TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EMİRHAN HACIOĞLU

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ
ANA BİLİM DALI
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ
2012
EDİRNE

T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

EMİRHAN HACIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ

ANA BİLİM DALI

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ

2012

EDİRNE

T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR ve SABİT NOKTA TEOREMLERİ

EMİRHAN HACIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ

ANA BİLİM DALI

Bu tez 12.06.2012 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN

Doç. Dr. Ertan ARDA

Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmada metrik uzaylar üzerinde belirli koşulları sağlayan çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri incelendi ve bazı genellemeler yapıldı.

Birinci bölümde tek değerli ve çoğul değerli fonksiyonların sabit noktaları ile ilgili bilgiler verildi.

İkinci bölümde Hausdorff metrik uzayları ve özellikleri incelenip bu uzay üzerindeki daraltan dönüşümlerin sabit noktaları araştırıldı.

Üçüncü bölümde Fisher'in tanımladığı δ-uzaklık fonksiyonu yardımı ile çoğul değerli dönüşümlerin sabit noktaları incelendi ve çoğul değerli dönüşüm çiftleri için ortak sabit nokta teoremleri verildi.

Son bölümde ise çoğul değerli dönüşümler için genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri ile Caristi tipindeki çoğul değerli dönüşümler incelendi ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edildi.

ABSTRACT

In this study which consists of four chapters the fixed point theorems of multi-valued functions which satisfys several conditions on the metric spaces were examined and some generalizations were obtained.

In the first chapter, the knowledges about fixed points of single-valued and multi-valued functions were given

In the first second, Hausdorff metric spaces with properties and the fixed points of contraction mappings on this spaces were examined.

In the third chapter, the fixed points of multi-valued mappings with the help of δ-distance function defined by Fisher were examined and common fixed point theorems for pairs of multi-valued functons were obtained.

In the last chapter, fixed point theorems which generalized to multi-valued mappings with Caristi type multi-valued mappings were examined and some results were obtained.

ÖNSÖZ

Matematik eğitimimde ve bu çalışma süresince benden bilgi ve tecrübesini esirgemeyip, anlayış gösteren ilk önce değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ`ye ve bu süreçte her zaman destek olan Yrd. Doç. Dr. İlker ŞAHİN ve Yrd. Doç. Dr. Hakan KARAYILAN`a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

I. BÖLÜM / GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER 1

1.1 Giriş 1

1.2 Tek Değerli Fonksiyonların Sabit Noktaları 3

1.3 Çoğul Değerli Fonksiyonların Sabit Noktaları 5

II. BÖLÜM / HAUSDORFF METRİK UZAYLARI VE ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI 8

2.1 Hausdorff Metrik Uzayı 8

2.2 Daraltan Dönüşümler ve Nadler Sabit Nokta Teoremi 15

III. BÖLÜM / FISHER TİPİNDEKİ $\delta-$UZAKLIK FONKSİYONU İLE ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI 21

3.1 $\delta-$Uzaklık Fonksiyonu 21

3.2 δ-Uzaklık Fonksiyonu ile Sabit Nokta Teoremleri 25

3.3 Çoğul Değerli Dönüşüm Çiftleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri 30

IV. BÖLÜM / BİR d −METRİĞİ YARDIMIYLA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI 36

4.1 Çoğul Değerli Dönüşümlerin Yörüngesi Ve Yörüngesel Tamlık 36
4.2 Çoğul Değerli Dönüşümler İçin Genelleştirilmiş Sabit Nokta Teoremleri 37
4.3 Caristi Tipindeki Çoğul Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktalari 46

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ 58

I. BÖLÜM

GİRİŞ ve ÖN BİLGİLER

1.1 GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ `e bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ noktasına ***T `nin bir sabit noktası*** denir. Diğer bir deyişle $Tx = x$ eşitliğini sağlayan her bir $x \in X$ noktası T `nin sabit noktasıdır.

$Tx = x$ operatör denkleminin bir çözümünün varlığı ve kurulumunu ele alan problemler sabit nokta teorisinin önemli bir kısmını oluşturmaktadır.

Analize giriş derslerinden

"$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \to [a, b]$ tanımlı her sürekli fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde daima en az bir sabit noktasının var olduğu "

bilinmektedir

1912`de Brouwer ;

"$\mathbb{R}^n$ `nin kapalı birim yuvarından yine aynı kapalı birim yuvarı üzerine tanımlanan her sürekli dönüşümün bir sabit noktasının var olduğunu"

göstermiştir.

1930`da Schauder;

"A, bir Banach uzayının kapalı Konveks bir alt kümesi olmak üzere $f: A \to A$ sürekli dönüşümü için, eğer $\overline{f(A)}$ kompakt küme ise f`nin bir sabit noktası vardır"

teoremini vererek Banach uzayları üzerinde bir genelleme vermiştir.

Her ne kadar sabit nokta teorisi Brouwer ile başladığı bilinse de analizin önemli branşlardan biri olan sabit nokta teorisinin kökeni 19.yy son kısmında özellikle diferansiyel denklemleri üzerindeki çalışmalarda kullanılan yaklaşım yöntemlerine kadar dayanmaktadır. Burada kullanılan yaklaşım metotları Cauchy (1884), Liouville (1836), Lipschitz (1877), Peano (1885-1886-1889) ve özellikle Picard (1890) ile anılmaktadır. Gerçekte, ilk olarak Picard çalışmalarında sabit noktaya teorik bir yaklaşım sergilemiştir. 1922`de Stephan Banach, iddia edilen yaklaşımları soyut olarak ele alarak uygun koşullar altında sabit noktanın varlığını ve tekliğini kanıtlamıştır. Burada elde ettiği önemli sonuçlardan biride Picard iterasyonu ile elde edilen dizinin sabit noktaya yakınsamasıdır.

Sabit nokta ile ilgili çalışmalar temelde üç ayrı başlık altında toplanabilir;

1) Topolojik sabit nokta teorisi.

2) Metrik sabit nokta teorisi,

a) Tek değerli fonksiyonlar için sabit nokta teorisi,

b) Çoğul (küme) değerli fonksiyonlar için sabit nokta teorisi.

3) Ayrık sabit nokta teorisi.

Bunların ortaya çıkış teoremleri sırasıyla;

1) Brouwer sabit nokta teoremi

2) Banach sabit nokta teoremi

3) Tarski sabit nokta teoremi

olarak verilebilir.

Bu tezde metrik sabit nokta teoremine bağlı olarak küme değerli fonksiyonların sabit noktaları incelenecektir.

1.2 TEK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SABİT NOKTALARI

Bir fonksiyon verildiğinde onun kendi karakteristik özellikleri veya tanım kümesi üzerindeki koşullar fonksiyonun sabit noktasının varlığını garanti etmektedir.

Örneğin;

i) V bir vektör uzayı olmak üzere $T: V \to V$, $T(x) = x + a$ $(a \in V, a \neq 0)$ dönüşümünün hiç bir sabit noktası yoktur.

ii) $X = [0,2]$, $Y = [3,5]$ olmak üzere $T: X \to Y$ biçimindeki fonksiyonun hiçbir sabit noktası yoktur.

iii) $X = (0,1)$ olmak üzere $T: X \to X, T(x) = \frac{x}{3}$ fonksiyonun hiçbir sabit noktası yoktur.

iv) $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$, $I(x) = x$ birim fonksiyonu için X`in her elemanı sabit noktadır.

v) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2 - x$ ise 0 ve 2 noktaları T`nin sabit noktalarıdır.

vi) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ fonksiyonu için $(x, x) \in \mathbb{R}^2$ biçimindeki tüm noktalar T`nin sabit noktasıdır.

vii) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu için $x = 0$ T`nin tek bir sabit noktasıdır.

viii) $X = [0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$, $T(x) = \begin{cases} 1 \; ; \; x \in \mathbb{Q} \\ 0 \; ; \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonu için $x = 1$, T `nin tek bir sabit noktasıdır.

Bir fonksiyon verildiğinde onun sabit noktasının varlığı, fonksiyonun özelliklerinin yanı sıra fonksiyonun tanımlı olduğu kümenin yapısı üzerindeki koşullarla da yakından ilgilidir. Genel olarak dönüşümlerin sabit noktaları araştırılırken aşağıdaki noktalar göz önünde bulundurulur;

i) Verilen bir T fonksiyonunun en az bir sabit noktasının var olması için T ne tür koşulları sağlamalıdır?

ii) T `nin sabit noktası hangi koşullar altında tektir?

iii) T fonksiyonunun bir sabit noktasının varlığını garanti etmek için T`nin tanım kümesi üzerine hangi ek koşullar konulmalıdır?

iv) T fonksiyonu ile oluşturulan iterasyon dizisisin yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir?

1922`de S. Banach`ın vermiş olduğu ve literatürde *Banach daraltma ilkesi* olarak bilinen teoremi, tek değerli fonksiyonlar için metrik sabit nokta teorisinde en önemli teoremlerden biri olarak kabul edilir. Bu teoremde Banach;

"(X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak biçimde bir $0 \leq k < 1$ sabiti varsa (Bu tür dönüşümlere *daraltan* dönüşüm denir.) o zaman T `nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir"
sonucunu elde etmiştir.

Banach`ın vermiş olduğu teorem basit ve anlaşılır olup varlık ve teklik teoremlerinde önemli uygulama alanları bulmuştur. Gerek Brouwer`in gerekse Schauder`in kanıtlarında sabit noktanın bulunması için ne yapılabileceği konusunda en ufak bir bilgi yoktur. Burada ki kanıt yapısal bir yaklaşımdan çok var olma ile ilgili fikir yürütmeye dayanmaktadır. Banach`ın teoreminde ise Brouwer ve Schauder`in

teoremlerinin aksine sabit noktanın varlığının ve tek olmasının yanı sıra sabit noktanın bulunması ile ilgili de fikir verilmektedir.

Banach`ın teoreminden sonra buna paralel olarak birçok genelleştirilmiş sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Bunların en önemlilerinden biri de Caristi`nin 1976 da vermiş olduğu teoremdir. Caristi;

"(X,d) tam metrik uzay , $\varphi: X \to [0,\infty)$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ($\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ koşulunu sağlayan X`deki her $\{x_n\}$ dizisi için $\varphi(x') \leq \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n)$) olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(x,fx) \leq \varphi(x) - \varphi(fx)$$

koşulunu sağlıyan $f: X \to X$ dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu"

göstermiştir.

Bunların dışında Bryant (1968), Eldestein (1962), Rakotch (1962), Boyd-Wong (1969), Meir-Keeler (1969), Hardy and Rogers (1973), Reich (1971), Ciric (1974) Rhodes (1977) vs. yaptıkları çalışmalarla sabit nokta teorisine önemli katkılar sağlamışlardır.

1.3 ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SABİT NOKTALARI

1.3.1 Tanım: X ve Y boştan farklı iki küme, 2^Y de Y `nin bütün boştan farklı alt kümelerinin ailesi olsun. $T: X \to 2^Y$ fonksiyonuna ***çoğul (küme) değerli dönüşüm*** denir. Bazen bu fonksiyon $T: X \multimap Y$ veya $T: X \rightsquigarrow Y$ biçiminde de gösterilir.

$T: X \to 2^Y$ çoğul değerli dönüşümü X kümesinden alınan her bir x elemanına karşılık Y`nin bir $T(x)$ alt kümesini karşılık getirir. Eğer her bir $x \in X$`e karşılık gelen $T(x)$ tek noktadan oluşuyor ise o zaman T *tek değerli dönüşüm* olur.

Verilen bir $f: X \to Y$ tek değerli dönüşümü; her bir $x \in X$ için $T(x) = \{f(x)\}$ ile *çoğul değerli* bir dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Seçme aksiyomu ile her bir çoğul değerli $T: X \to 2^Y$ dönüşümüne karşılık her $x \in X$ için $f(x) \in T(x)$ olacak biçimde bir $f: X \to Y$ dönüşümü alınabilir ve bu f fonksiyonuna T`nin *seçimi* adı verilir.

1.3.2 Örnekler:

1) $T_1: [0,1] \to 2^{[0,1]}$, $T_1(x) = \begin{cases} \{1\} & ; x < 1/2 \\ \{0,1\} & ; x = 1/2 \\ \{0\} & ; x > 1/2 \end{cases}$

2) $T_2: [0,\infty] \to 2^{\mathbb{R}}$, $T_2(x) = [e^{-x}, 1]$

3) $T_3: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, $T_3(x) = \begin{cases} \left[\frac{X^2-1}{x}, 0\right] & ; 0 < x < 1 \\ \left[0, \frac{X^2-1}{x}\right] & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$

4) $T_4: [0,\infty) \to 2^{[0,\infty)}$, $T_4(x) = [0, x]$

5) $T_5: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, $T_5(x) = \begin{cases} [-1,1] & ; x \neq 0 \\ \{0\} & ; x = 0 \end{cases}$

Bir $T: X \to 2^Y$ dönüşümünün *tanım kümesi*

$$Dom(T) = \{ x \in X \mid T(x) \neq \emptyset \}$$

dir ve T dönüşümünün *grafiği* ise

$$graph(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$$

biçimindedir. Bir $A \subset X$ kümesinin T altındaki *görüntüsü*

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} T(x)$$

biçimindedir.

1.3.3 Tanım: $T: X \to 2^X$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Eğer bir $x \in X$ için $x \in T(x)$ oluyor ise ***x`e T çoğul değerli dönüşümünün bir sabit noktası*** denir.

(*Nadler, S. B.,Jr., 1969*)

Bir $T: X \to 2^X$ çoğul değerli dönüşümü verildiğinde tek dönüşümlerde olduğu gibi onun karakteristiği ve tanım kümesi üzerindeki koşullar fonksiyonun sabit noktasının varlığını garanti etmektedir.

1.3.4 Örnekler

1) $T_1: [0,1] \to 2^{[0,1]}$, $T_1(x) = \begin{cases} \{1\} & ; \quad x < 1/2 \\ \{0,1\} & ; \quad x = 1/2 \\ \{0\} & ; \quad x > 1/2 \end{cases}$ fonksiyonunun hiçbir sabit noktası yoktur

2) $T_2: [0,\infty) \to 2^{[0,\infty)}$, $T_2(x) = [0,x]$ fonksiyonu için her bir $x \in [0,\infty)$ bir sabit noktadır.

3) $T_3: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, $T_3(x) = \begin{cases} [-1,1] & ; \quad x \neq 0 \\ \{0\} & ; \quad x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $x = 0$ ve her bir $x \in [-1,1]$ bir sabit noktadır.

Çoğul değerli dönüşümlere önemli bir örnek olarak;

$S: Y \to X$`e olmak üzere $T: X \to 2^Y$, her $x \in X$ için $T(x) = \{ y \in Y : S(y) = x\}$

biçiminde tanımlanan ve T *operatör çözüm fonksiyonu* olarak adlandırılan fonksiyon verilebilir.

Çoğul değerli fonksiyonlar ile ilgili ilk sabit nokta teoremi 1969`da Nadler tarafından verilmiştir. Nadler`in vermiş olduğu teorem aynı zamanda Banach`ın vermiş olduğu teoremin çoğul değerli fonksiyonlara bir genişlemesi olduğu için de önemlidir.

II. BÖLÜM

HAUSDORFF METRİK UZAYLARI ve ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde ilk olarak kümeler arasındaki uzaklığı belirleyen Hausdorff metriği ile onun bazı özellikleri verilecektir. Sonrada bu uzayda belirli özellikleri sağlayan çoğul değerli dönüşümlerin sabit noktaları incelenecektir.

2.1 HAUSDORFF METRİK UZAYI

2.1.1 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve A, X`in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere bir $x \in X$ için

$$d(x, A) = \inf\{ d(x, y) : y \in A\}$$

değerine ***x`in A kümesine olan uzaklığı*** denir.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

$C(X)$ ile X`in boştan farklı *kapalı* bütün alt kümelerinin ailesini, $CB(X)$ ile $X$`in boştan farklı *kapalı ve sınırlı* bütün alt kümelerinin ailesi ve $K(X)$ ile de X `in boştan farklı *kompakt* bütün alt kümelerinin ailesi gösterilsin. Bu durumda

$$K(X) \subset CB(X) \subset C(X)$$

olduğu açıktır

2.1.2 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $A, B \in CB(X)$ olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \sup\{ d(a, B) : a \in A\}$$

değerine ***A kümesinin B kümesine*** olan uzaklığı,

$$H(A,B) = \max\{ D(A,B), D(B,A) \}$$

değerine de ***A ve B kümeleri arasındaki uzaklık*** denir.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu.*, *2009*)

2.1.3 Örnekler

1) $X = \mathbb{R},\ x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ olsun. $A = [1,2],\ B = [2,3]$ kümelerini alındığında

$$D(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B)=1 \quad \text{ve} \quad \mathrm{D}(B,A) = \sup_{b\in B} d(b,A)=1$$

olduğundan

$$H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A) \}=1$$

dir.

Not: *D* uzaklığı simetrik değildir. Dolayısı ile metrik olamaz.

2) $X = \mathbb{R},\ x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ olsun. $A = [0,1],\ B = [2,3]$ alndığında

$$D(A,B) = \sup_{a\in A} d(a,B) = 2 \text{ ve } D(B,A) = \sup_{b\in B} d(b,A) = 3$$

olup

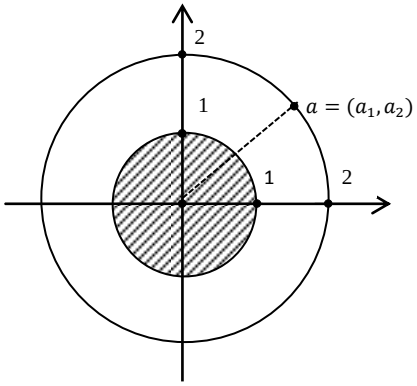
$$H(A,B) = \max\{ D(A,B), D(B,A) \}=3$$

bulunur.

3) $\mathbb{R}^2$`de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$

ve

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 1\}$$



kümeleri göz önüne alınsın. $B \subset A$ olduğundan her $b = (b_1, b_2) \in B$ için $d(a, B) = 0$ olup buradan $D(B, A) = 0$ bulunur. Her bir $a = (a_1, a_2) \in A \cap B$ için $d(a, B) = 0$ ve her bir $a = (a_1, a_2) \in A \backslash B$ için $d(a, B) = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} - 1$ olacağından $D(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = 1$ bulunur. Buna göre

$$H(\text{A,B}) = \max\{ D(A, B), D(B, A)\} = 1$$

olur.

2.1.4 Önerme: (X, d) bir metrik uzay ve $A, B, C \in CB(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$

b) $B \subset C \Rightarrow D(A, C) \leq D(A, B)$

c) $D(A \cup B, C) = \max\{ D(A, C) , D(B, C) \}$

d) $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

Kanıt: a) D`nın tanımından;

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{a \in A} d(a, B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in A \text{ için } d(a, B) = 0$$

ve B, X`in kapalı bir alt kümesi olduğundan

$$\Leftrightarrow d(a, B) = 0 \Leftrightarrow a \in \bar{B} = B$$

olur. Böylece $A \subset B$ olur. Sonuç olarak ;

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$$

dir.

b) $B \subset C$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $d(x,C) \leq d(x,B)$ olacağından

$$\sup_{x\in A} d(x,C) \leq \sup_{x\in A} d(x,B)$$

olup, buradan

$$D(A,C) \leq D(A,B)$$

elde edilir.

c) $D(A \cup B, C) = \sup_{x\in A\cup B} d(x,C)$

$$= \max\{ \sup_{x\in A} d(x,C) \ , \sup_{x\in B} d(x,C) \}$$

$$= \max\{ D(A,C) \ , \ D(B,C) \}$$

d) $a \in A$, $b \in B$ ve $c \in C$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

olup buradan

$$d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B)$$

$$\leq d(a,c) + \ D(C,B)$$

bulunur. $c \in C$ keyfi olduğundan

$$d(a,B) \leq D(a,C) + D(C,B)$$

olur. Her bir $a \in A$ üzerinden supremum alındığında

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B)$$

elde edilir.

2.1.5 Önerme: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda Tanım 2.1.2 ile verilen H uzaklık fonksiyonu $CB(X)$ üzerinde bir metriktir.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu.*, *2009*)

Kanıt: $A, B, C \in CB(X)$ olsun.

i) H`ın tanımından $H(A,B) \geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \max\{ D(A,B), D(B,A) \} = 0$

$\Leftrightarrow D(A,B) = 0 , D(B,A) = 0$

$\Leftrightarrow A \subset B , \ B \subset A$ (Önerme 2.1.4 (a))

$\Leftrightarrow A = B$

iii) H nın tanımından,

$$H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A) \}$$

$$= \max\{ D(B,A), D(A,B) \}$$

$$= H(B,A)$$

iv) Önceki önermedin (d) şıkkından

$$H(A,B) = \max\{ D(A,B), D(B,A) \}$$

$$\leq \max\{ D(A,C) + D(C,B) , \ D(B,C) + \ D(C,A) \}$$

$$\leq \max\{D(A,C), D(C,A)\} + \max\{ \ D(B,C), D(C,B)\}$$

$$= H(A,C) + H(C,B)$$

olur. Sonuç olarak H, $CB(X)$ üzerinde bir metriktir.

Not: $CB(X)$ üzerinde ki H metriğine ***Hausdorff*** **metriği** denir. H Hausdorff metriği d metriğine bağlı olarak tanımlanır. Eğer (X,d) tam metrik uzay ise $(CB(X),H)$ ve $(K(X),H)$`ın da tam olduğunu görmek kolaydır.

2.1.6 Önerme: (X,d) bir metrik uzay, H `da, $CB(X)$ üzerindeki Hausdorff metriği olsun. Bu durumda $A,B,C,D \in CB(X)$ olmak üzere

$$H(A\cup B, C\cup D) \leq \max\{H(A,C), H(B,D)\}$$

özelliği sağlanır.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

Kanıt: Önceki önermelerden;

$$D(A\cup B, C\cup D) = \max\{D(A, C\cup D), D(B, C\cup D)\}$$

$$\leq \max\{D(A,C), D(B,D)\}$$

ve $D(A, C\cup D) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in C\cup D} d(x,y) \leq \sup_{x\in A} \inf_{y\in C} d(x,y)$ olduğundan

$$\leq \max\{H(A,C), H(B,D)\} \qquad (1)$$

Bezer şekilde;

$$D(C\cup D, A\cup B) = \max\{D(C, A\cup B), D(D, A\cup B)\}$$

$$\leq \max\{H(C,A), H(D,B)\} \qquad (2)$$

H `nın tanımını, (1), (2) den

$$H(A\cup B, C\cup D) = \max\{D(A\cup B, C\cup D), D(C\cup D, A\cup B)$$

$$\leq \max\{H(A,C), H(B,D)\}$$

elde edilir.

2.1.7 Önteorem: $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \epsilon$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır.

(*Nadler S. B. Jr., 1969*)

Kanıt: $a \in A$ ve bir $\varepsilon > 0$ verilsin. İnfimum tanımından

$$d(a, b) \leq d(a, B) + \epsilon$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır.

$$d(a, B) \leq \mathrm{D}(A, \mathrm{B}) = \sup\{\, d(a, B) : a \in A\} \leq H(A, B)$$

olduğundan

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

elde edilir.

2.1.8 Önteorem: $A, B \in CB(X)$ olsun. herhangi bir $a \in A$ için

$$d(a, B) \leq H(A, B)$$

dir.

(L. S. Dube, 1975)

2.1.9 Önteorem: $A \in CB(X)$ olsun. Her $x \in X$ ve $q > 1$ için

$$d(x, a) \leq q d(x, A)$$

olacak biçimde bir $a \in A$ vardır.

(T. Kamran, 2009)

Kanıt: $d(x,A)=0$ ise$A$, X`in kapalı bir alt kümesi olduğundan $x \in A$ dır. O zaman $a=x$ alınırsa istenen elde edilmiş olur.

$d(x,A)>0$ olsun.

$\epsilon=(q-1)d(x,A)$ olarak alınsın. O zaman $d(x,A)$ tanımından

$$d(x,a) \leq d(x,A)+\epsilon$$

olacak biçimde bir $a \in A$ vardır. ϵ yerine yazılırsa

$$d(x,a) \leq d(x,a)+\epsilon \leq qd(x,A)$$

olur.

2.1.10 Tanım: (X,d) bir metrik uzay , H`da $CB(X)$ üzerinde bir Hausdorff metriği olsun ve bir $T: X \to CB(X)$ çoğul değerli dönüşümü verilsin. Eğer $X$`deki her yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ iken $H(Tx_n,Tx) \to 0$ oluyorsa T`ye X üzerinde süreklidir denir.

2.2 DARALTAN DÖNÜŞÜMLER VE NADLER SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde daraltan çoğul değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi verilecektir.

2.2.1 Tanım: (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $k>0$ sabiti varsa T`ye ***Lipschitz*** dönüşümü ve buradaki $k$ sayısına da $T$`nin ***Lipschitz*** sabiti denir. Eğer $k<1$ ise T Lipschitz çoğul değerli

dönüşümüne ***daraltan***, $k = 1$ ise T`ye ***genişleme olmayan çoğul değerli dönüşüm*** denir.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

Not: Her T Lipschitz çoğul değerli dönüşümü süreklidir. Gerçekten;

$x_n \to x$ olan X`deki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$H(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x)$$

dir. Buradan da istenen elde edilir.

2.2.2 Teorem(Nadler Sabit Nokta Teoremi): (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ bir daraltan çoğul değerli dönüşüm olsun. O zaman T`nin $X$`de sabit noktası vardır.

(Sam B. Nadler, Jr., 1969)

Kanıt: Herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. O zaman k, T`nin Lipschitz sabiti olmak üzere Önteorem 2.1.7`den

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine benzer biçime

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

olacak biçimde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır.

Benzer biçimde devam edildiğinde her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

ve $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi oluşturulur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan ve T`nin daraltanlığı kullanıldığında

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n$$

$$\leq k[H(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n$$

$$\leq k[kd(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n$$

$$\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n$$

$$\dots$$

$$\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$, (X, d)`de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $x_n \to v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. T dönüşümü daraltan olduğundan süreklidir ve bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tv) = 0$$

dir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan ve $d(x_{n+1}, Tv) \leq H(Tx_n, Tv)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tv) = 0$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(v, Tv) \leq d(v, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tv)$$

olup

$$d(v, Tv) \leq \lim_{n\to\infty} d(v, x_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tv) = 0$$

bulunur. Tv kapalı bir küme olduğundan $v \in Tv$ olur. Böylece v, T`nin sabit bir noktasıdır.

2.2.3 Örnek: $X = [0,1]$ ve $f: X \to X, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{-x}{2} + 1 & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

$T: X \to 2^X$, her $x \in X$ için $Tx = \{f(x)\} \cup \{0\}$ biçiminde tanımlansın. T daraltan dönüşüm olup $x = 0$ ve $x = \frac{2}{3}$ noktaları T`nin sabit noktalarıdır.

Not: Örnekte de görüldüğü gibi çoğul değerli bir dönüşümün sabit noktasının tek olması gerekmez.

2.2.4 Teorem: (X, d) tam metrik uzayı ve $T, S : X \to CB(X)$ aynı Lipschitz sabitine sahip iki çoğul değerli daraltan dönüşüm olsun. Yani; her $x, y \in X$ için

$$H(Sx, Sy) \leq kd(x, y)$$

ve

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak biçimde bir $k \in (0,1)$ sabiti var olsun. Bu durumda F_S ve F_T sırasıyla S ve T dönüşümlerinin sabit noktaları olmak üzere

$$H(F_T, F_S) \leq (1 - k)^{-1} sup_{x \in X} H(Sx, Tx)$$

eşitsizliği doğrulanır.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

Kanıt: Teorem 2.2.2 den $F_S \neq \emptyset$ ve $F_T \neq \emptyset$ oldukları açıktır.$\varepsilon > 0$ verilsin ve $c \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < 1$ olacak biçimde bir $c > 0$ alınsın. $x_0 \in F_S$ için

$$d(x_0, x_1) \leq H(Sx_0, Tx_0) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x_1 \in Tx_0$ aslınsın. T daraltan dönüşüm olduğundan,

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + \frac{c\varepsilon k}{1-k} \leq kd(x_0, x_1) + \frac{c\varepsilon k}{1-k}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ seçilebilir.

Benzer biçimde devam edildiğinde

$$x_{n+1} \in Tx_n \ , d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) + \frac{c\varepsilon k^n}{1-k}$$

biçiminde bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlanabilir. $m = \frac{c\varepsilon}{1-k}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) + mk^n \\ &\leq k[kd(x_{n-1}, x_{n-2}) + mk^{n-1}] + mk^n \\ &= k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) + 2mk^n \\ &\dots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + nmk^n \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisi olur. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $x_n \to v$ olacak biçimde $v \in X$ vardır. T dönüşümü daraltan olduğundan sürekli olup $\lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tv) = 0$ dir. $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan $v \in Tv$ yani $v \in F_T$ dir.

$$\begin{aligned} d(x_0, v) \leq \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} k^n d(x_0, x_1) + m\sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\ &\leq (1-k)^{-1} d(x_0, x_1) + m\sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\ &\leq (1-k)^{-1}(d(x_0, x_1) + \varepsilon) \\ &\leq (1-k)^{-1}(H(Sx_0, Tx_0) + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde S ve T`nin rolleri değiştirildiğinde;

her bir $y_0 \in F_T$ için

$$d(y_0, u) \leq (1-k)^{-1}(H(Sy_0, Ty_0) + 2\varepsilon)$$

olacak biçimde $y_1 \in Sy_0$ ve $u \in F_S$ vardır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ,

$$H(F_T, F_S) \leq (1-k)^{-1} \sup_{x \in X} H(Sx, Tx)$$

elde edilir.

2.2.5 Teorem: (X, d) tam metrik uzayı ve $n = 1,2 \ldots$ için $T_n : X \to CB(X)$ aynı Lipschitz sabitine sahip çoğul değerli daraltan dönüşümler olsunlar; yani, $k \in (0,1)$, olmak üzere her $x, y \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$H(T_n x, T_n y) \leq kd(x, y)$$

olsun. Eğer $x \in X$ için düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} H(T_n x, T_0 x) = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} H\left(F_{T_n}, F_{T_0}\right) = 0$ dır.

(*R. P, Agarwal , D. O'Regan, D.R. Sahu., 2009*)

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in X$ için düzgün olarak $\lim_{n\to\infty} H(T_n x, T_0 x) = 0$ olduğundan her $n \geq n_0$ için

$$\sup_{x \in X} H(T_n x, T_0 x) \leq (1-k)\varepsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Teorem 2.2.4 den her $n \geq n_0$ için

$$H(F_T, F_S) < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} H\left(F_{T_n}, F_{T_0}\right) = 0$$

olduğunu verir.

III. BÖLÜM

FISHER TİPİNDEKİ δ-UZAKLIK FONKSİYONU İLE ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde Fisher tarafından tanımlanan Hausdorff metriğinden farklı fakat metrik olmayan δ uzaklık fonksiyonu göz önüne alınacak ve bu uzaklık fonksiyonu yardımı ile bazı sabit nokta teoremleri incelenecektir.

3.1 δ-UZAKLIK FONKSİYONU

3.1.1 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $B(X)$`de $X$`in boştan farklı bütün sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun. $A, B \in B(X)$ olmak üzere;

$$\delta(A, B) = \sup\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

biçiminde tanımlansın.

Eğer A tek bir a noktasından oluşan bir küme ise

$$\delta(A, B) = \delta(a, B)$$

biçiminde yazılır. Eğer B kümesi de tek bir b noktasından oluşan bir küme ise o zaman

$$\delta(A, B) = \delta(a, b) = d(a, b)$$

biçiminde yazılır.

Tanımdan her $A, B, C \in B(X)$ için

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0,$$

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B) \text{ ve}$$

$$\delta(A,A) = \text{çap } A$$

olduğu kolayca görülür.

Eğer $\delta(A,B) = 0$ ise o zaman $A = B = \{a\}$ dir.

(*B. Fisher, 1981*)

Not: δ, $B(X)$ üzerinde bir metrik değildir.

3.1.2 Tanım: $\{A_n : n = 1,2,3 \ldots\}$, $B(X)$`de tanımlı kümelerin bir dizisi ve $A \in B(X)$ olsun. Eğer

i) Her bir $a \in A$, $\{a_n \in A_n : n = 1,2, \ldots\}$ biçiminde oluşturulan yakınsak bir dizinin limiti,

ii) Her $\epsilon > 0$ sayısı için A_ϵ, A`daki noktaları merkez kabul eden ϵ yarıçaplı bütün yuvarların birleşimi olmak üzere her $n > N$ için $A_n \subset A_\epsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır,

koşulları sağlanıyor ise $\{A_n : n = 1,2, \ldots\}$ dizisine $B(X)$`de $A$ `ya ***yakınsaktır*** denir.

(*B. Fisher, 1981*)

3.1.3 Tanım: $F : X \to B(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun. Eğer X`de, $x$ noktasına yakınsayan bütün $\{x_n\}$ dizileri için $\{Fx_n\}$, $B(X)$`de Fx`e yakınsıyorsa $F$`ye x noktasında ***süreklidir*** denir.

Eğer F, X`in her noktasında sürekli ise, *$F$`ye X`* den $B(X)$`e ***süreklidir*** denir.

(*B. Fisher, 1981*)

3.1.4 Önerme: Eğer $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $B(X)$`de sırasıyla $A$ ve $B$ kümelerine yakınsayan kümelerin dizisi ise o zaman $\{\delta(A_n, B_n)\}$`de $\delta(A, B)$`ye yakınsar.

(*B. Fisher, 1981*)

Kanıt: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ yakınsak olduğundan Tanım 3.1.2`den her $n > N$ için

$$\delta(A_n, B_n) \leq \delta(A_\epsilon, B_\epsilon) = \sup\{d(a', b') : a' \in A_\epsilon, b' \in B_\epsilon\}$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $a' \in A_\epsilon$ ve $, b' \in B_\epsilon$ için $d(a', a) < \epsilon$ ve $d(b', b) < \epsilon$ olacak biçimde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan

$$d(a', b') \leq d(a, a') + d(a, b) + d(b, b') < d(a, b) + 2\epsilon$$

olduğundan her $n > N$ için

$$\delta(A_n, B_n) < \sup\{d(a, b) : a \in A\,, b \in B\} + 2\epsilon = \delta(A, B) + 2\epsilon \qquad (3.1.1)$$

olur.

Ayrıca her $a \in A$ ve $b \in B$ için her $n > N$ için $d(a, a_n) < \epsilon$ ve $d(b, b_n) < \epsilon$ olacak biçimde $a_n \in A_n$ ve $b_n \in B_n$ bulunabilir. Üçgen eşitsizliğinden $d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b) \leq d(a_n, b_n) + 2\epsilon$ olduğundan her $n > N$ için

$$\delta(A, B) = \sup\{d(a, b) : a \in A\,, b \in B\}$$

$$\leq \sup\{d(a_n, b_n) : a_n \in A_n\,, b_n \in B_n\} + 2\epsilon$$

$$= \delta(A_n, B_n) + 2\epsilon \qquad (3.1.2)$$

olur. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitsizliklerinden her $n > \mathbb{N}$ için $|\delta(A_n, B_n) - \delta(A, B)| < \epsilon$ olur. Bu ise $\{\delta(A_n, B_n)\}$`nin $\delta(A, B)$ `ye yakınsadığını gösterir.

3.1.5 Önerme: $\{A_n\}$, X`in boştan farklı alt kümelerinin bir dizisi ve $x \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n, x) = 0$$

ise o zaman $\{A_n\}$ dizisi $\{x\}$ kümesine yakınsar.

(*B. Fisher, 1989*)

Kanıt: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A_n$ alınsın. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \delta(A_n, x) = 0$$

olur o zaman herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde her $n > N$ için $d(a_n, x) < \epsilon$ olacak biçimde olarak bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu N sayısı her bir a_n `in seçiminden bağımsızdır. Bu ise A_ϵ, x merkezli ϵ yarıçaplı yuvar olmak üzere her $n > N$ için $A_n \subset A_\epsilon$ olduğunu verir.

3.1.6 Önerme: $\{A_n\}$, X`in boştan farklı alt kümelerinin bir dizisi, $z \in X$`de herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A_n$ `lerin seçiminden bağımsız olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = z$$

koşulunu sağlasın. Eğer $T: X \to X$`e sürekli bir dönüşüm ise o zaman $\{TA_n\}$ dizisi Tz ye yakınsar.

(*B. Fisher, 1989*)

Kanıt: A_ϵ, Tz merkezli ϵ yarıçaplı yuvar olmak üzere her $n = 1,2 \ldots$ için $TA_n \not\subseteq A_\epsilon$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda her $n = 1,2 \ldots$ için $y_n = Ta_n \in TA_n - A_\epsilon$ olacak biçimde $\{a_n \in A_n : n = 1,2, \ldots\}$ dizisi vardır. Hipotezden her $\{a_n \in A_n : n = 1, 2, 3 \ldots\}$ dizisi z`ye yakınsadığından ve $T$ sürekli olduğundan $\{y_n\}$ dizisi de $Tz$`ye yakınsar. Böylece yeterince büyük bir n için $d(y_n, Tz) < \epsilon$ olacağından bu $TA_n \not\subseteq A_\epsilon$ olması ile çelişir. $\{TA_n\}$, Tz`ye yakınsar.

3.2 δ-UZAKLIK FONKSİYONU İLE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.2.1 Teorem: (X, d) tam metrik uzay ve $F: X \to B(X)$, $0 \leq c < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\delta(Fx, Fy) \leq c \max\{\delta(x, Fx), \delta(y, Fy), \delta(x, Fy), \delta(y, Fx), d(x, y)\} \qquad (3.2.1)$$

koşulunu sağlayan çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Eğer F, her $A \in B(X)$ için $FA \in B(X)$ özelliğini sağlıyorsa F`nin bir z sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca $Fz = \{z\}$ dir.

(*B. Fisher, 1981*)

Kanıt: Eğer $A, B \in B(X)$ ise (3.2.1) eşitsizliğinden; her $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$\delta(Fa, Fb) \leq c \max\{\delta(a, Fa), \delta(b, Fb), \delta(a, Fb), \delta(b, Fa), d(a, b)\}$$

olduğundan eşitsizliğin her iki tarafında bütün $a \in A$ ve $b \in B$ `ler üzerinden supremum alındığında

$$\delta(FA, FB) \leq c \max\{\delta(A, FA), \delta(B, FB), \delta(A, FB), \delta(B, FA), \delta(A, B)\} \qquad (3.2.2)$$

elde edilir. F, her $A \in B(X)$ için $FA \in B(X)$ özelliğini sağladığından (3.2.2) eşitsizliğinin her iki yanı da sonludur.

Herhangi bir $x \in X$ ve $n = 2,3 \ldots$ için $F^n x$ kümesi tümevarım ile

$$F^n x = F(F^{n-1} x)$$

biçiminde tanımlansın.

$$\{\delta(F^n x, Fx): n = 2,3 \ldots\}$$

kümesinin bir an için sınırlı olmadığı varsayılsın. O zaman

$$\delta(F^n x, Fx) > \frac{c}{1-c} \delta(x, Fx) > \max\{\delta(F^r x, Fx): r = 1,2, \ldots, n-1\} \qquad (3.2.3)$$

olacak biçimde bir $n > 1$ sayısı vardır. Burada $n = 1$ olamaz. Gerçekten $n = 1$ olsaydı

$$(1 - c)\delta(Fx, Fx) > c\delta(x, Fx) \geq c[\delta(x, Fx) - \delta(Fx, Fx)]$$

olup buradan $\delta(Fx, Fx) > c\delta(x, Fx)$ bulunur. (3.2.1) den $\delta(Fx, Fx) \leq c\delta(x, Fx)$ olacağından bir çelişki elde edilir.

(3.2.3)`den $r = 1, 2, \dots, n$ için

$$(1 - c)\delta(F^n x, Fx) > c\delta(x, Fx) \geq c[\delta(x, F^r x) - \delta(F^r x, Fx)]$$

$$\geq c[\delta(x, F^r x) - \delta(F^n x, Fx)]$$

olup, buradan

$$\delta(F^n x, Fx) > \max\{\delta(x, F^r x) : r = 1,2, \dots, n\} \tag{3.2.4}$$

olur.

$$\delta(F^n x, Fx) > \max\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 0,1,2, \dots, n\} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. Gerçekten $F^0 x = x$ olmak üzere

$$\delta(F^0 x, F^0 x) = d(x, x) = 0$$

olduğundan eşitsizlik doğru olur. Bunun dışında eğer (3.2.5) eşitsizliği doğru olmasaydı (3.2.4) eşitsizliğinden

$$\delta(F^n x, Fx) \leq c \max\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 0,1,2, \dots, n\}$$

$$\leq c \max\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 1,2, \dots, n\}$$

olur. (3.3.2) eşitsizliği bu terimlere uygulanırsa $\delta(x, F^r x)$biçimindeki terimler (3.2.4) eşitsizliğinden dolayı atılabilir. Yani; her $k = 1,2$ ... için

$$\delta(F^n x, Fx) \leq c^k \max\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 1,2, \dots, n\}$$

dir. Burada $k \to \infty$ için limite geçilirse $0 \leq c < 1$ olduğundan $\delta(F^n x, Fx) = 0$ elde edilir. Bu ise $\{\delta(F^n x, Fx): n = 2,3 \ldots\}$ `nin sınırsız olması ile çelişir. Yani; (3.2.5) eşitsizliği sağlanır. Buna karşın (3.2.2) eşitsizliği kullanıldığından

$$\delta(F^n x, Fx) \leq c \max\{\delta(F^{n-1}x, F^n x), \delta(x, Fx), \delta(F^{n-1}x, Fx), \delta(x, F^n x), \delta(F^{n-1}x, x)\}$$

$$\leq c \max\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 0,1,2, \ldots, n\}$$

elde edilir ki, bu ise (3.2.4) eşitsizliğinden dolayı imkansızdır. Şu halde $\{\delta(F^n x, Fx): n = 2,3 \ldots\}$ sınırlıdır.

Böylece

$$\delta(F^r x, F^s x) \leq \delta(F^r x, Fx) + \delta(Fx, F^s x)$$

olduğundan

$$M = \sup\{\delta(F^r x, F^s x) : r, s = 0,1,2\ldots\}$$

sonludur.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ için $c^N M < \epsilon$ olacak biçimde bir N seçilsin. Her $m, n \geq N$ için (3.2.2) eşitsizliği $\delta(F^m x, F^n)$ terimine N kez uygulanırsa

$$\delta(F^m x, F^n) \leq c^N M < \epsilon \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Her $n = 1,2, \ldots$ için $x_n \in F^n$ seçilirse, her $m, n \geq N$ için

$$d(x_m, x_n) \leq (\delta(F^m x, F^n) < \epsilon$$

olur. Bu ise $\{x_n : n = 1,2 \ldots\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmasını verir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in X$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

Ayrıca her $m, n \geq N$ için

$$\delta(z, F^n x) \leq d(z, x_m) + \delta(x_m, F^n x)$$

$$\leq d(z, x_m) + \delta(F^m x, F^n x)$$

$$< d(z, x_m) + \epsilon$$

olur. $m \to \infty$ için limite geçildiğinde her $n \geq N$ için

$$\delta(z, F^n x) \leq \epsilon \tag{3.2.7}$$

olup, her $n \geq N$ için

$$\delta(F^n x, Fz) \leq \delta(F^n x, z) + \delta(z, Fz) \tag{3.2.8}$$

$$\leq \delta(z, Fz) + \epsilon$$

olur. (3.2.2), (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8)`den her $n \geq N$ için

$\delta(F^n x, Fz) \leq c \max\{\delta(F^{n-1}x, F^n x), \delta(z, Fz), \delta(F^{n-1}x, Fz), \delta(z, F^n x), \delta(F^{n-1}x, z)\}$

$\leq c \max\{\epsilon, \delta(z, Fz), \delta(z, Fz) + \epsilon, \epsilon, \epsilon\}$

$= c[\delta(z, Fz) + \epsilon]$

elde edilir. $x_n \in F^n x$ olduğundan her $n \geq N$ için

$$\delta(x_n, Fz) \leq \delta(F^n x, Fz) \leq c[\delta(z, Fz) + \epsilon]$$

olur ve eşitsizliğinin her iki yanından $n \to \infty$ için limite geçildiğinde Önerme 3.1.4`den ve $\epsilon$`nun keyfi olmasından

$$\delta(z, Fz) \leq c\delta(z, Fz)$$

elde edilir. Bu ise $c < 1$ olduğundan $\delta(z, Fz) = 0$ ve $Fz = \{z\}$ olmasını verir.

Eğer $w \in X$, F`nin ikinci bir sabit noktası olsaydı (3.2.1) eşitsizliğinden

$$\delta(Fw, Fw) \leq c\delta(w, Fw) \leq c\delta(w, Fw)$$

olacağından $\delta(Fw, Fw) = 0$ olup $Fw = \{w\}$ bulunur. Buradan yine (3.2.1) eşitsizliği kullanıldığında

$$d(z,w) = \delta(Fz,Fw)$$

$$\leq c \max\{\delta(z,Fz),\delta(w,Fw),\delta(z,Fw),\delta(w,Fz),d(z,w)\}$$

$$= d(z,w)$$

elde edilir. $c < 1$ olduğundan bu eşitsizlik ancak $d(z,w) = 0$ olması durumunda gerçekleşir. Bu ise $z = w$ olmasını verir.

3.2.2 Sonuç: (X,d) tam metrik uzay ve $F: X \to B(X)$, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve için

$$\delta(Fx,Fy) \leq a_1\delta(x,Fx) + a_2\delta(y,Fy) + a_3\delta(x,Fy) + a_4\delta(y,Fx) + a_5 d(x,y) \quad (3.2.9)$$

koşulunu sağlayan çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Eğer F, her $A \in B(X)$ için $FA \in B(X)$ özelliğini sağlıyorsa F`nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca $Fz = \{z\}$ dir.

(*B. Fisher, 1981*)

Kanıt: $c = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ olarak alınırsa $c < 1$ olup (3.2.9) eşitsizliğinden her $x, y \in X$ için

$$\delta(Fx,Fy) \leq a_1\delta(x,Fx) + a_2\delta(y,Fy) + a_3\delta(x,Fy) + a_4\delta(y,Fx) + a_5 d(x,y)$$

$$\leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \max\{\delta(x,Fx),\delta(y,Fy),\delta(x,Fy),\delta(y,Fx),d(x,y)\}$$

$$\leq c \max\{\delta(x,Fx),\delta(y,Fy),\delta(x,Fy),\delta(y,Fx),d(x,y)\}$$

olduğundan Teorem 3.2.1 de verilen koşular sağlanmış olur. Dolayısı kanıt tamamlanır.

3.2.3 Sonuç: (X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X,\ 0\le c<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ ve için

$$d(Tx,Ty)\le c\max\{d(x,Tx),T(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx),d(x,y)\} \qquad (3.2.10)$$

koşulunu sağlayan tek değerli bir dönüşüm olsun. O zaman T`nin tek bir sabit noktası vardır.

(*B. Fisher, 1981*)

Kanıt: T dönüşümü yardımı ile $F:X\to B(X)$, her $x\in X$ için $Fx=\{Tx\}$ biçiminde F çoğul değerli dönüşümü tanımlansın. Bu durumda F dönüşümü Teorem 3.2.1`deki (3.2.1) koşulunu sağlar. Ayrıca her $x\in X$ için ,Fx tek nokta kümesi olduğundan sınırlıdır. Bu yüzden (3.2.1) eşitsizliği (3.2.2) eşitsizliği ile aynıdır. Bu ise $Fz=\{z\}=Tz$ olacak biçimde $z\in X$ olduğunu verir.

Not: Sonuç 3.2.3 ile B. Fisher`in 1979 da vermiş olduğu sonuç elde edilir.

3.3 ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.3.1 Tanım: $S,T:X\to 2^X$ iki çoğul değerli fonksiyon olsun.

$$S\circ T:X\to 2^X,\quad (S\circ T)(x)=\bigcup_{y\in T(x)}S(y)$$

olarak tanımlanır.

Bu bölümde, kolaylık olsun diye $S\circ T$ yerine ST kullanılacaktır.

3.3.2 Teorem: (X, d) tam metrik uzay olsun. $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$,

i) azalmayan

ii) her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere;

$S, T: X \to B(X)$ her $x \in X$ için

$$\delta(TSx, Sx) \leq \varphi(\delta(Sx, x)) \tag{3.3.1}$$

ve

$$\delta(STx, Tx) \leq \varphi(\delta(Tx, x)) \tag{3.3.2}$$

koşullarını sağlayan çoğul değerli dönüşümler olsun. Eğer S veya T sürekli ise S ve T`in bir z ortak sabit noktası vardır ve $Tz = Sz = \{z\}$ dir.

Kanıt: Herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın. $x_1 \in Tx_0$ ve $x_2 \in Sx_1$ keyfi olarak seçilmek üzere $n = 0,1,2 \ldots$ için

$$x_{2n+1} \in Tx_{2n} \quad \text{ve} \quad x_{2n+2} \in Sx_{2n+1}$$

olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın.(3.3.1) ve (3.3.2) eşitsizlikleri ve φ`nin azalmayan özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n}) &\leq \delta(Tx_{2n}, x_{2n}) \\ &\leq \delta(TSx_{2n-1}, Sx_{2n-1}) \\ &\leq \varphi(\delta(Sx_{2n-1}, x_{2n-1})) \\ &\leq \varphi(\delta(STx_{2n-2}, Tx_{2n-2})) \\ &\leq \varphi^2(\delta(Tx_{2n-2}, x_{2n-2})) \\ &\ldots \\ &\leq \varphi^{2n}(\delta(Tx_0, x_0)) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) &\leq \delta(Sx_{2n+1}, x_{2n+1}) \\
&\leq \delta(STx_{2n}, Tx_{2n}) \\
&\leq \varphi(\delta(Tx_{2n}, x_{2n})) \\
&\leq \varphi(\delta(TSx_{2n-1}, Sx_{2n-1})) \\
&\leq \varphi^2(\delta(Sx_{2n-1}, x_{2n-1})) \\
&\leq \varphi^2(\delta(STx_{2n-2}, Tx_{2n-2})) \\
&\leq \varphi^3(\delta(Tx_{2n-2}, x_{2n-2})) \\
&\dots \\
&\leq \varphi^{2n+1}(\delta(Tx_0, x_0)) \qquad (3.3.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.3.3) ve (3.3.4) eşitsizliklerinden her $n = 0,1,2,\dots$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \varphi^n(\delta(Tx_0, x_0)) \qquad (3.3.5)$$

bulunur.

$m > n$ olsun. (3.3.5) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq \varphi^n\big(\delta(Tx_0, x_0)\big) + \varphi^{n+1}\big(\delta(Tx_0, x_0)\big) + \cdots + \varphi^{m-1}\big(\delta(Tx_0, x_0)\big) \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k\big(\delta(Tx_0, x_0)\big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k\big(\delta(Tx_0, x_0)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ olduğundan her $m, n \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \varphi^k\big(\delta(Tx_0, x_0)\big) < \epsilon$$

olacak biçimde yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise $\{Tx_{2n}\}$ dizisi Tz`ye yakınsaktır. Ayrıca (3.3.3) eşitsizliğinden

$$\delta(z, Tx_{2n}) \leq d(z, x_{2n}) + \delta(x_{2n}, Tx_{2n})$$

$$\leq\ d(z, x_{2n}) + \varphi^{2n}(\delta(Tx_0, x_0))$$

olup $n \to\ \infty$ için limite geçildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} \delta(z, Tx_{2n}) = 0$$

olur. Buradan da

$$Tz = \{z\}$$

bulunur.

(3.3.2) eşitsizliğinden

$$\delta(Sz, z) \leq \delta\ (STz, Tz) \leq \varphi\big(\delta(Tz, z)\big) = \varphi(0) = 0$$

olduğundan $z \in Sz$ ve burada $Sz = Tz = \{z\}$ bulunur.

Benzer biçimde S`nin sürekli olması durumu göz önüne alındığında $z$ `nin S ve T `nin ortak bir sabit noktası olduğu kolayca görülür.

3.3.3 Örnek: $X = [0,1]$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ olarak alınsın. O zaman φ, (i) ve (ii) özelliklerini sağlar.

$S, T: X \to B(X)$ her $x \in X$ için

$$Sx = \left[0, \frac{x}{4}\right], \qquad Tx = \left[0, \frac{x}{2}\right]$$

biçiminde tanımlansın.

Bu durumda

$$\delta(Sx, x) = x, \qquad \delta(Tx, x) = x, \qquad \delta(TSx, Sx) = \frac{x}{4}, \qquad \delta(STx, Tx) = \frac{x}{2}$$

Böylece

$$\delta(TSx, Sx) = \frac{x}{4} \leq \frac{x}{2} = \varphi(\delta(Sx, x))$$

ve

$$\delta(STx, Tx) = \frac{x}{2} = \varphi(\delta(Tx, x))$$

olduğundan S ve T Teorem 3.3.2`deki tüm koşulları sağlar ve $T(0) = S(0) = \{0\}$. Yani $x = 0$, $S$ ve $T$`nin ortak sabit noktasıdır.

Teorem 3.3.2 `de $S = T$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.4 Sonuç: (X, d) tam metrik uzay olsun. $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$,

i) azalmayan

ii) her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere;

$T: X \to B(X)$ her $x \in X$ için

$$\delta(T^2x, Tx) \leq \varphi(\delta(Tx, x))$$

koşulunu sağlayan çoğul değerli dönüşüm olsun. Eğer T sürekli ise T`in bir z sabit noktası vardır ve $Tz = \{z\}$ dir.

Teorem 3.3.2 `de $S, T: X \to X$ tek değerli dönüşümler olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.5 Sonuç: (X, d) tam metrik uzay olsun. $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$,

i) azalmayan

ii) her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere;

$S, T: X \to X$ her $x \in X$ için

$$\delta(TSx, Sx) \leq \varphi(\delta(Sx, x))$$

ve

$$\delta(STx, Tx) \leq \varphi(\delta(Tx, x))$$

koşullarını sağlayan tek değerli dönüşümler olsun. Eğer S veya T sürekli ise S ve T`in bir z ortak sabit noktası vardır.

(*H. Karayılan , M. Telci, 2010*)

IV. BÖLÜM

BİR d-METRİĞİ YARDIMIYLA ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde Hausdorff metriği ve δ-uzaklık fonksiyonu kullanılmadan bir d-metriği ile bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

4.1 ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN YÖRÜNGESİ VE YÖRÜNGESEL TAMLIK

Bu kesimde kullanılacağı kadarıyla bazı tanımlar verilecektir.

4.1.1 Tanım: $T: X \to 2^X$ çoğul değerli bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $n = 1,2,3 \ldots$ için $x_n \in Tx_{n-1}$ olmak üzere bir $[x_n\}$ dizisi varsa

$$O(T, x_0) = \{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$$

`ye ***T `nin x_0 da bir yörüngesi*** denir.

(*Ćirić, Lj. B., 1972*)

4.1.2 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\{x_{n_i} : x_{n_i} \in Tx_{n_i-1}\}$$

biçimindeki her Cauchy dizisi X`de yakınsak ise $(X, d)$ metrik uzayına ***$x_0$`a göre T-yörüngesel tamdır*** yada kısaca ***$O(T, x_0)$-yörüngesel tamdır*** denir.

(*Ćirić, Lj. B., 1972*)

4.1.3 Tanım: Bir (X,d) metrik uzayı ile $T:X\to 2^X$ çoğul değerli dönüşümü verilsin. $F:X\to\mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ koşulunu sağlayan $O(T,x_0)$`daki her $\{x_n\}$ dizisi için

$$F(x)\le \lim_{n\to\infty}\inf F(x_n)$$

oluyorsa F`ye ***x noktasında $x_0$`a göre T-yörüngesel alttan yarı süreklidir*** denir.

(*Ćirić, Lj. B., 1972*)

4.2 ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

S. Reich 1972`de, bir $X$ kümesinden $X$`in $K(X)$ boştan farklı kompakt alt kümeleri ailesine tanımlı çoğul değerli dönüşümlerin için önemli bir sabit nokta teoremi vermiştir. 1989`da N. Mizoguchi ve W. Takahashi, S. Reich`in teoremini X`den $X$ `in $CB(X)$ boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümeleri ailesine tanımlı dönüşümler için genişletmişlerdir. 2009`da ise T. Kamran, N. Mizoguchi ve W. Takahashi`nin sonucunu X`den $X$ `in $C(X)$ boştan farklı kapalı alt kümeleri ailesine aşağıdaki biçimde genellemiştir.

4.2.1 Teorem: (X,d) tam bir metrik uzay ve $T:X\to C(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. $\alpha:[0,\infty)\to[0,1)$ her $t\in[0,1)$ için

$$\lim_{r\to t^+}\sup\alpha(r)<1 \qquad (4.2.1)$$

olmak üzere T dönüşümü her $x\in X$ ve $y\in Tx$ için

$$d(y,Ty)\le\alpha\big(d(x,y)\big)d(x,y) \qquad (4.2.2)$$

koşulunu sağlasın. O zaman

i) Her bir $x_0 \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde $O(T, x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi ve $x' \in X$ vardır.

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

(*T. Kamran, 2009*)

Kanıt: $x_0 \in X$ olsun. $Tx_0 \neq \emptyset$ olduğundan $x_1 \in Tx_0$ olacak biçimde bir $x_1 \in X$ vardır. Eğer $x_0 = x_1$ ise x_0, T`nin sabit noktasıdır. $x_0 \neq x_1$ olarak alınsın. $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_0,x_1))}}$ alındığında Önteorem 2.1.9`dan

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_0,x_1))}} d(x_1, Tx_1) \tag{4.2.3}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer biçimde devam edildiğinde $n = 1,2,3$ ... için $x_n \in Tx_{n-1}$ olmak üzere

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_{n-1},x_n))}} d(x_n, Tx_n) \tag{4.2.4}$$

koşulu sağlayan X içinde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulur. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} = x_n$ ise o zaman x_{n-1}, T`nin sabit noktası olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} \neq x_n$ olsun. (4.2.2) eşitsizliği kullanıldığından (4.2.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_{n-1},x_n))}} d(x_n, Tx_n) \\ &\leq \frac{\alpha(d(x_{n-1},x_n))}{\sqrt{\alpha(d(x_{n-1},x_n))}} d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \sqrt{\alpha\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)}\, d(x_{n-1}, x_n) \\ &< d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Bu ise $\{d(x_n, x_{n+1})\}$`nin azalan bir dizi olmasını verir. Aynı zamanda $\{d(x_n, x_{n+1})\}$`alttan sınırı olduğundan bir $b \geq 0$ sayısına yakınsar. Eğer $b \neq 0$ olsaydı (4.2.5) eşitsizliğinde limite geçildiğinde

$$b \leq \sqrt{\lim_{n->\infty} \sup \alpha\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)}\, b < b$$

olacağından çelişki elde edilirdi. Şu halde $b = 0$ dır.

Yine (4.2.5) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq [\sqrt{\alpha\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)} \dots \sqrt{\alpha\big(d(x_0, x_1)\big)}]d(x_0, x_1) \qquad (4.2.6)$$

elde edilir. (4.2.1)`den $a \in (0,1)$ olmak üzere her $t \in (0, \epsilon)$ için

$$\alpha(t) < a^2$$

olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ alınabilir. Ayrıca $d(x_{n-1}x_n) \to 0$ olduğundan her $n \geq N$ için

$$d(x_{n-1}, x_n) < \epsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. (4.2.6) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a^{n-(N-1)}[\sqrt{\alpha\big(d(x_{N-1}, x_N)\big)} \dots \sqrt{\alpha\big(d(x_0, x_1)\big)}]d(x_0, x_1)$$

$$\leq a^{n-N+1} d(x_0, x_1)$$

olacağından her $m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

$$\leq a^{n-N+1}[1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}]d(x_0, x_1)$$

$$< \frac{a^{n-N+1}}{1-a} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu verir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır.

(4.2.2) eşitsizliğinden

$$d(x_n, Tx_n) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilip buradan $n \to \infty$ için limite geçildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

bulunur.

$F(x) = d(x, Tx)$, x' noktasında T yörüngesel alttan yarı sürekli olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ ve $x_n \in Tx_{n-1}$ olduğundan

$$F(x') = d(x', Tx') \leq \lim_{n\to\infty} \inf F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, Tx_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur. Tx' kapalı olduğundan $x' \in Tx'$ bulunur.

Tersine eğer $x' \in Tx'$ ise

$$0 = F(x') = d(x', Tx') \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} \inf F(x_n)$$

olacağından x' noktasında T yörüngesel alttan yarı sürekli olur.

T. Kamran`ın teoremindeki kanıt yöntemi kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.2 Teorem: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to C(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$,

i) azalmayan

ii) her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Her $(x, y) \in I_r = \{(x, y): d(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{r}} d(x, Tx),\ y \in Tx\}$ için

$$d(y,Ty) \leq r\varphi\big(d(x,y)\big) \tag{4.2.7}$$

koşulunu sağlayan bir $r \in (0,1)$ var olsun. O zaman

i) Her bir $x_0 \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde $O(T,x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi ve bir $x' \in X$ vardır

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

Kanıt: $x_0 \in X$ aldığımızda Önteorem 2.1.9`dan

$$d(x_0,x_1) \leq \frac{1}{\sqrt{r}} d(x_0,Tx_0)$$

olacak biçimde bir $x_1 \in Tx_0$ vardır. Bu durumda $(x_0,x_1) \in I_r$ olduğu için (4.2.7) eşitsizliğinden

$$d(x_1,Tx_1) \leq r\varphi\big(d(x_0,x_1)\big)$$

sağlanır. Bezer biçimde $x_1 \in X$ için

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{r}} d(x,Tx)$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu durumda $(x_1,x_2) \in I_r$ olduğu için (4.2.7) eşitsizliğinden

$$d(x_2,Tx_2) \leq r\varphi\big(d(x_1,x_2)\big)$$

sağlanır. Benzer şekilde devam edilerek her ∈ ℕ için $x_n \in Tx_{n-1}$ olmak üzere

$$d(x_{n-1},x_n) \leq \tfrac{1}{\sqrt{r}} d(x_{n-1},Tx_{n-1}) \text{ ve } d(x_n,Tx_n) \leq r\varphi(d(x_{n-1},x_n) \tag{4.2.8}$$

olacak biçimde $O(T,x_0)$ yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} = x_n$ ise o zaman x_{n-1}, T`nin sabit noktası olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} \neq x_n$ olsun. (4.2.8) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{r}} d(x_n, Tx_n) \leq \sqrt{r}\varphi(d(x_{n-1}, x_n)) < \varphi(d(x_{n-1}, x_n))$$

olup φ `nin azalmayan özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \varphi(d(x_{n-1}, x_n)) \\ &\leq \varphi^2(d(x_{n-2}, n_{n-1})) \\ &\dots \\ &\leq \varphi^n(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$m > n$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \varphi^n(d(x_0, x_1)) + \varphi^{n+1}(d(x_0, x_1)) + \cdots + \varphi^{m-1}(d(x_0, x_1)) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(d(x_0, x_1)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ olduğundan Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, n \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1) < \epsilon$$

olacak biçimde yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır. Bu ise (i)`yi kanıtlar.

(ii) için önce $x' \in Tx'$ olduğunu varsayalım. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olan $O(T, x_0)$`daki her $\{x_n\}$ dizisi için

$$0 = F(x') = d(x', Tx') \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} \inf F(x_n)$$

olacağından F, x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı süreklidir.

Tersine Eğer F, x' noktasında x_0`a göre $T$-yörüngesel alttan yarı sürekli olması ,(i)`den $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olduğundan

$$F(x') = d(x', Tx') \leq \lim_{n\to\infty} \inf F(x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, Tx_n)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur. Bu durumda $F(z) = 0 = d(x', Tx')$ bulunur. Tx' , X`in kapalı bir alt kümesi olduğunda $x' \in Tx'$ dir.

4.2.3 Örnek: $X = [0, \infty)$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: X \to C(X)$, her $x \in X$ için $T(x) = [0, \frac{x}{16}]$ ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, her $t \in [0, \infty)$ için $\varphi(t) = \frac{4}{5}t$ olarak tanımlansın. $r = \frac{9}{16}$ alındığında her $(x, y) \in I_{\frac{9}{16}} = \{(x, y) : x \in [0\infty),\ y \in [0, \frac{x}{16})\ \}$ için

$$d(y, Ty) = \frac{15y}{16} \leq \frac{15x}{256} \leq \frac{9}{16}\frac{4}{5}|x - y| = r\varphi(d(x, y))$$

olup Teorem 4.2.3`ün tüm koşulları sağlanır. Bu durumda $x' = 0$, $T$`nin bir sabit noktasıdır ve her $x \in X$ için $O(T, x)$- yörüngesinde $\{\frac{x}{16^n}\}$ dizisi $x' = 0$ noktasına yakınsar.

4.2.4 Teorem: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to K(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$,

i) azalmayan

ii) her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x,y) = d(x,Tx) \text{ ve } d(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y)) \tag{4.2.8}$$

olacak biçimde $y \in Tx$ var olsun. O zaman

i) Her bir $x_0 \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde $O(T,x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi ve bir $x' \in X$ vardır

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

Kanıt: Herhangi bir $x \in X$ için Tx kompakt olduğundan

$$I = \{y \in Tx : d(x,y) = d(x,Tx)\} \neq \emptyset$$

dir. Herhangi bir $x_0 \in X$ alındığında (4.2.8) eşitsizliğinden

$$d(x_0,x_1) = d(x_0,Tx_0) \text{ ve } d(x_1,Tx_1) \leq \varphi(d(x_0,x_1))$$

olacak biçimde bir $x_1 \in Tx_0$ vardır. Yine (4.2.8)`den

$$d(x_1,x_2) = d(x_1,Tx_1) \text{ ve } d(x_2,Tx_2) \leq \varphi(d(x_1,x_2)) \text{ ve}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer biçimde devam ederek her $\in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n-1},x_n) = d(x_{n-1},Tx_{n-1}) \text{ ve } d(x_n,Tx_n) \leq \varphi(d(x_{n-1},x_n) \tag{4.2.9}$$

olacak biçimde $O(T,x_0)$ yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulur. (4.2.9) `den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(x_n,Tx_n) \leq \varphi(d(x_{n-1},x_n)$$

olacağından , φ`nin azalmayan özelliğinden

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \varphi(d(x_{n-1},x_n))$$

$$\leq \varphi^2(d(x_{n-2},n_{n-1})$$

…

$$\leq \varphi^n(d(x_0,x_1)$$

elde edilir.

$m > n$ olsun.

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \varphi^n(d(x_0, x_1)) + \varphi^{n+1}(d(x_0, x_1)) + \cdots + \varphi^{m-1}(d(x_0, x_1))$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(d(x_0, x_1)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1))$$

elde edilir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ olduğundan her $m, n \geq N$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1) < \epsilon$$

olacak biçimde yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu verir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Dolayısı ile (i) kanıtlanmış olur.

(ii) ise Teorem 4.2.2`deki gibi benzer biçimde kanıtlanır.

Teorem 4.2.4 `de $0 \leq r < 1$ olmak üzere $\varphi(t) = rt$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

4.2.5 Sonuç: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to K(X)$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. $0 \leq r < 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(x, y) = d(x, Tx) \text{ ve } d(y, Ty) \leq rd(x, y)$$

olacak biçimde $y \in Tx$ var olsun. O zaman

i) Her bir $x_0 \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde $O(T, x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi ve bir $x' \in X$ vardır

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

4.2.6 Örnek: $X = [0, \infty)$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $T: X \to K(X)$, her $x \in X$ için $T(x) = [0, \frac{x}{4}]$ ve $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, her $t \in [0, \infty)$ için $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ olarak tanımlansın. Her $x \in X$ için $y = \frac{x}{4} \in T(x) = [0, \frac{x}{4}]$ alındığında

$$d(x, y) = d\left(x, \frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4} = d\left(x, \left[0, \frac{x}{4}\right]\right) = d(x, Tx)$$

ve

$$d(y, Ty) = d\left(\frac{x}{4}, \left[0, \frac{x}{16}\right]\right) = \frac{3x}{16} \leq \frac{3x}{8} = \varphi(d\left(x, \frac{x}{4}\right)) = \varphi(d(x, y))$$

sağlandığından Teorem 4.2.4 ün tüm koşulları sağlanır. Bu durumda $x' = 0$, T`nin bir sabit noktası olup her $x \in X$ için $O(T, x)$ yörüngesinde $\{\frac{x}{4^n}\}$ dizisi $x' = 0$ noktasına yakınsar.

4.3 CARISTI TİPİNDEKİ ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

4.3.1 Teorem: (X, d) bir metrik uzay ve bir $T: X \to C(X)$ çoğul değerli dönüşümü ile $\varphi: X \to [0, \infty)$ dönüşümü verilsin. $\alpha: [0, \infty) \to [0,1)$ olmak üzere her $x \in O(T, x_0)$ ve her $y \in Tx$ için

$$d(y, Ty) \leq \alpha(d(x, y))(\varphi(x) - \varphi(y)) \qquad (4.3.1)$$

koşulunu sağlayacak ve (X, d), $O(T, x_0)$- yörüngesel tam olacak biçimde bir $x_0 \in X$ var olsun. O zaman:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x' \in X$ olacak biçimde $O(T, x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

Kanıt: Eğer (4.3.1)`de $\varphi(x) = \varphi(y)$ ise $y$, $T$`nin sabit noktası olur. Her $x \in O(T, x_0)$ ve $y \in Tx$ için $\varphi(x) \neq \varphi(y)$olsun.

$Tx_0 \neq \emptyset$ olduğundan $x_1 \in Tx_0$ olacak biçimde bir $x_1 \in X$ vardır. Eğer $x_0 = x_1$ ise x_0 T `nin bir sabit noktası olur.

$x_0 \neq x_1$ olsun. $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_o, x_1))}}$ alındığında Önteorem 2.1.9`dan

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_o, x_1))}} d(x_1, Tx_1)$$

olacak biçimde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer biçimde devam edildiğinde $O(T, x_0)$ içinde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_{n-1}, x_n))}} d(x_n, Tx_n) \qquad (4.3.2)$$

koşulunu sağlayan $n = 1,2,3 \ldots$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ disizi oluşturulur.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} = x_n$ ise x_{n-1}, T `nin sabit noktası olur. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} \neq x_n$ olsun.

(4.3.1) eşitsizliği kullanıldığında (4.3.2)`den

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(d(x_{n-1}, x_n))}} d(x_n, Tx_n)$$

$$\leq \sqrt{\alpha\big(d(x_{n-1}, x_n)\big)}(\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n))$$

$$\leq \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)$$

elde edilir.

Böylece her $n = 1,2,3 \ldots$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)$$

bulunur.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]$$

$$= \varphi(x_0) - \varphi(x_1) + \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \cdots + \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)$$

$$\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_n)$$

$$\leq \varphi(x_0)$$

olup bu ise $\{S_n\}$ dizisinin $\mathbb{R}$`de üstten sınırlı bir dizi olduğunu gösterir. Ayrıca $\{S_n\}$ dizisi azalmayan olduğundan yakınsak bir dizidir.

$m > n$ alınırsa, d `nin üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}x_m) = \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1})$$

dir. $\{S_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \infty$$

olup herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı için $m > n > N$ olmak üzere

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=N}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmasını verir. (X, d), (T, x_0)-yörüngesel tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır. Böylece (i) kanıtlanmış olur.

(ii) ise Teorem 4.2.2`deki gibi benzer biçimde kanıtlanır.

4.3.2 Sonuç: (X,d) bir metrik uzay ve bir $T: X \to CB(X)$ çoğul değerli dönüşüm olsun. $0 \leq r < 1$ olmak üzere her $x \in O(T,x_0)$ ve her $y \in Tx$ için

$$\delta(Tx,Ty) \leq rd(x,y) \tag{4.3.3}$$

koşulunu sağlayacak ve (X,d), $O(T,x_0)$- yörüngesel tam olacak biçimde bir $x_0 \in X$ var olsun. O zaman:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x' \in X$ olacak biçimde $O(T,x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

Kanıt: (4.3.3) eşitsizliğinden her $x \in O(T,x_0)$ ve her $y \in Tx$ için

$$\delta(Tx,Ty) \leq rd(x,y)$$

olup, buradan

$$\delta(Tx,Ty) - r\delta(Tx,Ty) \leq rd(x,y) - r\delta(Tx,Ty)$$

olur. $y \in Tx$ olduğundan

$$\delta(Tx,Ty)[1-r] \leq r\delta(x,Tx) - r\delta(y,Ty)$$

ve

$$\delta(Tx,Ty) \leq \frac{1}{1-r}[r\delta(x,Tx) - r\delta(y,Ty)]$$

bulunur. Teorem 4.3.1`de $\varphi(x) = \frac{\delta(x,Tx)}{1-r}$ ve $\alpha(t) = r$ $(0 \leq r < 1)$ sabit alınırsa $d(y,Ty) \leq \delta(Tx,Ty)$ olduğundan

$$d(y,Ty) \leq r[\varphi(x) - \varphi(y)]$$

bulunur. Böylece Teorem 4.3.1 `den istenen elde edilmiş olur.

4.3.3 Örnek: $T:[0,1] \to [0,1]$, her $x \in X$ için $Tx = [0, \frac{x}{2}]$ olsun.$\varphi: X \to [0,\infty)$ her $x \in X$ için $\varphi(x) = 2x$ ve $\alpha:[0,\infty) \to [0,1)$ her $t \in [0,\infty)$ için $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ olsun.. Her $y \in Tx = [0, \frac{x}{2}]$ için

$$d(y,Ty) = \frac{y}{2} \leq x - y = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(y))$$

dir. Ayrıca her $x \in X$ için

$$F(x) = d(x,Tx) = d(x, \left[0, \frac{x}{2}\right]) = \frac{x}{2}$$

olduğundan $F(x)$ süreklidir. Böylece Teorem 4.3.1`in tüm koşulları sağlanıp $0 \in T(0) = \{0\}$ dir. Ayrıca her $x \in X$ için $O(T,x)$ yörüngesinde $\{\frac{x}{2^n}\}$ dizisi 0 noktasına yakınsar.

4.3.4 Teorem: (X,d) bir metrik uzay ve bir $T: X \to C(X)$ çoğul değerli dönüşümü ile $\varphi: X \to [0,\infty)$ dönüşümü verilsin. Her $x \in O(T,x_0)$ `a karşılık

$$d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \tag{4.3.4}$$

koşulunu sağlayan bir $y \in Tx$ ve (X,d), $O(T,x_0)$- yörüngesel tam olacak biçimde bir $x_0 \in X$ var olsun. O zaman:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x' \in X$ olacak biçimde $O(T,x_0)$-yörüngesinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

ii) $x' \in Tx'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında x_0`a göre T-yörüngesel alttan yarı sürekli olmasıdır.

iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n,x') \leq \varphi(x_n)$ dir.

iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n,x_0) \leq \varphi(x_0)$ ve $d(x',x_0) \leq \varphi(x_0)$ dir.

Kanıt: (4.3.4) eşitsizliğinden

$$d(x_0, x_1) \leq \varphi(x_0) - \varphi(x_1)$$

olacak biçimde bir $x_1 \in Tx_0$ vardır. $x_1 \in O(T, x_0)$ olacağından yine (4.3.4) eşitsizliğinden

$$d(x_1, x_2) \leq \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer biçimde devam edildiğinde $n = 1, 2, 3 \ldots$ için $x_n \in Tx_{n-1}$ olacak biçimde

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)$$

eşitsizliğini sağlayan $O(T, x_0)$`da bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} d(x_i, x_{i+1})$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]$$

$$\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_{n+1})$$

$$\leq \varphi(x_0)$$

olup bu ise $\{S_n\}$ dizisinin $\mathbb{R}$`de üstten sınırlı bir dizi olduğunu gösterir. Ayrıca $\{S_n\}$ dizisi azalmayan olduğundan yakınsak bir dizidir.

$m > n$ alınırsa d `nin üçgen eşitsizliği özelliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \qquad (4.3.5)$$

dir. $\{S_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{i=0}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \infty$$

dir. Herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı için $m > n \geq N$ olmak üzere

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=N}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmasını verir. (X, d), (T, x_0)-yörüngesel tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır.

Böylece (i) kanıtlanmış olur.

(ii) ise Teorem 4.2.2`deki gibi benzer biçimde kanıtlanır.

(iii) (4.3.5) ve (4.3.4) eşitsizliklerinden

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]$$

$$= \varphi(x_n) - \varphi(x_m) \leq \varphi(x_n)$$

olduğundan $m \to \infty$ için limite geçildiğinde

$$d(x_n, x') \leq \varphi(x_n)$$

elde edilir.

(iv) d`nin üçgen eşitsizliği özelliği ve(4.3.4) eşitsizliği kullanıldığında

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})]$$

$$\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_n)$$

$$\leq \varphi(x_0)$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limite geçildiğinde

$$d(x', x_0) \leq \varphi(x_0)$$

elde edilir.

4.3.5 Sonuç: (X,d) tam metrik uzay, $T: X \to CB(X)$ ve $0 < k < 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\delta(T^2x, Tx) \leq k\delta(Tx, x) \tag{4.3.6}$$

koşulunu sağlayan çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $x' \in Tx'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ var olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonunun x' noktasında alttan yarı sürekli olmasıdır.

Kanıt: $\varphi(x) = \frac{\delta(x,Tx)}{1-k}$ olsun. Her $x \in X$ için $Tx \neq \emptyset$ olduğundan $Ty \subset T^2x$ olacak biçimde bir $y \in Tx$ vardır.

$\delta(Ty, y) \leq \delta(T^2x, Tx)$ olduğundan (4.3.6) eşitsizliğinden $\delta(Ty, y) \leq k\delta(Tx, x)$ bulunur. Eşitsizliğin her iki yanı -1 ile çarpılarak

$$-k\delta(Tx, x) \leq -\delta(Ty, y)$$

elde edilir. Buradan

$$\delta(Tx, x) - k\delta(Tx, x) \leq \delta(Tx, x) - \delta(Ty, y)$$

elde edilir. Böylece

$$(1-k)\delta(Tx, x) \leq \delta(Tx, x) - \delta(Ty, y)$$

ve buradan

$$\delta(Tx, x) \leq \frac{1}{(1-k)}\delta(Tx, x) - \frac{1}{(1-k)}\delta(Ty, y)$$

bulunur. $\varphi(x) = \frac{\delta(x,Tx)}{1-k}$ alındığında

$$\delta(Tx, x) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

bulunur. $d(x, y) \leq \delta(Tx, x)$ olduğundan

$$d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

olup Teorem 4.3.4 den $x' \in Tx'$ olacak biçimde bir $x' \in X$ vardır.

4.3.6 Örnek: $T: [0,1] \to [0,1]$, her $x \in X$ için $Tx = [0, \frac{x}{5}]$ olsun. $\varphi: X \to [0,\infty)$ her $x \in X$ için $\varphi(x) = 2x$ olsun. $y \in Tx = [0, \frac{x}{5}]$ için $x \geq y$ olduğundan

$$d(x,y) = x - y \leq 2(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

olduğundan T dönüşümü teoremde verilen (4.3.4) eşitsizliğini sağlar. Ayrıca her $x \in X$ için

$$F(x) = d(x,Tx) = d(x, \left[0, \frac{X}{5}\right]) = \frac{4x}{5}$$

olduğundan $F(x)$ süreklidir. Ayrıca $0 \in T(0) = \{0\}$ olup 0 T dönüşümünün sabit noktasıdır.

KAYNAKLAR

[1] **Agarwal ,R. P., O'Regan, D., Sahu ,D.R.,** 2009**,** *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications,* Springer

[2] **Aubin, J. P., Frankowska, H.,** 1990, *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser

[3] ***Banach, S.,*** 1922, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3, 133–181

[4] **Berinde, V.,** 2007, *Iterative Approximation of Fixed Points,* Springer

[5] **Boyd, D. W. and Wong, J. S.,** 1969, *On nonlinear contractions,* Proc. Amer. Math. Soc. 20 458-469.

[6] **Brouwer, L. E. J.,** 1912, *Uber Abbildung* der *Mannigfaltigkeiten,* Math. Ann.,71, 97-115

[7] **Bryant, V.W.,** *1968,* A *remark* on a *fixed point* theorem for *iterated mappings,* Amer. Math. Monthly ,*75 , 399-400*

[8] **Caristi, J.,** 1976, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardnes condition,* Trans. Amer. Math. Soc., 215, 241-251

[9] **Ćirić, Lj. B.,** 1972, *Fixed points for generalized multi-valued contractions,* Mat. Vesnik, 9, 265–272

[10] **Ćirić, Lj. B.,** 1974, *A Generalization of Banach's Contraction Principle,* Proc. Amer. Math. Soc. ,45 , 267-273

[11] **Dube, L. S.,** 1975, *A Theorem on Common Fixed Points of multivalued Mappings,* Annal. Soc. Sci Bruxells, 84(4), 463 -468

[12] ***Eldestein, M.,*** 1962, *On fixed and periodic points under contractive mappings,* J. London Math., 37, 74-79

[13] **Fisher, B.,** 1981, *Common Fixed Points of mappings and Set-Valued Mappings*, Rostock. Math. Kolloq., 18, 69-77

[14] **Fisher, B.,** 1981, *Set-Valued Mappings on Metric Spaces*, Fundamenta Mathematicae, 112, 141-145

[15] **Gòrniewicz, L.,** 2006,*Topological Fixed Point Theoryof Multivalued Mappings*, Springer

[16] **Hardy, G. E. and Rogers T. D.,** 1973, *A generalization of Fixed-point Theorem of Reich*, Canad. Math. Bull., 16, 201-206

[17] **Kamran,T.,** 2009, *Mizoguchi-Takahashi's type fixed point theorem*, Computers & Mathematics with Applications , 57, 507-511

[18] **Karayılan, H., Telci, M.**, 2010**,** *Common Fixed Point of Two Maps in Complete G-Metric Spaces* , "Vasile Alecsandri" University of Bacau Faculty of Sciences Scientific Studies and Research Series Mathematic and Informatics Vol.20 , No. 2, 39-48

[19] **Meir, A., Keeler, E.**, 1969, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl. 28, 326–329.

[20] **Mizoguchi N., Takahashi W.,** 1989, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric space*, J. Math. Anal. Appl., 141, 177-188.

[21] **Nadler, S. B. Jr**., 1969, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 , 2, 475 – 488

[22] **Rakotch, E.,** 1962, *.A Note on Contractive Mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 459-465

[23] **Reich, S.,** 1971, *Some remarks on concerning contractive mappings*, Canad. Math. Bull. ,14, 121-124

[24] **Reich S.,** 1972, *Fixed points of contractive functions*, Boll. Unione Mat. Ital., 4 , 26-42

[25] Rhoades, B. E., 1977, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226,257-290

[26] Schauder, J., 1930, *Der Fixpunktsatz in Functional rÄumen*, Studia Math., 2, 171-180

[27] Tarski, A., 1955, *A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and Its Applications*, Pacific J. Math., 5, 285-309

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Emirhan HACIOĞLU

Doğum Yeri **:** Erzurum

Doğum Tarihi **:** 1986

EĞİTİM ve AKADEMİK DURUM :

İlköğretim **:** Tacirler Eğitim Vakfı İlköğretim Okulu

Lise **:** Babaeski Lisesi

Lisans **:** Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Yabancı dil **:** İngilizce

İŞ TECRÜBESİ :

Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım