathbb{Z}$, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n > 0 \right\} = p\mathbb{Z}$, V değerlendirme halkasının birim grubu $U = \left\{ a = p^n \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} \middle| \ n = 0 \right\}$ ve v_p değerlendirmesinin rezidü cismi $V/P = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ dir.[1]

2.1.32. Örnek: $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cismi üzerinde $c \in \mathbb{R}, 0 < c < 1$ olmak üzere her $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x), q(x) \neq 0$ için $v_c : K(x) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$v_c\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \begin{cases} c^{degq(x)-degp(x)} & , \frac{p(x)}{q(x)} \neq 0 \\ 0 & , \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_c dönüşümü değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmedir. Bu değerlendirmeye sonsuzdaki değerlendirme adı verilir.

v_c değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{R}^+$, v_c değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) \leq der\ q(x)\right\}$, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) < der\ q(x)\right\}$, V değerlendirme halkasının birim grubu $U = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) = der\ q(x)\right\}$ biçimindedir.[5]

2.1.33. Örnek: $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cismi üzerinde her $\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x)$, $q(x) \neq 0$ için $v_c : K(x) \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

$$v_c\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \begin{cases} degq(x) - degp(x) & , \frac{p(x)}{q(x)} \neq 0 \\ \infty & , \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_c dönüşümü de $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cisminin sonsuzdaki değerlendirmesidir ve v_c nin değer grubu toplamsal bir gruptur.

v_c değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{Q}$, v_c değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) \leq der\ q(x)\right\}$, V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali $P = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) < der\ q(x)\right\}$, V değerlendirme halkasının birim grubu $U = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \in K(x) \middle| der\ p(x) = der\ q(x)\right\}$ biçimindedir.[5]

2.1.34. Örnek: K bir cisim, $p(x) \in K[x]$ asal bir polinom olsun. $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cisminin sıfırdan farklı her elemanı $p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)}$, $\big(u(x), v(x)\big) = 1$, $\big(p(x), u(x) \cdot v(x)\big) = 1$, $v(x) \neq 0$ biçiminde tek şekilde yazılır. $d \in \mathbb{R}, 0 < d < 1$ olmak üzere her $p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \in K(x)$ için $v_d : K(x) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$v_d\left(p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)}\right) = \begin{cases} d^{-n} \ , \ p(x)^n \dfrac{u(x)}{v(x)} \neq 0 \\ 0 \ , \ p(x)^n \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_d, $K(x)$ in değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesidir. Bu değerlendirmeye $p(x)$ −adik değerlendirme adı verilir.

v_d değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{R}^+$, v_d ye karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \in K(x) \middle| \, n \geq 0\right\} = K[x]$, V nin tek maksimal ideali $P = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \middle| \, n > 0\right\} = (\, p(x)\,)$, V nin birim grubu $U = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \middle| \, n = 0\right\}$ ve v_d değerlendirmesinin rezidü cismi, a $p(x)$ polinomunun bir kökü olmak üzere $V/P = K[x]/(\, p(x)) \cong K(a)$ biçimindedir.[5]

2.1.35. Örnek: Her $p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \in K(x)$ için $v_d : K(x) \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$,

$$v_d\left(p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)}\right) = \begin{cases} n \ , \ p(x)^n \dfrac{u(x)}{v(x)} \neq 0 \\ \infty \ , \ p(x)^n \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v_d dönüşümü değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler ve bu değerlendirme de $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cisminin değer grubu toplamsal olan $p(x)$ −adik değerlendirmesidir.

v_d değerlendirmesinin değer grubu $\Gamma = \mathbb{Q}$, v_d ye karşılık gelen değerlendirme halkası $V = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \in K(x) \middle| \, n \geq 0\right\} = K[x]$, V nin tek maksimal ideali $P = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \middle| \, n > 0\right\} = (\, p(x)\,)$, V nin birim grubu $U = \left\{p(x)^n \frac{u(x)}{v(x)} \middle| \, n = 0\right\}$ ve v_d değerlendirmesinin rezidü cismi $V/P = K[x]/(\, p(x)) \cong K(a)$ biçimindedir.[5]

2.1.36. Örnek: v_x, $\mathbb{Q}(x)$ rasyonel fonksiyonlar cisminin toplamsal $x-$adik değerlendirmesi, v_p $\mathbb{Q}$ cisminin toplamsal $p-$adik değerlendirmesi ve her $0 \neq f(x) \in \mathbb{Q}(x)$ için $f^* = f/x^{v_x(f)}$ olsun. Her $0 \neq f(x) \in \mathbb{Q}(x)$ için

$$v\big(f(x)\big) = \big(v_x\big(f(x)\big), v_p\big(f^*(x)\big)\big)$$

biçiminde tanımlanan v, $\mathbb{Q}(x)$ cisminin değer grubu lexicographically sıralı $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubu olan bir değerlendirmesidir.

2.1.37. Önerme: K bir cisim, v K cisminin değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi olsun. $s \epsilon \mathbb{R}, 1 < s$ olmak üzere

$$v'(a) = \begin{cases} s^{-v(a)} & , \ a \neq 0 \\ 0 & , \ a = 0 \end{cases}$$

dönüşümü, v değerlendirmesi kullanılarak değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirme tanımlar.[2]

Kanıt: $a, b \in K$ olsun.

V1) $v'(a) = 0 \Leftrightarrow s^{-v(a)} = 0 \Leftrightarrow -v(a) = -\infty \Leftrightarrow v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$

V2) $v'(a \cdot b) = s^{-v(a \cdot b)} = s^{-v(a)-v(b)} = s^{-v(a)} \cdot s^{-v(b)} = v'(a) \cdot v'(b)$

V3) $v(a) \leq v(b)$ olsun.

$$v'(a+b) = s^{-v(a+b)} \leq s^{-v(a)} = max\big\{s^{-v(a)}, s^{-v(b)}\big\} = max\{\, v'(a), v'(b)\}$$

2.1.38. Önerme: K bir cisim, v K cisminin değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesi olsun. $s \epsilon \mathbb{R}, 1 < s$ olmak üzere

$$v'(a) = \begin{cases} -\log_s v(a) & , \ a \neq 0 \\ \infty & , \ a = 0 \end{cases}$$

dönüşümü, v değerlendirmesi kullanılarak değer grubu toplamsal olan bir değerlendirme tanımlar.[2]

Kanıt: $a, b \in K$ olsun.

V1) $v'(a) = \infty \Leftrightarrow -\log_s v(a) = \infty \Leftrightarrow v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

V2) $v'(a \cdot b) = -\log_s v(a \cdot b) = -\log_s v(a) - \log_s v(b) = v'(a)+v'(b)$

V3) $v(a+b) \leq max\{v(a), v(b)\}$ olduğundan

$\log_s v(a+b) \leq max\{\log_s v(a), \log_s v(b)\}$

$-\log_s v(a+b) \geq -max\{\log_s v(a), \log_s v(b)\}$

$v'(a+b) \geq min\{-\log_s v(a), -\log_s v(b)\}$

$v'(a+b) \geq min\{v'(a), v'(b)\}$

2.1.39. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin değer grubu sonsuz devirli bir grup ise v değerlendirmesine ayrık değerlendirme denir.[1]

2.1.40. Örnek: 2.1.29. Örneği'nde tanımlanan v_p değerlendirmesi bir ayrık değerlendirmedir.

2.1.41. Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve M K cisminin 1_K elemanı ile üretilen alt halkası olsun. v değerlendirmesinin Arşimetsel olmayan değerlendirme olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M$ için $v(m) \leq d$ olacak biçimde bir $d > 0$ sayısının olmasıdır.[1]

Kanıt: $a, b \in M$, her $m \epsilon M$ için $v(m) \leq d$ olacak biçimde bir d sayısı bulunsun.

1. durum: a veya b sıfır ise $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ olacağı açıktır.

2. durum: $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $v(a) = \max\{v(a), v(b)\}$ olsun.

$r > 0, r \epsilon \mathbb{Z}$ için $v(a+b)^r = v((a+b)^r) = v\left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \cdot a^i \cdot b^{r-i}\right)$

$\leq \sum_{i=0}^{r} v\left(\binom{r}{i} \cdot a^i \cdot b^{r-i}\right)$

$= \sum_{i=0}^{r} v(\binom{r}{i}) \cdot v(a^i) \cdot v(b^{r-i})$

$\leq \sum_{i=0}^{r} d \cdot v(a^i) \cdot v(b^{r-i}) \leq d \cdot (r+1) \cdot v(a)^r$

$= d \cdot (r+1) \cdot \ max\{v(a), v(b)\}^r$

$v(a+b)^r \leq d \cdot (r+1) \cdot \ max\ \{v(a), v(b)\}^r$

$v(a+b) \leq \sqrt[r]{d \cdot (r+1)} \cdot max\ \{v(a), v(b)\}$

$r \longrightarrow \infty$, $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ olur. O zaman v Arşimetsel olmayan değerlendirmedir.

Tersine, $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ olsun.

Her $m \epsilon M$ için $v(m) = v(1_K + 1_K + \cdots + 1_K)) \leq \max\{v(1_K), v(1_K), \ldots, v(1_K)\} = 1$

Her $m \epsilon M$ için $v(m) \leq 1$ olur. Yani $d = 1$ sayısı istenilen özelliği sağlar.

2.1.42. Teorem: v bir A tamlık bölgesinin rankı 1 olan bir değerlendirmesi K, A nın kesir cismi olsun. $a, b \in A, x = \frac{a}{b} \in K$ olmak üzere v, K cismine

$$v(x) = v\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{v(a)}{v(b)}$$

biçiminde tek şekilde genişletilebilir.[1]

2.1.43. Teorem: $\mathbb{Q}$ cisminin herhangi bir değerlendirmesi ya aşikar değerlendirme ya $p-$adik değerlendirme ya da adi mutlak değerin bir kuvveti biçimindedir.[1]

Kanıt: $1 < m, n$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun.

m yi n tabanında $m = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$, $i = 1,2, \ldots, k$ için $0 \leq a_i \leq n-1,\ a_i \in \mathbb{Z}$ biçiminde yazalım.

$n^k \leq m < n^{k+1}$ olduğundan $\log n^k \leq \log m$

$k \cdot \log n \leq \log m$

$$k \leq \frac{\log m}{\log n} \tag{2.11}$$

v, $\mathbb{Q}$ cisminin bir değerlendirmesi olsun.

$v(a_i) = v(1 + 1 + \cdots + 1) \leq v(1) + v(1) + \cdots + v(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = a_i \leq n$

$$v(a_i) \leq a_i \leq n \tag{2.12}$$

$v(m) = v(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k)$

$\leq v(a_0) + v(a_1)v(n) + \cdots + v(a_k)v(n)^k$ ve (2.12)'den

$\leq n + n \cdot v(n) + \cdots + n \cdot v(n)^k$

$= n \cdot (1 + v(n) + \cdots + v(n)^k)$

$\leq n \cdot (k+1) \cdot max\{1, v(n)\}^k$ (2.11)'den

$v(m) \leq n \cdot \left(\frac{\log m}{\log n} + 1\right) \cdot max\{1, v(n)\}^{\frac{\log m}{\log n}}$

$m \longrightarrow m^r$, $v(m)^r \leq n \cdot \left(\frac{r \log m}{\log n} + 1\right) \cdot max\{1, v(n)\}^{\frac{r \log m}{\log n}}$

$v(m) \leq \sqrt[r]{n \cdot \left(\frac{r \log m}{\log n} + 1\right)} \cdot max\{1, v(n)\}^{\frac{\log m}{\log n}}$

$r \longrightarrow \infty$, $v(m) \leq max\{1, v(n)\}^{\frac{\log m}{\log n}}$ (2.13)

(2.13) te iki farklı olasılık vardır.

i) $v(n) \leq 1$ olacak biçimde bir $n > 1$ sayısı olsun.

(2.13) ten her $m \epsilon \mathbb{Z}$ için $v(m) \leq 1$

1. durum: $v(m) = 1$ ise: 2.1.42. Teoremden her $0 \neq x, x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ için

$v(x) = v\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{v(a)}{v(b)} = \frac{1}{1} = 1$ olduğundan v aşikar değerlendirmedir.

2. durum: $v(m) < 1$ ise:

p , $v(p) < 1$ ifadesini sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. p asaldır. Aksi takdirde $a, b < p, p = a \cdot b$ olur. $v(p) = v(a) \cdot v(b) = 1$ olur ki bu bir çelişkidir.

m yi p ile kalanlı bölelim

$m = p \cdot q + r, 0 \leq r < p$

Burada $r \neq 0$ ise $v(r) = 1$ olur. (2.14)

$v(p \cdot q) = v(p + p + \cdots + p) \leq max\{v(p), v(p), \ldots, v(p)\} = v(p) < 1$ (2.15)

(2.14) ve (2.15) ten $v(m) = v(p \cdot q + r\ ) = max\{v(p \cdot q), v(r)\} = 1$ olur ki bu bir çelişkidir.

O zaman $r = 0$ ve $m = p \cdot q$ olup $p|m$ dir.

$0 \neq x, x \in \mathbb{Q}$ elemanı $x = p^n \frac{a}{b}$, $(p, a) = (p, b) = 1$ biçimindedir.

Bu durumda $v(x) = v(p^n) = v(p)^n = p^{-n}$ dir. Yani v, p −adik değerlendirmedir.

ii) $v(n) > 1$ olacak biçimde bir $n > 1$ sayısı vardır.

(2.13) ten $v(m) \leq v(n)^{\frac{\log m}{\log n}}$ dir.

$v(m)^{\frac{1}{\log m}} \leq v(n)^{\frac{1}{\log n}}$ (2.16)

(2.16) eşitsizliği her $m, n > 1$ için geçerli olduğundan m ve n nin yerlerini değiştirebiliriz.

$v(n)^{\frac{1}{\log n}} \leq v(m)^{\frac{1}{\log m}}$, (2.17)

(2.16) ve (2.17) den $v(m)^{\frac{1}{\log m}} = v(n)^{\frac{1}{\log n}}$

$v(m) = v(n)^{\frac{\log m}{\log n}}$ elde edilir. (2.18)

$1 < v(n) = v(1 + 1 + \cdots + 1) \leq v(1) + v(1) + \cdots + v(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

Buradan $1 < v(n) \leq n$ olduğundan bir $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ için $v(n) = n^{\alpha}$ (2.19)

olur.

(2.18) ve (2.19) dan $v(m) = v(n)^{\frac{\log m}{\log n}} = (\mathrm{n}^{\alpha})^{\log_{\mathrm{n}} \mathrm{m}} = \mathrm{n}^{\log_{\mathrm{n}} \mathrm{m}^{\alpha}} = \mathrm{m}^{\alpha}$ dır.

$m > 1$ olduğundan $v(m) = m^{\alpha} = |m|^{\alpha}$ olur. Yani v, adi mutlak değerin bir kuvveti biçimindedir.

2.2. Değerlendirmelerin Denkliği

2.2.1. Tanım: K bir cisim, $\{a_n\}$ K cisminin elemanlarının bir dizisi ve v, K cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi olsun. Her $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ için $n > N$ olduğunda $v(a_n - a) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\{a_n\}$ dizisine, v değerlendirmesine göre a elemanına yakınsıyor denir.[1]

2.2.2. Tanım: K bir cisim, $\{a_n\}$ K cisminin elemanlarının bir dizisi ve v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. Her $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda $v(a_m - a_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorse $\{a_n\}$ dizisine, v değerlendirmesine göre bir Cauchy dizisi adı verilir.[1]

2.2.3 Tanım: K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin aşikar olmayan iki değerlendirmesi olsun. $v_1(a) < 1$ iken $v_2(a) < 1$ ise v_1 ve v_2 değerlendirmeleri denktir denir ve $v_1 \backsim v_2$ ile gösterilir.[5]

2.2.4. Sonuç: K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin iki aşikar olmayan değerlendirmesi ve $v_1 \backsim v_2$ olsun. v_1 değerlendirmesine göre sıfıra yakınsayan her dizi v_2 değerlendirmesine göre de sıfıra yakınsar.

2.2.5. Önerme: 2.2.3. Tanımında verilen $\backsim$ denk olma bağıntısı K cisminin aşikar olmayan değerlendirmeleri kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.[5]

2.2.5. Önerme: K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin iki aşikar olmayan değerlendirmesi ve $v_1 \backsim v_2$ olsun.

i) $v_1(a) < 1 \Rightarrow v_2(a) < 1$

ii) $v_1(a) = 1 \Rightarrow v_2(a) = 1$

iii) $v_1(a) > 1 \Rightarrow v_2(a) > 1$

olur.[1]

2.2.6. Önerme: K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin iki aşikar olmayan değerlendirmesi olsun. $v_1 \backsim v_2$ ise $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere $v_2 = v_1^{\gamma}$ biçimindedir.[5]

Kanıt: $v_1(b) > 1$ olacak biçimde bir $b \in K$ seçelim. $0 \neq a \in K$ ise

$v_1(a) = v_1(b)^{\alpha}$ ve $\alpha = \frac{\log v_1(a)}{\log v_1(b)}$ olur. (2.20)

i) $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{n}{m} > \alpha$ ise;

(2.20) den $v_1(a) < v_1(b)^{\frac{n}{m}}$ ve $v_1 \backsim v_2$ olduğundan $v_2(a) < v_2(b)^{\frac{n}{m}}$

ii) $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{n}{m} < \alpha$ ise;

(2.20) den $v_1(a) > v_1(b)^{\frac{n}{m}}$ ve $v_1 \backsim v_2$ olduğundan $v_2(a) > v_2(b)^{\frac{n}{m}}$ dir.

iii) $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{n}{m} = \alpha$ ise;

(2.20) den $v_1(a) = v_1(b)^{\frac{n}{m}}$ ve $v_1 \backsim v_2$ olduğundan $v_2(a) = v_2(b)^{\frac{n}{m}}$

$v_2(a) = v_2(b)^{\alpha}$ ve $\alpha = \frac{\log v_2(a)}{\log v_2(b)}$ (2.21)

(2.20) ve (2.21) den $\frac{\log v_1(a)}{\log v_1(b)} = \frac{\log v_2(a)}{\log v_2(b)}$ ve

$\log v_1(a) \cdot \frac{\log v_2(b)}{\log v_1(b)} = \log v_2(a)$ olur. Burada $\gamma = \frac{\log v_2(b)}{\log v_1(b)}$ seçilirse

$\log v_1(a) \cdot \gamma = \log v_2(a)$

$\log v_1(a)^{\gamma} = \log v_2(a)$. Buradan da $v_1(a)^{\gamma} = v_2(a)$ olur. Yani $v_2 = v_1^{\gamma}$ dır.

2.2.7. Önerme: v_i, $i = 1,2, \dots, n$ K cisminin aşikar olmayan ve ikişer ikişer denk olmayan n tane değerlendirmesi olsun. Bu durumda $v_1(a) > 1$ ve $v_i(a) < 1$, $i = 2,3, \dots, n$ olacak biçimde bir $a \in K$ vardır.[1]

Kanıt: i) $n = 2$ olsun.

v_1 ve v_2 denk olmadığından $v_1(b) > 1, v_2(b) \leq 1$ ve $v_1(c) \leq 1, v_2(c) > 1$ olacak biçimde $b, c \in K$ vardır.

$a = \frac{b}{c}$ seçersek $v_1(a) = v_1\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{v_1(b)}{v_1(c)} > 1$ ve $v_2(a) = v_2\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{v_2(b)}{v_2(c)} < 1$ olur.

$n = 2$ için iddia doğrudur.

ii) $n - 1$ tane değerlendirme için iddianın doğru olduğunu kabul edelim.Yani $v_1(d) > 1$ ve $v_i(d) < 1$, $i = 2, \dots, n-1$ olacak biçimde bir $d \in K$ olsun. İddia $n = 2$ için doğru olduğundan $v_1(c) > 1$ ve $v_n(c) < 1$ olacak biçimde bir $c \in K$ vardır.

iii) 1. durum: $v_n(d) \leq 1$ ise;

$a = d^j \cdot c$ seçelim.

$v_1(a) = v_1(d)^j \cdot v_1(c) > 1$

$v_n(a) = v_n(d)^j \cdot v_n(c) < 1$

ve yeterince büyük bir j sayısı için $v_i(a) = v_i(d)^j \cdot v_i(c) < 1$, $i = 2,3, \dots, n-1$ olur. $v_1(a) > 1$ ve $v_n(a) < 1$, $i = 2,3, \dots, n$.

2. durum: $v_n(d) > 1$ ise;

$a = \frac{d^j \cdot c}{1+d^j}$ seçelim.

$v_1\left(\frac{d^j}{1+d^j} - 1\right) = v_1\left(\frac{-1}{1+d^j}\right) = v_1\left(\frac{1}{1+d^j}\right) = v_1\left(\frac{\frac{1}{d^j}}{\frac{1}{d^j}+1}\right) \longrightarrow 0$ ve yeterince büyük bir j sayısı için $\frac{d^j}{1+d^j} \longrightarrow 1$, $\frac{d^j \cdot c}{1+d^j} \longrightarrow c$ ve $v_1(a) \longrightarrow v_1(c) > 1$ olur. Yani $v_1(a) > 1$ dir.

$v_n(a) = v_n\left(\frac{d^j \cdot c}{1+d^j}\right) = \frac{v_n(d^j) \cdot v_n(c)}{v_n(1+d^j)} = \frac{v_n(d^j) \cdot v_n(c)}{v_n(d^j)} < \frac{v_n(d)^j \cdot v_n(c)}{v_n(d)^j - 1} = \frac{v_n(c)}{1 - \frac{1}{v_n(d)^j}} \longrightarrow v_n(c) < 1.$

Bu durumda yeterince büyük bir j sayısı için $v_n(a) < 1$ dir.

$i = 2,3, \dots, n-1$ ve yeterince büyük bir j sayısı için

$v_i(a) = v_i\left(\frac{d^j \cdot c}{1+d^j}\right) = \frac{v_i(d^j) \cdot v_i(c)}{v_i(1+d^j)} = \frac{v_i(d^j) \cdot v_i(c)}{v_i(1)} < \frac{v_i(d^j) \cdot v_i(c)}{1 - v_i(d^j)} = \frac{v_i(c)}{\frac{1}{v_i(d)^j} - 1} \longrightarrow 0$, $v_i(a) < 1$.

O zaman $v_1(a) > 1$ ve her $i = 2,3, \dots, n$ için $v_n(a) < 1$ dir.

2.2.8 Önerme: v_i, $i = 1,2, \dots, n$ K cisminin aşikar olmayan ve ikişer ikişer denk olmayan n tane değerlendirmesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $v_1(d-1) < \varepsilon$ ve $v_i(d) < \varepsilon$, $i = 1,2, \dots, n$ olacak biçimde bir $d \in K$ vardır.[1]

Kanıt: $a \in K$ için $v_1(a) > 1$ ve $v_i(a) < 1,\ i = 2,3,\dots,n$ olsun. $d = \frac{a^j}{1+a^j}$ seçilirse yeterince büyük bir j için

$v_1(d-1) = v_1\left(\frac{-1}{1+a^j}\right) = \frac{1}{v_1(a)^j} \longrightarrow 0$ ve $v_1(d-1) < \varepsilon$ olur.

Yeterince büyük bir j için

$v_i(d) = v_i\left(\frac{a^j}{1+a^j}\right) < \frac{v_i(a)^j}{1-v_i(a)^j} = \frac{1}{\frac{1}{v_i(a)^j}-1} \longrightarrow 0$ ve $v_i(d) < \varepsilon$ olur.

2.3. Bir Cismin Bir Değerlendirmeye Göre Tamlanışı

2.3.1. Tanım: K bir cisim ve v, K cisminin bir değerlendirmesi olmak üzere elemanları K cisminden alınan her Cauchy dizisi v değerlendirmesine göre K cisminin bir elemanına yakınsıyorsa K cismi v değerlendirmesine göre tamdır denir.[1]

2.3.2. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve $\widehat{K}$, v değerlendirmesine göre tam bir cisim olsun. $\widehat{K}$ cisminin içinde, yoğun ve K cismine izomorf bir $\widetilde{K}$ cismi var ise $\widehat{K}$ cismine, K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı denir.[1]

2.3.4. Lemma: A, K cisminin tüm Cauchy dizilerinin kümesi olsun. A kümesi, üzerinde tanımlı $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ ve $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ işlemleri ile birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca A kümesinin sıfıra yakınsayan dizilerinin kümesi M, A nın maksimal idealidir.[1]

2.3.6. Teorem: K bir cisim ve v, K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K cisminin v değerlendirmesine göre bir $\widehat{K}$ tamlanışı vardır.[1]

Kanıt: A ve M kümeleri 2.3.4. Lemma'da tanımlandığı gibi olsun.

M, A nın maksimal ideali olduğundan $\widehat{K} = A/M$ bir cisimdir.

Her $\alpha = \{a_n\} + M \in \widehat{K}$ için $\hat{v}(\alpha) = \lim v(a_n)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\hat{v}$ dönüşümü değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler.

$\widetilde{K} = \left\{\{a\} + M \epsilon \widehat{K} \;\middle|\; a \in K\right\}$ olsun. Burada $\{a\} = \{a, a, \dots\}$ olsun.

$f : K \longrightarrow \widehat{K} = A/M$, $f(a) = \{a\} + M$ ile tanımlanan f dönüşümü K dan $\widetilde{K}$ üzerine bir izomorfizmadır ve $Çek\ f = M$ dir.

$\widetilde{K}$ cisminin $\widehat{K}$ içinde yoğun olduğunu gösterilecek.

$\alpha = \{a_n\} + M \in \widehat{K}$ ise her $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ ve her $m, n > N$ için $v(a_m - a_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$\beta = \{a_n, a_n, \dots, a_n, \dots\} + M \in \widetilde{K}, n > N$ elemanı düşünülsün.

$\hat{v}(\beta - \alpha) = \lim v(a_n - a_m) \leq \varepsilon$ ise her $\alpha \in \widehat{K}$ için α elemanına yakınsayan bir $\beta \in \widetilde{K}$ vardır. Yani her $\alpha \in \widehat{K}$, $\widetilde{K}$ cisminin bir yığılma noktasıdır.

$\overline{\widetilde{K}} = \widehat{K}$ dir.

Yani $\widetilde{K}$, $\widehat{K}$ içinde yoğundur.

$\widehat{K}$ cisminin tam olduğunu gösterilecek.

$a'_n = \{a_n, a_n, \dots, a_n, \dots\} + M$ olmak üzere $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots \in \widetilde{K}$ bir Cauchy dizisi olsun. $\hat{v}(a_n) = \hat{v}(a'_n)$ olduğundan $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ bir Cauchy dizisidir.

$\alpha = \{a_n\} + M \in \widehat{K}$ olmak üzere

$$lim_{n\to\infty}\, \hat{v}(\alpha - a'_n) = lim_{n\to\infty}\, lim_{m\to\infty}\, v(a_m - a_n) = 0 \qquad (2.22)$$

olduğundan $lim\, a'_n = \alpha$ dır.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ $\widehat{K}$ nın keyfi bir Cauchy dizisi olsun. $\widetilde{K}$, $\widehat{K}$ içinde yoğun olduğundan $\widetilde{K}$ nın

$$\hat{v}(a'_n - \alpha_n) < \frac{1}{n}, n = 1,2, \dots \qquad (2.23)$$

olacak biçimde bir $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$ dizisi vardır.

$\hat{v}(a'_m - a'_n) \leq \hat{v}(a'_m - \alpha_m) + \hat{v}(\alpha_m - \alpha_n) + \hat{v}(\alpha_n - a'_n)$ olduğundan

$a_1', a_2', \dots, a_n', \dots \in \widetilde{K}$ bir Cauchy dizisidir.

(2.22) ve (2.23)'ten $\hat{v}(\alpha - \alpha_n) \leq \hat{v}(\alpha - a_n') + \hat{v}(a_n' - \alpha_n)$

$\widehat{K}$ nın her $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ Cauchy dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\widehat{K}$ tamdır.

K cismine izomorf ve $\widehat{K}$ içinde yoğun bir $\widetilde{K}$ cismi oluşturduk. O zaman $\widehat{K}$, K nın tamlanışıdır. Burada K ve $\widetilde{K}$ cisimlerini aynı düşünülecek.

2.3.7. Teorem: K bir cisim olmak üzere v, K cisminin bir değerlendirmesi ve $\widehat{K}$, K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı ise $v(K) = v(\widehat{K})$ olur.[1]

2.3.8 Tanım: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin $p-$adik değerlendirmeye göre tamlanışı $p-$adik sayılar cismi olarak adlandırılır ve $\mathbb{Q}_p$ ile gösterilir.[1]

2.3.7. Teorem'den $v_p(\mathbb{Q}_p) = v_p(\mathbb{Q}) = \{v_p(p)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir.

2.3.9. Teorem: Her $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayısı $a_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_j \leq p-1$, $v_p(\alpha) = v_p(p)^n$, $\frac{\delta_n}{p^n} = \frac{e_n}{d_n}$, $d_n \cdot x \equiv 1(mod\ p)$, $e_n \cdot x \equiv a_n(mod\ p)$, $\delta_{n+1} = \left(\frac{e_n}{d_n} - a_n\right) \cdot p^n$ ve $\delta_n = \alpha$ olmak üzere $\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$ biçiminde tek şekilde yazılabilir. Bu yazılışa $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ sayısının $p-$adik açılımı denir.[1]

2.3.10 Örnek: $\frac{4}{75}$ in $5-$adik açılımı yapılırsa:

$$\frac{4}{75} = \sum_{j=-2}^{\infty} a_j 5^j = 3 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \cdots$$

veya $\frac{4}{75} = 331{,}313131 \dots$ olur.

2.4. Değerlendirmelerin Rankları

2.4.1. Tanım: Γ bir sıralı grup, H Γ grubunun bir alt grubu ve $a \in \Gamma$ olsun. $b \in H$ ve $b^{-1} \leq a \leq b$ olduğunda $a \in H$ oluyorsa H grubuna Γ grubunun bir isolated alt grubu denir.[1]

$\{1\}$ ve Γ, Γ grubunun aşikar isolated alt gruplarıdır.

2.4.2. Teorem: Γ bir sıralı grup, H_1 ve H_2 Γ grubunun iki isolated alt grubu ise $H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$ sağlanır.[1]

Kanıt: $S_1 = \{a \in H_1 \mid a > 1\}$ ve $S_2 = \{a \in H_2 \mid a > 1\}$ olsun.

$H_1 \neq H_2$ ise $S_1 \neq S_2$ olduğunu göstermek için $H_1 \neq H_2$ iken $S_1 = S_2$ olsun.

$a \in H_1$ ise $a > 1$ iken $a \in S_1 = S_2 \subseteq H_2$ olur.

$a < 1$ ise $a^{-1} > 1$ ve $a^{-1} \in S_1 = S_2 \subseteq H_2 \Rightarrow a \in H_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$ olur.

$a \in H_2$ olsun. $a > 1$ ise $a \in S_2 = S_1 \subseteq H_1$ dir.

$a < 1$ ise $a^{-1} > 1$ ve $a^{-1} \in S_2 = S_1 \subseteq H_1 \Rightarrow a \in H_1 \Rightarrow H_2 \subseteq H_1$ dir.

Bu durumda $H_1 = H_2$ olur ki bu bir çelişkidir.

$H_1 \neq H_2$ ise $a > 1$ ve $a \notin H_2$ olacak biçimde en az bir $a \in H_1$ vardır.

$b \in S_2$ olsun. $b > 1$ ve $b < a$ olmalıdır. Aksi takdirde $b^{-1} \leq a \leq b$ dir ve buradan da $a \in H_2$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda

$b < a \Rightarrow a^{-1} < b < a \Rightarrow b \in H_1 \Rightarrow S_2 \subseteq H_1 \Rightarrow H_2 \subseteq H_1$ sağlanır.

2.4.3 Önerme: Bir Γ sıralı grubunun tüm isolated alt grupları kümesi kapsama bağıntısına göre bir tam sıralı kümedir.[1]

2.4.4. Tanım: Bir Γ sıralı grubunun kendinden farklı isolated alt gruplarının sayısına Γ grubunun rankı adı verilir.[1]

2.4.5. Örnek: $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ toplamsal sıralı grubunu düşünelim. Γ grubu, üzerinde tanımlı, $(a,\ b,\ c,)\ , (d,\ e,\ f) \in \Gamma$ için

$(a,\ b,\ c) \leq (d,\ e,\ f) \Leftrightarrow a \leq d, b \leq e, c \leq f$

bağıntısı ile bir sıralı gruptur. Γ grubunun isolated alt grupları

$H_1 = \{(0,0,0)\}$

$H_2 = \{(a,0,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$H_3 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$H_4 = \Gamma$

Buna göre Γ sıralı grubunun rankı 3 tür.

2.4.6. Tanım: $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$, K cisminin bir Arşimetsel olmayan değerlendirmesi olmak üzere v değerlendirmesinin rankı Γ sıralı grubunun rankıdır.[1]

2.4.7. Tanım: Γ bir sıralı grup olsun. Her $a, b \in \Gamma$, $b > 1$ için $b^n > a$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}$ varsa Γ sıralı grubuna Arşimetsel denir.[1]

2.4.8 Teorem: Bir Γ sıralı grubunun Arşimetsel olması için gerek ve yeter koşul Γ grubunun rankının 1 olmasıdır.[1]

Kanıt: Γ grubunun rankı 1 olsun.

Γ Arşimetsel olmasaydı $b > a > 1$ ve $a^n > b$ eşitsizlikleri hiçbir $n \in \mathbb{Z}$ için sağlanmayacak biçimde $a, b \in \Gamma$ olurdu.

$S = \{c \in \Gamma \mid 1 < c\ , \exists n \in \mathbb{Z} \ni c < a^n\}$ olsun. Açıkça görülüyor ki $b \notin S$ dir.

$c_1, c_2 \in S$ ise $1 < c_1 < a^n$, $1 < c_2 < a^m$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır.

$1 < c_1.c_2 < a^{m+n}$ olduğundan $c_1.c_2 \in S$ dir ve S yarı gruptur. $H = \langle S \rangle$, Γ nin S nin elemanları ile üretilmiş alt grubu olsun. S yarı grup olduğundan H nin elemanları $c_i \in S$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere $c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_n^{\varepsilon_n}$ biçimindedir.

H nin Γ sıralı grubunun $\{1\}$ ve Γ den farklı isolated alt grubu olduğu gösterilsin. $a \in H$ olduğundan $H \neq \{1\}$ dir. $b \notin S$ olduğundan $b \notin H$ ve $H \neq \Gamma$ dir.

$d \in \Gamma$, $e \in H$ ve $e^{-1} \leq d \leq e$ için $d \in H$ ise H isolated olacaktır. $d \in \Gamma$, $e \in H$, $e^{-1} \leq d \leq e$ ve $e = c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_n^{\varepsilon_n}$ olsun.

$d > 1$ ise $d \leq c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_n^{\varepsilon_n}$ olduğundan $d < a^x$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $d \in S \subseteq H$ dir.

$d < 1$ ise $d^{-1} > 1$ ve $d^{-1} \leq c_1^{\varepsilon_1} \cdot c_2^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot c_n^{\varepsilon_n}$ olduğundan $d^{-1} < a^x$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{Z}$ vardır. $d^{-1} \in S \subseteq H$ ve $d \in H$ olur.

Dolayısıyla H isolated alt grup olur. Bu da kabul ile çelişir. Bu durumda Γ Arşimetseldir.

Tersine, Γ Arşimetsel olsun.

H, Γ grubunun $\{1\}$ den farklı bir alt grubu olsun. $b \in H$ ve $b > 1$ seçilsin.

$a \in \Gamma$ ve $a > 1$ ise $b^{-n} < a < b^{n}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan da $a \in H$ olur.

$a \in \Gamma$ ve $a < 1$ ise $a^{-1} \in H$ ve $a \in H$ olur. $\Gamma \subseteq H$ ve $\Gamma = H$ dir. Yani Γ grubunun rankı 1 dir.

2.5. Placeler

2.5.1. Tanım: K ve F iki cisim olsun. $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü

P1) $\varphi^{-1}(F) = V$ bir halkadır.

P2) $\varphi|_V$ aşikar olmayan bir homomorfizmadır.

P3) $a \in K$ için $\varphi(a) = \infty$ ise $\varphi(a^{-1}) = 0$

koşullarını gerçekliyorsa φ dönüşümüne K cisminin bir place'i adı verilir.[1]

2.5.2. Tanım: K ve F iki cisim ve $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place olsun. $\varphi^{-1}(F) = V$ halkası için $a \notin V$ ise $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(a^{-1}) = 0$ ve $a^{-1} \in V$ sağlandığından dolayı V K cisminin bir değerlendirme halkasıdır. Bu V değerlendirme halkasına φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası adı verilir. Yani verilen herhangi bir place'e karşılık gelen bir değerlendirme halkası vardır.[1]

2.5.3. Tanım: K ve F iki cisim, $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place ve V φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası olmak üzere $V = K$ ise φ place'ine aşikar place adı verilir.[4]

2.5.4. Tanım: K bir cisim, φ_1 ve φ_2 K cisminin iki place'i, V_1 ve V_2 de sırasıyla φ_1 ve φ_2 placelerine karşılık gelen değerlendirme halkaları olsun. $V_1 = V_2$ ise φ_1 ve φ_2 placelerine denk placeler denir.[4]

2.5.5. Önerme: K ve F iki cisim, $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place, $\varphi^{-1}(F) = V$ ve V değerlendirme halkasının tek maksimal ideali P olmak üzere place tanımından $Çek\ \varphi|_V = P$ olur.[1]

Kanıt: $a \in V$ ve $\varphi|_V(a) = 0$ olsun. $a^{-1} \notin V$ dir. Aksi takdirde $a^{-1} \in V$ olsaydı $\varphi|_V(1) = \varphi|_V(a \cdot a^{-1}) = \varphi|_V(a) \cdot \varphi|_V(a^{-1}) = 0$ ve $\varphi|_V(V) = \{0\}$ olurdu. Bu da $\varphi|_V$ homomorfizmasının aşikar olmaması ile çelişirdi. $Çek\ \varphi|_V = P$ dir.

2.5.6. Önerme: K ve F iki cisim ve $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place ve V φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası olmak üzere $\varphi(V)$ kümesi F cisminin bir alt cismidir.[4]

2.5.7. Önerme: Bir K cisminin değerlendirme halkaları ve placeleri arasında bire-bir bir eşleşme vardır.[1]

Kanıt: K cisminin her place'ine karşılık gelen bir değerlendirme halkası olduğu 2.5.2. Tanım'dan açıktır.

K cisminin bir değerlendirme halkasına karşılık gelen bir place olduğunu göstereceğiz. V K cisminin bir değerlendirme halkası ve P V nin tek maksimal ideali olsun. Her $a \in K$ için $\varphi : K \longrightarrow V/P \cup \{\infty\}$ dönüşümü

$$\varphi(a) = \begin{cases} \infty & , \ a \notin V \\ a + P & , \ a \in V \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

P1) $\varphi^{-1}(V/P) = V$ bir halkadır.

P2) Her $a, b \in V$ için

$\varphi|_V(a + b) = (a + b) + P = (a + P) + (b + P) = \varphi|_V(a) + \varphi|_V(b)$,

$\varphi|_V(a \cdot b) = (a \cdot b) + P = (a + P) \cdot (b + P) = \varphi|_V(a) \cdot \varphi|_V(b)$ ve

$\varphi|_V(1) = 1 + P \notin P$ olduğundan $\varphi|_V$ aşikar olmayan bir homomorfizmadır.

P3) $a \in K$ için $\varphi(a) = \infty$ olsun.

$a \in (P\backslash\{0\})^{-1}$ ve $a^{-1} \in P$ olur. $\varphi(a^{-1}) = a^{-1} + P = P$ dir.

P1, P2 ve P3'ten φ bir place'tir.

2.5.8. Sonuç: 2.1.25. Önerme ve 2.5.7. Önerme'den bir K cisminin değerlendirme halkaları, placeleri ve Arşimetsel olmayan değerlendirmeleri arasında bire-bir bir eşleşme vardır.

2.5.9. Tanım: $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ ve $\varphi' : K \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir K cisminin iki place'i olsun. $\psi : F \longrightarrow F'$, $\varphi' = \psi \circ \varphi$ olacak biçimde bir ψ izomorfizması varsa φ ve φ' placelerine izomorfik placeler adı verilir.[4]

2.5.10. Önerme: $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ ve $\varphi' : K \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir K cisminin iki place'i, V ve V' de sırasıyla φ ve φ' placelerine karşılık gelen değerlendirme halkaları olsun. φ ve φ' placelerinin izomorfik placeler olması için gerek ve yeter koşul $V = V'$ olmasıdır.[4]

Kanıt: $V = V'$ olsun. P ve P' de sırasıyla V ve V' değerlendirmelerinin tek maksimal idealleri olsun.

$\phi : V \longrightarrow V/P$ doğal homomorfizma olsun.

$\varphi^{-1}(F) = V$ ve $\varphi'^{-1}(F') = V' = V$ olduğundan $\phi \circ \varphi^{-1} : F \longrightarrow V/P$ ve $\phi \circ \varphi'^{-1} : F' \longrightarrow V/P$ izomorfizma olur.

$\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1} = (\phi \circ \varphi'^{-1})^{-1} \circ (\phi \circ \varphi^{-1})$, $\psi : F \longrightarrow F'$ bir izomorfizmadır ve $\varphi' = \psi \circ \varphi$ dir. φ ve φ' placeleri izomorfiktir.

Tersine, $\psi : F \longrightarrow F'$, $\varphi' = \psi \circ \varphi$ olacak biçimde bir ψ izomorfizması olsun. $\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ izomorfizma olduğundan $V = V'$ olmalıdır. Aksi takdirde $\varphi'^{-1}(F') = V'$ ve $\varphi^{-1}(F) = V$ olduğundan $V \neq V'$ olsaydı ψ örten olmazdı.

2.5.11. Tanım: $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ ve $\varphi' : K \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir K cisminin iki place'i, V ve V' de sırasıyla φ ve φ' placelerine karşılık gelen değerlendirme halkaları olsun. $V' \subseteq V$ ise φ', φ place'inin spesyalizasyonudur denir. $\varphi \longrightarrow \varphi'$ ile gösterilir.[4]

2.5.12. Sonuç: $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ ve $\varphi' : K \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir K cisminin iki place'i, V ve V' sırasıyla φ ve φ' placelerine karşılık gelen değerlendirme halkaları, P ve P' sırasıyla V ve V' değerlendirme halkalarının tek maksimal idealleri ve $\varphi \longrightarrow \varphi'$ olsun.[4]

i) $\varphi'(x) \neq \infty$ ise $\varphi(x) \neq \infty$

ii) $\varphi(x) = 0$ ise $\varphi'(x) = 0$

iii) $\varphi \longrightarrow \varphi' \Leftrightarrow V' \subseteq V \Leftrightarrow P' \supseteq P$

ifadelerinin sağlandığı açıktır.

2.5.13. Teorem: $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ ve $\varphi' : K \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir K cisminin iki place'i olsun. $\varphi \longrightarrow \varphi'$ olması için gerek ve yeter koşul V' üzerinde $\varphi' = \xi \circ \varphi$ olacak biçimde bir $\xi : F \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ place'inin olmasıdır.[4]

Kanıt: $\xi : F \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ bir place, $\varphi' = \xi \circ \varphi : V' \longrightarrow F'$ ve $\xi^{-1}(F') = V_\xi$ olsun. $x \in V'$ ise $\varphi(x) \neq \infty$ ve $\xi \circ \varphi(x) \neq \infty$ olur. O zaman $\varphi(x) \in V_\xi \subseteq F$ ve $x \in V$ olduğundan $V' \subseteq V$ yani $\varphi \longrightarrow \varphi'$ dur.

Tersine, $\varphi \longrightarrow \varphi'$ olsun. $V' \subseteq V$ olur.

$\varphi(V') = f \subseteq F$ olsun. P ve P' sırasıyla V ve V' değerlendirme halkalarının tek maksimal idealleri olmak üzere P ve P', V' halkasının asal idealleridir.

$\phi : V' \longrightarrow V'/P$ ve $\phi' : V' \longrightarrow V'/P'$ doğal homomorfizmaları tanımlansın.

$\phi \circ \varphi|_{V'}^{-1} : f \longrightarrow V'/P$ bir homomorfizmadır. (2.24)

$\varphi' \circ (\phi')^{-1} : V'/P' \longrightarrow F'$ bir homomorfizmadır. (2.25)

$P \subseteq P'$ olduğundan $\phi' \circ \phi^{-1} : V'/P \longrightarrow V'/P'$ bir homomorfizmadır. (2.26)

(2.24), (2.25) ve (2.26)'dan $\xi = (\varphi' \circ (\phi')^{-1}) \circ (\phi' \circ \phi^{-1}) \circ \left(\phi \circ \varphi|_{V'}^{-1}\right)$ seçilirse ξ bir homomorfizmadır. Buradan $\xi = \varphi' \circ \varphi|_{V'}^{-1}$, $\xi : f \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ olur.

$\varepsilon \in F$ ve $\varepsilon \notin f$ olsun. $\xi(\varepsilon) = \infty$ olur. Bir $x \in V$ için $\varphi(x) = \varepsilon$ olsun.

$x \notin V' \Rightarrow \varphi'(x) = \infty \Rightarrow \varphi'(x^{-1}) = 0 \Rightarrow (\xi \circ \varphi|_{V'})(x^{-1}) = 0 \Rightarrow \xi(\varepsilon^{-1}) = 0$ olduğundan ξ placetir. Yani $\xi \circ \varphi|_{V'} = \varphi'$ olacak biçimde bir $\xi : F \longrightarrow F' \cup \{\infty\}$ place'i vardır.

2.5.14. Teorem: K bir cisim, $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ K cisminin bir place'i ve V_φ, φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası olsun. P_1 ve P_2, V_φ nin idealleri olmak üzere $P_1 \subseteq P_2$ veya $P_1 \supseteq P_2$. Bu yüzden $V_\varphi \subseteq V \subseteq K$ şartını sağlayan V halkalarının kümesi tam sıralı kümedir.[4]

Kanıt: P_1 ve P_2, V_φ nin iki öz ideali ve $P_1 \not\subseteq P_2$ olsun. $x \in P_1$, $x \notin P_2$ ve $y \in P_2, y \neq 0$ seçelim. $y^{-1} \notin V_\varphi$, $x \cdot y^{-1} \notin V_\varphi$ ve $x^{-1} \cdot y \in V_\varphi$ olur. $x^{-1} \cdot y \in P_1$ ve $x \cdot x^{-1} \cdot y \in P_1$ yani $y \in P_1$ olur. Dolayısıyla $P_2 \subseteq P_1$ dir.

2.5.15. Tanım: K ve F iki cisim ve $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place ve V φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası olmak üzere V değerlendirme halkasının öz asal ideallerinin sayısına φ place'inin rankı denir.[4]

2.5.16. Sonuç: K ve F iki cisim ve $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place, V φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası ve V değerlendirme halkasının maksimal ideali P olsun.

i) φ aşikar place ise $V = K$ olduğundan V nin öz asal ideali yoktur ve φ place'inin rankı 0 dır.

ii) V K nın içindeki en büyük öz alt halka ise V nin 1 tane öz asal ideali olacağından φ place'inin rankı 1 dir.

iii) $V \subseteq L \subseteq K$ şartını sağlayan $m - 1$ tane L alt halkası varsa V nin m tane öz asal ideali olacağından φ place'inin rankı m dir.

Yani $V \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_{m-2} \subseteq L_{m-1} \subseteq K$, $L_1, L_2, \ldots, L_{m-2}, L_{m-1}$ halkalarının karşılık geldiği placeler sırasıyla $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}$ ve asal idealleri $P_1, P_2, \ldots, P_{m-2}, P_{m-1}$ olsun. $P \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \cdots \supseteq P_{m-2} \supseteq P_{m-1}$ olduğundan $\varphi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}$ place'lerinin rankları sırasıyla $m, m-1, m-2, \ldots, 2, 1$ ve $\phi_{m-1} \longrightarrow \phi_{m-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \phi_2 \longrightarrow \phi_1 \longrightarrow \varphi$ olur.[4]

2.5.17. Tanım: K ve F iki cisim, $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place, φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası V_φ, v K cisminin değer grubu Γ olan değerlendirmesi ve v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası V_v olsun. K nin her v değerlendirmesi $V_\varphi = V_v$ olacak biçimde bir φ place'i belirler. Tersine, $V_\varphi = V_v$ ise K nin her φ place'i bir v değerlendirmesine karşılık gelir.[4]

2.5.18. Sonuç: K ve F iki cisim, $\varphi : K \longrightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü bir place, φ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası V_φ, $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ bir değerlendirme ve v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası V_v olsun. P_φ ve P_v sırasıyla V_φ ve V_v değerlendirme halkalarının maksimal idealleri olmak üzere $V_\varphi = V_v = V$ ($P_\varphi = P_v = P$) ise

i) $x \in P \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) > 0$

ii) $x \in K \backslash V \Leftrightarrow \varphi(x) = \infty \Leftrightarrow v(x) < 0$

iii) $x \in U = V \backslash P \Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0$ ve $\varphi(x) \neq \infty \Leftrightarrow v(x) = 0$

iv) $x \in V \Leftrightarrow \varphi(x) \neq \infty \Leftrightarrow v(x) \geq 0$

v) φ place'i ve v değerlendirmesinin rankları eşittir.[6]

2.5.19. Tanım: K bir cisim, $V \subset V_1 \subset K$ iki değerlendirme halkası, φ ve φ_1 K nin $\varphi : V \longrightarrow V/P$ ve $\varphi_1 : V_1 \longrightarrow V_1/P_1$ doğal dönüşümleri ile tanımlanan iki place'i olsun. $\varphi_1 \longrightarrow \varphi$ olduğundan V_1/P_1 cisminin $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ olacak biçimde bir φ_2 place'inin olduğunu 2.5.13. Teorem'den biliyoruz. v, v_1, v_2 sırasıyla $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ placelerine karşılık gelen değerlendirmeler olsun. $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ place'ine karşılık gelen değerlendirme $v = v_1 \circ v_2$ biçimindedir. v değerlendirmesi v_1 ve v_2

değerlendirmelerinin bileşkesi olarak adlandırılır. v değerlendirmesinin rankı v_1 ve v_2 değerlendirmelerinin ranklarının toplamıdır.[4]

2.6. Cisim Genişlemeleri

2.6.1. Tanım: K bir cisim olsun. $F \subseteq K$ koşulunu sağlayan F kümesi de K nin işlemleri ile bir cisim oluyorsa K F cisminin bir genişlemesidir veya F K nin alt cismidir denir, K/F ile gösterilir.

2.6.2. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi ise K F üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutuna K cisminin F cismi üzerindeki genişleme derecesi denir ve $[K:F]$ ile gösterilir. Yani $[K:F] = boy_F K$ olur.

2.6.3. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. $[K:F] < \infty$ ise K F nin bir sonlu genişlemesidir denir.

2.6.4. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi ve $a \in K$ olsun. Eğer $a \in K$ bir $0 \neq p(x) \in F[x]$ polinomunun kökü ise $a \in K$, F cismi üzerinde cebirseldir denir. $a\ ceb/F$ ile gösterilir. Eğer $a \in K$, F cismi üzerinde cebirsel değilse transandanttır denir ve $a\ trans/F$ ile gösterilir.

2.6.5. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi, $a \in K$ ve $a\ ceb/F$ olsun. $p(a) = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük dereceli, asal ve monik $p(x) \in F[x]$ polinomuna a elemanının F cismi üzerindeki minimal polinomu denir ve $Irr(a, K) = p(x)$ ile gösterilir.

2.6.6. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. Her $a \in K$ için $a\ ceb/F$ ise K/F genişlemesine cebirsel genişleme denir.

2.6.7. Tanım: K/F cebirsel genişleme değilse K/F genişlemesine transandant genişleme adı verilir. K/F transandant genişleme ise K cisminin F üzerinde en az bir transandant elemanı vardır.

2.6.8. Tanım: K/F bir cebirsel genişleme olsun. $a, b \in K$ için $Irr(a, K) = Irr(b, K)$ ise a ve b elemanlarına $K-$eşleniktir denir.

2.6.9. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. K nin F üzerindeki tüm cebirsel elemanlarından oluşan cisme F cisminin K cismi içindeki cebirsel kapanışı denir. $\bar{F} = \{a \in K \mid a\ ceb/F\}$ ile gösterilir.

2.6.10. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. $\bar{F} = F$ ise F cismine cebirsel kapalı cisim denir.

2.6.11. Tanım: K ve F iki cisim olsun. Bir $a \in K$ için $K = F(a)$ ise K/F genişlemesine basit genişleme denir.

2.6.12. Tanım: K/F bir cebirsel genişleme olsun. K cisminde en az bir kökü bulunan her $p(x) \in F[x]$ polinomu K cisminin içinde birinci dereceden asal çarpanlarına ayrılabiliyorsa K/F genişlemesine normal genişleme denir.

2.6.13. Tanım: F bir cisim ve $p(x) \in F[x]$ olsun. $p(x)$ polinomunun tüm köklerini bulunduran ve F cisminin genişlemesi olan en küçük K cismine $p(x)$ polinomunun K cismi üzerindeki parçalanma cismi denir.

2.6.14. Tanım: F bir cisim ve $p(x) = (x-a)q(x) \in F[x]\,, q(a) \neq 0$ oluyorsa, $p(x)$ polinomunun birinci mertebeden kökü veya basit kökü olarak adlandırılır.

2.6.15. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi ve $a \in K$ olsun. a, $Irr(a,K)$ polinomunun bir basit kökü ise a elemanı F cismi üzerinde ayrılabilir bir elemandır denir ve $a\ ayr/F$ ile gösterilir. Eğer a, $Irr(a,K)$ polinomunun mertebesi 1 den büyük olan bir kökü ise a elemanı F cismi üzerinde tamamen ayrılamaz elemandır denir.

2.6.16. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. Her $a \in K$ elemanı F cismi üzerinde ayrılabilir ise K/F genişlemesine ayrılabilir genişleme denir.

2.6.17. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. Her $a \in K$ elemanı F cismi üzerinde tamamen ayrılamaz ise K/F genişlemesine tamamen ayrılamaz genişleme denir.

2.6.18. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi olsun. K cisminin F cismi üzerinde ayrılabilir elemanlarından oluşan $F_s = \{\, a \in K \mid a\ ayr/F \,\}$ kümesine F cisminin K içindeki ayrılabilir kapanışı denir. $[F_s : F]$ derecesine K cisminin F cismi üzerindeki

ayrılabilirlik derecesi, $[K:F_s]$ derecesine de K cisminin F cismi üzerindeki ayrılamazlık derecesi denir ve $[K:F] = [K:F_s] \cdot [F_s:F]$ olur.

2.6.19. Tanım: K, F cisminin normal ve ayrılabilir bir genişlemesi ise K/F genişlemesine Galois genişlemesi adı verilir.

2.6.20. Tanım: K/F bir Galois genişlemesi olsun. K cisminin F −otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba K cisminin F üzerindeki Galois grubu denir. $Gal(K/F)$ ile gösterilir. $[K:F] = n$ ise $|Gal(K/F)| = n$ olur.

2.6.21. Tanım: K/F sonlu bir cisim genişlemesi, K cisminin F cismi üzerindeki ayrılabilirlik derecesi $[F_s:F]$, K cisminin F cismi üzerindeki ayrılamazlık derecesi $[K:F_s]$ ve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ K cisminin F −otomorfizmaları olmak üzere $a \in K$ elemanının F üzerindeki normu

$$N_{K/F}(a) = \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a) \right)^{[K:F_s]}$$

ve $a \in K$ elemanının F üzerindeki trace'i

$$T_{K/F}(a) = [K:F_s] \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$$

biçiminde tanımlanırlar.

BÖLÜM 3

BİR DEĞERLENDİRMENİN GENİŞLEMELERİ VE GENİŞLEMELERİNİN SAYISI

3.1. Değerlendirmelerin Genişlemeleri

3.1.1. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi, w K cisminin bir değerlendirmesi ve v F cisminin bir değerlendirmesi olsun. Her $a \in F$ için $w(a) = v(a)$ ise w değerlendirmesi v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesidir denir.[8]

3.1.2 Teorem: K bir cisim, A K cisminin bir alt halkası, F cebirsel kapalı bir cisim ve $f: A \longrightarrow F$ aşikar olmayan bir homomorfizma olsun. Bu durumda K cisminin $\phi|_A = f$ olacak biçimde bir ϕ place'i vardır.[1]

3.1.3. Teorem: K/F keyfi bir cisim genişlemesi ve v, F cisminin keyfi bir değerlendirmesi ise v K cismine genişletilebilir.[1]

Kanıt: L cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere $\psi : F \longrightarrow L \cup \{\infty\}$, F cisminin v değerlendirmesine karşılık gelen place'i olsun. Bu durumda ψ place'i ve v değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkaları aynıdır ve bu halka V_F olsun. ψ placeinin V_F halkasına kısıtlanışı $\psi|_{V_F} : V_F \longrightarrow L$ olmak üzere 3.1.2. Teorem'den K cisminin $\phi|_{V_F} = \psi|_{V_F}$ olacak biçimde bir ϕ place'i vardır. K cisminin bu ϕ placeine karşılık gelen değerlendirme halkası V_K olmak üzere V_K değerlendirme halkasına

karşılık gelen değerlendirmesi w ise w, F cisminin v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesidir.

3.1.4. Teorem: K/F bir cisim genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi, v ve w değerlendirmelerine karşılık gelen değerlendirme halkaları sırasıyla V_v ve V_w, V_v ve V_w değerlendirme halkalarının maksimal idealleri M_v ve M_w, birim grupları U_v ve U_w olmak üzere

$V_w \cap F = V_v \quad , \quad M_w \cap F = M_v \ , \ U_w \cap F = U_v$

sağlanır.[1]

3.1.5. Sonuç: K/F bir cisim genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. v ve w değerlendirmelerinin değer grupları sırasıyla Γ_v ve Γ_w olmak üzere Γ_v grubu Γ_w grubunun bir alt grubudur. v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri sırasıyla k_v ve k_w olmak üzere k_v cismi k_w cisminin alt cismidir.[4]

3.1.6. Tanım: F bir cisim, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi ve K, F cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.

$\|.\| : K \longrightarrow \mathbb{R}$

i) Her $x \in K$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) Her $x \in K$ ve her $a \in K$ için $\|ax\| = v(a)\|x\|$

iii) Her $x, y \in K$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

olacak biçimde bir $\|.\|$ dönüşümü varsa bu dönüşüme norm, $(K, \|.\|)$ uzayına da normlu uzay denir.

$\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ K üzerinde iki norm olmak üzere her $x \in K$ için $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ varsa $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ denktir denir.[1]

3.1.7. Lemma: F bir cisim, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi, F v değerlendirmesine göre tam ve K F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzay olsun.

$boy_F K = n$ ve $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ K uzayının F cismi üzerinde bir tabanı olmak üzere her $x \in K$ elemanını $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in F, 1 \leq i \leq n$ biçiminde yazalım ve $\|x\| = \max_i v(\alpha_i)$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\|.\|$ dönüşümü K üzerinde bir norm tanımlar ve K üzerindeki farklı herhangi bir norm da $\|.\|$ normuna denktir.[1]

3.1.8. Teorem: F bir cisim, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, F v değerlendirmesine göre tam ve K F cisminin $[K:F] = n$ olan sonlu bir genişlemesi olmak üzere v değerlendirmesi K cisminin rankı 1 olan bir w değerlendirmesine genişletilebilir. Bu genişleme tektir ve N, K cisminin F üzerindeki normu olmak üzere her $x \in K$ için

$$w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$$

biçimindedir.[1]

Kanıt: $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ K cisminin F cismi üzerindeki bir tabanı olsun. Her $x \in K$, $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in F, 1 \leq i \leq n$ biçiminde yazılabilir. 3.1.7. Lemma'dan $\|x\| = \max_i v(\alpha_i)$ dönüşümü K cismi üzerinde bir norm tanımlar. 3.1.3. Teorem'den v değerlendirmesinin K cismine rankı 1 olan bir w genişlemesi olduğunu biliyoruz. $w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$ olduğu gösterilecek.

$w(x) < 1$ olsun. $\lim_{r\to\infty} w(x)^r = \lim_{r\to\infty} w(x^r) = 0$ olur. 3.1.7. Lemma'dan w ile $\|.\|$ denk olduğundan $\lim_{r\to\infty}\|x^r\| = 0$ olur. $x^r = \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \cdots + \alpha_{rn}x_n$, $\alpha_{ri} \in F$, $1 \leq i \leq n$ biçiminde yazılırsa $\lim_{r\to\infty}\|x^r\| = \lim_{r\to\infty} \max_i v(\alpha_{ri}) = 0$ olur. Her $1 \leq i \leq n$ için $\lim_{r\to\infty} v(\alpha_{ri}) = \lim_{r\to\infty} \alpha_{ri} = 0$ olur. Buradan $\lim_{r\to\infty} v(N(x^r)) = \lim_{r\to\infty} v(N(x))^r = 0$. Yani $v\big(N(x)\big) < 1$ dir. $w(x) > 1$ ise $v\big(N(x)\big) > 1$ dir. $v\big(N(x)\big) = 1$ ise $w(x) = 1$ olur.

$y = N(x)/x^n \in K$ olsun.
$N(y) = N(N(x)/x^n) = N(N(x))/N(x^n) = N(x)^n/N(x)^n = 1$ olduğundan $w(y) = 1$ olur. $w(N(x)/x^n) = w(N(x))/w(x^n) = v(N(x))/w(x)^n = 1$ dir. Yani $w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$ olur.

3.1.9. Örnek: $\mathbb{R}$ cismi $|.|$ adi mutlak değerine göre tamdır. $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$ olduğundan adi değerlendirmenin $\mathbb{C}$ cismine w genişlemesi, her $a + bi \in \mathbb{C}$ için $w(a + bi) = \sqrt{|N(a + bi)|} = \sqrt{a^2 + b^2}$

biçimindedir.

3.1.10. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi, Γ_v ve Γ_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerinin değer grupları olmak üzere $e = e(w/v) = [\Gamma_w:\Gamma_v]$ indeksine v nin w genişlemesinin dallanma indeksi denir.[1]

3.1.11. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi, k_v ve k_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri olmak üzere $f = f(w/v) = [k_w:k_v]$ derecesine w/v genişlemesinin rezidü derecesi denir.[1]

3.1.12. Teorem: K/F, $[K:F] = n$ olan sonlu bir genişleme, v F cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olmak üzere e dallanma indeksi ve f rezidü derecesi sonludur. Ayrıca $e \cdot f \leq n$ eşitsizliği gerçeklenir.[4]

Kanıt: F ve K cisimlerinin sırasıyla v ve w değerlendirmelerine karşılık gelen placeleri φ ve ψ, değer grupları Γ_v ve Γ_w, değerlendirme halkaları V_v ve V_w ve bu değerlendirme halkalarının maksimal idealleri P_v ve P_w olsun.

$\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_i)$ $\varphi(V_v)$ üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_i \in V_w$ ve $v(y_1)\Gamma_v, v(y_2)\Gamma_v, \dots, v(y_j)\Gamma_v, \Gamma_w$ içinde farklı kalan sınıfları olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_j \in K^*$ seçilsin. Bu durumda K cisminin $\{x_v y_u \mid 1 \leq v \leq i, 1 \leq y \leq j\}$ alt kümesinin elemanlarının lineer bağımsız olduğunu gösterilirse $i \cdot j \leq n$ olduğu görülür. Bu da bize e ve f sayılarının sonlu ve $e \cdot f \leq n$ olduğunu verir.

$a_1, a_2, \dots, a_i \in F$ olsun.

$$v(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ix_i) = \max_v v(a_v) \qquad (3.1)$$

olduğu iddia edilsin. Her $v = 1,2,\dots,i$ için $a_v = 0$ ise (3.1) sağlanır. Her $v = 1,2,\dots,i$ için $a_v = 0$ olmasın. $\max_v v(a_v) = v(a_1)$ ve $b_v = \frac{a_v}{a_1}$, $v = 1,2,\dots,i$ olsun. $v(b_v) = v\left(\frac{a_v}{a_1}\right) = \frac{v(a_v)}{v(a_1)} \leq 1$ ve $b_1 = 1$ olur. Bu durumda

$v(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ix_i) = v(a_1)$

$v\left(\frac{a_1}{a_1}x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2 + \cdots + \frac{a_i}{a_1}x_i\right) = 1$

$v(x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i) = 1$ olduğu gösterilirse (3.1) ifadesinin doğru olduğu görülür.

$x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i \in V_w$ olduğundan $v(x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i) \leq 1$ olur.

Fakat $v(x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i) < 1$ olsaydı $x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i \in P_w$ ve $\psi(x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i) = 0$ olurdu.

Buradan da $\psi(b_1)\psi(x_1) + \psi(b_2)\psi(x_2) + \cdots + \psi(b_i)\psi(x_i) = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $v(x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_ix_i) = 1$ yani (3.1) sağlanır.

Şimdi $\sum_{v,u} c_{vu}x_vy_u = 0$, $c_{vu} \in F$ olduğu iddia edilsin. (3.2)

(3.2) denklemini $\sum_u(\sum_v c_{vu}x_v)y_u = 0$ biçiminde yazabiliriz. (3.3)

(3.3) denkleminde $v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) = 0$ veya $v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) \in v(y_u)G_v$ olur. Fakat $v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) \in v(y_u)G_v$ olsaydı $v(y_u)G_v$ ler farklı kalan sınıfları olduğundan (3.3) denkleminin sıfırdan farklı terimlerinin v değerlendirmesi altındaki görüntüleri de farklı olurdu. Bu yüzden eğer bazı $v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) \neq 0$ ise

$v(\sum_u(\sum_v c_{vu}x_v)\, y_u) = \max_u v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) \neq 0$ olur. Bu da (3.3) ile çelişir.

O zaman her $u = 1,2,\dots,j$ için $v(\sum_v c_{vu}x_v)v(y_u) = 0$,

her $u = 1,2,\dots,j$ için $v(\sum_v c_{vu}x_v) = 0$, $v(\sum_v c_{vu}x_v) = \max_v v(c_{vu}) = 0$ ve $c_{vu} = 0$ olduğundan $\{x_vy_u \mid 1 \leq v \leq i, 1 \leq y \leq j\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

3.1.13. Teorem: K/F, $[K:F] = n$ olan sonlu bir genişleme, v F cisminin bir değerlendirmesi, $w_1, w_2, \dots, w_m$ v değerlendirmesinin K cismine sonlu sayıda farklı genişlemeleri, $e_i = e_i(w_i/v) = \left[\Gamma_{w_i}:\Gamma_v\right]$ ve $f_i = f_i(w_i/v) = \left[k_{w_i}:k_v\right]$ olmak üzere

$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_m f_m \leq n$

sağlanır.[4]

3.1.14. Teorem: F bir cisim, $F(x)$ F cisminin rasyonel fonksiyon cismi ve w $F(x)$ cisminin F üzerinde aşikar fakat $F(x)$ üzerinde aşikar olmayan bir değerlendirmesi ise w ya sonsuzdaki değerlendirme ya da bir asal $p(x) \in F[x]$ polinomu için $p(x)$ −adik değerlendirmeye denktir.[5]

Kanıt: $F(x)$ cismi $F[x]$ halkasının kesir cismi olduğundan istenileni $F[x]$ halkası üzerinde göstermek yeterli olacaktır. 2.1.41. Teoremden w F üzerinde aşikar olduğundan $F[x]$ üzerinde Arşimetsel olmayan değerlendirmedir.

1.durum: $w(x) > 1$ ise;

$f(x) \in F[x], f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0$ olsun.

$i < j$ iken $w(a_i x^i) < w(a_j x^j)$ olduğundan $\frac{1}{v(x)} = d$ olmak üzere

$w(f(x)) = \max_{1 \leq i \leq n} w(a_i x^i) = w(a_n x^n) = w(a_n) w(x)^n = 1 \cdot d^{-degf(x)}$ olur.

Yani w sonsuzdaki değerlendirmeye denktir.

2.durum: $w(x) \leq 1$ ise;

her $f(x) \in F[x]$ için $w(f(x)) = \max_{1 \leq i \leq n} w(a_i x^i) = w(a_1) \leq 1$ olur.

$I = \{f(x) \in F[x] \mid w(f(x)) < 1\}$ olsun. $p(x) \in F[x]$ asal bir polinom olmak üzere $I = (p(x))$ olan bir asal idealdir. $p(x) \in F[x]$ ve $p(x) \nmid f(x)$ ise $w(f(x)) = 1$ dir. $w(p(x)) = d, 0 < d < 1$ ve $f(x) = p(x)^n g(x),\ p(x) \nmid g(x)$ olsun.

$w(f(x)) = w(p(x)^n g(x)) = d^n$ olur. Yani w, $p(x)$ −adik değerlendirmeye denktir.

3.1.15. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Arşimetsel olmayan bir değerlendirmesi ve $\overline{K}$ K cisminin cebirsel kapanışı ise v değerlendirmesi $\overline{K}$ cismine tek şekilde genişletilebilir.[5]

3.1.16. Teorem: K/F sonlu bir cisim genişlemesi ve v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi ise v K cisminin rankı 1 olan değerlendirmesine genişletilebilir.[5]

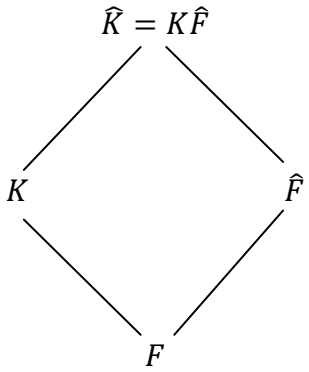
Kanıt: 3.1.3. Teorem'e göre v K cisminine genişletilebilir. Bu genişlemeyi w ile gösterelim. $\Gamma_v \subseteq \Gamma_w$ ve $\Gamma_v \subseteq \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz. 3.1.12. Teorem'den $e = [\Gamma_w : \Gamma_v]$ sonludur. v^e değerlendirmesi K cismi üzerinde her $\alpha \in K$ için $w(\alpha)^e \in \Gamma_v \subseteq \mathbb{R}$ değerlendirmesine denktir. O zaman her $a \in F$ için $w(\alpha) = (v(a)^e)^{1/e}$ olur ve $(v^e)^{1/e}$ ile v denktir.

3.1.17. Teorem: K/F bir cisim genişlemesi, v ve v_1 F cisminin değerlendirmeleri, v_2 v_1 değerlendirmesinin rezidü cisminin bir değerlendirmesi ve $v = v_1 \circ v_2$ bileşke değerlendirmesi olsun. $w = w_1 \circ w_2$, v değerlendirmesinin K cismine genişlemesi ise w_1 v_1 değerlendirmesinin w_2 de v_2 değerlendirmesinin genişlemesidir.

Tersine, w_1 v_1 değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi ve w_2 de v_2 değerlendirmesinin w_1 in rezidü cismine bir genişlemesi ise $w = w_1 \circ w_2$ değerlendirmesi v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesidir.[4]

3.2 Bir Değerlendirmenin Genişlemelerinin Sayısı

3.2.1. Teorem: K/F sonlu bir cisim genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, $\hat{F}$ F cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi ve $\hat{K}$ K cisminin w değerlendirmesine göre tamlanışı olmak üzere $\hat{K} = K\hat{F}$ olur.[1]



Şekil 3.1

3.2.2. Lemma: F bir cisim, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, $K_1/\hat{F}$ ve $K_2/\hat{F}$ dereceleri eşit iki sonlu genişleme ve $\sigma : K_1 \longrightarrow K_2$ bir $\hat{F}$ $-$izomorfizma olsun. v değerlendirmesin K_1 ve K_2 cismine genişlemeleri tektir ve bu genişlemeler sırasıyla w_1 ve w_2 olmak üzere her $\alpha \in K_1$ için $w_1(\alpha) = w_2(\sigma(\alpha))$ sağlanır.[1]

Kanıt: $w_1(\alpha) = \sqrt[n]{v(N(\alpha))} = \sqrt[n]{v(N(\sigma(\alpha)))} = w_2(\sigma(\alpha))$ dır.

3.2.3. Teorem: K/F sonlu bir cisim genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, $\hat{F}$ F cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı ve $\bar{\hat{F}}$ $\hat{F}$ cisminin cebirsel kapanışı olmak üzere K cisminin $\bar{\hat{F}}$ içine $\hat{F}$ $-$eşlenik olmayan gömmeleri ile v değerlendirmesinin K cismine farklı genişlemeleri arasında bire-bir bir eşleşme vardır.[1]

Kanıt: $\hat{F}$ tam olduğundan v değerlendirmesi $\bar{\hat{F}}$ cismine tek şekilde genişletilebilir. Eğer $\alpha \in \bar{\hat{F}}$ ise $\hat{F}(\alpha)$ bir sonlu genişlemedir. $\left[\hat{F}(\alpha) : \hat{F}\right] = n$ ise $w(\alpha) = \sqrt[n]{v(N(\alpha))}$ biçiminde tanımlanan w dönüşümü v değerlendirmesinin $\bar{\hat{F}}$ cismine bir genişlemesi olan değerlendirmedir.

K cismini $\bar{\hat{F}}$ içine bir F $-$izomorfizma ile gömersek v değerlendirmesini K cismine genişletebiliriz. Yani $\lambda : K \longrightarrow K_1 \subseteq \bar{\hat{F}}$ bir F $-$izomorfizma ise w değerlendirmesinin K_1 cismine kısıtlanışı w_1 olmak üzere $\beta \in K$ için $w_1'(\beta) = w_1(\lambda(\beta))$ biçiminde tanımlanan w_1', v değerlendirmesinin K cismine λ gömmesi ile tanımlanan bir genişlemesidir.

$\lambda_1 : K \longrightarrow K_1 \subseteq \bar{\hat{F}}$ ve $\lambda_2 : K \longrightarrow K_2 \subseteq \bar{\hat{F}}$ iki F $-$izomorfizma, w_1' ve w_2' v değerlendirmesinin K cismine sırasıyla λ_1 ve λ_2 gömmeleri ile tanımlanan genişlemeleri, σ $\bar{\hat{F}}$ cisminin $\sigma\lambda_1 = \lambda_2$ olacak şekilde bir $\hat{F}$ $-$otomorfizması ve K_1 ve K_2 $\hat{F}$ cisminin genişlemeleri olmak üzere $\beta \in K$ için

$$w_1'(\beta) = w_1\big(\lambda_1(\beta)\big) = w_2\big(\sigma\lambda_1(\beta)\big) = w_2\big(\lambda_2(\beta)\big) = w_2'(\beta)$$

sağlanır. Yani K cisminin eşlenik gömmelerinin belirlediği değerlendirmeler aynıdır.

Tersine; $w_1' = w_2'$ ise $\lambda_3 = \lambda_2\lambda_1^{-1}: K_1 \longrightarrow K_2$ F −izomorfizmasının, $K_1\hat{F} \longrightarrow K_2\hat{F}$ bir $\hat{F}$ −izomorfizmasına genişletilebileceği gösterilecek. $\alpha \in K_1\hat{F}$ ise K_1 cisminin $\lim a_n = \alpha$ olacak biçimde bir $\{a_n\}$ dizisi vardır ve $w_1' = w_2'$ olduğundan

$$w_2\big(\lambda_3(a_n) - \lambda_3(a_m)\big) = w_2\big(\lambda_3(a_n - a_m)\big)$$

$$= w_2\big(\lambda_2\lambda_1^{-1}(a_n - a_m)\big)$$

$$= w_2{}'\big(\lambda_1^{-1}(a_n - a_m)\big)$$

$$= w_1{}'\big(\lambda_1^{-1}(a_n - a_m)\big)$$

$$= w_1(a_n - a_m)$$

sağlanır. Yani $\{\lambda_3(a_n)\}$, $K_2\hat{F}$ cisminin bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $\{\lambda_3(a_n)\}$ dizisi $K_2\hat{F}$ cisminin bir elemanına yakınsayacaktır. $\bar{\lambda}_3: K_1\hat{F} \longrightarrow K_2\hat{F}$ bir $\hat{F}$ −izomorfizma olmak üzere $\lim\lambda_3(a_n) = \bar{\lambda}_3(\alpha)$ olur. Bu durumda $\bar{\lambda}_3$, $\bar{\hat{F}}$ cisminin bir $\hat{F}$ −otomorfizmasına genişletilebilir.

3.2.4. Teorem: F bir cisim, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, $K = F(\alpha)$ F cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi ve $Irr(\alpha, F) = f(x) \in F[x]$ ise v değerlendirmesinin K cismine farklı genişlemelerinin sayısı, $f(x)$ polinomunun $\hat{K}[x]$ halkasındaki asal çarpanlarının sayısı kadardır.[1]

3.2.5. Örnek: $\mathbb{Q}$ cismi üzerindeki adi mutlak değerin $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ cismine farklı genişlemelerinin sayısı 2 dir. Çünkü $\mathbb{Q}$ cisminin adi mutlak değere göre tamlanışı $\mathbb{R}$ cismidir ve $f(x) = Irr\big(\sqrt{3}, \mathbb{Q}\big) = x^2 - 3$ polinomu $\mathbb{R}[x]$ polinom halkasında $f(x) = x^2 - 3 = \big(x - \sqrt{3}\big)(x + \sqrt{3})$ biçiminde asal çarpanlarına ayrılır. Ayrıca $\lambda_1\big(\sqrt{3}\big) = \sqrt{3}$ ve $\lambda_2\big(\sqrt{3}\big) = -\sqrt{3}$ olacak biçimde 2 adet

$\lambda_1 : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ −monomorfizması vardır.

3.2.6. Tanım: K/F bir cebirsel genişleme ve v F cisminin bir değerlendirmesi olmak üzere v değerlendirmesinin K cismine yalnız bir genişlemesi varsa v değerlendirmesine Henselian değerlendirme adı verilir.[6]

3.2.7. Tanım: K/F bir cisim genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri sırasıyla k_v ve k_w, değer grupları Γ_v ve Γ_w olmak üzere $k_v = k_w$ ve $\Gamma_v = \Gamma_w$ ise w v değerlendirmesinin K cismine immediate genişlemesidir denir.[8]

BÖLÜM 4

K CİSMİNİN DEĞERLENDİRMELERİNİN *K(x)* CİSMİNE GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde bir K cismi üzerindeki değerlendirmelerin $K(x)$ cismine genişlemeleri incelenmiştir. 1988 ve 1990 yılında Nicolae Popescu, Alexandru Zaherescu ve V. Alexandru tarafından yapılan çalışmalar ile 1990 yılında Sudesh Kaur Khanduja ve Usha Garg tarafından yapılan çalışmalar incelenmiştir. Bir K cismi üzerindeki değerlendirmelerin $K(x)$ cismine genişlemeleri en genel manada rezidül transandant genişlemeler ve rezidül cebirsel genişlemeler olmak üzere ikiye ayrılırlar.

4.1. *K* cisminin Değerlendirmelerinin *K(x)* Cismine Rezidül Transandant Genişlemeleri

4.1.1. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi, v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri sırasıyla k_v ve k_w olmak üzere k_w/k_v genişlemesi transandant genişleme ise w değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant (r.t.) genişlemesidir denir.[8]

4.1.2. Tanım: K bir cisim, v K cisminin Γ_v değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi, Γ Γ_v grubunu kapsayan bir tam sıralı grup ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. Her $F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in K[x]$ polinomu için

$$w(F) = \inf_i \{v(a_i) + i\gamma\}$$

biçiminde tanımlanan w dönüşümü, $K(x)$ cisminin v nin genişlemesi olan bir değerlendirmesidir.

Kanıt: $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x], G = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in K[x]$ ve $n \geq m$ olsun. $w(F) = v(a_s) + s\gamma,\ w(G) = v(a_t) + t\gamma,\ 0 \leq s \leq n$ ve $0 \leq t \leq m$ olsun.

V1) $F = 0 \Leftrightarrow$ Her $0 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$

$\Leftrightarrow$ Her $0 \leq i \leq n$ için $v(a_i) = \infty$

$\Leftrightarrow w(F) = \infty$

olur. O zaman $F = 0 \Leftrightarrow w(F) = \infty$.

V2) $F + G = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ ve her $0 \leq i \leq n$ için $c_i = a_i + b_i$ olmak üzere $w(F + G) = v(c_k) + k\gamma$ olsun.

$w(F + G) = v(a_k + b_k) + k\gamma$

$\geq \min \{v(a_k), v(b_k)\} + k\gamma$

$= \min \{v(a_k) + k\gamma, v(b_k) + k\gamma\}$

$\geq \min \{v(a_s) + s\gamma, v(b_t) + t\gamma\}$

$= \min \{w(F), w(G)\}$

olur. O zaman $w(F + G) \geq \min \{w(F), w(G)\}$ sağlanır.

V3) $F \cdot G = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$, $w(F \cdot G) = v(c_k) + k\gamma$ olsun.

$$w(F \cdot G) = v(c_k) + k\gamma$$

$$= v(a_s \cdot b_t) + (s+t)\gamma$$

$$= v(a_s) + v(b_t) + s\gamma + t\gamma$$

$$= w(F) + w(G)$$

olur. O zaman $w(F \cdot G) = w(F) + w(G)$ olur.

V1, V2 ve V3 ten w dönüşümünün bir değerlendirme olduğu görülür. w nin, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olduğu açıktır.

4.1.3. Örnek: v_7, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde tanımlı değer grubu toplamsal $(\mathbb{Z}, +)$ grubu olan 7 −adik değerlendirme olmak üzere her $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$ için

$$w(F) = \inf_i \{v_7(a_i) + i\sqrt{7}\}$$

biçiminde tanımlanan w dönüşümü v_7 değerlendirmesinin $\mathbb{Q}(x)$ cismine genişlemesi olan bir değerlendirmedir.

Örneğin; $F = 49 + \frac{9}{56}x + 4x^2 + \frac{1}{343}x^4 \in \mathbb{Q}[x]$ için $w(F) = -1 + \sqrt{7}$

4.1.4. Önerme: K bir cisim, v K cisminin Γ_v değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesi, k_v de v değerlendirmesinin rezidü cismi olsun. Her $F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in K[x]$ polinomu için

$$w(F) = \inf_i \{v(a_i)\}$$

biçiminde tanımlanan w dönüşümü $K(x)$ cisminin v değerlendirmesinin genişlemesi olan bir değerlendirmesidir. Bu değerlendirmeye v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine Gauss genişlemesi adı verilir.

Bu durumda $w(x) = 0$ olur. k_w w değerlendirmesinim rezidü cismi ve x^*, x elemanının k_w cismin içindeki görüntüsü olmak üzere $x^* trans/k_v$ ve $k_w = k_v(x^*)$ olur. Ek olarak Γ_w w değerlendirmesinin değer grubu olmak üzere $\Gamma_w = \Gamma_v$ sağlanır.[6]

Kanıt: w dönüşümünün değerlendirme olduğunun gösterimi 4.1.2. Tanım'ın kanıtındaki $\gamma = 0$ durumu ile aynıdır. w değerlendirmesinin v değerlendirmesinin genişlemesi olduğu ve $\Gamma_w = \Gamma_v$ eşitliğinin doğruluğu w değerlendirmesinin tanımından açıktır.

Her $j = 1,2,\dots,n$ için a_j^*, a_j elemanının k_v içindeki görüntüsü olmak üzere $\sum_j a_j^*(x^*)^j = 0$ olsun. O zaman $w\left(\sum_j a_j x^j\right) > 0$ ve her $j = 1,2,\dots,n$ için $w(a_j) > 0$ olur. Bu durumda her $j = 1,2,\dots,n$ için $a_j^* = 0$ olur ve $x^* trans/k_v$ sağlanır.

$K(x)$ cisminin her R elemanı $c, a_j, b_j \in K$, her j için $w(a_j) \geq 0$, $w(b_j) \geq 0$ ve bir j için $w(a_j) = 0$ ve $w(b_j) = 0$ olmak üzere

$$R = c\,\frac{\sum_j a_j x^j}{\sum_j b_j x^j}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$w(R) \geq 0 \Leftrightarrow v(c) \geq 0$

önermesi sağlanır. Bu yüzden R elemanın k_w içindeki görüntüsü

$$R^* = c^*\,\frac{\sum_j a_j^*(x^*)^j}{\sum_j b_j^*(x^*)^j}$$

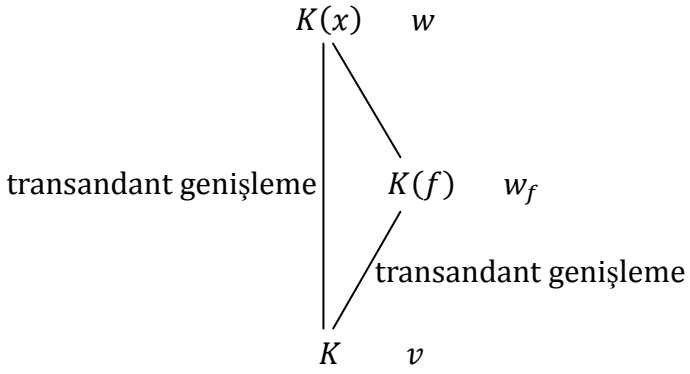
biçimindedir. Dolayısıyla $k_w = k_v(x^*)$ biçimindedir.

4.1.5. Önerme: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $f \in K[x]$ ve $f \notin K$ olsun. Her $F = a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n \in K[f]$ için

$w_f(F) = \inf_i \{v(a_i)\}$

biçiminde tanımlanan w_f, v değerlendirmesinin $K(f)$ cismine bir rezidül tansandant genişlemesidir. Ayrıca w_f değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemesi olan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesidir.

Tersine; w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül tansandant genişlemesi ise w, $K(f)$ cismi üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan ve v nin r.t. genişlemesi olan bir w_f değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesidir.[7]



Şekil 4.1

4.1.6. Örnek: v_2 $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde tanımlı değer grubu toplamsal $(\mathbb{Z}, +)$ grubu olan 2 −adik değerlendirme olmak üzere her $F = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$ için

$w(F) = \inf_i \{v_2(a_i)\}$

biçiminde tanımlı w, v_2 değerlendirmesinin $\mathbb{Q}(x)$ cisminin bir r.t. genişlemesi ve her

$F = a_0 + a_1(x^2 + 1) + \cdots + a_n(x^2 + 1)^n \in \mathbb{Q}[x^2 + 1]$ için

$w_f(F) = \inf_i \{v_2(a_i)\}$

ile tanımlı w_f, v_2 değerlendirmesinin $\mathbb{Q}(x^2 + 1)$ cisminin bir r.t. genişlemesidir.

Örneğin; $F = \frac{4}{3} + \frac{3}{2}(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 \in \mathbb{Q}[x^2 + 1]$ için

$w_f(F) = w(F) = -1$ olur.

4.1.7. Tanım: K bir cisim, $r \in K(x)$, $r \notin K$ ise $deg\, r = [K(x): K(r)]$ biçiminde tanımlanır. $g, h \in K[x], h \neq 0$ olmak üzere $r = \frac{g}{h}$ olarak yazılırsa $deg\, r = [K(x): K(r)] = \max\{\deg g\, , \deg h\}$ biçimindedir.[8]

4.1.8. Tanım: w, K cisiminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesi, w değerlendirmesine karşılık gelen değerlendirme halkası O_w ve v değerlendirmesinin rezidü cismi k_v olmak üzere

$$\deg(w/v) = min\{n \mid r \in O_w\, , r^*\, trans/k_v\, , \deg r = n\}$$

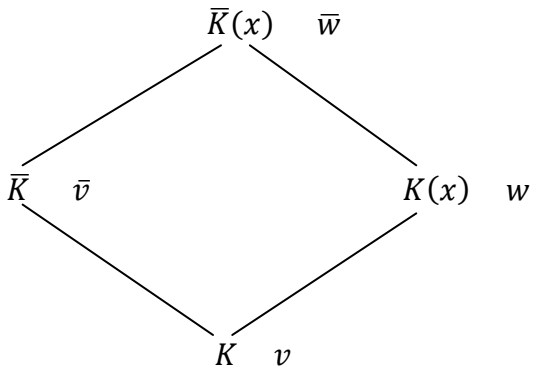
olarak tanımlanır.[8]

4.1.9. Tanım: w, K cisiminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesi, k_v ve k_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri olsun. $\bar{k}_v$, k_v cisminin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışı olmak üzere

$$f(w/v) = \left[\bar{k}_v : k_v\right]$$

olarak tanımlanır.[8]

4.1.10. Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $\overline{K}$ K cisminin bir cebirsel kapanışı, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine bir genişlemesi ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olmak üzere $\overline{K}(x)$ cisminin $\bar{v}$ ve w değerlendirmelerinin ortak genişlemesi olacak şekilde bir $\overline{w}$ değerlendirmesi vardır.[9]



Şekil 4.2

4.1.11. Önerme: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $\overline{K}$ K cisminin bir cebirsel kapanışı, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine bir genişlemesi, Γ_v v değerlendirmesinin değer grubu, Γ Γ_v değer grubunu kapsayan bir sıralı grup ve $(a,\gamma) \in \overline{K} \times \Gamma$ bir ikili olmak üzere her

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n \in \overline{K}[x]$$

elemanı için

$$w_{(a,\gamma)}\big(f(x)\big) = \inf_i(\ \bar{v}(a_i) + i\gamma\ )$$

biçiminde tanımlanan $w_{(a,\gamma)}$ dönüşümü $\overline{K}(x)$ in, v nin genişlemesi olan bir değerlendirmesidir.

Tersine; v değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine her genişlemesi Γ Γ_v değer grubunu kapsayan bir sıralı grup ve $(a,\gamma) \in \overline{K} \times \Gamma$ bir ikili olmak üzere $w_{(a,\gamma)}$ biçimindedir.

$\gamma \in \Gamma_{\bar{v}}$ ise $w_{(a,\gamma)}$ değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesidir.[8]

4.1.12. Önerme: $(a,\gamma) \in \overline{K} \times \Gamma$ ve $(a',\gamma') \in \overline{K} \times \Gamma$ çiftlerinin aynı değerlendirmeyi tanımlaması için gerek ve yeter koşul $\gamma = \gamma'$ ve $\bar{v}(a-b) \geq \gamma$ olmasıdır.[9]

4.1.13. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir $(a,\gamma) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ çiftiyle tanımlanan genişlemesi olsun. $\bar{v}(a-b) < \gamma$ şartını sağlayan her $b \in \overline{K}$ için $[K(b):K] < [K(a):K]$ (veya $\bar{v}(a-b) \geq \gamma$ şartını sağlayan her $b \in \overline{K}$ için $[K(b):K] \geq [K(a):K]$) oluyorsa $(a,\gamma) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ ikilisine K cismine göre minimal çift adı verilir.[9]

4.1.14. Önerme: K cebirsel kapalı bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi $inf,\ v$ ve bir lineer $f(x) = ax - b,\ a \neq 0$ polinomu ile tanımlanmıştır.[7]

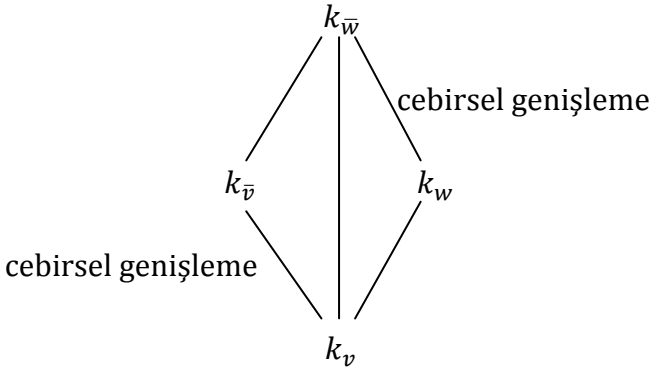
4.1.15. Önerme: 4.1.10. Teoremdeki gösterimler altında aşağıdaki ifadeler denktir:

a) w, v değerlendirmesinin r.t. genişlemesidir;

b) $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.t. genişlemesidir;

c) $\Gamma_{\bar{v}} = \Gamma_{\overline{w}}$, $M_{\overline{w}} = \{\, \overline{w}(x-\alpha) \mid \alpha \in \overline{K} \,\}$ kümesi $\Gamma_{\overline{w}}$ içinde sınırlıdır ve üst sınırı kendi içinde kalır.[8]

Kanıt: (a⇔b):



Şekil 4.3

Şekil 4.3 den de anlaşılacağı üzere $k_{\overline{w}}/k_{\bar{v}}$ ve k_w/k_v genişlemelerinden herhangi birinin transandant olması durumunda $k_{\overline{w}}/k_v$ genişlemesi de transandant olacağından diğerinin de transandant olacağı açıktır.

(b⇒c): $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.t. genişlemesi ise 4.1.11. Önermeden $\overline{w}$ değerlendirmesi inf, $\bar{v}$ ve bir $(\alpha, \gamma) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ çiftiyle tanımlıdır. Yani her $f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + \cdots + a_n(x-\alpha)^n \in \overline{K}[x]$ için

$$\overline{w}\big(f(x)\big) = \inf_i \left(\bar{v}(a_i) + i\gamma \right)$$

biçimindedir. $\bar{v}(a_i)$, $\gamma \in \Gamma_{\bar{v}}$ olduğundan $\Gamma_{\bar{w}} \subseteq \Gamma_{\bar{v}}$ olur. $\Gamma_{\bar{v}} \subseteq \Gamma_{\bar{w}}$ olduğundan $\Gamma_{\bar{v}} = \Gamma_{\bar{w}}$ dır.

$\bar{w}(x-\alpha) = \gamma$ olduğundan $\gamma \in M_{\bar{w}}$ ve $sup\, M_{\bar{w}} = \gamma$ olur. Gerçekten her $\beta \in \bar{K}$ için $\bar{w}(x-\beta) = \bar{w}(x-\alpha+\alpha-\beta) = \inf(\gamma, \bar{v}(\alpha-\beta))$ olduğundan $\bar{v}(\alpha-\beta) < \gamma$ ise $\bar{w}(x-\beta) < \gamma$ ve eğer $\gamma \leq \bar{v}(\alpha-\beta)$ ise $(\beta,\gamma) \in \bar{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ çifti de $\bar{w}$ değerlendirmesini tanımlayacağından dolayı $\bar{w}(x-\beta) = \gamma$ olur. Yani her $\beta \in \bar{K}$ için $\bar{w}(x-\beta) \leq \gamma$ dır.

(c⇒b): $\bar{w}(x-\alpha) = \gamma = sup\, M_{\bar{w}}$ olacak şekilde $\alpha \in \bar{K}$ seçelim. $\Gamma_{\bar{v}} = \Gamma_{\bar{w}}$ olduğundan $\bar{w}(x-\alpha) = \gamma = \bar{v}(d)$ olacak biçimde $d \in \bar{K}$ vardır ve $\bar{w}\left(\frac{x-\alpha}{d}\right) = 0$ olur. $t = \left(\frac{x-\alpha}{d}\right)^* trans/k_{\bar{v}}$ dir. Eğer $t\ ceb/k_{\bar{v}}$ olsaydı, $k_{\bar{v}}$ cebirsel kapalı olduğundan $t \in k_{\bar{v}}$ olurdu. O zaman $\bar{v}(a) = 0$, $a^* = t$ olacak şekilde bir $a \in \bar{K}$ bulunurdu. Bu durumda $\left(\frac{x-\alpha}{d} - a\right)^* = 0^*$ olduğundan $\left(\frac{x-\alpha}{d} - a\right)$, $O_{\bar{w}}$ değerlendirme halkasının tek maksimal idealinin elemanı olur ve

$$\bar{w}\left(\frac{x-\alpha}{d} - a\right) > 0$$

$$\bar{w}(x-(\alpha+ad)) > \bar{w}(d) = \bar{v}(d) = \gamma$$

olup $\gamma = sup\, M_{\bar{w}}$ olması ile çelişirdi.

4.1.16. Tanım: 4.1.10. Teoremdeki gösterimler altında K_1, $K \subseteq K_1 \subseteq \bar{K}$ şartını sağlayan bir cisim, v_1 $\bar{v}$ değerlendirmesinin K_1 cismine kısıtlanışı ve Γ_{v_1} v_1 değerlendirmesinin değer grubu olmak üzere $\gamma \in \Gamma_{\bar{v}}$ için $e\gamma \in \Gamma_{v_1}$ şartını sağlayan en küçük doğal sayı $e = e(\gamma, K_1)$ ile gösterilir.[8]

4.1.17. Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesi olmak üzere aşağıdaki ifadeleri sağlayan ve $\bar{w}$ değerlendirmesini tanımlayan bir $(\alpha,\delta) \in \bar{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ çifti vardır.

a) $[K(\alpha):K] = n$ ise $deg\ g(x) < n$ olan her $g(x) \in K[x]$ polinomu için

$$w\big(g(x)\big) = \bar{v}(g(\alpha))$$

eşitliği sağlanır.

b) $Irr\ (\alpha, K) = f(x)$, $w\big(f(x)\big) = \gamma$ ve $e = e(\gamma, K(\alpha))$ olmak üzere $r = f^e/l$, $w(r) = 0$ ve $r^*\ trans/k_v$ olacak biçimde bir $l(x) \in K[x],\ \deg l < n$ polinomu vardır. r^*, k_v üzerinde tansandant olan en küçük dereceli elemandır.

c) $\bar{v}|_{K(\alpha)} = v_\alpha$ olmak üzere

$\deg(w/v) = n \cdot e(\gamma, K(\alpha))$

$\Gamma_w = \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$

$e(w/v) = e(v_\alpha/v) \cdot e(\gamma, K(\alpha))$

eşitlikleri sağlanır.

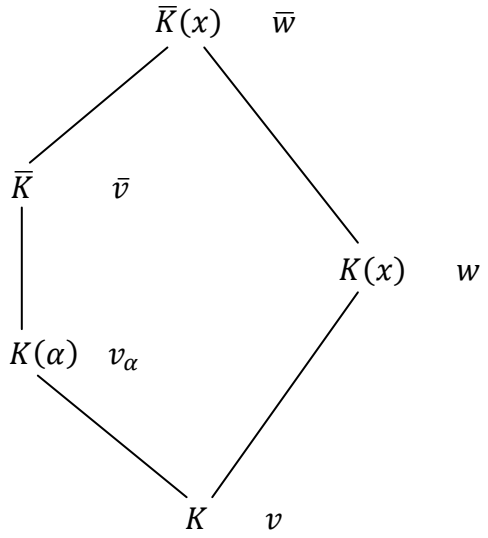
d) k_{v_α}, k_v cisminin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışıdır ve

$k_w = k_{v_\alpha}(r^*)$

$f(w/v) = f(v_\alpha/v)$

eşitlikleri sağlanır.[8]

Kanıt: $\bar{w}$ değerlendirmesini tanımlayan minimal çift $(\alpha, \delta) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ olsun. $\alpha \in \overline{K}$ elemanının minimal polinomu $Irr\ (\alpha, K) = f(x) = N_{K(\alpha)(x)/K(x)}(x - \alpha)$ olur.



Şekil 4.4

a) $g(x) \in K[x]$ ve $deg\ g(x) = m < n$ olsun. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ $g(x)$ polinomunun $\overline{K}$ cismindeki kökleri olmak üzere $g(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x-\beta_i)$ yazabiliriz. Her $1 \le i \le m$ için $[K(\beta_i): K] \le m < n$ ve (α, δ) minimal çift olduğundan $\bar{v}(\alpha - \beta_i) < \delta$ dır.

$\overline{w}(x-\beta_i) = \overline{w}(x-\alpha+\alpha-\beta_i) = \inf\big(\delta, \bar{v}(\alpha-\beta_i)\big) = \bar{v}(\alpha-\beta_i)$ ve buradan da

$\overline{w}\big(g(x)\big) = \overline{w}(a\prod_{i=1}^{m}(x-\beta_i)) = \bar{v}(a\prod_{i=1}^{m}(\alpha-\beta_i)) = \bar{v}(g(\alpha))$ elde edilir.

$g(x) \in K[x]$ ve $deg\ g(x) < n$ ise $g(x)^* ceb/k_v$ dir.

b) $e\cdot\gamma \in \Gamma_{v_\alpha}$ olduğundan $e\cdot\gamma = e\cdot w(f) = w(f^e) \in \Gamma_{v_\alpha}$ dir. Yine $e\cdot\gamma \in \Gamma_{v_\alpha}$ olduğundan $e\cdot\gamma = \bar{v}\big(l(\alpha)\big) = w(l(x))$ olacak biçimde bir $l(x) \in K[x]$, $\deg l < n$ polinomu vardır. O zaman $w(f^e) = w(l)$ ve $w(f^e/l) = 0$ olur.

Şimdi $r = f^e/l$ olmak üzere r^* elemanının k_v üzerinde transandant olup olmadığı kontrol edilecek. $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$, $\alpha_1 = \alpha$ $f(x)$ polinomunun $\overline{K}(x)$ cisminde birinci dereceden asal çarpanlarına ayrılışı olsun. Her $1 \le i \le n$ için $\overline{w}(x-\alpha_i) = \bar{v}(d_i)$ olacak biçimde $d_i \in \overline{K}$ seçilsin ve $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ olsun. O zaman her $1 \le i \le n$ için $\overline{w}\left(\frac{x-\alpha_i}{d_i}\right) = 0$ ve $\overline{w}\left(\frac{f}{d}\right) = 0$ olur. 4.1.15. Önerme'nin

kanıtından $\left(\frac{x-\alpha_1}{d_1}\right)^* trans/k_{\bar{v}}$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $\left(\frac{f}{d}\right)^* trans/k_v$ ve $\left(\frac{f^e}{d^e}\right)^* trans/k_v$ olur. Ek olarak (a) nın kanıtından $\deg(l/d^e) < n$ olduğundan $(l/d^e)^* ceb/k_v$ olur ve

$$r^* = \left(\frac{f^e}{l}\right)^* = \left(\frac{f^e/d^e}{l/d^e}\right)^* = \frac{(f^e/d^e)^*}{(l/d^e)^*}\ trans/k_v$$

olduğu görülür.

c) $g(x) \in K[x]\,,\ degg < n \cdot e$ olsun. $g(x) = g_0 + g_1 f + \cdots + g_{e-1} f^{e-1}$, $0 \le i \le e-1$ için $g_i \in K[x], degg_i < n$ biçimindedir. $e = e(\gamma, K(\alpha))$ doğal sayısının tanımından $g(x)$ polinomunun her terimi w değerlendirmesi altında farklı değerler alacağından dolayı

$$w(g) = \inf_i(w(g_i f^i)) = \inf_i\big(w(g_i) + iw(f)\big) = \inf_i(\bar{v}(g_i(\alpha) + i\gamma)$$

biçimindedir.

$u = \frac{g}{h} \in K(x),\ degu < n \cdot e$ olsun. O zaman $degg,\ degh < n \cdot e$ olmalıdır. Her $0 \le i \le e-1$ için $degg_i,\ degh_i < n$ olmak üzere u fonksiyonu

$$u = \frac{g}{h} = \frac{g_0 + g_1 f + \cdots + g_{e-1} f^{e-1}}{h_0 + h_1 f + \cdots + h_{e-1} f^{e-1}}$$

biçiminde yazılsın. $w(u) = 0$ ise

$$w(u) = w\left(\frac{g}{h}\right) = w(g) - w(h) = \inf_{0 \le i \le e-1}(w(g_i f^i)) - \inf_{0 \le j \le e-1}(w(h_j f^j)) = 0$$

olur ve yine $e = e(\gamma, K(\alpha))$ doğal sayısının tanımından bu eşitliği sağlayan yalnız bir $0 \le i_0 \le e-1$ indeksi vardır. O zaman $w(g) = w(h) = (w(g_{i_0} f^{i_0})) = (w(h_{i_0} f^{i_0}))$, $w(u) = w\big(g_{i_0}/h_{i_0}\big) = 0$ ve $u^* = \big(g_{i_0}/h_{i_0}\big)^*$ olur. Dolayısıyla $deg\,(g_{i_0}/h_{i_0}) < n$ olduğundan $u^* ceb/k_v$ dir. Yani seçilen $u(x) \in K(x),\ deg\,u < n \cdot e$ polinomu k_v üzerinde cebirseldir. Dolayısıyla r^*, k_v üzerinde tansandant olan en küçük dereceli elemandır ve

$deg(w/v) = deg\,r = \deg f^e/l = max\{degf^e, degl\} = n \cdot e = n \cdot e(\gamma, K(\alpha))$ olur.

$K(x)/K(r)$ genişlemesi düşünülsün. $[K(x):K(r)] = n \cdot e$ olduğundan bir $u \in K(x)$ elemanı $u = u_0(r) + u_1(r)x + \cdots + u_{n\cdot e-1}(r)x^{n\cdot e-1}$, $u_i(r) \in K(r)$ biçiminde yazılabilir. $g_i(r), h(r) \in K[r]$ olmak üzere $u_i(r) = g_i(r)/h(r)$ olsun. O zaman

$$u(x) = \frac{g_0(r) + g_1(r)x + \cdots + g_{n\cdot e-1}(r)x^{n\cdot e-1}}{h(r)}$$

olur ve $u(x)$ elemanının payını r değişkeninin kuvvetlerine bağlı olarak

$$u(x) = \frac{t_0(x)+t_1(x)r+\cdots+t_s(x)r^s}{h(r)} \tag{4.1}$$

her $0 \le i \le s$ için $degt_i(x) < n \cdot e$ biçiminde yazılsın. Burada

$$w(t_0 + t_1r + \cdots + t_sr^s) = \inf_i w(t_i) \tag{4.2}$$

olması için $\inf_i w(t_i) = w(t_{i_0})$ olacak biçimde yalnız bir $0 \le i_0 \le s$ indeksi olmalıdır. Aksi takdirde

$$\inf_i w(t_i) = w(t_{i_0}) = w(t_{i_1})$$

olacak biçimde en az iki tane $i_0 < i_1$ indeksleri olsaydı (4.1) denkleminden

$$hut_{i_0}^{-1} = \frac{t_0}{t_{i_0}} + \frac{t_1}{t_{i_0}}r + \cdots + r^{i_0} + \cdots + \frac{t_{i_1}}{t_{i_0}}r^{i_1} + \cdots + \frac{t_s}{t_{i_0}}r^s$$

olurdu. $w\left(hut_{i_0}^{-1}\right) > 0$ olduğundan

$$\left(\frac{t_0}{t_{i_0}}\right)^* + \left(\frac{t_1}{t_{i_0}}\right)^* r^* + \cdots + (r^*)^{i_0} + \cdots + \left(\frac{t_{i_1}}{t_{i_0}}\right)^* (r^*)^{i_1} + \cdots + \left(\frac{t_s}{t_{i_0}}\right)^* (r^*)^s = 0 \text{ dır.}$$

Fakat her $0 \le i \le s$ için $\left(\frac{t_i}{t_{i_0}}\right)^* ceb/k_v$ ve $\left(\frac{t_{i_1}}{t_{i_0}}\right)^* \neq 0$ olduğundan $r^* ceb/k_v$ olur ki bu bir çelişkidir. O zaman (4.2) denklemini sağlayan tek bir i_0 indeksi vardır ve (4.2) gerçeklenir. $degt_i(x) < n \cdot e$ olduğundan $w(t_i) \in \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$ olur. Ek olarak (4.1) denkleminde $h(r) = a_0 + a_1r + \cdots + a_mr^m \in K[r]$ için

$$w\big(h(r)\big) = \inf_i(w(a_ir^i)) = \inf_i(w(a_i) + iw(r))) = \inf_i(v(a_i))$$

olur. Buradan da $w\big(h(r)\big) \in \Gamma_v \subseteq \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$ olur. O zaman

$$w(u) = \inf_i (w(t_i) - w(h(r))) \in \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$$

ve $\Gamma_w \subseteq \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$ sağlanır. w değerlendirmesinin tanımlanış biçiminden de $\Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma \subseteq \Gamma_w$ olduğu açıktır. Buradan da $\Gamma_w = \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z}\gamma$ olur ve $e(w/v) = e(v_\alpha/v) \cdot e(\gamma, K(\alpha))$ sağlanır.

d) $\bar{k}_v$, k_v cisminin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışı olmak üzere $k_{v_\alpha} \subseteq \bar{k}_v$ olduğu açıktır. $\bar{k}_v \subseteq k_{v_\alpha}$ olduğunu göstermek için her $h(x) \in K[x], degh < n$ ve $\bar{v}\big(h(x)\big) = 0$ için $h(x)^* \in k_{v_\alpha}$ olduğu gösterilecek. (a) dan

$$w\big(h(x)\big) = \bar{v}\big(h(\alpha)\big) = v_\alpha\big(h(\alpha)\big) = 0$$

olduğunu biliyoruz. $h(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \beta_j)\,, m < n$ olsun. (α, δ) , $\bar{w}$ değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olduğundan

$$\bar{w}(x - \beta_i) = \bar{v}(\alpha - \beta_i) < \bar{w}(x - \alpha) = \delta$$

olur ve buradan da

$$0 < \bar{w}\left(\frac{x - \alpha}{\alpha - \beta_i}\right) = \bar{w}\left(\frac{x - \beta_i}{\alpha - \beta_i} - 1\right)$$

$$\left(\frac{x - \beta_i}{\alpha - \beta_i}\right)^* = 1$$

$$\left(\frac{h(x)}{h(\alpha)}\right)^* = 1$$

ve $h(x)^* = h(\alpha)^*$ denklemi elde edilir. Yani $h(x)^* \in k_{v_\alpha}$ ve $\bar{k}_v \subseteq k_{v_\alpha}$ dır. O zaman

$$\bar{k}_v = k_{v_\alpha}$$

eşitliği elde edilir. $\left[\,\bar{k}_v : k\right] = [k_{v_\alpha} : k]$ olduğundan

$$f(w/v) = f(v_\alpha/v)$$

sağlanır. $\bar{k}_v = k_{v_\alpha}$ olduğundan da $k_w = k_{v_\alpha}(r^*)$ olduğu görülür.

4.1.18. Sonuç: 4.1.17. Teorem'deki gösterimler altında, aynı teoremin kanıtından aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

a) $h(r) = a_0 + a_1 r + \cdots + a_m r^m \in K[r]$ için $w\big(h(r)\big) = \inf_i(v(a_i))$ dir.

b) $g(x) \in K[x]$, $deg\ g(x) < n$ için $\overline{w}\big(g(x)\big) = \bar{v}(g(\alpha))$ olur.

c) $g(x) \in K[x], degg < n \cdot e$ polinomunu

$g(x) = g_0(x) + g_1(x)f(x) + \cdots + g_{e-1}(x)f(x)^{e-1}$

$0 \le i \le e-1$ için $g_i \in K[x], deg g_i < n$ biçiminde yazılabilir ve

$w(g) = \inf_i(\bar{v}(g_i(\alpha) + i\gamma)$ dır.

d) $u \in K(x)$ fonksiyonu (c) nin kanıtındaki gösterimler altında yazılırsa

$w(u) = \inf_i(w(t_i) - w(h(r)))$

eşitliği sağlanır.

4.1.19. Tanım: $w, \gamma, l, r^*, v_\alpha, f$ ve $e = e\big(\gamma, K(\alpha)\big)$ 4.1.17. Teoremde tanımlandıkları gibi olmak üzere

$G(r^*) = u_0 + u_1 r^* + \cdots + u_{m-1}(r^*)^{m-1} + (r^*)^m \in k_{v_\alpha}[r^*]$

monik polinomu seçilsin.

i) $w(g) = me\gamma$

ii) $\deg g = me \deg f$

iii) $\left(\frac{g}{l^m}\right)^* = G$

koşullarını sağlayan $g(x) \in K[x]$ polinomu $G(r^*)$ polinomunun $K[x]$ e, w değerlendirmesine göre liftingi olarak adlandırılır. $G(r^*) \neq 0$ asal bir polinom ise liftingi olan $g(x)$ polinomu da asaldır.[13]

4.2. *K* cisminin Değerlendirmelerinin *K(x)* Cismine Rezidül Cebirsel Genişlemeleri

4.2.1. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi, v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri sırasıyla k_v ve k_w olmak üzere k_w/k_v genişlemesi cebirsel genişleme ise w değerlendirmesi, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül cebirsel (r.c.) genişlemesidir denir.[10]

4.2.2. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.c. genişlemesi, v ve w değerlendirmelerinin değer grupları sırasıyla Γ_v ve Γ_w olmak üzere Γ_w/Γ_v grubunun her elemanının mertebesi sonlu ise yani Γ_w/Γ_v torsion grup ise w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel torsion (r.c.t.) genişlemesi olarak adlandırılır. Bu durumda $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi ve $\Gamma_{\bar{v}}$ $\bar{v}$ değerlendirmesinin değer grubu olmak üzere $\Gamma_v \subseteq \Gamma_w \subseteq \Gamma_{\bar{v}}$ sağlanır.[10]

4.2.3. Tanım: w_1 ve w_2 bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine iki r.t. genişlemesi olmak üzere $K(x)$ cisminin r.t. genişlemeleri arasında

$w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \forall f(x) \in K[x]$ için $w_1(f(x)) \leq w_2(f(x))$

biçiminde tanımlanan "$\leq$" bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Aynı değerlendirmeler arasında

$w_1 < w_2 \Leftrightarrow w_1 \leq w_2$ ve $\exists f(x) \in K[x] \ \ni \ w_1(f(x)) \leq w_2(f(x))$

biçiminde tanımlanan "$<$" bağıntısı da tanımlanır.[10]

4.2.4. Önerme: w_1 ve w_2 bir K cebirsel kapalı cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine sırasıyla $(a_1, \delta_1), (a_2, \delta_2) \in K \times \Gamma_{\bar{v}}$ çiftleri ile tanımlanan iki r.t. genişlemesi olsun.

a) $w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \delta_1 \leq \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1 - a_2)$,

b) $w_1 < w_2 \Leftrightarrow \delta_1 < \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1 - a_2)$

koşulları sağlanır.[10]

Kanıt: a) $w_1 \leq w_2$ olsun. $w_1(x-a_1)=\delta_1$ ve $w_2(x-a_2)=\delta_2$ dir.

$w_1(x-a_1)=\delta_1 \leq w_2(x-a_1)=w_2(x-a_2+a_2-a_1)=inf(\delta_2, v(a_1-a_2))$ olur. Buradan da $\delta_1 \leq \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1-a_2)$ elde edilir.

Tersine; $\delta_1 \leq \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1-a_2)$ olsun. Bu durumda (a_2, δ_1) çifti de w_1 değerlendirmesini tanımlar. Her $f(x) \in K[x]$ polinomu

$$f(x)=b_0+b_1(x-a_2)+\cdots+b_n(x-a_2)^n$$

biçiminde yazılırsa

$$w_1\big(f(x)\big)=\inf_i(v(b_i)+i\delta_1)$$

$$w_2\big(f(x)\big)=\inf_i(v(b_i)+i\delta_2)$$

ve $\delta_1 \leq \delta_2$ olduğundan $w_1\big(f(x)\big) \leq w_2\big(f(x)\big)$ olur.

b) $w_1 < w_2$ olsun. $w_1 \leq w_2$ olduğundan $\delta_1 \leq \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1-a_2)$ sağlanır. $w_1 < w_2$ olduğundan $w_1\big(f(x)\big) < w_2\big(f(x)\big)$ olacak biçimde $f(x) \in K[x]$ vardır. (a_2, δ_1) çifti de w_1 değerlendirmesini tanımlar ve $f(x) \in K[x]$ polinomunu

$$f(x)=b_0+b_1(x-a_2)+\cdots+b_n(x-a_2)^n$$

biçiminde yazılırsa

$$w_1\big(f(x)\big)=\inf_i(v(b_i)+i\delta_1)$$

$$w_2\big(f(x)\big)=\inf_i(v(b_i)+i\delta_2)$$

olduğundan $\delta_1 < \delta_2$ sağlanır.

Tersine; $\delta_1 < \delta_2$ ve $\delta_1 \leq v(a_1-a_2)$ olsun. Bu durumda $w_1 \leq w_2$ sağlanır ve (a_2, δ_1) çifti de w_1 değerlendirmesini tanımlar.

$$w_1(x-a_2)=\delta_1 < w_2(x-a_2)=\delta_2$$

olduğundan $w_1(g(x)) < w_2(g(x))$ olacak biçimde bir $g(x) = x - a_2 \in K[x]$ polinomu bulunabilir. Yani $w_1 < w_2$ dir.

4.2.5. Tanım: I iyi sıralı sonsuz bir küme, $(w_i)_{i\in I}$ bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir kümesi olmak üzere $i, j \in I$ ve $i < j$ için $w_i < w_j$ oluyorsa $(w_i)_{i\in I}$ kümesine v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi denir.[10]

3.2.6. Tanım: $(w_i)_{i\in I}$ bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi olmak üzere her $f(x) \in K[x]$ için

$$w(f(x)) = \sup_i(w_i(f(x)))$$

biçiminde tanımlanan w, $K(x)$ cisminin v değerlendirmesinin genişlemesi olan bir değerlendirmesidir ve $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limiti olarak adlandırılır. w, v değerlendirmesinin r.t. genişlemesi olmayabilir.[10]

4.2.7. Sonuç: $(w_i)_{i\in I}$ bir K cebirsel kapalı cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi ve $(a_i, \delta_i) \in K \times \Gamma_v$, w_i değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olmak üzere her $i, j \in I$ ve $i < j$ için

$\delta_i < \delta_j$ ve $\delta_i \leq v(a_i - a_j)$

sağlanır.[10]

4.2.8. Önerme: $(w_i)_{i\in I}$ bir K cebirsel kapalı cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi ve w, $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limiti olmak üzere w değerlendirmesinin, v değerlendirmesinin r.t. genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için $\delta_i \leq v(a - a_i)$ olacak biçimde bir $a \in K$ bulunmasıdır.[10]

Kanıt: w, v değerlendirmesinin r.t. genişlemesi ve $(a, \delta) \in K \times \Gamma_{\bar{v}}$ w değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olsun. Her $i \in I$ için $w_i \leq w$ olduğundan $\delta_i \leq \delta$ ve $\delta_i \leq v(a_i - a)$ sağlanır.

$$\delta = w(x - a) = sup_i\, w_i(x - a) = sup_i\, w_i(x - a_i + a_i - a)$$

$$= \sup_i \left(inf\left(\delta_i, v(a_i - a)\right)\right) = \sup_i \delta_i$$

$\delta = \sup_i \delta_i$ ve $\delta = \sup_i \delta_i \leq v(a - a_i)$ olduğundan (a, δ) ve $(a_i, \sup_i \delta_i)$ çiftleri aynı değerlendirmeyi tanımlar ve $(a_i, \sup_i \delta_i)$ çiftiyle tanımlanan değerlendirme v nin r.t. genişlemesi olduğundan w de r.t. genişlemedir.

Tersine; her $i \in I$ için $\delta_i \leq v(a - a_i)$ olacak biçimde bir $a \in K$ bulunsun. $\delta = \sup_i \delta_i$ ve w, (a, δ) çiftiyle tanımlanan değerlendirme olsun. O zaman $w = sup_i\, w_i$ olur yani w değerlendirmesi v nin bir r.t. genişlemesidir.

4.2.9. Önerme: $(w_i)_{i \in I}$ bir K cebirsel kapalı cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi ve w, $(w_i)_{i \in I}$ sıralı sisteminin limiti olmak üzere w değerlendirmesinin, v nin r.t. genişlemesi olmaması için gerek ve yeter koşul her $a \in K$ için $w_i(x - a) < \delta_i$ olacak biçimde bir $i \in I$ bulunmasıdır.[10]

Kanıt: $w = sup_i\, w_i$ ve w, v değerlendirmesinin r.t. genişlemesi olmasın. 4.1.15. Önerme'den $M_w = \{w(x - b) \mid b \in K\} \subseteq \Gamma_w$ kümesi ya sınırlı değildir ya da sınırlı fakat $supM_w \notin M_w$ dir. $a \in K$ olsun. Her iki durumda da $w(x - a) < w(x - b)$ olacak biçimde bir $b \in K$ vardır.

w_i r.t. genişleme olduğundan $M_{w_i} = \{w_i(x - b) \mid b \in K\} \subseteq \Gamma_{w_i}$ kümesi sınırlıdır ve $supM_{w_i} = w_i(x - a_i) = \delta_i \in M_{w_i}$ dir.

$w(x - b) = \sup_i w_i(x - b)$ olduğundan

$w(x - a) < w(x - b) = w_i(x - b) \leq \delta_i$ olacak biçimde bir $i \in I$ vardır. Yani $w(x - a) < \delta_i$ olacak biçimde bir $i \in I$ vardır.

Tersine; $a \in K$ ve $w(x - a) = sup_i\, w_i(x - a) = w_j(x - a),\ j \in I$ olsun. Hipotezden $w(x - a) = w_j(x - a) < \delta_j$ olacak biçimde bir $j \in I$ vardır.

w değerlendirmesi, v nin bir r.t. genişlemesi ve (a, δ), w değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olsun. O zaman $M_w = \{w(x - b) \mid b \in K\} \subseteq \Gamma_w$ kümesi sınırlıdır ve $sup\, M_w = \delta \in M_w$ olur.

Her $i \in I$ için $w_i \leq w$ olduğundan $w_j(x-a_j) = \delta_j \leq w(x-a_j) \leq w(x-a)$ yani $\delta_j \leq w(x-a)$ olur ki bu bir çelişkidir. O zaman w değerlendirmesi v nin bir r.t. genişlemesi değildir.

4.2.10. Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $\overline{K}$ K cisminin cebirsel kapanışı, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi ve $(\overline{w}_i)_{i\in I}$ $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin sıralı sistemi olsun. Her $i \in I$ için $(a_i, \delta_i) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$, $\overline{w}_i$ değerlendirmesini tanımlayan minimal çift, w_i $\overline{w}_i$ değerlendirmesinin $K(x)$ cismine kısıtlanışı ve v_i $\bar{v}$ değerlendirmesinin $K(a_i)$ cismine kısıtlanışı olsun.

a) $(w_i)_{i\in I}$ v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemidir.

b) Her $i \in I$ için v_i değerlendirmesinin rezidü cismi k_{v_i} ve değer grubu Γ_{v_i} olmak üzere her $i, j \in I$ ve $i < j$ için $k_{v_i} \subseteq k_{v_j}$ ve $\Gamma_{v_i} \subseteq \Gamma_{v_j}$ sağlanır.

c) $\overline{w} = sup_i\, \overline{w}_i$ olsun. $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemesi değilse $w = sup_i\, w_i$, $k_w = \bigcup_i k_{v_i}$ ve $\Gamma_w = \bigcup_i \Gamma_{v_i}$ sağlanır.[10]

Kanıt: a) $Irr(a_i, K) = f_i$ olsun. $degf = n_i = [K(a_i): K]$ dır. Her $i < j$ için $\overline{w}_i < \overline{w}_j$ olduğundan $\overline{w}_i \leq \overline{w}_j$ ve $w_i \leq w_j$ sağlanır. Fakat $w_i = w_j$ olsaydı $\delta_i = \delta_j$ olup çelişki olurdu. Yani $w_i < w_j$ dir.

Ayrıca (a_i, δ_i) minimal çift olduğundan $i < j$ için $\delta_i \leq \bar{v}(a_i - a_j)$ dir. Bu durumda $(a_i,\ \delta_i)$ ve $(a_j,\ \delta_i)$ aynı değerlendirmeyi tanımlar fakat $(a_i,\ \delta_i)$ minimal çift olduğundan $[K(a_i): K] \leq [K(a_j): K]$ olur ve $n_i \leq n_j$ sağlanır.

b) $c \in K(a_i), c = f(a_i), f(x) \in K[x], n = degf < n_i$ olsun. $n < n_i \leq n_j$ ve w_i v nin bir r.t. genişlemesi olduğundan 4.1.17. Teorem (a) dan $w_i(f(x)) = \bar{v}(f(a_i)) = \bar{v}(f(a_j))$ olur. O zaman

$$v_i(c) = v_i\big(f(a_i)\big) = \bar{v}\big(f(a_i)\big) = \bar{v}(f(a_j)) = v_j(f(a_j))$$

eşitliğinden $\Gamma_{v_i} \subseteq \Gamma_{v_j}$ olduğu görülür. Burada $v_i(c) = 0$ ise $v_j(f(a_j)) = 0$ olur.

$b_1, b_2, \dots, b_n$ f polinomunun $\overline{K}$ cismindeki kökleri olsun. $(a_i,\ \delta_i)$ minimal çift olduğundan f polinomunun her $b_t, 1 \le t \le n$ kökü için $\bar{v}(a_i - b_t) < \delta_i$ olur. $\bar{v}(a_i - b_t) = \bar{v}(a_j - b_t) = \bar{v}(d_t)$ olacak biçimde bir $d_t \in K$ seçelim. Bu durumda $\bar{v}((a_i - b_t)/d_t) = \bar{v}((a_j - b_t)/d_t) = 0$ olur. (a) dan $\delta_i \le \bar{v}(a_i - a_j)$ sağlandığından dolayı $\bar{v}\big((a_j - a_i)/(a_i - b_t)\big) > 0$ olur ve

$$0 < \bar{v}\left(\frac{a_j - a_i}{a_i - b_t}\right) = \bar{v}\left(\frac{a_j - b_t}{a_i - b_t} - 1\right) = \bar{v}\left(\frac{(a_j - b_t)/d_t}{(a_i - b_t)/d_t} - 1\right)$$

sağlanır. Yani $1 \le t \le n$ için $((a_i - b_t)/d_t)^* = ((a_j - b_t)/d_t)^*$,

$$\frac{f(a_j)^*}{f(a_i)^*} = \left(\frac{f(a_j)}{f(a_i)}\right)^* = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{((a_j - b_t)/d_t)}{((a_i - b_t)/d_t)}\right)^* = \prod_{i=1}^{n} \frac{((a_j - b_t)/d_t)^*}{((a_i - b_t)/d_t)^*} = 1$$

ve $f(a_j)^* = f(a_i)^* \in k_{\bar{v}}$ olur. Yani $c^* \in k_{v_i}$ için $c^* \in k_{v_j}$ olur ve $k_{v_i} \subseteq k_{v_j}$ dir.

c) $\overline{w} = sup_i\, \overline{w}_i$ olduğundan $w = sup_i\, w_i$ olduğu açıktır ve $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.t. genişlemesi olmadığından w de v değerlendirmesinin bir r.t. genişlemesi değildir.

$f(x) \in K[x], n = degf < n_i$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n$ f polinomunun $\overline{K}$ cismindeki kökleri olsun. $(a_i,\ \delta_i)$ minimal çift olduğundan f polinomunun her $b_t, 1 \le t \le n$ kökü için $\bar{v}(a_i - b_t) < \delta_i$ olur, buradan $\overline{w}(x - b_t) = \overline{w}(x - a_i + a_i - b_t) = \bar{v}(a_i - b_t)$ ve $\overline{w}(f(x)) = w(f(x)) = \bar{v}(f(a_i)) = v_i(f(a_i))$. Bu eşitlikten $\Gamma_{v_i} \subseteq \Gamma_w$ olduğu görülür. O zaman $v_i(f(a_i)) = 0$ ise $w(f(x)) = 0$ ve b nin kanıtından $f(x)^* = f(a_i)^*$ sağlanır. Dolayısıyla $k_{v_i} \subseteq k_w$ olur. O halde $\bigcup_i k_{v_i} \subseteq k_w$ ve $\bigcup_i \Gamma_{v_i} \subseteq \Gamma_w$ dır.

$r(x) = f(x)/g(x) \in K(x)$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ ve $c_1, c_2, \dots, c_m$ sırasıyla f ve g polinomlarının $\overline{K}$ cismindeki kökleri olsun. $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin bir r.t. genişlemesi olmadığından her $b_t, c_s \in K, 1 \le t \le n, 1 \le s \le m$ için $\overline{w}(x - b_t) < \delta_i$ ve $\overline{w}(x - c_s) < \delta_i$ olacak biçimde bir $i \in I$ vardır.

$$\bar{v}(a_i - b_t) = \overline{w}(a_i - x + x - b_t) = \overline{w}(x - b_t)$$

$$\bar{v}(a_i - c_s) = \overline{w}(a_i - x + x - c_s) = \overline{w}(x - c_s)$$

olduğundan $w(f(x)) = \bar{v}(f(a_i))$, $w(g(x)) = \bar{v}(g(a_i))$ ve

$\bar{v}(r(a_i)) = v_i(r(a_i)) = w(r(x))$

eşitlikleri sağlanır ve $\Gamma_w \subseteq \Gamma_{v_i}$ olduğu görülür. Burada $w(r(x)) = 0$ ise $v_i(r(a_i)) = 0$ dır ve yukarıdaki biçimde $r(x)^* = r(a_i)^*$ olur. Yani $r(x)^* \in k_{v_i}$ ve $k_w \subseteq k_{v_i}$ olur. O zaman $k_w \subseteq \bigcup_i k_{v_i}$ ve $\Gamma_w \subseteq \bigcup_i \Gamma_{v_i}$ olur. Dolayısıyla $k_w = \bigcup_i k_{v_i}$ ve $\Gamma_w = \bigcup_i \Gamma_{v_i}$ sağlanır.

4.2.11. Önerme: w, K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.c.t. genişlemesi olsun. K cebirsel kapalı ise w, v değerlendirmesinin bir immediate genişlemesidir.[10]

Kanıt: w, K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.c.t. genişlemesi olduğundan dolayı $\Gamma_v \subseteq \Gamma_w \subseteq \Gamma_{\bar{v}}$ ve K cebirsel kapalı olduğundan $\Gamma_v = \Gamma_{\bar{v}}$ olur ve bu durumda $\Gamma_v = \Gamma_w$ olmak zorundadır.

K cebirsel kapalı olduğundan k_v cismi de cebirsel kapalıdır. k_w/k_v genişlemesi cebirsel olduğundan $k_v = k_w$ dir.

4.2.12. Önerme: w, K cebirsel kapalı cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.c.t. genişlemesi olsun. Bu durumda $M_w = \{w(x-a) | \, a \in K\}$ kümesi ya sınırlı değildir ya da sınırlı fakat $supM_w \notin M_w$ dır. Ek olarak M_w tam sıralı olduğundan M_w kümesini her $w(x-a) \in M_w$ için $w(x-a) \leq \delta_i$ ve $i, j \in I$, $i < j$ için $\delta_i < \delta_j$ olacak biçimde bir $\{\delta_i\}_{i\in I}$ sıralı alt kümesi vardır. $supM_w \notin M_w$ olduğundan I kümesi sonsuzdur. Her $i \in I$ için $w(x-a_i) = \delta_i$ olacak biçimde $a_i \in K$seçelim ve w_i, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a_i, δ_i) çiftiyle tanımlanan r.t. genişlemesi olsun. Bu durumda;

a) $\{w_i\}_{i\in I}$, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemidir.

b) Her $i \in I$ için $w_i \leq w$ ve $w = sup_{i\in I} w_i$ dir.[10]

Kanıt: a) $i, j \in I$, $i < j$ olsun. Her $b \in K$ için $w_i(x-b) \leq w_j(x-b)$ olduğu gösterilecek.

$v(a_i - a_j) = w(a_i - a_j) = w(a_i - x + x - a_j)$

$= \min(w(a_i - x), w(x - a_j)) = w(a_i - x) = \delta_i$ olur.

Her $b \in K$ için $w_i(x - b) = \inf(\delta_i, v(a_i - b))$ ve $w_j(x - b) = \inf(\delta_j, v(a_j - b))$ olur.

$v(a_j - b) = v(a_j - a_i + a_i - b) \geq \inf(\delta_i, v(a_i - b)) = w_i(x - b)$ ve buradan da $w_j(x - b) = \inf(\delta_j, v(a_j - b)) \geq \inf(\delta_i, v(a_i - b)) = w_i(x - b)$ elde edilir. Yani $w_i \leq w_j$ dir.

$w_j(x - a_j) = \delta_j > w_i(x - a_j) = w_i(x - a_i + a_i - a_j) = \inf(\delta_i, v(a_i - a_j)) = \delta_i$

olur. O halde $x - a_j \in K[x]$ için $w_i < w_j$ dir.

b) $b \in K$ olsun.

$w(x - b) = w(x - a_i + a_i - b) \geq \inf(\delta_i, v(a_i - b)) = w_i(x - b)$ olur. Yani her $i \in I$ için $w_i \leq w$ olur.

$w(x - b) \in M_w$ olduğundan $w(x - b) < \delta_i$ olacak biçimde $i \in I$ vardır ve bu yüzden $w(x - b) = w(x - a_i + a_i - b) \geq \inf(\delta_i, v(a_i - b)) = v(a_i - b)$ olur. Buradan da $v(a_i - b) = w(x - b) < \delta_i$ elde edilir. (a) nın kanıtında da $w_i(x - b) = \inf(\delta_i, v(a_i - b))$ olduğundan $w_i(x - b) = v(a_i - b)$ olur. $i < j$ ise (a) nın kanıtından $w_j(x - b) = \inf(\delta_j, v(a_j - b)) \geq \inf(\delta_i, v(a_i - b)) = w_i(x - b)$ olduğundan $w_j(x - b) = w_i(x - b) = v(a_i - b) = w(x - b)$ olur. O zaman $w = sup_{i \in I} w_i$ dir.

4.2.13. Önerme: 4.1.10. Teoremdeki gösterimler altında w, v değerlendirmesinin r.c.t genişlemesi ise $\overline{w}$ de $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.c.t. genişlemesidir.[10]

4.2.14. Önerme: w, K cisminin bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.c.t. genişlemesi olsun. O zaman v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir $\{w_i\}_{i \in I}$ sıralı sistemi vardır. Her $i \in I$ için $(a_i, \delta_i) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$, w_i değerlendirmesini tanımlayan minimal çift ve v_i, $\overline{K}$ cisminin $\bar{v}$ değerlendirmesinin $K(a_i)$ cismine kısıtlanışı olmak üzere

a) $i,j \in I$, $i<j$ için $k_{v_i} \subseteq k_{v_j}$ ve $\Gamma_{v_i} \subseteq \Gamma_{v_j}$

b) $w = sup_i\, w_i$, $k_w = \bigcup_i k_{v_i}$ ve $\Gamma_w = \bigcup_i \Gamma_{v_i}$

sağlanır.[10]

Kanıt: 4.2.13. Önerme'den $\overline{w}$ nin $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.c.t. genişlemesi olduğunu biliyoruz. 4.2.12. Önerme'den K cismi cebirsel kapalı olduğunda v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir sıralı sistemi olduğunu biliyoruz. Son olarak 4.2.10. Teorem'den de $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir $\{\overline{w}_i\}_{i\in I}$ sıralı sistemi varsa v değerlendirmesinin de $K(x)$ cismine bir $\{w_i\}_{i\in I}$ sıralı sisteminin olduğunu ve $\overline{w}$, $\bar{v}$ değerlendirmesinin r.t. genişlemesi olmaması durumunda yukarıda verilen (a) ve (b) maddelerinin sağlandığını görüyoruz. Yani bu önerme 4.2.12. Önerme ve 4.2.10. Teorem'in sonucudur.

4.2.15. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.c. genişlemesi, v ve w değerlendirmelerinin değer grupları sırasıyla Γ_v ve Γ_w olmak üzere Γ_w/Γ_v grubunun en az bir serbest elemanı varsa yani Γ_w/Γ_v torsion grup değilse w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir serbest rezidül cebirsel (s.r.c.) genişlemesi olarak adlandırılır.[10]

Yani w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir s.r.c. genişlemesi olması durumunda Γ_w/Γ_v grubunun $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ iken $n\bar{\delta} \neq 0$ olacak biçimde en az bir $\bar{\delta}$ elemanı vardır. Bu da Γ_w grubunun $\mathbb{Z}\delta \cap \Gamma_v = \{0\}$ olacak biçimde en az bir δ elemanının olduğu anlamına gelir.[10]

v K cisminin rankı 1 olan ayrık bir değerlendirmesi, u v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rankı 2 olan genişlemesi ve O_u u değerlendirmesinin değerlendirme halkası olsun. Bu durumda O_u halkasının (0) dan farklı $(0) \subseteq M_{w_1} \subseteq M_u$ olacak biçimde iki asal ideali vardır. O_u halkasının M_{w_1} idealinin tümleyenine göre kesir halkası O_{w_1} ise $K(x) \supseteq O_{w_1} \supseteq O_u$ sağlanır. $K(x)$ cisminin O_{w_1} halkasına karşılık gelen değerlendirmesi w_1 olsun. w_2 de $k_{w_1} = O_{w_1}/M_{w_1}$ cisminin O_u/M_{w_1} değerlendirme halkasına karşılık gelen değerlendirmesi olsun. Yukarıda bahsedilen rankı 2 olan u değerlendirmesini

$u = w_1 \circ w_2$

veya her $f(x) \in K[x]$ için

$u(f(x)) = (w_1(f(x), w_2(f(x)^*))$

biçiminde oluşturacağız. Yani u değerlendirmesi, $t \in K[x], u(t) = (1,0)$ ise $w_1(t) = 1$ ve $x \in K[x]$ ise

$$u(x) = \left(w_1(x), w_2\left(\left(\frac{x}{t^{w_1(x)}}\right)^*\right)\right)$$

biçiminde tanımlanacaktır.[11]

Burada O_{w_1} halkası ile K cisminin kesişimi incelenerek w_1 değerlendirmesinin K cismi üzerinde nasıl davrandığına göre 1. ve 2. tip serbest rezidül cebirsel genişlemeler oluşturulacaktır.

4.2.16. Tanım: Yukarıdaki gösterimler altında

$O_{w_1} \cap K = K$

olması durumunda elde edilen u değerlendirmesine v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine 1. tip serbest rezidül genişlemesi adı verilir ve bu genişlemeler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$O_{w_1} \cap K = K$ ise w_1 değerlendirmesi K cismi üzerinde aşikardır. Bu durumda 3.1.14. Teoreme göre w_1 ya asal, monik bir $f(x) \in K[x]$ polinomu ile tanımlanmıştır yani w_1 $f(x) -$ adik değerlendirmedir ya da sonsuzdaki değerlendirmedir. Fakat w_1 sonsuzdaki değerlendirme ise tüm kavramlar $f(x) = x$ durumu ile aynı olacağından w_1 değerlendirmesinin asal, monik bir $f(x) \in K[x]$ polinomu ile tanımlandığı durumun incelenmesi yeterli olacaktır.

Bu durumda $\Gamma_{w_1} = \mathbb{Z}$, $O_{w_1} = K[x]$, $M_{w_1} = (f(x))$ olur ve a, $f(x)$ polinomunun uygun bir kökü olmak üzere

$k_{w_1} = O_{w_1}/M_{w_1} = K[x]/(f(x)) \cong K(a)$ olur.

v' de, v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine her $\left(\frac{F_i}{f^{w_1(F_i)}}\right)^* \in k_{w_1}$ için $w_2\left(\left(\frac{F_i}{f^{w_1(F_i)}}\right)^*\right) = v'(F_i(a))$ biçiminde tanımlanan genişlemesi olsun.

Her $F = F_0 + F_1 f + F_2 f^2 + \cdots + F_n f^n \in K[x]$, $0 \le i \le n$, $degF_i < degf$

için

$$u(F) = \inf_i u(F_i f^i) = \inf_i (\, u(F_i) + i \cdot u(f))$$

$$= \inf_i \left(\left(w_1(F_i), w_2\left(\left(\frac{F_i}{f^{w_1(F_i)}}\right)^*\right)\right) + \; i \cdot \left(w_1(f), w_2\left(\left(\frac{f}{f^{w_1(f)}}\right)^*\right)\right)\right)$$

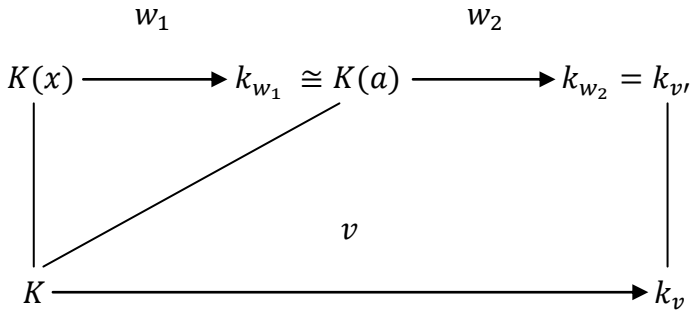
$$= \inf_i \big(\, (\, 0, v'(F_i(a)\big) + i \cdot (1,0) \, \big) = \inf_i (\, i, v'(F_i(a)\,) \in \mathbb{Z} \times \Gamma_{v'}$$

veya

$$u(F) = inf_i \left(w_1(F), w_2\left(\left(\frac{F}{f^{w_1(F)}}\right)^*\right)\right)$$

biçimindedir.

Γ_v grubunun $j\colon \Gamma_v \longrightarrow \Gamma_{w_1} \times \Gamma_{v'}$, her $\alpha \in \Gamma_v$ için $j(\alpha) = (0, \alpha)$ biçiminde tanımlanan j gömmesi altındaki görüntü kümesi lexicographically sıralı $\Gamma_{w_1} \times \Gamma_{v'}$ grubunun bir alt grubudur.[11]



Şekil 4.5

4.2.17. Tanım: Yukarıdaki gösterimler altında

$O_{w_1} \cap K = O_v$

olması durumunda elde edilen u değerlendirmesine v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine 2. tip serbest rezidül genişlemesi adı verilir ve bu genişlemeler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$O_{w_1} \cap K = O_v$ ise w_1 v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemesidir. Ayrıca $M_{w_1} \cap K = M_v$, $O_u \cap K = O_v$ ve $M_u \cap K = M_v$ olur. $O_{w_2} = O_u/M_{w_1}$ ve $k_v = O_v/M_v$ dir. $O_{w_2} \cap k_v = k_v$ olduğundan $k_{w_1} = O_{w_1}/M_{w_1}$ cisminin w_2 değerlendirmesi k_v cismi üzerinde aşikardır. Bundan dolayı k_{w_1}/k_v genişlemesi transandant bir genişlemedir ve w_1 v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.t. genişlemesidir. Bu durumda w_1 bir $(a, \delta) \in K \times \mathbb{Q}\Gamma_v$ minimal çiftiyle tanımlanmıştır. $Irr\,(a, K) = f(x)$, $w_1\big(f(x)\big) = \gamma$ ve $e = e(\gamma, K(a))$ olmak üzere $r = f^e/h$, $w_1(r) = 0$ ve $r^*\ trans/k_v$ olacak biçimde bir $h(x) \in K[x]$, $\deg h < degf$ polinomu vardır. $w_1\big(h(x)\big) = e\gamma$ olur. v_a, v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine genişlemesi olmak üzere k_{v_a}, k_v cisminin k_{w_1} cismi içindeki cebirsel kapanışıdır ve $k_{w_1} = k_{v_a}(r^*)$ biçimindedir. r^* elemanı k_v üzerinde tansandant olan en küçük dereceli elemandır.

w_2 değerlendirmesi k_v üzerinde aşikar olduğundan k_{v_a} cismi üzerinde de aşikardır. Bu yüzden asal, monik bir $G(r^*) \in k_{v_a}[r^*]$ polinomuyla tanımlanmıştır. $G(r^*) = u_0 + u_1 r^* + \cdots + u_{m-1} r^{*m-1} + r^{*m}$ ve $g(x) \in K[x]$, $G(r^*)$ polinomunun liftingi olsun.

Her $F = F_0 + F_1 g + F_2 g^2 + \cdots + F_s g^s \in K[x]$, $0 \le i \le s$, $degF_i < degg$

için

$$u(F) = \inf_i u(F_i g^i) = \inf_i \big(u(F_i) + i \cdot u(g)\big)$$

$$= inf_i \left((w_1(F_i), w_2(F_i^*)) + i \cdot \left(w_1(g), w_2 \left(\left(\frac{g}{h^m} \right)^* \right) \right) \right)$$

$$= inf_i \big((w_1(F_i), 0) + i \cdot \big(m \cdot e \cdot \gamma, w_2(G) \big) \big)$$

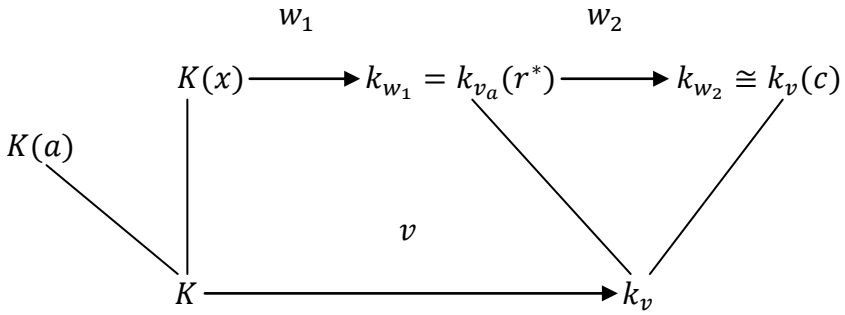
$= inf_i(\ (w_1(F_i), 0) + i \cdot (m \cdot e \cdot \gamma, 1)\ )$

$= inf_i(\ w_1(F_i) + i \cdot m \cdot e \cdot \gamma\ ,\ i\ ) \in \Gamma_{w_1} \times \mathbb{Z}$

biçimindedir.

Γ_v grubunun $j: \Gamma_v \longrightarrow \Gamma_{w_1} \times \Gamma_{w_2}$, her $\alpha \in \Gamma_v$ için $j(\alpha) = (\alpha, 0)$ biçiminde tanımlanan j gömmesi altındaki görüntü kümesi lexicographically sıralı $\Gamma_{w_1} \times \Gamma_{w_2}$ grubunun alt grubudur.

w_2 değerlendirmesi k_v üzerinde aşikar olduğundan c, $G(r^*) \in k_{v_a}[r^*]$ polinomunun uygun bir kökü olmak üzere $k_{w_2} \cong k_v(c)$ biçimindedir.[11]



Şekil 4.6

4.1.18. Örnek: v, $\mathbb{Q}$ cisminin aşikar olmayan bir değerlendirmesi ve w_1, $\mathbb{Q}(x)$ cisminin $(x^2 + 1)$ −adik değerlendirmesi olsun.

$k_{w_1} = O_{w_1} / M_{w_1} = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{Q}(i)$, $i \in \mathbb{C}$ olur.

$p:\ O_{w_1} \longrightarrow k_{w_1}$ doğal homomorfizma olsun.

$\varphi:\ k_{w_1} \longrightarrow\ \mathbb{Q}(i)$, her $p\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \in k_{w_1}, g(i) \neq 0$ için $\varphi\left(\ p\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) = \frac{f(i)}{g(i)}$ ile tanımlanan φ, bir izomorfizmadır.

v', v değerlendirmesinin $\mathbb{Q}(i)$ cismine değer grubu $\Gamma_{v'}$ olan bir genişlemesi olmak üzere her $p\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \in k_{w_1}$ için $w_2\left(p\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) = v'\left(\frac{f(i)}{g(i)}\right)$ ile tanımlı w_2 dönüşümü k_{w_1} cisminin v değerlendirmesinin genişlemesi olan bir değerlendirmesidir.

$\tilde{f} = (x^2+1)^{-w_1(f)} \cdot f$ olsun.

$u\big(f(x)\big) = (w_1(f(x)), w_2(p(\tilde{f}(x))) = (w_1(f(x), v'(\tilde{f}(i))) \in \mathbb{Z} \times \Gamma_{v'}$,
biçiminde tanımlanan u, v değerlendirmesinin $\mathbb{Q}(x)$ cismine rankı 2 olan 1. tip serbest rezidül cebirsel genişlemesidir.[12]

Örneğin; $f(x) = (x^2+1)^4 \cdot \frac{x^3-1}{x+7} \in \mathbb{Q}(x)$ için

$u\big(f(x)\big) = \left(4, v'\left(\frac{-i-1}{i+7}\right)\right) \in \mathbb{Z} \times \Gamma_{v'}$ dür.

BÖLÜM 5

DEĞERLENDİRİLMİŞ CİSİMLERDE BAZI ASALLIK KRİTERLERİ

5.1. Tanım: K bir cisim, $\overline{K}$ K cisminin bir cebirsel kapanışı, v K cisminin bir değerlendirmesi ve $\bar{v}$, v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine bir genişlemesi olmak üzere K cisminin elemanlarından oluşan (θ, α) ikilisi

i) $deg\theta > deg\alpha$ $([K(\theta):K] > [K(\alpha):K])$

ii) $\beta \in \overline{K}$ ve $deg\beta < deg\theta$ için $\bar{v}(\theta - \beta) \leq \bar{v}(\theta - \alpha)$

iii) $\gamma \in \overline{K}$ ve $deg\gamma < deg\alpha$ için $\bar{v}(\theta - \gamma) < \bar{v}(\theta - \alpha)$

koşullarını sağlıyorsa (θ, α) ikilisine bir seçkin ikili adı verilir. Diğer bir deyişle $\alpha \in \overline{K}$ için $\bar{v}(\theta - \alpha) = sup\{\bar{v}(\theta - \beta) \mid \beta \in \overline{K},\ deg\beta < deg\theta\}$ ise (θ, α) ikilisine bir seçkin ikili adı denir.[13]

5.2. Sonuç: 5.1. Tanımı'ndaki gösterimler altında $\bar{v}(\theta - \alpha) = \delta$ ise $(\alpha, \delta) \in \overline{K} \times \Gamma_{\bar{v}}$ ikilisi bir minimal çifttir.

Kanıt: (θ, α) seçkin ikili olduğundan $\beta \in \overline{K}$, $\bar{v}(\alpha - \beta) \geq \bar{v}(\theta - \alpha)$ iken $deg\beta \geq deg\alpha$ yani $[K(\beta):K] \geq [K(\alpha):K]$ olur. O zaman (α, δ) minimal çifttir.

5.3. Tanım: $\theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_r \in \overline{K}$ olmak üzere her $0 \leq i \leq r-1$ için (θ_i, θ_{i+1}) seçkin ikili ve $\theta_r \in K$ ise $(\theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_r)$ zincirine θ nın r uzunluğunda doymuş seçkin zinciri adı verilir.[13]

5.4. Teorem: $(\theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_r)$ ve $(\theta = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_s)$, $\overline{K}$ cisminin elemanlarından oluşan iki seçkin zincir, $\Gamma(K)$ K cisminin v değerlendirmesinin değer grubu ve k_{v_θ} v değerlendirmesinin $K(\theta)$ cismine v_θ genişlemesinin rezidü cismi olmak üzere

i) $r = s$

ii) $1 \leq i \leq r$ için $[K(\theta_i): K] = [K(\eta_i): K]$

iii) $1 \leq i \leq r$ için $\Gamma\big(K(\theta_i)\big) = \Gamma\big(K(\eta_i)\big)$

iv) $1 \leq i \leq r$ için $k_{v_{\theta_i}} = k_{v_{\eta_i}}$

v) $1 \leq i \leq r-1$ için $k_{v_{\theta_{i+1}}} \subseteq k_{v_{\theta_i}}$

vi) $1 \leq i \leq r-1$ için $\Gamma\big(K(\theta_{i+1})\big) \subseteq \Gamma\big(K(\theta_i)\big)$

sağlanır.[14]

1995 yılında N. Popescu ve A. Zaharescu yaptıkları çalışmada K cisminin ayrık ve rankı 1 olan bir değerlendirmeye göre tam olması durumunda her $\theta \in \overline{K}$ elemanı için bir doymuş seçkin zincir bulunduğunu kanıtlamışlardır. 2005 yılında da S. K. Khanduja ve K. Aghigh v değerlendirmesinin Henselian ve herhangi ranklı olması durumunda bir $\theta \in \overline{K}$ elemanı için doymuş seçkin zincir bulunması için gerek ve yeter koşulun $[K(\theta): K] = e \cdot f$ (hatasız genişleme) olduğunu göstermişlerdir.

5.5. Tanım: v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi, $\alpha \in \overline{K}$ ve α ayr/K olmak üzere

$\omega_K(\alpha) = max\,\{\bar{v}(\alpha - \alpha') \mid \alpha'$ ve α $K-$eşlenik, $\alpha \neq \alpha'\}$

biçiminde tanımlanan $\omega_K(\alpha)$, α elemanının Krasner Sabiti olarak adlandırılır.[13]

5.6. Lemma: (Krasner's Lemma) v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi, $\alpha \in \overline{K}$ ve α ayr/K olmak üzere $\beta \in \overline{K}$ ve $\bar{v}(\alpha - \beta) > \omega_K(\alpha)$ ise $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ olur.[14]

5.7. Tanım: K/F cebirsel genişleme, v F cisminin bir değerlendirmesi ve w K cisminin v nin genişlemesi olan bir değerlendirmesi olmak üzere $[K:F] = [\Gamma_w:\Gamma_v]$ ise K/F genişlemesine tamamıyla dallanmış genişleme adı verilir.[14]

5.8. Lemma: $P(x) = a_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + a_{e-2}x^{e-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ bir polinom ve $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_e$ bu polinomun kökleri olmak üzere $P(x)$ polinomunun katsayıları ve kökleri arasında

$$S_1 = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_e = (-1)^1 \frac{a_{e-1}}{a_e}$$

$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le e} \theta_i \cdot \theta_j = (-1)^2 \frac{a_{e-2}}{a_e}$$

$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le e} \theta_i \cdot \theta_j \cdot \theta_k = (-1)^3 \frac{a_{e-3}}{a_e}$$

…

$$S_m = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le e} \theta_{i_1} \cdot \theta_{i_2} \cdot \ldots \cdot \theta_{i_m} = (-1)^m \frac{a_{e-m}}{a_e}$$

…

$$S_e = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_e = (-1)^e \frac{a_0}{a_e}$$

bağıntıları sağlanır.

5.9. Tanım: (Eisenstein Asallık Kriteri)

$F(x) = a_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ olmak üzere

i) $p \nmid a_e$

ii) $0 \le i \le e-1$ için $p \mid a_i$

iii) $p^2 \nmid a_0$

olacak biçimde bir p asal sayısı bulunabiliyorsa $F(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde asaldır. Yukarıdaki koşulları sağlayan bir $F(x)$ asal polinomuna p asal sayısına göre Eisenstein polinomu adı verilir. Bir polinomda Eisenstein asallık kriteri uygulanamıyorsa $F(x+1)$ polinomunun asal olup olmadığına bakılıp $F(x)$ polinomunun asallığı hakkında yargıya varılabilir.[14]

5.10. Örnek: p. cyclotomic polinomu düşünelim.

$P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x-1}$ polinomunda katsayıları bölen herhangi bir asal sayı olmadığından Eisenstein asallık kriteri uygulanamaz. Fakat $P(x+1) = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-1} = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)-1}$ polinomu incelenirse Eisenstein asallık kriterine göre $P(x+1)$ polinomunun asal olduğu görülür. Dolayısıyla $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ polinomu da asaldır.

1906 yılında Eisenstein Asallık Kriteri Gustave Dumas tarafından aşağıdaki şekilde genellenmiştir.

5.11. Tanım: (Dumas Asallık Kriteri)

$F(x) = a_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ olsun. p, $0 \leq i \leq n$ ve $r_i \in \mathbb{Z}$ için $p^{r_i} \mid a_i$ ($a_i = 0$ ise $r_i = \infty$) olacak biçimde bir asal sayı olsun.

i) $r_e = 0$

ii) $1 \leq i \leq e-1$ için $\frac{r_i}{e-i} > \frac{r_0}{e}$

iii) $(r_0, e) = 1$

koşulları gerçekleniyor ise $F(x)$, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde asaldır.

$F(x) = a_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu için v_p $p-$adik değerlendirme olmak üzere

i) $v_p(a_e) = 0$

ii) $1 \leq i \leq e-1$ için $\frac{v_p(a_i)}{e-i} > \frac{v_p(a_0)}{e}$

iii) $\left(v_p(a_0), e\right) = 1$

olacak biçimde bir p asal sayısı bulunabiliyorsa $F(x)$, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde asaldır. Bu üç koşul yukarıdaki üç koşula denktir.[14]

Eisenstein Asallık Kriteri, Dumas Asallık Kriteri'nin $r_0 = 1$ için özel bir durumudur.

1997 yılında Jayanti Saha ve Sudesh Kaur Khanduja, Dumas Asallık Kriterini katsayıları herhangi bir K cisminden alınan polinomlar için genellemişlerdir.

5.12. Tanım: v K cisminin değer grubu $\mathbb{Z}$ olan bir değerlendirmesi olmak üzere $F(x) = x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ polinomu

i) $0 \leq i \leq e-1$ için $\frac{v(a_i)}{e-i} \geq \frac{v(a_0)}{e} > 0$

ii) $(v(a_0), e) = 1$

koşullarını sağlıyorsa K cismi üzerinde asaldır. Yukarıdaki koşulları sağlayan bir $F(x)$ asal polinomuna v değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu adı verilir.[14]

5.13. Örnek: $v_3: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, 3 −adik değerlendirme olsun.

$F(x) = x^4 + \frac{15}{7}x^3 - 18x^2 + \frac{81}{4}x + 27 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu 5.12. Tanım'daki koşulları sağlar ve v_3 değerlendirmesine göre bir Eisenstein-Dumas polinomudur.

5.14. Tanım: (Klasik Schönemann Asallık Kriteri)

$F(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $F(x) = \phi(x)^e + pM(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ve p bir asal sayı olsun.

i) $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu monik ve mod$p$ ye göre asal

ii) $\phi(x)$ ve $M(x)$ mod$p$ ye göre aralarında asal

iii) $degM(x) < degF(x)$

ise $F(x)$, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde asaldır. Bu koşulları sağlayan $F(x)$ polinomuna p ve $\phi(x)$'e göre Schönemann polinomu adı verilir.[14]

Bir $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun $\phi(x)$ −açılımı yapılırsa

$F(x) = \sum_{i=0}^{e} g_i(x)\phi(x)^i$, $degg_i(x) < deg\phi(x)$ elde edilir.

i) $g_e(x) = 1$

ii) $0 \leq i \leq e-1$ için $p \mid g_i(x)$

iii) $p^2 \nmid g_0(x)$

koşullarını sağlayan $F(x)$ polinomunun yine p ve $\phi(x)$ e göre Schönemann polinomu olduğu açıktır.

5.15. Sonuç: Monik bir $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun p asal sayısına göre Eisenstein polinomu olması için gerek ve yeter koşul $F(x)$ polinomunun p ve $\phi(x) = x$ e göre Schönemann polinomu olmasıdır.

Klasik Schönemann Asallık Kriteri 2008 yılında Ron Brown tarafından katsayıları, herhangi ranklı bir v değerlendirmesi tarafından değerlendirilmiş olan bir K cisminden alınan polinomlar için genellenmiştir.

5.16. Tanım: (Genellenmiş Schönemann Asallık Kriteri)

v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı bir değerlendirmesi ve v değerlendirmesinin değerlendirme halkası ve maksimal ideali sırasıyla O_v ve M_v olsun. $f(x) \in O_v[x]$ monik bir polinom, $degf = m$ ve $\bar{f}(x)$ polinomu $k_v = O_v/M_v$ rezidü cismi üzerinde asal olsun. Bir $g(x) \in O_v[x]$ monik polinomunun $f(x)$ −açılımı $g(x) = f(x)^e + \sum_{i=0}^{e-1} g_i(x)f(x)^i$, $degg_i(x) < degf(x)$ biçimindedir. v^x, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine Gauss genişlemesi olmak üzere

i) $0 \leq i \leq e-1$ için $\frac{v^x(g_i(x))}{e-i} \geq \frac{v^x(g_0(x))}{e} > 0$

ii) e sayısını bölen herhangi bir $1 < d$ sayısı için $\frac{v^x(g_0(x))}{d} \notin \Gamma$

oluyor ise $g(x)$, K cismi üzerinde asaldır.

Bu koşulları sağlayan $g(x) \in O_v[x]$ polinomuna v ve $f(x)$ e göre Genellenmiş Schönemann polinomu denir.[14]

$g(x) \in O_v[x]$ polinomu, v ve $f(x) = x$ e göre Genellenmiş Schönemann polinomu ise v değerlendirmesine göre bir Eisenstein-Dumas polinomu olur.

5.17. Teorem: v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi ve O_v v değerlendirmesinin değerlendirme halkası olsun. $g(x) \in O_v[x]$, $degg = e$, $g(\theta) = 0$ ve $\Gamma\big(K(\theta)\big)$ v değelendirmesinin $K(\theta)$ cismine genişlemesinin değer grubu olsun. Bir $a \in K$ için $g(x+a)$ polinomunun v değerlendirmesine göre bir Eisenstein-Dumas polinomu olması için gerek ve yeter koşul (θ, a) ikilisinin bir seçkin ikili ve $K(\theta)/K$ genişlemesinin derecesi e olan tamamıyla dallanmış bir genişleme olmasıdır.[14]

Kanıt: $g(x+a) = x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, $a, a_i \in K$ polinomu bir Eisenstein-Dumas polinomu olsun. 5.15. Tanım'dan $g(x+a)$ polinomunun asal olduğunu anlıyoruz. $\theta - a$, $g(x+a)$ polinomunun bir köküdür.

$\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_e$ $g(x)$ polinomunun tüm kökleri olsun.

$\theta - a = \theta_1 - a, \theta_2 - a, \dots, \theta_e - a$ $g(x+a)$ polinomunun tüm kökleridir.

v Henselian bir değerlendirme olduğundan $g(x+a)$ polinomunun tüm köklerinin v değerlendirmesi altındaki görüntüleri aynıdır.

$v(\theta - a) = v(\theta_1 - a) = v(\theta_2 - a) = \cdots = v(\theta_e - a)$

5.7 Lemma'dan sırasıyla $(\theta_1 - a) \cdot (\theta_2 - a) \cdot \dots \cdot (\theta_e - a) = (-1)^e \frac{a_0}{1}$

$v((\theta_1 - a) \cdot (\theta_2 - a) \cdot \dots \cdot (\theta_e - a)) = v\left((-1)^e \frac{a_0}{1}\right)$

$e \cdot v(\theta - a) = v(a_0)$

$$[\Gamma(K(\theta)) : \Gamma] = [\Gamma + \mathbb{Z}v(\theta - a) : \Gamma] = [\Gamma + \mathbb{Z}\tfrac{v(a_0)}{e} : \Gamma] = e \qquad (5.1)$$

elde edilir.

(θ, a) ikilisinin seçkin ikili olduğunu göstermek için

$$sup\{v(\theta - \beta) | \beta \in \overline{K}, deg\beta < deg\theta\} = v(\theta - a) = \frac{v(a_0)}{e} \qquad (5.2)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de bir $\beta \in \overline{K}$ için $v(\theta - \beta) > v(\theta - a)$

olsaydı $v(\beta-a)=min\{v(\beta-\theta),v(\theta-a)\}=v(\theta-a)$ olurdu. Buradan da $deg(\beta-a)\geq e$ olur ki bu bir çelişkidir. O zaman (5.2) doğrudur ve (θ,a) ikilisi bir seçkin ikilidir. (5.1) den de $[K(\theta):K]=[\Gamma(K(\theta)):\Gamma]=e$ olduğu görülüyor.

Tersine; (θ,a) seçkin ikili ve $[K(\theta):K]=[\Gamma(K(\theta)):\Gamma]=e$ olsun.

$v(\theta-a)\geq v(\theta-0)=v(\theta)\geq 0$ olur.

5.8. Lemma'dan

$$\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{e-i}\leq e}(\theta_{k_1}-a)\cdot(\theta_{k_2}-a)\cdot\ldots\cdot(\theta_{k_{e-i}}-a)=(-1)^{e-i}\frac{a_i}{1}$$

$$v\left(\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{e-i}\leq e}(\theta_{k_1}-a)\cdot(\theta_{k_2}-a)\cdot\ldots\cdot(\theta_{k_{e-i}}-a)\right)=v(a_i)$$

$$v\big((\theta-a)^{e-i}\big)\leq v(a_i)$$

$$(e-i)\cdot v(\theta-a)\leq v(a_i)$$

$$\left(\frac{e-i}{e}\right)v(a_0)\leq v(a_i)$$

$$\frac{v(a_0)}{e}\leq\frac{v(a_i)}{e-i}$$

sağlanır.

$s<e,\ s\in\mathbb{N}$ için $s\frac{v(a_0)}{e}\notin\Gamma$ olduğu gösterilirse $g(x+a)$ polinomunun v değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olduğu görülür. $s\frac{v(a_0)}{e}=sv(\theta-a)\in\Gamma$ olacak biçimde $s<e$, $s\in\mathbb{N}$ sayısı olduğu iddia edilsin. $b\in K$ için $sv(\theta-a)=v(b)$ olsun. $[K(\theta):K]=[\Gamma(K(\theta)):\Gamma]=e$ olduğundan $v(c)=0$ ve $\overline{((\theta-a)^s/b)}=\bar{c}$ olacak biçimde bir $c\in K$ vardır. O zaman

$$v((\theta-a)^s-bc)>v(b) \qquad (5.3)$$

olur.

$v(\theta - a) = \delta$ ve $h(x) = (x-a)^s - bc$ olsun. w, $\overline{K}(x)$ cisminin $\overline{K}[x]$ üzerinde $w\left(\sum_i c_i(x-a)^i\right) = min\{\overline{v}(c_i) + i\delta\}$, $c_i \in \overline{K}$ biçiminde tanımlanan bir değerlendirmesi olsun. $w\big(h(x)\big) = min\{s\delta, v(bc)\} = v(b)$ olur.

$h(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\beta_i)$ olsun. $degh = s < e$ ve (θ, a) bir seçkin ikili olduğundan $1 \le i \le s$ için $v(\theta - \beta_i) \le v(\theta - a)$ olur. O zaman

$v(\theta - \beta_i) = min\{v(\theta - a), v(a - \beta_i)\} = v(a - \beta_i)$ ve

$w(x - \beta_i) = min\{\delta, v(a - \beta_i)\} = v(a - \beta_i)$

olduğundan $v(\theta - \beta_i) = w(x - \beta_i)$ olur. Yani $v\big(h(\theta)\big) = w\big(h(x)\big) = v(b)$ olur. Buradan da (5.3) ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla $s\frac{v(a_0)}{e} \in \Gamma$ olacak biçimde $s < e$, $s \in \mathbb{N}$ sayısı yoktur.

5.18. Teorem: v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi, $g(x) = \sum_{i=1}^{e} a_i x^i \in K[x]$ monik bir polinom ve $chark_v \nmid e$ olsun. $g(x+b)$ v değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olacak biçimde bir $b \in K$ varsa $g\left(x - \frac{a_{e-1}}{e}\right)$ polinomu da bir Eisenstein-Dumas polinomu olur.[14]

Kanıt: 5.17. Teorem'den (θ, b) bir seçkin ikili ise $\left(\theta, \frac{-a_{e-1}}{e}\right)$ ikilisinin de bir seçkin ikili olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için de

$$v\left(\theta + \frac{a_{e-1}}{e}\right) \ge v(\theta - b) \tag{5.4}$$

olduğu gösterilmelidir. $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_e$ θ nın $K-$eşlenikleri olsun. Hipotezden $chark_v \nmid e$ olduğundan $v(e) = 0$ olur. 5.8. Lemma'dan

$v\left(\theta + \frac{a_{e-1}}{e}\right) = v(e\theta + a_{e-1}) = v(e\theta - \sum_{i=1}^{e}\theta_i) = v(\sum_{i=2}^{e}(\theta - \theta_i))$ olur.

$v\left(\theta + \frac{a_{e-1}}{e}\right) \ge \min_{i=2,\dots,e}\{v(\theta - \theta_i)\} = v(\theta - \theta_2)$ olsun. (5.5)

$b \in K$ olduğundan $v(\theta - b) = v(\theta_2 - b)$,

$v(\theta - \theta_2) = v(\theta - b + b - \theta_2) \ge min\{v(\theta - b), v(b - \theta_2)\} = v(\theta - b)$ olur.

(5.5) ten $v\left(\theta+\frac{a_{e-1}}{e}\right) \geq v(\theta-\theta_2) \geq v(\theta-b)$ olur ve (5.4) eşitsizliği sağlanır.

5.19. Örnek: K bir cisim, $\theta \in \overline{K}$ ve $Irr(\theta,K)=g(x)$ olsun. Hiçbir $a \in K$ için $g(x+a)$ polinomunun Eisenstein-Dumas polinomu olmadığı bir $K(\theta)/K$ genişlemesinin örneğini oluşturacağız.

$K=\mathbb{Q}_2$, 2 −adik sayılar cismi ve v_2 K cisminin 2 −adik değerlendirmesi olsun. v_2 değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi yine v_2 ile gösterilsin.

$\theta=2+2\left(2^{-1/2}\right)+2^2(2^{-1/2^2})$ ve $\theta_1=2+2\left(2^{-1/2}\right)$ olsun.

Bu durumda $K(\theta)=K(2^{1/4})$ ve $[K(\theta):K]=deg\theta=4$ olur.

(θ,θ_1) ikilisinin bir seçkin ikili olduğu gösterilecek.

$v_2(\theta-\theta_1)=\frac{7}{4}$, $\omega_K(\theta_1)=\frac{3}{2}$ ve $v_2(\theta-\theta_1)>\omega_K(\theta_1)$ olduğundan Krasner's Lemma'ya göre $K(\theta_1)\subseteq K(\theta)$ olur. Yani $(\theta-\theta_1)\in K(\theta)$ dır.

i) $\gamma \in \overline{K}$ olsun. $v_2(\theta-\gamma)>v_2(\theta-\theta_1)$ ise $deg\gamma \geq deg\theta=4$ olduğu gösterilecek.

$v_2(\theta_1-\gamma)=min\{v_2(\theta_1-\theta),v_2(\theta-\gamma)\}=v_2(\theta_1-\theta)=\frac{7}{4}>\omega_K(\theta_1)=\frac{3}{2}$

$K(\theta_1)\subseteq K(\gamma)$ ve $v_2(\theta_1-\gamma)=\frac{7}{4}\in \Gamma(K(\gamma))$ olur. O zaman $deg\gamma \geq deg\theta=4$ tür.

ii) $\beta \in \overline{K}$ ve $deg\beta<deg\theta_1$ için $v_2(\theta-\beta)<v_2(\theta-\theta_1)=\frac{7}{4}$ olduğu gösterilecek.

$v_2(\theta-\beta)=v_2(\theta-\theta_1+\theta_1-\beta)=min\{v_2(\theta-\theta_1),v_2(\theta_1-\beta)\}=v_2(\theta_1-\beta)\leq\frac{1}{2}$ olduğundan $v_2(\theta-\beta)<v_2(\theta-\theta_1)$ sağlanır.

iii) $deg\theta=4>deg\theta_1=2$ dir.

(i),(ii) ve (iii) ten (θ,θ_1) bir seçkin ikilidir.

$Irr(\theta,K)=g(x)=x^4-8x^3+20x^2-80x+4$ olur. (θ,θ_1) bir seçkin ikilidir fakat $\theta_1 \notin K$ dir. 5.4. Teorem'den (θ,a) bir seçkin ikili ise

$[K(\theta_1):K] = [K(a):K]$ olmalıdır. Yani $a \notin K$ olur. Bu yüzden hiçbir $a \in K$ için $g(x+a)$ polinomu v_2 değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olamaz.

$g(x+b)$ polinomu v_2 değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olacak biçimde bir $b \in K$ bulunamadığından 5.17. Teorem'den

$$g\left(x - \frac{a_{e-1}}{e}\right) = g(x+2) = x^4 - 4x^2 - 64x - 124$$

polinomu da v_2 değerlendirmesine göre Eisenstein-Dumas polinomu olamaz.

5.20. Lemma: v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. $f(x) \in O_v[x]$ monik, $degf(x) = m > 1$ ve $\bar{f}(x)$ k_v üzerinde asal bir polinom olsun. $g(x) \in K[x]$ polinomu v ve $f(x)$ e göre Genellenmiş Schöneman polinomu, θ $g(x)$ polinomunun bir kökü ve $g(x)$ in $f-$açılımı $g(x) = f(x)^e + \sum_{i=0}^{e-1} g_i(x) f(x)^i$, $degg_i < degf$ olsun. v_θ v değerlendirmesinin $K(\theta)$ cismine genişlemesi, Γ_{v_θ} v_θ değerlendirmesinin değer grubu ve k_{v_θ} v_θ değerlendirmesinin rezidü cismi olmak üzere $g(x)$ K cismi üzerinde asaldır ve

i) $v_\theta(f(\theta)) = \frac{v^x(g_o(x))}{e}$

ii) $\Gamma_{v_\theta} = \Gamma + \mathbb{Z}\frac{v^x(g_o(x))}{e} = \Gamma + \mathbb{Z} \cdot v_\theta(f(\theta))$

iii) $k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta})$

iv) $\left[\Gamma_{v_\theta}:\Gamma\right] = e$

v) $\left[k_{v_\theta}:k_v\right] = m = degf$

ifadeleri sağlanır.[14]

5.21. Teorem: v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. $f(x) \in O_v[x]$ monik, $degf(x) = m > 1$ ve $\bar{f}(x)$ k_v üzerinde asal bir polinom olsun. $g(x) \in K[x]$ polinomu v ve $f(x)$ e göre Genellenmiş Schöneman polinomu, θ $g(x)$ polinomunun bir kökü ve $g(x)$ in $f-$açılımı $g(x) = f(x)^e + \sum_{i=0}^{e-1} g_i(x) f(x)^i$, $degg_i < degf$, $e > 1$ olsun. Bu durumda θ_1 $f(x)$ polinomunun uygun bir kökü olmak üzere θ nın 2 uzunluğunda bir $(\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2)$

doymuş seçkin zinciri vardır. Ek olarak $\Gamma_{v_{\theta_1}} = \Gamma$, $k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta})$ ve $\left[\Gamma_{v_\theta}: \Gamma\right] = e$ sağlanır.[14]

Kanıt: $\bar{\theta}$, $\bar{g}(x) = \bar{f}(x)^e$ polinomunun bir kökü, $degf = m > 1$ ve $\bar{f}(x)$ asal bir polinom olduğundan $v(\theta) = 0$ ve $f(x)$ in $v(\theta - \alpha_i) > 0$ olacak biçimde bir α_i kökü vardır. Aksi takdirde $v(\theta) > 0$ olsaydı $\bar{\theta} = \bar{0}$ olurdu. Fakat $\bar{f}(x)$ asal olduğundan x çarpanı olamayacağından $\bar{0}$, $\bar{f}(x)$ in bir kökü olamaz.

α, $f(x)$ in $0 < v(\theta - \alpha) = max\{v(\theta - \alpha_i)|\alpha_i, f(x)$ in tüm kökleri$\}$ sağlayan bir kökü ve $v(\theta - \alpha) = \delta$ olsun.

(θ, α) ikilisinin bir seçkin ikili olduğu gösterilsin.

i) $deg\theta = em$, $deg\alpha = m$ ve $e, m > 1$ olduğundan $deg\theta > deg\alpha$ olur.

ii) $\gamma \in \overline{K}$, $deg\gamma < deg\alpha$ için $v(\theta - \gamma) < v(\theta - \alpha) = \delta$ olduğunu görelim. $v(\theta - \gamma) < \delta$ dır. Aksi takdirde $v(\theta - \gamma) \geq \delta$ olsaydı

$v(\alpha - \gamma) \geq min\{v(\alpha - \theta), v(\theta - \gamma)\} = v(\theta - \alpha) = \delta > 0$ ve bu yüzden $\bar{\alpha} = \bar{\gamma}$ olur. Buradan da

$m = [k_v(\bar{\alpha}): k_v] = [k_v(\bar{\gamma}): k_v] \leq [K(\gamma): K] < m$ olur ki bu bir çelişkidir.

iii) $\beta \in \overline{K}$, $v(\theta - \beta) > v(\theta - \alpha) = \delta$ ise $deg\beta \geq deg\theta$ olduğu gösterilecek. Bunu göstermek için de

$$\Gamma_{v_\theta} \subseteq \Gamma_{v_\beta} \text{ ve } k_{v_\theta} \subseteq k_{v_\beta} \tag{5.6}$$

olduğu gösterilmelidir. 5.20. Lemma'ya göre $\left[\Gamma_{v_\theta}: \Gamma\right] = e$ ve $\left[k_{v_\theta}: k_v\right] = m$ olduğundan

$$deg\theta = e \cdot m = \left[\Gamma_{v_\theta}: \Gamma\right] \cdot \left[k_{v_\theta}: k_v\right]$$

olur. $f(x)$ in tüm kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ olsun.

$$\frac{f(\beta)}{f(\theta)} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\beta - \alpha_i}{\theta - \alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{\beta - \theta}{\theta - \alpha_i}\right)$$

biçimindedir.

Burada $v(\beta-\theta) > \delta$ ve $v(\theta-\alpha_i) \leq \delta$ olduğundan $v\left(\frac{\beta-\theta}{\theta-\alpha_i}\right) > 0$ ve $\left(\overline{\frac{\beta-\theta}{\theta-\alpha_i}}\right) = \bar{0}$ olur.

O zaman $\left(\overline{\frac{f(\beta)}{f(\theta)}}\right) = \bar{1}$, $\overline{f(\beta)} = \overline{f(\theta)}$ ve $v(f(\beta)) = v(f(\theta))$ olur. Dolayısıyla

$$\Gamma_{v_\theta} = \Gamma + \mathbb{Z} \cdot v_\theta(f(\theta)) \subseteq \Gamma_{v_\beta} \tag{5.7}$$

sağlanır.

$v(\theta-\beta) = \delta > 0$ olduğundan $\bar{\theta} = \bar{\beta}$ dir ve 5.20. Lemma'dan

$$k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta}) = k_v(\bar{\beta}) = k_{v_\beta} \tag{5.8}$$

sağlanır. (5.7) ve (5.8) den (5.6) doğrudur.

(i), (ii) ve (iii) den (θ, α) bir seçkin ikilidir.

Şimdi $(\alpha, 1)$ ikilisinin bir seçkin ikili olduğunu görelim. $\bar{\alpha}$, derecesi 1 den büyük olan bir $\bar{f}(x)$ polinomunun bir kökü olduğundan $v(\alpha-1) = 0$ dır. $\beta \in \overline{K}$, $deg\beta < deg\alpha$ için $v(\alpha-\beta) \leq v(\alpha-1) = 0$ olduğunu göreceğiz. Gerçekten de $v(\alpha-\beta) \leq 0$ dır. Aksi takdirde $v(\alpha-\beta) > 0$ olsaydı $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ olurdu. Buradan da $[K(\beta):K] \geq \left[k_v(\bar{\beta}):k_v\right] = m$ olur ki bu bir çelişkidir. O zaman $(\alpha, 1)$ bir seçkin ikilidir.

O halde θ nın 2 uzunluğunda bir $(\theta, \alpha, 1)$ doymuş seçkin zinciri vardır.

$[K(\alpha):K] = [k_v(\bar{\alpha}):k_v] = m$ olduğundan $\left[\Gamma_{v_\alpha}:\Gamma\right] = 1$ ve $\Gamma_{v_\alpha} = \Gamma$ olur.

5.19. Lemma'dan $k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta})$ ve $\left[\Gamma_{v_\theta}:\Gamma\right] = e$ olduğu görülür.

5.22. Lemma: (θ, α) bir seçkin ikili ve $Irr(\alpha, K) = f(x)$ ise $\Gamma_{v_\theta} = \Gamma_{v_\alpha} + \mathbb{Z} \cdot v(f(\theta))$ olur.[14]

5.23. Teorem: v K cisminin değer grubu Γ olan herhangi ranklı henselian bir değerlendirmesi olsun. $g(x) \in O_v[x]$ monik, $\bar{g}(x) = \phi(x)^e$, $e > 1$, $\phi(x)$ k_v üzerinde asal, $deg\phi = m > 1$ ve $g(\theta) = 0$ sağlayan bir polinom olsun. θ nın 2 uzunluğunda bir $(\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ doymuş seçkin zinciri var, $\Gamma_{v_{\theta_1}} = \Gamma$, $k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta})$ ve $\left[\Gamma_{v_\theta}:\Gamma\right] = e$ ise

$f(x)$ θ_1 in minimal polinomu olmak üzere $g(x)$, v ve $f(x)$ e göre Genellenmiş Schöneman polinomudur.[14]

Kanıt:

i) Bu basamakta $\bar{f}(x)$ in k_v üzerinde asal ve $\bar{f}(x) = \phi(x)$ olduğu gösterilecek. Hipotezden $\left[k_{v_\theta}: k_v\right] = m$ ve $\left[\Gamma_{v_\theta}: \Gamma\right] = e$ dir. $[K(\theta): K] \geq e \cdot m$ olur. Fakat $\theta, g(x)$ in m katlı kökü olduğundan $[K(\theta): K] = e \cdot m$ olur.

$F(x) \in O_v[x]$, monik ve $\bar{F}(x) = \phi(x)$ ise $F(x)$ in $\bar{\beta} = \bar{\theta}$ olacak biçimde bir β kökü vardır. $deg\beta = deg\theta_1 < deg\theta$ ve (θ, θ_1) seçkin ikili olduğundan $\bar{v}(\theta - \theta_1) \geq \bar{v}(\theta - \beta) > 0$ ve $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1$ olur.

$\bar{f}$ in k_v üzerinde asal olduğunu göstermek için $[K(\theta_1): K] = [k_v(\bar{\theta}_1): k_v]$ olduğu gösterilecektir. 5.4. Teorem'den $k_{v_{\theta_1}} \subseteq k_{v_\theta}$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden de $k_{v_\theta} = k_v(\bar{\theta})$ olduğundan $k_{v_{\theta_1}} = k_v(\bar{\theta})$ olur. O zaman $[k_{v_{\theta_1}}: k_v] = [k_v(\bar{\theta}_1): k_v] = m$ olur ve $\Gamma_{v_{\theta_1}} = \Gamma$ olduğundan $[\Gamma_{v_{\theta_1}}: \Gamma] = 1$ dir. Dolayısıyla $[K(\theta_1): K] = [k_v(\bar{\theta}_1): k_v] = m = deg\bar{f}$ olur.

ii) θ_1 yerine α kullanılsın. $v(\theta - \alpha) = \delta$, $v(f(\theta)) = \lambda$, $g(x) = f(x)^e + \sum_{i=0}^{e-1} g_i(x) f(x)^i$, $\overline{w}$ $\overline{K}(x)$ cisminin (α, δ) çiftiyle tanımlanan değerlendirmesi olsun. Bu basamakta

$$\overline{w}(f(x)) = \lambda \tag{5.9}$$

ve

$$\overline{w}(g(x)) = v^x(g_0(x)) = e \cdot \lambda \tag{5.10}$$

olduğu gösterilecek.

$f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)$ ve $g(x) = \prod_{j=1}^{mn}(x - \theta_j)$ olsun. (θ, α) seçkin ikili olduğundan $\alpha_i \in \overline{K}$, $deg\alpha_i < deg\theta$ için $v(\theta - \alpha_i) \leq v(\theta - \alpha) = \delta$ olur.

$v(\theta - \alpha_i) = min\{\delta, v(\alpha - \alpha_i)\}$ olduğu kullanılarak

$\overline{w}(f(x)) = \overline{w}(\prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)) = \sum_{i=1}^{m} \overline{w}(x - \alpha + \alpha - \alpha_i)$

$= \sum_{i=1}^{m} min\{\delta, v(\alpha - \alpha_i)\} = \sum_{i=1}^{m} v(\theta - \alpha_i) = v(\prod_{i=1}^{m}(\theta - \alpha_i))$

$= v(f(\theta)) = \lambda$

olur ve (5.9) eşitliği sağlanır.

v, K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olduğundan θ nın her θ_j K −eşleniği için α nın $v(\theta_j - \alpha) = v(\theta - \alpha_i) \leq \delta$ olacak biçimde bir α_i eşleniği vardır.

$\overline{w}(x - \theta_j) = min\{\delta, v(\alpha - \theta_j)\} = v(\alpha - \theta_j)$ ve

$\overline{w}(g(x)) = v(g(\alpha))$ sağlanır.

$\bar{f}(x)$, k_v cismi üzerinde asal, $deg\bar{f}(x) = m$ ve $\bar{f}(\theta) = 0$ olduğundan her $A(x) = \sum a_i x^i \in K[x]$, $degA(x) < m$ için $v(A(\theta)) = min\{v(a_i)\} = v^x(A(x))$ olur. Aksi takdirde, $m > 1$, $v(\theta) = 0$ ve bu yüzden $v\big(A(\theta)\big) > min\{v\big(a_i\theta^i\big)\} = v(a_j)$ olurdu. Buradan da $\sum_{i=0}^{m-1}\big(\overline{a_\iota / a_j}\big)\bar{\theta}^i = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. $g(x)$ in f −açılımına bakılırsa $g(\alpha) = g_0(\alpha)$ olduğu görülür ve sonuç olarak $v(g(\alpha)) = v(g_0(\alpha)) = v^x(g_0(x))$ elde edilir. O zaman (5.10) denkleminin ilk eşitliği sağlanır.

$f(x)$, $g(x)$ polinomları asal ve v Henselian bir değerlendirme olduğundan

$v(f(\theta_j)) = v(f(\theta))$, $1 \leq j \leq e \cdot m$ ve

$v(f(\alpha_i)) = v(f(\alpha))$, $1 \leq i \leq m$

olur. Ayrıca $\prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = \pm \prod_{j=1}^{e \cdot m} f(\theta_j)$ olduğundan $v(g(\alpha)) = e \cdot v(f(\theta)) = e \cdot \lambda$ olur ve buradan da (5.10) denkleminin ikinci eşitliği de sağlanır.

iii) Bu basamakta $g(x)$ polinomunun v ve $f(x)$ e göre bir Genellenmiş Schönemann polinomu olduğu gösterilecek. $\overline{K}(x)$ cisminin (α, δ) minimal çiftiyle tanımlanan değerlendirmesi $\overline{w}$ olmak üzere

$$\overline{w}(g(x)) = \min_{0 \leq i \leq e}\{v(g_i(\alpha)) + i \cdot \lambda\} = v^x\,(g_0(x)) = e \cdot \lambda$$

olduğunu biliyoruz. Burada $v(g_i(\alpha)) = v^x(g_i(x))$ iken $0 \le i \le e-1$ için $v^x(g_i(x)) + i \cdot \lambda \ge e \cdot \lambda$ dır. O zaman

$$\frac{v^x(g_i(x))}{e-i} \ge \lambda = \frac{v^x(g_0(x))}{e} > 0$$

sağlanır.

$\lambda = v(f(\theta))$, (θ, α) bir seçkin ikili ve hipotezden $\Gamma_{v_\alpha} = \Gamma$ olduğunu biliyoruz. O zaman 5.22. Lemma'dan $\Gamma_{v_\theta} = \Gamma + \mathbb{Z} \cdot \lambda$ sağlanır. Hipotezden $[\Gamma_{v_\theta} : \Gamma] = e$ olduğundan e nin $e \cdot \lambda \in \Gamma$ olan en küçük pozitif tamsayı olduğu görülür.

4.24. Örnek: $K = \mathbb{Q}_3$ 3 −adik sayılar cismi ve v_3 K cisminin 3 −adik değerlendirmesi olsun. v_3 değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemes $\bar{v}_3$ ile gösterilsin.

$g(x) = x^4 + 14x^2 + 1$ polinomunu düşünelim.

$\bar{g}(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$

$\theta = i(2+\sqrt{3})$, $g(x)$ polinomunun bir köküdür ve $[K(\theta):K] = 4$ tür.

θ elemanının K −eşlenikleri $i(2+\sqrt{3}), i(2-\sqrt{3}), i(-2+\sqrt{3}), i(-2-\sqrt{3})$ olur.

$\omega_K(\theta) = max\{\bar{v}_3(-2\sqrt{3}i), \bar{v}_3(4i), \bar{v}_3(4+2\sqrt{3}i)\} = \frac{1}{2}$ olur.

$\bar{v}_3(\theta - 2i) = \bar{v}_3(\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}$ dir.

$(\theta, 2i)$ ikilisinin bir seçkin ikili olduğunu görelim.

i) $\beta \in \overline{K}$, $deg\beta < 4$ için $K(\theta) \not\subseteq K(\beta)$ olur ve Krasner's Lemma'dan $\bar{v}_3(\theta - \beta) \le \omega_K(\theta) = \frac{1}{2}$ dir. O zaman $\bar{v}_3(\theta - \beta) \le \bar{v}_3(\theta - 2i) = \frac{1}{2}$ sağlanır.

ii) $\gamma \in \overline{K}$, $\bar{v}_3(\theta - \gamma) = \frac{1}{2} \ge \bar{v}_3(\theta - 2i) = \frac{1}{2}$ için $\bar{\theta} = \bar{\gamma} = \bar{2}i$ ve $\bar{2}i \notin \overline{K}$ olduğundan $deg\gamma = [K(\gamma):K] \ge 2 = deg2i$ olur.

iii) $deg\theta = 4 > deg2i = 2$ dir.

(i), (ii), (iii) den $(\theta, 2i)$ bir seçkin ikilidir. $(2i, 0)$ ikilisinin seçkin ikili olduğu açıktır. O zaman θ nın 2 uzunluğunda bir $(\theta, 2i, 0)$ doymuş seçkin zinciri vardır ve $g(x)$, $\bar{v}_3$ ve $f(x) = x^2 + 4$ polinomuna göre bir Genellenmiş Schönemann polinomudur.

KAYNAKLAR

[1] George Bachman, ***Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory***, (Academic Press, New York and London, 1964).

[2] Fethi Çallıalp, ***Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi***, (Ondokuzmayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun, 1986).

[3] Fethi Çallıalp, ***Örneklerle Soyut Cebir***, (Birsen Yayınevi, İstanbul, 2009).

[4] Oscar Zariski, Pierre Samuel, ***Commutative Algebra Volume II***, (D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, 1960).

[5] Paul J. McCarthy, ***Algebraic Extensions of Fields***, (Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1966).

[6] Nicolas Bourbaki, ***Commutative Algebra***, (Hermann, Paris, 1964).

[7] Victor Alexandru, Nicolae Popescu***, Sur une classe de prolongements à K(X) d'une valuation sur un corps K***, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 33, 5, 393-400, (1988).

[8] Victor Alexandru, Nicolae Popescu, Alexandru Zaharescu, ***A theorem of characterization of residual trancendental extensions of a valuation***, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 28, 4, 579-592, (1988).

[9] Victor Alexandru, Nicolae Popescu, Alexandru Zaharescu, ***Minimal pairs of definition of a residual transcendental extension of a valuation***, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 30, 2, 207-225, (1990).

[10] Victor Alexandru, Nicolae Popescu, Alexandru Zaharescu, ***All valuations on K(x)***, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 30, 2, 281-296, (1990).

[11] Victor Alexandru, Nicolae Popescu, ***Some elementary remarks about n-local fields***, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 92, 17-28, (1994).

[12] Sudesh Kaur Khanduja, Usha Garg, ***Rank 2 valuations of K(x)***, Mathematika, 37, 97-105, (1990).

[13] Nicolae Popescu, Alexandru Zaharescu, ***On the structure of the irreducible polynomials over local fields***, Journal of Number Theory, 52, 98-118, (1995).

[14] Anuj Bishnoi, Sudesh Kaur Khanduja, ***On Eisenstein-Dumas and generalized Schönemann polynomials***, Commutative Algebra, 38, 9, 3163-3173, (2010).

ÖZGEÇMİŞ

28.07.1987 tarihinde Edirne'nin Lalapaşa ilçesinde doğdum. İlkokulu Lalapaşa Atatürk İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Edirne Şükrüpaşa İlköğretim Okulu'nda, liseyi Edirne İlhami Ertem Lisesi'nde okudum. 2005 yılında kayıt yaptırdığım Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik (İngilizce) Bölümü'nden Haziran 2010 döneminde mezun oldum. Aynı yıl Trakya Üniversitesi'nde yüksek lisansa başladım. Beş yılı aşkın süredir özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.