T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MONTE CARLO SİMÜLASYON ANALİZİNİN GÜÇ FONKSİYONLARI İLE BELİRLENMESİ VE BİST-100 ÜZERİNE BİR UYGULAMA

BARIŞ POLAT

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. AHMET ATAKİŞİ

EDİRNE 2015

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İKTİSAT ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BARIŞ POLAT tarafından hazırlanan **MONTE CARLO SİMÜLASYON ANALİZİNİN GÜÇ FONKSİYONLARI İLE BELİRLENMESİ VE BİST-100 ÜZERİNE BİR UYGULAMA** Konulu **YÜKSEK LİSANS** Tezinin Sınavı, Trakya Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin 15.-16. maddeleri uyarınca **15.01.2015 Perşembe** günü saat **11.00**'da yapılmış olup, tezin * ..... Kabul Edilmesine ..... **OYBİRLİĞİ/~~OYÇOKLUĞU~~** ile karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYELERİ	KANAAT	İMZA
Doç. Dr. Ayhan AYTAÇ	Kabul Edilmesine	
Doç. Dr. Ahmet ATAKİŞİ (Tez Danışmanı)	Kabul Edilmesine	
Doç. Engin DEMİREL	Kabul Edilmesine	

* Jüri üyelerinin, tezle ilgili kanaat açıklaması kısmında "Kabul Edilmesine/Reddine" seçeneklerinden birini tercih etmeleri gerekir.

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10062818
Yazar Adı / Soyadı	BARIŞ POLAT
Uyruğu / T.C. Kimlik No	TÜRKİYE / 15548031928
Telefon	5345918638
E-Posta	bpolat@kavram.edu.tr
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	MONTE CARLO SİMÜLASYON ANALİZİNİN GÜÇ FONKSİYONLARI İLE BELİRLENMESİ ve BİST-100 ÜZERİNE BİR UYGULAMA
Tezin Tercümesi	DETERMINATION BY MONTE CARLO SIMULATION ANALYSIS OF POWER FUNCTIONS and BIST 100 AN APPLICATION
Konu	İstatistik = Statistics
Üniversite	Trakya Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Sosyal Bilimler Enstitüsü
Bölüm	İktisat Bölümü
Anabilim Dalı	İktisat Anabilim Dalı
Bilim Dalı	İktisat Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2015
Sayfa	87
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. AHMET ATAKİŞİ 21082271126
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	
Kısıtlama	36 ay süre ile kısıtlı

Tezimin, Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 09.02.2018 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.

NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

09.02.2015

İmza:.....

Tezin Adı: Monte Carlo Simülasyon Analizinin Güç Fonksiyonları İle Belirlenmesi ve BİST-100 Üzerine Bir Uygulama

Hazırlayan: Barış POLAT

ÖZET

Bilimsel disiplin alanlarına giren tüm nesne ve olaylarla ilgili yapılan araştırmalarda, araştırmaya konu olan problemlerdeki değişken değerlerinin, birtakım yasa veya güçlerle önceden belirlenebildiği deterministik durumlar dışında bilinmesi maalesef mümkün değildir. Doğada meydana gelen olayların sonuçlarının önceden tahmin edilemediği bu durumlarda değişkenler raslantısal olmakta ve bunların çözümü için birçok karmaşık denklemler kullanılmakta ve araştırmalar çok fazla zaman almakta ve maliyetli olmaktadır.

Bu tezin yapılmasındaki amaç, deterministik olarak bir ifade gücüne sahip olamayacağımız sadece olasılıksal kavramlarla açıklama getirebileceğimiz fonksiyonların çözümünde Monte Carlo Simülasyon Yöntemini kullanarak bu yöntemin raslantısal değişken değerleri üzerinde uygulanabilir olup olamayacağının araştırılmak istenmesidir.

Öncelikle simülasyon kavramının tanımı yapılmış olup simülasyon sürecinin gerçekleştirilmesi için gerekli olan bilgilere, aşamalara ve hiyerarşik yapısına değinilmiştir. Daha sonra olasılıksal kavramlar ve tesadüfî dağılımlar hakkında bilgi verilmiş ve Monte Carlo Simülasyon yönteminin temelinin nelere dayandığı hakkında gerekli açıklamalar yapılmıştır.

Bir sonraki bölümde ise Monte Carlo Simülasyon Yönteminin uygulama aşamasına geçmeden önce bilinmesi gereken hipotez testleri ve güç fonksiyonları hakkında gerekli açıklamalara değinilmeye çalışılmıştır. Son bölümümüzde ise Monte Carlo Simülasyon yönteminin daha iyi anlaşılabilmesi için uygulamalı örnek verilmiş olup uygulama da çözüm arayışına giderken en iyi çözümün bulunması konusunda hangi noktalara ve nelere dikkat edilmesi gerektiğine ve yöntemin uygulanabilirliği hakkında genel bir fikir sunulmuştur.

Name of Thesis: Determination by Monte Carlo Simulation Analysis of Power Functions and BIST 100 an Application

Prepared by: Barış POLAT

ABSTRACT

In researches about all articles and facts in scientific disciplinary areas, except in some situations that are determined by some laws and powers, it's not possible to know the variable values of the problems which are subject to research. In these situations which natural events' results couldn't be presumed before, variables are random, lots of complex equations are used and researches cost a lot and take a long time.

This paper discusses researching about functions which cannot be explained deterministically but only explained through Monte Carlo Simulation Method .The aim of the thesis is to determine whether this method could be applied on random variable values for the solution.

Primarily, besides the definition of simulation concept, the necessary information, steps and hierarchical structure which was required for simulation period was mentioned. Afterwards the essential statements about probable concepts and random distribution were made. And also what the principle of Monte Carlo Simulation Method is based on was explained.

In the next section, explanations of the tests of hypothesis and power functions were tried to be mentioned. These explanations had to be considered before the implementation phase of Monte Carlo Simulation Method. In the final section, examples that will provide the Monte Carlo Simulation Method to be understood were supplied. The general idea of what to pay attention while seeking solution for the implementing in order to find the optimal solution and practicability of the process was submitted.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi hazırlama sürecinde beni yönlendiren ve bu süreçte yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Sadi UZUNOĞLU, Doç. Dr. Ahmet ATAKİŞİ, Doç. Dr. Ayhan AYTAÇ ve Doç. Dr. Engin DEMİREL'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca, bana her zaman destek olan ve daima yanımda bulunan eşime ve bugüne gelmeme katkıda bulunan aileme en derin minnetlerimi sunarım.

Barış POLAT

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
TABLO LİSTESİ ..... **vi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vii**
GİRİŞ **1**

BİRİNCİ BÖLÜM **3**
SİMÜLASYON KAVRAMI ve MONTE CARLO SİMÜLASYONU 3
1.1. Simülasyonun Tanımı ve Tarihçesi 3
1.2. Simülasyonun Genel Özellikleri 6
1.3. Simülasyonun Avantajları ve Dezavantajları 6
1.4. Simülasyonun Kullanım Amaçları 8
1.5. Simülasyon Türleri 10
1.6. Simülasyon Çalışmalarında İzlenecek Adımlar 14
1.7. Monte Carlo Simülasyonu 24
1.8. Monte Carlo Yönteminin Matematiksel Analizi 26
1.9. Monte Carlo Yönteminde Hata Değerlendirmesi 29
1.10. Tesadüfi Değişkenler ve Dağılımlar 31

İKİNCİ BÖLÜM **53**
İSTATİSTİKSEL GÜÇ FONKSİYONLARI 53
2.1. Hipotez Testleri 53
2.2. ROC (Receiver Operating Characteristics) Eğrileri 61
2.3. ROC Eğrisi Altında Kalan Alanı Bulmaya Yönelik Yöntemler 64

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM 68
3.MONTE CARLO SİMÜLASYON ANALİZİ İLE BİST-100 HAREKETLERİNİN İZLENMESİNE YÖNELİK UYGULAMA 68
3.1. Monte Carlo Simülasyon Analizinin BİST-100 Üzerine Uygulaması 71

SONUÇ 83
KAYNAKÇA 85

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.1. Simülasyon Yönteminin Kullanım Alanları ve Yüzdelik Payları..... 5
Tablo 1.2. Bir Simülasyon Çalışmasında İzlenmesi Gereken Adımlar..... 15
Tablo 2.1. Bir Hipotezin Oluşum Aşamaları..... 54
Tablo 2.2. Birinci ve İkinci Tip Hatalar..... 56
Tablo 2.3. Tanı Testleri ve Kesin Test Sonuçlarının Dağılımı..... 63
Tablo 3.1. Seba Oto Şirketi'nin Satış Sayıları ve Olasılıkları..... 69
Tablo 3.2. Seba Oto Şirketi İçin Birikimli Olasılıklar..... 70
Tablo 3.3. Seba Oto Şirketi Rasgale Sayı Aralıkları..... 70
Tablo 3.4. Bist-100 Endeksinin 2005-2013 yılları arasındaki aylık kapanış değerleri..... .73
Tablo 3.5. Bist-100 Endeksi 2004-2014 Yılları Arası Aylık Kapanış Değerler Aralıkları 74-77
Tablo 3.6. 2005-2013 Yılları Bist-100 Aylık Kapanış Değerleri ve Gerçekleşme Sayıları..... 78
Tablo 3.7. 2005-2013 Yılları Bist-100 Endeksi Aylık Kapanış Değerleri İçin Rasgele Sayı Aralıkları 79-80
Tablo 3.8. 2014 Yılı Bist-100 Endeksi Kapanış Değerinin Monte Carlo Simülasyon Yöntemi İle Tahmini..... 81

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Deterministik Simülasyon Modeli 11
Şekil 2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 25
Şekil 3. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu 35
Şekil 4. Tek Taraflı Test Kriteri 58
Şekil 5. Çift Taraflı Test Kriteri 58
Şekil 6. Güç Eğrisi 60
Şekil 7. Duyarlılık Değerlerine Karşılık Gelen 1-Seçicilik Değerleri İçin Oluşturulan ROC eğrisi 64
Şekil 8. ROC Eğrisi Altında Kalan Geometrik Şekillerin Alanlarının Toplanması Sonucunda Elde Edilen Parametrik Olmayan Alan 66

GİRİŞ

Günümüz şartlarında örgütlerin amaçlarına ulaşması için gerçekleştirmesi gereken faaliyetlerinin idare edilmesi yöneticiler açısından son derece zor bir işlev haline gelmiştir. Sistem içerisindeki eleman sayısının çok fazla olması ve bunun da karmaşık bir yapı problemini beraberinde getirmesi bu sürecin daha güç bir duruma gelmesine neden olmaktadır. İşte bu güçlüklerin önüne geçebilmek ve karmaşık yapıların çözümünün kolaylaştırılması için sistem yaklaşımı denilen yeni bir yaklaşım modeli hayata geçirilmiştir.

Simülasyon, gerçek hayattaki somut bir olayın veya nesnenin modeller yardımı ile taklit edilerek sembolize edilmesi veya olayın gerçek hayattaki sonuçlarının neler olabileceğinin model aracılığıyla yansıtılması işlemidir. Bunun gibi birçok simülasyon tanımı yapılabileceği gibi simülasyon sürecinde hem modelin kurulması hem de problemin incelenmesine olanak sağlayacak modelin analitik kullanımına ilişkin bir tanımının yapılması da faydalı olabilecektir.

Taklit edilen gerçek bir olayın genelde bilgisayar yardımıyla modellenmesine simülasyon denir ve bu olayın gerçek hayatta uygulanabilmesinin riskleri olabileceği için simülatörler kullanılır. Örneğin bilgisayar üzerindeki bir uçuş simülatörü, uçuşun bazı kurallarının bir bilgisayar üzerinde öğretilmesi amacıyla kullanılan bir simülasyon modelidir. Pilotun kokpitte göreceği ekranın bir benzerini bilgisayar ekranında görmesi ve uçuşu kontrol etme işlemlerini gerçekten uçaktaymış gibi yapması, bir simülasyon olayıdır.

İşte günümüz iş dünyasında artık firmaların ve örgütlerin birbirlerine karşı rekabet avantajı sağlayabilmesi için sistemlerindeki olumsuzlukları, hataları ve tıkanıklıkları en kısa zamanda en doğru ve en etkin şekilde çözüme kavuşturmaları son derece önemli bir konu haline gelmiştir. Bu aşamada simülasyon modelleri devreye girmekte ve sistem performansının birçok etkene bağlı olarak nasıl değişime uğrayabileceği hakkında firma ve örgüt yöneticilerine gözlem imkanı sunmaktadır.

Simülasyon yöntemini kullanarak sistem içerisinde birbirlerine bağlı olan çalışanların iş gücü, süreç hata oranları, aktivitelerin gerçekleşme süreleri, parçaların sisteme geliş ve ilerleme hızları, maliyet ve gelirler, üretim hedefleri, personel ve makine kullanım yüzdeleri gibi değişkenleri, kolayca inceleyip süreç iyileştirilmesi yapılabilir. Bunun yanında alternatif senaryolar geliştirerek yeni yatırım yapılabilecek alanları belirlemek ve risk faktörünü de göz önünde bulundurarak önerilen bir sistem üzerinde fizibilite çalışması yapmak da projenin diğer bir boyutunu oluşturmaktadır.

BİRİNCİ BÖLÜM

SİMÜLASYON KAVRAMI ve MONTE CARLO SİMÜLASYONU

1.1. Simülasyonun Tanımı ve Tarihçesi

Simülasyon kavramını açıklayabilmek için birçok tanım yapılmıştır. Kısaca simülasyon bir sistem için kurulan model veya sistemi yansıtmak için bu sistemi ortaya koymaktır.[1] Simülasyon kavramını daha geniş bir tanım içinde ele alırsak simülasyon, geliştirilen veya üzerinde düzenleme yapılan bir sistemin benzer bir model yardımıyla deney sonuçlarından yararlanılarak, süreç işlemlerini tamamlamada, süreçlerin hata zamanlarını tahmin etmede ve deneme çalışmalarını yürütmek için yapılan ve bu sistemi temsil edebilecek bir model oluşturma işlemidir.

Diğer bir tanıma göre ise simülasyon;

"Bir sistemi temsil edebilecek bir model oluşturma işlemidir. Bu kurulan model yansıttığı sistem üzerinde yapılması zor veya mümkün olmayan bir takım ardışık işlemlerin yapılmasına imkân tanımaktadır. Bu yapılan işlemler sonucunda etkilenen model analiz edilir. Bu şekilde sistem içinde yer alan veya başka bir deyişle modeli oluşturan elemanların karşılıklı etkileşim ve birbirine gösterdikleri tepkiler ortaya konulur."[2]

Simülasyonun tarihsel gelişim sürecine bakıldığında simülasyon kavramının M.Ö 5000 yıllarından "WEICH" diye adlandırılan Çin Savaş Oyunlarından ortaya çıktığı ve 1780 yıllarında Prussian'ların bu oyunları askeri alanlarda kullanana kadar süregeldiği görülmektedir. 1780'li yıllardan beri simülasyon kavramı, askeri ordu başkanlarının belirlemiş oldukları askeri stratejilerini denemek için simüle edilmiş koşullar altındaki bu savaş oyunları için kullanılmıştır.

---

[1] Haluk Erkut, Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı, İstanbul, İrfan Yayımcılık, 1992, s.1.
[2] Haluk Erkut, Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı, İstanbul, İrfan Yayımcılık, 1992, s.1.

Simülasyon tarihindeki ikinci büyük adım 1929 yılında Edward Link tarafından geliştirilmiş olan ilk uçak simülatörü ile ortaya çıkmıştır. 1949 yılında ücretli olarak yapılan eğlence amaçlı sürüşler için tasarlanan Link'in simülatörü ordu ve ticari havacılık alanlarında eğitim yapılması ve değerlendirmelerde yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır.

1940'ların ortalarında II. Dünya Savaşı sıralarında yaşanan önemli gelişmeler sonrasında simülasyon alanında hızlı bir ilerleme kaydedilmiştir. Ünlü matematikçi Jhon Van Neumann tarafından simülasyon teknikleri, askeri ve operasyonel oyunlarından yararlanılarak yeni bir teknik olarak oluşturulan Monte Carlo Simülasyon tekniği geliştirilmiştir. Hidrojen bombasının tasarımı için Los Alamos Scientific Laboratuarlarında moleküllerin kinetik enerjileri nedeniyle çok yoğun ortamdan daha düşük yoğunlukta bir ortama geçerken nötronların hareketleri üzerinde çalışırken analizi pahalı ve karmaşık olan fizik problemlerini çözmek için elektronik bilgisayarlar yardımıyla Monte Carlo Simülasyon tekniğini kullanmıştır.

Simülasyon tekniğinin gelişimine katkıda bulunan bir diğer önemli isim ise Stanislaw Ulam'dır. Ulam kart oyunları ve bu kart oyunlarının belirli olayların olasılıklarını tahmin etmek için yaptığı girişimler sonucunda matematiksel fizik problemlerinin çözümünde Monte Carlo yaklaşımının etkili olabileceğini savunmuştur.

1950'li yıllardan sonra teknolojik alanda yaşanan hızlı gelişmeler sonucunda iş bilgisayarlarının iş yaşamına girişi ile birlikte simülasyon yöntemleri şirket yöneticileri için artık bir yönetim aracı olmuştur. Simülasyon bir optimizasyon tekniği değil modellenen sistemlerin performans ölçülerini tahmin etmede kullanılan bir yöntem olmuştur. [3] Global iş dünyasındaki rekabet ortamında avantaj sağlayabilmek için kullanılan simülasyon modelleri sayesinde sistemdeki hataların en kısa sürede ve en etkin bir şekilde çözümü kaçınılmaz bir duruma gelmiştir. Firmalar ve şirketler de bu simülasyon modellerini kullanarak uyguladıkları süreçlerdeki hataların giderilmesini, yapılacak işlerin gerçekleşme sürelerinin

[3] Hamdy A.Taha, Operations Research an Introductions, New York, Macmillan Publishing, 1987, s.665.

hesaplanması, çalıştırılacak iş gücünün, ürünlerin maliyet ve getirilerinin hesaplanmasını, makinelerinin kullanım kapasiteleri ve girdi çıktı sürelerin hesaplanması vb. gibi birçok konuda farklı alternatif simülasyon modelleriyle çeşitli senaryolar geliştirmekte ve yatırım kararlarını vermektedirler. Simülasyon kavramı modelleme süreci içerisinde deneme yanılma yöntemi ile tekrarlanma özelliği gösteren bilimsel bir süreç veya işlem olarak görüldüğü için yatırım kararlarının alınmasında etkin bir kullanım alanı bulmuştur.[4]

Simülasyonların bilgisayar ortamlarında kullanılması amacıyla 1980'li yıllardan sonra birçok bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu bilgisayar simülasyon programları XCELL, SLAM, WİTNESS ve MAP/1 gibi değişik türde simülasyon programları örnek olarak verilebilir.

Simülasyonun büyük şirketler tarafından kullanılması ile ilgili 1980'li yıllarda A.B.D.'de yapılan bir araştırma ve bu araştırma sonucunda elde edilen verileri yüzdesel olarak aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Tablo 1.1

Simülasyon Yönteminin Kullanım Alanları ve Yüzdelik Payları

Kullanım Alanları	**Yüzdelik Pay**
Planlama Sektörü	**% 59**
Üretim Sektörü	**%53**
Mühendislik Sektörü	**%46**
Finans Sektörü	**%41**
ARGE Sektörü	**%37**
Pazarlama Sektörü	**%24**
Personel	**%10**

Kaynak: Computer Simulations in Science and Technology Studies, Springer, 1984, s.17

[4] S. Railsback and V. Grimm, Agent-based and Individual-based Modeling: A Practical Introduction, Princeton University Press, 2011.

1.2. Simülasyonun Genel Özellikleri

Simülasyon modellemesi yaparken inceleme yapılan modelleme çalışmalarının bilgisayarlar yardımı ile programlanması aşamasında dikkat edilmesi gereken temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralandırabilmek mümkündür:[5]

- Şans sayılarının rastgele üretilmesi için 0 ile 1 aralığındaki sayılar, uniform U(0,1) dağılımından yararlanılarak türetilmeli,
- Rastgele üretilen sayıların bilinen bir olasılık dağılımı kullanılarak türetilmeli,
- Uygun simülasyon bloklarına geçiş aşamalarında kontrol sisteminin kurulması sağlanmalı,
- Simülasyon listelerine sonradan kayıt ekleme veya kayıt çıkarma olanakları sağlanmalı,
- Simülasyon modelline uygun veri analiz yöntemleri kullanılmalı,
- Sonuçlar yazdırılarak olası hatalar izlenmeli,

Bu temel özelliklerin yanında, özel amaçlı simülasyon dilleri ile genel amaçlı programlama dillerinin arasında simülasyon modellerinin bilgisayarlarda programlanması açısından uzun yıllardan beri avantaj ve dezavantaj tartışmaları süregelmektedir.

1.3. Simülasyonun Avantajları ve Dezavantajları

Problem çözmede son derece güçlü bir yardımcı özelliğine sahip simülasyon çalışmalarının avantajlarını şu başlıklar altında derleyebiliriz:[6]

- Gerçek sistemin bozulmadan ve tehlikeye atılmadan denenmesini sağlamaktadır.

[5] Law, Averill M., W. David Kelton, Simülation Modelling and Analysis, McGraw-Hill International Series, Industrial Series, Singapore: 2000, ss.367-369

[6] Jerry Banks, John S. Carson, Barry L.Nelson, Discrete-Event System Simülation, New Jersey, Printice Hall, 1996, s.4.

- Simülasyon sayesinde uygulanacak yeni kararların sisteme dâhil edilecek parametrelerin ve çalışma şartlarının denenmesine imkân sağlanarak sistemin performansının bu yeni koşullar altında nasıl sonuçlar verebileceği konusunda uygulayıcısına fikir sağlar.
- Karmaşık yapıdaki gerçek sistemlerin analitik olarak incelenmesini sağlar ve matematiksel modellerin kurulmasındaki güçlüklerin aşılmasında yardımcı olur.
- Alternatif senaryo ve dizaynların birbirleri arasında karşılaştırılmasına olanak sağlar.
- Simülasyon sayesinde incelenen sistemin farklı zaman dilimlerinde ele alınması mümkün olabilmektedir. Örneğin çok kısa zaman diliminde çalışma yapılarak sistem hakkında genel bilgiler elde edilebileceği gibi çalışmanın geniş bir zaman aralığına yayılması durumunda ise sistem hakkında ayrıntılara inebilme imkânı sağlamaktadır.
- Modellenen bir sistemin nasıl çalıştığını ve performans için gereken en önemli parametrelerin neler olduğunu anlamaya yardımcı olur.
- Kesin olayların neden ve nasıl meydana geldiği hakkındaki hipotezlerin doğruluğunun tespit edilmesinde yardımcı olmaktadır.
- Değişkenlerin sistem içerisindeki önem dereceleri hakkında fikir sahibi olunmasında yardımcı olur.
- "…ise nasıl olur" soruları cevaplanabilmektedir. Bu daha çok yeni sistemlerin tasarlanması konusunda faydalı olmaktadır.

Bu avantajlara rağmen, simülasyon çalışmalarının önemli bazı dezavantajlarını da şu başlıklar altında toplayabiliriz:

- Simülasyon modellerinin kurulması maliyetli ve geliştirilmesi zor modellerdir.
- Simülasyonda kurulacak modelin bilgisayar yardımı ile yapılacak olması çalışmanın uzun sürmesine ve pahalı olmasına neden olmaktadır.
- Simülasyon sonuçlarının kurulan sistemi en iyi şekilde temsil edebilmesi için modelin geçerliliği çok önemlidir.

- Simülasyon modellerinin stokastik yapısı gereği, ulaşılacak sonuçların gerçek sistemle ilgili sadece tahminlerde bulunmamıza olanak sağlamaktadır.
- Simülasyon modelleri üzerinde araştırma yapılan probleme en iyi çözümü bulmak yerine bunlara uygun alternatif çözümleri karşılaştırır.
- Simülasyon modellerinin başarısı model kurucunun başarısına bağlıdır. Her simülasyon modelinin başarılı olacağı anlamına gelmemektedir.

1.4. Simülasyonun Kullanım Amaçları

Simülasyon bir durumun modelini oluşturma ve bu model üzerinde deneyler yapma tekniğidir.[7] Simülasyon modelleri düşük operasyon maliyetleri sağlamak için kullanıcılara yüksek hesaplama kabiliyeti sağlamakta ve simülasyon metotlarındaki gelişmeler sayesinde simülasyon yöneylem araştırmalarında ve sistemlerin analizinde en çok kullanılan ve kabul gören bir metot haline gelmiştir. Simülasyon modellerinin kullanım amaçlarını genel olarak aşağıda verilen maddeler halinde sıralayabiliriz.

- Gerçek hayatta bazen doğrusal programlama ve geleneksel matematiksel modellerin analizinin yapılması mümkün olamamaktadır. İşte simülasyon modeli bu gibi durumlarda sistemin analizinin yapılması için etkili bir yöntem olmaktadır.
- Gerçek deneylere göre sistem analizi yapmaktansa simülasyon modellerinin kullanılması daha düşük maliyetle çalışılmasını sağlamaktadır.
- Gerçek yaşamda sistemin deney veya gözlem yöntemleriyle uygulama yapılmasına olanak sağlamayabilir. Örneğin üretim sistemlerinin tasarım analizlerinin yapılması durumunda uygulamaya geçilmeden önce simülasyon yöntemiyle analiz yapılması yaygın olarak kullanılmaktadır.
- Simülasyon yöntemi, model kurma sisteminin esneklik kazanmasını sağlamaktadır. Çeşitli parametrelerin kombinasyonunun yapılmasına olanak sağlar. Değişikliğe uğramış olabilecek parametrelerin sistem içinde

[7] Ayşe Kazan, Türkiye Ekonomisi İçin Bir Ekonometrik Model ve Simülasyon Çalışması, s.3.

değerlendirilmesine imkân sağlayabilmektedir. Kısacası belirtmek gerekirse simülasyon yöntemleri ile sistem için modelleme sağlanmaktadır.

- Gerçek hayatta gözlemleri için uzun yıllara ihtiyaç duyulan sistemlerin bilgisayar tabanlı simülasyon modelleriyle birkaç saat içinde değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır.
- Bazen belirli bir durumda sistemin işleyişi ve yaratacağı sonuçlar çok tehlikeli ve yıkıcı olabilmektedir. İşte simülasyon bu gibi durumların önlenmesi aşamasında sistemin davranışını analiz etmek için en doğru yoldur.
- Gerçek hayatta imkânsız bir matematiksel sistemin çözümü için simülasyon modelleri tek çözüm yolu olabilmektedir.
- Simülasyon modelleme yöntemleri ile sistemdeki birkaç parametrenin sisteme etkisinin araştırılması ve parametre değişikliklerinin sisteme olan etkilerinin kontrol edilmesi için simülasyon yöntemlerinden yararlanılmaktadır.
- Simülasyon yöntemleri kullanılarak oluşturulan modeller sayesinde sistemin daha iyi anlaşılması sağlanmaktadır.
- Simülasyon yöntemleri, sistemin uzun yıllar ve yüksek maliyetle yapılan çalışmalarında zaman sınırlaması konusunda çok faydalı bir araç olmaktadır.
- Simülasyon, analitik çözüm metodolojisini destekleyen bir bilgi sağlama aracı olarak kullanılabilmektedir.
- Simülasyon yöntemlerini kullanarak karmaşık sistemlerin ve geniş bir deneysel işlem gerektiren sistemin nispeten daha az bir sürede tamamlanması ve yeni anlayışlar geliştirilerek sistem için kullanılması yararlı olabilmektedir.

Simülasyon yaklaşımının tercih edilmesi, uygulanması ve uygulamadan başarılı sonuçlar elde edilebilmesi için bu tekniğin kullanımını gerektiren şartların da gerçekleşmiş olması gerekir. Bu şartlar şu şekilde sıralanabilir:[8]

[8] Haluk Erkut, Analiz Tasarım ve Uygulamalı Sistem Yönetimi, Yönetim Bilimleri Dizisi: 4, İstanbul, İrfan Yayımcılık, ss.299-300.

- Belirsizlik: Gerçek hayatta alınan kararların belirsizlik taşımasından dolayı işletmeler ile ilgili kararların belirsizlik altında alınması zorunluluğu vardır.
- Rassallık: Çevresel gelişmelerin belirli kurallara veya düzene bağlı olmadan tesadüfî olarak meydana gelmesidir.
- Davranış Analizi: İşletmelerde yönetim ve karar sistemlerinin, belli bir dönemdeki sorunların çözümü yerine, gelecekteki sorunların çözümü için farklı politikalara karşı meydana çıkacak olan tepkilerin analiz edilmesinin öncelikli olmasıdır.
- Sistem Görüşü: Sistemin ve sistemi yansıtacak olan simülasyon modelinin bir bütün olarak inceleme gereksiniminin bulunmasıdır.
- Evrimsellik: Sistem incelenirken sistem içerisinde zamanla meydana gelen değişimlerin incelenmesi zorunluluğudur.

Simülasyon tekniği dinamik bir yapıya sahip olduğundan dolayı amacı zaman içinde değişkenlerde meydana gelebilecek değişikliklere uygun ortamı iktisadi, işletme ve diğer sosyal bilimler alanı ile mühendislik alanlarında hazırlayabilmektir.[9]

1.5. Simülasyon Türleri

Simülasyon modellerini inceleyen sistemin özelliklerine göre değişik biçimlerde sınıflandırmak mümkündür. Bu sınıflandırmaları aşağıdaki şekilde yapabiliriz.[10]

1.5.1. Statik Simülasyonlar

Sistem ya da sürecin zaman boyutundaki herhangi bir anındaki durumunu gösteren simülasyon türüne "statik simülasyon modeli" denir. Bu modelle yapılan

[9] Robert C.Meier ve diğerleri, Simülation in Business and Economics, New Jersey, Printice Hall, 1969, s.1.
[10] Mehmet Şahin, Üretim Yönetiminde Simülasyon Analizi ve Uygulaması, Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayın No:194/124, Eskişehir, 1978, s.54

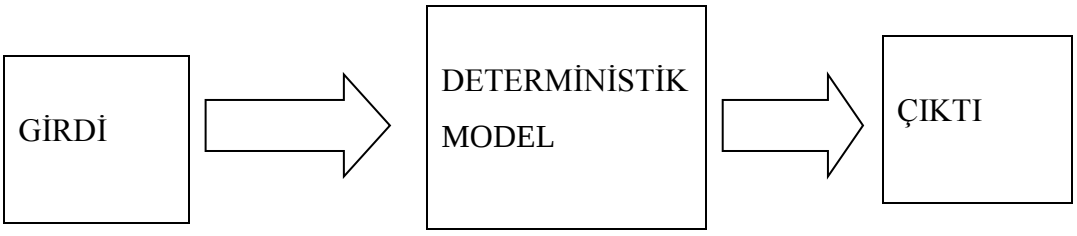
simülasyonlara da “statik simülasyon analizi” adı verilmektedir. Başka bir ifade ile model değişkenleri arasındaki ilişkiler, belli bir süre için sabit varsayılmaktadır.

Bir sistemin bir andaki veya belli bir dönemdeki durumu söz konusu ise buna ilişkin olarak kurulan model de statik bir simülasyon modeli olacaktır.[11] Statik modellerde zaman değişkeni tam olarak ele alınmamaktadır. Statik modellerle ilgili olarak oyun teorisi, doğrusal ve doğrusal olmayan programlama, montaj hattı dengeleme ve işletmelerin fiziksel konumunun düzenlemesi örnek olarak verilebilir.

1.5.2. Deterministik Simülasyonlar

Davranışı daha önceden tahmin edilebilen ve gelecekte ne gibi davranışlar göstereceği bilinen modellere “deterministik modeller” denilmektedir. Deterministik simülasyon türlerinde kullanılan dışsal ve içsel değişkenlerin hiçbirinde tesadüfi özellik bulunmamaktadır.

Deterministik simülasyon modelleri, aşağıdaki şekil gösterildiği gibi, girdi ve çıktı ilişkilerine sahiptirler



Şekil 1. Deterministik Simülasyon Modeli

[11] H.Öner Esen, İşletme Yönetiminde Sistem Yaklaşımı, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1994, s.22

1.5.3. Dinamik Simülasyonlar

Zaman içerisinde gelişen sistemlerin gösterimini sağlayan simülasyon türlerine "dinamik simülasyonlar" denilmektedir.[12] Dinamik simülasyon türleri zaman değişimi ile karşılıklı olarak etkileşim halinde olan matematiksel modellerdir.

Envanter sistemleri ve sipariş sistemleri dinamik simülasyon türlerine verilebilecek uygun örnekler olarak verebiliriz.

1.5.4. Kesikli ve Sürekli Simülasyonlar

Zaman içerisinde kesikli veya sayılabilir noktalarda sistemin temel değişkenlerinin değerleri değişime uğruyorsa bu tür sistemlere kesikli simülasyon türleri denilmektedir.[13] Bu tür simülasyon modellerinde simülasyonun uygulama zamanı içerisinde sadece belirli noktalarda simüle edilen sisteme bakılmakta ve veriler toplanmaktadır.

Kesikli simülasyon türlerinin oluşturulmasını kolaylaştıracak özel avantajlar sağlayan geliştirilmiş üç adet simülasyon yaklaşımı bulunmaktadır.[14]

- Sonraki olayların planlaması
- Faaliyetlerin taranması
- Yöntem-Uyum yaklaşımı

Bu üç yaklaşımda, kilit olayların meydana gelişlerinde istatistiklerin toplanması genel görüşü temeline dayanmaktadır. Bu üç yaklaşımı birbirlerinden farklı kılan en önemli özellik kullanıcı adına ne kadar detaylı çalışmanın yapıldığıdır.

---

[12] Wayne L.Winston, Operation Research Application and Algoritms, Kent Publishing Company, Boston, 1991, s.1115

[13] Wayne L.Winston, Operation Research Application and Algoritms, Kent Publishing Company, Boston, 1991, s.1115

[14] Hamdy A.Taha, Operations Research an Introductions, New York, Macmillan Publishing, 1987, s.696

Sürekli simülasyon türlerinde zaman içerisinde her bir noktada sistem sürekli takip edilmektedir ve bu simülasyon türlerinde simülasyon çalışmasının her aşamasında model için toplanmış olan veriler sürekli olarak gözlemlenmektedir. Sürekli sistemlerde durum değişkenleri zaman içerisinde değiştiğinden dolayı bu yönüyle kesikli simülasyon türlerinden farklılaşmaktadırlar. Sürekli simülasyon türlerinin yerine getirilmesi temelde doğrudan doğruya ve simülasyon dilinin, rolü görevlerin hazırlanmasında çeşitli kolaylıklar önererek modelin yorucu hesaplamalarını azaltmaktadır.[15]

Kesikli ve sürekli simülasyon türlerinin her ikisinde de en son amaç, simüle edilen sistemin davranışını açıklamak için kullanılabilecek uygun istatistikleri toplamaktır.

Kesikli simülasyon türü ile sürekli simülasyon türü arasındaki farkı anlayabilmek için şöyle bir örnek verilebilir. Tek bir servise sahip olan bir benzin istasyonu düşünelim. Bu sistemdeki müşterinin istasyona gelmesi ve sistemden ayrılması durumunda değişimler gözlenmektedir. Bu iki nokta arasındaki kuyruğun uzunluğu ya da bekleme süresi gibi ölçümler değişiklik göstermektedirler. Bunun dışındaki zamanlarda bu ölçümler değişmeyecektir. Bu sebeple sadece değişimin meydana geldiği noktalardaki ölçümleri kaydetmek yeterli olacaktır. Bu sebeple bu sistem ile ilgili yapılacak bir simülasyon çalışması kesikli simülasyon olarak tanımlanacaktır.

1.5.5. Stokastik Simülasyonlar

Stokastik modeller deterministik simülasyon türlerinden daha karışık bir yapıya sahip olduğundan stokastik simülasyon türlerine çözümler bulmak ve bulunan çözümlerin analitik olarak yeterli olması da oldukça güç duruma gelmektedir. Bu

[15] Hamdy Taha, Operations Research an Introductions, New York, Macmillan Publishing, 1987, s.695

açıdan simülasyon tekniği, stokastik simülasyon türlerinin analizi ve çözümünde en çok başvurulan temel tekniklerden biri olmuştur.[16]

Deterministik simülasyon türlerinin aksine stokastik simülasyon türlerinde sisteme dahil edilen içsel ve dışsal değişkenler tesadüfi özellikler taşımaktadırlar. Stokastik simülasyon analizlerine "Monte Carlo Simülasyonu" da denilmektedir.

Stokastik simülasyon türlerinde bir veya daha fazla tesadüfi değişken bulunmaktadır ve sistem çıktıları da tesadüfi nedenler tarafından belirlenmektedir. Bu tip simülasyon türlerinde girdi değerleri ve süreç, olasılık dağılımları ile temsil edilmektedirler. İşte davranışları önceden kestirilemeyen stokastik simülasyon türleri bazı olayların hangi olasılıkla meydana geleceği konusunda çeşitli fikirler oluşturabilmektedirler.[17]

1.6. Simülasyon Çalışmalarında İzlenecek Adımlar

Simülasyon çalışmalarında izlenmesi gereken adımların neler olduğunu öncelikle tablo üzerinde şekillendirdikten sonra bu adımları uygulamak için gerekli olan bilgileri maddeler halinde açıklamaya çalışacağız.

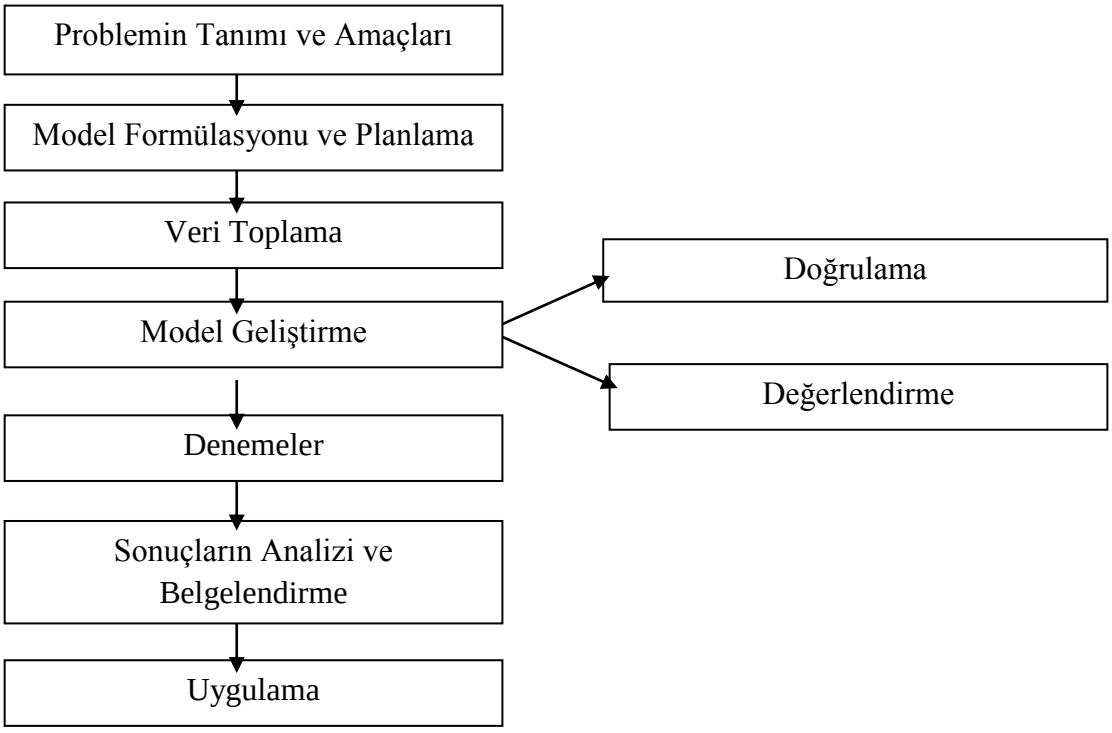
Aşağıdaki akış diyagramında simülasyon sürecinde izlenmesi gereken adımlar tablo halinde verilmiştir. Modelleme sürecinde model kurucu uygulayacağı simülasyon modelinde tabloda verilmiş sıralamaya göre hareket etmesi gerekmektedir. Şimdi bu sıralamayı önce tablo şeklinde özetleyip, bu aşamaları tek tek kısaca açıklamaya çalışacağız.

[16] Mustafa Sevüntekin, Ekonometrik Simülasyon Uygulamaları, Uludağ Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, Cilt: XIII, Sayı 2, Bursa, s.235

[17] Michael Pidd, Computer Simülation In Management Science, John Wiley&Sons, Chichester, 1990, s.22

Tablo.1.2

Bir Simülasyon Çalışmasında İzlenmesi Gereken Adımlar



Simülasyon çalışmalarında izlenmesi gereken adımları belirlerken dikkat edilmesi gereken aşamaları kısaca aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.[18]

1.6.1. Problemin Tanımı ve Amaçlar

Bir çalışma, olası bir ihtiyacı karşılamak veya bir problemi çözme konusunda etkin bir şekilde hazırlanmamışsa, detayları en ince ayrıntısına kadar ve eksiksiz olarak gösterse bile hiçbir anlam ifade etmeyecektir. Etkin bir çalışma yapabilmek için çözülmesi güç problemleri olan sistem öğelerinin iyi incelenmesi ve çalışmanın bu öğelere göre hazırlanması gerekmektedir. Çünkü problemin tanımlanması aşaması yapılan araştırmanın sonucunu etkileyecek en önemli aşamalardan birisi olduğu için bu aşamada problemin doğru tanımlanması gerekmektedir. Etkili bir model

[18] Ahmet Öztürk, Yöneylem Araştırması, Bursa, Ekin Yayımcılık, 2004, ss.7-12.

hazırlamak için sisteme ait diğer parçaların da çalışmanın ilerleyen aşamalarında sisteme kolay bir biçimde dâhil edilebilecek nitelikte tasarlanmış olması gerekmektedir. Bunun yanında sistem içinde yer alacak gereksiz bilgilerin model içinde yer alması, bilgisayar programlarında diğer modellere nazaran daha yavaş ve daha maliyetli olabilmektedir. Bazen üzerinde çalışma yapılan modele ait problemin gerçekçi bir tanımının yapılabilmesi, tahmin edilenden daha zor olabilmektedir. Bunun en önemli nedeni modeli oluşturan kişinin tek bir kişi olmamasıdır. İşletmeciler, yöneticiler mühendisler ve daha birçok çalışanın üzerinde çalışılan model için değişik beklentiler içinde olmasından kaynaklanmaktadır. Çalışmanın yapısı ve içeriği hakkında genel bir tanım oluşturmak, bu kişilerden gelecek verilerin ve gerekli desteğin daha kolay elde edilmesini sağlayacaktır.

Simülasyon çalışmasında ulaşılmak istenen hedefin genelde ele alınan problem tarafından belirlenmesinin nedeni, kurulacak model üzerinde yapılacak çalışmaların probleme çözüm getirmesidir. Bir çalışmada amaçların belirlenmesinde sistemi en iyi şekilde temsil edebilecek metotların değerlendirilmesinin rolü, yadsınamayacak ölçüdedir. Fakat bu metotlar, yapılan simülasyon çalışmasında meydana gelebilecek farklı alternatif metotların ortaya çıkmasını engelleyecek şekilde dar kapsamlı olmamalıdır. Bunlara ilave olarak, simülasyonun bir proje çalışması olarak ele alınması ve zaman hedefleri ile kritik nokta tanımlarının yapılması da faydalı olmaktadır.

1.6.2. Model Formülasyonu ve Planlama

Bir simülasyon modeli için problemin ve ulaşılacak hedeflerin belirlenmesi aşamasından sonra artık model kurucu modelin temel konseptini oluşturmaya başlayabilir. Bu konsept model içinde incelenecek ögeleri ve ana olayı içermelidir. Sistem, aralarında ilişkiler bulunan karşılıklı etkileşim halinde olan belirli bir amaca yönelmiş öğeler kümesidir.[19] İncelenecek sistem ile ilgili bir taslağın hazırlanması

[19] Haluk Erkut, Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı, İstanbul, İrfan Yayımcılık, 1992, s.17

veya modelin düzenine ilişkin bir çizimin kullanılması çalışmaya çeşitli katkılar sağlayacaktır. Yapılacak çizimler, çalışmanın her aşamasında gerekli olan bütün detayların atlanmadan ve eksiksiz olarak belirlenmesinde önemli yararlar sağlayacaktır. Ayrıca grafiksel gösterimler kullanarak da her bir kaynak ile ilgili verilerin sistematik olarak yerinde kullanılması sağlanabilecektir. Bunlara ek olarak süreç akışının ve sistem parçalarının birbiri ile olan etkileşiminin bu çizimler üzerinde gösterilmesi sistemin daha açık bir şekilde anlaşılmasına olanak sağlayacaktır. Sistem yöneticilerinin ve kaynak taşıyıcıların izledikleri yol ve yöntemler de bu çizimler üzerine aktarılabilir.

Sistem sonuçlarının en etkili ve en doğru şekilde hazırlanması için toplanan verilerin doğruluğu çok önemlidir. Çok düzeyli simülasyon çalışmalarında model ve çıktılar arasındaki davranışların birbirleriyle uyumlu olduğunu sayısal kanıtlarla belirtmek gerekmektedir.[20] Bu amaca ulaşmak için yapılacak ilk plan dâhilinde sistem için gerekli olan veriler seçilmeli, bilgilerin nasıl ve hangi kaynaklardan elde edileceği belirlenmelidir. Sistem için gerekli olan bilgilerin elde edilmesi gereksiz verilerin sisteme dâhil edilmemesi konusunda model kurucu çalışmada yer alan diğer kişilere gerekli bilgileri aktarmalıdır. Detayların çalışmaların hedeflerine ulaşması aşamasında gerekli görülen zamanlar eklenmesi, çalışmanın gidişatı ve takibi açısından son derece önemlidir.

1.6.3. Veri Toplanması

Problemlerin tanımlanmasından sonra model kurucu, kurduğu modele etki eden parametre değerlerini tahmin edebilmek için gerekli sayıda veri elde etmeye çalışır. Problemin doğru anlaşılması ve modelin doğru formüle edilebilmesi için pek çok veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu verilerin toplanması da çoğu zaman çok fazla zaman harcanmasına neden olmaktadır.

[20] S. Dereich and F. Heidenreich. A multilevel Monte Carlo algorithm for L´evy-driven stochastic differential equations. Stochastic Processes and their Applications, ss.1565–1587, 2011.

Organize olmuş birçok kurum ve kuruluşlar, kendi faaliyet alanları ile ilgili tüm konularda her zaman yeterli bilgi ve verilere sahip olamamaktadırlar. Bazı konularda kabataslak bilgilere sahip olabilirler. Bu gibi durumlarda yetersiz ve eksik verilerin veya bilginin bulunması halinde model kurucu aşağıdaki seçeneklere göre karar verebilmektedir:

- Sisteme hakkında uzman kişilerden yardım isteyebilir.
- Modele dâhil edeceği verileri kendisi toplayabilir.
- Modele dâhil edilen verilerle ilgili tahminler yapabilir.

Modelde tahmini verilerin kullanılması durumunda, bir projenin kapsamında yer alan değişken ve parametrelerin nasıl ve hangi derecede projenin getirilerini etkileyeceğini belirleyen duyarlılık analizi [21] yöntemi ile bu verilerin sistem üzerindeki etkilerini anlamak için, değişik değerler kullanılmalı ve verilerin uç değerleri, toleransları çok iyi analiz edilmelidir. Bunun amacı modelin kurulum aşamasında kullanılan parametreler ile çalışmanın ilerleyen etaplarında modelle ilgili toplanan verilerin detaylarını içeren parametrelerin temelini oluşturmaktır.

Simülasyon çalışmalarında veri toplama işlemi sürekli olarak yapılması gereken bir işlemdir. Çünkü modelin kurulması ve ilerlemesi aşamasında her zaman daha fazla veriye ihtiyaç duyulmaktadır. Modele dâhil edilecek makro veriler arttıkça mikro verilerin toplanması önem kazanmaya başlar. Bir simülasyon modeli kurulurken yeni ve güncel bilgilerin simülasyona kolay bir şekilde dahil edilmesi için çoğu zaman model kurucular simülasyon modellerini daha esnek modeller olarak kurmaya çalışırlar.

1.6.4. Model Geliştirme

Model geliştirme sürecine başlarken öncelikle sistem soyut bir şekilde oluşturulur. Daha sonra sisteme giren detaylı bilgilerin ışığı altında sistem

[21] Hkm Jeodezi, Jeonformasyon ve Arazi Yönetim Dergisi 2008/2 Sayı, 99 s.8

geliştirilmeye başlanır. Bu soyut model sayesinde sistemin mantıksal bir tahmini yapılır ve sistemde iletişim halinde olan olayların birbirleri arasındaki ilişkisi ortaya konulur. Model kurucu soyut olarak düşündüğü sistemini daha sonra bilgisayar üzerinde kurulan programlarla gerçekleştirmeye çalışır. Yine model kurucu, verilerin toplanması işini modelin kurulum aşamasında da yapabilir.

Model geliştirme sırasında kullanılan promodel simülasyon yöntemi, kullanıcıya modelleme süreci aşamasında hız kazandırır. Promodel simülasyon yazılımları, model kurucuların ihtiyaç duyabilecekleri her çeşit bilgiye ulaşmasını sağlar ve bu yazılımlar herhangi bir programlama ya da detaylı bilgisayar bilgisi gerektirmeyen kolay bir simülasyon yazılımıdır.

Modele güvenirliğin sağlanmasında iki önemli aşama doğrulama ve değerlendirmedir.

1.6.5. Doğrulama

Model kurucunun oluşturduğu model kendi belirlediği amaçları yönünde işlevini görüyorsa model doğru çalışıyor demektir. Doğrulama işleminin yapılması için simülasyonlar yardımı ile çalıştırılması ve işlemlerin denenmesi sonucunda gerçekleşir. Doğrulama işlemleri yapılırken modellerde oluşabilecek olası hataların düzeltilmesi için modeller birkaç kez düzeltme işlemine konu olabilmektedir. Model kurucunun, kurduğu modelin sonuçlarının yaptığı çalışmada ulaşmak istediği hedeflerle ne ölçüde paralellik arz ederse modelin doğruluğu da o derece fazla kanıtlar nitelikte olacaktır.

Model kurucular doğrulama aşamasında sistemde oluşabilecek olası hataların düzeltilmesi konusunda bazı yardımcı araçlardan faydalanabilirler. Sisteme dâhil edilen elemanların izlenebileceği bir animasyon yapılabilir. Fakat animasyonların tek başlarına bir modelin doğrulaması amacıyla kullanılmaması gerekmektedir.

Diğer bir doğrulama sistemi de modelin bir başka model kurucu tarafından incelenmesi şeklinde olabilir. Daha önce yapılmış modellerin sonuçları ile üzerinde

çalışılan model sonuçları arasında karşılaştırma yapılabilir. Modelin değişik durumlar altında nasıl sonuçlar verebileceği de test edilebilir.

Çok önemli bir doğrulama aracından birisi de modelin her adımının dikkatli bir şekilde izlenmesidir. Promodel benzetim yazılımları bu izlenen sonuçları bir dosyaya yazar. İzlenen dosyalar sistemde oluşturulan tüm işlemlerle ilgili bilgileri içerdiği için, sistemlerde gözden geçirilmesi gereken hususlar dikkatle belirlenmelidir.

1.6.6. Değerlendirme

Değerlendirme aşamasında model kurucu, problemlerin çözümü için oluşturduğu modelin sistemi ne ölçüde doğru yansıttığını belirlemeye çalışır. Model kurucunun yapacağı değerlendirme süreci aynı zamanda sisteme dâhil olan diğer kişilerle birlikte yapacağı ortak bir çalışma olması gerekmektedir. Model kurucu sistemi en iyi şekilde yansıtacak bir planlama dahilinde modelde kullanacağı muhtemel verilerin sistem sonuçları üzerinde nasıl bir etki yapacağını araştırmaktadır.

Bu verilerin doğruluğunu kontrol etmek için model kurucu sistem hakkında geniş bir bilgiye sahip kişilerden yardım almalıdır. Modelin değerlendirmesinde bir yardım aracı olarak animasyonlarda kullanılabilir. Veriler üzerinde değişiklikler yaparak sistem çıktılarının elde edilecek sonuçlarla karşılaştırılması da modelin test edilme yöntemlerinden biri olarak kullanılabilir. Veri kaynakları üzerinde değişiklik yapma aşamasında rasgele sayı kaynakları gibi giriş verilerinin değiştirilmemesine sadece giriş parametrelerinin değiştirilebileceğine dikkat edilmesi gerekmektedir.

Modelin değerlendirme aşamasında uygulanabilecek farklı bir yaklaşım ise şu şekilde olabilir. Sistemi iyi bilen uzman kişilerin sistemle model arasındaki benzerlik ve farklılıkları neler olabileceğini bulmaları konusunda yardım alınabilir. Bu işlem "Turing test" olarak adlandırılır. Turing testinde kurulan modelin çıktı sonuçları

uzmanlara gösterilmeyip aynı formata sahip başka bir modelin çıktı sonuçları verilir. Bu uzman kişilerden önemli olabilecek düzeydeki farklılıkları ayırt etmeleri istenir.

Buna benzer başka bir yöntem olarak geçmiş yıllarda kaydedilen verilerin kurulacak yeni model üzerinde denenerek model sonuçlarının gerçek sisteme ait sonuçlarla karşılaştırılmasını söyleyebiliriz.

1.6.7. Denemeler

Simülasyon modellerinin, sistem için gerekli koşul analizlerinin yapılmasını sağlayan bir araç olarak ele alınması gerekmektedir. Koşul analizleri sayesinde model kurucu, planlamış olduğu stratejilerin uygulama yapılacak genel sistem üzerindeki etkilerini görebilecek ve sayısal ölçüm ve analizler yaparak kısa bir zaman süresi içinde sisteme alternatif olabilecek en iyi çözümleri bulabilecektir. Problemleri çözmek için simülasyon modelleri kullanmak tek başına yeterli değildir. Simülasyonlar bir problemin açık bir şekilde tanımlanmasını sağlar ve model için sayısal olarak alternatif çözümleri değerlendirmemize yardımcı olur. Model kurucular ve hazırlanan projede yer alan diğer kişilerin karşılaşılabilecek çeşitli durumlar karşısında alternatif çözümler bulmak için çeşitli fikirleri vardır. Çeşitli alternatifleri model içine dahil etmeden önce sonuçların kabul edilebilir olması için simülasyon modeline ait gerekli zamanının hesaplanması ve modeldeki verilerin dağılımı ya da çıktılardaki istatistiksel varyansın zamanla değişmemesi gerekmektedir.

Simülasyon çalışmaları doğası gereği rasgele sayılar içerdiği için simülasyon sonucunda ortaya çıkan çıktılarda rasgele olacaktır. Bu nedenle, simülasyon sonucunda elde edilen çıktı formatı sisteme alternatif olabilecek birçok sonuçtan yalnızca bir tanesini yansıtmaktadır. Bu nedenden dolayı simülasyon sonuçlarının test edilmesi için denemeler defalarca tekrar edilmelidir. Aksi halde normalde olması beklenmeyen bir sonuç çalışma içine alınmış olabilecektir.

Modellerin denenmesi aşamasında kullanılan diğer bir yaklaşımda geçmişte kullanılan verilerden yararlanmaktır. Geçmişte model için kullanılmış veriler kullanılarak model yeniden kurulur ve sonuçların bugünkü koşullara ne kadar uyumlu olup olmadığı araştırılır. Bu şekilde mevcut model ile varsayımın kıyaslaması yapılarak hataların ortaya çıkarılmasına ve sistemin nasıl daha fazla iyileştirilebileceğine dair fikir edinilmeye çalışılır. Böyle bir kıyaslama üzerinde çalışma yapılan modelin hangi kısımlarında düzeltme yapılması gerektiği konusunda da yol gösterici olmaktadır.

Modelin geçerliliği için sürecin dokümantasyonu da önemli bir konudur.[22] Dokümantasyonlar sayesinde modeli gelecekte kullanmak isteyen kişiler için modelin güvenilirliği artmakta ve hataların nerelerden kaynaklandığının tespit edilmesinde kullanıcılara yardımcı olmaktadır.

1.6.8. Sonuçların Analizi ve Belgelendirme

Her bir modelin düzenlenmesi ve yapılandırılması sırasında sonuçlarının mutlaka iyi bir şekilde belgelendirilmesi gerekmektedir. Normal raporlara ek olarak, dikkatli bir şekilde yapılacak belgelendirme, model kurucuya değişik alternatif seçenekleri arasından hangisinin en iyi sonucu verdiğini belirlemesine yardımcı olur. Buna ek olarak, ortaya çıkabilecek yeni alternatifler seçenekler oluşursa bunların da kolaylıkla tespit edilmesinde model kurucuya yardımcı olacaktır. Bazı hallerde modelde sonradan bilincine varılan durumlar ortaya çıkarsa bu durumların model için istatistiksel önemini belirlemede ek tekrarlara ihtiyaç duyulabilir. Modelde ek tekrarların yapılmasındaki neden hazırlanan modelin ortaya çıkaracağı sonuçların yönetimin isteklerine uygun hale getirilmesinden kaynaklanmaktadır.

Sistemlerin oluşturulması aşaması genellikle bilgisayar destekli olduğundan dolayı sistem için gerekli sayıda bilgisayar programına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sebeple veri tabanlı olarak oluşturulan sistemlerin her zaman güncelleştirilebilmesi

[22] Frederick S.Hiller – Gerald J.Lieberman, Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill, Inc., New York, 1995, s.18.

mümkün olabilmektedir. Modeli kuran kişi, modelin veya modele ek olabilecek alternatiflerinin sonuçlarını istatistiksel bir tablo formatında yönetime sunduğunda her zaman kabul görmeyebilir. Böyle bir durumun ana nedeni projenin oluşum aşamasındaki karar vericinin başarısızlığıdır. Model kurucu veya analisti, böyle bir kararla karşılaştığı zaman tekrar problemin tanımlanması ve modelin yeniden formüle edilmesi aşamasına geri dönmek zorunda kalacaktır. Eğer simülasyon iyi bir şekilde belgelendirilmişse ve kabul görmüşse öneri gerçekleştirecek olan ekip tarafından hazırlanmaya başlanır.

1.6.9. Uygulama

Bir modelde son aşama öncelikle geliştirilen sistemin simülasyon projesi üzerinde uygulamaya geçilmesidir. Bir projede ileri sürülen tekliflerin uygulanabilmesi simülasyon modelinde izlenecek adımların uygun olmasına bağlıdır. Uygulamaya konan bir sistem amaçların karşılanması bakımından devamlı olarak takip altında tutulmalı ve güncelleştirilmeye çalışılmalıdır.[23]

Modeli kuran kişi ve diğer çalışanlar, simülasyon projesinin uygulanmasında ortaya çıkabilecek sistem hatalarının çözümü konusunda ortak bir şekil de hareket etmelidir. Uygulamaya geçilmiş bir proje istenilen sonuçları iyi bir şekilde yansıtıyorsa bitiş tarihi sona erdikten sonra bile uygulamasına son verilmez. Diğer modellere entegre çalışmaları ile ilaveler yapılarak sistem üzerinde iyileştirme çalışmaları yapılmaktadır. Başarılı sonuçlar elde edilmeye devam edildikçe yeni sistemler yıllarca kullanılmaya devam edilebilecektir.

[23] Wayne L.Winston, Operations Research Applications and Algorithms, Duxbury Press, Wadsworth Pub. Comp. Belmont, California, 1994, s.5.

1.7. Monte Carlo Simülasyonu

Monte Carlo Simülasyon yöntemi, doğasında belirsizlik faktörünün bulunduğu durumlar karşısında bir dizi değerleri olasılık dağılımı kullanarak bu faktörlerin yerine olası sonuçları modeller içinde inşa ederek risk analizi yapmamızı sağlayan bir tekniktir. Metodun bir probleme uygulanması problemin rassal sayıları kullanarak simüle edilip hesaplanmak istenen parametrenin bu simülasyon sonuçlarına bakılarak yaklaşık olarak hesaplanması fikrine dayanmaktadır.[24] Daha sonra farklı olasılık fonksiyonları rastgele sayılar kümesi kullanılarak model içinde farklı sonuçları hesaplamaktadır. Monte Carlo Simülasyonu model için belirlenen aralık sayısına bağlı olarak binlerce hatta on binlerce veriyi kapsayabilmektedir. Bu veriler ışığı altında olası sonuçların dağılım değerleri üretilmesine olanak sağlamaktadır.

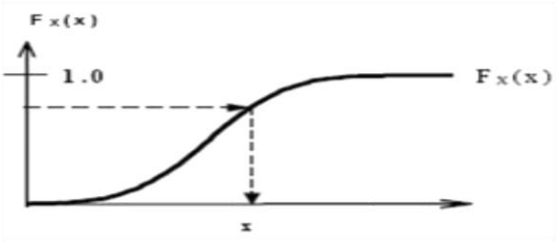
Olasılık dağılımları kullanılarak yapılan modellemelerde modele katılan değişkenlerin aldığı farklı değerler karşısında ortaya farklı olasılıklar çıkmaktadır. Belirsizlik içeren durumların modelde kullanılan değişkenler yardımıyla olasılık dağılımlarının model için hesaplanması farklı durumlar içerisinde çok daha gerçekçi bir risk analizi yapılmasını mümkün kılmaktadır.

Monte Carlo Simülasyonu, fiziksel ve matematiksel bazı sistemlerin benzetiminde kullanılmaktadır. Genel olarak raslantısal (random) değişkenlerin sistem üzerindeki etkilerinin incelenmesinde kullanılmaktadır. Raslantısal değişkenler için rastgele sayılar üreten bir algoritma ile çalışmaktadır.

Monte Carlo Simülasyonunda sisteme giren değişkenler belli bir istatistiksel dağılıma uyacak şekilde üretilmektedirler. Bunun için olasılık dağılım fonksiyonun tersi kullanılmaktadır. Bilgisayarlar yardımı ile [0-1] aralığında uniform olarak

[24] Aybaba Hançerlioğulları, "Monte Carlo Simülasyon Metodu ve MNCP Kod Sistemi." Kastamonu Eğitim Dergisi. Vol.14, No.2 (Ekim 2006), s.545

üretilen rastgele sayılar olasılık dağılım fonksiyonlarının tersi kullanılarak çok kolay bir şekilde herhangi bir dağılama dönüştürülebilmektedir.



Şekil.2 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Monte Carlo Simülasyon yönteminde örneğin iki rassal değişkene (X1,X2) bağlı olan Y değişkeninin bu değişkenlerle olan ilişkisi f fonksiyonuyla tanımlandığını varsayalım. Bu durumda;

$$Y= f(X_1, X_2)$$

Eğer X_1 ve X_2 değişkenlerinin dağılımı belliyse (örneğin: Normal Dağılım gösteriyorsa) ve aynı zamanda dağılım özellikleri de biliniyorsa (μx: Ortalama ve σx: Standart sapma) X değerleri için defalarca rastgele sayılar üretilmesi sonucunda bu sonuçlara karşılık gelebilecek Y değerleri f fonksiyonu yardımıyla hesaplanabilmektedir. Bu hesaplamalar doğrultusunda da Y ile ilgili olarak istatistikî bilgilere ulaşabilmemiz mümkün olabilmektedir. Ne kadar fazla örnekleme yapılırsa sistem hakkında o kadar iyi sonuç elde edilebilir.

Monte Carlo Simülasyon tekniğini deterministik sistemlerde kullanılırken rastgele sayı dizilerin oluşturulması aşamasında simülasyondan en verimli sonuçları alabilmek için yeterli sayıda rastgele sayının üretilmesi gerekmektedir. Bu rastgele sayıların bazı uygulamalarda binlerce hatta on binlerce sayıda olabileceği düşünülürse bu tekniğin uygulanmasının ancak bilgisayar programları aracılığıyla yapılabileceğini göstermektedir. Monte Carlo Simülasyon tekniği birçok alanda

doğru tasarlandığı taktirde ve örnek hacminin yeterli büyüklükte seçildiğinde stokastik simülasyon süreçlerinin güvenilir bir yöntem olduğunu kanıtlamıştır.[25]

Düzgün dağılımlar elde edilen yeterli sayıdaki bu rastgele sayılar Monte Carlo Simülasyon tekniği kullanılarak arzu edilen dağılımlara dönüştürülmektedir. Bu aşama da yüksek kalitede bir simülasyon çalışması elde edilmek isteniyorsa Monte Carlo Simülasyon tekniği uygulanırken sistemin aşağıda belirtilen bazı belirgin özellikleri taşımasına dikkat edilmelidir:

- Simülasyon çalışmalarında doğru sonuçlara ulaşabilmek için sisteme dâhil edilecek örnek sayısının yeterli olması gerekmektedir.
- Yine çalışmanın doğruluğu için sistem için en uygun örnekleme tekniğinin belirlenmesi gerekmektedir.
- Sayı üreteçleri ile üretilen rastgele sayı dizilerinin tekrarlanma periyotlarının uzun bir dönemi kapsaması gerekmektedir.
- Simülasyon tekniğinde kullanılacak algoritmanın modellenen sistem için geçerliliğinin olması gerekmektedir.
- Somut ve denenebilir nesne ve olayların simüle edilmesinde kullanılır.

Rastgele sayı örnekleme algoritmaları, belirli bir olasılık dağılımına göre dağılan sayılardan düzgün dağılımlı rastgele sayılar elde etmek için kullanılmaktadırlar. Son yıllarda rastlanan durumların analizinde kullanılmak üzere Markov süreci ile Monte Carlo Simülasyon süreci arasında bir ilişki kurulmuş ve süreç geliştirilmiştir.[26]

1.8. Monte Carlo Yönteminin Matematiksel Analizi

Monte Carlo yönteminin temel amacı 0-1 arasındaki düzgün dağılıma sahip sayıların bir olayı veya bir deneyi taklit edilerek kullanılmasıdır. Bu sayıları q ile

[25] J. Blanchet, K. Leder, and P. W. Glynn. Efficient simulation of light-tailed sums: an old-folk song sung to a faster new tune, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods , ss.227–248, 2009.
[26] T. Gudmundsson and H. Hult. Markov chain monte carlo for computing rare-event probabilities for a heavy-tailed random walk. Journal of Applied Probability, s.51, 2014.

sembolize edelim. Bu sayılar bilgisayar programları ile türetilen sayılardır. Belirli bir ölçü ve deneyde bulunabilecek değerler kümesi bir rastgele sayı kümesi oluşturmaktadır. Oluşturulan bu rastgele sayılar kümesinde herhangi bir sayının gelme olasılığı diğer sayılardan farklı olabilmektedir. Eğer olasılıklar aynı ise böyle bir kümeye düzgün dağılımlı rastgele sayılar kümesi denir. Rastgele sayılar kümesini oluşturan rakamların her biri aynı olasılıkla seçilmiş ve her biri birbirinden bağımsız olan sayılardır.

Monte Carlo Yönteminde de çok sayıda rastgele sayı türetilmesi gerektiğinden bu sayılar bilgisayarlar yardımıyla türetilmektedirler. Bilgisayarlar yardımıyla belli bir yönteme göre sıra ile türetilen bu rastgele sayılar gerçekte rastgele sayı olmamakla birlikte rastgele sayıların istatistiksel özelliklerini taşırlar.

Rastgele sayılar aşağıdaki gibi tanımlanan 'Mixed congruential method' formülünden elde edilebilir;

$$P_i = \text{tamsayı x } (a x_i / b r_i) \qquad (1.1)$$

$$x_i + 1 = a x_i - b r_i$$

$$q_i = x_i + 1 / b$$

Bu yöntemin algoritması şu şekilde tanımlanabilir; x_i = a x_i -1 (Mod m) matematiksel bağıntısı ile gösterilebilir. Burada x_i , pozitif tamsayı dizisi olup başlangıç değeri x_0' dır. a ve b ise pozitif tamsayılardır. Bu sayılardan daha büyük başka bir pozitif tamsayı ise m' dir. x_i pozitif tamsayılar dizisi, x_i -1 ile a sayısı çarpılarak çıkan sayının m' ye göre modu hesaplanarak elde edilmektedir.

$$x_i = (a x_i\text{-}1 + c) \pmod m \qquad (1.2)$$

'Mixed congruential method' adı verilen bu yöntemde başlangıç değeri olarak x pozitif bir tamsayı alınır. Üretilen sayı dizisinin her sayısı m' ye bölünerek 0-1 aralığındaki sayılardan yeni bir dizi elde edilir. a ve c iki tamsayı m' de bu sayıların birisinden de büyük bir tamsayıdır. a, b, c, m ve x_0' ın farklı değerleriyle üretilen diziler rastgele sayılardır ve bir x_i dizisi, x_0, a, c, m ile tümüyle belirlenir. Dizinin en

çok m adet farklı sayıdan oluştuğu ve sonuçta kendisini tekrarlayacağı açık olmakla birlikte periyot, m, a, c'nin uygun değerleri seçilerek mümkün olduğunca büyütülebilir.

Şimdi de, a ≤ x ≤ b aralığında, her bir x sonucunun ortaya çıkma olasılığı, f(x) sıklık fonksiyonu ile belirtilen bir olayı taklit etmek isteyelim. Olayda sonucun x ile x+dx arasında bir değer alma olasılığı,

$$P(x)\,dx = f(x)dx \,/\, \int_a^b f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)} \qquad (1.3)$$

Burada, P(x) fonksiyonuna Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu adı verilmektedir.

Q(x) Toplam Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu olursa,

$$Q(x) = \int p(x')\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)} \qquad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır.

a ≤ x ≤ b aralığındaki her x değerine karşılık Q(x), toplam olasılık yoğunluk fonksiyonu 0-1 aralığındaki rastgele değerler almaktadır. Q(x) değerlerinin ortaya çıkma sayısı yani sıklık fonksiyonu düzgün bir dağılım göstermektedir. O halde P(x)'i T ye eşitleyebiliriz,

$$T = Q(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)} \qquad (1.5)$$

I,II,II numaralı denklemleri kullanarak Temel Monte Carlo ilkesine ulaşabiliriz.[27]

$$T = \int_a^x f(x')dx \,/\, \int_a^b f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)} \qquad (1.6)$$

elde edilir.

Denklem (IV) Temel Monte Carlo İlkesi olarak bilinmektedir. Denklem IV' den X tersine çözülürse T' ye bağlı olarak,

[27] Aybaba Hançerlioğulları, a.g.e. s.550.

$$X = P^{-1}\,(T) \ldots\ldots\ldots\

şeklinde yazabiliriz. Buradan da,

$$\sigma^2(x) = (\overline{x^2} - x^{-2}) \quad (1.12)$$

denklemini elde edelim. Varyans $\sigma^2(x)$' in karekökü, x'in beklenen değeri $\bar{x}$ etrafında ne kadar bir saçılım gösterdiğinin ifadesidir ve standart sapma bu durumda,

$$\sigma^2(x) = (\overline{x^2} - x^{-2})^{1/2} \quad (1.13)$$

şeklinde gösterilir.

Bu standart sapma değeri, aynı zamanda meydana gelen hatanın büyüklüğü hakkında bilgi verir. Beklenen değeri $\bar{x}$ olan, x değerimiz ile; Monte Carlo yönteminde kullandığımız beklenen değeri $\tilde{x}$ olan, bağımsız ve rastgele seçilen x_i örneklerinin standart sapması arasında,

$$\sigma(\tilde{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \quad (1.14)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu denklemden görülebileceği gibi, Monte Carlo yönteminde, $\bar{x}$ değerine ulaşabilmek için kullandığımız, x_i örneklerinin sayısı N ne kadar yüksekse, $\tilde{x}$ değerimizde aradığımız $\bar{x}$ değerine o kadar yakındır. Monte Carlo yönteminde, hata boyuttan bağımsızdır ve denkleminden görülebileceği gibi $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ile orantılı olarak azalmaktadır. Örneğin, hatamızı $\frac{1}{10}$ azaltabilmek için, örnek sayımız $\overline{N}$ = 100*N yani 100 kat arttırılmalıdır.

Diğer integrasyon metotlarında hata $\frac{1}{N^{2/d}}$ ile orantılıdır. Bu durumda da, Monte Carlo integral yönteminin 1 boyut için, diğer yöntemler kadar verimli olamayacağı gayet açıktır. Bu konuda altı boyutlu ampirik modeller üzerinde çalışan Donner (2009), Monte Carlo yol gezinim algoritmalarını kullanarak veriler üzerinde doğrulamıştır. [28] Ancak standart sapma, integrasyon boyutumuzdan bağımsız olduğundan, yöntemimiz, boyutumuzun d > 4 olduğu durumlar için daha hızlı ve

[28] Donner, C., Lawrence, J., Ramamoorthi, R., Hachisuka, T., Jensen, H.W. and Nayar, S., An empirical bssrdf model, ACM TOG, ss. 28-30, 2009.

daha az hatalı sonuçlar verecektir. Buradan da anlaşılabileceği gibi, yüksek boyutlu integral alma işlemlerinde Monte Carlo yöntemi daha avantajlı durumdadır. Boyut kavramından yararlanarak izotropik homojen malzemelerin ölçümlenmesi ve modellenmesine odaklanan Munoz (2011), boyutun dörtten büyük olması durumunda daha az hata yapıldığını çalışmalarında doğrulamıştır.[29]

Örneğin herhangi bir A bölgesinde f fonksiyonunun integralini almak istersek;

$$I = \int_R f \tag{1.15}$$

x = (x^1, x^2, …. x^d), burada d integral boyutunu göstermek üzere, böyle bir integrali kuadratik olarak toplam şeklinde gösterirsek;

$$I = \int_R f(x)dx = \Delta x^d \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \dots \sum_{i_3=1}^{N} f(x_{i_1}^{1} \dots x_{i_d}^{d}) \tag{1.16}$$

1.10. Tesadüfi Değişkenler ve Dağılımlar

Yaşadığımız evrende karşılaştığımız problemlerin tek ve kesin bir çözümünü bulmak ancak sistem içindeki değişken değerleri biliniyorsa gerçekleştirilebilir bir olgudur. Bunun gibi değişken değerlerin kesin olarak bilindiği ve sistem için tek bir çözüm bulunabilen olaylar deterministik olaylardır. Fakat her zaman sistemlerde kullanılan değişken değerleri kesin olarak bilinmeyebilir. Örneğin bir madeni paranın hava atıldığında yazı yüzünün mü yoksa tura yüzünün mü geleceği, bir zar atışında zarın hangi yüzünün gelebileceğini önceden kestiremeyiz. İşte bu gibi değişken değerlerin önceden bilenemediği problemlerde kullanılacak değişkenlere rassal değişken adı verilmektedir.

[29] Munoz, A., Echevarria, J.I., Seron, F.J., Lopez-Moreno, J., Glencross, M. And Gutierrez, D., BSSRDF estimation from single images, Computer Graphics Forum, ss. 455–464, 2011.

1.10.1. Rassal Değişken Kavramı ve Özellikleri

Genelde, (x,y)' den (x,y)' lere gidiş gibi bir örneklem uzayının (S) tekrardan belirlenmesi için uygulanan kurallara rassal değişken denilmektedir. Daha açık bir anlatımla ifade edersek (x,y)' ler S içinde ortaya çıkan bir sonuç, (x+y)'ler de bir rassal değişkendir. [30]

Rassal değişken, yapılan bir deney veya araştırmada alacağı değerin ne olacağı kesin olarak bilinmeyen değişkendir. Bu belirsizliğin temelinde önceden tahmin edilmesi imkânsız olan çok sayıda etkene bağlı olmasından kaynaklanmaktadır. Bu belirsizlik durumu doğal olaylara bağlı olabileceği gibi olayı inceleyen kişinin olay hakkındaki bilgi yetersizliğinden de kaynaklanıyor olabilir. İşte bu gibi durumlarda değişkenleri deterministik bir yaklaşım tarzıyla incelemek imkânsız hale gelmektedir. Bunun yerine olasılıkçı bir yaklaşım biçimi gerekir.

Demek ki bir rassal değişkenin gelecekte alabileceği kesin olarak hesaplayamıyorsak bu değişkenlerin bir gözlem sırasında belli bir değer almasına da bir rassal olay denir. Herhangi bir rassal olayın görülmesini önceden kesin olarak bilemeyeceğimize rağmen bu rassal olayın görülme olasılığını belirlemek mümkün olabilmektedir. Örnek olarak bir madeni para atışında yazı veya tura yüzünün görülmesi bir rassal olaydır. Fakat bu rassal olaylardan herhangi birinin görülme olasılığı belirlenebilir.

Olasılık teorisine göre her rassal olay 0 ile 1 arasında değişen bir olasılık değeri alır. Rassal değişkenin alacağı değeri (X) ile rassal değişkenin gözlem sırasında almış olduğu değeri (x) ile gösterirsek, X = x_i rassal olayının olasılık formülü aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$P(X = x_i) = p_i \qquad (1.17)$$

p_i'nin 0 ile 1 arasında değişen olasılık değeri eğer 0 olursa söz konusu olayın hiçbir zaman gerçekleşme şansı olmayacaktır. Bu olasılık değeri 1'e eşit olursa bu durumda

[30] Mustafa Aytaç, Matematiksel İstatistik, Ezgi Kitap Yayınları, Bursa, 2004, s.52.

da olayın her gözlemde meydana gelmesi kesindir sonucu çıkar. Olasılık değerinin 0'dan 1'e doğru artması o olayın görülme sıklığının daha fazla olduğunu gösterir.

Bir stokastik değişkenin rassal değişken olarak tanımlanabilmesi için aşağıda belirtilen iki koşulu yerine getirmesi gereklidir:

- Rassal sayılar 0-1 aralığında uniform dağılmalıdır. Sayıların seçilme olasılıkları da birbirine eşit olmalıdır.
- Her rassal sayının gerçekleşme olasılığı geçmişte meydana gelmiş sayıların gerçekleşme olasılıklarından bağımsız olmak zorundadır.

Bu bilgiler ışığı altında rassal bir sayıyı x ile gösterirsek olasılık yoğunluk fonksiyonu, aşağıda gösterilen uniform dağılımdan rasgele seçilerek belirlenen bir örnek

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ 0 \leq x < 1 \\ \\ 0, \ diğer\ durumlarda \end{cases} \qquad (1.18)$$

şeklinde tanımlanabilir. [31]

Rassal değişkenler kesikli rassal değişkenler ve sürekli rassal değişkenler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Şimdi bu değişkenleri kısaca açıklayalım:

Kesikli rassal değişken sınırlı bir seri içerisinde pozitif sayılarca sayılabilen elemanların oluşturduğu serilerdir. Herhangi bir rassal değişken X, basit olarak örneklem uzayı S' den R gerçel sayılar kümesine giden bir bağlantıdır. Bu bağlantının tanım kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda değerlere sahipse, o rassal değişkene kesikli rassal değişken adı verilmektedir.[32]

Kesikli rassal değişkenlere örnek olarak bir hastanede bir yıl boyunca yapılan doktor ziyaretlerinin sayısını, bir araç kredisi kullanan birinin geri ödemelerinde kaç defa gecikme yaptığı, bir ailenin toplam çocuk sayısı, bir kişinin kaç hafta işsiz kaldığı ve bunun sonucu vs. verilebilir.

---

[31] Nalan Cinemre, Yöneylem Araştırması, İstanbul, Beta Basım Yayım Dağıtım, 1997, s.475.
[32] Mustafa Aytaç, a.g.e., s.52.

Sürekli bir rassal değişkenin alabileceği değerler bir gerçek sayılar serisindeki belirli bir aralık içerisinde herhangi bir değerdir. Herhangi bir rassal değişken X, basit olarak örneklem uzayı S' den R gerçel sayılar kümesine giden bir bağlantıdır. Bu tanım kümesi gerçel değerlerin belirli bir aralığı içinde sınırlanmış veya sınırlanmamış ise bu değişkene sürekli rassal değişken adı verilmektedir.

Sürekli rassal değişkenlere örnek olarak, gayri safi milli gelir (GSMH), ekonomideki para arzı, faiz oranı, herhangi bir ailenin geliri vs. konularında kullanımı verilebilir.

Her kesikli rassal değişken X ile bağlantılı olan olasılık dağılım fonksiyonu, P_x (x)' dir. Burada P_x (x) örneklem uzayı S'de sonuçlarla bağlantılı bütün olasılıkların toplamıdır. Bunu

$$P_x \text{ (x)} = \text{P } (\{s \epsilon S \mid X(s) = x\}) \qquad (1.19)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Notasyonlarda basitlik sağlamak amacı ile

$$\text{P(x)} = \text{P(X = x)} \qquad (1.20)$$

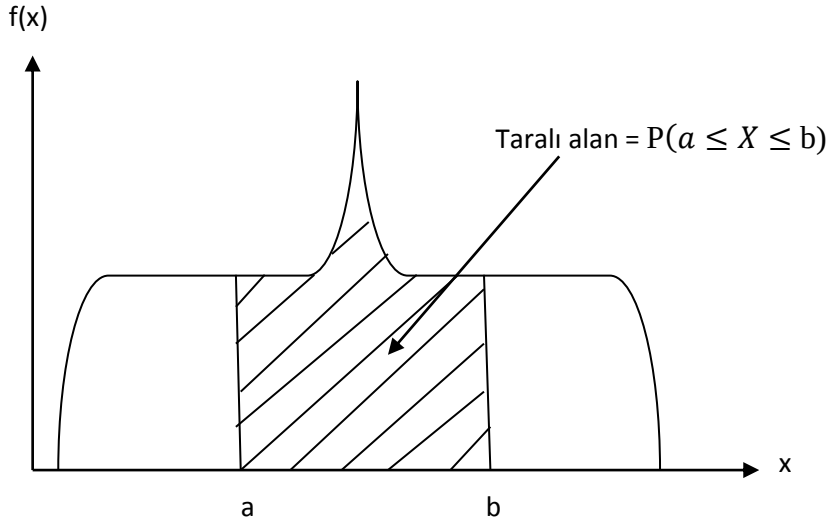
yazılır. Burada P(x), x değerini alan X rassal değişkeninin olasılığı olmaktadır.

x değerini alan her olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x), sürekli rassal değişken X ile bağlantılıdır. Ancak bu durumda f(x), x değerlerini alan X rassal değişkeninin olasılığı değildir. f(x) belli bir (a,b) aralığında aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\text{P}(a \leq X \leq \text{b}) = \text{P } (\{s \epsilon S \mid a \leq X(s) \leq b\}) = \int_a^b f_x\,(x)dx \qquad (1.21)$$

dir.

Şekil 3'de ilgili durumun olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmektedir.



Şekil.3 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Sürekli bir rassal değişkenin alabileceği değerlerin sayısı sonsuzdur. Yani böyle bir rassal değişken belli bir aralıktaki bütün gerçek sayı değerlerini alabilir. Sürekli bir rassal değişkenin alabileceği sonsuz sayı olsa bile bu değerleri alan olasılıklarının toplamı 1'e eşit olacağından X = x şeklindeki olayların olasılıkları sıfıra gidecektir. Bu nedenle sürekli rassal değişkenlerde olayların olasılıklarından söz etmektense bunun yerine değişkenin x ile x+dx arasındaki bir aralıkta kalması şeklinde bir birleşik olayın olasılığını tanımlamak yoluna gidilebilir. Bu durumda olasılık yoğunluk fonksiyonu p(x) şöyle tanımlanabilir;

$$p(x)dx = P(x < X \leq x+dx) \tag{1.22}$$

Yani p(x) eğrisi ile x-ekseni ve x, x+dx noktalarından çizilen düşey çizgiler arasında kalan değişkenin (x, x+dx) aralığında bir değer alması olasılığını göstermektedir.

Değişkenin sonlu bir aralıkta bulunması olasılığı bu aralığı küçük parçalara ayırıp, bu parçalarda bulunma olasılıklarını toplayarak hesaplanabilir;

$$P(x1<X<x2 = \int_{x1}^{x2} p(x)\,dx \tag{1.23}$$

Değişkenin (-∞,+∞) aralığında bir değer alması kesin bir olay olduğuna göre p(x) daima şu koşula uyacaktır;

$$\int_{+\infty}^{-\infty} p(x)dx = 1 \tag{1.24}$$

Sürekli değişken halinde olasılık dağılım fonksiyonunun tanımı değişmez;

$F(x) = P(X \leq x)$ (1.25)

F(x) ile p(x) arasında şu ilişkinin olduğu yukarıdaki denklemlerden görülebilir;

$F(x) = p(-\infty < x < +\infty)$ (1.26)

$= \int_{-\infty}^{x} p(u)du$

$p(x) = d/dx \int_{-\infty}^{x} p(u)du$ (1.27)

$=dF(x)/dx$

olasılık dağılım fonksiyonu aşağıdaki şu koşulları her zaman sağlayacaktır;

$0 \leq F(x) \leq 1$ (1.28)

$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$\epsilon > 0$

$F(x + \epsilon) \geq F(x)$

$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$

Yukarıda tanımlanan olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları bir rassal değişkenin olasılık uzayına ait tüm bilgileri kapsamaktadır.

1.10.2. Rassal Sayıların Özellikleri

Rastgele sayı üreten üreteçlerde olması gereken koşullar hakkında bilinmesi gereken bazı önemli noktalara değinmekte fayda olacaktır. Bu koşulları şu başlıklar altında toplayabiliriz.[33]

- Rastgele sayı üreteçlerinde tekrarlanma periyodunun çok uzun olması gerekmektedir. Rastgele sayı üreteçleri bir matematiksel fonksiyona dayanarak sayı üretimi sağlamaktadırlar.
- Rastgele sayı üreteci ile üretilen n adet sayı dizisindeki sayıların ardışık olarak birbirinden bağımsız olması gerekmektedir.
- t gibi bir zaman süreci içerisinde bir trend eğilimi olmaması gerekmektedir.
- t zaman sürecinde elde edilen n adet sayı dizisinin elemanları t, t+k periyotlarında bir kümeleme oluşturmamalıdır.
- Rastgele sayı üreticinde üretilen sayılar yeniden elde edilebilir olmalıdır.
- Rastgele sayı üreteçleri kullanıldıkları bilgisayar türüne göre bağımlılık göstermemelidir. Genel bir prensibe uygun üretimler yapabilmelidirler.
- Rastgele sayı üreteçleri ile üretilen sayı dizilerindeki sayıların kendinden önceki ve sonraki değerlerine bağımlı olmamalıdır.
- İstenilen büyüklükteki n adet rastgele sayı kısa sürede elde edilebilir olmalıdır.

Simülasyon modellerinde genellikle (0-1) aralığındaki rassal sayılar söz konusudur. Bu aralıktaki sayıların uygun sayılarla çarpılması veya bölünmesi yoluyla farklı durumlarda istenilen rassal sayılar elde edilebilir.

$R_1, R_2, \ldots$. bir rassal sayılar dizisi olarak düşünürsek bu dizinin; Düzgün bir dağılıma sahip olma ve bağımsızlık olmak üzere iki istatistiksel özelliğe sahip olması gerekmektedir.

Her bir rassal sayı R_i, 0 ve 1 aralığındaki sürekli düzgün dağılımdan alınan bir bağımsız örnektir.

[33] Aybaba Hançerlioğulları a.g.e. s.548.

Düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir;

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & dd \end{cases} \quad (1.29)$$

Her Ri'nin beklenen değeri ise;

$$E(R) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} | = \frac{1}{2} \quad (1.30)$$

Varyansı ise;

$$V(R) = \int_0^1 x^2 dx - [E(R)]^2 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \text{olur.} \quad (1.31)$$

Rassal değişkenin içinde bulunduğu gruba ait farklı rasgele olayların olasılık değerlerini toplu bir şekilde gösterebilmek için dağılım fonksiyonlarını kullanabiliriz.

Rassal değişkenleri belli bir aralıkta olmasına rağmen, bu değişkenler sürekli olarak değişiklik gösterdiğinden örnek uzayındaki eleman sayıları sonsuz olmaktadır. Güncel yaşamda bir rassal değişkenin değişim aralığı genellikle üsten ve alttan sonlu olduğu için değişkeni sonlu sayıda değerden birini alabilen bir değişken olarak düşünmek faydalı olabilmektedir. Bu durumda bir değişkene ait farklı olayların olasılıkları,

$$p(x_i) = P(X = x_i) \quad (1.32)$$

şeklinde x_i değerlerinin hizasında düşey çizgi ile gösterilirse, bu değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyona ulaşılmış oluruz. Düşey çizgilerin olasılıkları toplamı her zaman 1'e eşittir.

$$\sum_{(xi)} p(x_i) = 1 \quad (1.33)$$

Bir diğer gösterim şekli ise, rassal değişkenin belli bir değere eşit yada küçük olması olasılığını belirtmektedir;

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) \quad (1.34)$$

Pratik olarak önemli olan bu fonksiyona olasılık dağılım fonksiyonu adı verilmektedir. Fonksiyonun tanımından da hemen görülebileceği gibi;

$$F(x_i) = \sum_{(xj \leq xi)} p(x_j) \quad (1.35)$$

F(x) fonksiyonu 0'dan 1'e doğru gittikçe artan basamaklı bir fonksiyondur.

Sonuç olarak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile olasılık dağılım fonksiyonu aynı bilgileri kapsadığı için herhangi birisinin biliniyor olması diğerinin kolay bir şekilde elde edilmesine olanak sağlayacaktır.

1.10.3. Rassal Sayıların Üretilmesi

Stokastik olayların simülasyon modelleri içerisinde olasılık dağılımları kullanılarak üretilebilmesi için rassal sayılara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu rassal sayılar olasılık dağılımlarından yararlanılarak aşağıdaki yöntemlerle elde edilebilirler.

1.10.3.1. Zar Atma Yöntemi

Zar atma yönteminde uygulanan strateji, üzeri 0'dan başlayarak 9'a kadar rakamlar kullanılarak 10 yüzlü bir zar elde edilmektedir. Zar atıldığında üst yüzeyine gelen sayı rassal sayının ondalık basamağındaki ilk sayı olarak kayıt edilir. Elde edilmek istenen sonuç kaç basamaklı olacak ise o kadar deneme yapılarak rassal

sayılar elde edilir. Örneğin, günümüzde oynanan rulet oyununun altında yatan teknik de aslında bir rassal sayı üretme tekniğidir.

1.10.3.2. Kare Ortaları Üreteci

Bu yöntem John Von Neuman tarafından 1946 yılında geliştirilmiş bir yöntemdir. Kare ortaları yönteminde rassal sayı üretmek için öncelikle bir başlangıç sayısı rasgele seçilir. Örneğin istediğimiz rassal sayı 3 basamaklı ise 3 basamaklı bir sayı seçilir. Daha sonra seçilen bu sayının karesi alınır. Seçilen başlangıç sayısının karesi en fazla 2m basamaklı olacaktır. Eğer başlangıç sayısının karesi olması gerekenden daha küçük çıkarsa önüne gerekli sayıda sıfır eklenebilir. Rassal sayı olarak kullanılmak üzere ortadaki 4 basamak seçilir. Daha sonra bu adımda seçilen sayının karesi alınır. Son olarak rassal sayı adedi kadar adımlar tekrarlanır.

Örnek: $x_0 = 3187$ başlangıç sayısı ile 10 adet rassal sayı elde edelim.

$x_0^2 = 10156960 \longrightarrow x_1 = 1569$ (1.36)

$1569^2 = 02461761 \longrightarrow x_2 = 4617$

$4617^2 = 21316689 \longrightarrow x_3 = 3166$

$3166^2 = 100235556 \longrightarrow x_4 = 0235$

$0235^2 = 00055225 \longrightarrow x_5 = 0552$

..... ……. .....

$5913^2 = \longrightarrow x_{10} = 9635$

Kare ortalamaları yöntemi n > 50 için kısa yineleme periyodu nedeniyle dizi kendini tekrarlamaktadır. Ayrıca hane sayısı (h) = 2 olduğunda çok kısa periyotta üretim sona ermektedir. 1960'lı yıllardan önce h = 4 ve n < 25 için yaygın olarak kullanılmıştır.

İlk sayı ve dizinin yineleme uzunluğu arasındaki ilişkiyi kestirmek zordur.
Örneğin; $x_0 = 4500$ alalım,

x_0^2 = 20250000 ⟶ x_1 = 2500

(1.21)

2500^2 = 06250000 ⟶ x_2 = 2500

2500^2 = 06250000 ⟶ x_3 = 2500

2500^2 = 06250000 ⟶ x_4 = 2500 .....

Örneğin; x_0= 44 ve h = 2 alalım ve 10 sayı üretelim:

Rassal sayılar : 93, 64, 09, 08, 06, 03, 00, 00 olarak bulunur. Üretim gittikçe azalan bir dizidir ve 8. Üretimden sonra üretim durmuştur.

Yöntemin Sakıncalarını ise şu şekilde belirtebiliriz:

• Üretilen dizinin periyodu çok kısadır.
• Uygun bir başlangıç sayısı verilmemişse kısa sürede üretim sıfıra yaklaşmaktadır.
• h = 4 dışında uygulama düzenli değildir

1.10.3.3. Lineer Benzerlik Yöntemi

Lineer Benzerlik Yöntemi günümüzde yaygın olarak kullanım alanı bulmaktadır. Bu yöntemin genel yapısını şu şekilde gösterebiliriz:

x_0 = (başlangıç değeri), a = (çarpan), c = (artış sayısı), m = mod olarak seçildiğinde *r* rassal sayısı;

x_n = (a*x_{n-1}+c) mod (m) n = 0,1,2,……,m-1 (1.37)

şeklindedir.

$r = \frac{x_n}{m}$ n = 0,1,2,……,m-1 (1.38)

olarak hesaplanır.

x_0 = 12, a = 8, c = 5, m = 13 olarak aldığımızı düşünürsek;

x_1 = (8*12+5) mod (13) = 101 (1.39)

= 10

r_1 = 10/13 = 0,7692

x_2 = (8*10+5) mod (13) = 85

= 7

r_2 = 7/13 = 0,5384 olarak hesaplanabilmektedir.

Burada önemli olan c, m, a sayılarının seçimidir. m' in yeterince uzun bir sayı olması uygun çözüm olabilir, bununla birlikte a' nın seçimi için yaygın kullanılan örnek sayılarda mevcuttur.

1.10.3.4. Çarpımsal Benzerlik Yöntemi

Lineer Benzerlik Yönteminin özel bir halidir. Lineer Benzerlik Yönteminde sabit değer c = 0 olduğu zaman yöntem çarpımsal benzerlik yöntemine dönüşmektedir.[34]

u_0 , b (çarpan), c (artış sayısı) ve m (modüler aritmetik böleni) parametreleri verildiğinde Rn rasgele sayısı,

U_n = (b. U_{n-1}+ c) mod (m) n = 1,2,..... (1.40)

Rn = U_n/m , n = 1,2,..... ile hesaplanır.

Örnek: b = 9, c = 5, U_0 = 11 ve m= 12 alarak rassal sayı üretelim. (1.41)

[34] Reuven Y.Rubenstein ve Dirk P.Kroese, Simülation and The Monte Carlo Method, 2. Basım, Newyork: Wiley and Sons, 2007, s.50.

U_1= (9x11 + 5) mod (12) = 104 mod (12) = (12X8 + 8) mod (12)
= 8 R1 = 8/12 = 0,6667
U_2= (9x8 + 5) mod (12) = 77 mod (12) = (12X6 + 5) mod (12)
= 5 R2 = 5/12 = 0,4167
U_3= (9x5 + 5) mod (12) = 50 mod (12) = (12X4 + 2) mod (12)
= 2 R3 = 2/12 = 0,16667

Çarpımsal benzerlik yönteminde en önemli sorun U_0 , b (çarpan), c (artışsayısı) ve m (modüler aritmetik böleni) parametrelerinin seçimi ile ilgilidir. Seçim işlemlerinde bazı kurallara uymak gerekir.

• m (modüler aritmetik böleni):

Tekrarlama periyodu m'den küçük olacağından m'in büyük değerler olarak seçilmesi uygun olacaktır. m'in $2^n - 1$ değerine eşit (n>25) bir değer olması uygun çözüm olabilir. m = $2^{31} - 1$ uygun bir mod olduğu saptanmış bulunmaktadır.

• b (çarpan), c (artış sayısı) seçimi:

b = $2^{16} + 5 = 65541$
b = $2^{16} + 3 = 65539$
b = 16807
b = 630360016

} yaygın şekilde kullanılanlardır. (1.42)

c için m'in kuvvetli olması uygundur.

• U_0'ın seçimi:

Dizinin m periyodu uzun ise U_0'ın seçimi önemsizdir.

1.10.4. Dağılım Parametreleri

Bir rassal değişkenin üzerinde inceleme yapılan çalışmada hangi değeri alabileceği konusunda fikir sahibi olamamakla beraber bu rassal değişkenin içerisine dâhil edildiği toplulukla ilgili dağılım fonksiyonu bu değişkenin ve içerisine dâhil edildiği topluluğun davranışı ile ilgili bilgileri bize sunmaktadır. Bazı durumlarda dağılım fonksiyonunun bize sağlayacağı tüm bilgilerin bilmesi gerekmeyebilir veya tüm bilgileri elde etmek mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda rassal değişkenin ve topluluğun ihtiyaç duyulan temel özelliklerinin birkaç parametre yardımıyla özetlenmesi bazen yeterli olabilmektedir.

Değişkenin dağılım fonksiyonlarının belli bir takım özelliklerini yansıtan bu tür sayılara dağılım parametreleri denilmektedir. Bu parametrelerden en çok kullanılanları ortalama ve varyans'tır. Bu parametreler üzerinde çalışılan topluluğun tümü hakkında bilgi sahibi olunmaya çalışıldığında oldukça önemli faydalar sağlayan parametrelerdir.

Bir rassal değişkenin üzerinde inceleme yapılan çalışmada hangi değeri alabileceği konusunda fikir sahibi olamamakla beraber bu rassal değişkenin içerisine dâhil edildiği toplulukla ilgili dağılım fonksiyonu bu değişkenin ve içerisine dâhil edildiği topluluğun davranışı ile ilgili bilgileri bize sunmaktadır. Bazı durumlarda dağılım fonksiyonunun bize sağlayacağı tüm bilgilerin bilmesi gerekmeyebilir veya tüm bilgileri elde etmek mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda rassal değişkenin ve topluluğun ihtiyaç duyulan temel özelliklerinin birkaç parametre yardımıyla özetlenmesi bazen yeterli olabilmektedir.

Değişkenin dağılım fonksiyonlarının belli bir takım özelliklerini yansıtan bu tür sayılara dağılım parametreleri denilmektedir. Bu parametrelerden en çok kullanılanları ortalama ve varyans'tır. Bu parametreler üzerinde çalışılan topluluğun tümü hakkında bilgi sahibi olunmaya çalışıldığında oldukça önemli faydalar sağlayan parametrelerdir.

Rassal değişkenlerinin dağılımlarındaki en önemli değer dağılımın merkezinde olan değeridir. Yapılan birçok gözlem aşamasından sonra değişkenin

alacağı değerler çevresinde toplanan merkez değer için farklı tanımlamalar kullanılabilir. Literatürde en çok kullanılan tanımlamalar arasında ortalama veya beklenen değer kavramları vardır.

Bu değişkenin ortalaması, p(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu ile x'in çarpımının (-∞, +∞) aralığında integre edilerek bulunur.

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \qquad (1.43)$$

Rassal değişkenlerle ilgili çalışmalarda değişkenin ortalama değeri çalışma için en anlamlı parametredir. Bu değer dağılımın hangi değerler etrafında kümelendiğini göstermektedir.

Ortalama değer bir rassal değişkenin merkezi değerini gösterse bile bu değer çevresindeki dağılımın büyüklüğü hakkında bilgi edinmemizi sağlamaz. İşte bu dağılımın büyüklüğü hakkındaki bilgiyi ölçmek için de varyans parametresini kullanırız.

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma(x)^2 = \overline{(x-\bar{x})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2\, p(x)dx \qquad (1.44)$$

Bu ifadeye göre varyans, rassal değişkenlerin ortalamasından farkının karelerinin beklenen değeridir. Varyansın büyük değerler alması değişkenin ortalama etrafındaki yayılımının büyük olduğunu gösterir.

Varyansın boyutu rassal değişkenin boyutunun karesi gibi olduğundan fiziksel anlamda daha anlamlı sonuçlar elde edilmesi için varyansın karekökü olan standart sapma parametresinin kullanılması yoluna sıklıkla gidilmektedir.

$$\sigma(x) = \mathrm{Var}\,(x)^{\frac{1}{2}} = (\,\overline{x^2} - (\bar{x})^2\,)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.45)$$

Birçok durumda standart sapma ve ortalamanın bilinmesi rassal değişkenlerin dağılımı hakkında fikir edinmemizi sağlar. Standart sapmanın dikkate alınması ile değişkenin rassal karakteri de ana hatlarıyla ortaya konmuş olur.

1.10.5. Rassal Sayıların Dönüşümü ve Teorik Dağılımlar

Kullanılan gerçek sistemlerin doğası gereği içerdiği niteliksel özelliklerinin hepsi stokastik davranışları düzgün dağılımlarla karakterize etmeleri mümkün değildir. Aslında bir sistem içerisinde düzgün dağılımlara nazaran daha sık kullanılabilen teorik (Normal, Üstel, Gamma v.b) dağılımlara rastlamak olası bir sonuçtur. Sistemi temsil edebilecek uygun bir teorik dağılımın bulunamaması sorunu karşısında deneysel (Ampirik) dağılımları kullanabiliriz. İşte sistemlerin stokastik özelliklerinden dolayı düzgün dağılımlar sonucunda elde edilen rastsal sayıların yukarıda değindiğimiz gibi teorik veya deneysel dağılımlara dönüştürülmesi gerekmektedir.

Bu amaca ulaşmak için öncelikle düzgün dağılımlı sayılar alınır veya bilgisayarlar yardımı ile oluşturulur ve dönüştürülmek istenilen dönüşüm yöntemi kullanılarak istenilen dağılıma geçilir. Bu dönüşümün yapılabilmesi demek istatistiksel anlamda bir dağılımdan örnek alınması koşuluyla sağlanmaktadır. Yine bir koşul olarak üzerinde çalışılan dağılımı tanımlayacak parametrelerinde verilmesi gerekmektedir.

Düzgün dağılımlardan rastgele değişkenler elde edilerek bunların istenilen uygun bir dağılıma dönüştürülmesi aşamasında kullanılan yöntemlerden biri olarak Monte Carlo Simülasyon tekniği karşımıza çıkmaktadır.

1.10.5.1. Üstel Dağılım

x tesadüfi değişkeni negatif değerler içermeyen ($x > 0$) değerler alan sürekli bir tesadüfi değişken olsun. Bu durumda x tesadüfi değişkenine üstel dağılmış rassal değişken denir ve $f(x)$ fonksiyonuna da üstel dağılım adı verilir.[35]

[35] Mustafa Aytaç, a.g.e. s.302.

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad , x > 0 \text{ için} \qquad (1.46)$$

$$= 0 \quad , x \leq 0 \text{ için}$$

sürekli tesadüfi değişkenin birikimli üstel dağılım fonksiyonu ise;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha x}\, dt = 1\text{-}e^{-\alpha x}$$

olarak bulunur.

$$P(X > x) = e^{-\alpha x}$$

olduğu görülmektedir.

$$F(x) = 0 \quad , x < 0 \text{ için}$$

$$= 1\text{-}e^{-\lambda e} \quad , x \geq 0 \text{ için} \qquad (1.47)$$

$$= 1 \quad , x \rightarrow \infty \text{ için}$$

gibi olmaktadır.

Üstel dağılımın beklenen değerini E(X) ve varyansını ise V(X) ile ifade edersek bu değerleri şu şekilde bulunacaktır.

$$E(X) = \int_0^\infty x.\alpha e^{-\alpha x} dx$$

x = u ve dv = $\alpha e^{-\alpha x} dx$ olmak üzere, buradan kısmi integral yöntemi ile yukarıdaki integral bulunabilecektir.

$$E(X) = (-xe^{-\alpha x})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, e^{-\alpha x}\, dx$$

integrali de benzer şekilde iki kez kısmi integral uygulanarak bulunabilir.

$$E(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$$

dir. Üstel dağılımın varyansı ise;

$$V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

şeklinde olacaktır.

1.10.5.2. Normal Dağılım

Eğer X ~N(μ, σ^2) ise, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad , -\infty \le x \le \infty \qquad (1.48)$$

μ = beklenen değer veya ortalama değer

σ^2= dağılımın varyansı

İki parametreli bir dağılım olan normal dağılım parametreleri μ ve σ^2' dir. X değişkeni ortalaması 0 ve varyansı 1 olan standart normal değişkene (A) dönüştürülürse;

$$a_i = \frac{x_{i-\mu}}{\sigma} \qquad (1.49)$$

olur ve A değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\mathrm{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{r}{2}}\, \mathrm{r} \qquad , -\infty \le a \le \infty \qquad (1.50)$$

olacaktır.

X ve Y iki standart normal dağılıma sahip iki değişken olsun, R ve Θ ise kutupsal koordinatları olarak alınırsa; R ve Θ'dan geçen olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{R,Q}$ ise,

$$f_{R,\Theta}\,(\mathrm{r},\Theta) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{r}{2}}\, \mathrm{r} \qquad , \ \mathrm{r} \ge 0 \text{ ve } \Theta \in [0,2\pi) \qquad (1.51)$$

x ve y, r ve Θ cinsinden yazıldığı zaman, x = r cos Θ ve y = r sin Θ olacaktır.

Bu koordinat dönüşümünün Jacobian'ı;

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Theta & - r \sin \Theta \\ \sin \Theta & - r \cos \Theta \end{vmatrix} = r \quad \text{olur.} \qquad (1.52)$$

x ve y noktasından geçen olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

$$f_{X,Y}\,(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{\frac{(x^2+y^2)}{2}} \qquad (1.53)$$

olacaktır.

Normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı;

$E(X) = \mu$

$V(X) = \sigma^2$

şeklinde ifade edilir.

1.10.5.3. Beta Dağılımı

İki parametreli bir dağılım olan beta dağılımının parametreleri α ve β ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f\,(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad , 0 < x < 1 \text{ için} \qquad (1.54)$$

$$= 0 \qquad , \text{diğer } x \text{ değerleri için}$$

dir ve dağılım $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için tanımlanmıştır. Dağılımın diğer bir ifadesi de yine $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$B(\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1- x)^{\beta-1} \quad , 0 < x < 1 \text{ için} \qquad (1.55)$$

$$= 0 \quad , \text{diğer } x \text{ değerleri için}$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer $\alpha=\beta=1$ ise beta dağılımının özel hali olan düzgün dağılım elde edilir.

Bu durumda ters – dönüşüm yöntemini de rahatlıkla kullanabiliriz. $\alpha = 1$ olursa beta(α,1)'in olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde olacaktır.

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad , \ 0 < x < 1 \text{ için} \qquad (1.56)$$

ve kümülatif yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , 0 < x < 1 \text{ için} \qquad (1.57)$$

olur. Böylelikle,

x, U~U(0,1) tahmin edilerek bulunur.

$$x = U^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (1.58)$$

olur.

Beta (α,β) dağılan rassal değişkenin tahmini için genel kural şöyle olacaktır.

Y_1~Gamma (α,1) ve Y_2~Gamma (β,1) ise Y_1 ve Y_2 bağımsız ise,

$$x = \frac{Y_1}{Y_{1+Y_2}} \qquad (1.59)$$

beta (α,β) dağılır.[36]

Beta dağılımın beklenen değeri;

[36] Reuven Y.Rubenstein ve Dirk P.Krose, Simülation and The Monte Carlo Method, 2. Basım, Newyork: Wiley and Sons, 2007, s.62.

E(X) = $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Varyansı ise;

V(X) = $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ şeklinde olacaktır.

1.10.5.4. Gamma Dağılımı

Belli bir zaman aralığında, belli bir sayıda olayın gerçekleşmesi için gerek duyulan zamanın olasılıklarını gösteren dağılıma Gamma dağılımı denir ve Gamma dağılımı iki parametrelidir.[37]

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} \quad , x > 0 \text{ için} \qquad (1.60)$$

$$= 0 \quad , x \leq 0 \text{ için}$$

α =1 olur ise gamma dağılımı üssel dağılıma dönüşecektir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu da aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$f(x;1,\beta) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} \qquad (1.61)$$

Gamma dağılımının beklenen değeri ve varyansı;

E(X) = $\alpha\beta$

V(X) = $\alpha\beta^2$

şeklinde olacaktır.

[37] Selahattin Güriş ve Şahamet Bülbül, Olasılık, İstanbul: M.Ü.Nihad Sayar Eğitim Vakfı Yayınları, 1995, s.524

1.10.5.6. Weibull Dağılımı

α ve β parametreli Weibull dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyledir,

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}\, x^{\alpha-1} e^{(\frac{x}{\beta})^{\alpha}} \quad , x > 0, \alpha, \beta \qquad (1.62)$$

$$= 0 \quad , \text{ diğer durumlarda}$$

şeklinde yazılabilir. Weibull dağılımında olasılık yoğunluk fonksiyonunun tersi ise şöyle hesaplanabilmektedir.

$$x = F^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \beta\, [-\ln(1-\boldsymbol{\Gamma})]^{\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Bu durumda ters dönüşüm tekniği ile x'i üretmek için,

$U \sim U(0,1)$ tahmin edilir.

$x = F^{-1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \beta\, [-\ln(1-\boldsymbol{\Gamma})]^{\frac{1}{\alpha}}$ ile rassal sayılar üretilmiş olmaktadır.

Weibull dağılımının beklenen değeri ve varyansı;

$$E(X) = \alpha\boldsymbol{\Gamma}(1+\frac{1}{\beta}) + \alpha$$

$V(X) = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma(1+\frac{1}{\beta})^2\right]\right\}$ şeklinde olacaktır.

İKİNCİ BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL GÜÇ FONKSİYONLARI

İstatistiksel güç fonksiyonları üzerinde çalışma yapılan bir model veya sistem için gerekli olan örneklem büyüklüğünün belirlenmesinde ve bu örneklem büyüklüğü kullanılarak yapılan çalışmalar sonucunda sistem veya model üzerine olan etkisinin belirlenmesinde kullanılmaktadır. Güç analizleri yapılırken model için ortaya atılmış olan hipotezin test edilmesi amaçlanır. Hipotez testlerinde öncelikle anakütle parametreleri hakkında iddialar ortaya atılır ve bu iddiaların doğru olup olmadığı çekilen örneklere bağlı olarak incelenmektedir. Hipotez testlerini kurarken ortaya atılan iddia H_0 hipoteziyle buna alternatif olan diğer hipotezi de H_1 hipotezi ifadesiyle gösterilebilmektedir.

2.1. Hipotez Testleri

Bir testin gücünün belirlenmesi aşamalarını incelerken öncelikle anakütle parametreleri üzerine bir iddia öne sürülür ve bu konu ile ilgili iddianın doğru olup olmadığına anakütleden çekilen örneklere bağlı olarak inceleme yapılır. İşte bu işlemin yapılması için hipotez kavramının ele alınması gerekmektedir. Hipotez kavramı bir konu hakkında ortaya atılan bir iddianın doğru veya yanlış olabilen bir ifadesidir.[38]

Örneğin "öğretmenim beni çok sever" şeklinde bir hipotez ortaya atacak olursak ortaya atılacak bu ifadenin doğru veya yanlış olma ihtimali olacaktır. Bunu anlayabilmek için öğretmenimizle aramızda olan iletişimimizi ve karşılıklı ilişkimizi aklımıza getirerek gerçekten öğretmenimizin bizi sevip sevmediği konusunda kişisel yargılarımızı ortaya koymamız gerekir. Kendi gözlemlerimiz ve yargılarımız

[38] Fazıl Güler, İstatistik Metodları ve Uygulamaları, İstanbul, Beta Basım Yayım Dağıtım, 2005, s.221

sonucunda öğretmenimin beni çok sevdiğine karar verebilirim. Fakat bu kesin bir sonuç olmayacaktır ki gerçekte öğretmenim beni sevmiyor olabilir. Bu işlemin tersini de düşünüyor olabiliriz. Her iki durumda da iddialarımızın kesinlik taşımadığını bilmemiz gerekir.

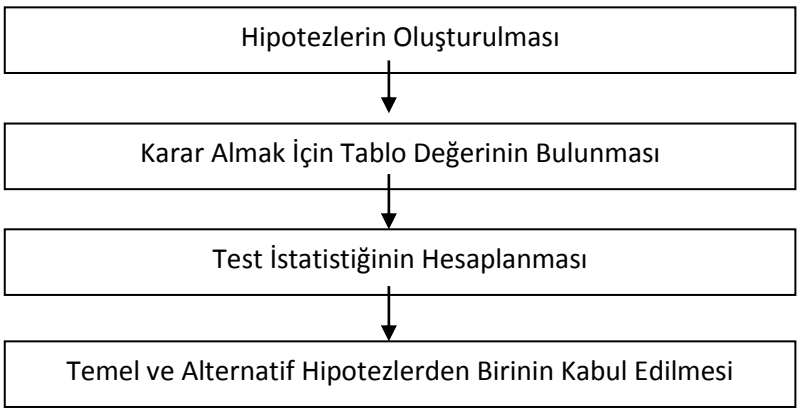
Bir hipotezin ya doğru ya da yanlış olacağı açıktır. Gerçeği öğrenme için akla gelebilecek ilk yol, hipotezle ilgili kitledeki bütün birimlerde değişken değerini öğrenmek yani tamsayımı yapmaktır. Ne var ki, daha önce de belirtildiği gibi bu yol çoğu zaman imkânsızdır. Bunun yerine anakütleden rasgele olarak seçilmiş belli bir örneklemdeki birimler incelenir ve bu örneklemden hareketle örneklem ile anakütle arasındaki farkın hoş görülüp görülmeyeceği araştırılır. Böylece hipotezin geçerli olup olmadığı hakkında bir karara varmaya çalışılır.

Örneklem istatistiklerinden yararlanarak bir hipotezin geçerli olup olmadığını ortaya koyma işlemine istatistiksel hipotezlerin testi denir.

Bir bilimsel hipotezin oluşturulmasında aşağıdaki aşamaların izlenmesi gerekir.

Tablo.2.1

Bir Hipotezin Oluşum Aşamaları



Hipotez testlerinde esas itibariyle iki hipotez bulunmaktadır. Bu hipotezlerden biri mevcut durumu gösteren H_0 hipotezi diğeri ise mevcut olan durumdan sapmayı ifade eden H_1 hipotezidir.[39]

Hipotez testlerinin oluşturulması aşamasında bilinmesi gereken önemli kurallar bulunmaktadır. Bunlardan ilki her zaman H_0 hipotezinin test edilmesi gereğidir. Kabul veya reddedilen her zaman H_0 hipotezidir. Yine hipotez testlerinde anakütle parametrelerinin belli bir değere eşit olup olmadığı araştırıldığından her zaman anakütle parametrelerinin test edilmesi gerekmektedir.

Hipotez testlerinde dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli konu ise hipotezler için kullanılacak eşitlik ifadesinin her zaman H_0 hipotezi üzerinde bulunmasıdır. Bu özelliklere ilave olarak dikkat edilmesi gereken bir nokta da hipotezin ifade edilme biçiminin doğru yapılmasıdır.

Son olarak değinmemiz gereken önemli bir özellik de hipotezi kuran model kurucunun ortaya attığı iddia H_0 veya H_1 hipotezlerinin birinin üzerinde bulunabilir. Yani test edilen hipotez her zaman H_0 hipotezi üzerinde bulunmak zorunda değildir.

Hipotez testlerinde birinci tip hata α sembolüyle adlandırılmaktadır. H_0 hipotezi gerçekte doğru iken hatalı bir şekilde reddedilmesinden doğan olasılığı ifade etmektedir.

$$P\ (H_0 \text{ Red} / H_0 \text{ Doğru}) = \alpha \qquad (2.1)$$

olarak yazılabilir. Yine bu ifadeye bağlı olarak

$$P\ (H_0 \text{ Kabul} / H_0 \text{ Doğru}) = 1-\alpha \qquad (2.2)$$

olarak da yazılabilir.

Bu ifadelere göre α, birinci tip hata yapma olasılığını ifade ederken, $1-\alpha$ ise bu hatanın yapılmaması olasılığını ifade etmektedir.

[39] Fazıl Güler, a.g.e. , s.223

Diğer taraftan H_0 hipotezi gerçekte yanlış iken H_0 hipotezi kabul edilecek olursa yine yanlış bir karar verilmiş olacaktır. Bu hataya ise ikinci tip hata olan β hatası denilmektedir. Buna göre β hatası;

$$P\ (H_0 \text{ Kabul} / H_0 \text{ Yanlış}) = \beta \qquad (2.3)$$

olarak yazılacaktır. Bu ifadeye bağlı olarak ikinci tip hatanın ortaya çıkmama olasılığını da şu şekilde ifade edebiliriz;

$$P\ (H_0 \text{ Red} / H_0 \text{ Yanlış}) = 1\text{-}\beta \qquad (2.4)$$

olur.

Bu açıklamalarımızı aşağıda oluşturulmuş tablo da görebilmemizde mümkündür.

Tablo.2.2

Birinci ve İkinci Tip Hatalar

Varılan Sonuç	Gerçek Durum	
	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
H_0 Kabul	Doğru Karar (1-α)	II.Tip Hata (β)
H_0 Red	I.Tip Hata (α)	Doğru Karar (1-β)

Bu tabloda;

ß: Yanlış olan sıfır hipotezinin ret edilmeme olasılığını diğer bir deyişle II. tip hatayı,

α : doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığını diğer bir anlatımda I. tip hatayı

$1 - \alpha$: Testin güven seviyesi

1 – ß: Testin gücü

H_0 hipotezi yanlış olduğu durumlarda H_0 hipotezini reddetme olasılığı testin gücünü bize göstermektedir. Hipotez testi yapılırken, α önceden seçilir. Böylece red bölgesi hesaplanır. α için genellikle 0.01, 0.05 ve 0.10 alınır. α değerinin 0.01 ve 0.05 gibi küçük seçilmesinin nedeni, doğru olan bir hipotezi reddetme olasılığının olabildiğince küçük olmasının istenmesidir. Test istatistiğinin hesaplanmasından sonra hipotez hakkında iki farklı şekilde karar verilebilir:

- Test istatistiği ile tablo değeri karşılaştırılır.
- Test istatistiğine ilişkin p-değeri hesaplanır ve α ile karşılaştırılır (p-değeri ≤ α ise H_0 hipotezi reddedilir). Son aşamada hipotez hakkında verilen karar yorumlanır.

Hipotez testlerinde H_0 hipotezinin reddedilip edilemeyeceği hakkında bilgi edinmemizi sağlayan sayısal değer test istatistiği değeridir. Yine Z, F, t, χ^2 gibi test istatistikleri sonucunda elde edilen değerler bize test edilen hipotez hakkında karar vermemiz konusunda yardımcı olacaktır.

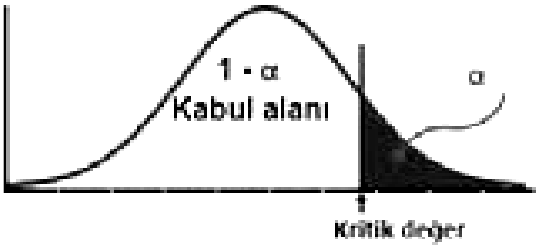
Hipotez testlerinde H_0 hipotezinin reddedildiği bölgeye kritik bölge denilmektedir. Kritik bölgeyi red bölgesi olarak da adlandırabiliriz. Tersi olarak H_0 hipotezinin kabul edildiği bölgeye de kabul bölgesi denilmektedir. Hipotez testlerinde kabul bölgesinin red bölgesinden ayrıldığı değere de kritik değer adı verilmektedir.

Karar problemlerinde parametre yalnızca bir tarafında bulunan uç değerlere bağlı ise bu tip testlere tek taraflı testler denir. Yani H_0 hipotezinin ret bölgesi test istatistiğinin örneklem dağılımının yalnız bir ucunda olacaktır.

Tek taraflı testte :

1- $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$

2- $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$



Şekil.4 Tek Taraflı Test Kriteri

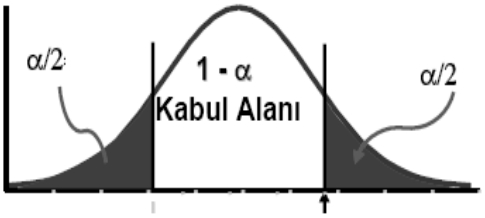
Testin kritik bölgesi hem küçük hem de büyük değerlerin her ikisini de kapsadığında; teste çift yönlü test denir.

Yani; H_0 hipotezinin ret bölgesi test istatistiğinin örneklem dağılımının her iki ucunda olacaktır.

Çift taraflı testte:

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ şeklindedir.



Şekil.5 Çift Taraflı Test Kriteri

Bilimsel araştırmalarda I. tip hataya, II. tip hataya nazaran daha çok dikkat edilmektedir. Hatta hipotez testlerinde genelde I.tip hatanın olup olmadığının kontrolü yapılmaktadır. I. tip hata yapmanın maksimum olasılığı bize testin anlamlılık düzeyini göstermektedir. Bu tür hataları azaltmak için anlamlılık düzeyini gösteren α değerinin küçültülmesi gerekir. Fakat α değerini küçültmek anakütle parametresinden daha uzak olan örneklem istatistiklerini de kabul bölgesi içersine

alınmasına neden olacaktır. Bu da karşıt hipotezin doğru olduğu halde kabul edilmemesi olasılığını yani β değerini arttırmaktadır.

Örneklem hacmini veri olarak kabul edersek α ve β tipi hatalardan sadece birini kontrol altında tutabiliriz. Her iki tip hatanın kontrolünü yapabilmek için örneklem hacminin gerekli olan seviyeye yükseltilmesi ile mümkündür. Bu nedenle öncelikle örneklem hacmi ve α belirlenir daha sonra β hesaplaması yapılır. Öncelikle α değerinin belirlenme nedeni hipotez testlerinde çoğunlukla α hatası üzerinde durulmasından kaynaklanmaktadır. Bir diğer nedeni de doğru olacak bir hipotezi red etme gibi bir yanılgıya düşülmemek istenmesinden dolayıdır.

Örneklem hacmini n ile gösterirsek α ve β arasındaki ilişki aşağıdaki gibi formüle edilebilir.[40]

$$P\left(n\frac{(\mu_0-\mu_1)}{\sigma_x} - t_\alpha\right) = 1-\alpha$$

Formasyondaki μ_0 ve μ_1 ifadeleri hipotezde kullanılan değerleri P ise α (birinci tip hata) veya β (ikinci tip hata) için kullanılan değerlerdir. Formülde örneğin, n sabit kabul edilirse β değerinin küçülebilmesi için α değerinin büyütülmesi gerekir. α değerini sabit kabul edersek bu durumda β değerini azaltabilmemiz için örneklem hacmini arttırmamız gerekecektir.

İstatistiksel testlerin seçiminden önce dikkat edilmesi gereken önemli bir konu testin istatistiksel gücüdür. Bir testin gücü H_0 hipotezinin gerçekten doğru olmadığı zamanlarda hipotezin reddedilmesidir. Yani bu ifadeyi şu şekilde de ifade edebiliriz.

İstatistiksel Gücü G ile gösterecek olursak,

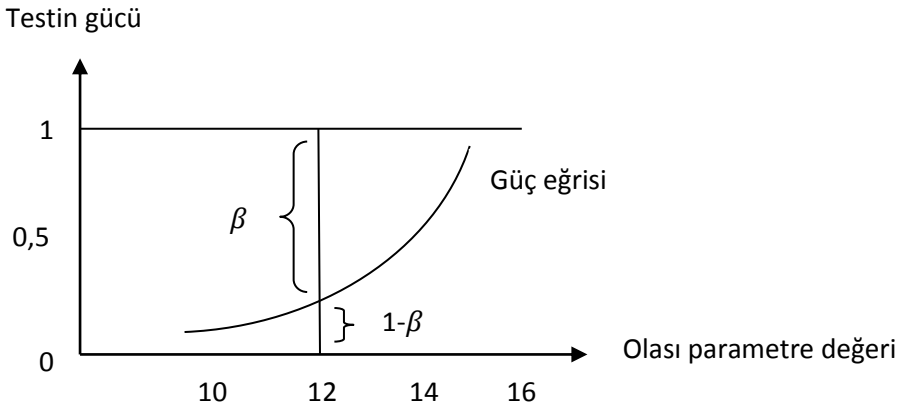
$G = 1-\beta$

şeklinde olacaktır.

[40] Mustafa Aytaç, a.g.e. s.353.

β değeri ile örneklem hacmi arasında her zaman ters bir orantı mevcuttur. Yani örneklem hacmini arttırdığımız zaman ikici tip hatayı (β) yapma olasılığımız azalacaktır. Bundan dolayıdır ki örneklem hacmi ile istatistiksel güç arasında doğru bir orantı bulunmaktadır. Herhangi bir noktadaki testin gücü, o parametre noktasında bulunan güç eğrisinin de değeri olarak ifade edilir.

Güç eğrilerinde düşey eksende testin gücünü 1-β değeri ile yatay eksende olası parametre değerlerini (μ, p gibi) değerlerle gösterirsek oluşacak şekli aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil.6 Güç Eğrisi

İstatistiksel testlerde testin gücü σ, α ve n değerlerinin bir fonksiyonu şeklindedir. Buradan hareketle eğer standart sapma azalıyorsa testin gücü artacaktır. Eğer α değeri azaltılırsa anlamlılık düzeyi artacağından dolayı testin gücüde artacaktır. Son olarak örneklem büyüklüğü n değeri arttırılacak olursa yine testimizin gücü daha fazla olacaktır.

2.2. ROC (Receiver Operating Characteristics) Eğrileri

Tanı testlerinin performanslarının ölçülmesinde kullanılan ROC analizi aynı zamanda birden fazla tanı testinin performansını da karşılaştırma şansı vermektedir. ROC analizin de araştırmacılar tanı testlerinin doğruluğunu tespit etmek için kullandığı en önemli ölçüt ROC eğrisi altında kalan alanı incelemektir. ROC eğrisi altında kalan bu alanın nasıl bulunabileceğine dair kullanılan yöntemler kesin testler ve tanı testlerinin sahip olduğu verilerin yapısına veya dağılımına göre farklılık göstermektedir. Elde edilen verilerin normal dağılıma sahip olduğu durumlarda parametrik yöntemler kullanılmakta aksi halde yani verilerin normal dağılıma sahip olmadığı durumlarda ise parametrik olmayan istatistikî yöntemler kullanılmaktadır.

ROC eğrileri ilk önce istatistiksel karar kuramında kullanılması için geliştirilmiş fakat daha sonraları sinyal algılama teorisine uygulanmıştır.[41] ROC eğrileri 1960'lı yılların ortalarına doğru gelindiğinde artık deneysel psikoloji çalışmalarında da çok fazla kullanılmaya başlanmış ve Lusted tarafından ilk olarak tıpta karar verme alanında kullanılmaya başlanmıştır.

ROC eğrisi altında kalan alanın yorumunu şu şekilde yapılabilir:

ROC eğrisi (0,0) ile (1,1) noktaları arasında yer alan bir eğridir. Bu eğri altında kalan alan 0 ile 1 arasında değişen değerler almaktadır. Örneğin bir sağlıklı birey ile bir hasta birey üzerinde çalışma yapıldığını düşünürsek ROC eğrisi altında kalan alan hasta olan bireyin tanı testi sonucunun daha pozitif bir değer alması olasılığını göstermektedir. Bu nedenle ROC eğrisi altında kalan alanın 1 değerine yakın olması üzerinde çalışma yapılan deneye uygulanan testin gücünün daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Eğer ROC eğrisi altında kalan alanın değeri 0,5 ise bu durumda biri ROC eğrisinin (0,0) noktasından (1,1) noktasına çizilen bir doğru şeklini alacaktır ki bu testin gücü hakkında bilgi alabileceğimiz en kötü durumdur. Böyle bir durumda testin ayrımsama gücü olmadığı anlaşılmaktadır. Söz konusu

[41] Metz, Herman, B.A, Shen, J. Maximum Likehood Estimation Of Receiver Operating Characteristic (ROC) Curves From Continuously-Distributed Data, Statistics in Medicine, 1998, s.17

değerin 0.975 ve daha üstü bir değere sahip olması ise mükemmel olarak düşünülmektedir.

Tanı testlerinin gücünü ölçmek ve en iyi kesim noktasına karar verebilmek için veya birden fazla tanı testinin gücü arasında karşılaştırma yapabilmek için kullanılan ROC analizine ilişkin yöntemler, tanı testleri ve kesin testlerinin veri yapısındaki farklılıklara göre değişiklik göstermektedir. Daha çok kullanılan yöntemler kesin test iki sonuçlu (hastalık var – hastalık yok şeklinde), tanı testlerinin ise iki sonuçlu olup nominal, ordinal veya sürekli veri yapısına sahip olduğu durumlar için geçerli olmaktadır. Bunun yanında kesin testin de nominal, ordinal veya sürekli veri yapısına sahip olması ya da tanı testlerinin sürekli sonuçlu olup dağılımının nominal veya çarpık olması ya da belirli bir noktada yığılmış veri yapısına sahip olması da olası sonuçlar arasındadır.[42] Bu gibi durumlarda ROC eğrilerinin altında kalan alanın hesaplanması ve yapılacak çalışmaya ait hipotez testlerinin hazırlanmasında kullanılan yöntemler kesin testin veya tanı testinin yapısal özelliklerine göre farklılık gösterebilecektir.

Tanı testlerinde testin etkinliği testin seçiciliği ve duyarlılığı ile ölçülmektedir. Testlerde belirlenmiş her bir kesim noktası için seçicilik ve duyarlılık değerleri farklılık gösterebilecektir. Seçicilik, hastalığın olmadığı durumda tanı testinin sağlıklı bireyi hastalıksız olarak ayrımsama koşuludur. Duyarlılık ise hastalığın olması durumunda tanı testinin hastalığın varlığına işaret etme yeteneğidir. Bu bilgiler ışığında belirli bir kesim noktasında kesin testlere göre tanı testlerinin verdiği seçicilik ve duyarlılık değerlerinin nasıl hesaplandığını aşağıdaki tabloda belirtmeye çalışalım:

[42] Erkanli, Sung, Costello, Angold, Bayesian Semi-Parametric ROC Analysis, Stat Med, 2006, s.25

Tablo.2.3

Tanı Testleri ve Kesin Test Sonuçlarının Dağılımı

	Kesin Test Sonucu	
Tanı Testi Sonucu	Hastalık Var (H+)	Hastalık Yok (H-)
Test (T+)	a_{11}	b_{11}
Test (T-)	a_{12}	b_{12}
Toplam	n_1	n_0

a_{11} : Gerçekte hasta olanlara tanı testinin de hasta dediği denek sayısı

a_{12} : Gerçekte hasta olanlara tanı testinin sağlam dediği denek sayısı

b_{11} : Gerçekte hasta olmayanlara tanı testinin hasta dediği denek sayısı

b_{12} : Gerçekte hasta olmayanlara tanı testinin de sağlam dediği denek sayısı

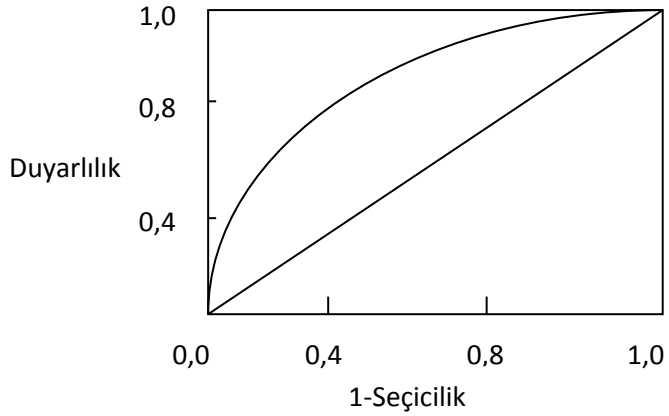
Doğru Pozitif Oranı (Duyarlılık) = P (T+ / H+) = a_{11} / n_1

Doğru Negatif Oranı (Seçicilik) = P (T- / H-) = b_{12} / n_0

Yanlış Pozitif Oranı (1-Seçicilik) = P (T+ / H-) = b_{11} / n_0

Yanlış Negatif Oranı (1-Duyarlılık) = P (T- / H+) = a_{12}/ n_1

Tanı testlerinin sonucunda elde edilen bulgular kesin test sonuçlarıyla karşılaştırıldığında elde edilecek sonuçların birebir aynı olmadığı görülebilir. Böyle durumlarda yanlış pozitif ve yanlış negatif değerlerin de hesaplanması söz konusu olmaktadır. ROC analizlerinde tanı testlerinden elde edilen olası tüm kesim noktalarından hesaplanan duyarlılık değerleri y ekseninde gösterilir. Bu değerlere karşılık gelen yanlış pozitif oran değerleri de x ekseninde olacak şekilde gösterilir ve oluşan eğride ROC eğrisi olarak adlandırılır.



Şekil.7 Duyarlılık değerlerine karşılık gelen 1-Seçicilik değerleri için oluşturulan ROC eğrisi

ROC analizlerinin kullanılmasında üzerinde durulması gereken en önemli amaçlar ise şu şekilde özetlenebilir;[43]

- Birden fazla tanı testinin güçlerinin birbirleriyle karşılaştırılması
- Bir tanı testinin ne ölçüde etkin olabildiğinin incelenmesi
- Belirlenmiş olan seçicilik ve duyarlılık değerlerinden yararlanılarak en uygun kesim noktasının belirlenmesi
- Uygun pozitiflik eşiğinin belirlenmesi
- Laboratuar sonuçlarının kalitesinin izlenmesi

olarak belirtebiliriz.

2.3. ROC Eğrisi Altında Kalan Alanı Bulmaya Yönelik Yöntemler

ROC eğrilerinin altında kalan alan bulunmaya çalışılırken araştırmaya dâhil edilen verilerin normal dağılım şartlarına uygun olmadığı durumlarda parametrik ve parametrik olmayan yöntemler arasında bir karşılaştırma yapılarak hangi yöntemin daha etkin olduğuna karar verilmektedir. Bu gibi durumlarda yapılması gereken işlemler konusunda parametrik ve parametrik olmayan yöntemler hakkında gerekli bilgileri şu başlıklar altında açıklayabiliriz.

[43] Akobeng, A.K, Understanding Diagnostic Tests 3: Receiver Operating Characteristic Curves, Acta Paediatrica, 2007, ss.644-647

2.3.1. Parametrik Yöntem

Tanı testlerinde kullanılan hasta ve sağlıklı bireylere ait verilerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının iki normal dağılımın ortak sentezinden oluşturulduğu varsayıma dayandırılmaktadır. Eğer hasta ve sağlıklı bireylere ait verilerin dağılımlarının ortalaması ve standart sapmalarını μ_0, μ_1 ve σ_0, σ_1 olarak gösterirsek bu ifadelere bağlı olarak iki sonuçlu ROC eğrisi için eşitliğimizi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz;

$$ROC(t) = \Phi(a+b\Phi^{-1}(t)) \quad , \ 0 \leq t \leq 1 \qquad (2.5)$$

$$a = \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma_1}$$

$$b = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

Bu denklemde kullanılan a ve b değerleri sırasıyla kesişim ve eğim parametrelerini, t değeri belirli bir yanlış pozitiflik oranını, Φ ise kümülatif standart normal dağılım fonksiyonunu belirtmektedir. Bu bilgiler ışığı altında ROC eğrisi altında kalan alanı ise şu şekilde hesaplamak mümkündür;

$$AUC = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right) \qquad (2.6)$$

ROC eğrilerinin altında kalan alana ait varyans tahmini ise şu şekilde yapılabilmektedir;

$$Var(AUC) = f^2\, Var(a) + g^2 Var(b) + 2\, fg\, Cov(a,b) \qquad (2.7)$$

burada n_0 =sağlıklı bireylerin sayısı ve n_1 = hasta bireylerin sayısını belirttiğini düşünürsek;

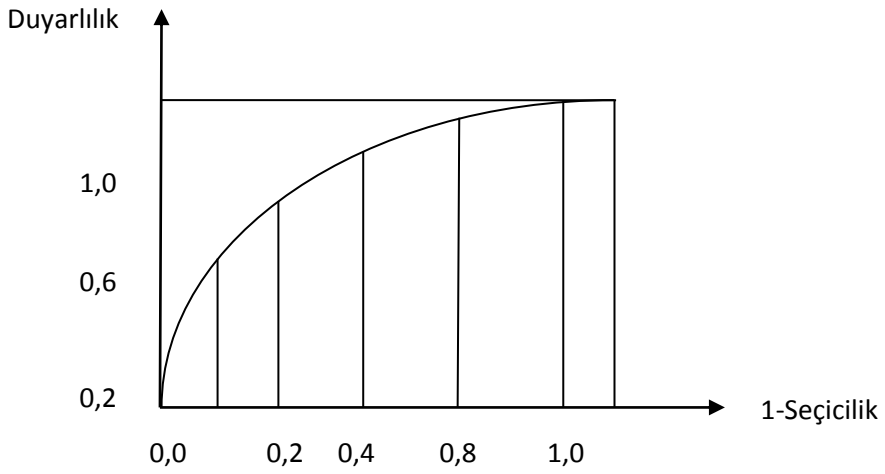
$$f = \frac{e^{\frac{-a^2}{2(1+b^2)}}}{\sqrt{2\pi(1+b^2)}} \qquad g = \frac{ab\, e^{a/2(1+b^2)}}{\sqrt{2\pi(1+b^2)^3}} \qquad (2.8)$$

$$Var(a) = \frac{n_1(a^2+2)+ 2n_0b^2}{2n_0n_1} \qquad Var(b) = \frac{(n_0+ n_1)b^2}{2n_0n_1} \qquad (2.9)$$

$$Cov(a,b) = \frac{ab}{2n_0} \quad \text{şeklinde ifade edilebilir.} \qquad (2.10)$$

2.3.2. Parametrik Olmayan Yöntem

Üzerinde araştırma yapılan bir veri setinin normal dağılıma sahip olmadığı durumlarda ROC eğrisini oluşturan noktaların birleştirilmesi sonucunda ortaya çıkan geometrik şekillerin alanları toplanarak ROC eğrisinin altında kalan alan hesaplanmaktadır. Bu oluşumu aşağıdaki şekil yardımı ile gösterebiliriz.



Şekil.8 ROC eğrisinin altında kalan geometrik şekillerin alanlarının toplanması sonucunda elde edilen parametrik olmayan alan

Parametrik olmayan bu yönteme eş değerde olan diğer bir yaklaşım ise Mann-Whitney yaklaşımıdır. Bu yöntemde X ve Y değerleri hasta ve sağlıklı bireylere ait tanı testi sonuçlarını temsil eden rassal değişkenler olarak düşünülürse;[44]

M = Araştırmadaki hasta birey sayısı

N = Araştırmadaki sağlıklı birey sayısı

Hasta bireylere ilişkin tanı testi sonuçları: X_1.....X_M

Sağlıklı bireylere ilişkin tanı testi sonuçları: Y_1.....Y_N olmak üzere;

ROC eğrisi altında kalan alan;

$$(\text{AUC}) = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\ \sum_{j=1}^{N}\ \text{U}\ (X_i\ ,\ Y_j) \qquad (2.11)$$

[44] Bradley A.P, The Use Of The Area Under The ROC Curve In The Evalution Of Machine Learning Algorithms, Pattern Recognition, 1997, ss.1145-1149

Yüksek değerlerin hastalığın varlığına işaret ettiği varsayımı altında;

$$U(X,Y) = \begin{cases} 0, & X < Y \\ \frac{1}{2}, & X = Y \\ 1, & X > Y \end{cases} \quad (2.12)$$

ROC eğrisi altında kalan alana ait varyans ise aşağıdaki gibi olacaktır;

$$\text{Var}(\text{ AUC }) = \frac{AUC\,(1-AUC)+(M-1)(Q_1-AUC^2)+(N-1)(Q_2-AUC^2)}{MN} \quad (2.13)$$

$$Q_1 = \frac{AUC}{2-AUC}$$

$$Q_2 = \frac{2AUC^2}{1+AUC}$$

Burada;

Q_1 rassal olarak seçilmiş ve hasta olduğu bilinen iki bireyin, sağlıklı olduğu bilinen bir bireyden daha yüksek bir değer alma olasılığını,

Q_2 ise rassal olarak seçilen ve sağlıklı olduğu bilinen iki bireyin, hasta olduğu bilinen bir bireyden daha düşük değer alma olasılığını ifade etmektedir.[45]

[45] Zhou, Obuchowski, McClish, Statistical Methods in Diagnostic Medicine, New York: Willey-Interscience, 2002, s.29

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.MONTE CARLO SİMÜLASYON ANALİZİ İLE BİST-100 HAREKETLERİNİN İZLENMESİNE YÖNELİK UYGULAMA

Günümüzde finansal piyasalarda yatırım yapan yatırımcıların birçoğu görsel ve yazılı haber kaynaklarını takip etmekte, finansal piyasalarda uzman kişilerin yatırımcılara yönelik sunduğu bilgiler ışığında işlemler yapmaktadır. Yine finansal piyasalarla ilgili işlemlere yönelik, piyasa hareketlerinin hangi yöne gidebileceği konusunda da akademik olarak yürütülen birçok çalışma yapılmaktadır. Özellikle hisse senetlerinin fiyatlarının nasıl davranışlar sergilediği, fiyat değişimlerinin dağılımları, piyasadaki olaylar karşısındaki hisse senetlerinin tepkisi ve oynaklığı gibi konular üzerine tahminler yapılması akademik çalışmalarda önemli bir yer teşkil etmektedir.

Finansal piyasalarının karmaşık bir yapıda olması hisse senetlerinin davranışlarının incelenmesini de zorlaştırmaktadır. Bu konu akademisyenlerin yanı sıra mühendislerin, fizikçilerin ve tıp alanında çalışmalarını yürüten bilim adamlarının da ilgi konusu olmuştur. Bu nedenle söylenebilir ki finansal piyasalardaki fiyat hareketlerinin tahmini konusunda Yapay Sinir Ağları, Genetik-Algoritma, Kaos teorisi gibi yapılar yoğun olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın yapılış amacı BİST-100'de işlem gören hisse senetlerinin fiyat davranışlarının Monte Carlo Simülasyon tekniği yardımı ile olumlu sonuçların elde edilip edilemediğinin araştırılmak istenmesidir.

Monte Carlo Simülasyon Analizinin daha iyi anlaşılabilmesi için BİST-100'e ilişkin uygulama aşamamıza geçmeden önce her bir adımın rahatlıkla anlaşılabilmesi için tüm işlemlerin hangi sıra ile yapıldığını gösteren bir örnek simülasyon yaparak konuya girmek daha verimli olacaktır.

Seba Oto Şirketi'nin CEO'su satmış oldukları BMW marka otomobillerin son 180 aylık satış kayıtlarını inceleyerek önümüzdeki üç aylık satış miktarlarını tahmin etmek istemektedir. Bunun için öncelikle 180 aylık gerçekleşmiş satış sonuçlarına bakarak tablo 3.1'deki bulgulara ulaşmıştır.

Satış Sayısı	Gerçekleşme Sayısı	Olasılık
10	45	0.250
20	35	0.194
30	30	0.167
40	20	0.111
50	24	0.133
60	16	0.089
70	10	0.056

Tablo 3.1 Seba Oto Şirketi'nin Satış Sayıları ve Olasılıkları

Tablo 3.1'deki bilgilere bakarak ikinci sütundaki gerçekleşme sayılarını inceleyen şirket CEO'su 180 aylık zaman dilimdeki belirli satış sayılarının kaç kez gerçekleştiğini görmektedir. Tablonun üçüncü sütununda yer alan olasılıklar ise belirli bir satış sayısının, toplam gerçekleşme sayısına bölünmesi ile bulunmaktadır. Örneğin aylık 10 adet satış gerçekleştiğinde, geçmiş 180 aylık dönemde 10 adet satışın gerçekleştiği ay sayısı 45 olmuştur. Bu durumda olasılık ise 45/180'den 0.250 olarak bulunmuştur.

Simülasyon sürecine başlayabilmek için bulunan olasılık dağılımlarının, birikimli olasılık dağılımlarına dönüştürülmesine ihtiyaç duyulacaktır. Bu işlem rasgele sayı aralıklarının belirlenmesi dolayısıyla da rasgele değişkenlere değerler verilmesi için gereklidir. Tablo 3.1'deki veriler kullanılarak birikimli olasılık dağılımlarına Tablo 3.2'deki gibi ulaşılacaktır.

Satış Sayısı	Olasılık	Birikimli Olasılık
10	0.250	0.250
20	0.194	0.444
30	0.167	0.611
40	0.111	0.722
50	0.133	0.855
60	0.089	0.944
70	0.056	1.000

Tablo 3.2 Seba Oto Şirketi İçin Birikimli Olasılıklar

Birikimli olasılık değerlerinin hesaplanması işlemine olasılık sütunun ilk sütunundan başlanır. Herhangi bir satırda yer alan olasılık, kendinden daha önce gelen satırdaki olasılık değerleriyle toplanarak birikimli olasılıklara ulaşılmaktadır. Birikimli olasılık dağılımındaki olasılık değerleri 0 ile 1 arasında değerler alabileceğinden, 0 ile 1 arasında üretilecek rastgele sayıların verilen olasılık dağılımlarına uygun olarak rastgele değişkenlerin değerleri belirlenebilir. Bunun için birikimli olasılık dağılımları kullanılarak rastgele sayı aralıkları belirlenmelidir. Tablo 3.2'deki verilerden yola çıkarak Tablo 3.3'de hazırlanan rasgele sayı aralıkları gösterilmektedir.

Satış Sayısı	Olasılık	Birikimli Olasılık	Rasgele Sayı Aralığı
10	0.250	0.250	0000-2499
20	0.194	0.444	2500-4439
30	0.167	0.611	4400-6109
40	0.111	0.722	6110-7219
50	0.133	0.855	7220-8549
60	0.089	0.944	8550-9439
70	0.056	1.000	9440-9999

Tablo 3.3 Seba Oto Şirketi Rasgale Sayı Aralıkları

Rasgele sayı aralıkları, birikimli olasılık değerlerine uygun olarak hazırlanmaktadır. BMW marka otomobile olan talebin on birim olmasının birikimli olasılığı 0.250'dir. Dolayısı ile dört basamaklı rasgele sayı kullanılacağı varsayımı altında, 0000-9999 aralığında on bin tane rasgele sayı kullanılacaktır ve bu olasılığa denk gelen rasgele sayı sayısı on bin sayısının 0.25'i olacak şekilde 2500 tane olacaktır ve on birimlik talebe karşılık gelen rasgele sayı aralığı 0000-2499 olacaktır.

Rastgele sayı aralıkları da bulunduktan sonra yapılması gereken işlem artık rasgele sayılar üretmektir. Önümüzdeki üç aylık süreçte şirket CEO'su satış miktarlarını tahmin etmek istiyordu. Üç aylık tahmin yapılacağı için üç tane rasgele sayıya ihtiyaç duyulacaktır. Bu rasgele sayıların 0899, 2359 ve 6412 olduğunu varsayarsak, Tablo 3.3'de bu sayılara denk gelen rasgele sayı aralığına bakıldığında satış sayılarının 10, 10 ve 40 birim olacağı tahmin edilmiş olacaktır.

3.1. Monte Carlo Simülasyon Analizinin BİST-100 Üzerine Uygulaması

BİST-100 kapanış değerlerinin Monte Carlo Simülasyonu ile incelenmesi için son dokuz yıllık veriler İMKB'nin internet sayfasından alınan kapanış verileri alınacak ve geçmiş yıllara ait fiyat verilerinden yararlanılarak 2014 yılı sonuna ait kapanış değeri simülasyon yöntemi kullanılarak tahmin edilmeye çalışılacaktır.

Simülasyon uygulaması sürecinde dikkate alınması gereken bazı varsayımlar bulunmaktadır. BİST-100 verileri üzerinde yapılacak uygulama için de bu varsayımları dikkate alarak çalışma gerçekleştirilecektir.

- ✓ Monte Carlo Simülasyonunun yapılabilmesi için öncelikle belirli aralıklarda gerçekleşen verilerin olasılık değerlerinin hesaplamasının yapılabilmesi için bize kolaylık sağlaması açısından veriler bin birimlik artış veya azalışlara göre gruplandırılacaktır. Yani olasılıklar belirlenirken, gerçekleşmiş kapanış değerleri hesaplama kolaylığı açısından kapanış değeri aralıklarının başlangıcını ve sonunu oluşturan sayıların aritmetik ortalamasına

dönüştürülecektir. Mesela, 75,000-76,000 aralığındaki kapanış değeri rakamları, 75,142 veya 75862,75999 olarak dahil edilecektir.

- ✓ Simülasyon uygulamasında her ayın kapanış değerlerini tahmin etmek için, dokuz rasgele sayı kullanılacak ve 2014 yılı tahmini kapanış rakamı, elde edilecek olan dokuz kapanış değerinin aritmetik ortalaması alınarak 2014 yıl sonu kapanış değerinin tahmini yapılacaktır. Kullanılacak olan rasgele sayılar Excel programı yardımı ile üretilecek [46] ve ilk satır – ilk sütundaki rasgele sayıdan başlanarak sırasıyla ilk satırdaki sayılar bitirilecek ve daha sonra bir alttaki satıra geçilecektir.

- ✓ Simülasyon zamanı aylık birimler halinde ilerletilecek ve birinci dönem birinci aya ilişkin kapanış değerleri yapıldıktan sonra sırasıyla diğer aylara geçilecektir.

Bu varsayımlar altında simülasyon yöntemi kullanarak yapılacak kapanış değerinin tahminini yapabilmek için aşağıdaki işlemler yapılacaktır.

- ✓ Gerçekleşmiş olan kapanış rakamları dönemler itibariyle 2005-2013 yılları arasında kalan kapanış rakamlarının on iki aylık dönemler itibariyle olasılıkları belirlenecektir.

- ✓ Birinci aşamada belirlenmiş olan olasılıkların birikimli olasılıkları hesaplanacak ve bu işlem sonrasında rasgele sayı aralıkları belirlenebilecektir.

- ✓ Excel programıyla elde edilen bu rasgele sayılar kullanılarak kapanış değerleri için tahminler yapılacaktır.

- ✓ Elde edilmiş olan kapanış değeri tahminleri rakamları sonucunda 2014 yıl sonu kapanış değeri tahmini olarak belirlenecektir.

[46] Excel programıyla rasgele sayı üretimi: Excel sayfası → fonksiyon ekle → matematik ve trigonometri → S_Sayı_Üret.

BİST-100 Endeksinin 2005-2013 yılları arasındaki aylık kapanış rakamları tablo 3.4'deki gibidir.

	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005
Ocak	78.783	57.171	63.278	54.650	25.934	42.697	41.182	44.590	27.330
Şubat	79.333	60.721	61.283	49.705	24.026	44.776	41.431	47.015	28.396
Mart	85.899	62.423	64.434	56.538	25.764	39.015	43.661	42.911	25.557
Nisan	86.046	60.010	69.250	58.959	31.651	43.468	44.984	43.880	23.591
Mayıs	85.990	55.099	63.046	54.384	35.003	39.969	47.081	38.132	25.236
Haziran	76.294	62.543	63.269	54.839	36.949	35.089	47.093	35.453	26.957
Temmuz	73.377	64.259	62.295	59.866	42.641	42.200	52.824	36.067	29.615
Ağustos	66.394	67.368	53.946	59.972	46.551	39.844	50.198	37.285	30.908
Eylül	74.486	66.396	59.693	65.774	47.910	36.051	54.044	36.924	33.333
Ekim	77.620	72.529	56.061	68.760	47.184	27.832	57.615	40.582	31.964
Kasım	75.748	73.058	54.517	65.350	45.350	25.715	54.213	38.168	38.088
Aralık	67.801	78.208	51.266	66.004	52.825	26.864	55.538	39.117	39.777

Tablo 3.4. Bist-100 Endeksinin 2005-2013 yılları arasındaki aylık kapanış değerleri

Tablo 3.4'ün hazırlanmasından sonra geçmiş kapanış değerlerine ilişkin olasılıklar hesaplanabilecek ve Monte Carlo Simülasyon yöntemi kullanılarak 2014 yılı tahmini kapanış değeri elde edilebilecektir.

Tablo 3.4'deki kapanış verilerine ait olasılık dağılımlarının bulunabilmesi için verilerin hangi aralıklara düştüklerinin belirlenmesi gerekmektedir. Aralıkların belirlenmesi aşamasında son dokuz yıllık aylık kapanış değerlerinden en küçük değerinden başlanacaktır. Bu en küçük değer bizim başlangıç noktamızı oluşturacaktır. Tabloda yer alan en küçük aylık kapanış değerinin Mayıs 2005'te gerçekleşen 23,591 değeridir. Dolayısıyla belirlenecek olan ilk aralık değerimiz 23,000-24,000 aralığı olacak ve varsayımsal olarak bin birimlik artışlarla diğer aralıklar belirlenecektir.

Aralıkların belirlenmesinden sonraki aşamamız tablodaki kapanış değerlerinin incelenerek her bir aralığa kaç tane rakamın düştüğü ve bu sayede kaç defa o aralığa denk gelen aylık kapanış değerinin olduğu bulunacaktır. Simülasyon

uygulamasına başlamadan önce yapmış olduğumuz varsayım gereği 23,000-24,000 aralığındaki her rakam 23,500 olarak kabul edilecektir.

Bu varsayım gereği düzenlemeler yapıldığında tablo 3.5'deki oluşum elde edilecektir.

Aylık Kapanış Değeri Aralıkları	Aylık Kapanış Değeri	Gerçekleşmiş Aylık Kapanış Değerleri						Gerçekleşme Sayısı
23000-24000	23500	23591						1
24000-25000	24500	24026						1
25000-26000	25500	25236	25557	25715	25764	25934		5
26000-27000	26500	26864	26957					2
27000-28000	27500	27330	27832					2
28000-29000	28500	28396						1
29000-30000	29500	29615						1
30000-31000	30500	30908						1
31000-32000	31500	31651	31964					2
32000-33000	32500							
33000-34000	33500	33333						1
34000-35000	34500							
35000-36000	35500	35003	35089	35453				3
36000-37000	36500	36051	36067	36924	36949			4
37000-38000	37500	37285						1
38000-39000	38500	38088	38132	38168				3
39000-40000	39500	39015	39117	39777	39844	39969		5

40000-41000	40500	40582						1
41000-42000	41500	41182	41431					2
42000-43000	42500	42200	42641	42697	42911			4
43000-44000	43500	43468	43661	43880				3
44000-45000	44500	44590	44776	44984				3
45000-46000	45500	45350						1
46000-47000	46500	46551						1
47000-48000	47500	47015	47081	47093	47184	47910		5
48000-49000	48500							
49000-50000	49500	49705						1
50000-51000	50500	50198						1
51000-52000	51500	51266						1
52000-53000	52500	52824	52825					2
53000-54000	53500	53946						1
54000-55000	54500	54044	54213	54384	54517	54650	54839	6
55000-56000	55500	55099	55538					2
56000-57000	56500	56061	56538					2
57000-58000	57500	57171	57615					2
58000-59000	58500	58959						1
59000-60000	59500	59693	59866	59972				3
60000-61000	60500	60010	60721					2
61000-62000	61500	61283						1
62000-63000	62500	62295	62423	62543				3
63000-64000	63500	63046	63269	63278				3

64000-65000	64500	64259	64434					2
65000-66000	65500	65350	65774					2
66000-67000	66500	66004	66394	66396				3
67000-68000	67500	67368	67801					2
68000-69000	68500	68760						1
69000-70000	69500	69250						1
70000-71000	70500							
71000-72000	71500							
72000-73000	72500	72529						1
73000-74000	73500	73058	73377					2
74000-75000	74500	74486						1
75000-76000	75500	75748						1
76000-77000	76500	76294						1
77000-78000	77500	77620						1
78000-79000	78500	78208	78783					2
79000-80000	79500	79333						1
80000-81000	80500							
81000-82000	81500							
82000-83000	82500							
83000-84000	83500							
84000-85000	84500							
85000-86000	85500	85899	85990					2
86000-87000	86500	86046						1

Tablo 3.5. Bist-100 Endeksi 2004-2014 Yılları Arası Aylık Kapanış Değerler Aralıkları

Tablo 3.5'in hazırlanmasından sonra yapılacak işlem 2013 yılı aylık kapanış rakamlarının incelenmesidir. Varsayımlar gereği mantıksal bir gerçeklik yakalamak adına son iki yılın aylık kapanış değerlerinin en küçük değeri olan 55,099 değeri ilk değerimizi oluşturacaktır. Dolayısıyla hesaplamalarımıza 55,500 değerinden başlanacaktır. Örneğin 23,500 kapanış değerinin gerçekleşme sayısı 1'dir. Ancak varsayımımız gereği 23,500 değeri hesaplamaya dâhil edilmeyecektir. Tablo 3.5 incelendiğinde görülebileceği gibi 55,500 değerinden büyük ve gerçekleşme sayısı sıfır olan ilk kapanış değerimiz 70,500'dür. Dolayısıyla 23,500 kapanış değerinin gerçekleşme sayısını 70,500 kapanış değerinin gerçekleşme sayısına ilave edilecektir. 55,500 kapanış değerinden küçük bütün değerlerin gerçekleşme sayıları aynı şekilde aktarılacaktır. Fakat tabloda gerçekleşme sayısı sıfır olan hiçbir kapanış değeri kalmamasına rağmen yine de hesaplamalara dâhil edilecek bütün sayıların gerçekleşme sayıları aktarılamamışsa yeni sayı aralıkları tabloya eklenecektir ve aktarma işlemi bu kapanış değerleri üzerinden yapılacaktır.

Örneğin, tablo 3.5'de 55,500 değerinden küçük 32 değerden 29'unun gerçekleşme sayıları vardır ve bu değerler tabloya aktarılması gerekmektedir. Hâlbuki 55,500 değerinden büyük ve gerçekleşme sayısı sıfır olan 7 değer bulunmaktadır. Dolayısıyla aktarılması gereken 8. En küçük değer olan 30,500'ün gerçekleşme sayısı, eklenecek yeni değer olan 87,500'e aktarılacaktır. Bu işlem bütün gerçekleşme sayıları aktarılana kadar devam edecektir. Bu doğrultuda tablo 3.6'da elde edilen yeni görüntü şu şekilde olacaktır. [47]

Tablo 3.6 aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Bu aşamadan sonra bulunan değerlerin olasılık değerleri bulunarak 2014 yılı sonunda elde edilecek tahmini kapanış değeri hesaplanacaktır.

[47] Gerçekleşme sayısı sıfır olup aktarım yapılan değerler ve eklenen yeni değerler koyu renklerle gösterilmiştir.

Aylık Kapanış Değerleri	Gerçekleşme Sayısı	Aylık Kapanış Değerleri	Gerçekleşme Sayısı
55500	2	85500	2
56500	2	86500	1
57500	2	**87500**	1
58500	1	**88500**	2
59500	3	**89500**	1
60500	2	**90500**	3
61500	1	**91500**	4
62500	3	**92500**	1
63500	3	**93500**	3
64500	2	**94500**	5
65500	2	**96500**	1
66500	3	**97500**	2
67500	2	**98500**	4
68500	1	**99500**	3
69500	1	**100500**	3
70500	1	**101500**	1
71500	1	**102500**	1
72500	1	**103500**	5
73500	2	**104500**	1
74500	1	**105500**	1
75500	1	**106500**	1
76500	1	**107500**	2
77500	1	**108500**	1
78500	2	**109500**	6
79500	1		
80500	5		
81500	2		
82500	2		
83500	1		
84500	1		

Tablo 3.6 2005-2013 Yılları Bist-100 Aylık Kapanış Değerleri ve Gerçekleşme Sayıları

Şimdi bu aşamadan sonra tablo 3.6'daki verileri kullanarak sırasıyla olasılıklar, birikimli olasılıklar ve rasgele sayı aralıkları belirlenecek ve bu değerlerde yine aşağıda oluşturmuş olduğumuz tablo 3.7'de görüldüğü gibi oluşacaktır.

Aylık Kapanış Değerleri	Gerçekleşme Sayısı	Olasılık	Birikimli Olasılık	Rasgele Sayı Aralığı
55500	2	0,018519	0,01852	0,00000-0,01851
56500	2	0,018519	0,03704	0,01852-0,03703
57500	2	0,018519	0,05556	0,03704-0,05555
58500	1	0,009259	0,06481	0,05556-0,06480
59500	3	0,027778	0,09259	0,06481-0,09258
60500	2	0,018519	0,11111	0,09259-0,11110
61500	1	0,009259	0,12037	0,11111-0,12036
62500	3	0,027778	0,14815	0,12037-0,14814
63500	3	0,027778	0,17593	0,14815-0,17592
64500	2	0,018519	0,19444	0,17593-0,19443
65500	2	0,018519	0,21296	0,19444-0,21295
66500	3	0,027778	0,24074	0,21296-0,24073
67500	2	0,018519	0,25926	0,24074-0,25925
68500	1	0,009259	0,26852	0,25926-0,26851
69500	1	0,009259	0,27778	0,26852-0,27777
70500	1	0,009259	0,28704	0,27778-0,28703
71500	1	0,009259	0,29630	0,28704-0,29629
72500	1	0,009259	0,30556	0,29630-0,30555
73500	2	0,018519	0,32407	0,30556-0,32406
74500	1	0,009259	0,33333	0,32407-0,33332
75500	1	0,009259	0,34259	0,33333-0,34258
76500	1	0,009259	0,35185	0,34259-0,35184
77500	1	0,009259	0,36111	0,35185-0,36110
78500	2	0,018519	0,37963	0,36111-0,37962
79500	1	0,009259	0,38889	0,37963-0,38888
80500	5	0,046296	0,43519	0,38889-0,43518
81500	2	0,018519	0,45370	0,43519-0,45369
82500	2	0,018519	0,47222	0,45370-0,47221
83500	1	0,009259	0,48148	0,47222-0,48147
84500	1	0,009259	0,49074	0,48148-0,49073
85500	2	0,018519	0,50926	0,49074-0,50925
86500	1	0,009259	0,51852	0,50926-0,51851
87500	1	0,009259	0,52778	0,51852-0,52777
88500	2	0,018519	0,54630	0,52778-0,54629
89500	1	0,009259	0,55556	0,54630-0,55555
90500	3	0,027778	0,58333	0,55556-0,58332
91500	4	0,037037	0,62037	0,58333-0,62036
92500	1	0,009259	0,62963	0,62037-0,62962
93500	3	0,027778	0,65741	0,62963-0,65740

94500	5	0,046296	0,70370	0,65741-0,70369
96500	1	0,009259	0,71296	0,70370-0,71295
97500	2	0,018519	0,73148	0,71296-0,73147
98500	4	0,037037	0,76852	0,73148-0,76851
99500	3	0,027778	0,79630	0,76852-0,79629
100500	3	0,027778	0,82407	0,79630-0,82406
101500	1	0,009259	0,83333	0,82407-0,83332
102500	1	0,009259	0,84259	0,83333-0,84258
103500	5	0,046296	0,88889	0,84259-0,88888
104500	1	0,009259	0,89815	0,88889-0,89814
105500	1	0,009259	0,90741	0,89815-0,90740
106500	1	0,009259	0,91667	0,90741-0,91666
107500	2	0,018519	0,93519	0,91667-0,93518
108500	1	0,009259	0,94444	0,93519-0,94443
109500	6	0,055556	1,00000	0,94444-0,99999

Tablo 3.7. 2005-2013 Yılları Bist-100 Endeksi Aylık Kapanış Değerleri İçin Rasgele Sayı Aralıkları

Tablo 3.7'nin de hazırlanmasından sonraki aşamada yapılacak işlem rasgele sayıların üretilmesi[48] ve bu rasgele sayılar aracılığı ile 2014 yılı kapanış değeri tahmin edilecektir. Varsayım gereği dokuz tane rasgele sayının aritmetik ortalaması alınacak ve bu değer 2014 yılına ait kapanış rakamı olacaktır. Her aya ait rasgele sayılar ve bu rasgele sayılar kullanıldığında elde edilecek olan aylık kapanış değerleri rakamları tablo 3.8'de gösterilmektedir.

Tablo 3.8 aşağıdaki gibi oluşmuştur. Bu tablodan da anlaşılabileceği gibi Monte Carlo Simülasyon Analizi sonucunda 2014 yılı kapanış değerinin tahmini olarak 84,667 olarak bulunduğu görülmektedir.

[48] Uygulamada bulunan rasgele sayılar Excel programı ile üretilmiştir ve tabloda uygun olan bölüme eklenmiştir.

	RS1	RS2	RS3	RS4	RS5	RS6	RS7	RS8	RS9	Rasgele 9 Sayının Değerinin Toplamı	Aritmetik Ort.
Ocak	104500	108500	90500	56500	62500	97500	67500	80500	63500	731500	81278
	0,89173	0,94221	0,57392	0,02570	0,12649	0,71594	0,25249	0,41200	0,15711		
Şubat	107500	83500	73500	97500	65500	85500	57500	56500	94500	721500	80167
	0,93404	0,47896	0,30910	0,72348	0,20302	0,50049	0,04109	0,02994	0,66335		
Mart	109500	91500	91500	92500	93500	62500	107500	97500	66500	812500	90278
	0,99271	0,59256	0,59139	0,62349	0,63548	0,13615	0,93490	0,72159	0,21956		
Nisan	103500	78500	86500	67500	100500	88500	85500	66500	98500	775500	86167
	0,84953	0,37170	0,51494	0,24854	0,80195	0,53995	0,49179	0,22430	0,73495		
Mayıs	98500	73500	96500	77500	103500	83500	91500	61500	105500	791500	87944
	0,76513	0,31831	0,70880	0,35460	0,88080	0,47760	0,60466	0,11644	0,90538		
Haziran	64500	96500	99500	80500	104500	94500	100500	57500	86500	784500	87167
	0,18581	0,70691	0,77516	0,40877	0,89101	0,69587	0,81081	0,04381	0,51827		
Temmuz	62500	78500	107500	75500	75500	97500	63500	92500	81500	734500	81611
	0,13664	0,36892	0,92652	0,35046	0,33724	0,73147	0,16339	0,62605	0,44798		
Ağustos	59500	61500	63500	67500	73500	82500	80500	73500	66500	628500	69833
	0,08137	0,11914	0,17395	0,25441	0,31653	0,46419	0,42584	0,31115	0,23747		
Eylül	98500	94500	80500	99500	94500	94500	99500	84500	90500	836500	92944
	0,74229	0,66758	0,40759	0,77009	0,69030	0,65933	0,79037	0,48612	0,56202		
Ekim	65500	66500	65500	91500	103500	94500	104500	62500	98500	752500	83611
	0,21219	0,22066	0,19880	0,60650	0,87794	0,69598	0,89768	0,14495	0,74839		
Kasım	106500	88500	103500	82500	59500	80500	84500	94500	73500	773500	85944
	0,91581	0,53398	0,85977	0,46815	0,08072	0,42864	0,48698	0,70054	0,30640		
Aralık	90500	62500	85500	100500	87500	82500	93500	89500	109500	801500	89056
	0,58295	0,12913	0,50590	0,81475	0,52522	0,46794	0,64555	0,54844	0,97010		
										9144000	**84667**

Tablo 3.8 2014 Yılı Bist-100 Endeksi Kapanış Değerinin Monte Carlo Simülasyon Yöntemi İle Tahmini

Elde edilen sonuçların gelecek yıllardaki kapanış değerlerini tahmin etmek amacıyla kullanılıp kullanılamayacağını belirlemek tahminin geçerliliği açısından önem arz etmektedir. Bu nedenle 2014 yılında Monte Carlo Simülasyon modeli ile simüle edilen kapanış değeri rakamlar ile gerçekleşen kapanış değeri rakamları Ki-Kare testi yardımı ile anlamlılığı araştırılmıştır.

2014 yılı kapanış değerleriyle ilgili Ki-Kare testimiz ve hipotezimiz aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

H_0= G=B (Gerçekleşen frekanslar ile beklenen frekanslar arasında anlamlı bir fark yoktur).

H_1= G=B (Gerçekleşen frekanslar ile beklenen frekanslar arasında anlamlı bir fark vardır).

Hipotez %1 anlamlılık düzeyinde, serbestlik derecesi = k-1= 12-1=11 olmak üzere test edilirse;

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(Bi-Gi)^2}{Gi} = \Sigma \frac{(81278-61858)^2}{61858} + \frac{(80167-62553)^2}{62553} + \ldots + \frac{(89056-85721)^2}{Gi}$$

= 25,252 bulunmuştur. %1 önem seviyesi v = 11 serbestlik derecesinde χ^2 tablo değeri 24,725 olduğundan

χ^2 tablo değeri < χ^2 hesaplanan değer olduğundan, H_0 hipotezi reddedilir. Yani gerçekleşen aylık kapanış değerleri ile simüle edilen aylık kapanış değerleri arasında anlamlı bir fark vardır. Gelecekteki tahminler için kullanılması uygun değildir.

SONUÇ

Finansal piyasalarda işlem yapan yatırımcıların yatırım kararlarını verirken üzerinde en çok düşündüğü konuların başında yatırım yaptığı piyasanın gelecekteki olası değişimlere ve bu değişimler sonucunda ortaya çıkabilecek sorunlara karşı hazırlıklı olmaktır. İyi hazırlanmış bir planlama ve kontrol süreci ile amaçlarını ortaya koyan yatırımcı bu amaçlara ulaşmak için yapması gerekenleri belirler ve yatırımı ona göre şekillendirir.

Tez çalışmamızda gelecekteki olası değişimlere hazırlıklı olabilmek adına Monte Carlo Simülasyon Yöntemini kullanarak tahmini bir model oluşturulmuştu. Fakat simülasyon modelleri ne kadar iyi hazırlanırsa hazırlansın kesin olarak sonuca ulaşmamızı garanti etmez. Örneğin planlama yapılmış süreç içerisinde çıkabilecek ekonomik bir kriz, siyasi bir gelişme, olası bir savaş tehdidi veya doğal bir afet gibi olayları bugünden görmemizi sağlayamazlar. Bize geçmiş verilerden yararlanarak kurulan model veya sistem üzerinde tahminlerde bulunmamıza ve sonuca veya sonuca en yakın olasılıklara veya alternatif diğer seçenekleri seçmemize olanak sağlar.

Borsa İstanbul'un 2014 yıl sonu aylık kapanış değeri eylül ayında BİST-100 72,000 puan seviyelerinde iken yapılan simülasyon modellemesi ile belirlenmişti. Model sonuçları ve 2014 yıl sonu kapanış değerleri karşılaştırıldığında şu sonuçlara ulaşılmıştır. Modelimizin 2014 yılı kapanış değeri olarak 84,667 puan seviyesi hedef puan olarak verilmişti. Gerçekleşen 2014 yılı kapanış değeri ise yaklaşık yüzde birlik bir sapma ile 85,721 seviyesinden gerçekleşmiştir. Ancak Ki-Kare testi sonuçları değerlendirildiğinde gerçekleşen değerler ile beklenen değerler arasında anlamlı bir farkın olduğu yani Monte Carlo Simülasyon yönteminin tek başına yeterli olmadığıdır.

Sonuç olarak tekrar hatırlatılmasında fayda olacağı gibi simülasyon modelleri ile BİST-100'de tek başına gelecek hakkında fikir sahibi olmaya çalışmak yanıltıcı olabilir. Bu nedenle elde edilen sonucun doğru olduğuna inanılıyorsa bile yalnızca simülasyon modeline bağlı kalınmamalı bunun yanında kullanılabilecek alternatif yöntemlerde bir arada kullanılarak tahmin yapılması daha sağlıklı sonuçlar elde edilmesine sebep olabilecektir.

KAYNAKÇA

Ahmet Öztürk, Yöneylem Araştırması, Bursa, Ekin Yayımcılık, 2004, ss.7-12

Akobeng, A.K, Understanding Diagnostic Tests 3: Receiver Operating Characteristic Curves, Acta Paediatrica, 2007, ss.644-647

Aybaba Hançerlioğulları, "Monte Carlo Simülasyon Metodu ve MNCP Kod Sistemi." Kastamonu Eğitim Dergisi. Vol.14, No.2 (Ekim 2006), s.545-550

Ayşe Kazan, Türkiye Ekonomisi İçin Bir Ekonometrik Model ve Simülasyon Çalışması, s.3

Bradley A.P, The Use Of The Area Under The ROC Curve In The Evalution Of Machine Learning Algorithms, Pattern Recognition, 1997, ss.1145-1149

Donner, C. Lawrence, J. Ramamoorthi, R. Hachisuka, T. Jensen, H.W. and Nayar, An empirical bssrdf model, ACM TOG, ss. 28-30, 2009.

Fazıl Güler, İstatistik Metodları ve Uygulamaları, İstanbul, Beta Basım Yayım Dağıtım, 2005, s.221-223

Frederick S.Hiller – Gerald J.Lieberman, Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill, Inc. , New York, 1995, s.18.

H.Öner Esen, İşletme Yönetiminde Sistem Yaklaşımı, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 1994, s.22

Haluk Erkut, Analiz Tasarım ve Uygulamalı Sistem Yönetimi, Yönetim Bilimleri Dizisi: 4, İstanbul, İrfan Yayımcılık, ss.299-300.

Haluk Erkut, Yönetimde Simülasyon Yaklaşımı, İstanbul, İrfan Yayımcılık, 1992, s.1-17

Hamdy A.Taha, Operations Research an Introductions, New York, Macmillan Publishing, 1987, s.665-696

Hkm Jeodezi, Jeonformasyon ve Arazi Yönetim Dergisi 2008/2 Sayı, 99 s.8

Jerry Banks, John S. Carson, Barry L.Nelson, Discrete-Event System Simülation, New Jersey, Printice Hall, 1996, s.4.

Law, Averill M., W. David Kelton, Simülation Modelling and Analysis, McGraw-Hill International Series, Industrial Series, Singapore: 2000, ss.367-369

Mehmet Şahin, Üretim Yönetiminde Simülasyon Analizi ve Uygulaması, Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayın No:194/124, Eskişehir, 1978, s.54

Michael Pidd, Computer Simülation In Management Science, John Wiley&Sons, Chichester, 1990, s.22

Munoz, A. Echevarria, J.I. Seron, F.J. Lopez-Moreno, J. Glencross, M. And Gutierrez, D., BSSRDF estimation from single images, Computer Graphics Forum, ss. 455–464, 2011.

Mustafa Aytaç, Matematiksel İstatistik, Ezgi Kitap Yayınları, Bursa, 2004, s.52

Mustafa Aytaç, Matematiksel İstatistik, Ezgi Kitap Yayınları, Bursa, 2004, s.302-353

Mustafa Sevüntekin, Ekonometrik Simülasyon Uygulamaları, Uludağ Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, Cilt: XIII, Sayı 2, Bursa, s.235

Nalan Cinemre, Yöneylem Araştırması, İstanbul, Beta Basım Yayım Dağıtım, 1997, s.475

Reuven Y.Rubenstein ve Dirk P.Kroese, Simülation and The Monte Carlo Method, 2. Basım, Newyork: Wiley and Sons, 2007, s.50-62

Robert C.Meier ve diğerleri, Simülation in Business and Economics, New Jersey, Printice Hall, 1969, s.1.

S. Dereich and F. Heidenreich, A multilevel Monte Carlo algorithm for L´evy-driven stochastic differential equations. Stochastic Processes and their Applications, ss.1565–1587, 2011.

Selahattin Güriş ve Şahamet Bülbül, Olasılık, İstanbul: M.Ü. Nihad Sayar Eğitim Vakfı Yayınları, 1995, s.524

S. Railsback and V. Grimm, Agent-based and Individual-based Modeling: A Practical Introduction, Princeton University Press, 2011.

T. Gudmundsson and H. Hult, Markov chain monte carlo for computing rare-event probabilities for a heavy-tailed random walk. Journal of Applied Probability, s.51, 2014.

Wayne L.Winston, Operations Research Applications and Algorithms, Duxbury Press, Wadsworth Pub. Comp. Belmont, California, 1994, s.5.

Wayne L.Winston, Operation Research Application and Algoritms, Kent Publishing Company, Boston, 1991, s.1115

Zhou, Obuchowski, McClish, Statistical Methods in Diagnostic Medicine, New York: Willey-Interscience, 2002, s.29